# Ejercicios Geometría Diferencial

Hugo Del Castillo Mola

19 de octubre de 2022

# Índice general

# Capítulo 1

# Curvas

**Ejercicio 1.1** (25)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular $\mathcal{C}^\infty$. Demuestra que la recta tangente en cada punto $\alpha(s_0)$ es límite de rectas secantes, es decir, el límite de las rectas que pasan por $\alpha(s_1)$ y $\alpha(s_2)$ cuando $s_1$ y $s_2$ tienden a $s_0$.*

**Solución** (25)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular $\mathcal{C}^\infty$, $s_0, s_1, s_2 \in I : s_1 < s_0 < s_2$. Entonces,*

$$S \equiv \alpha(s_2) - \alpha(s_1)$$

*es la recta secante que pasa por $s_1$ y $s_2$. Si $s_i \to s_0$, $i \in \{1, 2\}$ entonces, $s_1 = s_0 - h_1 \xrightarrow{h_1 \to 0} s_0$ y $s_2 = s_0 + h_2 \xrightarrow{h_2 \to 0} s_0$. Consideramos el vector secante unitario*

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\alpha(s_2) - \alpha(s_1)}{||s_2 - s_1||} \\ &= \frac{\alpha(s_0 + h_2) - \alpha(s_0 - h_1)}{||h_2 + h_1||} \end{aligned}$$

*donde tomando límites*

$$\lim_{h_1, h_2 \to 0} \frac{\alpha(s_0 + h_2) - \alpha(s_0 - h_1)}{||h_2 + h_1||}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h_2 \to 0} \left( \lim_{h_1 \to 0} \frac{\alpha(s_0 + h_2) - \alpha(s_0 - h_1)}{||h_2 + h_1||} \right) \\ &= \lim_{h_2 \to 0} \frac{\alpha(s_0 + h_2) - \alpha(s_0)}{||h_2||} = \alpha'(s_0) \end{aligned}$$

*es el vector tangente unitario en $s_0 \in I$.*

**Ejercicio 1.2** (35). *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva p.p.a., $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ movimiento rígido y $\beta = M \circ \alpha$ curva. Demostrar*

(I) *$M$ conserva la orientación $\Rightarrow k_\beta = k_\alpha$, $\tau_\beta = \tau_\alpha$,*

(II) *$M$ invierte la orientación $\Rightarrow k_\beta = k_\alpha$, $\tau_\beta = -\tau_\alpha$.*

**Solución** (35). *Sea $\beta = (M \circ \alpha)$ donde $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \phi(t) = At + \vec{v}$ es un movimiento rígido con $A$ matriz ortonormal asociada a la isometría y $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.*

*Sea $\alpha$ p.p.a entonces,*

$$||\beta'|| = ||(M \circ \alpha)'|| = ||A\alpha'|| = ||\alpha'|| = 1$$

*$\beta$ es p.p.a.. Esto se debe a que*

$$d_t M = \frac{d}{dt}(At + \vec{v}) = A$$

$$\Rightarrow d_t(M \circ \alpha) = \frac{d}{dt}(A\alpha(t) + \vec{v}) = A\alpha'(t)$$

*y dado que $A$ es ortonormal, es decir, $A^t = A^{-1}$*

$$\Rightarrow ||Ax|| = \sqrt{Ax \cdot Ax} = \sqrt{x \cdot A^t A} = ||x||, \ \forall x \in \mathbb{R}^3$$

*$\Rightarrow A$ conserva la norma.*

*Para la curvatura de $\beta$, que es $k_\beta = ||\beta''||$, tenemos que*

$$k_\beta = ||(M \circ \alpha)''|| = ||(A\alpha + \vec{v})''|| = ||A\alpha''|| = ||\alpha''|| = k_\alpha$$

*dado que $A$ es la matriz asociada a la ismoetría del movimiento rígido $M$, y conserva la norma. Entonces, $k_\beta = k_\alpha \Rightarrow$ la curvatura es invariante por movimiento rígido.*

*Y para la torsión de $\beta$ que es*

$$\tau_\beta = (\beta' \times \beta'') \cdot \beta''' = (A\alpha' \times A\alpha'') \cdot A\alpha'''$$

$$= \det(A) A(\alpha' \times \alpha'') \cdot A\alpha'''$$

$$= \det(A)(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''$$

$$= \det(A)\tau_\alpha$$

$$\pm \det(A)\tau_\alpha$$

*esto se debe a que el producto vectorial bajo transformaciones de matrices obedece* $(Ba) \times (Bb) = (\det(B))(B^{-1})^t(a \times b), B \in \mathcal{M}_{3\times 3}, a, b \in \mathbb{R}^3$. *Luego,* $A$ *es ortogonal por ser la matriz asociada a una isometría linea* $\Rightarrow (A^t)^{-1} = A$. *Y* $\det(A) = \pm 1$ *por ser* $A$ *matriz ortogonal.*

*Por tanto, la torsión de* $\beta$ *es*

$$\tau_\beta = \begin{cases} \tau_\alpha, & \text{si } A \text{ conserva la orientación} \\ -\tau_\alpha, & \text{si } A \text{ invierte la orientación} \end{cases}$$

> **Ejercicio 1.3** (40). *Sea* $\alpha$ *una curva* $C^\infty$ *con* $k(s) > 0$. *Demostrar que el plano osculador en* $\alpha(s)$ *generado por* $T(s), N(s)$ *es el límite de los planos que pasan por las tripletas* $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$ *cuando* $s_i \to s$.

**Solución** (40). *Sea* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *una curva regular p.p.a.,* $s_1, s_2, s_3 \in I : \alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$ *puntos no alineados y* $P(s_1, s_2, s_3)$ *el plano generado por* $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$. *Sea la curva*

$$\phi(s) = \alpha(s) \cdot n(s_1, s_2, s_3), s \in I$$

*donde* $n$ *es el vector unitario perpendicular al plano* $P$. *Como*

$$\alpha(s_i) \in P(s_1, s_2, s_3) \Rightarrow \phi(s_i) = \alpha(s_i) \cdot n(s_1, s_2, s_3) = 0, \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

*entonces, por el teorema del Valor Medio*

$$\exists c_i \in (s_i, s_{i+1}) : \phi'(c_i) = \alpha'(c_i) \cdot n(s_1, s_2, s_3) = 0, \forall i \in \{1, 2\}$$

*Volviendo a aplicar el teorema de Valor Medio*

$$\exists t \in (c_1, c_2) : \phi''(t) = \alpha''(t) \cdot n(s_1, s_2, s_3) = 0$$

*Por tanto,* $n(s_1, s_2, s_3) = \alpha'(c_i) \times \alpha''(t), i \in \{1, 2\}$. *Si* $s_i \to s_0$ *entonces,* $n(s_1, s_2, s_3) \to \vec{n} = n(s_0, s_0, s_0) = \alpha'(s_0) \times \alpha''(s_0) \Rightarrow \vec{n}$ *es normal al plano generado por* $\alpha'$ *y* $\alpha''$, *es decir, el límite de los planos que pasan por las tripletas* $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$ *es el plano osculador, generado por* $T, N$.

# Capítulo 2

# Superficies

> **Ejercicio 2.1** (1). *Halla el plano tangente en cada punto de la esfera de radio 2 en $\mathbb{R}^3$.*

**Solución.** *Sea* $\mathbb{S}^2(r) = \{p \in \mathbb{R}^3 : |p - p_0| \leq r\}$ *con* $p_0 \in \mathbb{R}^3$ *es la esfera de centro* $p_0$ *y radio* $r$.

*Sea* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(p) = |p - p_0|^2$ *y* $r \in f(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}$. *Entonces,* $\forall p \in \mathbb{R}^3 : f(p) = r$ *se tiene que* $(df)_p \neq 0$. *Por tanto,* $r$ *es valor regular de* $f$. *Luego,* $\mathbb{S}^2(r)$ *es superfice. En particular,* $\mathbb{S}^2(2) = f^{-1}(\{2\})$ *es superficie.*

*Ahora, si* $v \in T_p(S)$, *entonces* $\exists \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ *con* $\alpha(0) = p$ *y* $\alpha'(0) = v$. *Por tanto,* $(f \circ \alpha)(t) = r, \forall t \in (-\epsilon, \epsilon) \Rightarrow (df)_p = (f \circ \alpha)'(0) = 0 \Rightarrow v \in \ker(df)_p$. *Como* $T_p(S) \subset \ker(df)_p$ *y ambos son subespacios lineales de dimensión dos, entonces* $T_p(S) = \ker(df)_p$.

> **Ejercicio 2.2** (2). *Sea* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\}$. *Demostrar que*
>
> (I) $S$ *es una superficie*
>
> (II) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $\varphi(u, v) = (u + v, u - v, 4uv)$ *es una parametrización de* $S$ *y dibujar las líneas coordenadas.*

**Solución.**

(I) *Sea* $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por*

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

*La aplicación es diferencible y*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^3\}$$

*es la gráfica de* $f$. *Luego,* $X : U \to S : (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$ *es parametrización de* $S$. *Entonces,* $S$ *es una superficie.*

*(*$\mathrm{II}$*)* $\varphi = X \circ h$ *donde* $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $h(u, v) = (u+v, u-v)$. *Como* $X$ *es parametrización* $\Rightarrow X$ *difeomorfismo y* $h$ *es difeomorfismo, entonces* $\varphi$ *es difeomorfismo con* $\varphi(\mathbb{R}^2) = S \Rightarrow \varphi$ *es parametrización.*