

Ejercicios Geometría Diferencial

Hugo Del Castillo Mola

8 de enero de 2023

Índice general

Capítulo 1

Curvas

Ejercicio 1 (25). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular \mathcal{C}^∞ . Demuestra que la recta tangente en cada punto $\alpha(s_0)$ es límite de rectas secantes, es decir, el límite de las rectas que pasan por $\alpha(s_1)$ y $\alpha(s_2)$ cuando s_1 y s_2 tienden a s_0 .

Solución (25). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular \mathcal{C}^∞ , $s_0, s_1, s_2 \in I : s_1 < s_0 < s_2$. Entonces,

$$S \equiv \alpha(s_2) - \alpha(s_1)$$

es la recta secante que pasa por s_1 y s_2 . Si $s_i \rightarrow s_0$, $i \in \{1, 2\}$ entonces, $s_1 = s_0 - h_1 \xrightarrow{h_1 \rightarrow 0} s_0$ y $s_2 = s_0 + h_2 \xrightarrow{h_2 \rightarrow 0} s_0$. Consideramos el vector secante unitario

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\alpha(s_2) - \alpha(s_1)}{\|\alpha(s_2) - \alpha(s_1)\|} \\ &= \frac{\alpha(s_0 + h_2) - \alpha(s_0 - h_1)}{\|h_2 + h_1\|} \end{aligned}$$

donde tomando límites

$$\begin{aligned} &\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{\alpha(s_0 + h_2) - \alpha(s_0 - h_1)}{\|h_2 + h_1\|} \\ &= \lim_{h_2 \rightarrow 0} \left(\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{\alpha(s_0 + h_2) - \alpha(s_0 - h_1)}{\|h_2 + h_1\|} \right) \\ &= \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{\alpha(s_0 + h_2) - \alpha(s_0)}{\|h_2\|} = \alpha'(s_0) \end{aligned}$$

es el vector tangente unitario en $s_0 \in I$.

Ejercicio 2 (35). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva p.p.a., $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ movimiento rígido y $\beta = M \circ \alpha$ curva. Demostrar

(I) M conserva la orientación $\Rightarrow k_\beta = k_\alpha, \tau_\beta = \tau_\alpha,$

(II) M invierte la orientación $\Rightarrow k_\beta = k_\alpha, \tau_\beta = -\tau_\alpha.$

Solución (35). Sea $\beta = (M \circ \alpha)$ donde $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto \phi(t) = At + \vec{v}$ es un movimiento rígido con A matriz ortonormal asociada a la isometría y $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Sea α p.p.a entonces,

$$\|\beta'\| = \|(M \circ \alpha)'\| = \|A\alpha'\| = \|\alpha'\| = 1$$

β es p.p.a.. Esto se debe a que

$$d_t M = \frac{d}{dt}(At + \vec{v}) = A$$

$$\Rightarrow d_t(M \circ \alpha) = \frac{d}{dt}(A\alpha(t) + \vec{v}) = A\alpha'(t)$$

y dado que A es ortonormal, es decir, $A^t = A^{-1}$

$$\Rightarrow \|Ax\| = \sqrt{Ax \cdot Ax} = \sqrt{x \cdot A^t A} = \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^3$$

$\Rightarrow A$ conserva la norma.

Para la curvatura de β , que es $k_\beta = \|\beta''\|$, tenemos que

$$k_\beta = \|(M \circ \alpha)''\| = \|(A\alpha + \vec{v})''\| = \|A\alpha''\| = \|\alpha''\| = k_\alpha$$

dado que A es la matriz asociada a la isometría del movimiento rígido M , y conserva la norma. Entonces, $k_\beta = k_\alpha \Rightarrow$ la curvatura es invariante por movimiento rígido.

Y para la torsión de β que es

$$\begin{aligned} \tau_\beta &= (\beta' \times \beta'') \cdot \beta''' = (A\alpha' \times A\alpha'') \cdot A\alpha''' \\ &= \det(A)A(\alpha' \times \alpha'') \cdot A\alpha''' \\ &= \det(A)(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha''' \\ &= \det(A)\tau_\alpha \\ &\quad \pm \det(A)\tau_\alpha \end{aligned}$$

esto se debe a que el producto vectorial bajo transformaciones de matrices obedece $(Ba) \times (Bb) = (\det(B))(B^{-1})^t(a \times b)$, $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$, $a, b \in \mathbb{R}^3$. Luego, A es ortogonal por ser la matriz asociada a una isometría lineal $\Rightarrow (A^t)^{-1} = A$. Y $\det(A) = \pm 1$ por ser A matriz ortogonal.

Por tanto, la torsión de β es

$$\tau_\beta = \begin{cases} \tau_\alpha, & \text{si } A \text{ conserva la orientación} \\ -\tau_\alpha, & \text{si } A \text{ invierte la orientación} \end{cases}$$

Ejercicio 3 (40). Sea α una curva C^∞ con $k(s) > 0$. Demostrar que el plano osculador en $\alpha(s)$ generado por $T(s), N(s)$ es el límite de los planos que pasan por las tripletas $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$ cuando $s_i \rightarrow s$.

Solución (40). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a., $s_1, s_2, s_3 \in I : \alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$ puntos no alineados y $P(s_1, s_2, s_3)$ el plano generado por $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$. Sea la curva

$$\phi(s) = \alpha(s) \cdot n(s_1, s_2, s_3), s \in I$$

donde n es el vector unitario perpendicular al plano P . Como

$$\alpha(s_i) \in P(s_1, s_2, s_3) \Rightarrow \phi(s_i) = \alpha(s_i) \cdot n(s_1, s_2, s_3) = 0, \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

entonces, por el teorema del Valor Medio

$$\exists c_i \in (s_i, s_{i+1}) : \phi'(c_i) = \alpha'(c_i) \cdot n(s_1, s_2, s_3) = 0, \forall i \in \{1, 2\}$$

Volviendo a aplicar el teorema de Valor Medio

$$\exists t \in (c_1, c_2) : \phi''(t) = \alpha''(t) \cdot n(s_1, s_2, s_3) = 0$$

Por tanto, $n(s_1, s_2, s_3) = \alpha'(c_i) \times \alpha''(t), i \in \{1, 2\}$. Si $s_i \rightarrow s_0$ entonces, $n(s_1, s_2, s_3) \rightarrow \vec{n} = n(s_0, s_0, s_0) = \alpha'(s_0) \times \alpha''(s_0) \Rightarrow \vec{n}$ es normal al plano generado por α' y α'' , es decir, el límite de los planos que pasan por las tripletas $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$ es el plano osculador, generado por T, N .

Capítulo 2

Superficies I

Ejercicio 4 (1). Halla el plano tangente en cada punto de la esfera de radio 2 en \mathbb{R}^3 .

Solución. Sea $\mathbb{S}^2(r) = \{p \in \mathbb{R}^3 : |p - p_0| \leq r\}$ con $p_0 \in \mathbb{R}^3$ es la esfera de centro p_0 y radio r .

Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(p) = |p - p_0|^2$ y $r \in f(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}$. Entonces, $\forall p \in \mathbb{R}^3 : f(p) = r$ se tiene que $(df)_p \neq 0$. Por tanto, r es valor regular de f . Luego, $\mathbb{S}^2(r)$ es superficie. En particular, $\mathbb{S}^2(2) = f^{-1}(\{2\})$ es superficie.

Ahora, si $v \in T_p(S)$, entonces $\exists \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Por tanto, $(f \circ \alpha)(t) = r, \forall t \in (-\epsilon, \epsilon) \Rightarrow (df)_p = (f \circ \alpha)'(0) = 0 \Rightarrow v \in \ker(df)_p$. Como $T_p(S) \subset \ker(df)_p$ y ambos son subespacios lineales de dimensión dos, entonces $T_p(S) = \ker(df)_p$.

Ejercicio 5 (2). Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\}$. Demostrar que

(I) S es una superficie

(II) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\varphi(u, v) = (u + v, u - v, 4uv)$ es una parametrización de S y dibujar las líneas coordenadas.

Solución.

(I) Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

La aplicación es diferenciable y

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^3\}$$

es la gráfica de f . Luego, $X : U \rightarrow S : (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$ es parametrización de S . Entonces, S es una superficie.

(II) $\varphi = X \circ h$ donde $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $h(u, v) = (u + v, u - v)$. Como X es parametrización $\Rightarrow X$ difeomorfismo y h es difeomorfismo, entonces φ es difeomorfismo con $\varphi(\mathbb{R}^2) = S \Rightarrow \varphi$ es parametrización.

Ejercicio 6 (3). Parametrizar el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0$$

Además, para cada plano $Ax + By + Cz = 0$ encontrar los puntos del elipsoide cuyo plano tangente es paralelo.

Solución. Sea el conjunto de puntos del elipsoide

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

y sea una función

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

Entonces, $f^{-1}(0) = S$ donde 0 es valor regular ya que

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2} \right) \neq 0, \quad \forall (x, y, z) \in f^{-1}(0)$$

y por tanto, S es una superficie.

Ahora, el plano tangente de S es el núcleo de $(df)_p$. Sea $p = (p_1, p_2, p_3) \in S$. Entonces,

$$\begin{aligned} T_p S &= \ker(df)_p \\ &= \left\{ (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{2p_1}{a^2}, \frac{2p_2}{b^2}, \frac{2p_3}{c^2} \right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : \frac{2p_1}{a^2} \cdot v_1 + \frac{2p_2}{b^2} \cdot v_2 + \frac{2p_3}{c^2} \cdot v_3 = 0 \right\} \end{aligned}$$

es un plano tangente a S en el punto p que pasa por el origen. Luego, los puntos del elipsoide cuyo plano tangente es paralelo a $Ax + By + Cz = 0$ serán

$$\left\{ (p_1, p_2, p_3) \in S : \frac{2p_1}{a^2} = A \cdot k, \frac{2p_2}{b^2} = B \cdot k, \frac{2p_3}{c^2} = C \cdot k, \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

ya que dos planos son paralelos si y solo si sus vectores normales son paralelos.

Ejercicio 7 (4). Sea $V = \{(\theta, \phi) : \theta \in (0, \pi), \phi \in (0, 2\pi)\}$, $X : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$X(\theta, \phi) = (\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta)).$$

Demostrar que X es una parametrización de un abierto de la esfera.

Solución. Es claro que $X(V) \subset \mathbb{S}^2$. Veamos que X es una parametrización de S .

Primero, X es diferenciable y tiene derivadas parciales continuas. Por tanto, X es diferenciable. Además,

$$\begin{aligned} X_\theta &= (\cos(\theta) \cos(\phi), \cos(\theta) \sin(\phi), -\sin(\theta)) \\ X_\phi &= (-\sin(\theta) \sin(\phi), \sin(\theta) \cos(\phi), 0) \\ X_\theta \times X_\phi &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(\theta) \cos(\phi) & \cos(\theta) \sin(\phi) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) \sin(\phi) & \sin(\theta) \cos(\phi) & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-\sin^2(\theta) \cos^2(\phi), -\sin^2(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi), \cos^2(\theta) \sin(\theta)) \\ X_\theta \times X_\phi &= \sqrt{\sin^4(\theta) \cos^2(\phi) + \sin^4(\theta) \sin^2(\phi) + \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)} \\ &= \sin^4(\theta) + \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \\ &= \sin^2(\theta) \end{aligned}$$

Entonces, $X_\theta \times X_\phi = 0 \Leftrightarrow \sin^2(\theta) = 0$. Pero $\forall \theta \in (0, \pi)$, $\sin^2(\theta) \neq 0$. Por tanto, $(dX)_p$ son linealmente independientes $\forall p \in V$. Falta ver que X es continua y tiene inversa continua.

(ESCRIBIR BIEN INTERVALOS) Como $(0, 0), (0, 2\pi), (\pi, 0), (\pi, 2\pi) \notin V$ definimos $\mathbb{S}^2 \setminus C$ donde C es el semicírculo

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : y = 0, x \geq 0\}.$$

Entonces, X es continua en $\mathbb{S}^2 \setminus C$ y por el teorema de la función inversa $\Rightarrow X$ tiene inversa X^{-1} en $\mathbb{S}^2 \setminus C$. Satisfechas las condiciones anteriores y siendo X inyectiva, tenemos que X^{-1} es continua. Por tanto, X es una parametrización de $\mathbb{S}^2 \setminus C$.

Ejercicio 8 (5). Una forma de definir un sistema de coordenadas para la esfera \mathbb{S}^2 , dada por $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, es considerar la proyección estereográfica $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que lleva el punto $p = (x, y, z)$ de la esfera $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ donde $N = (0, 0, 2)$ a la intersección del plano XY con la línea recta que conecta N con p . Sea $(u, v) = \pi(x, y, z)$ donde $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ y $(u, v) \in XY$.

(I) Mostrar que $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ viene dada por

$$\pi^{-1} \begin{cases} x = \frac{4u}{u^2+v^2+4} \\ y = \frac{4v}{u^2+v^2+4} \\ z = \frac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4} \end{cases}$$

(II) Mostrar si es posible, usando la proyección estereográfica, cubrir la esfera con dos entornos coordenados.

Solución.

(I) Dado $q \in XY$ tal que $q = (q_1, q_2)$ hallamos el punto $p \in \mathbb{S}^2 : \pi(p) = q$. Buscamos el punto de intersección entre la esfera \mathbb{S}^2 y la recta r que une q con N . Una parametrización de la recta puede ser

$$r \equiv \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ 2 \end{pmatrix} t$$

entonces, $\forall (x, y, z) \in r$ tenemos que

$$x = q_1(1 - t), \quad y = q_2(1 - t), \quad z = 2t$$

Sustituimos en la ecuación de la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ para hallar el punto de intersección

$$q_1^2(1 - t)^2 + q_2^2(1 - t)^2 + (2t - 1)^2 = 1$$

$$(q_1^2 + q_2^2)(1 - t)^2 + (2t - 1)^2 = 1$$

$$(q_1^2 + q_2^2)(1 - t)^2 = 4t(1 - t)$$

$$(q_1^2 + q_2^2)(1 - t) = 4t$$

$$q_1^2 + q_2^2 = t(4 + q_1^2 + q_2^2)$$

$$\Rightarrow t = \frac{q_1^2 + q_2^2}{4 + q_1^2 + q_2^2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4q_1}{q_1^2 + q_2^2 + 4}, \quad y = \frac{4q_2}{q_1^2 + q_2^2 + 4}, \quad z = \frac{2(q_1^2 + q_2^2)}{q_1^2 + q_2^2 + 4}$$

(II) Se puede cubrir la esfera usando dos parametrizaciones, una X usando $N = (0, 0, 2)$ y otra Y usando $S = (0, 0, 0)$.

Ejercicio 9 (11). Ejemplo 4 sección 2.3 do Carmo

Solución. Sea $X(u, v) = (f(v) \cos(u), f(v) \sin(u), g(v))$. Entonces,

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -f(v) \sin(u) & f(v) \cos(u) & 0 \\ f'(v) \cos(u) & f'(v) \sin(u) & g'(v) \end{vmatrix}$$

$$= (f(v)g'(v) \cos(u), f(v)g'(v) \sin(u), -f(v)f'(v))$$

Entonces, $X_u \times X_v \neq 0 \Leftrightarrow f'(v), g'(v) \neq 0$. Para ello es condición suficiente que φ sea curva regular.

Capítulo 3

Superficies II

Ejercicio 10 (1). Sea $S, S' \subset \mathbb{R}^3$ superficies, $\alpha : I \rightarrow S$ una curva diferenciable, $f : S \rightarrow S'$ aplicación diferenciable. Demostrar que $f \circ \alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S'$ es una curva diferenciable.

Solución. Ejemplo 2.39 Sebastian

Ejercicio 11 (2). Construir un difeomorfismo entre la esfera y el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Hallar su diferencial.

Solución. Sea la esfera

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

y el elipsoide

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$$

y $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow E$ definida por

$$f(x, y, z) = (ax, by, cz).$$

Vemos que f está bien definida. Si $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$, entonces

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Ahora, $f(x, y, z) = (x', y', z')$ tal que

$$x' = ax, \quad y' = by, \quad z' = cz$$

$$\Rightarrow x = \frac{x'}{a}, \quad y = \frac{y'}{b}, \quad z = \frac{z'}{c}$$

entonces,

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

por tanto, $(x', y', z') = f(x, y, z) \in E$. Y por el teorema de la función inversa, f es un difeomorfismo. Su diferencial $(df)_p : T_p(\mathbb{S}^2) \rightarrow T_{f(p)}(E)$ es

$$(df)_p = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Ejercicio 12 (4). Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie y $p_0 \notin M$. Se define la función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(p) = |p - p_0|^2, \quad \forall p \in M.$$

Demostrar que $(df)_p(w) = 2w \cdot (p - p_0), \forall w \in T_p(M)$. Demostrar también que $p \in M$ es punto crítico de $f \Leftrightarrow p\vec{p}_0$ es normal a M .

Solución. Sea $p \in M, w \in T_p(M), \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ curva tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$. Entonces, para $p_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus M$, tenemos por la regla de la cadena que

$$\begin{aligned} (df)_p(w) &= \frac{d}{dt} |\alpha(t) - p_0|^2 \\ &= 2(\alpha'(0) \cdot (\alpha(0) - p_0)) \\ &= 2(w \cdot (p - p_0)) \end{aligned}$$

Como $(df)_p(w) = 0 \Leftrightarrow p$ es punto crítico. Entonces, p es punto crítico $\Leftrightarrow 2(w \cdot (p - p_0)) = 0$. Es equivalente a que $p\vec{p}_0$ sea normal a M .

Ejercicio 13 (5). Demostrar que si todas las rectas normales a una superficie M conexa concurren en un punto $p_0 \in \mathbb{R}^3$, entonces M está contenida en una esfera de centro p_0 .

Solución. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(p) = |p - p_0|^2, \quad \forall p \in M.$$

Como todas las rectas normales a M en p pasan por p_0 , entonces $\forall p \in M, p$ es un punto crítico $\Rightarrow (df)_p = 0$. Ahora, M conexa y $(df)_p = 0, \forall p \in M \Rightarrow f$ es constante. Entonces, $\exists R > 0$ tal que

$$f(p) = |p - p_0|^2 = R, \quad \forall p \in M$$

Por tanto, $\forall p \in M, p \in \mathbb{S}^2(p_0, R)$.

Ejercicio 14 (6). Dos superficies regulares S_1, S_2 se cortan transversalmente si $T_p(S_1) \neq T_p(S_2), \forall p \in S_1 \cap S_2$. Demostrar que si S_1 corta transversalmente a S_2 , entonces $S_1 \cap S_2$ es una superficie regular.

Solución. Como toda superficie es localmente el grafo de una función diferenciable, S_1 viene dada por $f(x, y, z) = 0$ y S_2 viene dado por $g(x, y, z) = 0$ en un entorno de p , donde 0 es un valor regular de f y g . En este entorno de p , $S_1 \cap S_2$ viene dado por la imagen inversa de $(0, 0)$ de la aplicación $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : F(q) = (f(q), g(q))$. Dado que S_1 y S_2 se cortan transversalmente, los vectores normales (f_x, f_y, f_z) y (g_x, g_y, g_z) son linealmente independientes. Por tanto, $(0, 0)$ es un valor regular de F y $S_1 \cap S_2$ es una curva regular.

REVISAR

Ejercicio 15 (Evaluación Continua). Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Demostrar que

1. Si $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ es una parametrización y $h : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ es difeomorfismo, entonces $X \circ h : V \rightarrow S$ es parametrización.
2. Sea $S' \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Si $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ es parametrización y $\phi : S \rightarrow S'$ difeomorfismo, entonces $\phi \circ X : U \rightarrow S'$ es parametrización de S' .
3. $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ parametrización de $Y(U) \Leftrightarrow Y$ es un difeomorfismo.

Solución.

1. Lo vemos usando la definición. Debemos comprobar que

a) $X \circ h$ es diferenciable.

X es parametrización $\Rightarrow X$ es diferenciable y h difeomorfismo $\Rightarrow h$ diferenciable. Por tanto, $X \circ h$ es diferenciable ya que la composición de aplicaciones diferenciables es diferenciable.

b) $X \circ h$ es homeomorfismo.

X parametrización $\Rightarrow X$ homeomorfismo y h difeomorfismo $\Rightarrow h$ homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable. Entoces, $X \circ h$ es homeomorfismo ya que la composición de homeomorfismos es homeomorfismo.

c) $d(X \circ h)$ es inyectiva.

X parametrización $\Rightarrow (dX)_q$ es inyectiva y h difeomorfismo $\Rightarrow (dh)_p$ es inyectiva (*). Como la composición de funciones inyectivas es inyectiva, entonces $d(X \circ h)$ es inyectiva.

Por tanto, $X \circ h$ es parametrización.

2. Usamos que Y es parametrización $\Leftrightarrow Y$ es difeomorfismo. Como X parametrización $\Rightarrow X$ difeomorfismo, entonces $\phi \circ X$ es difeomorfismo por ser composición de difeomorfismos. Por tanto, $\phi \circ X$ difeomorfismo $\Rightarrow \phi \circ X$ parametrización.

3. (\Rightarrow) Si $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ es una parametrización, entonces

$$Y^{-1} : Y(U) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

es diferenciable. Además, $\forall p \in Y(U), \forall Z : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ parametrización,

$$Y^{-1} \circ Z : Z^{-1}(W) \rightarrow Y^{-1}(W)$$

donde $W = Y(U) \cap Z(V)$, es diferenciable. Por tanto, U y $Y(U)$ son difeomorfos.

(\Leftarrow) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficies. Si $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ es difeomorfismo, entonces Y es diferenciable, Y es homeomorfismo y $(dY)_p$ (*) es inyectiva. Por tanto, Y es parametrización de S .

(*)