Apuntes Probabilidad

Hugo Del Castillo Mola

10 de marzo de 2023

Índice general

Capítulo 1

Espacio de Probabilidad

1.1. Experimentos aleatorios

Definición 1.1 (Experimento Determinista). *Experimeto cuyo desarrolo es previsible con certidumbre y sus resultados están perfectamente determinados una vez fijadas las condiciones del mismo.*

Ejemplo. *Averiguar el espacio recorrido por un cuerpo en caída libre en el vacío al cabo de cierto tiempo t, donde se sabe que $x = \frac{1}{2}gt^2$ con g la gravedad de la Tierra.*

Definición 1.2 (Experimento Aleatorio). *Experimento en contexto de incertidumbre. Se caracterizan porque su desarrolo no ese previsible con certidumbre.*

Ejemplo. *Lanzar un dado.*

1.2. Espacio Muestral

Definición 1.3 (Espacio Muestral). *Dado un experimento aleatorio, Ω es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento. Decimos que Ω es el espacio muestral del experimento y los elementos de Ω se llaman sucesos elementales.*

Ejemplo. *Dado el experiemento "Lanzar un dado y obtener un 6", el espacio muestral es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si consideramos "Lanzar un dado y obtener un número par", el espacio muestral sería $\Omega = \{ \text{ par }, \text{ impar } \}$.*

1.2.1. Tipos de Espacios Muestrales

Definición 1.4 (Espacio Muestral Finito)**.** *Sea Ω un espacio muestral. Entonces, decimos que Ω es finito si tiene un número finito de elementos.*

Ejemplo. *Lanzar un dado.*

Definición 1.5 (Espacio Muestral Infinito Numerable)**.** *Sea Ω un espacio muestral. Entonces, decimos que Ω es infinito numerable si tiene un número infinito y numerable de elementos.*

Ejemplo. *Lanzar una moneda hasta obtener cara por primera vez. Aquí debemos considerar que se puede dar el caso en el que no se obtenga nunca cara y tiremos la moneda infinitas veces.*

Definición 1.6 (Espacio Muestral Continuo)**.** *Sea Ω un espacio muestral. Entonces, decimos que Ω es continuo si no hay discontinuidades o cambios abrutos entre los elementos del espacio muestral.*

Ejemplo. *El nivel del agua de un pantano entre los tiempos t_1, t_2. El espacio muestral $\Omega = \{f_t : t \in [t_1, t_2]\}$.*

1.3. Sucesos

Nota. *Sea $\mathcal{A} \subset \Omega$. Decimos que se ha presentado el suceso $A \subset \mathcal{A}$ si el resultado del experiemento ha sido $w \in A$, un suceso elemental contenido en $\mathcal{A}$.*

1.4. Sucesiones de Conjuntos

Definición 1.7 (Sucesión de Conjuntos)**.** *Sea Ω espacio muestral, $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Omega)$ una aplicación. Decimos que f es una sucesión de conjuntos y la repesentamos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.*

1.5. Límites de una sucesión de conjuntos

Definición 1.8 (Límite Inferior)**.** *Sea Ω espacio muestral, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ sucesión de conjuntos. Entoces, el límite inferior de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es el conjunto de puntos de Ω cuyos elementos pertenecen a todos los A_n excepto a lo* *sumo a un número finito de ellso.* $\liminf A_n$.

Definición 1.9 (Límite Superior). *Sea Ω espacio muestral, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ sucesión de conjuntos. Entoces, el límite superior de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es el conjunto de puntos de Ω cuyos elementos pertenecen a infinitos A_n. Y se denota* $\limsup A_n$.

Observación. $A \in \{A_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow A \in \limsup A_n$ *pero* $A \notin \liminf A_n$

Proposición 1.1. *Sea Ω espacio muestral, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una sucesión de conjuntos. Entonces,*

(I) $\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$,

(II) $\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$.

Demostración.

(I) ($\Rightarrow$) *Sea $w \in \liminf A_n$. Entonces, $\exists k \in \mathbb{N} : w \in A_n, \forall n \geq k$. Por tanto,*

$$w \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

($\Leftarrow$) *Sea $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$. Entonces, $\exists k \in \mathbb{N} : w \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in A_k \cap A_{k+1} \cap \cdots \Rightarrow w$ pertenece a infinitos A_n salvo a lo sumo a un número finito de ellos.*

(II) ($\Rightarrow$) *Sea $w \in \limsup A_n$. Entonces, $w \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}$*

$$\Rightarrow w \in \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n.$$

($\Leftarrow$) *Sea $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$. Entonces, $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in A_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow w \in \limsup A_n$.*

Proposición 1.2. $\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow \liminf A_n \subset \limsup A_n$.

Demostración. *Sea* $w \in \liminf A_n$. *Entonces,* $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : w \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in A_n, \forall n \geq k \Rightarrow w \in \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in \limsup A_n$.

1.5.1. Sucesión de conjuntos convergente

Definición 1.10 (Covergencia)**.** *Sea* Ω *un espacio muestral,* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *una sucesión. Entonces, decimos que* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente si y solo si* $\liminf A_n = \limsup A_n$.

1.5.2. Sucesiones Monótonas

Definición 1.11 (Sucesión Monótona)**.** *Sea* Ω *un espacio muestral,* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *una sucesión. Entonces, decimos que* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona creciente si y solo si* $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$. *Y decimos que* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona decreciente si y solo si* $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$.

Notación.

(I) $\uparrow A_n$ *sucesión monótona creciente,*

(II) $\downarrow A_n$ *sucesión monótona creciente.*

Proposición 1.3. *Sea* Ω *un espacio muestral,* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *una sucesión mononota. Entonces,* $\liminf A_n = \limsup A_n$.

Demostración.

(I) *Sea* $\downarrow A_n$. *Entonces,* $A_{n+1} \subset A_n \Rightarrow$

$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

y

$$\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Por tanto, $\liminf A_n = \limsup A_n$.

(II) *Sea* $\uparrow A_n$. *Entonces,* $A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow$

$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

y

$$\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Por tanto, $\liminf A_n = \limsup A_n$.

1.6. Estructuras con Subconjuntos

1.6.1. Álgebra

Definición 1.12 (Álgebra)**.** *Dado el espacio total* Ω*, una clase* $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *tiene estructura de álgebra si y solo si*

(I) $\Omega, \emptyset \in \mathcal{Q}$,

(II) $\forall A \in \mathcal{Q}, A^c \in \mathcal{Q}$

(III) $\forall A, A' \in \mathcal{Q}, A \cap A' \in \mathcal{Q}$,

Definición 1.13 (σ-Álgebra)**.** *Dado el espacio total* Ω*, una clase* $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *tiene estructura de* σ*-álgebra si y solo si*

(I) $\Omega, \emptyset \in \mathcal{Q}$,

(II) $\forall A \in \mathcal{Q}, A^c \in \mathcal{Q}$

(III) $\forall \{A_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{Q},\ \bigcap_{j\in J} A_j \in \mathcal{Q}$

1.7. Espacio Medibles

Definición 1.14 (Espacio Medible)**.** *Sea* Ω *espacio muestralm* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ σ*-álgebra. Entoces, al par* $(\Omega, \mathcal{A})$ *lo llamamos espacio medible. Los elementos de* $\mathcal{A}$ *se llaman conjuntos medibles.*

1.8. Probabilidad

Definición 1.15 (Medida de Probabilida). *Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ aplicación. Entonces, se dice que P es una medida de probabilidad si cumpe*

(I) $\forall A \in \Omega, P(A) \geq 0$,

(II) $P(\Omega) = 1$,

(III) $\forall \{A_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{A} : A_i \cap A_j = \emptyset, \forall j \neq i \Rightarrow$

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Proposición 1.4 (Propiedades Medida Probabilidad).

(I) $P(\emptyset) = 0$,

(II) *(Aditividad finita)* $\forall \{A_j\}_{j\in J}$ *familia finita con elementos disjuntos dos a dos, entonces*

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k),$$

(III) $\forall A \in \mathcal{A}, P(A^c) = 1 - P(A)$,

(IV) $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \subset B, P(A) \leq P(B)$,

(V) $\forall A \in \mathcal{A}, P(A) \leq 1$,

(VI) $\forall A, B \in \mathcal{A}, P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

(VII) $\forall \{A_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{A}$,

$$P\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_j\big) = \sum_{j=1} P(A_j) - \sum_{j_1, j_1=1, j_1<j_2} P(A_{j_1} \cap A_{j_2}) + \cdots + (-1)^{j+1} P\big(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\big)$$

(VIII) $\forall A, B \in \mathcal{A}, P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$,

(IX) $\forall \{A_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{A}$ *finita*

$$P\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$$

(X) $\forall \{A_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{A}$

$$P\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

(XI) $\forall \{A_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{A}$,

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \geq 1 - \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j^c)$$

Demostración. *(I) Consideramos la sucesión* $\{A, \emptyset, \emptyset, \cdots\}$ *con* $A \in \mathcal{A}$. *Entonces,* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A = A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots = A$. *Por tanto,*

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

$$\Rightarrow P(A) + \sum_{n=2}^{\infty} P(A_n) = P(A)$$

entonces, $P(\emptyset) = 0$.

(II) Se toma la sucesión $\{A_1, \cdots, A_n, \emptyset, \cdots\}$ *donde* $A_j \in \mathcal{A}, \forall j \in J$ *disjuntos dos a dos. Como* $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=1}^{n} A_j$, *entonces*

$$P(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

$$\Rightarrow P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$$

(III) $P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1 \Leftrightarrow P(A) + P(A^c) = 1 \Leftrightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$.

(IV) *Podemos escrbir* $B = A \cup (B \setminus A)$. *Entonces,*

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$$

donde $P(B \setminus A) > 0$,

$$\Rightarrow P(B) \geq P(A)$$

(V) *Sea* $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, *entonce* $A \subset \Omega$. *Por tanto,* $P(A) \geq P(\Omega) = 1$.

(VI)

(VII)

(VIII)

(IX)

(X)

(XI)

(XII)

1.9. Espacio de Probabilidad

Definición 1.16 (Espacio de Probabilidad)**.** *Sea* Ω *espacio muestra,* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ σ*-álgebra,* P *medida de probabilidad. Entonces, a la terna* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *se le llama espacio de probabilidad. Los elementos de* $\mathcal{A}$ *se llaman sucesos.*

1.10. Continuidad Secuencial de la Probabilidad

Teorema 1.1. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad,* $\{A_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{A}, \uparrow A_j$. *Entonces,*

$$P(\lim_{n \to \infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n).$$

Demostración. $A_n \uparrow \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. *Sea A tal que*

$$A = A_1 \cup \left[\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_{j+1} - A_j)\right]$$

entonces, A es unión de conjuntos disjuntos. Aplicado la aditividad finita tenemos que

$$P(A) = P(A_1) + \sum_{j=1}^{\infty}(A_{j+1} - A_j)$$

$$= P(A_1) + \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}(P(A_{j+1}) - P(A_j))$$

$$= \lim_{n\to\infty}\big(P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)+P(A_3)-P(A_2)+\cdots+P(A_{n+1})-P(A_n)\big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Teorema 1.2. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, $\{A_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{A}, \downarrow A_j$. Entonces,*

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Demostración. $A_n \downarrow \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$ *y* $A_n^c \uparrow \Rightarrow$ *(por la proposición anterior)*

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n^c) = \lim_{n\to\infty} P(A_n^c)$$

donde $\lim_{n\to\infty} A_n^c = A^c$.

Ahora,

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - P(\lim_{n\to\infty} A_n^c)$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c)$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty}\big\{1 - P(A_n)\big\}$$

$$= 1 - 1 + \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

1.11. Probabilidad Condicionada

Definición 1.17 (Probabilida Condicionada)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad y se* $A \subset \mathcal{A}$ *un suceso tal que* $P(A) > 0$*. Entonces, decimos que*

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}, P(A) > 0$$

es la probabilidad de B *condiconada por* A*.*

1.11.1. Teorema del producto

Teorema 1.3 (Regla multiplicación)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad,* $A, B\mathcal{A} : P(A), P(B) > 0$*. Entonces,*

$$P(A\cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \text{ y}$$

$$P(A\cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

1.11.2. Teorema de Probabilidad Total

Teorema 1.4 (Probabilidad Total)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *espacio de probabilidad,* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} : A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$*. Entonces, para* $B \in \mathcal{A}$

$$P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j) \cdot P(A_j)$$

donde $P(A_j) > 0, \forall j \in \{1, 2, \cdots\}$

Demostración.

$$P(B) = P(B\cap\Omega)$$
$$= P\Big(B \cap \Big[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big]\Big)$$

$$= P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}(B \cap A_i)\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} B \cap A_i$$

$$= P(B|A_i) \cdot P(A_i), \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Teorema 1.5 (de Bayes)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *espacio de probabilidad,* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ *tal que* $P(A_i) > 0, \forall i \in \mathbb{N}, B \in \mathcal{A} : P(B) > 0$*. Entonces,*

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i)}, i \in \mathbb{N}.$$

Demostración.

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

usando la independencia de sucesos y el teorema de la probaibilidad total tenemos que

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}, i \in \mathbb{N}.$$

1.12. Independencia de Sucesos

Definición 1.18. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad,* $A, B \in \mathcal{A}$ *con* $P(B) > 0$*. Entonces,* A *y* B *se dicen independientes si y solo si*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Proposición 1.5. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad,* $A, B \in \mathcal{A}$ *tal que* A *y* B *son sucesos independientes. Entoces,*

$$P(A|B) = P(A) \text{ si } P(B) > 0 \text{ y}$$

$$P(B|A) = P(B) \text{ si } P(A) > 0.$$

Proposición 1.6. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad,* $A, B \in \mathcal{A}$ *tal que* A *y* B *son sucesos independientes. Entonces, también lo son* A^c *y* B^c*,* A *y* B^c*,* A^c *y* B*.*

Capítulo 2

Modelo Uniforme

2.1. Regla de Laplace

Proposición 2.1 (Regla de Laplace). *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espacio de probabilidad tal que el conjunto de sucesos elementales es finito, los sucesos elementales son incompatibles dos a dos y equiprobables. Entonces, si $A \in \mathcal{A}$*

$$P(A) = \frac{\textit{número de sucesos elementales a favor de A}}{\textit{número de sucesos elemenetales de } \Omega}$$

a este resultado lo llamamos Regla de Laplace

Demostración. *Sea $a_1, a_2, \cdots, a_n$ el conjunto de sucesos elementales asociados, entonces*

$$\Omega = a_1 \cup a_2 \cup \cdots \cup a_n,$$

por ser incompatibles dos a dos

$$P(a_1) + P(a_2) + \cdots + P(a_n) = 1$$

y por ser equiprobables, es decir, $P(a_i) = \frac{1}{n}, \forall i \in \{1, \cdots, n\}$. Si $A \in \mathcal{A}$ tal que $A = \bigcup_{j \in J} a_j$ donde $J = \{1, \cdots, k\}, k \leq n$, entonces

$$P(A) = P(a_1) + \cdots + P(a_k) = \frac{k}{n}$$

Así, hemos obtenido la Regla de Laplace.

2.2. Población y Muestra

Nota. *Dentro del muestreo aleatorio se distingue que la selección sea sin remplazamiento o con remplazamiento.*

Definición 2.1 (Selección sin Remplazamiento)**.** *Se seleccionan n elementos de la población, mediante n extracciones sucesivas sin remplazamiento, asignando en cada una de ellas probabilidades iguales a los elementos no seleccionados en las anteriores. En, este caso, n es menor o igual que el tamaño de la población.*

Definición 2.2 (Selección con Remplazamiento)**.** *Se seleccionan n elementos de la población, mediante n extracciones sucesivas con reemplazamiento, asignando en cada una de ellas probabilidades iguales a todos los elementos de la población.*

Nota. *Distinguimos muestras ordenadas y sin ordenar.*

2.3. Muestras Ordenadas

Notación. $(N)_n = N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1), \forall n \leq N.$

Proposición 2.2. *Sea $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \cdots, b_m\}$. Entonces, es posible formar $n \cdot m$ pares tales que (a_i, b_i) donde $a_i \in A, b_j \in B$*

Observación. *El par (a_i, b_j) y el par (b_j, a_i) son iguales.*

Proposición 2.3. *Sea $A_1, A_2, \cdots, A_k$ con $n_1, n_2, \cdots, n_k$ elementos. Entonces el número de ordenaciones de la forma $(x_1, x_2, \cdots, x_k) : x_i \in A_i, i \in \{1, \cdots, k\}$ es $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.*

Corolario 2.0.1. *k selecciones sucesivas con exactamente n_i opciones posibles en el i-ésimo paso, producen $n_1 \cdot \dots \cdot n_k$ resultados diferentes posibles.*

Teorema 2.1. *De una población de N elementos se pueden seleccionar N^n muestras diferentes con remplazamiento de tamaño n y $(N)_n$ muestras diferentes sin reemplazamiento de tamaño n.*

Teorema 2.2. *El número de ordenaciones diferentes de N elementos es*

$$N! = N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Teorema 2.3. *Si se realiza un muestreo aleatorio con remplazamiento de tamaño n de una población con N elementos, la probabilidad de que en la muestra no aparezca ningún elemento dos veces es*

$$p = \frac{(N)_n}{N^n} = \frac{N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1)}{N^n}$$

2.4. Subpoblaciones

Definición 2.3 (Subpoblación)**.** *Una Subpoblación de tamaño n es una muestra de tamaño n extraída de una población de tamaño N, cuyos elementos extraidos no han considerado ningún orden.*

Notación.

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n! \cdot (N-n)!}$$

Teorema 2.4. *De una población de N elementos se pueden seleccionar $\binom{N}{n}$ subpoblaciones diferenetes de tmaño $n \leq N$.*

Demostración. *El número de subpoblaciones posibles de tamaño n de una población N es el número de ordenaciones distintas de n elementos que es $n!$. Además, de una población de N elementos se pueden seleccionar $(N)_n$ muestras diferentes sin remplazamiento de tamaño n. Entonces,*

$$A = \frac{(N)_n}{n!}$$

Ejemplo. *Un equipo está compuesto por 7 miembros y un club cuenta con 20 miembros, se podran formar $\binom{20}{7}$ equipos diferentes.*

Teorema 2.5. *De una población de N elementos se pueden seleccionar $\binom{N+n-1}{n}$ subpoblaciones diferentes de tamaño n, mediante un muestreo con remplazamiento.*

2.5. Particiones

Definición 2.4 (Partición)**.** *Una partición de tamaño r de una población de tamaño N es una división de la población en r grupos ordenados de elementos desordenados donde el grupo i contine n_i elementos $\forall i \in \{1, 2, \cdots, r\}$ y*

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_r = N$$

Teorema 2.6. *El número de particiones diferentes de tamaño r en las cuales se puede divir una población de N elementos es*

$$\frac{N!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_r!}$$

siendo n_i el tamaño del grupo i, $i \in \{1, \cdots, r\}$.

Ejemplo. *Se lanza un dado en 10 ocasiones. El número total de formas en las cuales se pueden obtener 3 unos, ningún dos, 2 treses, ningún cuatro, 3 cincos y 2 seises es*

$$\frac{10!}{3! \cdot 0! \cdot 2! \cdot 0! \cdot 3! \cdot 2!}$$

2.6. Variaciones, Combinaciones y Permutaciones

2.6.1. Variaciones de N elementos tomados de n en n

Definición 2.5 (Variaciones sin repetición)**.** *Las variaciones de N elementos tomados de n en n son los diferentes grupos que se pueden formar a partir de N elementos, tomados de n en n. Cada dos grupos difieren entre sipor* *algún elemento o por el orden.*

$$V_{N,n} = (N)_n = N \cdot (N-1) \cdot (N-n+1)$$

Observación. *Es lo mismo que el número de muestras diferentes de tamaño n seleccionadas mediante un muestreo sin remplazamiento de una poblaciçon de tamaño N.*

2.6.2. Variaciones de N elementos tomados de n en n

Definición 2.6 (Variaciones con repetición). *Las variaciones repetición de N elementos tomados de n en n son los diferentes grupos que se pueden formar a partir de N elementos, tomados de n en n, en los que pueden aparecer elementos repetidos y dos grupos son distintos entre sí, tiene distintos elementos o estan situados en distintos lugares.*

$$RV_{M,n}^{N} = N^n$$

2.6.3. Permutaciones de N elementos

Definición 2.7 (Permutación). *Las Permutaciones de N elementos diferentes son los distintos grupos que pueden formarse entrando en cada uno de llos lo N elementos dados, difiriendo únicamente en el orden de sucesión de sus elementos.*

$$P_N = N! = N \cdot (N-1) \cdots 2 \cdot 1$$

2.6.4. Permutaciones con repetición

Definición 2.8 (Permutaciones con repetición). *Las permutaciones con repetición de r elementos distintos tales que el elemento i aparece n_i veces $\forall i \in \{1, 2, \cdots, r\}$ con $\sum_{i=1}^{r} n_r = N$ es*

$$\frac{N!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_r!}$$

2.6.5. Combinaciones de N elementos tomados de n en n

Definición 2.9 (Combinaciones sin repetición). *Son los diferente grupos que se pueden formar con n elementos en cada uno, donde por lo menos cada uno tiene un elemento distinto. No se tiene en cuenta el órden en la disposición.*

$$C_{N,n} = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n! \cdot (N-n)!}$$

2.6.6. Combinaciones con repetición de N elementos tomados de n en n

Definición 2.10 (Combinaciones con repetición). *Son la distintas disposiciones que se pueden formar tomando n elementos de los N, entre lo cuales puden aparecer elementos repetidos, y dos disposicones serán distintas entre sí, si tienen distintos elementos. No se tiene en cuenta el órden en la disposición.*

$$RC_{N,n} = \binom{N+n-1}{n} = \binom{N+n-1}{N-1} = \frac{((N+n-1))!}{(N-1)!n!}$$

Capítulo 3

Probabilida sobre la recta real

3.1. Probabilidad Sobre La Recta Real

Notación. *Consideramos* $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), P)$ *espacio de probabilidad.*

3.1.1. Función de distribución en $\mathbb{R}$

Definición 3.1 (Función de distribución)**.** *Sea* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*

(I) F *es monótona no decreciente, es decir,* $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$.

(II) F *es continua por la derecha,* $\lim_{h\to 0} F(x+h) = F(x)$

(III) $\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0$,

(IV) $\lim_{x\to +\infty} F(x) = 1$.

Teorema 3.1. *La función* $F(x) = P\{(-\infty, x]\}$ *es función de distribución en* $\mathbb{R}$*.*

Teorema 3.2. *Sea* F *función de distribución en* $\mathbb{R}$*. Entonces,* F *induce en* $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$*, espacio probabilizable, una probabilidad* P *cuya función de distribución es* F*.*

3.2. Probabilidad sobre $\mathbb{R}^n$

Definición 3.2 (Función de Distribución)**.** *Una función* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *se dice que es de distribución en* $\mathbb{R}^n$ *si y solo si*

*(*I*)* $\forall a, b \in \mathbb{R}^n : a \leq b \Rightarrow F((a, b]) \geq 0.$

*(*II*)* F *continua por la derecha en cada variable, es decir, si* $\{x^k\}_{n\in\mathbb{N}} \downarrow$: $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$ *con* $x^k \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} F(x^n) = F(x)$$

*(*III*)* $\lim_{x_i\to-\infty} F(x_1, \cdots, x_n) = 0, \forall i \in \{1, \cdots, n\}$ *y* $F(+\infty, \cdots, +\infty) = \lim_{x_1,\cdots,x_n\to+\infty} F(x_1, \cdots, x_n) = 1.$

Capítulo 4

Variable Aleatoria Unidimensional

4.1. Variable Aleatoria Real

Definición 4.1 (Variable aleatoria)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilida y sea* $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ *un espacio probabilizable. Una aplicación* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *es una variable aleatoria* $\Leftrightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathbb{B}$.

Proposición 4.1. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *es v.a si* $X^{-1}(-\infty, a] \in \mathcal{A}, \forall a \in \mathbb{R}$.

4.2. Función Indicador

Definición 4.2 (Función Indicador)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espacio probabilizable.* $\forall A \in \mathcal{A}$

$$I_A(w) = \begin{cases} 1 \text{ si } w \in A \\ 0 \text{ si } w \notin A \end{cases}$$

es la función indicador.

Observación. *La función indicador es variable aleatoria.*

Observación. $I_{A\cap B} = I_A \cdot I_B$, $I_A + I_{A^c} = 1$ *y* $I_{A\cup B} = I_A + I_B - I_{A\cap B}$.

4.3. Ley de Probabilida de Una Varibale Aleatoria

Proposición 4.2. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de porbabilidad, X una variable aletoria real con $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$. Entonces, X induce una medida de probabilidad P_X sobre $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ tal que $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, P_X)$ es un espacio de probabilidad, donde P_X viene definida por*

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(A), \forall B \in \mathbb{B}, \quad \text{donde } X(A) = B.$$

4.4. Función de Masa

Definición 4.3. *Sea X una v.a. sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espacio de probabilidad y P_X la probabilidad inducida por X sobre $(\mathbb{R}, B)$. Llamamos función de masa de X a la aplicación*

$$p_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

definida por

$$\forall x \in \mathbb{R}, p_X(x) = P_X\{x\} = P\{X^{-1}(x)\} = P\{w \in \Omega : X(w) = x\}.$$

Proposición 4.3. *Sea X v.a. con función de masa p_X y sea $D_X = \{x \in \mathbb{R} : p_X(x) > 0\}$. Entonces, D_X es numerable.*

4.5. Variable Aleatoria Discreta

Definición 4.4 (Variable Aleatoria Discreta)**.** *Sea X v.a. sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con función de masa p_x y*

$$D_X = \{x \in \mathbb{R} : p_X(x) > 0\}.$$

Si $D_X \neq \emptyset$ y $\sum_{x \in D_x} p_X(x) = 1$, entonces la variable aleatoria X se dice que es discreta y D_X se le llama soporte de X.

Proposición 4.4. *Dado $D \subset \mathbb{R}$ numerable y $p : \mathbb{R} \to [0, 1]$ tal que*

$$p(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin D \\ > 0 \text{ si } x \in D \end{cases}$$

con $\sum_{x \in D} p(x) = 1$. Entonces, se determina una ley de proabilidad P_X sobre

X *tal que*

$$P_X(B) = \begin{cases} \sum_{x \in B \cap D} p(x), & \forall B \in \mathbb{R} \setminus (B \cap D) \neq \emptyset \\ 0, & \text{si } B \cap D = \emptyset \end{cases}$$

4.6. Funnción de Densidad sobre $\mathbb{R}$

Definición 4.5. *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama función de densidad sobre $\mathbb{R}$ si cumple*

(I) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

(II) *f admite a lo más un número finito de discontinuidades sobre cada intervalo finito de $\mathbb{R}$, es decir, f es integrable Riemann.*

(III) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

4.7. Variable Aleatoria Continua

Definición 4.6 (Varible Aleatoria Continua)**.** *Sea $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ se dice continua si su función de distribución F_X puede ser representada $\forall x \in \mathbb{R}$ por*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

donde f_X es una función de densidad sobre $\mathbb{R}$. A esta función de le llama función de densidad de la variable aleatoria continua X, y al conjunto

$$C_X = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}$$

se le llama soporte de la variable aleatoria.

Teorema 4.1. *Sea X v.a. continua con función de densidad f_X y función de distribución F_X. Entonces se verifica*

(I) *F_X es continua,*

(II) *Si f_X es continua en $x \Rightarrow F_X$ derivable en X y*

$$F'_X(x) = f_X(x)$$

(III) $D_X = \{x \in \mathbb{R} : p_X(x) > 0\} = \emptyset$

(IV) *Para cualquier* $I \subset \mathbb{R}$ *con extremos* a, b, $P\{X \in I\} = \int_a^b f(t)dt$.

4.8. Transformaciones Medibles

4.8.1. Caso discreto

Teorema 4.2. *Sea* X *v.a. discreta con soporte* D_X *y función de masa* p_X. *Sea* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *medible,* $Y = \varphi(X)$ *v.a. transformada. Entonces,* Y *es una v.a. discreta con soporte* $D_Y = \varphi(D_X)$ *y función de masa*

$$p_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in [\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = y\} \cap D_X]} p_X(x), & \text{si } y \in D_y \\ 0, & \text{si } y \notin D_Y \end{cases}$$

4.8.2. Caso Continuo

Teorema 4.3. *Sea* X *v.a. continua con soporte* C_X *y función de densidad* f_X. *Sea* $Y = \varphi(Y)$ *v.a. transformada. Si* $\varphi(C_X)$ *es un conjunto discreto entonces* Y *es v.a. discreta con soporte* $D_Y \subset \varphi(C_X)$ *y función de masa*

$$p_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\{x : p(x) = y\}} f_X(x)dx, & \text{si } y \in \varphi(C_X) \\ 0, & \text{si } y \notin \varphi(C_X) \end{cases}$$

Teorema 4.4. *Sea* X *v.a. continua con soporte* C_X *y densidad* f_X. *Suponemos que* $C_X \subset \mathbb{R}$ *es un intervalo. Sea* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua, estrictamente creciente o decreciente sobre* C_X *tal que* φ^{-1} *sobre* $\varphi(C_X)$ *admite una derivada continua. Entonces,* Y *es una v.a. continua con soporte* $C_Y = \varphi(C_X)$ *y función de densidad*

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(\varphi^{-1}(y)) \cdot |(\varphi)^{-1\prime}(y)|, & y \in C_Y \\ 0, & y \notin C_Y \end{cases}$$

Teorema 4.5. *Sea X v.a. continua con soporte C_X y función de densidad f_x. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable $\forall x \in C_X$ tal que φ' es continua y $\varphi'(x) \neq 0$ salvo un número finito de puntos. Suponemos que $\forall y \in \mathbb{R}$ se cumple una de las siguientes afirmaciones*

(I) $\exists x_1(y), \cdots, x_{m(y)}(y) \in C_X$ tal que

$$\varphi(x_k(y)) = y \quad \text{y} \quad \varphi'(x_k(y)) \neq 0$$

(II) Si $m(y) = 0$. Entonces, $\varphi(X) = Y$ es v.a. continua con función de densidad

$$f_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{m(y)} f_X(x_k(y)) \cdot |\varphi'(x_k(y))|^{-1}, & \text{si } m(y) > 0 \\ 0, & \text{si } m(y) = 0 \end{cases}$$

Capítulo 5

Esperanza Matemática

5.1. Esperanza de una Variable Aleatoria Simple

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y $A_{i\,i=1}^{\,n} \subset \mathcal{A}$ tal que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ y $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \emptyset j$. Consideramos $X = \sum_{i=1}^{n} x_i I_A$ una variable aleatoria simple definida en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con $x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \cdots, n\}$.

Definición 5.1 (Esperanza Variable Aleatoria Simple). *Llamamos esperanza de X v.a. simple al número*

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P(A_i) = \int_{\Omega} X dP(\omega)$$

Proposición 5.1 (Propiedades).

(I) *Si* $X \geq 0$, *entonces* $E[X] \geq 0$,

(II) $\forall X, Y$ *v.a. simples,* $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$E\big[aX + bY\big] = aE[X] + bE[Y],$$

(III) $X \geq Y \Rightarrow E[X] \geq E[Y]$,

(IV) $E[I_A] = P(A), \forall A \in \mathcal{A}$,

(V) $E[|X + Y|] \leq E[|X|] + E[|Y|]$,

(VI) $|E\big[X\big]| \leq E[|X|]$,

(VII) $E[X \cdot I_A] = \int_A XdP(\omega)$

(VIII) $E[XI_{A_1 \cap A_2}] = \int_{A_1} XdP(\omega) + \int_{A_2} XdP(\omega), \quad \forall A_1, A_2 \in \mathcal{A} : A_1 \cap A_2 = \emptyset$,

Demostración. *content*

5.2. Esperanza De Una Variable Aleatoria No Negativa

Proposición 5.2. *Sea $X \geq 0$ una v.a., entonces $\exists \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no decreciente tal que $X_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n\to\infty} X_n = X$, entonces $\{E[X_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ será creciente y por tanto con límite (finito o no).*

Definición 5.2. *Llamaremos esperanza de X v.a. no negativa a*

$$E(X) = \int_\Omega XdP = \lim_{n\to\infty} E[X_n] = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n dP(\omega)$$

Proposición 5.3. *Sean $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de v.a. simples no negativas tales que $X_n \leq X, Y_n \leq Y$ y $\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} Y_n = X$. Entonces $\lim_{n\to\infty} E[X_n] = \lim_{n\to\infty} E[Y_n]$.*

Proposición 5.4 (Propiedades). (I) $E[X] \geq 0$.

(II) *Sean X e Y variables aleatorias no negativas y sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces,*

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y].$$

(III) $X \geq Y \Rightarrow E[X] \geq E[Y]$, *en donde X e Y son variables aleatorias no negativas.*

(IV) X *v.a. no negativa y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, entonces*

$$\int_{A_1 \cap A_2} XdP(\omega) = \int_{A_1} XdP(\omega) + \int_{A_1} XdP(\omega).$$

Demostración. *content*

Definición 5.3 (Variable Aleatoria Integrable). *Una variable aleatoria no negativa X es integrable $\Leftrightarrow$ X tiene esperaza finita, es decir, $E[X] < +\infty$.*

5.3. Esperanza De Una Variable Aleatoria Real

Definición 5.4 (Esperanza De Una Variable Real). *Sea X v.a real tal que $X = X^+ - X^-$, llamaremos esperanza matemática de X a*

$$E[X] = E[X^+] - E[X^-]$$

siempre que $E[X^+]$ o $E[X^-]$ sean menores que ∞.

Definición 5.5. *Diremos que X variable aleatoria real es integrable $\Leftrightarrow$ $E[x^+]$ o $E[x^-]$ son integrables y $E[X] < \infty$.*

Proposición 5.5 (Propiedades de la variables Aleatorias Reales). *Sean X, Y v.a. integrables tal que $A \cap B = \emptyset$. Entonces,*

(I) $X, X+Y, |X|, aX$ *con* $a \in \mathbb{R}$ *son integrables.*

(II) *Si* $a(\in \mathbb{R})$ *entonces*

$$\int aX + bY dP(\omega) = a \int X dP(\omega) + b \int Y dP(\omega).$$

(III) $X \Rightarrow \int X dP(\omega) \geq \int Y dP(\omega)$.

(IV) $\left| \int X dP(\omega) \right| \geq \int |X| dP(\omega)$.

(V) $X \geq 0$ *y* $\int X dP(\omega) = 0 \Rightarrow P\{X \neq 0\} = 0$.

(VI) $\int_{A \cup B} X dP(\omega) = \int_A X dP(\omega)$

(VII) $P\{X \neq Y\} = 0 \Rightarrow \int XdP(\omega) = \int YdP(\omega)$

Demostración. *content*

5.4. Teorema De Caracterización De La Esperanza

Teorema 5.1. *La esperanza matemática de una v.a. se caracteriza a partir de su probabilidad inducidad*

$$E[X] = \int_{\Omega} XdP(\Omega) = \int_{\mathbb{R}} \xi(x)dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \xi(x)dF_X(x)$$

donde ξ es la la función identidad en $\mathbb{R}$.

Demostración. *content*

5.4.1. Esperanza De Una Variable Aleatoria Elemental

Definición 5.6. *Sea $X \geq 0$ tal que $X = \sum_{j=1}^{\infty} x_j X_{A_j}$ donde A_j forman una partición numerabkes de Ω y $x_j > 0$. Definimos la esperanza de X como*

$$E[X] = \sum_{j=1}^{\infty} x_j P(A_j).$$

5.4.2. Esperanza De Una Variable Aleatoria Discreta

Proposición 5.6. *Sea X v.a. discreta con soporte D_X y función de masa p_X. Sabemos que D_X es un conjunto numerable. Entonces, $P(A_j) = P_X(X = x_j) = p_X(x_j)$ con*

$$\sum_{x \in D_X} p_X(x) = \sum_{j=1}^{\infty} p_X(x_j) = 1$$

$$\Rightarrow E[X] = \sum_{x \in D_X}^{\infty} x_j P_X(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j p_X(x_j)$$

supuesta la convergencia absoluta de la serie, es decir, $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| p_X(x_j) < \infty$.

5.4.3. Esperanza De Una Variable Aleatoria Continua

Definición 5.7 (Esperanza De Una Variable Aleatoria Continua). *Sea X v.a. continua tal que*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

es su función de distribución donde f_x es su función de densidad. Entonces,

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} \xi(x) f_X(x) dx$$

siendo $\xi(x)$ la dunción medible identidad en $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$.

Teorema 5.2. *Sea X una v.a. tal que $\exists E[X]$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aplicación medible tal que $\varphi(X) = Y$. Si $\exists E[\varphi(Y)]$ esta se puede expresar a través de la probabilidad inducidad por X y se cumple que*

$$E[Y] = \int_{\Omega} Y dP = \int_{\mathbb{R}} \varphi dP_X$$

5.5. Momentos

5.5.1. Momentos respecto al origen

Definición 5.8 (Momento de orden k de X respecto al origen). *Se llama momento de orden k de la v.a. X respecto al origen, a la esperanza de $g(X) = X^k$. Lo representaremos por α_k, es decir,*

$$\alpha_k = E[X^k] = \int_{\mathbb{R}} x^k dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} x^k dF_X(x)$$

siendo P_X la distribución de X y F_X la función de distribución de la v.a X.

5.5.2. Momentos respecto a la media

Definición 5.9 (Momento de orden k de X respecto al media)**.** *Se llama momento de orden k de la v.a. X respecto al media, a la esperanza de $g(X) = (X - \alpha_1)^k$. Lo representaremos por μ_k, es decir,*

$$\mu = E[(X - \alpha_1)^k]$$

En particular, μ_2 recibe el nombre de varianza.

5.5.3. Momentos Absolutos respecto al origen

Definición 5.10 (Momento absoluto respecto al origen)**.** *Se llama momento absoluto de orden k de la v.a. X a la esperanza de $g(X) = |X|^k$. Lo representamos por β_k, es decir,*

$$\beta_k = E[|X|^k]$$

Proposición 5.7. *Dada X v.a. tal que $\exists \alpha_k$. Entonces, $\exists \alpha_n, \forall n \leq k$.*

Demostración. *content*

5.6. Teorema de Markov

Teorema 5.3 (Markov)**.** *Sea X v.a., $g(X)$ función medible tal que $g(X) \geq 0$. Entoces,*

$$P\{g(X) > k\} \leq \frac{E[g(X)]}{k}, \quad \forall k > 0$$

supuesto que $\exists E[X]$.

Demostración. *Sea $A = \{x : g(x) > k\}$, entonces*

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_X(x)$$

$$\int_A g(x) dF_X + \int_{A^*} g(x) dF_X(x)$$

$$\geq \int_A g(x) dF_X(x) \geq \int_A k dF_X(x) \geq k\mathbb{P}\{g(X) > k\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\{g(X) > k\} \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{k}.$$

5.7. Acotación de Tchebychev

Proposición 5.8. *Sea X v.a., g función medible no negativa tal que $\exists E[(g(X))^k]$, entonces*

$$P\{g(X) > t\} \leq \frac{E[(g(X))^k]}{t^k}$$

CORREGIR + AÑADIR TEOREMA CHEVYCHEB

Demostración. *Sea $A = \{x : g(x) > t\}$. Entonces,*

$$\mathbb{E}[g(X)^k] = \int_{\mathbb{R}} (g(x))^k dF(x)$$

$$= \int_A g(x)^k dF(x) + \int_{A^c} g(x)^k dF(x)$$

$$\geq \int_{A^c} (g(x))^k dF(x) \geq \int_{A^c} t^k dF(x)$$

$$= t^k \mathbb{P}\{X \in A^c\}$$

entonces,

$$\mathbb{E}[g(X)^k] \geq t^k \mathbb{P}\{g(X) > t\}$$

Por tanto,

$$\mathbb{P}\{g(X) > t\} \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)^k]}{t^k}$$

Teorema 5.4. *Sea X v.a.. Si $\exists V(X)$, entonces para $t > 0$ tenemos*

$$\mathbb{P}\{|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\} \leq \frac{V(X)}{t^2}$$

Demostración. *Sea $g(X) = [X - \mathbb{E}[X]]^2$. Entonces, $\mathbb{P}\{g(X) \geq 0\} = 1$ y*

$\mathbb{E}[g(X)] = V(X)$. *Aplicado la desigualdad de Markov tenemos*

$$\mathbb{P}\{|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\} = \mathbb{P}\{g(X) \geq t^2\} \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{t^2} = \frac{V(X)}{t^2}.$$

Capítulo 6

Función Característica

6.1. Función generatriz

Definición 6.1 (Función Generatriz Discreta)**.** *Sea X v.a. discreta con función de masa p_X y soporte D_X. Entonces, la función generatriz de X es*

$$G(s) = E[s^X] = \sum_{i=1}^{\infty} s^{x_i} p_i$$

siempre que $\sum_{i=1}^{\infty} |s^{x_i}| p_i < \infty$.

Definición 6.2 (Función Generatriz Continua)**.** *Sea X v.a. continua con función de densidad f. Entonces, la función generatriz de X es*

$$G(s) = E[s^X] = \int_{-\infty}^{+\infty} s^x f(x) dx$$

siempre que $\int_{-\infty}^{+\infty} |s^X| f(x) dx$.

Proposición 6.1 (Propiedades Función Generatriz)**.** *La derivada de orden n de la función generatriz es*

$$G^{(n)}(s) = \sum_{x=n}^{\infty} \binom{x}{n} n! f(x) s^{x-n}$$

que cumple lo siguiente

(I) $G(0) = P(X = 0) = f(0)$,

(II) $\frac{1}{n!}G^{(n)}(0) = P(X = n) = f(n)$,

(III) $E(X) = G'(1)$,

(IV) $G^{(n)}(1) = E[X(X-1)\cdots(X-n+1)]$

6.2. Función Generatriz de Momentos

Definición 6.3 (Función Generatriz de Momentos)**.** *Llamaremos función generatriz de momentos respecto al origen de la variable aleatoria X con función de distribución F_X a*

$$M(\theta) = E[e^{\theta X}] = \int_{\mathbb{R}} e^{\theta X} dF_X(x)$$

6.2.1. Función Generatriz de Momentos Discreta

Definición 6.4 (Función Generatriz de Momentos Discreta)**.** *Sea X v.a. discreta con función de masa p_X. Lamamos función generatriz de momentos a la función*

$$M(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{\theta x_i} p_i$$

siempre que $\sum_{i=0}^{\infty} |e^{\theta x_i}| p_i < \infty$.

6.2.2. Función Generatriz de Momentos Continua

Definición 6.5 (Función Generatriz de Momentos Continua)**.** *Sea X v.a. continua con función de densidad f. Lamamos función generatriz de momentos a la función*

$$M(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\theta x} f(x) dx$$

siempre que $\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{\theta x}| f(x) dx$.

6.2.3. Propiedades Función Generatriz De Momentos

Proposición 6.2. *A partir del desarrolo de Taylor de $M(\theta)$ en $\theta = 0$ se tiene*

$$M(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{E(X^j)}{j!}\theta^j$$

donde $M^{(j)}(0) = E(X^j)$.

6.3. Función Característica

Definición 6.6 (Función Característica)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espacio de probabilidad, X v.a. con función de distribución F_X. Se llama función característica de X a*

$$\varphi(t) = E[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_X(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) dF_X(x) + i \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sen}(tx) dF_X(x)$$

6.3.1. Propiedades Función Característica

Proposición 6.3. *Sea X v.a. con función de distribución F_X. Entonces, la función característica satisface*

(I) φ *existe* $\forall t \in \mathbb{R}$,

(II) $\varphi(0) = 1$,

(III) $|\varphi(t)| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$,

(IV) $\varphi(t)$ *es uniformemente continua,*

(V) *Si* $Y = aX + b$, *entonces* $\varphi_Y(t) = e^{itb} \cdot \varphi_X(at)$.

Demostración. *content*

6.4. Problema de los Momentos

Teorema 6.1. *Supuesto que los momentos de la variable aleatoria X existen*

$$\alpha_n = \int_{\mathbb{R}} x^n dF(x)$$

Entonces,

(I) $\exists \varphi^{(n)}(0) = i^n \alpha_n$

(II) $\exists \varphi^{(n)}(t) = i^n \int_{\mathbb{R}} e^{itx} x^n dF(x)$

Demostración. *content*

Teorema 6.2.

(I) *Si* $\exists \varphi^{(2n)}(t)$ *entonces* $\exists \alpha_{2n} = \frac{\varphi^{(2n)}(0)}{i^{2n}}$

(II) *Si* $\exists \varphi^{(2n-1)}(t)$ *entonces* $\exists \alpha_{2n-2} = \frac{\varphi^{(2n-2)}(0)}{i^{2n-2}}$

6.5. Teorema de Inversión

Teorema 6.3 (de Inversión)**.** *Sea X v.a. con función de distribución F_X y $\varphi(t)$ su función característica, entonces*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

Capítulo 7

Distribuciones Unidimensionales

7.1. Distribución Degenerada

Definición 7.1. *Una v.a. X se dice que tiene una distribución degenera en un punto h si su función de masa es*

$$p_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = h \\ 0 & \text{si } x \neq h \end{cases}$$

Proposición 7.1 (Degenerada)**.**

- *Función Distribución*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < h \\ 1 & \text{si } x \geq h \end{cases}$$

- *Momentos respecto al origen*

$$\alpha_k = \mathbb{E}[X^k] = h^k$$

- *Momentos respecto a la media*

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \alpha_1^{k-j} \alpha_j = 0$$

- *Función característica*

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = e^{ith} \cdot \mathbb{P}X = h = e^{ith}$$

7.2. Distribución Uniforme Discreta

Definición 7.2 (Distribución Uniforme Discreta). *Una v.a. X se dice que tiene una distribución uniforme discreta si su función de masa es*

$$p_X(x) = \frac{1}{n}, \quad \textit{si } x \in D_X = \{x_1, \cdots, x_n\}$$

Proposición 7.2 (Distribución Uniforme Discreta).

- *Función Distribución*

$$F_X(x) = \sum_{k \le x} p_X(k) = \sum_{k \le x} \frac{1}{n} = \frac{i}{n}$$

$$= \begin{cases} 0 & \textit{si } x < \min\{x_1, \cdots, x_n\} \\ \frac{i}{n} & \textit{si } x_i \le x \le x_{i+1} \\ 1 & \textit{si } x \le \max\{x_1, \cdots, x_n\} \end{cases}$$

- *Momentos respcto al origen*

$$\alpha_k = \mathbb{E}[X^k] = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \cdot p_X(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^k, \quad k \in \{1, 2, \cdots\}$$

- *Momentos respecto a la media*

$$V(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathbb{E}[X])^2$$

- *Función característica*

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{i=1}^{n} e^{itx_i} \cdot \frac{1}{n}$$

- *Función generatríz de momentos*

$$M_X(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta X}] = \sum_{i=1}^{n} e^{\theta x_i} \frac{1}{n}$$

7.3. Distribución de Bernoulli

Definición 7.3 (Distribución de Bernoulli)**.** *Una v.a. X se dice que tiene distribución de Bernoulli si tiene función de masa*

$$P_X(x) = \mathbb{P}\{X = x\} = p^x \cdot q^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}$$

Proposición 7.3 (Distribución de Bernoulli)**.**

- *Función Distribución*

$$F_X(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\} = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ q, \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ p + q = 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

- *Momentos respecto al origen*

$$\alpha_k = \mathbb{E}[X^k] = (0)^k p_X(0) + 1^k p_X(1) = p$$

- *Momentos respecto a la media*

$$\mu_k = \mathbb{E}[(X - \alpha_1)^k] = (0 - p)^k \cdot q + (1 - p)^k \cdot p$$
$$= q(-p)^k + q^k p$$
$$Var(X) = \mu_2 = pq(p + q) = pq$$

- *Función característica*

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itx}] = e^{it0} q + e^{it1} p = q + e^{it} p$$

- *Función generatriz de momentos*

$$M_X(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta X}] = e^{\theta \cdot 0} q + e^{\theta \cdot 1} p = q + e^{\theta} p$$

7.4. Distribución Binomial

Definición 7.4 (Distribución Binomial). *Una v.a. X se dice que sigue una distribución binomial si su función de masa es*

$$p_X(x) = \mathbb{P}\{X = x\} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x \in \{0, 1, \cdots, n\}$$

Es claro que es una variable aleatoria discreta. Esta distribución consiste en hacer una serie de experimentos indpendientes y considerar el número de existos, dada la probalidad de exito p.

Observación. $X \equiv Ber(p) \Leftrightarrow X \equiv Bi(1, p)$.

Proposición 7.4 (Distribución Binomial).

- *Función Distribución (no es muy manejable)*

$$F_X(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\} = \sum_{i \leq x} p_X(i) = \sum_{i \leq x} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

- *Momentos respecto al origen*

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n] = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=0}^{n} p = n \cdot p$$

- *Momentos respecto a la media*

$$V(X) = V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=0}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$$

- *Función característica*

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[e^{it(X_1 + \cdots + X_n)}] \\ &= \mathbb{E}[e^{itX_1}] \cdot \cdots \cdot \mathbb{E}[e^{itX_n}] \\ &= (p \cdot e^{it} + q)^n \end{aligned}$$

- *Función generatriz de momentos*

$$M_X(\theta) = (pe^\theta + q)^n$$

- *Función generatriz de probabilidad*

$$G(s) = M\log(s) = (ps + q)^n$$

Teorema 7.1 (Distribución Binomial)**.** *La suma de variable Binomiales es Binomial. Si* $X_1 \equiv B(n_1, p)$ *y* $X_2 \equiv B(n_2, p)$*, entonces* $X_1 + X_2 \equiv B(n_1 + n_2, p)$

Demostración. *content*

7.5. Distribución de Poisson

La distribución de Poisson de parámetro λ se obtiene como límite de la binomial de parámetros (n, p). Sea $\lambda = np$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} p_X(x) &= \lim_{n\to\infty} \left[\binom{n}{x} p^n q^{n-x}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\right] \\
&= \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Definición 7.5 (Distribución de Poisson)**.** *Una v.a.* X *sigue uma distribución Poisson de parámetro* λ *si su función de masa es*

$$p_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x \in \{0, 1, \cdots\}$$

Proposición 7.5 (Distribución de Poisson)**.**

- *Función Distribución*

$$F_X(x) = \sum_{r\le x} p_X(r) = \sum_{r\le x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!}$$

- *Momentos respecto al origen*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$e^{-\lambda}\lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda$$

- *Momentos respecto a la media*

$$\mathbb{E}[X^2] = \lambda + \lambda^2$$

$$V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = 0$$

- *Función característica*

$$\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

- *Función generatriz de momentos*

$$M_X(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta X}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{\theta x} e^{\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^{\theta}\lambda)^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{e^{\theta}\lambda} = e^{\lambda(e^{\theta}-1)}$$

Teorema 7.2 (Distribución de Poisson)**.** *La suma de variable aleatorias Poisson indpendientes, es una variable aleatoria Poisson cuyo parámetro es la suma de los parámetros.*

Demostración. *content*

7.6. Distribución Hipergeométrica

Supongamos que una caja contiene N piezas, de las cuales D son defectuosas y $N - D$ aceptables. Consideramos el experimento de extraer n piezas simultaneamente. Este procedimiento es equivalente a un muestreo sin remplazamiento de n piezas.

Definición 7.6 (Distribución Hipergeométrica)**.** *Una v.a X sigue una distribución hipergeométrica si su función de masa es*

$$\mathbb{P}\{X = x\} = \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Proposición 7.6 (Distribución Hipergeométrica)**.**

- *Momentos respecto al origen*

$$\alpha = \frac{\sum_{x=0}^{n} x\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

- *Momentos respecto a la media*

$$V(X) = npq\frac{N-n}{N-1}$$

7.7. Distribución Geométrica

Sea un experimento aleatorio y A un suceso del experimento $P(A) = p$. Queremos ver el número de pruebas necesarias para que aparezaca A.

Definición 7.7 (Distribución Geométrica)**.** *Una v.a. X sigue una distribución geométrica si su función de masa es*

$$p_X(x) = \mathbb{P}\{X = x\} = (1-p)^{x-1}p, \quad x \in \{1, 2, \cdots\}$$

Proposición 7.7 (Distribución Geométrica)**.**

- *Función Distribución*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ 1 - q^x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- *Momentos respecto al origen*

$$\alpha_1 = \mathbb{E}[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot q^{x-1} \cdot p = p \sum_{x=1}^{\infty} x q^{x-1}$$

- *Momentos respecto a la media*

$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$

- *Función característica*

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{x=1}^{\infty} e^{itx} q^{x-1} p = p e^{it} \frac{1}{1 - e^{it} q}$$

- *Función generatriz de momento*

$$M(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta X}] = \sum_{x=1}^{\infty} e^{\theta x} q^{x-1} p = \frac{p e^{it}}{1 - p e^{\theta}}$$

7.8. Distribución Binomial Negativa

Consideramos una sucesión de realizaciones de un experimento. Según el número de veces que suceda A queremos ver el número de fallos anteriores.

Definición 7.8 (Distribución Binomial Negativa). *Una v.a. X sigue una distribución binomial negativa si tiene función de masa*

$$\mathbb{P}\{X = x\} = \binom{n + x - 1}{n - 1} p^{n-1} q^x \cdot p$$

Proposición 7.8 (Distribución Binomial Negativa).

(I) *Función distribución*

$$F(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n + i - 1}{i} p^n q^i$$

(II) *Función característica*

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} \binom{n+x-1}{x} p^n q^x$$

$$= p^n \sum_{x=0}^{\infty} \binom{n+x-1}{x} (e^{it}q)^x = p^n(1-e^{it}q)^{-n}$$

(III) *Momentos*

$$\alpha_1 = \frac{nq(nq+1)}{p^2}$$

$$V(X) = \frac{nq}{p^2}$$

(IV)

7.9. Distribución Uniforme

Definición 7.9 (Distribución Uniforme). *Una v.a. X continua sigue una distribución uniforme en $[a,b]$ si su función de densidad viene dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Proposición 7.9 (Distribución Uniforme).

- *Función distribución*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

- *Momentos respecto al origen*

$$\alpha_1 = \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$= \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b$$

- *Momentos respecto a la media*

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[(X-\alpha_1)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(x - \frac{a+b}{2}\Big)^2 f(x)dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(x - \frac{a+b}{2}\Big)^2 dx$$

donde $t = x - \frac{a+b}{2}, dx = dt$

$$\sigma^2 = \frac{1}{b-a}\int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} t^2 dt = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- *Función característica*

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_a^b e^{itx}\frac{1}{b-a}dx$$

$$= \frac{1}{it(b-a)} \cdot (e^{itb} - e^{ita})$$

- *Función generatriz de momentos*

7.10. Distribución Normal

Definición 7.10 (Distribución Normal)**.** *Una v.a.* X *sigue una distribución normal* $N(0,1)$ *si su función de densidad es de la forma*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Definición 7.11 (Distribución Normal)**.** *Una v.a.* X *sigue una distribución normal* $N(\mu,\sigma)$ *si su función de densidad es de la forma*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Proposición 7.10 (Distribución Normal)**.**

- *Función distribución*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

donde haciendo el cambio $\frac{x-\mu}{\sigma} = y$ *tenemos*

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dx$$

- *Relación entre* $N(0,1)$ *y* $N(\mu,\sigma)$*. Si* $X \equiv N(\mu,\sigma)$*,*

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

entonces, $Y \equiv N(0,1)$*.*

- *Función característica*

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

- *Momentos respecto al origen*

$$\alpha_1 = \frac{\varphi'(t)}{i}\Big|_{i=0}$$

$$\varphi'(t) = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}} \cdot i\mu - \frac{2t\sigma^2}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi'(0) = i\mu \Rightarrow \sigma_1 = \mu$$

- *Momentos respecto a la media*

$$\alpha_2 = \frac{\varphi''(t)|_{t=0}}{i^2} = \mu^2 + \varphi^2$$

$$\Rightarrow V(X) = \mu^2 + \varphi^2 - \mu^2 = \varphi^2$$

- *Función generatriz de momentos*

Teorema 7.3. *La suma de normales es normal.*

7.11. Distribución Gamma

Definición 7.12 (Función Gamma). *Llamamos función gamma a*

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

Proposición 7.11 (Propiedades Función Gamma). *(I)* $\Gamma(1) = 1$,

(II) $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$

(III) $p \in \mathbb{Z}^+, \Gamma(p) = (p-1)!$

Definición 7.13 (Distribución Gamma). *Una v.a. X sigue una distribución gamma de parámetros $\gamma(p, a)$ si su función de densidad es de la forma*

$$f_X(x) = \frac{a^p e^{-ax} x^{p-1}}{\Gamma(p)},$$

x ¿0

Proposición 7.12.

- *Función distribución*

$$F_X(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} \int_0^x e^{-ax} s^{p-1} ds, \quad 0 < x < \infty$$

- *Función característica*

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \left(1 - \frac{it}{a}\right)^{-p}$$

- *Función generatriz de momentos*

$$M(\theta) = \left(1 - \frac{\theta}{a}\right)^{-p}$$

- *Momentos respecto al origen*

$$\alpha_k = M^{(n)}(\theta)\Big|_{\theta=0}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{p}{a}, \quad \alpha_2 = \frac{p(p+1)}{a^2}$$

- *Momentos respecto a la media*

$$V(X) = \frac{p(p+1)}{a^2} - \frac{p^2}{a^2} = \frac{p}{a^2}$$

Teorema 7.4 (Distribución Gamma). *La suma de v.a. gamma independientes es gamma.*

Demostración. *content*

7.12. Distribución Exponencial

Definición 7.14 (Distribución Exponencial). *Una v.a. X sigue una distribución exponencial de parámetro θ si su función de densidad es de la forma*

$$f_X(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Observación (Distribución Exponencial). $Exp(\theta) = \gamma(1, \theta)$.

Proposición 7.13 (Distribución Exponencial).

- *Función distribución*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\theta x} & x > 0 \end{cases}$$

- *Función característica*

$$\varphi(t) = \left(1 - \frac{it}{\theta}\right)^{-1}$$

- *Función generatriz de momentos*

$$M(s) = \left(1 - \frac{s}{\theta}\right)^{-1}$$

- *Momentos respecto a la media*

$$\alpha_1 = \frac{1}{\theta}, \quad \alpha_2 = \frac{2}{\theta^2}$$

- *Momentos respecto al origen*

$$V(X) = \frac{1}{\theta^2}$$

-

Teorema 7.5 (Distribución Exponencial)**.** *La suma de n variable aleatorias indpendientes e idénticamente distribuidas $X_i \equiv Exp(\theta)$es una $\gamma(n, \theta)$.*

Capítulo 8

Vectores Aleatorios

8.1. Función Distribución en $\mathbb{R}^2$

Definición 8.1 (Distribución Propia)**.** *Sea* $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *función de distribución. Si se verifica que*

(I) $\forall a, b \in \mathbb{R}^2 : a \leq b$ *se tiene que* $F(a, b] \geq 0$.

(II) F *es continua por la derecha, es decir,* $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$*, donde* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$.

(III) $\lim_{x_1,x_2\to\infty} F(x_1, x_2) = 1$.

(IV) $\lim_{x_1\to-\infty} F(x_1, x_2) = 0, \forall x_2$ *y* $\lim_{x_2\to-\infty} F(x_1, x_2) = 0, \forall x_1$

Teorema 8.1. *Sea* P *probabilidad en* $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$F(x_1, x_2) = P(-\infty, x].$$

Entonces, F *es una función de distribución propia.*

Observación. *A la función de distribución propia* F *se le llama función de distribución asociada a la probabilidad* P.

Definición 8.2 (Vector Aleatorio)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *espacio de probabilidad. Entonces, la aplicación*

$$X = (X_1, \cdots, X_n) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{R}^n$$

definida por

$$X(\omega) = (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)), \quad w \in \Omega$$

es una variable aleatoria n-dimensional si y solo si

$$X^{-1}(B) = (X_1, X_2, \cdots, X_n) \in (B) \in \mathcal{A}, \quad \forall B \in B_n$$

Teorema 8.2. *$X = (X_1, \cdots, X_n)$ es una variable aleatoria multidimensional si y solo si X_i es variable aleatoria unidimensional $\forall i \in \{1, \cdots n\}$.*

8.2. Ley de Probabilidad de un Vector Aleatorio

Proposición 8.1 (Probabilidad Inducida por X en $\mathbb{R}^n$)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espacio de probabilidad, $X = (X_1, \cdots, X_n)$ vector aleatorio. Entonces, X induce una probabilidad*

$$\mathbb{P}_X\{B\} = \mathbb{P}\{X^{-1}(B)\} = \mathbb{P}\{A\}$$

donde $X(A) = B, \forall B$. A la aplicación $\mathbb{P}_X$ la llamamos probabilidad inducida por X en $\mathbb{R}^n$.

8.3. Función de Distribución Inducida por Variable Aleatoria Unidimensional

Teorema 8.3. *Sea $F : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ una función. Entonces, F es una función de distribución si y solo si se verifica*

(I) $F(-\infty, y) = 0 = F(x, -\infty)$.

(II) $F(+\infty, +\infty) = 1$.

(III) $F(x, y)$ *es continua por la derecha.*

(IV) $F(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Observación. *Este teorema se puede generalizar al caso n-dimensional.*

8.4. Función de Masa en $\mathbb{R}^2$

Definición 8.3 (Función de Masa en $\mathbb{R}^2$)**.** *Sea* (X, Y) *v.a. en* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *espacio de probabilidad. Entonces, la función* $p_{XY} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$p_{XY}(x, y) = \mathbb{P}\{X = x, Y = y\}$$

$$= F(x, y) - F(x^-, y) - F(x, y^-) + F(x^-, y^-) \geq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

se llama función de masa de (X, Y)*.*

Teorema 8.4. *Sea* (X, Y) *v.a. con función de masa* p_{XY} *y sea*

$$D_{XY} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p_{XY}(x, y) > 0\}.$$

Entonces, D_{XY} *es un conjunto numerable.*

8.5. Variable Aleatoria Bidimensional Discreta

Definición 8.4 (Variable Aleatoria Bidimensional Discreta)**.** *Sea* (X, Y) *v.a. con función de masa* p_{XY} *y sea*

$$D_{XY} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p_{XY}(x, y) > 0\}$$

donde $D_{XY} \neq \emptyset$ *y* $\sum_{(x,y)\in D_{XY}} p_{XY}(x, y) = 1$*. Entonces,* (X, Y) *se llama v.a. discreta y* D_{XY} *es su soporte.*

Definición 8.5 (Punto de Salto)**.** *Sea* (X, Y) *v.a. discreta, entonces* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tal que*

$$p_{XY}(x, y) > 0$$

se llama punto de salto o discontinidad de salto. Y D_{XY} *es el conjunto de puntos de salto.*

Definición 8.6 (Función de Distribución de Variable Aleatoria Bidimensional Discreta)**.** *Sea* (X, Y) *v.a. discreta. Entonces,*

$$F(x, y) = \sum_{x_i \leq x,\ y_i \leq y} p_{XY}(x_i, y_i)$$

es su función de distribución.

Teorema 8.5. *Una colección de números no negativos* $\{p(x,y) : x = 1, 2, \cdots ; y = 1, 2, \cdots\}$ *que satisface*

$$\sum_{x=1,y=1}^{\infty} p(x,y) = 1$$

8.6. Función De Densidad en $\mathbb{R}^2$

Definición 8.7 (Función de Densidad en $\mathbb{R}^2$)**.** *Una función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *se llama función de densidad si*

(I) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \geq 0.$

(II) f *es integrable Riemann en* $\mathbb{R}^2$.

(III) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1.$

Teorema 8.6. *Sea* f *un función de densidad en* $\mathbb{R}^2$. *Definimos la función*

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$$

Entonces, F *es función de distribución en* $\mathbb{R}^2$.

Teorema 8.7. *Sea* f *función de densidad en* $\mathbb{R}^2$ *y* F *función de distribución en* $\mathbb{R}^2$ *definida por*

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Si f es continua y $F \in \mathcal{C}^2$, entonces

$$\frac{\partial^2 F(x_1, y_1)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x_1, y_1)}{\partial y \partial x} = f(x_1, y_1)$$

8.7. Variable Aleatoria Bidimiensional Continua

Definición 8.8 (Variable Aleatoria Bidimensional Continua)**.** *Sea (X, Y) v.a. Si su función de distribución F se puede expresar como*

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) du dv, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Entonces, se dice que (X, Y) es v.a. continua y

$$C_{XY} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) > 0\}$$

se llama soporte continuo de (X, Y).

Observación. *Como f es función de densidad se tiene que*

$$\iint_{C_{XY}} f(u, v) du dv = 1$$

Teorema 8.8. *Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función no negativa, integrable Riemann en $\mathbb{R}^2$ y*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

entonces f es la función de densidad de alguna variable aleatoria bidimensional continua.

8.8. Distribuciones Marginales

Teorema 8.9. *Sea (X, Y) v.a. discreta con función de masa p_{XY} y soporte D_{XY}. Entonces, X es una v.a. unidimensional discreta con soporte D_X, e Y es una v.a. unidimensional discreta cons soporte D_Y.*

Definición 8.9 (Funciones de Densidad Marginales)**.** *Sea f una función de densidad en $\mathbb{R}^2$. Entonces, las funciones*

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$u \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv$$
$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)du$$

se llaman funciones de densidad marginales.

Observación. *f_1 y f_2 son funciones de densidad.*

Definición 8.10 (Función de Distribución Marginal)**.** *Sea (X_1, X_2) v.a. y $F(x_1, x_2)$ su función de distribución. Entonces, llamamos función des distribución marginal respecto de X_i a*

$$F_i = F(x_i, +\infty) = \mathbb{P}\{X_i \leq x_i, X_j \in \mathbb{R}\}$$
$$= \mathbb{P}\{(-\infty, x_i] \times \mathbb{R}\}$$
$$= \lim_{x_j \to \infty} F(x_i, x_j)$$

donde $i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$.

Teorema 8.10. *Sea (X_1, X_2) v.a. continua con función de densidad f y soporte continuo $C_{X_1X_2}$. Entonces,*

$$C_{X_i} = \pi_i(C_{X_1,X_2})$$

es el soporte de X_i con función de densidad marginal f_1.

8.9. Distribuciones Condicionadas

Definición 8.11 (Función de Masa Condicionada)**.** *Sea (X, Y) v.a. discreta con función de masa p_{XY} y soporte D_{XY}. Entonces, la función $p(x|b) : \mathbb{R} \to$*

$\mathbb{R}$ *definida por*

$$p(x|b) = \begin{cases} \frac{p_{XY}(x,b)}{p_Y(b)}, & (x,b) \in D_{XY} \\ 0, & (x,b) \notin D_{XY} \end{cases}$$

donde $b \in D_y$, *es la función de masa de* X *condicionada por* $Y = b$.

Teorema 8.11. *La v.a.* X *condicionada por* $Y = b \in D_Y$ *es una v.a. discreta con función de masa* $p(x|b)$.

Definición 8.12 (Función de Densidad Condicionada)**.** *Se llama función de densidad de* X *condicionada por* $Y = y$ *a la función* $f_{X|Y}(x|y)$ *no negativa que satisface*

$$F_{X|Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(t|y)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Observación. $f_{X|Y}$ *es función de densidad sobre* $\mathbb{R}$.

Teorema 8.12. *Sea* (X,Y) *v.a. continua con función de densidad* f. *Entonces,*

(I) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f$ *es continua y* $f_2(y) \geq 0$ *y* $f_2 escontinua$ *existe la función de densidad condicional de* X *condicionada por* Y

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

8.10. Independencia

Definición 8.13 (Sucesos Independientes Dos a Dos)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\{A_j\}_{j \in J}$ *fml. de sucesos. Decimos que son independientes dos a dos si* $\forall i, j \in J$ *se tiene que*

$$\mathbb{P}\{A_i \cap A_j\} = \mathbb{P}\{A_i\}\mathbb{P}\{A_j\}$$

Definición 8.14 (Sucesos Mutualmente Independientes)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\{A_j\}_{j\in J}$ *fml. de sucesos. Decimos que son mutamente independientes si* $\forall I \subset J : \mathrm{card}(I) \geq 2$ *se tiene que*

$$\mathbb{P}\{\bigcap_{i\in I} A_j\} = \prod_{i\in I} \mathbb{P}\{A_i\}$$

Proposición 8.2. *Sea* (X, Y) *v.a. Si* X *e* Y *son v.a. independientes, entonces* (X, Y) *es v.a. independiente. En particular si* X, Y *con v.a. discretas se tiene que*

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Y si X, Y *son v.a. continuas se tiene que*

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Observación. *Si* X, Y *son v.a. independientes con funciones de distribución* F_X, F_Y*, entonces*

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

es la función de distribución de (X, Y)*.*

Observación. *Si* X, Y *son v.a. independientes entonces,*

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) \quad \text{y} \quad f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$$

son las funciones de densidad condicionadas.

8.11. Transformaciones

Teorema 8.13. *Sea* (X, Y) *v.a. continua con función de densidad* f*.*

(I) *Sea la transformación*

$$z = g_1(x, y),$$
$$t = g_2(x, y)$$

tal que existe la transformación inversa

$$x = h_1(z, t),$$

$$y = h_2(z, t)$$

(II) *Ambas Transformaciones son continuas.*

(III) *Existen todas as derivadas parciales.*

(IV) *El jacobino de a transformación inversa*

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(z,t)} = \begin{vmatrix} x_z & x_t \\ y_z & y_t \end{vmatrix}$$

es distinto de cero.

Entonces, la v.a. (Z,T) es continua y tiene función de densidad

$$l(z,t) = f(h_1(z,t), h_2(z,t)) \cdot |J|$$

8.11.1. Suma Variables Aleatorias

Proposición 8.3. *Sea (X,Y) v.a. con función de densidad f. La variable aleatoria $Z = X + Y$ tiene función de densidad*

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, z-t)dt$$

y función de distribución

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, z-t)dtds$$

Si X e Y son independientes

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(z-t)dt$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(z-t)dt$$

donde f_1 y f_2 son las funciones de densidad marginales.

8.11.2. Producto Variables Aleatorias

Proposición 8.4. *Sea (X,Y) v.a. con función de densidad f. La variable* *aleatoria $Z = X \cdot Y$ tiene función de densidad*

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \frac{z}{t}) \cdot \frac{1}{|t|} dt$$

y función de distribución

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \frac{z}{t}) \cdot \frac{1}{|t|} dt ds$$

Si X e Y son independientes

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(\frac{z}{t}) \cdot \frac{1}{|t|} dt$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(\frac{z}{t}) \cdot \frac{1}{|t|} dt ds$$

donde f_1 y f_2 son las funciones de densidad marginales.

8.11.3. Cociente Variables Aleatorias

Proposición 8.5. *Sea (X, Y) v.a. con función de densidad f. La variable aleatoria $Z = X/Y$ tiene función de densidad*

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(tz, t)|t| dt$$

y función de distribución

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{+\infty} f(tz, t)|t| dt ds$$

Si X e Y son independientes

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(tz) f_2(t)|t| dt$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(tz) f_2(t)|t| dt ds$$

donde f_1 y f_2 son las funciones de densidad marginales.

8.12. Esperanza

Definición 8.15 (Esperaza Variable Aleatoria Bidimensional Discreta)**.** *Sea* (X, Y) *v.a. con función de masa* p_{XY} *y soporte* D_{XY}*. Si la serie*

$$\sum_{(x,y)\in D_{XY}} |g(x, y)|p_{XY}(x, y)$$

converge, entonces

$$\mathbb{E}[g(X, Y)] = \sum_{(x,y)\in D_{XY}} |g(x, y)|p_{XY}(x, y)$$

es la esperanza de $g(X, Y)$*.*

Definición 8.16 (Esperaza Variable Aleatoria Bidimensional Discreta)**.** *Sea* (X, Y) *v.a. continua con función de densidad* f*. Si la integral*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x, y)|f(x, y)dxdy$$

es finita, entonces

$$\mathbb{E}[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)dxdy$$

es la esperanza de la v.a. $g(X, Y)$*.*

8.13. Momentos

Definición 8.17 (Momentos Respecto al Origen)**.** *Sea* (X, Y) *v.a. El momento respecto al origen de orden* (k, l) *es*

$$\alpha_{kl} = \mathbb{E}[X^k Y^t]$$

Definición 8.18 (Momento Respecto a la Media)**.** *Sea* (X, Y) *v.a. El mo-*

mento respecto a la media es de ordén (k, l)

$$\mu_{kl} = \mathbb{E}[(X - \alpha_{10})^k (Y - \alpha_{01})^l]$$

Definición 8.19 (Coeficiente de Correlación). *El coeficiente de correlación se define como*

$$\rho = \frac{\mu_{11}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

siendo $\sigma_X = \sqrt{\mu_{20}}$ *y* $\sigma_Y = \sqrt{\mu_{02}}$

8.14. Propiedades Esperanza

Proposición 8.6. *La esperanza verifica*

(I) $\mathbb{E}[c] = c, \forall c \in \mathbb{R}$

(II) *Si* $\mathbb{E}[|X_i|] < +\infty$ *entonces*

$$\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{E}[X_i]$$

(III) *Si* $\mathbb{E}[|X_i|] < +\infty$ *y* $\mathbb{E}[|X_i|^2] < +\infty$ *entonces*

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot X_2] = \mu_{11} + \alpha_{01} \cdot \alpha_{10}$$

(IV) *Si* $\mathbb{E}[|X_i|] < +\infty$ *entonces*

$$\mathbb{E}[\prod X_i] = \prod \mathbb{E}[X_i]$$

(V) $\mathbb{E}[g_1(X)] \leq \mathbb{E}[g_2(X)]$

(VI) $|\mathbb{E}[g(X)]| \leq \mathbb{E}[|g(X)|]$

(VII) $\mathbb{E}[g_1(X) = g_2(X)] = \mathbb{E}[g_1(X)] + \mathbb{E}[g_2(X)]$

8.15. Propiedades Varianza

Proposición 8.7. *La varianza verifica*

(I)

(II)

(III)

(IV)

(V)

(VI)

8.16. Función Característica

8.17. Coefieciente Correlación

8.18. Regresión