Ecuaciones Diferenciales

Hugo Del Castillo Mola

22 de noviembre de 2022

Índice general

Parte I

Estabilidad y Sistemas Autónomos

Capítulo 1

Estabilidad

1.1. Definiciones

Definición 1.1 (Sistema Autónomo)**.** *Un sistema de ecuaciones diferenciales se dice autónomo si no depende explícitamente de la variable temporal t. Un sistema autónomo es de la forma*

$$= \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Definición 1.2 (Punto de Equilibrio)**.** *Sea el sistema*

$$y'(t) = Ay(t).$$

un sistema lineal autónomo. Se dice que $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio del sistema si $Ax = 0$.

Definición 1.3 (Punto de Equilibrio Hiperbólico)**.** *Un punto de equilibrio es un punto de equilibrio hiperbólico si*

$$\forall \lambda \in \rho(A), \quad \mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$$

Definición 1.4 (Estabilidad). *Sea $\overline{u}$ un punto de equilibrio de $\dot{u} = f(u)$. Se dice que $\overline{u}$ es estable si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \delta(\epsilon) \leq \epsilon, \forall u_0 : ||\overline{u} - u_0|| \leq \lambda$$

entonces, para $\varphi(t, u_0)$ solución se verifica

$$||\varphi(t, u_0) - \overline{u}|| \leq \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Definición 1.5 (Estabilidad Asintótica). *Un punto de equilibrio estable es asintóticamente estable si*

$$\exists \lambda : \lim_{t \to \infty} \varphi(t, u_0) = \overline{u}.$$

1.2. Estabilidad Sistemas Lineales

Nota. *Consideramos el sistema lineal*

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$$

donde $A \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{d \times d})$, $b \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{d \times d})$ y $u \in \mathbb{R}^n$.