Apuntes Probabilidad

Hugo Del Castillo Mola

17 de febrero de 2023

Índice general

Parte I

Probabilidad

Capítulo 1

Eventos y sus Probabilidades

1.1. Eventos como conjuntos

Definición 1.1 (Espacio Muestral). *El conjunto de todos los resultados posibles de un experimente se llama Espacio Muestral y se denota Ω.*

Observación. *Un espacio muestral es discreto si sus elementos pueden ponerse en correspondencia con $\mathbb{N}$.*

Observación. *Un espacio muestral es continuo si su cardinal es el cardinal de* $[0, 1]$.

Definición 1.2 (Suceso). *Se denomina suceso a cualquier subconjunto del espacio muestral Ω.*

Definición 1.3 (Operaciones). *Algunas de las operaciones más usadas en el cálculo de probabilidades son:*

(I) *(Complementario)* $A^c = \{\omega : \omega \in \Omega, \omega \notin A\}$

(II) *(Unión)* $A \cup B = \{\omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$

(III) *(Intersección)* $A \cap B = \{\omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}$

(IV) *(Diferencia)* $A \setminus B = \{\omega : \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$

(V) *(Conjuntos disjuntos)* $A \cap B = \emptyset$

Observación. *De lo anterior se puden deducir varias identidades,*

$$\Omega^c = \emptyset$$

$$\Omega \cup A = \Omega$$
$$A \cup A^c = \Omega$$
$$A \setminus B = A \cap B^c$$

son algunas de las más comunes.

Definición 1.4 (Partición). *Sea* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ *tal que* $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ *y* $\bigcup_{i=1}^{k} = \Omega$. *Entonces,* $\{A_i : 1 \leq i \leq k\}$ *es una partición de* Ω.

Observación. *El conjunto de todas las particiones de* Ω *se denota* $\mathcal{P}(\Omega)$.

Proposición 1.1 (Leyes de De Morgan). *Dados dos conjuntos* A, B *se tiene que:*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Para subconjuntos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$,

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i)^c$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i)^c$$

Definición 1.5 (Límite Inferior). *Sea* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$,

$$\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

es el límite inferior de $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Observación. *El límite inferior es el conjunto de puntos* $\omega \in \Omega$ *que pertenecen a todo* A_n *excepto, a lo sumo, una cantidad finita de estos.*

Definición 1.6 (Límite Superior). *Sea* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$,

$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

es el límite superior de $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Observación. *El límite superior es el conjunto de puntos $\omega \in \Omega$ que pertenecen a una cantidad infinita de conjuntos A_n.*

Proposición 1.2. *Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.*

Demostración. *Sea* $\omega \in \liminf A_n \Rightarrow \omega \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \omega \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \omega \in A_n, \forall n \geq k \Rightarrow \omega \in \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n, \forall n \geq k \Rightarrow \omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow \omega \in \limsup A_n$.

Definición 1.7 (Sucesión Convergente)**.** *La sucesión $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es convergente si y solo si*

$$\liminf A_n = \limsup A_n$$

y se denota $\lim_{n\to\infty} A_n$.

Definición 1.8 (Sucesión monótona)**.** *La sucesión $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es monótona creciente (resp. decreciente) si $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene $A_n \subset A_{n+1}$ (resp. $A_{n+1} \subset A_n$.*

Proposición 1.3. *(Propiedades sucesiones monótonas)*
Una sucesión monótona $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ verifica:

(I) *Si $\{A_n\} \uparrow$, entonces* $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

(II) *Si $\{A_n\} \downarrow$, entonces* $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Donde $\{A_n\} \uparrow$ y $\{A_n\} \downarrow$ denotan sucesión monótona creciente y decreciente respectivamente.

Demostración. *(i) Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión monótona creciente,* $\{A_n\} \uparrow \Rightarrow A_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

(I) $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{k} A_n \subset \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

(II) $\Rightarrow \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = A_k$

Entonces, si $\omega \in \limsup A_n \Rightarrow \omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. *Si* $\omega \in \liminf A_n \Rightarrow \omega \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Demostración. *(ii) Sea* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una sucesión monótona decreciente,* $\{A_n\} \downarrow \Rightarrow A_{n+1} \subset A_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

(I) $\Rightarrow \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

(II) $\Rightarrow \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = A_k$

Entonces, si $\omega \in \limsup A_n \Rightarrow \omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. *Si* $\omega \in \liminf A_n \Rightarrow \omega \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.

Ejercicio 1 (1.- 1.5 Manual de ejrcicios)**.**

Definición 1.9 (Álgebra)**.** *Una famila* $\mathcal{F}$ *de subconjuntos de* Ω*, es decir,* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *se dice que tiene estructura de álgebra si verifica:*

(I) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(II) $\Omega \in \mathcal{F}$

(III) $\forall A \in \mathcal{F}, A^c \in \mathcal{F}$

(IV) $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \cup B \in \mathcal{F}$

Observación. *La unión numerable de conjuntos del álgebra no está necesariamente contenida en esta.*

Definición 1.10 (σ-Álgebra)**.** *Una famila* $\mathcal{F}$ *de subconjuntos de* Ω*, es decir,* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *se dice que tiene estructura de* σ*-álgebra si verifica:*

(I) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(II) $\Omega \in \mathcal{F}$

(III) $\forall A \in \mathcal{F}, A^c \in \mathcal{F}$

(IV) $\forall \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \mathcal{F}$

Observación. *Todo* σ*-álgebra es un álgebra.*

Ejercicio 2 (2.1 Manual de ejercicios). *Sean Ω un espacio muestral y $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ un $\sigma-$álgebra. Para $A \in \mathcal{F}$ fijado se define*

$$\mathcal{F}_A = \{B \subset \Omega : B = A \cap C \text{ con } C \in \mathcal{F}\}$$

Demostrar que $\mathcal{F}_A$ es $\sigma-$álgebra.

Solución.

Ejercicio 3 (2.9 Manual de ejercicios).

Ejercicio 4 (2.10 Manual de ejercicios).

Ejercicio 5 (2.11 Manual de ejercicios).

1.2. Probabilidades

Definición 1.11 (Medida de probabilidad). *Una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ en $(\Omega, \mathcal{F})$ es una función $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ que satisface:*

(I) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

(II) $\mathbb{P}(A) \geq 0$

(III) $\forall \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$ *tal que* $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Llamamos probabilidad del suceso A al valor $\mathbb{P}(A)$.

Ejercicio 6 (2.6 Manual de ejercicios).

Ejercicio 7 (2.7 Manual de ejercicios).

Definición 1.12 (Espacio de probabilidad)**.** *La terna* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *se denomina espacio de probabilidad.*

Proposición 1.4. *(Propiedades de la función de probabilidad)*

(I) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

(II) $\forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) \leq 1$

(III) $\forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

(IV) $\forall A, B \in \mathcal{F} : A \subset B, \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$

(V) $\forall A, B \in \mathcal{F} : A \subset B, \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

(VI) $\forall \{A_i : 1 \leq i \leq n\} \subset \mathcal{F}$ *tal que* $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

(VII) $\forall \{A_1, ..., A_n\} \subset \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_1<i_2}^{n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_1<i_2}^{n} \sum_{i_2<i_3}^{n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - ... + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n)$$

(VIII) $\forall \{A_1, ..., A_n\} \subset \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

(IX) $\forall \{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

(x) $\forall\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)^c$$

Demostración. *(i)*
Sea $A \in \mathcal{F}$, y sea la sucesión $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $A_1 = A$ y $A_i = \emptyset, \forall i \neq 1$. Como, $\bigcup_{i=1}^{\infty} = A$ y $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$. Entonces, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A) + \sum_{i=2}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A) + \sum_{i=2}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Demostración. *(ii)*
Sustituyendo $B = \Omega$ en el apartado (iv), se tiene que $\mathbb{P}(A) \leq 1$

Demostración. *(iii)*
$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A^c \cup A) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) \Rightarrow \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Demostración. *(iv) Sea $A \subset B$, $B = A \cup (B \setminus A) \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$, donde $\mathbb{P}(B \setminus A) \geq 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.*

Demostración. *(vi)*
Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$ y sea $B_i = A_i, \forall i \leq n$, $B_i = \emptyset, \forall i > n$. Entonces,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

Demostración. *(ix)*
Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$ y sea $B_1 = A_i, B_n = A_n \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i^c\right), \forall n \geq 2$. LA sucesión $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Entonces,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i)$$

Como $B_n \subset A_n \Rightarrow \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$ *se tiene que*

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Ejercicio 8 (Cuestión 1, Examen Febrero 2021)**.**

Ejercicio 9 (Cuestión 1, Examen Enero 2019)**.**

Teorema 1.1 (Límite de probabilidad, sucesión monótona)**.** *Sea* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$ *una sucesión monótona. Entonces* $\exists \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$ *y*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\big(\lim_{n\to\infty} A_n\big)$$

Demostración. *Supongamos que* $\{A_n\} \uparrow, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. *La expresión de* A *como unión de conjuntos disjuntos es* $A = A_1 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_{n+1} - A_n)$ *entonces,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_{k+1} - A_k) \\ = \mathbb{P}(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_{k+1}) - \mathbb{P}(A_k) \\ = \mathbb{P}(A_1) + \lim_{n\to\infty} \big(\mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(A_1)\big) \\ = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)\end{aligned}$$

Ejercicio 10 (2.2 Manual de ejercicios)**.**

Ejercicio 11 (2.4 Manual de ejercicios)**.**

Teorema 1.2 (Límite de probabilidad, sucesión convergente). *Sea* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$ *una sucesión convergente. Entonces* $\exists \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$ *y*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\big(\lim_{n\to\infty} A_n\big)$$

1.3. Probabilidad Condicionada. Independencia de Sucesos

Definición 1.13 (Probabilidad condicionada). *Si* $\mathbb{P}(B) > 0$ *entonces la probabilidad condicionada de que suceda* A *dado que* B *sucede, es*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Teorema 1.3 (de Probabilidad Total). *Sea* $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$ *disjuntos dos a dos, tal que* $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega,\ \mathbb{P}(B_i) > 0, \forall i$. *Entonces,*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i)$$

Ejercicio 12 (Teoría 1, Examen 2017-2018 Segunda Convocatoria).

Ejercicio 13 (2.11 Manual de ejercicios).

Ejercicio 14 (2.22 Manual de ejercicios).

Demostración. *Es posible representar* $A \in \mathcal{F}$ *como* $A = A\cap\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap B_i)$ *con* $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset, \forall i \neq j$. *Entonces*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i)$$

Teorema 1.4 (de Bayes). *Sea* $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$ *disjuntos dos a dos, tal que* $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega,\ \mathbb{P}(B_i) > 0, \forall i$ *y* $\mathbb{P}(A) > 0$. *Entonces,*

$$P(B_n|A) = \frac{\mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A|B_n)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i)}$$

Demostración. *Dado que* $\mathbb{P}(A) > 0$ *se tiene*

$$P(B_n|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B_n)}{\mathbb{P}(A)}$$

donde $\mathbb{P}(A \cap B_n) = \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A|B_n)$ *y como* $\mathbb{P}(B_i) > 0, \forall i$, *aplicando el teorema de probabilidad total se tiene que*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i)$$

y por tanto,

$$P(B_n|A) = \frac{\mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A|B_n)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i)}$$

Ejercicio 15 (Problema 1, Examen Febrero 2021).

Ejercicio 16 (Problema 1, Examen Septiembre 2020).

Ejercicio 17 (Cuestión 4, Examen Enero 2020).

Ejercicio 18 (Problema 1, Examen Enero 2019).

Ejercicio 19 (Problema 1, Examen 2017-2018 Primera Convocatoria).

Ejercicio 20 (Problema 1, Examen 2016-2017 Convocatoria de Septiembre).

Ejercicio 21 (2.15 Manual de ejercicios).

Ejercicio 22 (2.16 Manual de ejercicios).

Definición 1.14 (Independencia). *Dos sucesos A y B son independientes si y solo si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.*

1.4. Combinatoria

Definición 1.15 (Permutaciones). *Las permutaciones de n elementos son las posibles formas de ordenar un conjunto de n elementos distintos.*

$$P^n = n!$$

(I) *Entran todos los elementos*

(II) *No improta el orden*

(III) *No se repiten elementos*

Ejemplo. *¿Cuátos números de cuatro cifras pueden escribirse con los dígitos 2,3,5,8 sin usar la misma cifra más de una vez? $P^4 = 4! = 24$.*

Definición 1.16 (Permutaciones con repetición). *Las permutaciones con repeticiónson las posibles formas en las que n elementos se pueden clasificar en k grupos idénticos*

$$^nP_k = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

(I) *Entran todos los elementos*

(II) *No improta el orden*

(III) *Se repiten elementos*

Ejemplo. *Contabilizar de cuántas maneras se pueden repartir cinco bebidas. 3 cafés (sólo, cortado y con leche) y 2 cervezas de marcas distintas* $(5! = 120)$. *Si los cafes son idénticos,* $5!/3! = 20$.

Definición 1.17 (Variaciones). *Las variaciones de* n *elementos tomados de* r *en* r *son las diferentes formas ordenadas en las que* r *elementos distintos se pueden extraer de un conjunto de* n *elementos, siendo* $n \geq r$,

$$V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

(I) *No entran todos los elementos*

(II) *Improta el orden*

(III) *No se repiten elementos*

Ejemplo. *En una carrera con 6 atletas, ¿de cuántas formas distintas podrían repartirse las medallas de oro y plata?* $V_6^2 = 6!/4! = 30$.

Definición 1.18 (Variaciones con repetición). *Las variaciones con repetición de* n *elementos tomados de* r *en* r *son las diferentes formas ordenadas en las que* r *elementos no necesariamente distintos se pueden extraer de un conjunto de* n *elementos, siendo* $n \geq r$,

$$V_n^r = n^r$$

(I) *No entran todos los elementos*

(II) *Improta el orden*

(III) *Se repiten elementos*

Ejemplo. *¿Cuántos números distintos de 3 cifras se pueden escribir usando solamente las cifras 1,2,5 y 8?* $VR_4^3 = 4^3 = 64$.

Definición 1.19 (Combinaciones). *Las combinaciones de* n *elementos tomados de r en r son las posibles formas no ordenadas en las que* r *elemntos distintos se pueden extraer de un conjunto de* n *elementos con* $n \geq r$,

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

(I) *No entran todos los elementos*

(II) *No improta el orden*

(III) *No se repiten elementos*

Ejercicio 23 (2.17 Manual de ejercicios)**.**

Ejercicio 24 (2.19 Manual de ejercicios)**.**

Ejemplo. *En una reunión de 8 personas se debe formar un grupo con dos participantes. Se pueden formar* $C_8^2 = 8!/2!6! = 28$ *grupos distintos.*

Definición 1.20 (Combinaciones con repetición)**.** *Las combinaciones con repetición de n elementos tomados de r en r son las posibles formas no ordenadas en las que* r *elementos no necesariamente distintos se pueden extraer de un conjunto de* n *elementos con* $n \geq r$*,*

$$CR_n^r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

(I) *No entran todos los elementos*

(II) *No improta el orden*

(III) *Se repiten elementos*

Ejemplo. *Un banco ofrece un regalo a elegir entre 5 posibles regalos por cada cartilla. Un señor tiene tres cartillas en dicho banco ¿de cuántas formas puede elegir el lote de tres obsequios si no le importa repetir regalos? El resultado es* $CR_5^3 = C_7^3 = 7!/3!5! = 35$*.*

Capítulo 2

Variables Aleatorias Unidimensionales

2.1. Variables aleatorias unidimensionales y su función de distribución

Definición 2.1 (Variable aleatoria). *Una variable aleatoria es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ con la propiedad de que*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \forall x \in R$$

Esta función se dice que es $\mathcal{F}-$medible.

Observación. *Toda variable aleatoria tiene una función de distribución.*

Observación. *Las variables aleatorias pueden definir distintos tipos de eventos,*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\},$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\},$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) > x\},$$

$$\{\omega \in \Omega : x_1 < X(\omega) \leq x_2\}.$$

Definición 2.2 (Función de distribución). *La función de distribución de una variable aleatoria es una función $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ dada por $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$*

Proposición 2.1 (Propiedades función de distribución)**.** *Se pueden deducir varias propiedades de $F(x)$ apartir su definición:*

(I) $0 \leq F(x) \leq 1$

(II) $x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$

(III) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

(IV) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

(V) $\lim_{x\to a^+} F(x) = F(a)$

Observación. *A partir de la definición de función de probabilidad podemos calcular otras probabilidades:*

$$\begin{gathered}
\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a), \\
\mathbb{P}(X > a) = 1 - F(a), \\
\mathbb{P}(X < b) = F(b^-), \\
\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(X = a) + F(b) - F(a), \\
\mathbb{P}(a < X < b) = F(b) - F(a) - \mathbb{P}(X = a), \\
\mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(X = a) + F(b) - F(a) - \mathbb{P}(X = a)
\end{gathered}$$

2.2. Variables aleatorias unidimensionales discretas y continuas

Definición 2.3 (Variable aleatoria discreta)**.** *La variable aleatoria X es discreta si toma valores en un subconjunto numerable o finito $\{x_1, x_2, ...\} \subset \mathbb{R}$. La variable aleatoria discreta tiene función de masa $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ dada por $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$.*

Proposición 2.2 (Propiedades de la función de masa)**.** *A partir de la función de masa se deducen las siguientes propiedades:*

(I) $0 \leq f(x_k) \leq 1$

(II) $f(x) = 0, \forall x \notin \{x_1, x_2, ...\}$

(III) $\sum_k f(x_k) = 1$

La función de distribución $F(x)$ de una variable aleatoria discreta X se obtiene de

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_k < x} f(x_k)$$

Observación. $f(x) = \mathbb{P}(X = x) = F(x) - \lim_{y \to x^-} F(y)$

Definición 2.4 (Variable aleatoria continua)**.** *La variable aleatoria X es continua si su función de distribución puede ser expresada como*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du, x \in \mathbb{R}$$

para alguna función integrable $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ llamada función de densidad de X.

Proposición 2.3 (Propiedades de la función de densidad)**.** *Sea*

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

la función de densidad de una variable continua X, se deducen las siguientes propiedades:

(I) $f(x) \geq 0$

(II) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

(III) $f(x)$ *es continua a trozos*

(IV) $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

La función de distribución $F(x)$ de una variable aleatoria continua se obtiene de

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi$$

Definición 2.5 (Variable aleatoria mixta)**.** *La variable aleatoria X es mixta si su función de distribución puede ser expresada como*

$$F(x) = \lambda F_1(x) + (1 - \lambda)F_2(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

donde F_1 es una función de distribución discreta y F_2 es una función de distribución continua y $\lambda \in [0, 1]$.

Observación. *Sea X una v.a. con función de distribución F. Si X toma valores en un rango continuo pero $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$ entonces, X es una v.a. mixta y F se pude expresar como la suma de una función de distribución discreta y una función de distribución continua.*

Ejercicio 25 (Problemas 2.a , Examen Septiembre 2020)**.**

Ejercicio 26 (3.7 , Manual de ejercicios)**.**

Ejercicio 27 (3.8 , Manual de ejercicios)**.**

Ejercicio 28 (3.11 , Manual de ejercicios)**.**

Ejercicio 29 (3.15.a , Manual de ejercicios)**.**

2.3. Transformaciones

Definición 2.6 (Transformaciones discretas)**.** *Si X es una variable aleatoria discreta con función de masa $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$, entoces $Y = g(X)$ es una variable transformada donde*

$$f_y(y) = \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(g(X) = y) = \sum_{y \in R_y} \mathbb{P}(X = g^{-1}(y))$$

Definición 2.7 (Transformaciones continuas)**.** *Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f_X(x)$. Entonces, $Y = g(X)$ es una variable transformada donde*

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \geq y) = \mathbb{P}(g(X) \geq y) = \mathbb{P}(g(X) \in (-\infty, y]) =$$

$$= \mathbb{P}(X \in g^{-1}((-\infty, y])) = \int_{g^{-1}((-\infty,y]))} f_X(x)dx$$

Observación (Determinación de función de densidad de una variable transformada)**.** *Se diferencian dos casos:*

(I) *Si $y = g(x)$ es una función inyectiva y existe g^{-1}, entonces la función de densidad viene dada por*

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{d(g^{-1}(y))}{dy}\right|$$

(II) *Si $y = g(x)$ no es inyectiva, entonces la función de densidad viene dada por*

$$f_Y(y) = \sum_k \frac{f_X(x_k)}{|g'(x_k)|}$$

donde x_k son las raices de $y = g(x)$.

Ejercicio 30 (Problema 2, Examen Febrero 2021)**.**

Ejercicio 31 (Cuestión 3, Examen Septiembre 2020)**.**

Ejercicio 32 (Problema 1.b, Examen Enero 2020)**.**

Ejercicio 33 (3.10 , Manual de ejercicios)**.**

Ejercicio 34 (3.12 , Manual de ejercicios)**.**

Ejercicio 35 (3.14 , Manual de ejercicios)**.**

Ejercicio 36 (3.17 , Manual de ejercicios)**.**

Ejercicio 37 (1, Sección 3.8, Gimmet).

Ejercicio 38 (3, Sección 3.8, Gimmet).

2.4. Esperanza y Varianza de una variable aleatoria

Definición 2.8 (Esperanza). *La esperanza de una variable aleatoria X, denotada $\mathbb{E}(X)$, se define como*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_k x_k f(x_k), \text{ para } X \text{ discreta},$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \text{ para } X \text{ continua}$$

Observación. *Sea X una v.a. mixta con función de distribución $F(x) = \lambda F_1(x) + (1-\lambda)F_2(x)$ entonces, $\mathbb{E}(X) = \lambda \sum_k x_k f(x_k) + (1-\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$.*

Teorema 2.1 (Propiedades esperanza). *La esperanza tiene las siguientes propiedades:*

(I) $X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leq 0$

(II) $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ *donde* $a, b \in \mathbb{R}$

(III) *Si $g(x)$ es convexa, entonces $\mathbb{E}(g(X)) \geq g(\mathbb{E}(X))$ (Desigualdad de Jensen)*

Definición 2.9 (Momento de orden n). *El momento de orden n de una variable aleatoria X se define como*

$$\mathbb{E}(X^n) = \sum_k (x_k)^n f(x_k), \text{ para } X \text{ discreta},$$

$$\mathbb{E}(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx, \text{ para } X \text{ continua}$$

Definición 2.10 (Varianza). *La varianza de una variable aleatoria X, denotada $Var(X)$, se define como*

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$$
$$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Definición 2.11 (Mediana). *La mediana de una variable aleatoria X, denotada M_d, se define como*

$$F(M_d) = \frac{1}{2},$$

donde $F(M_d)$ es el valor de la función de distribución de X en el punto M_d.

Ejercicio 39 (Problema 2.b, Examen Septiembre 2020).

Ejercicio 40 (Cuestión 2, Examen Enero 2020).

Ejercicio 41 (Problema 1.a, Examen Enero 2020).

Ejercicio 42 (Teoría 2, Examen 2017-2018, Segunda Convovatoria).

Ejercicio 43 (3.15.b-c , Manual de ejercicios).

Ejercicio 44 (3.16 , Manual de ejercicios).

2.5. Desigualdad de Chebyshev

El estudio de la probabilidad de una variable aleatoria en el intervalo $(\mathbb{E}(X)-\epsilon, \mathbb{E}(X)+\epsilon)$ puede resultar ser complicado. En este caso, se calcula una cota de esta probabilidad y viene dada por la desigualda de Chevyshev.

Teorema 2.2 (Desigualdad de Markov)**.** *Sea* X *una variable aleatoria y* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *no negativa. Entonces,*

$$\mathbb{P}(g(X)) > k) \leq \frac{\mathbb{E}(g(X)}{k}, k > 0$$

Demostración. *La variable aleatoria* X *tiene función de distribución continua. Por tanto,*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(X)) &= \int_{R_x} g(x)f(x)dx \\ &\geq \int_{g(X)>k} g(x)f(x)dx \\ &\geq k \int_{g(X)>k} f(x)dx \\ &= k(\mathbb{P}(g(X) > k))\end{aligned}$$

donde R_x *es el soporte de la variable aleatoria* X*.*

Teorema 2.3 (Desigualdad de Chevyshev)**.** *Se* X *una variable aleatoria con* $\mathbb{E}(X) < \infty$, $Var(X) < \infty$*. Entonces, si* $k > 0$*, se tiene que*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > \sigma k) \leq \frac{1}{k^2}$$

Demostración. *Se deduce tomando* $g(X) = (X - \mathbb{E}(X))^2$ *en la desigualda de Markov. Donde,*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)|) > \sigma k) = \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2) > \sigma^2 k^2) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 k^2} = \frac{1}{k^2}$$

Ejercicio 45 (Cuestión 1, Examen Enero 2020)**.**

Ejercicio 46 (Teoría 2, Examen 2017-2018, Segunda Convovatoria)**.**

Ejercicio 47 (2.38 , Schaum).

Ejercicio 48 (2.39 , Schaum).

2.6. Función generatriz

Definición 2.12 (Función generatriz). *Sea X una variable aleatoria discreta con función de masa $f(x)$. La función generatriz de X se define como*

$$G(z) = \mathbb{E}(z^X) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x) z^x$$

donde z es una variable.

Observación. $|G(z)| \leq \sum_{x=0}^{\infty} |f(x)||z^x| \leq \sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$ *para* $|z| < 1$.

Proposición 2.4 (Propiedades de la función genratriz). *Derivando la función genratriz se obtiene,*

$$G^{(n)}(z) = \sum_{x=n}^{\infty} \binom{x}{n} n! f(x) z^{x-n}$$

lo que da lugar a las siguientes propiedades:

(I) $f(0) = \mathbb{P}(X = 0) = G(0)$

(II) $f(n) = \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n!} G^{(n)}(0)$

(III) $\mathbb{E}(X) = G'(1)$

(IV) $\mathbb{E}(X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1)) = G^{(n)}(1)$

(V) *Si* $Y = X_1 + \cdots + X_n$, $G_Y(z) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(z)$ *(Variables multidimensionales)*

2.7. Función generatriz de momentos

Definición 2.13 (Función generatriz de momentos). *Sea X una variable aleatoria, la función generatriz de momentos se define como $M(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$ donde*

$$\sum e^{tx} f(x) \text{ si } X \text{ es discreta}$$

$$M(t) = \int e^{tx} f(x) dx \text{ si } X \text{ es continua}$$

Proposición 2.5 (Propiedades función generatriz de momentos). *Llevando acobo el desarrollo de Taylor de la funcion generatriz de momentos $M(t)$ se tiene que,*

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X^k)}{k!} t^k$$

donde $M^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$.

Ejercicio 49 (3.18 , Manual de ejercicios).

2.8. Función Característica

Definición 2.14 (Función característica). *Sea X una variable aleatoria, la función característica de X se define como $\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ donde*

$$\varphi(t) = \sum e^{itx} f(x) \text{ si } X \text{ es discreta}$$

$$\varphi(t) = \int e^{itx} f(x) dx \text{ si } X \text{ es continua}$$

Además, la función característica satisface:

(I) $\varphi(0) = 1, \varphi(t) \leq 1, \forall t$

(II) $\varphi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k)$

(III) *Si $Y = aX + b$ entonces $\varphi_Y(t) = e^{itb}\varphi(at)$*

Teorema 2.4 (de inversión). *Sea X una variable aleatoria y $\varphi(t)$ su función característica, entonces*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-itx}\varphi(t)dt$$

Ejercicio 50 (3.19 , Manual de ejercicios).

Ejercicio 51 (3.21 , Manual de ejercicios).

Ejercicio 52 (Teoría 3, Examen 2017-2018, Segunda Convovatoria).

2.9. Distribuciones discretas

Definición 2.15 (Bernoulli). *La distribución de Bernoulli es la distribución Binomial con $n = 1$. Se denota $B(1, p)$ y sus medidas son:*

(I) *Función de masa*

$$f(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ 1 - p = q & x = 0 \end{cases}$$

(II) *Esperanza*

$$\mathbb{E}(X) = p$$

(III) *Varianza*

$$Var(X) = pq$$

(IV) *Función característica*

$$\varphi(t) = pe^{it} + q$$

(V) *Función de distribución*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Definición 2.16 (Binomial)**.** *La distribución binomial contabiliza el número de exitos acumulado en n repeticiones. Se denota $B(n,p)$ y sus medidas son:*

(I) *Función de masa*

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x \in \{0, 1, ..., n\}$$

(II) *Esperanza*

$$\mathbb{E}(X) = np$$

(III) *Varianza*

$$Var(X) = npq$$

(IV) *Función característica*

$$\varphi(t) = (pe^{it} + q)^n$$

(V) *Función de distribución*

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Ejercicio 53 (2.15 , Schaum)**.**

Ejercicio 54 (2.30 , Schaum)**.**

Definición 2.17 (Geométrica)**.** *La distribución geométrica contabiliza el número de fracasos hasta el primer exito. Se denota $G(p)$ y sus medidas son:*

(I) *Función de masa*

$$f(x) = (1-p)^{x-1}p, x \in \{1, 2, ...\}$$

(II) *Esperanza*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$

(III) *Varianza*

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

(IV) *Función característica*

$$\varphi(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$$

(V) *Función de distribución*

$$F(x) = 1-(1-p)^x$$

Ejercicio 55 (2.16 , Schaum)**.**

Ejercicio 56 (2.29 , Schaum)**.**

Definición 2.18 (Binomial Negativa)**.** *La distribución bimnomial negativa contabiliza el número de fracasos en los primeros* n *exitos. Se denota* $BN(n,p)$ *y sus medidas son:*

(I) *Función de masa*

$$f(x) = \binom{n+x-1}{x} p^n (1-p)^x, x \in \{0, 1, 2, ...\}$$

(II) *Esperanza*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n(1-p)}{p}$$

(III) *Varianza*

$$Var(X) = \frac{n(1-p)}{p^2}$$

(IV) *Función característica*

$$\varphi(t) = \big(\frac{p}{1-(1-p)e^{it}}\big)^n$$

Ejercicio 57 (2.18 , Schaum)**.**

Definición 2.19 (Hipergeométrica)**.** *La distribución hipergeométrica contabiliza el número de bolas blancas n extraidas de una urna con N bolas de las cuales D son blancas. Se denota $H(N, D, n)$ y sus medidas son:*

(I) *Función de masa*

$$f(x) = \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

(II) *Esperanza*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{nD}{N}$$

(III) *Varianza*

$$Var(X) = ?$$

(IV) *Función característica*

$$\varphi(t) = ?$$

Definición 2.20 (Poisson)**.** *Se dice que la variable aleatoria X sigue una distribución de poisson, denotada $P(\lambda)$ si:*

(I) *Función de masa*

$$f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, x \in \{0, 1, 2, ...\}$$

(II) *Esperanza*

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

(III) *Varianza*

$$Var(X) = \lambda$$

(IV) *Función característica*

$$\varphi(t) = e^{-\lambda(1-e^{it})}$$

(V) *Función de distribución*

$$F(x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Ejercicio 58 (2.19 , Schaum)**.**

Ejercicio 59 (2.31 , Schaum)**.**

Teorema 2.5 (Convergencia hipergeométrica a binomial)**.** *Sea X una variable aleatoria que sige una distribución hipergeométrica $H(N, Np, n)$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{Np}{x}\binom{N(1-p)}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x \in \{0, 1, ..., n\}$$

Teorema 2.6 (Convergencia binomial poisson)**.** *Sea X una variable aleatoria que sige una distribución binomial $B(n, p)$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, x \in \{0, 1, ..., n\}$$

Ejercicio 60 (Teoría 4, Examen 2017-2018, Segunda Convovatoria)**.**

Ejercicio 61 (2.43 , Schaum)**.**

2.10. Distribuciones continuas

Definición 2.21 (Uniforme). *Se dice que la variable aleatoria X sigue una distribución de uniforme, denotada $U(a,b)$ si:*

(I) *Función de masa*

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

(II) *Esperanza*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

(III) *Varianza*

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

(IV) *Función característica*

$$\varphi(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

(V) *Función de distribución*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

Ejercicio 62 (2.34 , Schaum).

Definición 2.22 (Normal). *Se dice que la variable aleatoria X sigue una distribución de Normal, denotada $N(\mu, \sigma^2)$ si:*

(I) *Función de densidad*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

(II) *Esperanza*

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$

(III) *Varianza*

$$Var(X) = \sigma^2$$

(IV) *Función característica*

$$\varphi(t) = e^{it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

(V) *Función de distribución*

$$F(x) = \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Proposición 2.6 (Propiedades distribución normal)**.** *Sea* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *una variable aleatoria que sigue una distribución normal, se verifica:*

(I) *Si* $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ *entonces* $Z \sim N(0,1)$

(II) *Si* $Y = aX + b$ *entonces* $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

Ejercicio 63 (2.23 , Schaum)**.**

Ejercicio 64 (2.24 , Schaum)**.**

Ejercicio 65 (2.51 , Schaum)**.**

Definición 2.23 (Exponencial)**.** *Se dice que la variable aleatoria* X *sigue una distribución de exponencial, denotada* $Exp(\lambda)$ *si:*

(I) *Función de densidad*

$$f(x) = \lambda^{-\lambda x}$$

(II) *Esperanza*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$$

(III) *Varianza*

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

(IV) *Función característica*

$$\varphi(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1}$$

(V) *Función de distribución*

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \leq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Ejercicio 66 (2.35 , Schaum)**.**

Definición 2.24 (Gamma)**.** *Se dice que la variable aleatoria X sigue una distribución de gamma, denotada $Gamma(a, p)$ si:*

(I) *Función de densidad*

$$f(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} e^{-ax} x^{p-1}$$

donde

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx$$

(II) *Esperanza*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{p}{a}$$

(III) *Varianza*

$$Var(X) = \frac{p}{a^2}$$

(IV) *Función característica*

$$\varphi(t) = \left(1 - \frac{it}{a}\right)^{-p}$$

Observación. *Si $X \sim Exp(\lambda)$ entonces $X \sim Gamma(a = \lambda, p = 1)$*

Observación. *La distribución X_n^2 se define como una distribución Gamma$(a = \frac{1}{2}, p = \frac{n}{2})$*

Ejercicio 67 (2.26 , Schaum).

Ejercicio 68 (Cuestión 3, Examen Febrero 2021).

Capítulo 3

Variables Aleatoria Multidimensionales

3.1. Variables aleatorias multidimensionales y su función de distribución

Definición 3.1 (Variable aleatoria bidimensional)**.** *Sean X, Y dos v.a. Entonces al par (X, Y) se le llama v.a bidimensional.*

Definición 3.2 (Función de distribución conjunta)**.** *A la función de distribución de una v.a bidimensinal (X, Y) se le llama función de distribución conjunta y es la función definida por*

$$F_{XY}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$$

Proposición 3.1 (Propiedades función de distribución conjunta)**.** *La función de distribución F_{XY} de un vector aleatorio (X, Y) tiene las siguentes propiedades:*

(I) $\lim_{x,y\to-\infty} F_{XY}(x, y) = 0, \lim_{x,y\to\infty} F_{XY}(x, y) = 1$

(II) *Si* $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ *entonces* $F_{XY}(x_1, y_1) \leq F_{XY}(x_2, y_2)$

(III) F_{XY} *es continua por la derecha para cada una de sus variables.*

Definición 3.3 (Vector aleatorio). *Sean* $X_1, X_2, ..., X_n$ *v.a. Entonces al vector* $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *se le llama vector aleatorio.*

Definición 3.4 (Función distribución vector aleatorio). *La función de distribución de un vector aleatorio* $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *se define como*

$$F_{X_1 \dots X_n}(x_1, ..., x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n)$$

3.2. Variables aleatorias Multidimensionales discretas y continuas

Definición 3.5 (Variable aleatoria bidimensional discreta). *La v.a bidimensional* (X, Y) *es discreta si toma valores en un subconjunto finito o numerable de* $\mathbb{R}^2$. *La v.a discretas conjuntas* (X, Y) *tienen función de masa* $f : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ *dada por*

$$f(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

Proposición 3.2 (Propiedades función de masa conjunta). *La función de masa conjunta* f_{xy} *de la v.a bidimensional discreta* (X, Y) *verifica:*

(I) $0 \leq f_{XY}(x_i, y_j) \leq 1$

(II) $\sum_{x_i} \sum_{y_j} f_{XY}(x_i, y_j) = 1$

(III) $F_{XY}(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f_{XY}(x_i, y_j)$

Definición 3.6 (Funciones de masa marginales). *Las funciones de masa marginales de la v.a bidimensional discreta* (X, Y) *se definen como*

$$f_X(x) = \sum_{y_j} f_{XY}(x_i, y_j)$$

$$f_Y(y) = \sum_{x_i} f_{XY}(x_i, y_j)$$

Proposición 3.3 (Independencia de variables aleatorias bidimensionales discretas). *Si las v.a discretas X, Y son independientes, entonces la función de masa conjunta viene dada por*

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

donde f_X, f_Y son las funciones de masa marginales.

Definición 3.7 (Función de masa condicionada). *Si (X,Y) es una v.a bidimensional discreta con función de masa conjunta f_{XY}, entonces la función de masa condicionada de Y dado $X = x$ se define como*

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

similarmente

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Definición 3.8 (Variable aleatoria bidimensional continua). *Las v.a X, Y son continuas si su función de distribución conjunta viene dad por*

$$F_{XY}(x,y) = \int_{u=-\infty}^{x} \int_{v=-\infty}^{y} f(u,v)dudv$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$, para alguna función integrable $f : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ llamada función de densidad conjunta del par (X,Y).

Proposición 3.4 (Propiedades función de densidad conjunta). *La función de densidad conjunta f_{XY} de la v.a bidimensional continua (X,Y) verifica:*

(I) $f_{XY}(x,y) \geq 0$

(II) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$

(III) f_{XY} *es continua $\forall x, y$ excepto, quizas un subconjunto finito.*

(IV) $\mathbb{P}(a < X \leq b, c < Y \leq d) = \int_{c}^{c} \int_{a}^{b} f(x,y)dxdy$

Definición 3.9 (Funciones de densidad marginales)**.** *Las funciones de masa marginales de la v.a bidimensional continua (X, Y) se definen como*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dx$$

Proposición 3.5 (Independencia de variables aleatorias bidimensionales continuas)**.** *Si las v.a continuas X, Y son independientes, entonces la función de densidad conjunta viene dada por*

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

donde f_X, f_Y son las funciones de densidad marginales.

Definición 3.10 (Función de densidad condicionada)**.** *Si (X, Y) es una v.a bidimensional continua con función de densidad conjunta f_{XY}, entonces la función de densidad condicionada de Y dado $X = x$ se define como*

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)}$$

similarmente

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Ejercicio 69 (Problema 3.a-b, Examen Febrero 2021)**.**

Ejercicio 70 (Problema 3, Examen Septiembre 2020)**.**

Ejercicio 71 (Problema 2.a-b, Examen Enero 2020)**.**

Ejercicio 72 (Problema 2.a, Examen Enero 2019).

Ejercicio 73 (Problema 2, Segunda Convocatoria 2017-2018).

Ejercicio 74 (4.5, Manual de ejercicios).

Ejercicio 75 (4.9, Manual de ejercicios).

3.3. Transformaciones

Teorema 3.1. *Si* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *y* $T : A \to B$ *donde* $T(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ *entonces*

$$\int\int_A g(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int\int_B g(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2))|J(y_1, y_2)| dy_1 dy_2$$

donde

$$J(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

Corolario 3.1.1. *Si* X_1, X_2 *tienen función de densidad conjunta* f*, entonces el par* Y_1, Y_2 *dado por la trnasformación* $(Y_1, Y_2) = T(X_1, X_2)$ *tiene función de densidad*

$$f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) = f(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2))|J(y_1, y_2)|$$

si (y_1, y_2) *está en el rango de* T*.*

Ejercicio 76 (Cuestión 4, Examen Febrero 2021).

Ejercicio 77 (Problema 2.c, Examen Enero 2020).

Ejercicio 78 (Problema 2.b-c, Examen Enero 2019).

Ejercicio 79 (Problema 1, Segunda Convocatoria 2017-2018).

Ejercicio 80 (4.13, Manual de ejercicios).

Ejercicio 81 (4.15, Manual de ejercicios).

Ejercicio 82 (4.16, Manual de ejercicios).

Ejercicio 83 (4.17, Manual de ejercicios).

Ejercicio 84 (4.18, Manual de ejercicios).

Ejercicio 85 (4.19, Manual de ejercicios).

3.4. Esperanza y Varianza de variables aleatorias multidimensionales

Definición 3.11 (Momento de orden (k,n)). *Sea (X, Y) una v.a. bidimensional. El momento de orden (k,n) de (X, Y) se define como*

$$m_{kn} = \mathbb{E}(X^k Y^n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_y \sum_x x^k y^n f(x,y) & \text{caso discreto} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^n f(x,y)dxdy & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Definición 3.12 (Esperanza)**.** *Sea (X, Y) una v.a. bidimensional. La esperanza de (X, Y) se define como el momento de orden $(1, 1)$*

$$m_{11} = \mathbb{E}(XY) = \begin{cases} \displaystyle\sum_y \sum_x xyf(x, y) & \textit{caso discreto} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)dxdy & \textit{caso continuo} \end{cases}$$

Observación. *Si $(k = 1, n = 0)$, se tiene $m_{10} = \mathbb{E}(X)$ y si $(k = 0, n = 1)$, se tiene $m_{01} = \mathbb{E}(Y)$*

Definición 3.13 (Esperanza condicionada)**.** *Sea (X, Y) una v.a. bidimensional. Entonces, la espranza de Y condicionada por $X = x$ se define como*

$$\mathbb{E}(Y|x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_y yf_{Y|X}(y|x) & \textit{caso discreto} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} yf_{Y|X}(y|x)dy & \textit{caso continuo} \end{cases}$$

Similarmente, la espranza de X condicionada por $Y = y$ se define como

$$\mathbb{E}(X|y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_y xf_{X|Y}(x|y) & \textit{caso discreto} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf_{X|Y}(x|y)dy & \textit{caso continuo} \end{cases}$$

Definición 3.14 (Varianza)**.** *Sea (X, Y) una v.a. bidimensional. La varianza de X se define como*

$$Var(X) = m_{20} - m_{10}^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

y la varianza de Y como

$$Var(Y) = m_{02} - m_{01}^2 = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$$

Definición 3.15 (Varianza condicionada)**.** *Sea (X, Y) una v.a. bidimensional. Entonces, la varianza de Y condicionada por $X = x$ se define como*

$$Var(Y|x) = \mathbb{E}(Y^2|x) - [\mathbb{E}(Y|x)]^2$$

Similarmente, la varianza de X condicionada por $Y = y$ se define como

$$Var(X|y) = \mathbb{E}(X^2|y) - [\mathbb{E}(X|y)]^2$$

Definición 3.16 (Covarianza)**.** *Sea (X, Y) una v.a. bidimensional. La covarianza de (X, Y) se define como*

$$Cov(X, Y) = \sigma_{XY} = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Observación. *Si $Cov(X, Y) = 0$ decimos que X e Y son incorreladas.*

Definición 3.17 (Coeficiente de correlación)**.** *Sea (X, Y) una v.a. bidimensional. El coeficiente de correlación de (X, Y) se define como*

$$p_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Observación. $|p_{XY}| \leq 1$

Observación. *El coeficiente de correlación es una medida de dependencia lineal.*

Proposición 3.6. *Sea (X, Y) v.a. bidimensiona. Si X e Y son independientes, entonces, el coeficiente de correlación $\rho = 0$.*

Definición 3.18 (Curva de regresión)**.** *Sea (X, Y) una v.a. bidimensional. La curva de regresión de Y sobre X se define como*

$$y = \mathbb{E}(Y|x)$$

Similarmente, la curva de regresión de X sobre Y se define como

$$x = \mathbb{E}(X|y)$$

Definición 3.19 (Recta de regresión)**.** *Sea (X, Y) una v.a. bidimensional. La recta de regresión de Y sobre X se define como*

$$y = \mathbb{E}(Y) - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}(x - \mathbb{E}(X))$$

Similarmente, la recta de regresión de X sobre Y se define como

$$x = \mathbb{E}(X) - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}(y - \mathbb{E}(Y))$$

3.5. Función Característica

Definición 3.20 (Función característica)**.** *Sea (X, Y) una v.a. bidimensional. La función característica de (X, Y) se define como $\varphi(t, u) = \mathbb{E}[e^{i(tX_1+uX_2)}]$ donde*

$$\varphi(t, u) = \sum e^{i(tx_1+ux_2)} f(x_1, x_2) \text{ caso discreto}$$

$$\varphi(t, u) = \int e^{i(tx_1+ux_2)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \text{ caso continuo}$$

Observación. *Si X_1, X_2 son independientes entonces, $\varphi_{X_1,X_2}(t, u) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(u)$. Si X_1, X_2 son independientes entonces, $\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)$.*

Ejercicio 86 (Cuestión 4, Examen Febrero 2021)**.**

Ejercicio 87 (4.11, Manual de ejercicios)**.**

3.6. Distribuciones Notables

Definición 3.21 (Multinomial)**.** *La distribución multinomial es una extensión de la distribución binomial. Un experimento sigue una distribución multinomial con parámetros $p_1, ..., p_k$ si:*

(I) *El experimento tiene k sucesos disjuntos dos a dos $A_1, ..., A_k$.*

(II) $\mathbb{P}(A_i) = p_i, i = 1, ..., k$ *y* $\sum_{i=1}^k p_i = 1$.

Sea X_i la v.a. que denota el número de repeticiones que resultan en A_i. Entonces $(X_1, ..., X_k)$ es una distribución multinomial con parámetros $(n, p_1, ..., p_k)$ y su **función de masa** *biene dada por*

$$f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_n!} p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k}$$

y su **función característica** *viene dada por*

$$\varphi(t_1, ..., t_k) = (p_1 e^{it_1} + \cdots + p_k e^{it_k})^n$$

Observación. *Cuando $k = 2$ la multinomial se reduce a binomial.*

Observación. *Las distribuciones marginales son binomiales.*

Definición 3.22 (Normal bidimensional)**.** *La v.a. bidimesional (X, Y) sigue una distribución normal bidimensional si su función de densidad conjunta viene dada por*

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y(1-p^2)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}q(x,y)}$$

donde

$$q(x, y) = \frac{1}{1-p^2}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2p\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]$$

Definición 3.23 (Normal multivariante)**.** *El vector aleatorio $(X_1, ..., X_n)$ sigue una distribución normal multivariante si su función de densidad conjunta viene dada por*

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\det(K)|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T K^{-1}(x-\mu)}$$

donde $X = (X_1, ..., X_n), x = (x_1, ..., x_n), \mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$ y K es la matriz de covarianzas.

Capítulo 4

Convergencia

4.1. Convergencia de variables aleatorias

Definición 4.1 (Covergencia casi seguro)**.** *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de v.a. Se dice que* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge casi seguro a* X *si*

$$\mathbb{P}\bigg(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\bigg)$$

es decir, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge casi seguro a* X *si y solo si*

$$\forall\epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\bigg(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \epsilon\}\bigg) = 0$$

equivalentemente

$$\forall\epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\bigg(\bigcap_{n}^{\infty}\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \epsilon\}\bigg) = 1$$

Observación. *Si* $\forall\epsilon > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_m - X| > \epsilon)$ *es convergente, entonces* $X_n \to X$ *casi seguro.*

Definición 4.2 (Covergencia en probabilidad)**.** *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de v.a. Se dice que* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en probabilidad a* X *si y solo si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \epsilon\} = 0$$

equivalentemente

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \epsilon\} = 1$$

Observación. *Si* $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ *entonces* $X_n \xrightarrow{prob.} X$.

Observación (Condición suficiente)**.** *Si* $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} a, Var(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *entonces,* $X_n \xrightarrow{prob.} X$

Definición 4.3 (Covergencia en media cuadrática)**.** *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de v.a. Se dice que* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en media cuadrática a* X *si verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] = 0$$

Observación. *Si* $X_n \xrightarrow{m.c.} X$ *entonces* $X_n \xrightarrow{prob.} X$.

Definición 4.4 (Covergencia en ley)**.** *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de v.a. Se dice que* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en ley a* X *si y solo si*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Observación. *Si* $X_n \xrightarrow{prob,} X$ *entonces* $X_n \xrightarrow{L} X$.

Observación. *Si* $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ *entonces* $X_n \xrightarrow{L} X$.

4.2. Leyes de los grandes números

Definición 4.5 (Ley débil de los grandes números)**.** *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de v.a. Se dice que* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *obedece la ley débil de los grande números si existe una sucesión de constantes* $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\{B_n\} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ *con* $\{B_n\} \to \infty$ *y* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *que verifican*

$$\frac{S_n - A_n}{B_n} \xrightarrow{prob.} 0$$

donde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Teorema 4.1 (Ley débil de Chebychev). *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de v.a. independientes con* $Var(X_n) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$. *Entonces,* X_n *obedece la ley débil de los grande números con* $B_n = n$ *y* $A_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$*, es decir,*

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{prob.} 0$$

donde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Teorema 4.2 (Ley débil de Khintchine). *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de v.a. independientes identicamente distribuidas con* $\mathbb{E}(X_n) = \mu$. *Entonces,*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{prob.} \mu$$

es decir,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} X_i \xrightarrow{prob.} \mu$$

donde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Definición 4.6 (Ley fuerte de los grandes números). *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de v.a. Se dice que* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *obedece la ley fuerte de los grande números si existe una sucesión de constantes* $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\{B_n\} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ *con* $\{B_n\} \to \infty$ *y* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *que verifican*

$$\frac{S_n - A_n}{B_n} \xrightarrow{c.s.} 0$$

donde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Teorema 4.3 (Ley fuerte de Khintchine). *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de v.a. independientes identicamente distribuidas con* $\mathbb{E}(X_n) = \mu$. *Entonces,*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{c.s.} \mu$$

es decir,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} X_i \xrightarrow{c.s.} \mu$$

donde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

4.3. Teorema del Límite Central

Teorema 4.4 (del límite central)**.** *Sea* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *una sucesión de v.a. independientes identicamente distribuidas con* $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ *y* $Var(X_n) = \sigma^2$. *Entonces,*

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{ley} \mathcal{N}(0,1)$$

donde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.