# Topología

Hugo Del Castillo Mola

21 de noviembre de 2022

# Índice general

# Parte I

# Topología General

# Capítulo 1

# Espacios Topológicos Arbitrarios

## 1.1. Espacios Topológicos

**Definición 1.1** (Topología). *Se llama topología sobre un conjunto $X$ a $\forall\tau \subset \mathcal{P}(X)$ que verifique:*

*(G1)* $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

*(G2)* $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$

*(G3)* $\forall \{A_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}$

**Observación.** *Al par $\big(X, \mathcal{T}\big)$ se denomina espacio topológico y los elementos de $X$ son puntos del espacio topológico.*

**Ejemplo.** (I) *Sea $X$ un conjunto, entonces $\mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_D$ es una topología y se llama topología discreta.*

(II) *La colección $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ es también una topología y la llamamos topología trivial.*

(III) *Sea $(X, d)$ un espacio métrico y sea $\mathcal{T}_d = \{U \subset X : \forall x \in U, \epsilon > 0 : B_\epsilon \subset U\}$ es una topología y la llamamos topología inducida por la métrica $d$.*

**Observación.** *Toda métrica induce un espacio topológico pero no todo espacio topológico es inducido por una métrica.*

**Definición 1.2** (Espacio Metrizable). *Sea $\big(X, \mathcal{T}\big)$ e.t., decimos que es un espacio matizable si $d$ métrica sobre $X$ tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.*

**Definición 1.3** (Conjunto Abierto)**.** *Sea $\big(X, \mathcal{T}\big)$ espacio topológico, decimos que $U \subset X$ es un conjunto abierto si $U \in \mathcal{T}$.*

**Observación.** *Si $U$ es un conjunto abierto, entonces $X \setminus U$ es un conjunto cerrado.*

**Observación.** *Existen conjuntos que son abiertos y cerrados simultáneamente. Y existen conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.*

**Ejemplo.** *Sea el espacio topológico $\big(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u\big)$ entonces $S = (0, 1])$ no es ni abierto ni cerrado.*

**Ejemplo.** *Sea el espacio topológico $\big(X, \mathcal{T}_d\big)$ donde $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ entonces $\forall S \subset X$, $S$ es abierto y cerrado simultáneamente.*

**Definición 1.4** (Comparación de Topologías)**.** *Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías sobre un conjunto $X \neq \emptyset$. Si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ se dice que $\mathcal{T}'$ es más fina (más fuerte) que $\mathcal{T}$. También podemos decir que $\mathcal{T}$ es menos fina que $\mathcal{T}'$.*

**Notación.** *Sea $\big(X, \mathcal{T}\big)$ e.t., $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} = \{C \subset X : C$ es cerrado en $\big(X, \mathcal{T}\big)\}$.*

**Proposición 1.1** (Dualidad conjuntos abiertos y cerrados)**.** *Sea $\mathcal{F}$ es la familia de conjuntos cerrados de un espacio topológico $(X, \mathcal{F})$.*

*(F1) $\emptyset, X$ son cerrados.*

*(F2) $\forall C_1, C_2$ cerrados $\Rightarrow C_1 \cup C_2$ es cerrado.*

*(F3) $\forall \{C_j\}_{j \in J}$ cerrados $\Rightarrow \bigcap_{j \in J} C_j$ es cerrado.*

*Recíprocamente, si $X \neq \emptyset$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ y $\mathcal{F}$ cumple (i, ii, iii) entonces la colección de los miembros complementarios a $\mathcal{F}$ es una topología sobre $X$ en donde la familia de cerrados es $\mathcal{F}$.*

**Observación.** *Este resultado muestra la relación entre las nociones de conjuntos abiertos y cerrados. Cualquier resultado sobre conjuntos abiertos en un espacio topológico se convierte en uno sobre cerrados al remplazar* **abierto** *por* **cerrado** *y $\cup$ por $\cap$.*

**Definición 1.5** (Adherencia)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. y $S \subset X$ se llama adherencia de $S$ en $(X, \mathcal{T})$ al conjunto*

$$\overline{S} = \bigcap \{C \subset X : C \text{ es cerrado y } S \subset C\}$$

**Observación.** *$\overline{S}$ es cerrado, $S \subset \overline{S}$ y $\overline{S}$ es el menor cerrado que contiene a $S$.*

**Lema 1.0.1.** *Si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

**Demostración.** *Como $B \subset \overline{B}$, $A \subset B \Rightarrow A \subset \overline{B}$ y por ser $\overline{B}$ cerrado, se tiene que $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

**Proposición 1.2** (Propiedades Adherencia)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. entonces*

*(K1)* $\overline{\emptyset} = \emptyset$,

*(K2)* $\forall S \subset X, S \subset \overline{S}$,

*(K3)* $\forall S \subset X, \overline{\overline{S}} = S$,

*(K4)* $\forall A, B \subset X, \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

*(K5)* $\forall C \subset X$, $C$ *es cerrado* $\Leftrightarrow C = \overline{C}$.

**Demostración.** *(iv) Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico. Dado que $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ se tiene que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Por otro lado, $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ y $\overline{B} \subset \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.*

**Teorema 1.1.** *Sea $X \neq \emptyset$ y $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X) : S \mapsto \varphi(S) \equiv \overline{S}$ tal que $\varphi$ cumple las 4 propiedades anteriores. Entonces, existe una única topología $\mathcal{F}$ sobre $X$ tal que $\forall S \subset X, \varphi(S)$ es la adherencia de $S$ en $(X, \mathcal{F})$.*

**Demostración.** *Sea $\mathcal{F} = \{F \subset X : \overline{F} = F\} \subset \mathcal{P}(X)$. Queremos ver que se cumplen las propiedades de Prop.1.1.(i, ii, iii).*

(I) *Por Prop.1.2(i, ii).*

(II) *Por Prop.1.2(iv), sean* $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$*. Entonces,* $\overline{F_1 \cup F_2} = \overline{F_1} \cup \overline{F_2} = F_1 \cup F_2 \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$*.*

(III) *Si* $F \subset G$ *por Prop.1.2(iv)* $\overline{G} = \overline{F} \cup (\overline{G \setminus F}) \Rightarrow \overline{F} \subset \overline{G}$ *Ahora, sean* $F_j \in \mathcal{F}, \forall j \in J$ *Entonces,* $\bigcap_{j\in J} F_j \subset F_j, \forall j \in J \Rightarrow \overline{\bigcap_{j\in J} F_j} \subset \overline{F_j}, \forall j \in J$ *y por tanto,* $\overline{\bigcap_{j\in J} F_j} \subset \bigcap_{j\in J} \overline{F_j} = \bigcap_{j\in J} F_j$ *y por Prop.1.2(ii) se tiene que* $\overline{\bigcap_{j\in J} F_j} = \bigcap_{j\in J} F_j$*, esto es,* $\bigcap_{j\in J} F_j \in \mathcal{F}$*.*

*Por tanto,* $\mathcal{F}$ *es la familia de cerrados de algún e.t.* $\big(X, \mathcal{T}\big)$*. Falta por ver que la adherencia es la operación* $\varphi$*. Dado que* $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$ *se tiene que* $\overline{S} \in \mathcal{F}$ *y por Prop.1.2(ii)* $S \subset \overline{S}$*. Si* $C \in \mathcal{F}$ *tal que* $S \subset C$ *entonces* $\overline{S} \subset \overline{C} = C \Rightarrow \overline{S}$ *es el elemento de* $\mathcal{F}$ *más pequeño que contiene a* $S$*.*

**Observación.** *A la operación anterior se le llama operación de clausura de Kuratowski.*

**Definición 1.6** (Interior)**.** *Sea* $\big(X, \mathcal{T}\big)$ *e.t.,* $S \subset X$ *se llama interior de* $S$ *en* $\big(X, \mathcal{T}\big)$ *al conjunto*

$$\mathring{S} = \bigcup \{A \subset X \text{ abierto y } A \subset S\}.$$

**Observación.** $\mathring{S}$ *es abierto de* $\mathcal{T}$*,* $\mathring{S} \subset S$ *y es el mayor abierto contenido en* $S$*.*

**Proposición 1.3** (Propideades interior)**.** *content*

**Proposición 1.4.** *Sea* $\big(X, \mathcal{T}\big)$ *e.t.,* $S \subset X$*. Enotnces:*

(I) $X \setminus \overline{S} = (X \mathring{\setminus} S)$*.*

(II) $X \setminus \mathring{S} = \overline{X \setminus S}$*.*

**Observación.** $\overline{S^c} = \mathring{S}^c$*.*

**Demostración.** (I) $X \setminus \bigcap_{C\in\mathcal{F}: S\subset C} C = \bigcup_{C\in\mathcal{F}: S\subset C} X \setminus C = \bigcup_{G\in\mathcal{T}: G\subset X\setminus S} G = (X \mathring{\setminus} S)$

(II) $X \setminus \mathring{S} = X \setminus \bigcup_{G\in\mathcal{T}: G\subset S} G = \bigcap_{G\in\mathcal{T}: G\subset S} (X \setminus G) = \bigcap_{C\in\mathcal{F}: X\setminus S\subset C} C =$

$\overline{X \setminus S}$

**Definición 1.7** (Frontera). *Sea $\left(X,\mathcal{T}\right)$ e.t., $S \subset X$. Se llama frontera de $S$ en $\left(X,\mathcal{T}\right)$ a*

$$Fr(S) = \overline{S} \cap \overline{(X \setminus S)}$$

**Observación.** $Fr(S)$ *es cerrado*

**Observación.** $Fr(S) = Fr(X \setminus S)$

**Observación.** $Fr(S) \not\subset S$

**Proposición 1.5.** *Sea $\left(X,\mathcal{T}\right)$ e.t., $S \subset X$. Entonces:*

*(I)* $\overline{S} = S \cup Fr(S)$

*(II)* $\mathring{S} = S \setminus Fr(S) = S \setminus \left(Fr(S) \cap S\right)$

*(III)* $X = \mathring{S} \cup (X \mathring{\setminus} S) \cup Fr(S)$

*(IV)* $Fr(S) = \overline{S} \setminus \mathring{S}$

**Demostración.** *(I)*

$$S \cup Fr(S) = S \cup \left(\overline{S} \cap \overline{X \setminus S}\right) =$$

$$= (S \cup \overline{S}) \cap (S \cup \overline{X \setminus S}) = \overline{S}$$

*(II)*

$$S \setminus Fr(S) = S \setminus (\overline{S} \cap \overline{X \setminus S}) =$$
$$= (S \setminus \overline{S}) \cup (S \setminus \overline{X \setminus S}) = \emptyset \cup (S \cap (X \setminus \overline{X \setminus S})) =$$
$$= (S \cap (X \setminus (X \setminus \mathring{S}))) = (S \cap \mathring{S}) = \mathring{S}$$

*(III)*

$$X = \mathring{S} \cup (X \setminus \mathring{S}) = \mathring{S} \cup \overline{X \setminus S} =$$
$$= \mathring{S} \cup \left[(X \setminus S) \cup Fr(X \setminus S)\right] =$$
$$= \mathring{S} \cup \left[(X \mathring{\setminus} S) \cup \left(Fr(X \setminus S) \cap (X \setminus S)\right) \cup Fr(X \setminus S)\right] =$$
$$= \mathring{S} \cup (X \mathring{\setminus} S) \cup Fr(X \setminus S) = \mathring{S} \cup (X \mathring{\setminus} S) \cup Fr(S)$$

(IV)
$$Fr(S) = \overline{S} \cap \overline{(X \setminus S)} = \overline{S} \cap (X \setminus \mathring{S})$$

**Definición 1.8.** *Sea $\big(X, \mathcal{T}\big)$ e.t., $S \subset X$ se dice que es denso en $\big(X, \mathcal{T}\big)$ si $\overline{S} = X$*

## 1.2. Entornos

**Definición 1.9.** *Sea $\big(X, \mathcal{T}\big)$ e.t., $x \in X$, $V \subset X$. Se dice que $V$ es un entorno de $x$ en $\big(X, \mathcal{T}\big)$ si $\exists A \in \mathcal{T} : x \in A \subset V$.*

**Definición 1.10.** *Sea $\big(X, \mathcal{T}\big)$ e.t., $x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ es la colección de todos los entornos de $x$ y se llama sistema de entornos de $x$ en $\big(X, \mathcal{T}\big)$.*

**Observación.** *Si $\big(X, \mathcal{T}\big)$ e.t., $x \in X$, $V \subset X$ entonces $V$ es entorno de $x \Leftrightarrow x \in \mathring{V}$.*

**Notación.** *$U^x, V^x$ entornos de $x$.*

**Proposición 1.6.** *Sea $\big(X, \mathcal{T}\big)$ e.t., $\mathcal{V}(x)$ tiene las siguiente propiedades:*

*(N1)* $\forall U \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in U$.

*(N2)* $\forall U, V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{V}(x)$.

*(N3)* $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists V \in \mathcal{V}(x)$ *tal que* $\forall y \in V, U \in \mathcal{V}(y)$.

*(N4)* $\forall U \in \mathcal{V}(x)$, $\exists V \subset X : U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$.

**Demostración.** (I) *Trivial, a partir de la definición.*

(II) $x \in \mathring{U}, x \in \mathring{V} \Rightarrow x \in \mathring{U} \cap \mathring{V} \subset U \mathring{\cap} V \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{V}(x)$.

(III) *Sean* $U \in \mathcal{V}(x), V = \mathring{U}$ *como* $x \in \mathring{U} = V \Rightarrow \forall y \in V \in \mathcal{T}$ *y* $V \subset U \Rightarrow U \in \mathcal{V}(y)$.

(IV) $U \in \mathcal{V}(x), U \subset V \Rightarrow x \in \mathring{U} \subset \mathring{V} \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$.

**Proposición 1.7.** *Sea $X \neq \emptyset$, $\forall x \in X : \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{P}(x)$ que cumple (N1, N2, N3, N4) anteriores, entonces $\exists! \mathcal{T}$ sobre $X : \forall x \in X, \mathcal{V}(x)$ es el sistema de entornos de $x$ en $\big(X, \mathcal{T}\big)$.*

**Demostración.** *Sea $\mathcal{T} = \{G \subset X : \forall x \in G, G \in \mathcal{V}(x)\}$. Vemos que $\mathcal{T}$es una topología:*

(I) *Prop1.6.(N1) $X \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow X \in \mathcal{T}$*

(II) $\forall G_1, G_2 \in \mathcal{T}, x \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow G_1, G_2 \in \mathcal{V}(x)$, *Prop.1.6.(N2)* $\Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{V}(x)$.

(III) $\forall \{G_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{T}, x \in \bigcup_{j\in J} G_j \Rightarrow \exists j_0 \in J : G_{j_0} \in \mathcal{V}(x)$, *Prop.1.6.(N4)* $\Rightarrow \bigcup_{j\in J} G_j \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \bigcup_{j\in J} G_j \in T$

$\Rightarrow \mathcal{T}$ *es topolgía.*
*Vemos ahora que $S$ es entorno de $x \Leftrightarrow S \in \mathcal{V}(x)$.*

- $(\Rightarrow)$ $S$ *entorno de* $x$ *en* $\big(X, \mathcal{T}\big) \Rightarrow \exists G \in \mathcal{T} : x \in G \subset S \Rightarrow G \in \mathcal{V}(x)$ *Prop.1.6.(iv)* $\Rightarrow S \in \mathcal{V}(x)$.
- $(\Leftarrow)$ $S \in \mathcal{V}(x)$. *Sea $U \subset S$ ACABAR*

*Falta ver que $\mathcal{T}$ es única.*

**Definición 1.11** (Base de Entorno)**.** *Sea $x \in X, \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$. Se dice que $\mathcal{B}(x)$ es una base de un entorno de $x$ en $\big(X, \mathcal{T}\big)$ si $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset U$.*

**Observación.** *De la definición de base queda determinado un entorno como $\mathcal{V}(x) = \{U \subset X : \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset U\}$*

**Ejemplo.** $\forall \big(X, \mathcal{T}\big)$ *e.t.* $\mathcal{V}(x)$ *es una base de entornos de* $x$.

**Ejemplo.** *Sea $\big(X, \mathcal{T}_{\mathcal{D}}\big), \mathcal{T}_D = \mathcal{P}(x), \forall x \in X$ entonces $\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}$ es base de entornos de $x$.*

**Ejemplo.** *Sea $\big(X, \mathcal{T}\big)$ metrizable. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$, $d$ métrica tal que $\forall x \in X, \mathcal{B}(x) = \{B_\epsilon(x) : \epsilon > 0\}$ entonces $\mathcal{B}(x)$ es base de entornos de $x$.*

**Ejemplo.** $\forall \big(X, \mathcal{T}\big)$ *e.t.,* $\mathcal{B}(x) = \{\mathring{U} : U \in \mathcal{V}(x)\}$ *es base de entornos de* $x$.

**Ejemplo.** *Sea $\big(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u\big) : \forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{B}(x) = \{\big[x - \epsilon, x + \epsilon\big] : \epsilon > 0\}$ entonces $\mathcal{B}(x)$ es base de entornos de $x$.*

**Proposición 1.8** (Propiedades de Bases de Entornos)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. y* $\mathcal{B}(x)$ *una base de entornos de* $x$ *en* $(X, \mathcal{T})$, $\forall x \in \mathcal{T}$. *Entonces:*

*(V1)* $B \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow x \in B$.

*(V2)* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}(x) : B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

*(V3)* $B_1 \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow \exists B_2 \in \mathcal{B}(x) : \forall y \in B_2, \exists B \in \mathcal{B}(y)$ *tal que* $B \subset B_1$.

**Demostración.** *(V1)* $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x), B \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow x \in B$.

*(V2)* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}(x) : B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

*(V3)* $B_1 \in \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ *Prop.1.6.(iii)* $\Rightarrow \exists U \in \mathcal{V}(x)$ *tal que* $\forall y \in U, B_1 \in \mathcal{B}(y) \Rightarrow \exists B_2 \in \mathcal{B}(x) : B_2 \subset U$ *tal que* $\forall y \in B_2, B_1 \in \mathcal{V}(y) \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}(y) : B \subset B_1$.

**Proposición 1.9.** *Sea* $X \neq \emptyset, \mathcal{B} : X \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{P}(x))$ *cumpliendo (i, ii, iii) anteriores, entonces se define una topología en* $X$ *en la que* $\mathcal{B}(x)$ *es una base de entornos de* $x, \forall x \in X$.

**Demostración.** *Sea* $\forall x \in X$,

$$\mathcal{V}(x) = \{U \subset X : \exists B \subset U \text{ para algún } B \in \mathcal{B}(x)\}$$

*tal que* $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ *tiene las propiedades V1, V2, V3. Veamos que* $\mathcal{V}(x)$ *tiene las propiedades N1, N2, N3, N4.*

*(N1)* $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists B \subset U : B \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow x \in B \subset U \Rightarrow x \in U$.

*(N2)* $U_1, U_2 \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x) : B_1 \subset U_1, B_2 \subset U_2$ *y (V2)* $\Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}(x) : B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$. *Entonces,* $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}(x)$.

*(N3)* $U \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists B \subset U : B \in \mathcal{B}(x)$, *(V3)* $\Rightarrow \exists B_0 \in \mathcal{B}(x) : \forall y \in B_0, \exists B_y \in \mathcal{B}(y) : B_y \subset B$. *Entonces* $B \in \mathcal{V}(y), \forall y \in B_0 \Rightarrow U \in \mathcal{V}(y), \forall y \in B_0$.

*(N4)* $U \in \mathcal{V}(x), V \subset X : U \subset V \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$.

*Entonces, $\mathcal{V}(x)$ es un sitema de entornos de $x, \forall x \in X$ y $\forall x \in X,\ \mathcal{B}(x)$ es una base de entornos de $x$ en la topología resultante en $X$.*

**Definición 1.12** (Bases de Entronos Equivalentes)**.** *Sea $X \neq \emptyset$. Si una topología sobre $X$ está definida por dos bases de entornos, se dice que las bases son equivalentes.*

**Proposición 1.10.** *Sea $X \neq \emptyset$. Dos bases de entornos de $x$, $\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)$ de $X$ son equivalentes si y solo si $\forall x \in X, \forall i \in \{1,2\}, \forall B \in \mathcal{B}_i(x), \exists B_j \in \mathcal{B}_i(x) : B_j \subset B_i, \forall j \in \{1,2\}, j \neq i$.*

**Proposición 1.11** (Caracterización bases equivalentes)**.** *Sean $\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)$ dos bases de entornos de $x$ en $\big(X, \mathcal{T}\big)$, estas son equivalentes $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X, \forall i \in \{1,2\}, \forall B_i \in \mathcal{B}_i(x), \exists B_j \in \mathcal{B}_j(x), j \in \{1,2\}, j \neq i : B_j \subset B_i$.*

**Demostración.** *($\Rightarrow$)* $\forall i \in \{1,2\}, \forall B_i \in \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists B_j \in \mathcal{B}(x), \forall j \in \{1,2\}, j \neq i$.

*($\Leftarrow$)*
*ACABAR*

**Definición 1.13.** *Sea $\big(X, \mathcal{T}\big)$ e.t. $S \subset X, x \in X$.*

(I) *Se dice que $x$ es un puto interior de $S$ en $\big(X, \mathcal{T}\big)$ si $\exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \subset S$.*

(II) *Se dice que $x$ es un punto adherente de $S$ en $\big(X, \mathcal{T}\big)$ si $\forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset$.*

(III) *Se dice que $x$ es un punto de acumulación si $\forall \mathcal{U}^x$, $\mathcal{U}^x \setminus \{x\} \cap S \neq \emptyset$.*

(IV) *Se dice que $x$ es un punto de frontera si $\forall \mathcal{U}^x$, $\mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset, \mathcal{U}^x \cap (X \setminus S) \neq \emptyset$.*

(V) *Se dice que $x$ es punto aislado si $\exists \mathcal{U}^x$ tal que $\mathcal{U}^x \cap S = \{x\}$.*

**Definición 1.14.** *El conjunto de puntos de acumulación se llama conjunto derivado y se denota $S'$.*

**Proposición 1.12.** *Sea $\big(X,\mathcal{T}\big)$ e.t. Entonces,*

(I) $A\subset X$ *es abierto de* $\big(X,\mathcal{T}\big)\Leftrightarrow \forall x\in A,\exists\mathcal{U}^x:\mathcal{U}^x\subset A$.

(II) $C\subset X$ *es cerrado* $\Leftrightarrow \forall x\notin C,\exists\mathcal{U}^x:\mathcal{U}^x\cap C=\emptyset$.

(III) $S\subset X,\ \mathring{S}=\{x\in X:\exists\mathcal{U}^x,\mathcal{U}^x\subset S\}$.

(IV) $S\subset X,\overline{S}=\{x\in X:\forall\mathcal{U}^x,\mathcal{U}^x\cap S\neq\emptyset\}$.

(V) $S\subset X,Fr(S)=\{x\in X:\forall\mathcal{U}^x,\mathcal{U}^x\cap S\neq\emptyset,\mathcal{U}^x\cap(X\setminus S)\neq\emptyset\}$.

**Demostración.** (I) *Es la propiedad V1.*

(II) $C$ *es cerrado* $\Leftrightarrow X\backslash C\in\mathcal{T}\Leftrightarrow\forall x\in X\backslash C,\exists\mathcal{U}^x:\mathcal{U}^x\subset X\backslash C\Rightarrow X\backslash C$ *es abierto.*

(III) *Sigue de (iv) aplicando las leyes de De Morgan.*

(IV) $X\backslash\overline{S}=(X\overset{\circ}{\setminus}S)=\{x\in X:\exists\mathcal{U}^x,\mathcal{U}^x\subset X\backslash S\}$ *cuyo complementario es* $\overline{S}=\{x\in X:\forall\mathcal{U}^x,\mathcal{U}^x\cap S\neq\emptyset\}$.

(V) $Fr(S)=\overline{S}\cap\overline{X\setminus S}$

**Observación.** *En la proposición anterior se pueden usar bases en lugar de sistemas de entornos.*

**Corolario 1.1.1.** *Sea $\big(X,\mathcal{T}\big)$ e.t., $S\subset X$ entonces*

(I) $\overline{S}=\{x\in X:x$ *es punto adherente de* $S\}$.

(II) $\mathring{S}=\{x\in X:x$ *es punto interior de* $S\}$.

(III) $Fr(S)=\{x\in X:x$ *es punto frontera de* $S\}$.

**Proposición 1.13.** *Sea $\big(X,\mathcal{T}\big)$ e.t. $E\subset X$. Entonces $E$ es denso en $\big(X,\mathcal{T}\big)\Leftrightarrow\forall U\in\mathcal{T}\setminus\{\emptyset\},U\cap E\neq\emptyset$.*

**Demostración.** *($\Rightarrow$) Suponemos que $E$ es denso, es decir, $\overline{E} = X$. Entonces, $\forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$, $U$ es abierto $\Rightarrow \forall x \in \mathring{U} = U \Rightarrow U$ es entorno de $x$ en $(X, \mathcal{T})$. Y como $x$ es punto adherente de $E \Rightarrow U \cap F \neq \emptyset$.*

*($\Leftarrow$) $\forall x \in X, \forall \mathcal{U}^x$ entorno de $x \Rightarrow \mathring{\mathcal{U}}^x \subset \mathcal{U}^x \subset X \Rightarrow \mathring{\mathcal{U}}^x \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ y por la hipótesis $\mathring{\mathcal{U}}^x \cap E \subset \mathcal{U}^x \cap E \neq \emptyset \Rightarrow x$ punto adherente de $E$, $x \in \overline{E} \Rightarrow X \subset \overline{E}$.*

## 1.3. Bases

**Definición 1.15** (Base). *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Se dice que $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$ si $\forall A \in \mathcal{T}, \exists \mathcal{B}_A \subset \mathcal{B} : A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_A} B$. Y se dice que $\mathcal{T}$ está engendrada por $\mathcal{B}$.*

**Observación.** *$\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ tal que $\mathcal{T} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}_A} B : \mathcal{B}_A \subset \mathcal{B}\}$.*

**Observación.** *$\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ es una base de $X \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{T}, \forall x \in A \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset A$.*

**Ejemplo.** *(I) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u), \mathcal{B} = \{(a, b) : a < b\}$ es base de $\mathcal{T}_u$.*

*(II) $(X, \mathcal{T}_u), \mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ es base de $\mathcal{T}_u$.*

*(III) $(X, \mathcal{T})$ metrizble, $\mathcal{T}_d$ topología inducida por $d$. Entonces $\mathcal{B} = \{B_\epsilon(x) : x \in X, \epsilon > 0\}$ es base de $\mathcal{T}_d$.*

**Proposición 1.14.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ entonces, $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ es base de entornos de $x$ en $(X, \mathcal{T})$.*

**Observación.** *La única diferencia entre bases y bases de entornos es que las bases no tinen por que consister de conjuntos abiertos.*

**Demostración.** *($\Rightarrow$) Suponemos que $\mathcal{B}$ es base de $X$, $x \in X$ y $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$. Sea $U \in \mathcal{B}_x$ entonces $U \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T} : x \in U = \mathring{U} \Rightarrow U$ es un entorno de $x$. Sea $U \in \mathcal{V}(x)$, entonces $x \in \mathring{U} \in \mathcal{T}$ donde $\mathcal{T} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} B : \mathcal{B}_U \subset \mathcal{B}\}$, es decir, $\mathring{U}$ es la unión de elementos de $\mathcal{B}$ entonces $\exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset \mathring{U}$. Por tanto, $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists B \in \mathcal{B}_x : B \subset U \Rightarrow \mathcal{B}_x$ es base de entronos de $x$.*

*($\Leftarrow$) Suponesmos que $\mathcal{B}_x$ es una base de entornos de $x$, $\forall x \in X$ y $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$. Entonces, $\forall A \in \mathcal{T}, \forall x \in A, \exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subset A \Rightarrow$*

$A = \bigcup\{B_x : x \in A\} \Rightarrow \mathcal{B}$ *es base para* $X$.

**Teorema 1.2.** *Sea* $X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. *Entonces,* $\mathcal{B}$ *es base de una topología* $\mathcal{T}$ *en* $X \Leftrightarrow$

(I) $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$.

(II) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B},\ p \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} : p \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

**Demostración.** (I) ($\Rightarrow$) $\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{B\in\mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \in \mathcal{B}\right\}, X \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists \mathcal{B}_0 \in \mathcal{B} : X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_0} B$.

(II) ($\Rightarrow$) *A partir de la definición de base.* ($B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2$).

($\Leftarrow$) *Suponemos que* $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$ *donde* $\mathcal{B} = \{K \subset X : K$ *cumple las propiedades (i), (ii)* $\}$. *Sea* $\mathcal{T} = \{\bigcup_{B\in\mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}$. *Entonces,*

(G1) $\emptyset = \bigcup_{B\in\emptyset} B \in \mathcal{T}$ *y* $X \in \mathcal{T}$.

(G2) $\left(\bigcup_{B\in\mathcal{B}_1} B\right) \cap \left(\bigcup_{B'\in\mathcal{B}_2} B'\right) = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_1, B'\in\mathcal{B}_2} B \cap B'$, *por (ii)* $\Rightarrow$ *la intersección de dos elementos de* $\mathcal{B}$ *es una unión de elementos de* $\mathcal{B}$.

(G3) $\{A_j\}_{j\in J} = \{\bigcup_{B\in\mathcal{B}_j} B : j \in J\} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}$.

**Definición 1.16** (Subbase)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.* $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. *Se dice que* $\mathcal{S}$ *es una subbase de* $\mathcal{T}$ *si la familia de todas las intersecciónes finitas de* $\mathcal{S}$ *es una base de* $\mathcal{T}$.

**Observación.** $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}, \mathcal{B} = \{\bigcap_{S\in\mathcal{S}'} S : \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ *es finito*$\}$ *es base de* $\mathcal{T}$.

**Proposición 1.15.** *Sea* $X \neq \emptyset, \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. *Entonces,* $\mathcal{S}$ *es una subbase de alguna topolpgía sobre* $X \Leftrightarrow \bigcup_{S\subset\mathcal{S}} S = X$.

**Demostración.** ($\Rightarrow$) *Sea* $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ *una subbase de* $\mathcal{T} \Rightarrow \{\bigcap_{S\in\mathcal{S}'} S : \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\} = \mathcal{B}$ *es base de* $\mathcal{T} \Rightarrow \forall B \in \mathcal{B}, \exists S_B \in \mathcal{S} : B \subset S_B \Rightarrow \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}} S_B \subset \bigcup_{S\in\mathcal{S}} S \subset X \Rightarrow \bigcup_{S\in\mathcal{S}} = X$.

($\Leftarrow$) *Sea* $\mathcal{B} = \{\bigcap_{S\in\mathcal{S}'} \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\}$.

*(i)* $\bigcap_{S\in\mathcal{S}} S = X \Rightarrow \bigcup_{B\in\mathcal{B}} = X$.

*(ii)* $\left(\bigcap_{S\in\mathcal{S}_1} S\right) \cap \left(\bigcap_{S'\in\mathcal{S}_2} S'\right) \bigcap_{S\in\mathcal{S}_1, S'\in\mathcal{S}_2}(S'\cap S) \subset \mathcal{B}$.

## 1.4. Subespacios

**Definición 1.17** (Subespacio)**.** *Sea $(X,\mathcal{T})$ e.t., $S\subset X$. Se llama topología relativa a $S$ a*

$$\mathcal{T}|_S = \{A\cap S : A\in\mathcal{T}\}$$

*y el par $(S,\mathcal{T}|_S)$ se llama subespacio topológico.*

**Proposición 1.16** (Propiedades Subespacio)**.** *Sea $(X,\mathcal{T})$ e.t., $S\subset X$. Entonces,*

(I) $C\subset S, C\in\mathcal{T}|_S \Leftrightarrow \exists A\in\mathcal{T} : A\cap S = C$.

(II) $C\subset S$, *$C$ cerrado en $(S,\mathcal{T}|_S) \Leftrightarrow \exists F$ cerrado en $(X,\mathcal{T}) : C = F\cap S$.*

(III) $\forall C\subset S$, $\overline{C}^S = S\cap\overline{C}^X$.

(IV) *$\forall x\in S, \mathcal{V}^x\subset S$ es un entorno de $x$ en $(S,\mathcal{T}|_S) \Leftrightarrow \exists\mathcal{U}^x$ entorno de $x$ en $(X,\mathcal{T})$ tal que $\mathcal{U}^x\cap S = \mathcal{V}^x$.*

(V) *$\mathcal{B}$ base de $T \Rightarrow \mathcal{B}_S = \{B\cap S : B\in\mathcal{B}\}$ es base de $(S,\mathcal{T}|_S)$.*

**Demostración.** (I) *Definición de subespacio.*

(II) *Sigue de (i).*

(III) *Sigue de (ii) y la definición de clausura de $C$ como la intersección de todos los conjunto cerrados que contienen $E$.*

(IV) *Sigue de (i) y la definición de entorno de $x$ como un conjunto que contiene un subconjunto abierto que contiene a $x$.*

(V) *ACABAR*

**Observación.** *Sea $S\subset X, C\subset S$ entonces no necesariamente $int(C)_S \neq int(C)_X\cap S$. Por ejemplo, $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}_u), S = C = \{0\}\times\mathbb{R}$.*

**Definición 1.18.** *Sea* $(\mathcal{P})$ *una propiedad de e.t. Se dice que* $\mathcal{P}$ *es propiedad hereditaria si dado e.t. que cumple* $\mathcal{P}$ *todos sus subespacios cumplen* $\mathcal{P}$.

## 1.5. Funciones continuas

**Definición 1.19** (Función continua)**.** *Sean* $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ *dos e.t. y* $f : X \to X'$ *una aplicación. Se dice que* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *es una aplicación continua en* $a \in X$ *si* $\forall \mathcal{V}^{f(a)}$ *entorno de* $f(a)$ *en* $(X', \mathcal{T}')$, $\exists \mathcal{U}^a$ *entorno de* $a$ *en* $(X, \mathcal{T}) : f(\mathcal{U}^a) \subset \mathcal{V}^{f(a)}$.

**Observación.** *Se dice que* $f$ *es continua si lo es* $\forall a \in X$.

**Teorema 1.3.** *Sean* $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ *dos e.t. y* $f : X \to X'$ *una aplicación. Entonces, son equivalentes:*

(I) $\forall A' \in \mathcal{T}', f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$

(II) $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *es aplicación continua.*

(III) $\forall C \subset X, f(\overline{C}^X) \subset (\overline{f(C)})^{X'}$.

(IV) $\forall C' \subset X, \overline{f^{-1}(C')}^X \subset f^{-1}(\overline{C'}^{X'})$.

(V) $\forall F'$ *cerrado de* $(X', \mathcal{T}')$, $f^{-1}(F')$ *es cerrado de* $(X, \mathcal{T})$.

**Demostración.** *(*$i \Rightarrow ii$*) Sea* $a \in X$, $\mathcal{V}^{f(a)}$ *entorno de* $f(a)$ *en* $(X', \mathcal{T}') \Rightarrow \mathring{\mathcal{V}}^{f(a)}$, $f(a) \in \mathring{\mathcal{V}}^{f(a)}$. *Ahora, por (i), tenemos* $a \in f^{-1}(\mathring{\mathcal{V}}^{f(a)}) \in \mathcal{T}$. *Sea* $f^{-1}(\mathring{\mathcal{V}}^{f(a)}) = \mathcal{U}^a$. *Entonces,* $f(\mathcal{U}^a) = f(f^{-1}(\mathring{\mathcal{V}}^{f(a)})) \subset \mathring{\mathcal{V}}^{f(a)} \subset \mathcal{V}^{f(a)} \Rightarrow f$ *es continua.*

*(*$ii \Rightarrow iii$*) Sea* $C \subset X, a \in \overline{C}^X, \mathcal{V}^{f(a)}$ *entorno de* $f(a)$ *en* $(X', \mathcal{T}')$. *Entonces, por (ii),* $\exists \mathcal{U}^a$ *entorno de* $a$ *en* $(X, \mathcal{T})$ *tal que* $f(\mathcal{U}^a) \subset \mathcal{V}^{f(a)} \Rightarrow \mathcal{U}^a \cap C \neq \emptyset \Rightarrow a \in \mathcal{U}^a \cap C \Rightarrow f(a) \in f(\mathcal{U}^a) \cap f(C) \subset \mathcal{V}^{f(a)} \cap f(C) \Rightarrow f(a) \in \overline{f(C)}^{X'}$.

*(iii* $\Rightarrow$ *iv)* $\forall C' \subset X' \Rightarrow f'(C') \subset X'$ *y por (iii)* $f(\overline{f^{-1}(C')})^X \subset \overline{f(f^{-1}(C'))}^{X'} \subset \overline{C'}^{X'} \Rightarrow \overline{f^{-1}(C')}^X \subset f^{-1}(\overline{C'}^{X'})$.

*(iv* $\Rightarrow$ *v)* $F'$ *cerrado de* $(X', \mathcal{T}') \Rightarrow \overline{f^{-1}(C')}^X \subset f^{-1}(\overline{F'}^{X'}) = f^{-1}(F') \Rightarrow$

*$f^{-1}(F')$ es cerrado en $(X, \mathcal{T})$.*

*(v $\Rightarrow$ i) $A' \in \mathcal{T}' \Rightarrow X' \setminus A'$ cerrado de $(X', \mathcal{T}') \Rightarrow f^{-1}(X' \setminus A)$ cerrado de $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow X \setminus f^{-1}(X' \setminus A') \in \mathcal{T}$. Y $x \notin f^{-1}(X' \setminus A') \Leftrightarrow f(x) \notin X' \setminus A' \Leftrightarrow f(x) \in A' \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A') \Rightarrow X \setminus f^{-1}(X' \setminus A')$.*

**Observación.** *$\forall (X, \mathcal{T})$ e.t. la aplicación $1_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ es continua.*

**Observación.** *$\forall (X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t. $\forall x'_0 \in X'$ la aplicación constante con $c_{x'_0} : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ es constante.*

**Proposición 1.17.** *Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), (X'', \mathcal{T}'')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ aplicación continua, $f' : (X', \mathcal{T}') \to (X'', \mathcal{T}'')$ aplicación continua. Entonces, $(f' \circ f) : (X, \mathcal{T}) \to (X'', \mathcal{T}'')$ es continua.*

**Demostración.** $\forall A'' \in \mathcal{T}'' \Rightarrow f^{-1}(A'') \in \mathcal{T}' \Rightarrow f^{-1}(f^{-1}(A'')) \in \mathcal{T}$ y $(f' \circ f)^{-1}(A'') = f^{-1}(f^{-1}(A''))$.

**Proposición 1.18.** *Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ continua. Entoces, $f|_S : (S, \mathcal{T}|_S) \to (X', \mathcal{T}')$ es aplicación continua.*

**Demostración.** $\forall A' \in \mathcal{T}', (f|_S)^{-1}(A') = f^{-1}(A') \cap S \in \mathcal{T}|_S$.

**Proposición 1.19.** *Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ continua, $S \subset X$. Entonces, $f : (X, \mathcal{T}) \to (f(X), \mathcal{T}'|_{f(X)})$ es aplicación continua.*

**Demostración.** $\forall G' \in \mathcal{T}'|_S \Rightarrow \exists A' \in \mathcal{T}' : G' = A' \cap f(X) \Rightarrow f^{-1}(G') = f^{-1}(A' \cap f(X)) = f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$.

**Proposición 1.20.** *Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : X \to X'$ aplicación. Si $F_1, F_2$ son cerrados de $(X, \mathcal{T})$ tal que $X = F_1 \cap F_2$ y $f|_{F_i} : (F_i, \mathcal{T}_{F_i}) \to (X', \mathcal{T}')$ es continua. Entonces, $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ es aplicación continua.*

**Demostración.** *$\forall F'$ cerrado de $(X', \mathcal{T}')$, $f^{-1}(F') = f^{-1}(F') \cap X = f^{-1}(F') \cap (F_1 \cup F_2) = (f^{-1}(F') \cap F_1) \cup (f^{-1}(F') \cap F_2)$ donde $(f^{-1}(F') \cap F_1) = f^{-1}|_{F_1}(F')$ cerrado en $F_1$ y $(f^{-1}(F') \cap F_2) = f^{-1}|_{F_2}(F')$ cerrado en $F_2 \Rightarrow f^{-1}(F')$ cerrado en $(X, \mathcal{T})$.*

**Definición 1.20** (Espacio Homeomorfo)**.** *Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t. $f : X \to X'$ aplicación. Se dice que $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ es homeomorfismo si $f$ es biyectiva y $f^{-1}$ es continua. En este caso, se dice que $(X, \mathcal{T})$ es homeomorfo a $(X', \mathcal{T}')$.*

**Observación.** *Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : X \to X'$ biyectiva. Entonces, $f$ es homeomorfismo si y solo si $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow f(A) \in \mathcal{T}'$.*

**Definición 1.21** (Invariante Topológico)**.** *Sea $(P)$ una propiedad de e.t.. Se dice que $(P)$ es un invariante topológico si para todo e.t. que cumpla $(P)$ todos los e.t. homeomorfos cumplen $(P)$.*

**Definición 1.22** (Aplicación Abierta)**.** *Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$. Entonces, $f$ es aplicación abierta si $\forall A \in \mathcal{T}$, $f(A) \in \mathcal{T}'$*

**Observación.** *Una aplicación es cerrada si $\forall C$ cerrado de $(X, \mathcal{T})$, $f(C)$ cerrado de $(X', \mathcal{T}')$.*

**Observación.** *No hay ninguna implicación entre aplicación continua, aplicación abiera y aplicación cerrada.*

**Proposición 1.21.** *Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), f : X \to X'$ aplicaciones biyectivas. Entonces, son equivalentes:*

(I) *$f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ es homeomorfismo.*

(II) *$f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ aplicación continua y abierta.*

(III) *$f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ aplicación continua y cerrada.*

**Demostración.**

*($i \Rightarrow ii$) $f$ homeomorfismo $\Rightarrow \exists f^{-1}$ aplicación continua $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, ((f^{-1})^{-1}(A) \in \mathcal{T}'$ donde $((f^{-1})^{-1}(A) = f(A) \Rightarrow f$ aplicación abierta.*

(*ii* $\Rightarrow$ *i*) $f$ *abierta y continua* $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, f(A) \in \mathcal{T}'$ *donde* $f(A) = ((f^{-1})^{-1}(A) \Rightarrow$ $f^{-1}$ *aplicación continua.*

(*i* $\Leftrightarrow$ *iii*) *es análoga.*

## 1.6. Espacio Producto

**Nota.** *Queremos construir nuevos espacios topológicos de los ya existentes. Nos gustaria que ocurriera como los subespacios topológicos, si $f$ es una función continua en un espacio topológico, también lo sea en el subespacio.*

*Dados $X, Y$, $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$. Si consideramos $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ queremos ver que topología debemos usar para que poder trabajar con funciones. Si consideramos la topología $\mathcal{T} \times \mathcal{T}' \subset \mathcal{P}(X \times X!`)$ podemos ver que la unión de conjuntos de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ no pertenece a $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$. Entonces, eligimos la topología producto como la topología genereada por la base $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$,*

$$\{W \subset X \times Y : \forall (x, y) \in W, \exists U \times V \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}' : (x, y) \in U \times V \subset W$$

.

**Definición 1.23** (Producto Cartesiano)**.** *Sea $\{X_j\}_{j \in J} \neq \emptyset$ familia de conjuntos no vacios. Se llama producto castesiano de $\{X_j\}_{j \in J}$ a*

$$\prod_{j \in J} X_j = \{x : J \to \bigcup_{j \in J} X_j \text{ aplicación } : x_j \in X_j, \forall j \in J\}$$

**Observación.** $\forall j \in J, p_{j_0} : \prod_{j \in J} X_j \to X_{j_0} : x \mapsto x_{j_0}$ *se llama proyección.*

**Observación.** *Si $X_j = X, \forall j \in J$ entonces $\prod_{j \in J} X_j = X^J = \{x : J \to X,\ x$ aplicación $\}$.*

**Definición 1.24** (Axioma Elección)**.** $\forall \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \neq \emptyset$ *familia de conjuntos no vacios disjuntos dos a dos. Entonces, $\exists A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda : A \cap B_\lambda$ tiene un solo elemento.*

**Definición 1.25** (Topología Producto)**.** *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_{j \in J})\}_{j \in J}$ familia de e.t.. Se llama topología producto a la topología sobre $\prod_{j \in J} X_j$ generada por subbase*

$$\mathcal{S} = \{p_j^{-1}(U_j) : U_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J\}$$

Esta topología se denota $\prod_{j\in J}\mathcal{T}_j$

**Observación.** $S_\beta=\{\pi_\beta^{-1}(U_\beta):U_\beta\in\mathcal{T}_\beta\}\Rightarrow S=\bigcup_{\beta\in J}S_\beta$ *es subbase de la topología producto.*

**Observación.** *Podemos escribir* $B=\pi_{\beta_1}^{-1}(U_\beta)\cap\cdots\cap\pi_{\beta_n}^{-1}(U_{\beta_n})$

**Observación.** *El producto de abiertos no es necesesariamente abierto.*

**Observación.** *La base engendrada por* $\mathcal{S}$ *es*

$$\mathcal{B}=\{\bigcap_{j\in J}p_j^{-1}(U_j):U_j\in\mathcal{T}_j,F\in\mathcal{P}(J)\}$$

$$=\{\prod_{j\in J}A_j:A_j\in\mathcal{T}_j,\forall j\in J,A_j=X_j:\forall j\in J\setminus F\text{ no es finito }\}.$$

**Observación.** *Si* $J$ *es finito, entonces* $\mathcal{B}=\{\prod_{j\in J}A_j:A_j\in\mathcal{T}_j,\forall j\in J\}$.

**Observación.** *El producto espacios discretos no es necesesariamente discreto.*

**Observación.** $\mathcal{B}=\{\prod_{j\in J}B_j:B_j\in\mathcal{T}_j\}$.

**Observación.** *Si* $\mathcal{B}_j$ *es base de* $(X_j,\mathcal{T}_j)$*, entonces* $\mathcal{B}=\{\prod_{j\in J}B_j:B_j\in\mathcal{B}_j\}$ *es base de* $(\prod_{j\in J}X_j,\prod_{j\in J}\mathcal{T}_j)$.

**Proposición 1.22.** *Sea* $\{(X_j,\mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia finita de e.t.. Entonces,* $\forall j_0\in J$,

$$p_{j_0}:(\prod_{j\in J}X_j,\prod_{j\in J}\mathcal{T}_j)\to(X_{j_0},\mathcal{T}_{j_0})$$

*es aplicación abierta y continua.*

**Demostración.** $\forall A\in\prod_{j\in J}A_j,A=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda:B_\lambda\in\mathcal{B}$ *donde* $\mathcal{B}$ *es subbase de* $\prod_{j\in J}\mathcal{T}_j$, $B_\lambda=\{\prod_{j\in J}U_{\lambda j}:U_{\lambda j}\in\mathcal{T}_j,U_{\lambda j}=X_j,\forall j\in J\setminus F:F\text{ finito }\}$. *Entonces,* $p_{j_0}(A)=p_{j_0}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}p_{j_0}(B_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_{\lambda j}\in\mathcal{T}_j\Rightarrow$ *abierto.*

**Proposición 1.23.** *Sea* $\{(X_j,\mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia no vacia de e.t.. Entonces, la topología producto es la más débil sobre* $\prod_{j\in J}X_j$ *que hace continuas a todas las proyecciones.*

**Demostración.** *Sea* $\mathcal{T}$ *topología sobre* $\prod_{j\in J} X_j$ *tal que* $p_{j_0} : (\prod_{j\in J} X_j, \mathcal{T}) \to (X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0})$ *es una proyección continua. Entonces,* $\forall j_0 \in J : U_{j_0} \in \mathcal{T}_{j_0}$ *se tiene* $p_0^{-1}(U_{j_0}) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ *es subbase de* $\prod_{j\in J} \mathcal{T}_j \Rightarrow \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j \subset \mathcal{T}$.

**Proposición 1.24** (Propiedad Universal Topología Porducto). *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia* $\neq \emptyset$ *e.t.,* $f : X \to \prod_{j\in J} X_j$ *aplicación. Entonces,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *continua* $\Leftrightarrow (p_j \circ f) : (X, \mathcal{T}) \to (X_j, \mathcal{T}_j)$ *continua.*

**Demostración.** *(*$\Rightarrow$*) La composición de aplicaciones continuas es continua.*

*(*$\Leftarrow$*)* $\forall j \in J, (p_j \circ f)^{-1}(U_j) \in \mathcal{T}, \forall U_j \in \mathcal{T}_j \Rightarrow (p_j \circ f)^{-1}(U_j) = f^{-1}(p_j^{-1}(U_j)) = f^{-1}(S) \in \mathcal{T}, \forall S \in \mathcal{S} = \{p_j^{-1}(U_j) : U_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J\}$. *Entonces,* $(p_j \circ f)^{-1}$ *y* $p_j$ *continuas* $\Rightarrow f$ *continua.*

**Proposición 1.25.** *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia e.t.,* $\sigma : J \to J$ *aplicación biyectiva. Entonces,* $(X_j, \mathcal{T}_j)$ *y* $(X_{\sigma(j)}, \mathcal{T}_{\sigma(j)})$ *son homeomorfos.*

**Demostración.** *Sea* $\alpha(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \to (\prod_{j\in J} X_{\sigma(j)}, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_{\sigma(j)}) : (x_j)_{j\in J} \mapsto \alpha((x_j)_{j\in J}) = (x_{\sigma(j)})_{j\in J}$, $\alpha$ *es biyectiva.*

(I) $(p_j \circ \alpha) = p_{\sigma(j)}$ *son continuas (Propiedad Universal).*

(II) $(p_j \circ \alpha)^{-1} = p_{\sigma(j)}^{-1}$ *continua* $\alpha^{-1}$ *continua.*

$\Rightarrow$ *homeomorfa.*

**Observación.** *El producto de homeomorfismos es homeomorfismo.*

**Definición 1.26.** *Sea* $(P)$ *una propiedad de e.t.. Se dice que* $(P)$ *es multiplicativa si para toda familia e.t. cada una cumpliendo* $(P)$*, su producto topológico cumple* $(P)$.

**Proposición 1.26.** *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia* $\neq$ *de e.t.,* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $\forall j \in J, f_j : X \to X_j$ *aplicación. Entonces,* $(f_j)_{j\in J} : (X, \mathcal{T}) \to (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) : x \mapsto (f_j)_{j\in J}(x) = (f_j(x))_{j\in J}$ *es continua* $\Leftrightarrow f_j : (X, \mathcal{T}) \to (X_j, \mathcal{T}_j)$ *es con-*

*tinua* $\forall j \in J$.

**Demostración.** $\forall j_0 \in J, (p_{j_0} \circ (f_j)_{j\in J}) = f_{j_0}$

*($\Rightarrow$) composición de aplicaciones continuas es continua.*

*($\Leftarrow$) por la propiedad universal de la topología producto.*

**Observación.** *El producto de funciones continuas es una función continua.*

**Proposición 1.27.** *Sean* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$, $\{(X'_j, \mathcal{T}'{}_j)\}_{j\in J}$, $\forall j \in J$, $f_j : X_j \to X'_j$ *aplicación continua. Entonces,* $\prod_{j\in J} f_j : (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \to (\prod_{j\in J} X'_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}'{}_j) : (x_j)_{j\in J} \mapsto (\prod_{j\in J} f_j)((x_j)_{j\in J}) = (f_j(x_j))$ *aplicación continua.*

VER DIBUJO(Revisar abierta o continua)

**Demostración.** $\forall j_0 \in J, (p'_{j_0} \circ (\prod_{j\in J} f_j)) = (f_{j_0} \circ p_{j_0})$.

*($\Rightarrow$) Propiedad Universal de Topología Porducto.*

*($\Leftarrow$)* $\forall G'_{j_0} \in \mathcal{T}'_{j_0}$ *como* $\prod_{j\in J} f_j$ *continua, entonces* $(p_{j_0} \circ (\prod f_j))^{-1}(G_{j_0}) \in \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j$ *es abierto y donde* $(p_{j_0} \circ (\prod f_j))^{-1}(G_{j_0}) = (f_{j_0} \circ p_{j_0})^{-1}(G'_{j_0}) = p_{j_0}^{-1}(f_{j_0}^{-1}(G_{j_0}))$. *Por ser* $p_{j_0}$ *aplicación abierta y suprayectiva* $p_{j_0}(p_{j_0}^{-1}(f_{j_0}^{-1}(G_{j_0}))) = f_{j_0}^{-1}((G'_{j_0})) \in \mathcal{T}_{j_0}$ .

## 1.7. Espacio Cociente

**Nota.** *La topología cociente es una construcción que formaliza la idea de "pegar". Decimos que* $\mathcal{R}$ *es una relación de equivalencia en un conjunto* $X$ *si es reflexiva, simétrica y transitiva. Una relación* $\mathcal{R}$ *en* $X$ *parte* $X$ *en clases de equivalencia, denotadas* $[x], \forall x \in X$.

*La idea principal es, dado un espacio topológico* $(X, \mathcal{T})$ *queremos describir como se pegan las cosas juntas en* $(X, \mathcal{T})$ *mediante la definición de una relación de equivalencia. Dos puntos* $x_1, x_2$ *están relacionados si* $x_1 \mathcal{R} x_2$, *se podría decir que* $x_1, x_2$ *se pegan entre si. Entonces, definimos una topología en el conjunto de clases de equivalencia* $X/\mathcal{R}$ *que conserve la topología en* $X$ *para aquellos puntos que no están relacionados y que "pegueçorrectamente.*

**Definición 1.27** (Topología Cociente)**.** *Sea $(X,\mathcal{T})$ e.t., $Y \neq \emptyset, f : X \to Y$. Se llama topología cociente inducida por $f$ a $\mathcal{T}_f = \{G \subset Y : f^{-1}(G) \in \mathcal{T}\}$. El par $(X,\mathcal{T}_f)$ se llama espacio topológico cociente inducido por $f$.*

**Definición 1.28** (Identificación)**.** *Sea $(X,\mathcal{T})$, $(X',\mathcal{T}')$ e.t., $f : X \to X'$ suprayectiva. Se dice que $f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ es identificación si $\mathcal{T}'$ es topología cociente inducida por $f$.*

**Observación.** *$f$ es continua.*

**Proposición 1.28.** *Sea $(X,\mathcal{T})$ e.t., $Y \neq \emptyset$, $f : X \to Y$ aplicación continua. La topología cociente inducida por $f$ es la más fina de las topologías sobre $Y$ que hacen continuas a $f$.*

**Demostración.** *Sea $\mathcal{S}$ topología sobre $Y$ tal que $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{S})$ es continua. Entonces, $\forall A \in \mathcal{S}, f^{-1}(A) \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{S}, A \in \mathcal{T}_f \Leftrightarrow \mathcal{S} \subset \mathcal{T}_f$.*

**Proposición 1.29** (Propiedad Universal Topología Cociente)**.** *Sea $(X,\mathcal{T})$ e.t., $(Z,\mathcal{S})$ e.t., $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ aplicaciones. Entonces, $g : (Y,\mathcal{T}_f) \to (Z,\mathcal{S})$ es continua $\Leftrightarrow$ $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_f)$ es continua.*

**Demostración.** *($\Rightarrow$) Trivial.*

*($\Leftarrow$) $\forall A \in \mathcal{S}, (g \circ f)^{-1}(A) \in \mathcal{T} \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{S}, g^{-1}(A) \in \mathcal{T}_f \Rightarrow g$ continua.*

**Proposición 1.30.** *Sea $(X,\mathcal{T}),(X',\mathcal{T}')$, e.t., $f : X \to X'$ aplicación. Si $f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ suprayectiva, continua y abierta (resp. cerrada). Entonces, $f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ es identificación.*

**Demostración.** *$\mathcal{T}_f$ es la topología más fina que hace continua a $f \Rightarrow \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}_f$. Sea $\forall A \in \mathcal{T}_f \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ con $f$ abierta $\Rightarrow f(f^{-1}(A)) = A \in \mathcal{T}'$ abierto $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}_f, A \in \mathcal{T}' \Rightarrow \mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}'$. Entonces, $\mathcal{T}_f = \mathcal{T}'$.*

**Observación.** *Las identificaciones no son necesariamente abierta o cerradas.*

**Definición 1.29.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $\mathcal{R}$ *relación de equivalencia en* $X$*,* $p : X \to X/\mathcal{R}$ *proyección canónica. Se llama e.t. cociente de* $(X, \mathcal{T})$ *respecto a* $\mathcal{R}$ *a* $(X/\mathcal{R}, \mathcal{T}/\mathcal{R})$ *donde* $\mathcal{T}/\mathcal{R}$ *es topología cociente inducida por* $p$.

**Proposición 1.31.** *Sean* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), (X'', \mathcal{T}'')$ *e.t.,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *identificación,* $f' : (X', \mathcal{T}') \to (X'', \mathcal{T}'')$ *identificación. Entonces,* $(f' \circ f)$ *es identificación.*

REVISAR DEM

**Demostración.** *Sea* $(f' \circ f) : X \to X''$ *suprayectiva. Entonces,* $A'' \in \mathcal{T}'', (f'$ *identficación* $\Rightarrow \mathcal{T}'' = \mathcal{T}_f) \Leftrightarrow f'^{-1}(A'') \in \mathcal{T}' \Leftrightarrow (\mathcal{T}' = \mathcal{T}_f) f^{-1}(f'^{-1}(A'')) = (f' \circ f)^{-1}(A'') \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T}'' = \mathcal{T}_{(f' \circ f)}$

**Proposición 1.32.** *Sean* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t.,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *identificación. Entonces,*

(I) $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *es abierta* $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{T}, f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{T}$.

(II) $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *cerrada* $\Leftrightarrow \forall C$ *cerrado* $(X, \mathcal{T})$*,* $f^{-1}(f(C))$ *cerrado de* $(X, \mathcal{T})$.

**Demostración.**

*(1)* *(*$\Rightarrow$*)* $\forall A \in \mathcal{T} \Rightarrow f(A) \in \mathcal{T}' \Rightarrow f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{T}$.

*(*$\Leftarrow$*)* $\forall \in \mathcal{T}, f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{T}, f$ *identificación* $\Rightarrow f(f^{-1}(f(A))) = f(A) \in \mathcal{T}_f = \mathcal{T}' \Rightarrow f$ *aplicación abierta.*

**Proposición 1.33.** *Sea* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), (X'', \mathcal{T}''), (X''', \mathcal{T}''')$*,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *identificación,* $f' : (X'', \mathcal{T}'') \to (X''', \mathcal{T}''')$ *identificación,* $g : X \to X''$ *aplicación tal que* $\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (f' \circ g)(x_1) = (f' \circ g)(x_2)$*. Entonces,*

(I) $\exists \overline{g} : X' \to X'''$ *aplicación tal que* $(\overline{g} \circ f) = (f' \circ g)$

(II) *Si* $g : (X, \mathcal{T}) \to (X'', \mathcal{T}'')$ *continua* $\Rightarrow \overline{g}$ *continua.*

REVISAR

**Demostración.**

(I) $\overline{g} : X' \to X''' : x' \mapsto \overline{g}(x'_0) = f'(g(x)),\ \forall x \in f^{-1}(X') \Rightarrow f(x) = x' \Rightarrow \overline{g}(f(x)) = (f' \circ \overline{g})(x),\ \forall x \in X \Leftrightarrow (\overline{g} \circ f) = (f' \circ g)$.

(II) $(\overline{g} \circ f) = (f' \circ g)$, ($g$ *continua* $\Rightarrow (f' \circ g)$ *continua* ). *Entonces, (Propiedad Universal Topología Cociente)* $\Rightarrow \overline{g}$ *continua.*

**Proposición 1.34.** *Sea* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t.,* $f : X \to X'$ *aplicación suprayectiva,* $R_f$ *relación de equivalencia tal que* $x_1, x_2 \in X, x_1 R_f x_2 \Leftrightarrow$ ( *def.* )$f(x_1) = f(x_2)$. *Entonces,* $\exists \alpha : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *homeomorfa tal que* $(\alpha \circ f) = p \Leftrightarrow f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *es identificación.*

**Demostración.** *(⇒)* $(\alpha \circ f) = p \Rightarrow f = (\alpha^{-1} \circ p) \Rightarrow f$ *identificación.*

*(⇐) Sea* $\alpha : X \to X'/\mathcal{R}_f : x \mapsto \alpha(x') = [x] : x \in f^{-1}(X')$. *Esta bien definida ya que, si* $x_1, x_2 \in f^{-1}(x) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \mathcal{R}_f \Leftrightarrow [x_1] = [x_2]$. *Sea* $\varphi : X/\mathcal{R}_f \to X'/\mathcal{R}_f : [x] \mapsto \varphi/[x] = f(x)$. *Está bien definida ya que, si* $[x_1] = [x_2] \Leftrightarrow x_1 \mathcal{R} x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. *Entonces,* $(\varphi \circ \alpha = 1_{X'}, \alpha \circ \varphi = 1_{\mathcal{R}_f}) \Rightarrow \alpha$ *inyectiva y* $\alpha^{-1} = \varphi$. *Por tanto,* $\alpha(f(f(x)) = \alpha(x') = [x]p(x), \forall x \in X \Rightarrow \alpha \circ f = p$ *continua* $\Rightarrow \alpha$ *continua.*

## 1.8. Espacio Suma

**Definición 1.30** (Topología Suma)**.** *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$*, familia* $\neq \emptyset$ *de e.t.,*

$$\sum_{j \in J} X_j = \bigcup_{j \in J} X_j \times \{j\}$$

*su unión disjunta. Se llama topología suma a*

$$\sum_{j \in J} \mathcal{T}_k = \left\{ G \subset \sum_{j \in J} X_k : j_k^{-1}(G) \in \mathcal{T}_k, \forall k \in J \right\}$$

*El par* $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ *se llama espacio topológico suma.*

**Observación.** $\forall k_0 \in J$, $j_{k_0} : (X_{k_0}, \mathcal{T}_{k_0}) \to (X_{k_0} \times \{k_0\}, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k / (X_{k_0} \times \{k_0\}) : x \mapsto (x, k_0)$ *es homomorfismo* $j_{k_0}^{-1}(x, k_0) = x = p_1(x, k_0)$

**Observación.** $\forall c \subset \sum_{k\in J} X_k, j_{k_0}^{-1}(c) = p(C \cap (X_{k_0} \times \{k_0\}))$.

**Proposición 1.35.** *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ familia $\neq \emptyset$ e.t.. Entonces, la topología suma es la más fina de las topologías sobre $\sum_{k\in J} X_k$ que hacen continua todas las inclusiones.*

**Demostración.** *Sea $\mathcal{T}$ topología sobre $\sum_{j\in J} X_k$ tal que*

$$\forall k_0 \in J, j_{k_0}(X_{k_0}, \mathcal{T}_{k_0}) \hookrightarrow (\sum_{k\in J} X_k, \mathcal{T})$$

$k_0 \in J, \forall A \in \mathcal{T}, j_0^{-1}(A) \in \mathcal{T}_{k_0} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, A \in \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k \Rightarrow \mathcal{T} \subset \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k$.

**Proposición 1.36** (Propiedad Universal Universal Topología Suma)**.** *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$, $(X, \mathcal{T})$ e.t., $f : (\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k) \to (X, \mathcal{T})$ aplicación continua $\Leftrightarrow \forall k_0 \in J, f \circ j_{k_0} : (X_{k_0}, \mathcal{T}_{k_0}) \to (X, \mathcal{T})$ es continua.*

**Demostración.** *($\Rightarrow$) Trivial*

*($\Leftarrow$)* $\forall k_0 \in J, f \circ j_{k_0}$ *continua* $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, \forall k_0 \in J, (f \circ j_k)^{-1}(A) = j_{k_0}^{-1}(f^{-1}(A)) \in \mathcal{T}_{k_0} \Rightarrow f^{-1}(A) \in \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k \Rightarrow f$ *continua.*

**Definición 1.31.** *Sea $(P)$ propiedad de e.t.. Se dice que es aditiva si para toda familia de e.t. cada uno cumpliendo $(P)$, la suma cumple $(P)$.*

# Capítulo 2

# Propiedades de Separación

**Definición 2.1** ($T_0$)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Se dice que es* $T_0$ *si* $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x : y \notin \mathcal{U}^x$ *ó* $\exists \mathcal{U}^y : x \notin \mathcal{U}^y$.

**Ejemplo.** *Sea* $\mathcal{R}$ *una relación en* $X$ *tal que* $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. *Entonces,* $\mathcal{R}$ *es una relación de equivalencia en* $X$ *y el espacio cociente resultante* $(X/R, \mathcal{T}/R)$ *es* $T_0$.

**Observación.** *Los subespacios o espacios productos genereados a partir de espacios* $T_0$ *son también* $T_0$*, pero los espacios cocientes no lo son necesariamente.*

**Definición 2.2** ($T_1$)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Se dice que es* $T_1$ *si* $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x : y \notin \mathcal{U}^x, \exists \mathcal{U}^y : x \notin \mathcal{U}^y$.

**Observación.** $(X, \mathcal{T})$ *es* $T_1$ *si y solo si* $\forall x, y \in X : x \neq y$ *existe un entorno de cada uno que no contiene al otro.*

**Observación.** $T_1 \Rightarrow T_0$

**Observación.** $T_0 \not\Rightarrow T_1$, *ej.:* $X = \{a, b\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ *es* $T_0$, *no* $T_1$

**Proposición 2.1.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. son equivalentes*

(I) $(X, \mathcal{T})$ *es* $T_1$,

(II) $\forall x \in X, \{x\}$ *es cerrado de* $(X, \mathcal{T})$,

(III) $\forall E \subset X, E = \bigcap_{G \in \mathcal{T} : E \subset G} G$.

**Demostración.**

$(a \Rightarrow b)$ *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.* $T_1, x \in X$ *entonces,* $\forall y \neq x, \exists \mathcal{U}^y : \mathcal{U}^y \subset X \setminus \{x\} \Rightarrow X \setminus \{x\} \in \mathcal{T} \Rightarrow \{x\}$ *es cerrado de* $(X, \mathcal{T})$.

(I) $A \subset X \Rightarrow A = \bigcap_{x \in X \setminus A} X \setminus \{x\} \Rightarrow A \subset \bigcap_{G \in \mathcal{T} A \subset G} G \subset \bigcap_{x \in X \setminus A} (X \setminus \{x\}) = A$.

(II) $\forall x, y \in X : x \neq y$, $\{x\} = \bigcap_{G \in \mathcal{T}; \{x\} \subset G} G \Rightarrow \exists \mathcal{G}^x \in \mathcal{T} : y \in \mathcal{G}^x \Rightarrow T_1$.

**Definición 2.3** ($T_2$). *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Se dice que es* $T_2$ *ó de Hausdorff si* $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x : x \in \mathcal{U}^x, \exists \mathcal{U}^y : y \in \mathcal{U}^y$ *tal que* $\mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y = \emptyset$.

**Observación.** $T_2 \Rightarrow T_1$.

**Proposición 2.2.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Entonces,* $(X, \mathcal{T})$ *es* $T_2$ *si y solo si* $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ *es cerrado en* $(X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T})$.

**Demostración.** *Probamos que* $\Delta^c \in \mathcal{T}$.

($\Rightarrow$) $\forall (x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$, $x \neq y \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^y : \mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y = \emptyset \Rightarrow$. *¿*$\mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y$ *entorno de* $(x, y) : \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y \subset (X \times X) \setminus \Delta$*? Si* $\exists (z, z) \in \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y \Rightarrow z \in \mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y = \emptyset$ *es absurdo. Entonces,* $(X \times X) \setminus \Delta \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} \Leftrightarrow \Delta$ *es cerrado de* $(X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$.

($\Leftarrow$) $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow (x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^y : \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y \subset (X \times X) \setminus \Delta \Rightarrow \mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y = \emptyset$. *En caso contrario,* $\exists z \in \mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y \Rightarrow (z, z) \in \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y$ *es absurdo. Entonces,* $(X, \mathcal{T})$ *es* $T_2$.

**Corolario 2.0.1.** *Sean* $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ *e.t.,* $(Y, \mathcal{S})$ *es* $T_2$, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ *aplicación. Entonces,* $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ *es cerrado en* $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{S})$.

**Demostración.** $Y$ *es* $T_2 \Rightarrow \Delta_Y$ *es cerrado en* $Y \times Y$, $f$ *continua* $\Rightarrow f \times 1_Y : (X, \mathcal{T}) \times (Y, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{S}) \times (Y, \mathcal{S})$ *continua* $\Rightarrow (f \times 1_Y)^{-1}(\Delta_Y) = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = y\}$ *es cerrado.*

**Proposición 2.3.** *Sean* $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ *e.t.,* $(Y,\mathcal{S})$ *es* $T_2$*,* $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{S})$ *continua. Entonces,* $E=\{(x_1,x_2)\in X\times X : f(x_1)=f(x_2)\}$ *es cerrado en* $(X\times X,\mathcal{T}\times\mathcal{T})$

**Demostración.** $\forall(x_1,x_2)\subset(X\times X)\setminus E$, $f(x_1)\neq f(x_2)\Rightarrow\exists\mathcal{V}^{f(x_i)},i\in\{1,2\}$ *entorno de* $x_i$*, por ser* $Y$ $T_2$*. Como* $f$ *es continua* $\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_i)})$ *entorno de* $x_i\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_1)})\times f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_i)})$ *entorono de* $(x_1,x_2)$ *en* $(X\times X,\mathcal{T}\times\mathcal{T})$*. Veamos que* $f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_1)})\times f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_i)})\subset(X\times X)\setminus E$*. Si* $(z_1,z_2)\in E,(z_1,z_2)\in f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_1)})\times f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_2)})\Rightarrow f(z_1)=f(z_2)$ *donde* $f(z_1)\in\mathcal{V}^{f(x_1)}$ *y* $f(z_2)\in\mathcal{V}^{f(x_2)}$ *que es absurdo.*

**Proposición 2.4.** *Sean* $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ *e.t.,* $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{S})$ *aplicación suparyectiva y abierta. Si* $(X,\mathcal{T})$ *es* $T_2$ *entonces,* $(Y,\mathcal{S})$ *es* $T_2$*.*

**Demostración.** $\forall y_1,y_2\in Y : y_1\neq y_2\Rightarrow(f$ *supra*$)$ $\exists x_i\in X,i\in\{1,2\}: f(x_i)=y_i\Rightarrow(x_1,x_2)\in(X\times X)\setminus E\Rightarrow($ *hip.*$)$ $\exists\mathcal{U}^{x_i},i\in\{1,2\}: \mathcal{U}^{x_1}\times\mathcal{U}^{x_2}\subset(X\times X)\setminus E\Rightarrow(f$ *ab.*$)$ $f(\mathcal{U}^{x_i}),i\in\{1,2\}$ *entorno de* $y_i$*. ¿Son disjuntos? Si* $\exists z\in f(\mathcal{U}^{x_1})\cap f(\mathcal{U}^{x_2})\Rightarrow z=f(t_i): t_i\in\mathcal{U}^{x_i},i\in\{1,2\}\Rightarrow(t_1,t_2)\in E$ *y* $(t_1,t_2)\in(\mathcal{U}^{x_1}\times\mathcal{U}^{x_2})$ *que es absurdo.*

**Proposición 2.5.** *Sean* $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ *e.t.,* $(Y,\mathcal{S})$ *es* $T_2$*,* $f,g:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{S})$ *aplicaciones continuas. Entonces,* $\{x\in X : f(x)=g(x)\}$ *es cerrado en* $(X,\mathcal{T})$*.*

**Demostración.** *Sea* $f\times g:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{S})\times(Y,\mathcal{S})$ *continua. Entonces,* $Y$ *es* $T_2\Leftrightarrow\Delta_Y$ *es cerrado* $\Rightarrow(f\times g)^{-1}(\Delta_Y)$ *cerrado en* $(X,\mathcal{T})$ *donde* $(f\times g)^{-1}(\Delta_Y)=\{x\in X : f(x)=g(x)\}$*.*

**Corolario 2.0.2.** *Sean* $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ *e.t.,* $(Y,\mathcal{S})$ *es* $T_2$*,* $f,g:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{S})$ *aplicación continua. Si* $\exists D$ *denso en* $(X,\mathcal{T})$ *tal que* $f|_D=g|_D\Rightarrow f=g$*.*

**Demostración.** $f|_D = g|_D \Rightarrow D \subset \{x \in X : f(x) = g(x)\} = \mathcal{C} \Rightarrow \overline{D} \subset \overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$ *donde* $\overline{D} = X \Rightarrow X = \mathcal{C} \Leftrightarrow f = g$.

**Observación.** $T_0, T_1, T_2$ *son invariantes topológicos.*

**Proposición 2.6.** *Todo subespacio de e.t.* $T_2$ *es* $T_2$.

**Demostración.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ $T_2$, $E \subset X$. *Entonces,* $\forall x_1, x_2 \in E \subset X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists \mathcal{U}^{x_1}, \mathcal{U}^{x_2}$ *entornos de* $x_1$, $x_2$ *en* $(X, \mathcal{T})$ *disjuntos* $\Rightarrow \mathcal{U}^{x_1} \cap E, \mathcal{U}^{x_2} \cap E$ *entorno en* $(E, \mathcal{T}|_E)$ *disjuntos.*

**Proposición 2.7.** *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia de e.t.. Entonces,* $(\sum_{j\in J} X_j, \sum_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *es* $T_2 \Leftrightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$ *es* $T_2$, $\forall j \in J$.

**Demostración.** *(⇒)* $\forall j \in J, \forall (a_j)_{j\in J} \in \sum_{j\in J} X_j, \{(x_j)_{j\in J} \in \sum_{j\in J} X_j : x_j = a_j, \forall j \in J\backslash\{0\}\} \subset \sum_{j\in J} X_j$ *es homeomorfo a* $X_{j_0} \times \{(a_j)_{j\in J\backslash 0}\}$ *que es homeomorfoa a* $X_{j_0} \times \sum_{j\in J\backslash\{0\}} \{a_j\}$.

*(⇐)* $\forall x, y \in \sum_{j\in J} X_j : x \neq y$, *entonces se dan dos posibilidades. Si* $\exists j_1, j_2 \in J : x \in X_{j_1} \times \{j_1\}, y \in X_{j_2} \times \{j_2\}$, *entonces* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *es* $T_2$. *Y si* $\exists! j_0 \in J : x, y \in X_{j_0} \times \{j_0\}$ *homeomorfo a* $X_{j_0}$ *que es* $T_2 \Rightarrow p_1(x), p_1(y) \in X_{j_0} \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x : p_1(x) \in \S^x, \exists \mathcal{U}^y : p_1(y) \in \mathcal{U}^y$ *abiertos de* $\sum_{j\in J} \mathcal{T}_j \Rightarrow \mathcal{U}^x \times \{j_0\}, \mathcal{U}^y \times \{j_0\}$ *en* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k) \Rightarrow$ *es* $T_2$.

**Proposición 2.8.** *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia de e.t.. Entonces,* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *es* $T_2 \Leftrightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$ *es* $T_2$, $j \in J$.

**Demostración.** *(⇒) Sea* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *espacio* $T_2$. *Entonces,* $\forall j \in J, b_j \in X_j \Rightarrow$ *el subespacio* $\mathcal{S}_j = \{x \in \prod_{j\in J} X_j : x_{j_0} = b_{j_0}, \forall j \neq j_0\}$ *es* $T_2$ *y es homeomorfo a* $X_j$ *bajo la restricción de* $\mathcal{S}_j$ *a la proyeción* $p_j \Rightarrow X_j$ *es* $T_2, \forall j \in J$.

*(⇐) Sea* $(X_j, \mathcal{T}_j)$ *e.t.* $T_2$, $\forall j \in J$. *Entonces,* $\forall x, y \in \prod_{j\in J} X_j : x \neq y \Rightarrow \exists j_0 \in J : x_{j_0} \neq y_{j_0} \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x_{j_0}, \mathcal{U}^y_{j_0}$ *entornos disjuntos de* $x_{j_0}$ *e* $y_{j_0}$ *en* $(X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0}) \Rightarrow p_{j_0^{-1}(\mathcal{U}^x_{j_0})}, p_{j_0^{-1}(\mathcal{U}^y_{j_0})}$ *entornos disjuntos de* $x$ *e* $y$ *en*

$(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \Rightarrow (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *es* $T_2$.

**Observación.** *El cociente de un e.t.* $T_2$ *no es necesariamente* $T_2$.

# 2.1. Espacio Regular

**Definición 2.4** (Espacio Regular)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. Diremos que es regular si* $\forall C$ *cerrado de* $(X, \mathcal{T})$, $\forall x \in X : x \notin C, \exists U, V \in \mathcal{T}$ *disjuntos tal que* $x \in U, C \subset V$. *Diremos que es* $T_3$ *si es regular y* $T_0$.

**Observación.** *Regular y* $T_0 \Leftrightarrow$ *regular y* $T_1 \Leftrightarrow$ *regular y* $T_2$.

**Demostración.** *(⇒)* $(X, \mathcal{T})$ *regular y* $T_0 \Rightarrow \forall x, y \in X : x \neq y$, $\exists \mathcal{U}^x \in \mathcal{T} : y \in \mathcal{U}^x \Rightarrow X \setminus \mathcal{U}^x$ *es cerrado* $\Rightarrow \exists V_i \in \mathcal{T}, i \in \{1,2\}$ *disjuntos tal que* $x \in V_1, y \in X \setminus \mathcal{U}^x \subset V_2 \Rightarrow$ *es* $T_2$.

*(⇐) Trivial.*

**Observación.** $T_3 \Rightarrow T_2$.

**Observación.** *Regular* $\not\Rightarrow T_0$.

**Proposición 2.9.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Entonces, son equivalentes*

*(I)* $(X, \mathcal{T})$ *regular*

*(II)* $\forall x \in X : \forall U \in \mathcal{T} : x \in U, \exists V \in \mathcal{T} : x \in V \subset \overline{V} \subset U$.

*(III)* $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}$ *base de entornos de* $x$ *cerrados en* $(X, \mathcal{T})$.

**Demostración.**

$(i \Rightarrow ii)$ $x \in U \in \mathcal{T} \Rightarrow x \notin X \setminus U$ *cerrado* $\Rightarrow \exists V_i \in \mathcal{T}, i \in \{1,2\} : X \setminus U \subset V_2 \Rightarrow V_1 \subset X \setminus V_2$ *cerrado* $\Rightarrow \overline{V_1} \subset X \setminus V_2 \Rightarrow x \in V_1 \subset \overline{V_1} X \setminus V_2 \subset U$.

$(ii \Rightarrow iii)$ $\forall x \in X, \{\overline{V} : V \in \mathcal{T}, x \in V\}$ *es base de entornos cerrados* $\Rightarrow \forall \mathcal{U}^x, x \in \mathring{\mathcal{U}}^x \Rightarrow \exists V \in \mathcal{T} : x \in V \subset \overline{V} \subset \mathring{\mathcal{U}}^x \subset \mathcal{U}^x$.

$(iii \Rightarrow i)$ $x \notin C$ *cerrado* $\Rightarrow x \in X \setminus C \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists V$ *entorno cerrado de* $x : V \subset X \setminus C \Rightarrow x \in \mathring{V} \in \mathcal{T}$ *y* $C \subset X \setminus V$ *disjuntos.*

**Observación.** *La regularidad ( y ser* $T_3$*) son invariantes topológicos.*

**Proposición 2.10.** *Todo subespacio de uno regular ($T_3$) es regular ($T_3$).*

**Demostración.** $(X, \mathcal{T})$ *regular* $E \subset X, \forall C$ *cerrado de* $(E, \mathcal{T}|_E)$, $\forall x \in E$ : $x \notin C \Rightarrow \exists F$ *cerrado de* $(X, \mathcal{T})$ *tal que* $C = F \cap E \Rightarrow x \notin F \Rightarrow \exists U, V \in T$ *disjuntos tal que* $x \in U, F \subset V \Rightarrow U \cap E, V \cap E \in \mathcal{T}|_E$ *disjuntos tal que* $x \in U \cap E, C \subset V \cap E$.

**Proposición 2.11.** *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ *familia de e.t.. Entonces* $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$ *es regular ($T_3$)* $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ *es regular* $(T_3)$.

**Demostración.** *($\Rightarrow$) Trivial*

*($\Leftarrow$)* $\forall x = (x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j$, $\forall \mathcal{U}^x$ *entorno de* $x \Rightarrow \exists B \subset \mathcal{B}$ *base de* $\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j$ *tal que* $x \in B \subset \mathcal{U}^x, B = \bigcap_{k=1}^n p_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$ *donde* $U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}$. *Entonces,* $x \in B \Rightarrow x_{j_k} \in U_{j_k}, \forall k \in \{1, \cdots, n\} \Rightarrow \exists \mathcal{V}^{x_{j_k}}$ *entorno cerrado de* $x_{j_k}, \forall k \in \{1, \cdots, n\}$ *tal que* $\mathcal{V}^{x_{j_k}} \subset U_{j_k} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n p_{j_k}^{-1}(\mathcal{V}^{x_{j_k}}) \subset B \subset \mathcal{U}^x$ *entorno cerrado de* $x$, *que es la caracterización antrior de regular.*

**Proposición 2.12.** *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ *familia de e.t.. Entonces,* $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ *es regular* $(T_3) \Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ *regular* $(T_3)$.

**Demostración.** *($\Rightarrow$)* $\forall j_0 \in J, X_{j_0}$ *es homeomorfo a* $X_{j_0} \times \{j_0\} \subset \sum_{j \in J} X_j$.

*($\Leftarrow$)* $\forall x \in \sum_{j \in J} X_j \Rightarrow$ ( *por ser unión disjunta* )$\exists! j_0 \in J : x \in X_{j_0} \times \{x_{j_0}\}$ *que es homeomorfo a* $X_{j_0}$.

**Observación.** *El coiente e.t.* $T_3$ *no es necesariamente regular.*

**Ejemplo.** *pg. 50*

## 2.2. Espacio Completamente Regular

**Definición 2.5** (Completamente Regular)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Diremos que* $(X, \mathcal{T})$ *es completamente regular si* $\forall x \in X, \forall C$ *cerrado de* $(X, \mathcal{T})$, $x \notin$

$C, \exists f : (X, \mathcal{T}) \to [0,1]$ *continua,* $f(x) = 0, f(C) = \{1\}$. *Diremos que es* $T_{3a}$ *si es completamente regular y* $T_1$

**Observación.** $(X, \mathcal{T})$ *es completamente regular* $\Leftrightarrow \forall C$ *cerrado,* $\forall x \notin C, \exists g : (X, \mathcal{T}) \to [0,1]$ *continua tal que* $f(x) = 1, g(C) = \{C\}$.

**Observación.** *completamente regular* $\Rightarrow$ *regular.*

**Observación.** $T_3 \not\Rightarrow T_{3a}$.

**Proposición 2.13.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. metrizable. Entonces,* $(X, \mathcal{T})$ *es* $T_{3a}$.

**Demostración.** $(X, \mathcal{T})$ *es* $T_2$ *y* $\exists d$ *métrica tal que* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. *Entonces,* $\forall C$ *cerrado de* $\mathcal{T}$, $\forall x \in X : x \notin C \Rightarrow d(x, C) > 0$. *Sea* $g : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R} : z \mapsto g(z) = \frac{d(z,C)}{d(x,C)} \Rightarrow g$ *es continua y*

$$g = \begin{cases} 1, & \text{si } z = x, \\ \{0\}, & \text{si } z = C \end{cases}$$

*la imagen de* $g$ *es un subconjunto de las semirectas derechas. Sea* $f : (X, \mathcal{T}) \to [0,1] : z \mapsto f(z) = \min\{g(z), 1\}$ *entonces,*

$$f = \begin{cases} 1, & \text{si } z = x, \\ \{0\} & \text{si } z = C \end{cases}$$

$\Rightarrow (X, \mathcal{T})$ *es* $\mathcal{T}_{3a}$.

**Observación.** *Ser completamente regular* $(T_{3a})$ *es un invariante topológico.*

**Proposición 2.14.** *Todo subespacio de un espacio completamente regular* $(T_{3a})$ *es completamente regular* $(T_{3a})$.

**Demostración.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *completamente regular,* $E \subset X$, $E \neq \emptyset$. *Entonces,* $\forall C$ *cerrado de* $(E, \mathcal{T}|_E)$, $\forall x \in E : x \notin C \Rightarrow \exists F \neq \emptyset$ *cerrado de* $(X, \mathcal{T}) : C = F \cap E \Rightarrow f : (X, \mathcal{T}) \to [0,1]$ *tal que*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in X, \\ \{1\} & \text{si } x = F \end{cases}$$

$\Rightarrow f|_E : (E, \mathcal{T}|_E) \to [0,1]$ *es continua tal que*

$$f|_E = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in X, \\ \{1\} & \text{si } x = C \end{cases}$$

$\Rightarrow$ *completamente regular.*

**Proposición 2.15.** *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia de e.t.. Entonces,* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *es completamente regular* $(T_{3a})$ *si y solo si* $(X_j, \mathcal{T}_j)$ *es completamente regular* $(T_{3a}), \forall j \in J$.

**Demostración.** *(*$\Rightarrow$*) Trivial.*

*(*$\Leftarrow$*)* $\forall C$ *cerrado de* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$, $\forall x = (x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} x_j \setminus C \in \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$ *base de* $\prod_{j\in J} \mathcal{T}_j$ *tal que* $x \in B \subset \prod_{j\in J} X_j \setminus C, B = \bigcap_{k=1}^{\infty} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k}), U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}, \forall k \in \{1, \cdots, n\}$. *(hip.)* $\Rightarrow \forall k \in \{1, \cdots, n\}, \exists f_k : (X_{j_k}, \mathcal{T}_{j_k}) \to [0,1]$ *continua* $\Rightarrow f_k(x_{j_k}) = 0, f_k(X_{j_k} \setminus U_{j_k}) = \{1\}$. *Sea* $f : (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \to [0,1]$ *tal que* $\forall z \in \prod_{j\in J} X_j, f(z) := \max\{\}$ *es continua dado que el máximo de funciones continuas es continuo* $\Rightarrow f(x) = 0$ *y si* $\forall z \in C \Rightarrow \in B \Rightarrow_o \in \{1, \cdots, n\} : z_{j_{k_0}} \notin U_{j_{k_0}} \Rightarrow f_{k_0}(z_{j_{k_0}}) = 1 \Rightarrow f(z) = 1 \Rightarrow f(C) = \{1\}$.

**Proposición 2.16.** *Sea* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$ *familia de e.t.. Entonces,* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$ *es completamente regular* $(T_{3a})$ *si y solo si* $(X_j, \mathcal{T}_j)$ *es completamente regular* $(T_{3a}), \forall j \in J$.

**Demostración.** *pág. 54*

**Observación.** *El cociente de e.t. es* $T_{3a}$ *no es completamente regular.*

## 2.3. Espacios Normales

**Definición 2.6** (Normal)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Decimos que es normal si* $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos* $\exists G_i, i \in \{1, 2\}$ *abiertos disjuntos tal que* $C_i \subset G_i$. *Deci-*

*mos que es $T_4$ si es normal y $T_1$.*

**Proposición 2.17.** *Todo e.t. metrizable es $T_4$.*

**Demostración.** $(X,\mathcal{T})$ *e.t. metrizable* $\Rightarrow \exists d$ *métrica de* $(X,\mathcal{T})$ *tal que* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d \Rightarrow \mathcal{T}$ *es* $T_2$. *Entonces,* $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos de* $(X,\mathcal{T})$ *se pueden dar dos caos*

- *Si* $C_1 = \emptyset$, *sea* $G_1 = \emptyset, G_2 = X$. *Entonces,* $(X,\mathcal{T})$ *es* $T_4$.
- *Si* $C_1, C_2 \neq \emptyset \Rightarrow \forall x \in C_1, \exists \epsilon_x > 0 : B_{\epsilon_x}(x) \cap C_2 = \emptyset$ *y* $\forall y \in C_2, \exists \delta_y : B_{\delta_y}(y) \cap C_1 = \emptyset \Rightarrow C_1 \subset \bigcup_{x \in C_1} B_{\epsilon_{\frac{x}{3}}}(x) := G_1 \in \mathcal{T}$ *y* $C_1 \subset \bigcup_{x \in C_2} B_{\delta_{\frac{y}{3}}}(y) := G_2 \in \mathcal{T}$. *En caso contrario,* $\exists z \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow \exists x_0 \in C_1 : z \in B_{\epsilon_{\frac{x_0}{3}}}(x_0)$ *y* $\exists y_0 \in C_1 : z \in B_{\delta_{\frac{y_0}{3}}}(y_0)$. *Suponemos que* $\delta_{y_0} \leq \epsilon_{x_0}$, *entonces* $d(x_0, y_0) \leq d(x_0, z) + d(z, y_0) <= \frac{\epsilon_{x_0}}{3} + \frac{\delta_{y_0}}{3} \leq \frac{2}{3}\epsilon_{x_0} \Rightarrow y_0 \in B_{\epsilon_{x_0}}, y_0 \in C_2$ *absurdo.*

**Proposición 2.18.** *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *e.t.. Entonces, son equivalentes*

*(I)* $(X,\mathcal{T})$ *es normal.*

*(II)* $\forall C$ *cerrado,* $\forall U \in \mathcal{T} : C \subset U, \exists V \in \mathcal{T} : C \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

*(III)* $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos,* $\exists G_1 \in \mathcal{T} : C_1 \subset G_1 : \overline{G_1} \cap C_2 = \emptyset$.

*(IV)* $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos* $\exists G_i \in \mathcal{T} : \overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \emptyset$ *y* $C_i \subset G_i, i \in \{1,2\}$

**Demostración.**

$(a \Rightarrow b)$ *Sea* $C \subset U \in \mathcal{T} : C$ *y* $X \setminus U$ *son cerrados disjuntos. Entonces,* $(X,\mathcal{T})$ *normal* $\Rightarrow \exists V_i, i \in \{1,2\}$ *disjuntos tal que* $C \subset V_1$ *y* $X \setminus U \subset V_2$ *disjuntos* $\Rightarrow V_1 \subset X \setminus V_2 \Rightarrow \overline{V_1} \subset X \setminus V_2$ *cerrado* $\Rightarrow C \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset X \setminus V_2 \subset U$.

$(b \Rightarrow c)$ $C_1, C_2$ *cerrados disjuntos* $\Rightarrow C_1 \subset X \setminus C_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists G_1 \in \mathcal{T} : C_1 \subset G_1 \subset \overline{G_1} \subset X \setminus G_2 \Rightarrow \overline{G_1} \cap C_2 = \emptyset$.

$(c \Rightarrow d)$ $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos* $\Rightarrow \exists G_1 \in \mathcal{T} : C_1 \subset G_1, \overline{G_1} \cap C_2 = \emptyset$ *y* $\exists G_2 \in \mathcal{T} : C_2 \subset G_2 : \overline{G_2} \cap \overline{C_2} = \emptyset$.

$(d \Rightarrow a)$ $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos* $\exists G_1, G_2 \in \mathcal{T} : \overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \emptyset$, $C_1 \subset G_1, C_2 \subset G_2$ *donde* $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \emptyset \Rightarrow G_1 \cap G_2 = \emptyset \Rightarrow$ *normal.*

**Lema 2.0.1** (Jones). *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Si* $\exists D$ *denso en* $(X, \mathcal{T})$, $E$ *cerrado en* $(X, \mathcal{T})$ *tal que* $(E, \mathcal{T}|_E)$ *es discreto y* $\mathrm{card}(E) \geq 2^{\mathrm{card}(D)}$. *Entonces,* $(X, \mathcal{T})$ *no es normal.*

**Demostración.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *normal,* $\forall C \subset E, C$ *y* $E$ *son disjuntos y cerrados en* $(E, \mathcal{T}|_E)$ *y en* $(X, \mathcal{T})$ *que es normal. Entonces,* $\exists U_C, V_C \in \mathcal{T} : C \subset U_C, E \setminus C \subset V_C$. *Ahora, sea* $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(D) : c \mapsto f(c) = U_C \cap D$ *aplicación. Veamos que* $f$ *es inyectiva,* $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{P}(E) : C_1 \neq C_2 \Rightarrow \exists x \in C_1 : x \notin C_2 \Rightarrow C_i \subset U_{C_i}, E \setminus C_i \subset V_{C_i}, i \in \{1, 2\} \Rightarrow x \in U_{C_1} \cap V_{C_2} \in \mathcal{T} \Rightarrow$ ( $D$ *denso* )$y \in U_{C_1} \cap V_{C_2} \cap D \neq \emptyset \Rightarrow$

$$\begin{cases} y \in U_{C_1} \cap D = f(C_1) \\ y \notin U_{C_2} \cap D = f(C_2) \end{cases}$$

$\Rightarrow f(C_1) \neq f(C_2) \Rightarrow \mathrm{card}(E) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(E)) \leq \mathrm{card}(\mathcal{P}(D)) = 2^{\mathrm{card}(D)}$

**Proposición 2.19.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. normal* $(T_4)$, $E \subset X$, $E$ *cerrado en* $(X, \mathcal{T})$. *Entonces,* $(E, \mathcal{T}|_E)$ *es normal* $(T_4)$.

**Demostración.** $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos en* $(E, \mathcal{T}|_E)$. *Entonces,* $C_1, C_2$ *cerrados disjuntos de* $(X, \mathcal{T})$ *que es normal* $\Rightarrow \exists U_i \in \mathcal{T}$ *disjuntos tal que* $C_i \subset U_i, i \in \{1, 2\} \Rightarrow U_i \cap E \in \mathcal{T}|_E$ *disjuntos tal que* $C_i \subset U_i \cap E, i \in \{1, 2\}$.

**Observación.** *El producto de e.t. normales no es necesariamente normal.*

**Proposición 2.20.** *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ *familia de e.t.. Entonces,* $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ *es normal* $(T_4) \Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ *es normal* $(T_4)$.

**Demostración.** *(*$\Rightarrow$*)* $\forall j_0 \in J, X_{j_0} \simeq X_{j_0} \times \{j_0\} \subset \sum_{j \in J} X_j$ *es cerrado.*

*(*$\Leftarrow$*)* $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos de* $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k) \Rightarrow \forall k \in J, j_k^{-1}(C_1), j_k^{-1}(C_2)$ *cerrados disjuntos de* $(X_k, \mathcal{T}_k)$ *que es normal* $\Rightarrow \forall j \in J, \exists U_{k,1}, U_{k,2} \in \mathcal{T}_k$ *disjuntos tal que* $j_k^{-1}(C_i) \subset U_{k,i} \in \mathcal{T}_k, i \in \{1, 2\}$. *Entonces,* $U_1 = \bigcup_{k \in J} U_{k,1} \times \{k\}, \bigcup_{k \in J} U_{k,1} \times \{k\} \in \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k$ *son abiertos dis-*

*juntos y $C_1 \subset U_1, C_2 \subset U_2$.*

**Proposición 2.21.** *Sea $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{S})$ e.t. tal que $(X,\mathcal{T})$ es normal, $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{S})$ suprayectiva, continua y cerrada. Entonces, $(Y,\mathcal{S})$ es normal $(T_4)$.*

**Demostración.** *$\forall C_1, C_2$ cerrado disjunto $(Y,\mathcal{T}) \Rightarrow f^{-1}(C_1), f^{-1}(C_2)$ cerrados disjuntos de $(X,\mathcal{T}) \Rightarrow \exists U_i \in \mathcal{T}$ disjuntos tal que $f^{-1}(C_i) \subset U_i, i \in \{1,2\} \Rightarrow (f$ cerrada $)V_i = Y \setminus f(X \setminus U_i) \in \mathcal{S}, i \in \{1,2\}$*

$$\Rightarrow V_1 \cap V_2 = (Y \setminus f(X \setminus U_1)) \cap (Y \setminus f(X \setminus U_2))$$

$$= (Y \setminus (f(X \setminus U_1) \cup f(X \setminus U_2)))$$
$$= Y \setminus f(X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2)$$
$$= Y \setminus f(X \setminus (U_1 \cap U_2))$$
$$Y \setminus f(X) = Y \setminus Y = \emptyset$$

*$\Rightarrow$ disjuntos.*

*¿$C_i \subset X \setminus f(X \setminus U_i)$? $\forall y \in C_i \Rightarrow f^{-1}(y) \subset f^{-1}(C_i) \subset U_i \Rightarrow X \setminus U_i \subset X \setminus f^{-1}(y) \Rightarrow f(X \setminus U_i) \subset f(X \setminus f^{-1}(y)) \Rightarrow z \in Y \setminus f(X \setminus f^{-1}(y)) \subset Y \setminus f(X \setminus U_i) = V_i \Rightarrow z \notin f(X \setminus f^{-1}(y)) \Rightarrow z = f(x') : x' \in X \setminus f^{-1}(y) \Rightarrow x' \in f^{-1}(y) \Rightarrow f(x') = y \Rightarrow z = y \Rightarrow \forall y \in C_i, y \in V_i$.*

*Para ver que es $T_4$: $(X,\mathcal{T})$ es $T_4$, $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y \Rightarrow$ $(T_1)$ $\{x\}$ cerrado $(X,\mathcal{T}) \Rightarrow$ $(f$ cerrada $)$ $f(\{x\})$ es cerrado en $(Y,\mathcal{S})$ y $f(\{x\}) = \{y\}$.*

**Lema 2.0.2** (Urysohn)**.** *Sea $(X,\mathcal{T})$ e.t.. Entonces, $(X,\mathcal{T})$ normal $\Leftrightarrow \forall C_1, C_2$ cerrado disjunto, $\exists f : (X,\mathcal{T}) \to [0,1]$ continua tal que $f(C_1) = \{0\}, f(C_2) = \{1\}$.*

**Demostración.** *($\Rightarrow$) Sea*

$$J = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} J_n,\ J_n = \{\frac{k}{2^n} : k \in \{0, 1, \cdots, 2^n\}\}$$

*Entonces,* $\forall r \in J, \exists M_r \subset X$ *tal que*

a*)* $M_0 = C_1, M_1 = X \setminus C_2$

b*)* $\forall r, r' \in J, r < r' \Rightarrow \overline{M}_r \subset \overset{\circ}{M}_r$

*Hacemos la demostración por inducción.*

*Sea* $n = 0 \Rightarrow J_0 = \{0, 1\} \Rightarrow M_0 = C_1, M_1 = X \setminus C_2 \Rightarrow \overline{M_0} = \overline{C_1} = C_1 \subset X \setminus C_2 = M_1 = \overset{\circ}{M}_1$.

*Suponemos que es cierto para* $m = p$*. Veamos que se cumple para* $m = p + 1$*.*

*Si* $m = p+1$*, entonces* $\forall r \in J, r = \frac{k}{2^{p+1}}$*. Distinguimos* $k$ *par e impar.*

- *Si* $k$ *par, entonces* $k = 2k', k' \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow r = \frac{2k'}{2^{p+1}} = \frac{k'}{2^p} \in J_p \Rightarrow \exists U_r$ *tal que cumple* $(a)$ *y* $(b)$*.*
- *Si* $k$ *es impar* $\Rightarrow s = \frac{k-1}{2^{p+1}}, t = \frac{k+1}{2^{p+1}} \in J_p \Rightarrow \exists M_s, M_t$ *tal que cumplen* $(a)$ *y* $(b)$ *dado que* $s < t, \overline{M}_s \subset \overset{\circ}{M}_t$ *y como* $(X, \mathcal{T})$ *es normal* $\Rightarrow \exists M_r \in \mathcal{T} : \overline{M_s} \subset M_r \subset \overline{M}_r \subset \overset{\circ}{M}_t$*.*

*Sea* $f : X \to [0, 1]$ *tal que*

$$f(x) = \begin{cases} \text{ínf}\{r \in J : x \in \overline{M}_r\}, \ \textit{si } x \notin C_2 \ (\Leftrightarrow x \in M_1) \\ 1, \ \textit{si } x \in C_2 \end{cases}$$

*entonces,* $f(C_2) = \{1\}$ *por definición. Y* $\forall x \in C_1 = M_0 = \overline{M}_0$ *cerrado* $\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f(C_1) = \{0\}$

*Veamos que* $f$ *es continua*

- *Si* $0 < f(x) < 1$ *,* $J$ *denso en* $[0, 1] \Rightarrow \forall z \in [0, 1], \forall \delta > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^{m_0}} < \delta \Rightarrow \frac{k_0}{2^{m_0}} \in (z - \delta, z + \delta)$*. Entonces,* $\exists t, s \in J : f(x_0) - \epsilon < t < f(x_0) < s < f(x_0) + \epsilon$*.*

    - *Si* $t < f(x_0) \Rightarrow x_0 \notin \overline{M}_t($ *si* $x_0 \in \overline{M}_t \Rightarrow \forall j \in J : t < j, x_0 \in \overset{\circ}{M}_j \subset \overline{M}_j \to f(x_0) \leq t)$*.*

- Si $t(x_0) < s \Rightarrow x_0 \in \mathring{M}_s$ ($f(x_0) = \inf\{r \in J : x_0 \in \overline{M}_r\} < s \Rightarrow \exists j \in J : j < s, x_0 \in \overline{M}_j \subset \mathring{M}_s$)

$\Rightarrow x \in (X \setminus \overline{M}_t \cap \mathring{M}_s) \in \mathcal{T}$ donde $X \setminus \overline{M}_t = V^{x_0}$.

$x \in V^{x_0} \Rightarrow$

- Si $x \notin \overline{M}_t \Rightarrow f(x) \geq t$ ( Si no , $f(x) < t, f(x) = \inf\{r \in J : x \in \overline{M}_r\} \Rightarrow \exists j \in J : j < t, x \in \overline{M}_j \subset \mathring{M}_t \subset \overline{M}_t$ absurdo )
- Si $x \in \mathring{M}_s \subset \overline{M}_s \Rightarrow f(x) \leq s$

*Entonces,* $f(V^{x_0}) \subset [t, s] \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$

- Si $f(x_0) = 1$, $\forall \epsilon > 0, \exists t \in J : f(x_0) - \epsilon = 1 - \epsilon < t < f(x_0) = 1$. *Entonces,* $t < f(x_0) \rightarrow x_0 \notin \overline{M}_t \Rightarrow x_0 \in X \setminus \overline{M}_t = V^{x_0}$. *Por tanto,* $\forall x \in V^{x_0} \Rightarrow x \notin \overline{M}_t \Rightarrow f(x) \geq t$. *Por tanto ,* $f(V^{x_0}) \subset [t, 1] \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) = (1 - \epsilon, 1)$.
- Si $f(x_0) = 1$, *entonces* $\forall \epsilon > 0, \exists s \in J : 0 = f(x_0) < s < f(x_0) + \epsilon = \epsilon$ *donde* $f(x_0) < s \Rightarrow x_0 \in \mathring{M}_s = V^{x_0} \in \mathcal{T}$. *Por tanto,* $\forall x \in V^{x_0}, x \in \mathring{M}_s \subset \overline{M} \subset_s \Rightarrow f(x) \leq s \Rightarrow f(V^{x_0}) \subset [0, s] \subset [0, \epsilon] = [f(x_0), f(x_0) + \epsilon)$.

*($\Leftarrow$)* $\forall C_1, C_2$ *cerradps disjuntos.*

- *Si* $C_! = \emptyset$. *Tomamos* $M_1 = \emptyset, M_2 = X$,
- *Si* $C_1, C_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow [0, 1]$ *con tinua tal que* $f(C_1) = \{0\}, f(C_2) = \{1\} \Rightarrow f^{-1}([0, \frac{1}{2})), f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) \in \mathcal{T}$ *disjuntos, donde* $C_1 \subset f^{-1}([0, \frac{1}{2})), C_2 \subset f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) \in \mathcal{T}$.

**Corolario 2.0.3.** $T_4$ *es más fuerte que* $T_{3a}$, $T_4 \Rightarrow T_{3a}$.

**Observación.** *Metrizable* $\Rightarrow T_4, T_{3a}, T_3, T_2, T_1, T_0$.

**Observación.** $T_3 \not\Rightarrow T_4$, $T_{3a}$ *es multiplicativa y* $T_4$ *no.*

**Teorema 2.1** (de Extension de Tietze)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Entonces,* $(X, \mathcal{T})$ *es normal* $\Leftrightarrow \forall C \neq \emptyset$ *cerrado,* $\forall f : (C, \mathcal{T}|_C) \rightarrow [-1, 1]$ *aplicación continua,* $\exists F : (X, \mathcal{T}) \rightarrow [-1, 1]$ *continua tal que* $F|_C = f$.

**Observación.** *Cualquier aplicación continua de* $C$ *a* $[a, b]$ *puede extenderse a una aplicación continua de* $X$ *a* $[a, b]$.

**Demostración.** *(⇒) Supongamos $C$ cerrado de $(X, \mathcal{T})$, $f : A \to [-1,1]$. Sea*

$$A_1 = \left\{x \in C : f(x) \geq \frac{1}{3}\right\},\ B_1 = \left\{x \in C : f(x) \leq -\frac{1}{3}\right\}$$

*Entonces, $A_1$ y $B_1$ son cerrados disjuntos en $(X, \mathcal{T})$ que es normal. Por el Lema de Uryshon $\Rightarrow \exists f_1 : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ tal que $f_1(A_1) = \frac{1}{3}$ , $f_1(B_1) = -\frac{1}{3}$. Por tanto, $\forall \in C, |f(x) - f_1(x)| \leq \frac{2}{3}$.*

*De la misma forma, sea $g_1 = f - f_1|_C : (C, \mathcal{T}|_C) \to [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ continua y*

$$A_2 = \left\{x \in C : f(x) \geq \frac{2}{9}\right\},\ B_2 = \left\{x \in C : f(x) \leq -\frac{2}{9}\right\}$$

*Por el Lemma de Uryshon $\Rightarrow \exists f_2 : (X, \mathcal{T}) \to [-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}]$ tal que $f_2(A_2) = \{\frac{2}{9}\}$ y $f_2(B_2) = \{-\frac{2}{9}\}$. Evidentemente, $\forall x \in C |g_1(x) - f_2(x)| \leq (\frac{2}{3})^2$.*

*Continuando el proceso, $\exists \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, f_n : (X, \mathcal{T}) \to [-1,1]$ funciones continuas en $C$ tal que $\forall x \in X, |f_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Entonces,*

$$\left|f - \sum_{k=1}^{n} f_k\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

*Por el criterio de Wieistrass $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente $\Rightarrow f_n \xrightarrow{n\to\infty} F \Rightarrow F$ continua $\Rightarrow F|_C = f$.*

*(⇐) $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos, entonces $C_1 \cup C_2$ es cerrado en $(X, \mathcal{T})$ y la función $f : C_1 \cap C_2 \to [-1,1]$ definida por $f(C_1) = \{-1\}, f(C_2) = \{1\}$ es continua en $C_! \cap C_2$. Entonces, la extensión de $f$ a todo $X$ será la función de Uryshon para $C_1$ y $C_2 \Rightarrow (X, \mathcal{T})$ es normal.*

**Proposición 2.22** (Variantes del Teorema de Tietze)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $\forall s > 0$. Entonces, son equivalentes*

*(I) $(X, \mathcal{T})$ es normal*

*(II) $\forall C \neq \emptyset$ cerrado , $\forall f : (C, \mathcal{T}|_C) \to (-s, s)$ continua, $\exists \overline{f} : (X, \mathcal{T}) \to (-s, s)$ tal que $\overline{f}|_C = f$.*

*(III)* $\forall C \neq \emptyset$ *cerrado,* $\forall g : (C, \mathcal{T}|_C) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ *continua,* $\exists \hat{g} : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ *continua tal que* $\hat{g}|_C = g$.

**Demostración.** $\boxed{i) \Rightarrow ii)}$ *Dado que* $(-s, s)$ *es abierto y* $(-s, s) \subset [-s, s]$, *el teorema de Tietze* $\Rightarrow \exists F : (X, \mathcal{T}) \to [-s, s]$ *continua tal que* $F|_C = f$.

- *Si* $F(X) \subset (-s, s)$ *hemos terminado.*
- *Si* $F(X) \not\subset (-s, s)\big( \Leftrightarrow F^{-1}(\{s, -s\}) = C_1 \neq \emptyset C, C_1$ *disjuntos* $\big)$. *Entonces, por el Lema de Uryshon* $\Rightarrow \exists h : (X, \mathcal{T}) \to [0, 1]$ *continua tal que* $h(C_1) = \{0\}, h(C) = \{1\}$. *Sea* $\hat{f} = F(x) \cdot h(x), \forall x \in X$. *Entonces,* $\hat{f}$ *es continua y* $\hat{f}(x) \subset (-s, s) \Rightarrow \hat{f}|_C = f$

$\boxed{ii) \Rightarrow iii)}$ *Sea* $g : (C, \mathcal{T}|_C) \to \mathbb{R}$ *continua,* $\exists h : \mathbb{R} \to (-s, s) \simeq f = h \circ g : (C, \mathcal{T}|_C) \to (-s, s)$ *continua. Por* $ii) \Rightarrow \exists \hat{f} : (X, \mathcal{T}) \to (-s, s)$ *continua tal que* $\hat{f}|_C = f$. *Sea* $\hat{g} = h^{-1} \circ \hat{f} : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ *continua* $\Rightarrow \hat{g}|_C = h^{-1} \circ f = h \circ (h^{-1} \circ g) = g$. *Y como* $\mathbb{R} \simeq (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, *tenemos el resultado requerido.*

$\boxed{iii) \Rightarrow i)}$ $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos*

- *Si* $C_1 = \emptyset$, *hemos terminado.*
- *Si* $C_1, C_2 \neq \emptyset \Rightarrow C_1 \cup C_2 \neq \emptyset$ *cerrado de* $(X, \mathcal{T})$. *Sea* $g : (C_1 \cup C_2, \mathcal{T}|_{C_1 \cup C_2}) \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(C_1) = \{-1\}, g(C_2) = \{1\}$, *entonces* $g$ *es continua y por la hipótesis se puede extender, es decirm* $\exists \hat{g} : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ *continua tal que* $\hat{g}|_{C_1 \cup C_2} = g \Rightarrow \hat{g}^{-1}((\leftarrow, 0)), \hat{g}^{-1}((0, \to)) \in \mathcal{T}$ *donde* $C_1 \subset \hat{g}^{-1}((\leftarrow, 0)), C_2 \subset \hat{g}^{-1}((0, \to))$ *abiertos disjuntos* $\Rightarrow (X, \mathcal{T})$ *es normal.*

# Capítulo 3

# Propiedades Numerabilidad

## 3.1. Axiomas Numerabilidad

**Definición 3.1** (Numerable). *Sea $X$ conjunto, $X$ es numerable si* $\mathrm{card}(X) \leq \mathcal{X}_0 = \mathrm{card}(\mathbb{N})$.

**Definición 3.2** (Primer Axioma de Numerabilidad). *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t.. Se dice que verifica el primer axioma de numerabilidad si $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}(x)$ base de entornos de $x$ en $(X, \mathcal{T})$ numerable.*

**Ejemplo.** $\forall X$ *conjunto,* $(X, \mathcal{T}_D), \mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}, \forall x \in X$ *es finito* $\Rightarrow$ *numerable* $\Rightarrow 1$ *axioma.*

**Ejemplo.** $\forall X$ *conjunto* $(X, \mathcal{T}), \mathcal{V}(x) = \{x\} = \mathcal{B}(x), \forall x \in X$.

**Ejemplo.** *Si* $(X, \mathcal{T})$ *metrizable,* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d, \forall x \in X, \mathcal{B}(x) = \{B^x_{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\}$.

**Definición 3.3** (Segundo Axioma). *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t.. Se dice que verifica el segundo axioma de numerabilidad si $\exists \mathcal{B}$ base de $\mathcal{T}$, numerable.*

**Ejemplo.** $\forall X$ *conjunto,* $(X, \mathcal{T}), \mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$.

**Ejemplo.** *Si* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u), \mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}\}$

**Observación.** *2º axioma* $\Rightarrow$ *1º axioma.*

**Observación.** *1º axioma* $\not\Rightarrow$ *2º axioma.*

*Sea $X$ conjunto tal que* $\mathrm{card}(X) > \mathcal{X}_0 \Rightarrow (X, \mathcal{T}_d)$ *es 1º axioma pero no segundo. Dado que* $\forall x \in X, \{x\} \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \forall \mathcal{B}$ *base de* $\mathcal{T}_d$, $\forall x \in X, \exists B_x \subset \mathcal{B} : B_x \subset \{x\} \Rightarrow \mathcal{X}_0 < \mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(\{B_x : x \in X\}) \leq \mathrm{card}((\mathcal{B}))$.

**Proposición 3.1.** *El 1º y 2º axioma de numerabilidad son propiedades hereditarias.*

**Demostración.**

(I) $(X,\mathcal{T})$ *1º axioma,* $E \subset X$. $\forall x \in E \Rightarrow \exists \mathcal{B}(x) = \{B_n^x : n \in \mathbb{N}\}$ *base de entornos de* $x$ *en* $(X,\mathcal{T}) \Rightarrow \mathcal{B}(x) = \{B_n^x \cap E : n \in \mathbb{N}\}$ *es base de entornos de* $x$ *en* $(E, \mathcal{T}|_E)$.

(II) $(X,\mathcal{T})$ *2º axioma,* $E \subset X \Rightarrow \exists \mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ *base de* $\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{B}' = \{B_n \cap E : n \in \mathbb{N}\}$ *es base de* $\mathcal{T}|_E$.

**Proposición 3.2.** *Sean* $(X,\mathcal{T}), (X',\mathcal{T}')$ *e.t.* $f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *aplicación suprayectiva, abierta y continua, Si* $(X,\mathcal{T})$ *es 1º axioma (2º axioma), también lo es* $(X',\mathcal{T}')$.

**Demostración.** $\boxed{a)}$ $\forall x' \in X' \xrightarrow{f supra} \exists x \in X : f(x) = x'$. *Por hipótesis* $\exists \mathcal{B}(x) = \{B_n^x : n \in \mathbb{N}\}$ *es base de entornos de* $x$ *numerable* $\Rightarrow \mathcal{B}'(x) = \{f(B_n^x) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{V}(x)$ *es numerable. Veamos que es base de entornos de* $x'$. $\forall V^{x'}$ *entorno de* $x'$ *en* $(X',\mathcal{T}') \xrightarrow{f cont.} f^{-1}(V^{x'})$ *entorno de* $x$ $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : B_{n_0}^x \subset f^{-1}(V^{x'}) \Rightarrow f(B_{n_0}^x) \subset f(f^{-1}(V^{x'})) = V^{x'}$ *donde* $f(B_{n_0}^{x'}) \in \mathcal{B}(x)$.

$\boxed{b)}$ *Por hipótesis,* $\exists \mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ *base de* $\mathcal{T} \xrightarrow{f \text{ ab.}} \mathcal{B}' = \{f(B_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}'$. *Entonces,* $\forall A' \in \mathcal{T}' \setminus \{\emptyset\}, \forall x' \in A' \xrightarrow{f \text{ cont y supra}} x \in f^{-1}(x') \subset f^{-1}(A') \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : B_{n_0} \subset f^{-1}(A') \Rightarrow f(x) = x' \in f(B_{n_0}) \subset f(f^{-1}(A')) = A$.

**Corolario 3.0.1.** *1º, 2º axioma son invariantes topológicos.*

**Observación.** *El producto numerable de espacios primer/segundo axioma es primer/segundo axioma.*

**Proposición 3.3.** *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ familia no vacía de e.t.. Entonces, $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ 1º axioma (2º axioma) $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ es 1º axioma (2º axioma) y $K = \{j \in J : \mathcal{T}_j$ no es trivial $\}$ es numerable.*

**Demostración.**

(I)

($\Rightarrow$) *Suponemos que $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ es primer axioma. Entonces, $\forall j \in J, p_j : (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \to (X_j, \mathcal{T}_j)$ suprayectiva, continua y abierta $\Rightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$ es primer axioma. Ahora, por hipótesis, $\forall a \in \prod_{j\in J} X_j : a = (a_j)_{j\in J}$, $\exists \mathcal{B}(a) = \{B_n^a : n \in \mathbb{N}\}$ base de entornos numerable de $a$ en $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$. Por tanto, $\forall j \in J, H_n = \{p_j(B_n^a) : n \in \mathbb{N}\}$ es base de entornos numerable de $a_j$ en $(X_j, \mathcal{T}_j)$ donde $\forall n \in \mathbb{N}, \{j \in J : p_j(B_n^a) \neq X_j\}$ es numerable. (Esto es debido a que $\prod_{j\in J} U_j \subset B_n^a : U_j \in \mathcal{T}_j$ donde $U_j = X_j, \forall J \setminus F$ para $F$ finito, por tanto, $\forall j \in J \setminus F, p_j(B_n^a) = X_j$). Como $H_n$ es finito $\Rightarrow H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ es numerable. Falta ver $K \subset H$. $\forall j \in J \Rightarrow \mathcal{T}_j \neq \{\emptyset, X_j\} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : p_j(B_{n_0}^a) \neq X_j \Rightarrow j \in H_{n_0} \subset H$.*

($\Leftarrow$) *Sea $K$ numerable. $\forall a = (a_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} X_j$. Por hipótesis, $\forall j \in J, \exists \mathcal{B}(a_j) = \{B_n^{a_j} : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{X_j\}$ base numerable de $a_j$. Sea $\mathcal{B}(a) = \{\prod_{j\in J} A_j : A_j = X_j, \forall j \in J \setminus F : F$ finito y $A_j \in \mathcal{B}(a_j), \forall j \in F\}$ es base de entornos de $a$. Luego $\mathrm{card}(\mathcal{B}(a)) = \mathrm{card}(\mathcal{P}_F(K)) \Rightarrow$ numerable.*

(II)

($\Rightarrow$) *$\forall j_0 \in J, p_{j_0} : (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \to (X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0})$ suprayectiva, continua y abierta $\Rightarrow (X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0})$ es 2º axioma. Y 2º axioma $\Rightarrow$ 1º axioma $\Rightarrow K$ numerable.*

($\Leftarrow$) *$\forall j \in J, \exists \mathcal{B}_j = \{B_n : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{X_j\}$. Sea $\mathcal{B} = \{\prod_{j\in J} A_j : A_j = X_j, \forall j \in J \setminus F, F$ finito , $A_j \in \mathcal{B}_j, j \in F\} \Rightarrow \mathrm{card}(\mathcal{B}) = \mathrm{card}(\mathcal{P}_F(K)) \Rightarrow$ numerable.*

**Observación** (Desmotración a) por contradicción)**.** *El producto de espacios es primer axioma, entonces cada espacio es primer axioma dado que son homeomorfos a un subespacio del producto. Si el número de la familia de topologías no triviales es no contable, entoncs para $x \in \prod X_j$ el número de bases de entornos es no contable.*

**Proposición 3.4.** *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia no vacía de e.t.. Entonces,* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$ *1º axioma* $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$*es 1º axioma*

**Demostración.**

($\Rightarrow$) $\forall j_0 \in J, X_{j_0} \simeq X_j \times \{j_0\} \subset \sum_{j=0} X_j$ *ACABAR*

($\Leftarrow$) $\forall x \in \sum_{j\in J} \Rightarrow \exists! j_0 \in J : x \in X_{j_0} \times \{j_0\} \simeq X_{j_0}$. *Por hipótesis,* $\exists \mathcal{B}$ *base entornos de* $p_1(x)$ *en* $(X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0}) \Rightarrow \exists$ *base de entornos de* $x$ *en* $X_{j_0} \times \{j_0\}$ *y en* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$.

**Proposición 3.5.** *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia no vacía de e.t.. Entonces,* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$ *2º axioma* $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$*es 1º axioma y* $\mathcal{T}$ *es numerable.*

**Demostración.**

($\Rightarrow$) $\forall j_0 \in J, X_{j_0} \simeq X_{j_0} \times \{j_0\} \subset \sum_{j\in J} X_j, \exists \mathcal{B}$ *base numerable de* $\sum_{j\in J} \mathcal{T}_j \Rightarrow \forall j \in J, \exists B_k \in \mathcal{B} : B_k \subset X_k \times \{k\}$ *disjuntos dos dos* $\Rightarrow \operatorname{card}\{B_k : k \in J\} \leq \operatorname{card}(\mathcal{B}) \leq \mathcal{X}_0$ *por ser subfamilia. Y por ser disjuntos* $\Rightarrow \forall k, k' \in \mathcal{T} : k \neq k', B_k \cap B_{k'} = \emptyset \Rightarrow \operatorname{card} J \leq \operatorname{card}\{B_k : k \in J\} \leq \operatorname{card} \mathcal{X}_0$.

($\Leftarrow$) $\forall k \in J, \exists \mathcal{B}_k$ *base numerable de* $\mathcal{T}_k \Rightarrow \{B \times \{k\} : B \in \mathcal{B}_k\}$ *base de entornos de* $\mathcal{T}_k \Rightarrow \mathcal{B} = \bigcup_{k\in J}\{B \times \{k\} : B \in \mathcal{B}_k\}$ *es numerable y es base de* $\sum_{j\in J} \mathcal{T}_j$.

**Observación.** *Si* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. 1º axioma entonces,* $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}(x) = \{B_n^x : n \in \mathbb{N}\} : B_{n+1}^x \subset B_n^x, \forall n \in \mathbb{N}$.

<u>*Dem:*</u> $\forall x \in X, \exists \{V_n^x : n \in \mathbb{N}\}$ *base de entornos numerable.*

$$B_1^x = V_1^x$$

$$B_2^x = V_1^x \cap V_2^x$$
$$B_3^x = V_1^x \cap V_2^x \cap V_3^x$$
$$B_n^x = \cap_{k=1}^n V_k^x$$

*entonces* $B_n^x \subset V_n^x$ *y* $B_{n+1}^x \subset B_n^x$

**Definición 3.4** (Sucesión Convergente). *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$*. Entonces,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \in X \Leftrightarrow \forall \mathcal{U}^x$ *entorno de* $x$ *in* $(X, \mathcal{T})$*,* $\exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in \mathcal{U}^x, \forall n \geq n_0$.

**Proposición 3.6.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. 1º axioma. Entonces,*

(I) $M \subset X, x \in X \Rightarrow x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} x$.

(II) $M \subset X, x \in X \Rightarrow x \in M' \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M \setminus \{x\} : \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} x$.

(III) $M \subset X, M$ *cerrado en* $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M \Rightarrow \text{lím}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$.

(IV) $(X', \mathcal{T}')$ *e.t.,* $f : X \to X', x \in X, f$ *continua en* $x \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \Rightarrow (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \to f(x)$.

**Demostración.** (I)

(II)

($\Rightarrow$) $x \in \overline{M}$ *y* $\exists \mathcal{B}(x) = \{B_n^x : n \in \mathbb{N}\} : B_{n+1}^x \subset B_n^x$*. Entonces,* $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in B_n^x \cap M \neq \emptyset \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$.

($\Leftarrow$) $\forall \mathcal{U}^x, \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in \mathcal{U}^x$ *donde* $x_n \in M, \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in M \cap \mathcal{U}^x \neq \emptyset$.

(III)

($\Rightarrow$) $x \in M' \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, B_n^x \setminus \{x\} \cap M \neq \emptyset \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M \setminus \{x\}$.

($\Leftarrow$) *Análogo.*

(IV) $M$ *cerrado* $\Leftrightarrow \overline{M} = M \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M \Rightarrow \text{lím}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M$.

(V)

($\Rightarrow$) $f$ *cont en* $x$ *y* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \Rightarrow \forall V^{f(x)}, \exists U^x : f(U^x) \subset V^{f(x)} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in U^x, \forall n \geq n_0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : f(x_n) \in f(U^x) \subset V^{f(x)}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \to f(x)$.

($\Leftarrow$) *Si* $f$ *no es continua, entonces* $\exists V^{f(x)} : \forall U^x, f(U^x) \not\subset V^{f(x)} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f(B_n^x) \not\subset V^{f(x)} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in B_n^x : f(x_n) \notin V^{f(x)}$.

*Ahora,* $B^x_{n+1} \subset B^x_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$ *y* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \not\to f(x)$.

## 3.2. Separable

**Definición 3.5** (Separable)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Se dice que es separable si* $\exists D$ *denso numerable en* $(X, \mathcal{T})$*.*

**Proposición 3.7.** *Todo 2º axioma es separable.*

**Demostración.** $\exists \mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ *base numerable de* $T$*. Podemos suponer que* $\mathcal{B} \neq \emptyset$*. Entonces,* $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in B_n$ *de manera que* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = D$ *es numerable. Además,* $\forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : B_{n_0} \in \mathcal{B} : x_{n_0} \in B_{n_0} \subset U$ *y* $U \cap D \neq \emptyset \Rightarrow D$ *es denso.*

**Observación.** *La sepraración no es hederitaria.*

**Demostración.** *content*

**Proposición 3.8.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. separable,* $G \in \mathcal{T}\setminus\{\emptyset\}$*. Entonces,* $(G, \mathcal{T}|_G)$ *es seprable.*

**Demostración.** $\exists D$ *denso numera en* $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow G \cap D \neq \emptyset$*. Como* $D$ *es numerable* $\Rightarrow G$ *numerable. Ahora,* $\forall U \in \mathcal{T}|_G \setminus \{\emptyset\} \Rightarrow U \subset G \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\} \Rightarrow U \cap D \neq \emptyset$ *donde* $U \cap D = U \cap (D \cap G) \Rightarrow G \cap D$ *denso en* $(G, \mathcal{T}|_G)$*.*

**Proposición 3.9.** *Sea* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t.,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *supra-yectiva y continua. Si* $(X, \mathcal{T})$ *es separable, entonces también lo es* $(X', \mathcal{T}')$*.*

**Demostración.** $\exists D$ *denso numerable en* $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow \overline{D} = X \Rightarrow f(\overline{D}) \subset \overline{f(D)}$ *donde* $f(\overline{D}) = f(X) \Rightarrow f(X) \subset \overline{f(D)} \Rightarrow f(X) = \overline{f(D)} \Rightarrow f(D)$ *denso y numerable.*

**Proposición 3.10.** *Sean $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ familia no vacia de e.t. $T_2$ y $\operatorname{card} X_j \geq 2, \forall j \in J$. Entonces, $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ es separable $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ es separable y $\operatorname{card} J \leq 2^{\mathcal{X}_0}$.*

**Demostración.**

($\Rightarrow$) *$\forall j \in J, p_j$ continua y suprayectiva $\Rightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$ separable $\forall j \in J$. Luego, $\forall j \in J, \exists U_j, V_j \in \mathcal{T}_j \setminus \{\emptyset\} : U_j \cap V_j = \emptyset$ de manera que $p_j^{-1}(U_j) \in \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j$ no vacío y $\exists D$ denso en $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \Rightarrow D \cap p_j^{-1}(U_j) = D \cap D_j \neq \emptyset$. Sea*

$$F : J \to \mathcal{P}(D) : j \mapsto D_j.$$

*Veamos que $F$ es inyectiva. $\forall j, j' \in J : j \neq j', p_j^{-1}(U_j) \cap p_{j'}^{-1}(V_j) \neq \emptyset$ por ser $p_j$ aplicación abierta. Entonces, $D \cap p_j^{-1}(U_j) \cap (p_{j'})^{-1}(V_j) \neq \emptyset$.*

($\Leftarrow$) *Sea*

$$D = \{P^{n_1,\cdots,n_k}_{J_1,\cdots,J_k}, k \in \mathbb{N}, n_1, \cdots, n_k \in \mathbb{N},$$

*$J_1, \cdots, J_k$ segmento de extremos racionales disjuntos contenido en $[0,1]\}$*

*Entonces, $D \subset \prod_{j\in J} X_j$ y $D$ es numerable. Por tanto, $\forall U \in \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j \setminus \{\emptyset\}, \exists B \in \mathcal{B} : B \subset U$ tal que $B = \bigcap_{i=1}^m p_{ji}^{-1}(U_{ji})$ donde $U_{ji} \in \mathcal{T}_{ji} \setminus \{\emptyset\}, \forall i \in \{1, \cdots, m\}$. Por tanto, $\forall i \in \{1, \cdots, m\}, D_{j_i} \cap U_{j_i} = d_{j_i n_i} \neq \emptyset, j_1, \cdots, j_m \in [0,1]$. Entonces, $P^{n_1,\cdots,n_k}_{J_1,\cdots,J_k}$ in $D$ y $\forall i \in \{1, \cdots, m\}$, $p_{ji}(P^{n_1,\cdots,n_k}_{J_1,\cdots,J_k}) = d_{j_i n_i} \in U_{i_j} \Rightarrow P^{n_1,\cdots,n_k}_{J_1,\cdots,J_k} \in D, B \Rightarrow D \cap B \neq \emptyset \Rightarrow D \cap U \neq \emptyset$.*

**Proposición 3.11.** *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ familia no vacía de e.t.. Entonces, $(\sum_{j\in J} X_j, \sum_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ separable $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ es separable y $J$ es numerable.*

**Demostración.**

($\Rightarrow$) *Por hipótesis, $D$ denso numerable en $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k) \Rightarrow \forall k \in J, (X_k \times \{k\}) \cap D \neq \emptyset$. Sea $z_k \in (X_k \times \{k\}) \cap D$, entonces $\{z_k : k \in J\} \subset D$ es conjunto de puntos distintos. Podemos usar una aplicación injectiva de $\{z_k : k \in J\}$ a $J$ para ver que $\operatorname{card} J \leq \operatorname{card} D \leq \mathcal{X}_0$.*

($\Leftarrow$) *$\forall k \in J, \exists D_k$ denso numerable en $(X_k, \mathcal{T}_k)$. Sea $D = \bigcup_{k\in J} mbD_k \times$*

$\{k\}$ *es numerable por ser unión de conjuntos numerables y es subespacio del espacio suma* $\Rightarrow$ *es denso en* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$.

## 3.3. Lindelöf

**Definición 3.6** (Recubrimiento)**.** *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *e.t.,* $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$. *Se dice que* $\mathcal{U}$ *es un recubrimiento de* $X$ *si* $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U = X$. *Si* $\forall U \in \mathcal{U}, U \in \mathcal{T}$, *entonces* $\mathcal{U}$ *es un recubrimiento abierto.*

**Definición 3.7** (Subrecubrimiento)**.** *Sea* $(X,\mathcal{T})$,$\mathcal{U}$ *recubrimiento de* $X$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. *Se dice que* $\mathcal{V}$ *es un subrecubrimiento si* $\mathcal{V}$ *también es un recubrimiento de* $X$.

**Observación.** *Puede ser que* $\mathcal{V} = \mathcal{U}$.

**Definición 3.8** (Lindelöf)**.** *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *e.t. es Lindelöf si* $\forall\mathcal{U}$ *recubrimiento abierto de* $X$, $\exists\mathcal{V}$ *subrecubrimiento numerable de* $\mathcal{U}$.

**Proposición 3.12.** *Todo e.t. 2º axioma es de Lindelöf.*

**Demostración.** *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *2º axioma* $\Rightarrow \exists\mathcal{B}$ *base numerable de* $\mathcal{T}$. *Entonces,* $\forall\mathcal{U}$ *recubrimiento abierto de* $(X,\mathcal{T}) \Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}, \forall x \in U, \exists B_U^x \in \mathcal{B} : x \in B_U^x \subset U$. *Sea* $\mathcal{C} = \{B_U^x : x \in U \in \mathcal{U}\} \subset \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ *numerable y* $\mathcal{C}$ *recubre a* $X$ *pero no es subrecubrimiento. Luego,* $\forall B \in \mathcal{C}, \exists U_B \in \mathcal{U} : B \subset U_B \Rightarrow \mathcal{V} = \{U_B : B \in \mathcal{C}\} \subset \mathcal{U}$ *es numerable y recubre a* $X \Rightarrow \mathcal{V}$ *es subrecubrimiento de* $\mathcal{U} \Rightarrow$ *es* $(X,\mathcal{T})$ *es Lindelöf.*

**Observación.** *Lindelöf no es hereditaria.*

**Ejemplo.** *VER EJEMPLO*

**Proposición 3.13.** *Todo subespacio cerrado de un e.t. Lindelöf es Lindelöf.*

**Demostración.** *Sea* $(X,\mathcal{T})$, *Lindelöf,* $E$ *cerrado no vación de* $(X,\mathcal{T})$. *Entonces,* $\forall\mathcal{U}$ *recubrimiento abierto de* $(E,\mathcal{T}|_E)$, $\mathcal{U} = \{U_j : j \in J\} \Rightarrow \forall j \in J, \exists V_j \in \mathcal{T} : U_j = V_j \cap E$. *Luego,* $\mathcal{U}' = \{V_j : j \in J\} \cup \{X \setminus E\}$ *es recubrimiento abierto de* $(X,\mathcal{T}) \Rightarrow \exists\mathcal{V}' = \{V_{jn} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{X \setminus E\}$ *es sub* *recubrimiento de $\mathcal{U}' \Rightarrow \mathcal{V} = \{U_{jn} : n \in \mathbb{N}\}$ es subrecubrimiento de $\mathcal{U}$.*

**Proposición 3.14.** *Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $(X, \mathcal{T})$ Lindelöf, $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ aplicación continua suprayectiva. Entonces, $(X', \mathcal{T}')$ es Lindelöf.*

**Demostración.** *$\forall \mathcal{U}' = \{U'_j : j \in J\}$ recubrimiento abierto de $(X', \mathcal{T}')$. Entonces, $\mathcal{U} = \{f^{-1}(U'_j) : j \in J\}$ es recubrimiento abierto de $(X, \mathcal{T})$. Por ser $(X, \mathcal{T})$ Lindelöf $\Rightarrow \exists \mathcal{V} = \{f^{-1}(U'_{jn}) : n \in \mathbb{N}\}$ subrecubrimiento numerable de $\mathcal{U} \xRightarrow{f \text{ supra.}} \mathcal{V}' = \{U'_{jn} : n \in \mathbb{N}\}'$ subrecubrimiento numerable de $\mathcal{U}'$.*

**Observación.** *El producto de dos e.t. de Lindelöf no es Lindelöf.*
**Ejemplo.** *VER EJEMPLO*

**Proposición 3.15.** *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia no vacía de e.t.. Entonces, $(\sum_{j \in J} X_j, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ es Lindelöf $\Leftrightarrow$ $(X_j, \mathcal{T}_j)$ es Lindeöf $\forall j \in J$ y $J$ es numerable.*

**Demostración.**

($\Rightarrow$) *$\forall k \in J, X_k \simeq X_k \times \{k\} \subset \sum_{j \in J} X_j$ y dado que Lindelöf se conserva por aplicaciones continuas $\Rightarrow$ Lindelöf es invariante, tenemos que $(X_k, \mathcal{T}_k)$ es Lindelöf, $\forall k \in J$. Como $\{X_k \times \{k\} : k \in J\}$ es recubrimiento de $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ por conjuntos disjuntos doa a dos $\Rightarrow J$ numerable. REVISAR.*

($\Leftarrow$) *Sea $\mathcal{U}$ recubrimiento abierto de $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$. Entonces, $\forall k \in J, \{U \cap (X_k \times \{k\}) : U \in \mathcal{U}\} = \mathcal{U}_k$ recubrimiento abierto de $X_k \times \{k\} \simeq (X_k, \mathcal{T}_k)$. Por tanto $\forall k \in J, \exists \mathcal{V}_k$ subrecubrimiento numerable de $\mathcal{U}_k$. Sea $\mathcal{V} = \bigcup_{k \in J} \{U : U \cap (X_k \times \{k\}) \in \mathcal{V}_k\} \subset \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{V}$ es subrecubrimiento numerable de $\mathcal{U} \Rightarrow (\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ es Lindelöf.*

**Proposición 3.16.** *Todo e.t. Lindelöf y regular es normal.*

**Demostración.** *Sea $(X,\mathcal{T})$ e.t. Lindelöf y regular. Entonces, $\forall C_1, C_2$ cerrados de $(X,\mathcal{T})$*

- *Si $C_1=\emptyset$, entonces $U_1=\emptyset, U_2=X$.*
- *Si $C_1, C_2\neq\emptyset$, entonces*

$$\begin{cases}\forall x\in C_1, \exists V^x\in\mathcal{T}:\overline{V}^x\cap C_2=\emptyset\Rightarrow C_1\subset\bigcup_{x\in C_1}V^x\\ \forall y\in C_2, \exists U^y\in\mathcal{T}:\overline{U}^y\cap C_1=\emptyset\Rightarrow C_2\subset\bigcup_{y\in C_2}U^y\end{cases}$$

*Dado que todo espacio cerrado de un e.t. Lindelöf es Lindelöf, entonces*

$$\begin{cases}\exists\{V^{x_n}:n\in\mathbb{N}\}:C_1\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}V^{x_n} \text{ subfamilia numerable}\\ \exists\{U^{y_n}:n\in\mathbb{N}\}:C_2\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U^{y_n} \text{ subfamilia numerable}\end{cases}$$

*Ahora, sean*

$$A_1=V^{x_1},\quad B_1=U^{y_1}\setminus\overline{A_1}$$
$$A_2=V^{x_2}\setminus\overline{B_1},\quad B_2=U^{y_2}\setminus\overline{A_1\cup A_2}$$
$$A_3=V^{x_3}\setminus\overline{B_1\cup B_2},\quad B_3=U^{y_3}\setminus\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$$
$$\dots$$

*son recubrimietos abiertos de $T$. Sean*

$$G_1=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\in\mathcal{T},\quad G_2=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n\in\mathcal{T}.$$

*Veamos que $C_i\subset G_i, \forall i\in\mathbb{N}$ y $G_1\cap G_2=\emptyset$.*

$\boxed{C_1\subset G_1}$ $\forall z\in C_1\Rightarrow\exists n\in\mathbb{N}:z\in V^{x_n}$. *Como $z\in C_1$, entonces $z\notin\overline{U}^{y_m}, \forall m\in\mathbb{N}\Rightarrow U^{y_m}\subset B_m\Rightarrow z\notin\overline{U}^{y_m}\subset\overline{B}_m, \forall m\in\mathbb{N}\Rightarrow z\in A_n\subset G_1$.*

*Veamos que $G_1$ y $G_2$ son disjuntos.*

$\boxed{G_1 \cap G_2 = \emptyset}$ *Si* $\exists z \in G_1 \cap G_2$, *entonces*

$$\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N} : z \in A_{n_0} \Rightarrow z \notin B_n, \forall n < n_0 \\ \exists m_0 \in \mathbb{N} : z \in B_{m_0} \Rightarrow z \notin A_m, \forall m \leq m_0 \end{cases}$$

*pero* $z \in A_{n_0} \Rightarrow n_0 > m_0$ *y* $z \in B_{m_0} \Rightarrow m_0 \geq n_0$ *es absurdo.*

**Teorema 3.1.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. metrizable. Entonces, son equivalentes*

*(*I*)* $(X, \mathcal{T})$ *es 2º axioma,*

*(*II*)* $(X, \mathcal{T})$ *es Lindelöf,*

*(*III*)* $(X, \mathcal{T})$ *es separable.*

**Demostración.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *tal que* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

$\boxed{b \Rightarrow a}$ *Como* $(X, \mathcal{T})$ *Lindelöf, entonces* $\forall \mathcal{U}$ *recubrimiento abierto de* $\mathcal{U}$, $\exists \mathcal{V}$ *subrecubrimiento numerable de* $\mathcal{U}$. *Por tanto,* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{U}_n = \{B_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X\}$$

*es un recubrimiento abierto de* $(X, \mathcal{T})$. *Luego,* $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n : \mathcal{V}_n$ *es subrecubrimiento numerable de* $\mathcal{U}_n$. *Entonces,* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n \equiv \mathcal{B} \subset \mathcal{T}$.

*Veamos que* $\mathcal{B}$ *es base de* $\mathcal{T}$. $\forall W \in \mathcal{T}, \forall x \in W \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : B_{\frac{1}{m}}(x) \subset W$ *entonces,* $\mathcal{V}_{2m}$ *es recubrimiento abierto de* $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow \exists y \in X : x \in B_{\frac{1}{2m}}(y) \in \mathcal{V}_{2m}$.

*Ahora,* $x \in B_{\frac{1}{2m}}(y) \subset B_{\frac{1}{m}}(x) \subset W$. *Entonces,* $\mathcal{B}$ *es base de* $\mathcal{T}$. *Para ver esto,* $\forall z \in B_{\frac{1}{2m}}(x), d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) \leq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m} \Rightarrow B_{\frac{1}{2m}}(y) \subset B_{\frac{1}{m}}(x) \Rightarrow \mathcal{B}$ *es base de* $\mathcal{T}$.

$\boxed{c \Rightarrow a}$ $(X, \mathcal{T})$ *separable* $\Rightarrow \exists D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ *numerable y denso en* $(X, \mathcal{T})$. *Sea* $\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{m}}(d_n) : n, m \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}$ *es colección de abiertos numerable* $\Rightarrow \mathcal{B}$ *es numerable.*

*Veamos que* $\mathcal{B}$ *es base de* $\mathcal{T}$.

$$\forall W \in \mathcal{T}, \forall x \in W \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : B_{\frac{1}{m}}(x) \subset W.$$

*Por ser $D$ denso y $B_{\frac{1}{2m}}(x)$ abierto. Entonces,*

$$\forall z \in B_{\frac{1}{2m}}(d_n), d(z,x) \leq d(z,d_n) + d(x,d_n) \leq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m}$$

*entonces, $B_{\frac{1}{2m}}(y) \subset B_{\frac{1}{m}}(x) \Rightarrow \mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$.*

# Capítulo 4

# Espacios Compactos

## 4.1. Compacidad

**Definición 4.1** (Compacto)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t.. Se dice que $(X, \mathcal{T})$ es compacto si $\forall \mathcal{U}$ recubrimiento abierto de $(X, \mathcal{T})$, $\exists \mathcal{V}$ sub recubrimiento finito suyo.*

**Observación.** *Compacto $\Rightarrow$ Lindelöf.*

**Observación.** *Lindelöf $\not\Rightarrow$ Compacto.*

**Ejemplo.** *$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es de Lindelöf pero no es compacto.*

**Observación.** *La compacidad se conserva por aplicaciones continuas (imagen directa).*

**Proposición 4.1.** *Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $(X, \mathcal{T})$ compacto, $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ suprayectiva y continua. Entonces, $(X', \mathcal{T}')$ es compacto.*

**Demostración.** $\forall \mathcal{U}' = \{U'_j : j \in J\} \xRightarrow{f \text{ cont.}} \mathcal{U} = \{f^{-1}(U'_j)\}$ es recubrimiento abierto de $(X, \mathcal{T})$. Entonces, $\mathcal{V} = \{f^{-1}(U'_{j_1}), \cdots, f^{-1}(U'_{j_n})\} \xRightarrow{f \text{ supra.}} \mathcal{V}' = \{U'_{j_1}, \cdots, U'_{j_n}\}$ es subrecubrimiento finito de $\mathcal{U}$.

**Corolario 4.0.1.** *La compacidad es invariante topológico.*

**Proposición 4.2.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. compacto, $E \neq \emptyset \subset X$ cerrado de $(X, \mathcal{T})$. Entonces, $(E, \mathcal{T}|_E)$ es compacto.*

**Demostración.** $\forall \mathcal{U} = \{U_j : j \in J\}$ *recubrimiento abierto de* $(E, \mathcal{T}|_E) \Rightarrow \forall j \in J, \exists V_j \in \mathcal{T} : U_j = V_j \cap E \Rightarrow \mathcal{U}' = \{V_j : j \in J\} \cup \{X \setminus E\}$ *recubrimiento abierto de* $(X, \mathcal{T}) \xRightarrow{\text{hip.}} \exists \mathcal{V}' = \{V_{j_1}, \cdots, V_{j_n}\} \cup \{X \setminus E\}$ *subrecubrimiento finito de* $\mathcal{U}' \Rightarrow \mathcal{V} = \{U_j, \cdots, U_{j_n}\}$ *subrecubrimiento finito de* $\mathcal{U}$.

**Proposición 4.3.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t.. Entonces, $(X, \mathcal{T})$ es compacto $\Leftrightarrow \forall \mathcal{C} = \{C_j\}_{j \in J}$ familia de cerrados de $(X, \mathcal{T})$ con la propiedad de intersección finita (todas las interseccións de subfamilias de $\mathcal{C}$ son no vacías), se tiene que $\bigcap_{j \in J} C_j \neq \emptyset$.*

**Demostración.**

($\Rightarrow$) *Supongamos que $\exists \mathcal{C} = \{C_j\}_{j \in J}$ familia de cerrados con la p.i,f, tal que $\bigcap_{j \in J} C_j = \emptyset$. Entonces,*

$$\{X \setminus C_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{T}$$

*es recubrimiento abierto de $(X, \mathcal{T})$ y no tiene subrecubrimiento finito. Por tanto, $(X, \mathcal{T})$ no es compacto.*

($\Leftarrow$) *Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ no es compacto. Entonces, $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ recubrimiento abierto de $(X, \mathcal{T})$ tal que $\nexists$ subrecubrimiento finito. Luego, $\{X \setminus U_j : j \in J\}$ es familia de cerrados con la p.i.f tal que $\bigcap_{j \in J} (X \setminus U_j) = \emptyset$, es una contradicción.*

**Proposición 4.4.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ $T_2$, $E \subset X : (E, \mathcal{T}|_E)$ es compacto. Entonces, $E$ es cerrado de $(X, \mathcal{T})$.*

**Observación.** *No confundir. Todo subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto, y un subconjunto compacto de un espacio $T_2$ es cerrado.*

**Observación.** *Si $C \subset X$ es compacto, entonces $\forall K$ subfamilia arbitraria the subconjuntos abiertos $C \subset \bigcup_{G \in K} G$, $\exists F \subset K$ subfamilia finita $C \subset \bigcup_{G \in F} G$.*

**Demostración.** *Sea* $E \subset X$. *Entonces, como* $X$ *es* $T_2$, $\forall x \in X \setminus E, \forall y \in E, \exists U_y^x, \exists U^y \in \mathcal{T}$ *disjuntos. La colección*

$$\{U^y : y \in E\}$$

*es un recubrimiento abierto de* $E$, *entonces* $E$ *compacto* $\Rightarrow \exists y_1, \cdots y_n \in E$ *tal que* $\{U^{y_1}, \cdots, U^{y_n}\}$ *es un subrecubrimiento finito de* $E$. *Por tanto,*

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{n} U^{y_i} \equiv G \in \mathcal{T}$$

*que es disjunto de*

$$x \in U_{y_1}^x \cap \cdots \cap U_{y_2}^x \equiv V^x$$

*ya que* $\forall z \in U_{i_0}^y, z \notin U_{y_0}^x \Rightarrow z \notin V^x$. *Entonces,*

$$V^x \cap G = \emptyset \Rightarrow V^x \cap E = \emptyset \Leftrightarrow V^x \subset X \setminus E \in \mathcal{T}$$

*si y solo si* $E$ *es cerrado de* $(X, \mathcal{T})$.

**Observación.** *La compacidad ni es propiedad hereditaria.*
**Ejemplo.** $([0,1], \mathcal{T}_u|_{[0,1]})$ *pero* $((0,1), \mathcal{T}_u|_{(0,1)})$ *no es compacto.*

**Proposición 4.5.** *Sea* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t.,* $(X, \mathcal{T})$ *compacto,* $(X', \mathcal{T}')$ $T_2$, $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *continua. Entonces,* $f$ *es apicación cerrada.*

**Demostración.** $\forall E \subset X : E \neq \emptyset$ *es cerrado, entonces* $(E, \mathcal{T}|_E)$ *es cerrado* $\xRightarrow{f \text{ cont.}}$ $(f(E), \mathcal{T}'|_{f(E)})$ *es compacto en* $(X', \mathcal{T}')$ *que es* $T_2$ $\Rightarrow$ $(f(E), \mathcal{T}'|_{f(E)})$ *es cerrado de* $(X', \mathcal{T}')$.

**Demostración.** $\forall E \subset X$ *cerrado* $\Rightarrow (E, \mathcal{T}|_E)$ *es cerrado y por ser* $(X, \mathcal{T})$ *compacto, entonces* $(E, \mathcal{T}|_E)$ *es compacto. Ahora,* $f|_E : (E, \mathcal{T}|_E) \to (f(E), \mathcal{T}|_{f(E)})$ *es suprayectiva y continua, y* $(X, \mathcal{T})$ *compacto* $\Rightarrow (f(E), \mathcal{T}|_{f(E)})$ *es compacto en* $(X', \mathcal{T}')$. *Como* $(X', \mathcal{T}')$ *es* $T_2$, *entonces* $(f(E), \mathcal{T}|_{f(E)})$ *es cerrado de* $(X', \mathcal{T}')$.

**Proposición 4.6.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. $T_2$, $C_1, C_2 \subset X$ disjuntos tal que $(C_i, \mathcal{T}|_{C_i})$ compacto, $\forall i \in \{1,2\}$. Entonces, $\exists G_i \in \mathcal{T}, i \in \{1,2\}$ disjuntos tal que $C_i \subset G_i$.*

**Demostración.** *Por ser $(X, \mathcal{T})$ $T_2$ tenemos que $\forall x \in C_1, \forall y \in C_2, \exists U_y^x, \exists U_x^y \in \mathcal{T}$ disjuntos. Consideramos $x \in C_1$ entonces $\{U_x^y : y \in C_2\}$ es un recubrimiento abierto de $(C_2, \mathcal{T}|_{C_2}) \Rightarrow \exists y_1, \cdots, y_n \in C_2 : \{U_x^{y_1}, \cdots, U_x^{y_n}\}$ es subrecubrimiento finito de $(C_1, \mathcal{T}|_{C_1})$ tal que*

$$C_2 \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_x^{y_i} \equiv A_x$$

*es disjunto de*

$$x \in U_{y_1}^x \cap \cdots \cap U_{y_n}^x \equiv V^x \in \mathcal{T}$$

*Como $C_1 \subset \bigcup_{x \in C_1} V^x$ es recubrimiento abierto de $(C_1, \mathcal{T}|_{C_1})$, entonces $\exists x_1, \cdots, x_m \in C_1 : \{V^{x_1, \cdots, V^{x_n}}\}$ es subrecubrimiento finito tal que*

$$C_1 \subset \bigcup_{j=1}^{m} V^{x_j} \equiv G_1 \in \mathcal{T}.$$

*Entonces, para*

$$C_2 \subset A_{x_1} \cap \cdots \cap A_{x_m} \equiv G_2 \in \mathcal{T}$$

*tenemos que $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.*

**Corolario 4.0.2.** *Todo e.t. compacto y $T_2$ es $T_4$.*

**Proposición 4.7.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. regular, $C_1, C_2 \subset X$ disjuntos tal que $(C_1, \mathcal{T}|_{C_1})$ es compacto y $(C_2, \mathcal{T}|_{c_2})$ es cerrado. Entonces, $\exists G_i \in \mathcal{T}, i \in \{1,2\}$ disjuntos tal que $C_i \subset G_i$.*

**Demostración.** *Suponemos que $C_2 \neq \emptyset$. Entonces, por regularidad $\forall x \in C_1, \exists U^x, \exists U_x \in \mathcal{T}$ disjuntos tal que $x \in U^x, C_2 \subset U_x$. Entonces, $\{U^x : x \in C_1\}$ es recubrimiento abierto de $(C_1, \mathcal{T}|_{C_1})$ tal que*

$$C_1 \subset \bigcup_{x \in C_1} U^x$$

*entonces,* $\exists x_1, \cdots, x_n$ *tal que*

$$\{U^{x_1}, \cdots U^{x_n}\}$$

*es subrecubrimiento finito de* $(C_1, \mathcal{T}|_{C_1})$ *y*

$$C_1 \subset \bigcap_{i=1}^{n} U^{x_i}$$

*Ahora,*

$$C_2 \subset U_{x_1} \cap \cdots \cap U_{x_n} \equiv G_2 \in \mathcal{T}$$

*entonces,* $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

POSIBLE ERROR: en las demostraciones anteriores ponemos como recubrimiento y subrecubrimientos finitos cuando la compacidad es relativa a un subconjunto de $X$, es decir, serían familias y subfamilias finitas, y no rcubrimientos y subrecubrimientos finitos.

**Proposición 4.8.** *Sean* $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ *e,t,* $A \subset X, B \subset Y : (A, \mathcal{T}|_A)$ *es compacto y* $(B, \mathcal{S}|_B)$ *es compacto,* $W \in \mathcal{T} \times \mathcal{S} : A \times B \subset W$. *Entonces,* $\exists U \in \mathcal{T}, \exists V \in \mathcal{S} : A \times B \subset U \times V \subset W$.

**Demostración.** $\forall (x, y) \in A \times B \subset W \in \mathcal{T} \times \mathcal{S} \Rightarrow \exists U_y^x \in \mathcal{T}, \exists V_x^y \in \mathcal{S} :$ $U_y^x \times V_x^y \subset W$. *Ahora,* $\forall y \in B \subset Y$,

$$A \subset \bigcup_{x \in A} U_y^x$$

*donde* $A$ *es compacto. Por tanto,* $\exists x_1, \cdots, x_n \in A$ *tal que*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_y^{x_i} \equiv G_y \in \mathcal{T}.$$

*Luego,*

$$y \in V_{x_1}^y \cap \cdots \cap V_{x_n}^y \equiv V^y \in \mathcal{S}$$

*entonces,* $G_y \times V^y \subset W$ *(ya que* $\forall (z, t) \in G_y \times V^x, z \in U_y^{x_{i_0}}, t \in V_{x_{i_0}}^y \Rightarrow$ $(z, t) \in U^{x_{i_0}} \times V_{x_{i_0}}^y \subset W$*). Ahora,*

$$B \subset \bigcup_{y \in B} V^y$$

*entonces,* $\exists y_1, \cdots, y_n \in B$ *tal que*

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{n} V^{y_j} \equiv V \in \mathcal{S}$$

*donde* $B$ *es compacto. Por tanto,* $\exists y_1, \cdots, y_m \in B$ *tal que*

$$B \subset \bigcup_{j=1} V^{y_j} \equiv V \in \mathcal{S}.$$

*Luego,*

$$A \subset G_{y_1} \cap \cdots \cap G_{y_m} \equiv U \in \mathcal{T}$$

*Hemos visto que* $A \times B \subset U \times V$*. Veamos que* $U \times V \subset W$*. Sea* $(z,t) \in U \times V, z \in U, t \in V \Rightarrow \exists j_0 : z \in V^{y_{j_0}}$ *y* $G_{y_{j_0}} \Rightarrow V^{y_{j_0}} \times G_{y_{j_0}} \subset W$.

**Teorema 4.1** (de Tychonoff)**.** *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia no vacía de e.t.. Entonces,* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *es compacto si y solo si* $(X_j, \mathcal{T}_j)$ *es compacto* $\forall j \in J$.

**Proposición 4.9.** *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia e.t.. Entonces,* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$ *es compacto si y solo si* $\forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ *es compacto y* $J$ *es finito.*

**Demostración.**

($\Rightarrow$) $\forall k \in J, X_k \simeq X_k \times \{k\} \subset \sum_{j\in J} X_j$ *donde* $X_k \times \{k\}$*. Como la compacidad es invariante topológico, tenemos que* $(X_k, \mathcal{T}_k)$ *es compacto* $\forall k$*. Veamos que* $J$ *es finito. Sea* $\mathcal{U} = \{X_k \times \{k\} : k \in J\}$ *entonces,* $\mathcal{U}$ *es recubrimiento abierto de* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$ *por conjuntos disjuntos dos a dos. Por tanto,* $J$ *es finito.*

($\Leftarrow$) $\forall \mathcal{U}$ *recubrimiento abierto de* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$, $\forall k \in J, \mathcal{U}_k = \{U \cap (X_k \times \{k\}) : U \in \mathcal{U}\}$ *es recubrimiento abierto de* $X_k \times \{k\} \simeq X_k \Rightarrow \exists \mathcal{V}_k \subset \mathcal{U}_k : \mathcal{V}_k$ *es subrecubrimiento finito de* $\mathcal{U}_k$.

*Sea* $\mathcal{V} = \bigcup_{k\in J}\{U \in \mathcal{U} : U \cap (X_k \times \{k\}) \in \mathcal{V}_k\}$*. Entonces* $\mathcal{V}$ *es subrecubrimiento finito de* $\mathcal{U}$*. Por tanto,* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$ *es compacto.*

**Lema 4.1.1** (del número $\rho$ de Lebesgue)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. compacto y metrizable,* $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ *recubrimiento abierto de* $(X, \mathcal{T})$*. Entonces,* $\exists\rho > 0 : \forall x \in X, B_\rho(x) \subset U_{j_x} \in \mathcal{U}$*.*

**Demostración.** $(X, \mathcal{T})$ *compacto* $\Rightarrow \exists\mathcal{U}' \subset \mathcal{U} : \mathcal{U}' = \{U_1, \cdots, U_n\}'$ *es un subrecubrimiento finito de* $\mathcal{U}$*. Ahora,*

$$\forall x \in X, \exists i_x \in \{1, \cdots, n\} : x \in U_{i_x} \in \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$$

$$\Rightarrow x \notin X \setminus U_{i_x}$$

*Definimos,* $\forall i \in \{1, \cdots, n\}, f_i : X \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$f_i(x) = d(x, X \setminus U_i)$$

*entonces,* $f_i$ *es continua. Sea* $f : X \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$f(x) = max\{f_i(x) : i \in \{1, \cdots, n\}\}$$

*entonces,* $f$ *es continua. Por ser* $f$ *máximo de* $f_i$ *tenemos que*

$$\forall x \in X, f(x) \geq f_i(x) = d(x, X \setminus U_{i_x}) > 0$$

*Por tanto,* $f(X) \subset (0, \to)$ *donde* $f(X)$ *es compacto por ser* $X$ *compacto y* $f$ *continua. Como* $f$ *continua* $\Rightarrow$ *tiene un valor mínimo. Entoces,*

$$\exists\rho > 0 : f(x) > \rho, \forall x \in X$$

*Veamos que* $\rho$ *es el número de Lebesgue. Dado que* $f(x)$ *es máximo, entonces* $\exists i \in \{1, \cdots, n\}$ *tal que*

$$f(x) = f_i(x) = d(x, X \setminus U_i)$$

*Consideramos,* $\forall y \in B_\rho(x)$*. Entonces,*

$$\rho < d(x, X \setminus U_i) \leq d(x, y) + d(y, X \setminus U_i) < \rho + d(y, X \setminus U_i)$$

*por tanto,* $d(y, X \setminus U_i) > 0 \Leftrightarrow y \in U_i \Rightarrow B_\rho(x) \subset U \in \mathcal{U}$*.*

## 4.2. Compacidad Local

**Definición 4.2** (Compacidad Local)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t.. Diremos que es localmente compacto si $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}(x)$ base de entornos de $x$ en $(X, \mathcal{T})$ formada por compactos.*

**Observación.** *Es equivalente que alguno de los elementos de la base sea compacto y que lo sean todos si el espacio es Hausdorff.*

**Observación.** *Localmente compacto $\not\Rightarrow$ compacto.*

**Ejemplo.** $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ *es localmente compacto pero no es compacto-*

**Observación.** *Compacto $\not\Rightarrow$ localmente compacto.*

**Ejemplo.** $X = \mathbb{Q} \cup \{r\} : r \notin \mathbb{Q}$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_u|_{\mathbb{Q}} \cup \{X\}$. *Entonces $(X, \mathcal{T})$ es compacto pero no hay base formada por compactos.*

**Observación.** *Localmente compacto y $T_2 \Rightarrow$ regular.*

**Proposición 4.10.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. $T_2$. Entonces, $(X, \mathcal{T})$ es localmente compacto $\Leftrightarrow \forall x \in X$ existe algún entorno de $x$ compacto en $(X, \mathcal{T})$.*

**Demostración.**

($\Rightarrow$) *Por la definición de localmente compacto, existe una base de entornos de $x$ formada por compactos.*

($\Leftarrow$) $\forall x \in X, \exists C^x$ *entorno compacto de $x$ en $(X, \mathcal{T})$.Sea $\forall U$ entorno de $x$ en $(X, \mathcal{T})$. Entonces,*

$$U \overset{\circ}{\cap} C^x \equiv V$$

*es entorno abierto de $x$ en $(X, \mathcal{T})$. Ahora, $\overline{V} \subset \overline{C}^x = C^x$ donde $C^x$ es compacto en $(X, \mathcal{T})$. Entoces, $(\overline{V}, \mathcal{T}|_{\overline{V}})$ es subespacio compacto de $(X, \mathcal{T})$ $T_2 \Rightarrow (\overline{V}, \mathcal{T}|_{\overline{V}})$ es $T_4$. En particular, $(\overline{V}, \mathcal{T}|_{\overline{V}})$ es regular.*

*Ahora, $V$ es entorno abierto de $x$ en $\overline{V}$. Por regularidad, $\exists W \in \mathcal{T}$ : $x \in W$ tal que*

$$W \cap \overline{V} \subset \overline{W} \cap \overline{V} \subset V \subset U$$

*donde $x \in W \cap V \in \mathcal{T}$ y $\overline{W} \cap \overline{V}$ es compacto. Entonces, $\overline{W} \cap \overline{V}$ es entorno compacto de $x$ en $(X, \mathcal{T})$.*

**Corolario 4.1.1.** *Todo e.t. compacto y $T_2$ es localmente compacto.*

**Observación.** *La compacidad local no es hereditaria.*

**Ejemplo.** $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ *es localmente compacto pero $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}|_{\mathbb{Q}})$ no lo es.*

**Proposición 4.11.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. localmente compacto.*

(I) $\forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$, *entonces* $(U, \mathcal{T}|_U)$ *es localmente compacto.*

(II) $\forall F \neq \emptyset$ *cerrado de* $(X, \mathcal{T})$, *entonces* $(F, \mathcal{T}|_F)$ *es localmente compacto.*

**Demostración.**

(I) $\forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, \forall x \in U, \forall V^x$ *entorno abierto de* $x$ *en* $(U, \mathcal{T}|_U)$ *subespacio abierto. Entonces,* $V^x$ *es entorno abierto de* $x$ *en* $\mathcal{T} \Rightarrow \exists C^x$ *entorno compacto de* $x$ *en* $(X, \mathcal{T})$ *tal que* $C^x \subset V^x \subset U$.

(II) $\forall F \neq \emptyset$ *cerrado de* $(X, \mathcal{T})$, $\forall x \in F, \forall V^x$ *entorno de* $x$ *en* $(F, \mathcal{T}|_F)$. *Entonces,* $\exists U^x$ *entorno de* $x$ *en* $(X, \mathcal{T})$ *tal que* $V^x = U^x \cap F$. *Ahora, por hipótesis,* $\exists C^x$ *entorno compacto de* $x$ *en* $(X, \mathcal{T})$ *tal que* $C^x \subset U^x \Rightarrow C^x \cap F \subset U^x \cap F = V^x$ *entorno compacto de* $x$ *en* $(F, \mathcal{T}|_F)$.

**Proposición 4.12.** *Sean* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t.,* $(X, \mathcal{T})$ *localmente compacto,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *suprayectiva, continua y abierta. Entonces,* $(X', \mathcal{T}')$ *es localmente compacto.*

**Demostración.** $\forall x' \in X', \forall V^{x'}$ *entorno de* $x'$ *en* $(X', \mathcal{T}')$ *dado que* $f$ *es suprayectiva, tenemos que* $f^{-1}(x') \neq \emptyset$ *y* $f^{-1}(V^{x'})$ *es entorno de* $\forall x \in f^{-1}(x')$. *Ahora, por hipótesis,* $\exists C^x$ *entorno compacto de* $x$ *en* $(X, \mathcal{T})$ *tal que* $C^x \subset f^{-1}(V^{x'}) \xRightarrow{f \text{ cont. ab.}} f(C^x) \subset V^{x'}$, *donde* $f(C^x)$ *es entorno compacto de* $x'$. *Por tanto,* $(X', \mathcal{T}')$ *es localmente compacto.*

**Corolario 4.1.2.** *La compacidad local es invariante topológico.*

**Proposición 4.13.** *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ *familia no vacía de e.t.. Entonces* $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ *es localmente compacto* $\Leftrightarrow \forall j \in J$ $(X_j, \mathcal{T}_j)$ *es localmente compacto y* $\forall j \in J \setminus F, F$ *finito,* $(X_j, \mathcal{T}_j)$ *compacto.*

**Demostración.**

($\Rightarrow$) *Para la primera parte,* $\forall j \in J, p_j$ *suprayectiva continua y abierta* $\Rightarrow$ *por la proposición anterior,* $(X_j, \mathcal{T}_j)$ *es localmente compacto. Veamos la segunda parte. Consideramos* $\forall x = (x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} X_j, \exists C^x$ *entorno compacto de* $x$ *en* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$*. Entonces,* $\exists B \in \mathcal{B}$ *base de* $\prod_{j\in J} \mathcal{T}_j$ *tal que* $x \in B \subset C^x$*. Este* $B$ *es de la forma*

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k}) : U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}, \quad \forall k \in \{1, \cdots, n\}$$

*donde los* $x \in U_{j_k}$ *son entornos de* $x_{j_k}$*. Por tanto,* $p_j(B) \subset p_j(C^x)$*. Ahora, sea* $F_0 = \{j_1, \cdots, j_n\} \subset J$*,* $F_0$ *es finito y*

$$\forall j_0 \in J \setminus F_0, \quad p_{j_0}(B) = X_{j_0} \subset p_{j_0}(C^x) \subset X_{j_0}$$

$$\Rightarrow p_{j_0}(C^x) = X_{j_0}$$

*Entonces,* $X_{j_0}$ *es compacto. Por tanto,* $\forall j \in J \setminus F_0, (X_j, \mathcal{T}_j)$ *es compacto.*

($\Leftarrow$) $\forall (x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} X_j$*, entonces* $\forall U^x$ *entorno de* $x$ *en* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j), \in$ $\mathcal{B}$ *base de* $\prod_{j\in J} \mathcal{T}_j$ *tal que* $x \in B \subset U^x$*. Este* $B$ *es de la forma*

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k}) : U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}, \quad \forall k \in \{1, \cdots, n\}$$

*donde los* $x \in U_{j_k}$ *son entornos de* $x_{j_k}$*. Por tanto,* $p_j(B) \subset p_j(U^x)$*. Ahora, sea* $F_0 = \{j_1, \cdots, j_n\} \subset J$*,* $F_0$ *es finito. Ahora,* $F_0 \cup F = H \subset J$ *es finito y* $\forall j \in H$

- *Si* $j \in F_0 \Rightarrow \exists k \in \{1, \cdots, n\} : j = j_k \in F_0 \Rightarrow \exists V^{x_j}$ *entorno compacto de* $x_{j_k}, V^{x_{j_k}} \subset U^{x_{j_k}}$*.*
- *Si* $j \in F \Rightarrow \exists V^{x_j}$ *entorno compacto tal que* $V^{x_j} \subset X_j$*.*

*Entonces,* $\bigcap_{j\in H} p_j^{-1}(V^{x_j})$ *es entorno de* $x$ *y* $\bigcap_{j\in H} p_j^{-1}(V^{x_j}) \subset B \subset U^x$*. Además,*

$$\bigcap_{j\in H} p_j^{-1}(V^{x_j}) \simeq \prod_{j\in H} V^{x_j} \times \prod_{j\in J\setminus H} X_j$$

*pero* $J \setminus H = (J \setminus F_0) \cap (J \setminus F) \subset J \setminus F$. *Entonce,* $\prod_{j\in J\setminus H} X_j$ *es compacto. Como* $\prod_{j\in H} V^{x_j}$ *es compacto, entonces* $\prod_{j\in H} V^{x_j} \times \prod_{j\in J\setminus H} X_j$ *es un entorno compacto de* $x_j$ *en* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$. *Por tanto,* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *es localmente compacto.*

*REVISAR TEO Tychonoff*

**Proposición 4.14.** *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia no vacía de e.t.. Entonces,* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$ *es localmente compacto* $\Leftrightarrow$ $(X_j, \mathcal{T}_j)$*es localmente compacto,* $\forall j \in J$.

**Demostración.**

($\Rightarrow$) $\forall k \in J, X_k \simeq X_k \times \{k\} \subset \sum_{j\in J} X_j \Rightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$ *localmente compacto.*

($\Leftarrow$) $\forall x \in \sum_{j\in J} X_j \Rightarrow \exists! j_0 \in J : x \in X_{j_0} \times \{j_0\} \simeq X_{j_0}$. *Por hipótesis,* $p_1(x)$ *tiene una base de entornos compactos en* $(X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0})$. *Ahora,* $p_1$ *es continua. Entonces, por imagen inversa,* $x$ *tiene base de entornos compactos en* $X_{j_0} \times \{j_0\}$. *Por tanto, la suma de las bases es base de entornos compactos en* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$.

**Teorema 4.2** (de Baire). *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. localmente compacto y* $T_2$, $\{A_j\}_{j\in J}$ *familia numerable de abiertos densos de* $(X, \mathcal{T})$. *Entonces,* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *es denso.*

**Demostración.** *Como* $A_n$ *es denso en* $(X, \mathcal{T})$, *entonces* $\forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, U \cap A_1 \neq \emptyset$ *donde* $U \cap A_1 \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}$. *Por ser* $(X, \mathcal{T})$ *localmente compacto y* $T_2$, $\exists B_1 \in \mathcal{T} : x_1 \in B_1, \overline{B_1} \subset U \cap A_1$ *con* $\overline{B_1}$ *compacto.*

*Veamos esta última implicación.* $x \in G \in \mathcal{T}, (X, \mathcal{T})$ *l.c.* $T_2 \Rightarrow \exists C^x$ *entorno compacto de* $x$ *tal que* $x \in C^x \subset G$. *Entonces,* $x \in \mathring{C}^x$ *y por ser* $(X, \mathcal{T})$ *regular, tenemos que* $\exists V^x \in \mathcal{T} : x \in V^x \subset \overline{V}^x \subset \mathring{C}^x \subset G$ *donde* $\overline{V}^x$ *es compacto.*

*Ahora,* $B_1 \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ *y* $A_2$ *denso* $\Rightarrow A_2 \cap B_1 \neq \emptyset \Rightarrow x_2 \in A_2 \cap B_1$. *Entonces,* $\exists B_2 \in \mathcal{T} : \overline{B_2} \subset A_2 \cap B_1$ *con* $\overline{B_2}$ *compacto. Repitiendo el proceso,* $\exists \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T} : \overline{B_n}$ *es compacto,* $\overline{B_{n+1}} \subset B_n, \forall n \in \mathbb{N}$ *y* $\overline{B_1} \subset U, B_n \subset A_n, \forall n \in \mathbb{N}$. *Entonces, la colección de adherencias es familia de* *cerrados con la propiedad de intersección finita y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B_1}$ entonces*

$$\emptyset \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}_n \subset \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \cap U$$

*Por tanto, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es denso en $(X, \mathcal{T})$.*

**Observación.** *La hipótesis de que la familia se numerable y de abiertos es esencial.*

**Ejemplo.** $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ *es l.c y $T_2$. Sea, $\forall x \in \mathbb{R}, A_x = \mathbb{R}\setminus\{x\} \in \mathcal{T}_u$ denso. Entonces, $\{A_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ no es numerable y $\bigcap_{x\in\mathbb{R}} A_x = \bigcap_{x\in\mathbb{R}}(\mathbb{R} \setminus \{x\}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$.*

**Ejemplo.** $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u), A_1 = \mathbb{Q}, A_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *son densos y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ya que np spn abiertos no se cumple el teorema de Baire.*

## 4.3. Compactación

**Definición 4.3** (Inversión topológica)**.** *Sea $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ e.t.. Decimos que $(X, \mathcal{T})$ está sumergido en $(Y, \mathcal{S})$ si $\exists f : (X, \mathcal{T}) \to (f(X), \mathcal{S}|_{f(X)})$ homeomorfismo. En este caso, $f$ es inversión topológica de $(X, \mathcal{T})$ en $(Y, \mathcal{S})$.*

**Definición 4.4** (Compactación)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t.. Se llama compactación de $X$ a todo par $(K, f)$ tal que $K$ es compacto y $f$ inversión topológica de $X$ en $K$ tal que $f(X)$ es denso.*

**Ejemplo.** $((0, 1), \mathcal{T}_u|_{(0,1)})$ *entonces $([0, 1), j)$ es compactación.*

**Definición 4.5** (Compactación $T_2$)**.** *Si $(X, \mathcal{T})$ e.t., $(K, f)$ compactación de $X$. Se dice que $(K, f)$ es compactación $T_2$ si $K$ es $T_2$.*

*Se dice que $(K, f)$ es çompactación por un solo punto"si $K \setminus f(X)$ es un punto.*

**Definición 4.6** (Equivalencia Topológica)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. $(K_1, f_1), (K_2, f_2)$ dos compactaciones de $X$. Se dice que son topológicamente equivalentes si $\exists g : K_1 \to K_2$ homeomorfismo tal que $g \circ f_1 = f_2$*

**Observación.** *es relación de equivalencia.*

**Definición 4.7.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $(K_1, f_1), (T_2, f_2)$ dos compactaciones de $X$. Decimos que $(K_1, f_1) \geq (K_2, f_2)$ si $\exists g : K_1 \to K_2$ suprayectiva y continua tal que $g \circ f_1 = f_2$.*

**Observación.** *Es una relación reflexiva y transitiva.*

**Proposición 4.15.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. $(K_1, f_1), (K_2, f_2)$ compactaciones $T_2$ tal que $(K_1, f_1) \geq (K_2, f_2)$ y $(K_2, f_2) \geq (K_1, f_1)$. Entonces, $(K_1, f_1)$ y $(K_2, f_2)$ son topológicamente equivalentes.*

**Demostración.** *Por hipótesis,*

$$\exists g_1 : K_1 \to K_2 \text{ supra. cont. tal que } g_1 \circ f_1 = f_2$$

$$\exists g_2 : K_1 \to K_2 \text{ supra. cont. tal que } g_2 \circ f_1 = f_2$$

*entonces,*

$$g_2 \circ g_1 : K_1 \to K_2 \text{ cont., } T_2$$

*Por tanto,*

$$(g_2 \circ g_1)|_{f_1(X)} = 1_{f_1(X)}$$

*Por ser $f$ inversión topológica con $f(X)$ denso*

$$\overline{f(X)} = K_1$$

*entonces,*

$$g_2 \circ g_1 = 1_{K_1}$$

$$g_1 \circ g_2 = 1_{K_2}$$

*Por tanto, $g_1$ es biyectiva y $g_1^{-1} = g_2 \Rightarrow g_1$, y $g_2$ es biyectiva y $g_2^{-1} = g_1 \Rightarrow g_2$. Entonces, $g_1$ y $g_2$ son homeomorfismos.*

**Teorema 4.3** (Alessandroff)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. no compacto, $\omega \notin X$,*

$$X^* = X \cup \{\omega\},$$

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{U \subset X^* : \omega \in U \text{ y } X \setminus U \text{ es compactación y cerrado }\},$$

*Entonces, $\mathcal{T}^*$ es topología sobre $X^*$, $(X^*, \mathcal{T}^*)$ es compacto y $X$ es denso* *en $(X^*, \mathcal{T}^*)$.*

**Demostración.**

(I) *Veamos que $\mathcal{T}^*$ es topología.*

a) $\emptyset \in \mathcal{T}, \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^* \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{T}^*$ *y* $X^*$ *pertenenece a la segunda familia* $\Rightarrow X^* \in \mathcal{T}^*$.

b) $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{T}^*$

- $\forall U_i \in \mathcal{T}, i \in \{1,2\} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$.
- $\forall U_i : \omega \in U_i, X \setminus U_i$ *compacto y cerrado* $\forall i \in \{1,2\} \Rightarrow w \in U_1 \cap U_2, X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$ *que es compacto y cerrado en* $(X^*, \mathcal{T}^*)$.
- $\forall U_1 \in \mathcal{T}, \omega \in U_2, X \setminus U_2$ *compacto cerrado. Como* $X \setminus U_2$ *es compacto y cerrado* $\to X \setminus (U_2 \cap X) = X \setminus U_2$, *entonces* $U_2 \cap X \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap U_2 = U_1 \cap (U_2 \cap X) \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$.

c) $\forall \{U_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{T}^*$

- $\forall \{U_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{j \in J} U_j \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$.
- $\forall j \in J, \omega \in U_j, X \setminus U_j$ *compacto y cerrado, entoces* $\omega \in \bigcup_{j \in J} U_j, X \setminus (\bigcup_{j \in J} U_j) = \bigcap_{j \in J} (X \setminus U_j)$ *cerrado en* $X \setminus U_{j_0}$ *compacto* $\Rightarrow X \setminus (\bigcup_{j \in J} U_j)$ *cerrado y compacto.*
- *El terces caso se reduce a* $U_1 \in \mathcal{T}, \omega \in U_2, X \setminus U_2$ *compacto y cerrado* $\Rightarrow \omega \in U_1 \cup U_2$ *y* $X \setminus (U_1 \cup U_2) = (X \setminus U_1) \cap (X \setminus U_2)$ *cerrado y compacto.*

(II) $\mathcal{T}^*|_X = \mathcal{T}$

($\Rightarrow$) $\forall U \in \mathcal{T}^*$

$$\begin{cases} \text{si } U \in \mathcal{T}, U \subset X \Rightarrow U \cap X = U \in \mathcal{T} \\ \text{si } \omega \in U, X \setminus U \text{ compacto y cerrado } \Rightarrow U \cap X \in \mathcal{T} \end{cases}$$

($\Leftarrow$) $\forall \mathcal{U}$ *recubrimiento abierto de* $(X^*, \mathcal{T}^*)$, $\exists U_0 \in \mathcal{U} : \omega \in U_0 \Rightarrow X^* \setminus U_0 = X \setminus U_0$ *compacto y cerrado en* $(X, \mathcal{T})$, *por ser compactación. Entonces,* $\exists U_1, \cdots, U_n$ *sub familia finita tal que*

$$\bigcap_{i=1}^{n} \supset X \setminus U_0$$

*Ahora, considramos*

$$\mathcal{V} = \{U_0\} \cup \{U_1, \cdots, U_n\} \subset \mathcal{U}$$

*que es un subrecubrimiento finito. Por tanto, $\mathcal{V}$ es compacto.*

(III) *Veamos que $X$ es denso en $X^*$. $\forall U \in \mathcal{T}^* \setminus \{\emptyset\}$*

- $U \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap X = U \neq \emptyset$.
- $U \ni \omega, X \setminus U$ *cerrado y compacto en $(X, \mathcal{T})$. Como $X \setminus U = X \setminus (U \cap X)$, entonces $U \cap X = \emptyset$. En caso contrario $X$ es compacto, que es absurdo.*

**Definición 4.8** (Compactación Alexandrof). *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. no compacto. Se llama compactación de Alexandrof a $((X^*, \mathcal{T}^*), j)$.*

**Observación.** *Es una compactación por un solo punto.*

**Proposición 4.16.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. no compacto. Entonces,*

(I) *$(X, \mathcal{T})$ admite alguna compactación $T_2$ por un solo punto $\Leftrightarrow$ $(X, \mathcal{T})$ es localmente compacto y $T_2$.*

(II) *Si $(X, \mathcal{T})$ es localmente compacto y $T_2$. Entonces, Todas las compactaciones $T_2$ por un punto son topológicamente equivalentes.*

**Observación.** *En la segunda parte de la proposición la equivalencia no depende del punto.*

**Demostración.** (I)

($\Rightarrow$) *$\exists((X', \mathcal{T}'), f)$ compactación $T_2$ por un punto de $(X, \mathcal{T})$, entonces*

$$X' \setminus f(X) = \{x'_0\} \Leftrightarrow X' \setminus \{x'_0\} = f(X).$$

*Como $((X', \mathcal{T}'), f)$ compactación $T_2 \Rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es localmente compacto y $T_2 \Rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es $T_1 \Rightarrow \{x'_0\}$ es cerrado en $(X', \mathcal{T}')$. Por tanto, $X' \setminus \{x'_0\}$ es abierto $\Rightarrow f(X)$ es abierto ($f$ homeomorfismo) $\Rightarrow f$ abierta. Entonces, $f(X)$ localmente compacto.*

($\Leftarrow$) *$(X, \mathcal{T})$ no compacto, localmente compacto y $T_2$. Veamos que $(X, \mathcal{T})$ admite una compactación $T_2$ por un solo punto. En particular, admite una compactación de Alezandrof $T_2$.*

$\forall w \notin X, X^* = X \cup \{w\}$, $((X^*, \mathcal{T}^*), j)$ *es compactación de Alexandrof. Ahora,* $\forall x \in X$, $(X, \mathcal{T})$ *localmente compacto y* $T_2$ $\Rightarrow \exists U^x$ *entorno compacto y cerrado en* $(X, \mathcal{T})$*. Consideramos,*

$$X^* \setminus U^x = W$$

*entonces,* $w \in W, X \setminus W = X \setminus (W \cap X) = U^x$*. Como* $U^x$ *es compacto y cerrado* $\Rightarrow w \in W \in \mathcal{T}^*$ *y* $U^x \cap W = \emptyset$ *disjuntos* $\Rightarrow (X^*, \mathcal{T}^*)$ *es* $T_2$*.*

*(II)* $(X, \mathcal{T})$ *localmente compacto* $T_2$*. Sean* $((X_1', \mathcal{T}_1'), f_1)$, $((X_2', \mathcal{T}_2'), f_2)$ *compactaciones* $T_2$ *en un solo punto de* $(X, \mathcal{T})$*. Entonces, por ser compactaciones por un solo punto*

$$X_1' \setminus f_1(X) = \{x_1'\} X_2' \setminus f_2(X) = \{x_2'\}$$

*Buscamos un homeomorfismo que complete el diagrama. Sea* $h : X_1' \to X_2'$ *definido por*

$$h(z) = \begin{cases} f_2(f_1^{-1}(z)), & \text{si } z \in f_1(X) \\ x_2', & \text{si } z = x_1 \end{cases}$$

$h$ *así definida es aplicación abierta y cierra el diagrama,* $h \circ f_1 = f_2$*.*

*Veamos que* $h$ *es aplicación abierta.* $\forall G' \in \mathcal{T}_1'$

- *Si* $G' \not\ni x_1' \Rightarrow h(G') = (f_2 \circ f_1^{-1})(G') \in \mathcal{T}_2'|_{f_2(X)} \Rightarrow h(G') \in T_2'$*.*
- *Si* $G' \ni x_1' \Leftrightarrow X_1' \setminus G' \not\ni x_1' \Rightarrow h(X_1' \setminus G') = (f_2 \circ f_1^{-1})(X_1' \setminus G')$ *es compacto en* $(X_2', \mathcal{T}_2')$*, ya que* $(X_1' \setminus G')$ *es compacto y* $f_2 \circ f_1^{-1}$ *es continua. Como,* $X_1' \setminus G'$ *es cerrado* $h(X_1' \setminus G')$ *es compacto en* $(X_2', \mathcal{T}_2')$ $T_2$ *y* $h$ *es continua, entonces* $h(X_1' \setminus G')$ *es cerrado. Por tanto,* $X_2' \setminus h(X_1' \setminus G') = h(G') \in \mathcal{T}_2'$ *(no necesariamente inmedianto ver los contenidos por puntos)* $\Rightarrow h(G') \in \mathcal{T}_2'$*.*

*Igual que hemos cogido* $h : X_1' \to X_2'$ *lo podíamos haber hecho* $h : X_2' \to X_1'$*. Por tanto,* $h^{-1}$ *es continua* $\Rightarrow h$ *es homeomorfismo.*

**Ejemplo.** $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$ *es compactación de Alexandrof.*

# Capítulo 5

# Conexión

## 5.1. Espacio conexo

**Definición 5.1** (Conexo)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t.. Se dice que es conexo si $\nexists C_i \neq \emptyset, i \in \{1, 2\}$ cerrado, disjuntos de $(X, \mathcal{T})$ tal que $X = C_1 \cap C_2$.*

**Observación.** *$(X, \mathcal{T})$ conexo $\Leftrightarrow \nexists A_i \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, i \in \{1, 2\}$ disjuntos tal que $X = A_1 \cup A_2 \Leftrightarrow \nexists C \neq \emptyset \subset X : C \in \mathcal{T}$ y cerrado simultaneamente.*

**Observación.** *La conexión no es hereditaria.*

**Ejemplo.** *$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ conexo y $[0, 1] \cup (2, 3)$ no lo es.*

**Proposición 5.1.** *Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t. tal que $(X, \mathcal{T})$ conexo, $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ continua y suprayectiva. Entonces, $(X', \mathcal{T}')$ conexo.*

**Observación.** *Se puede omitir suprayectiva.*

**Demostración.** *Supongamos que no sucede. Entonces, $\exists A_i \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, i \in \{1, 2\}$ disjuntos tal que $X' = A_1 \cup A_2 \Rightarrow f^{-1}(A_i') \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, i \in \{1, 2\}$ disjuntos. Por tanto, $X = f^{-1}(A_1') \cup f^{-1}(A_2') \Rightarrow (X, \mathcal{T})$ no es conexo, que es absurdo.*

**Corolario 5.0.1.** *La conexión es invariante topológico.*

**Proposición 5.2.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $\{X_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\bigcup_{j \in J} X_j = X$ donde $(X_j, \mathcal{T}|_{X_j})$ es conexo $\forall j \in J$ y $\bigcap_{j \in J} X_j \neq \emptyset$. Entoces, $(X, \mathcal{T})$ es* *conexo.*

**Demostración.** *Si $(X, \mathcal{T})$ no conexo $\Rightarrow \exists C_i \neq \emptyset, i \in \{1,2\}$ disjuntos tal que $X = C_1 \cap C_2$. Por otra parte, $\bigcap_{j\in J} X_j \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \bigcap_{j\in J} X_j \Rightarrow \exists i_0 \in J : x \in C_{i_0}$. Suponemos que $x \in C_1$. Ahora, $C_2 \neq \emptyset$ corta a algún $X_j$ $\Rightarrow \exists j_0 \in J : C_2 \cap X_{j_0} \equiv F_2 \neq \emptyset$. Entonces, $x \in C_1 \cap X_{j_0} \equiv F_1 \neq \emptyset \Rightarrow$ $F_i, i \in \{1,2\}$ cerrados de $(X_{j_0}, \mathcal{T}|_{X_{j_0}X_{j_0}})$ y $F_i \subset C_i, i \in \{1,2\}$ disjuntos $\Rightarrow F_i, i \in \{1,2\}$ disjuntos. Por tanto,*

$$F_1 \cup F_2 = (C_1 \cap X_{j_0}) \cup (C_2 \cap X_{j_0})$$

$$= (C_1 \cup C_2) \cap X_{j_0} = X \cap X_{j_0} = X_{j_0},$$

*entonces, $(X_{j_0}, \mathcal{T}|_{X_{j_0}})$ es conexo.*

**Ejemplo.** $\mathbb{R}^n = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0}[x]$, $\bigcap_{x\in\mathbb{R}, x\neq 0}[x] = \{0\} \neq \emptyset$ *y* $[x] \simeq \mathbb{R}$ *conexo.*

**Proposición 5.3.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X, (X_n, \mathcal{T}|_{X_n})$ es conexo $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \cap X_{n+1} \neq \emptyset$. Entonces, $(X, \mathcal{T})$ es conexo.*

**Demostración.** *$\forall m \in \mathbb{N}, C_m = X_1 \cup \cdots \cup X_m$. Si $m = 1, C_1 = X_1$ conexo. Supongamos que se cumple para $m = p$ y veamos que también se cumple para $m = p + 1$. En este caso,*

$$C_{p+1} = X_1 \cup \cdots \cup X_p \cup X_{p+1}$$

*donde $X_{p+1}$ es conexo y $X_1 \cup \cdots \cup X_p = C_p$ es conexo por la hipótesis de induccción. Además, $X_p \cap X_{p+1} \neq \emptyset \Rightarrow C_p \cap X_{p+1} \neq \emptyset$. Entonces, por la Prop. 5.2. $C_{p+1}$ es conexo y por inducción $C_m$ es conexo $\forall m \in \mathbb{N}$. Aplicando otra vez la Prop. 5.2. tenemos que $X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_m$ con $C_m$ conexo y $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} C_m = C_1 = X_1 \neq \emptyset$ conexo. Por tanto, $(X, \mathcal{T})$.*

**Proposición 5.4.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $E \subset X$ tal que $(E, \mathcal{T}|_E)$ es conexo, $C \subset X, E \subset C \subset \overline{E}$. Entonces, $(C, \mathcal{T}|_C)$ es conexo.*

**Demostración.** *Si $C$ no es conexo, entonces $\exists F_1, F_2$ cerrados de $(C, \mathcal{T}|_C)$ disjuntos tal que $C = F_1 \cup F_2 \Rightarrow F_1, F_2 \in \mathcal{T}|_C$. Ahora, $E \subset C \Rightarrow \forall x \in E \subset C, x \in F_1$ o $x \in F_2$. Supongamos que $x \in F_1$, entonces $\exists U \in \mathcal{T} : x \in F_1 = U \cap C$ y $x \in \overline{E} \Rightarrow U \cap E \neq \emptyset$. Como $E \subset C \Rightarrow U \cap E \cap C \neq \emptyset$*

*donde $U \cap C = F_1$, entonce $F_1 \cap E \equiv H_1 \neq \emptyset$. Análogamente, $F_2 \cap E \equiv H_2 \neq \emptyset$. Por tanto, $H_1, H_2$ son cerrados de $(E, \mathcal{T}|_E)$ tal que $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ y $F_1 \cup F_2 = C \Rightarrow H_1 \cup H_2 = E$ que es absurdo ya que $E$ era conexo por hipótesis.*

**Proposición 5.5.** *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ familia no vacía de e.t.. Entonces, $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ conexo $\Leftrightarrow$ $(X_j, \mathcal{T}_j)$ conexo $\forall j \in J$.*

**Demostración.**

($\Rightarrow$) *Trivial.*

($\Leftarrow$) $\forall x \in \prod_{j\in J} X_j, x = (x_j)_{j\in J}$. *Sea $E$ la unión de todos los espacios conexos del producto $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ que continen a $x$. Entonces, $E$ es conexo por la Prop. 5.2.. Además, es el mayor espacio conexon que contiene a $x$. Queremos ver que $E$ es denso. $\forall U \in \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j \setminus \{\emptyset\} \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$ base tal que $B \subset U, B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k}), U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}, \forall k = 1, \cdots, n \Rightarrow \exists b_k \in U_{j_k}, \forall k \in \{1, \cdots, n\}$. Sea*

$$E_1 = \{(z_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} X_j : z_j = x_j, \forall j \in J\backslash\{j_1\}\} \simeq X_{j_1} \times \{(x_j)_{j\in J\backslash\{j_1\}}\}$$

$$E_2 = \{(z_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} X_j : z_{j_1} = b_1, z_j = x_j, \forall j \in J\backslash\{j_1, j_2\}\} \simeq \{b_1\} \times X_{j_2} \times \{(x_j)_{j\in J\backslash\{j_1,j_2\}}\}$$

*donde $E_1 \simeq X_{j_1}$ conexo y $X_{j_2} \simeq E_2$ conexo. Repitiendo el proceso tenemos que*

$$E_n = \{(z_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} X_j : z_{j_k} = b_k, \forall k \in \{1, \cdots, j_{n-1}\},$$

$$z_j = x_j, \forall j \in J\backslash\{j_1, \cdots, j_n\}\} \simeq \{b_1, \cdots, b_{n-1}\} \times X_{j_n} \times \{(x_j)_{j\in J\backslash\{j_1,\cdots,j_{n-1}\}}\}$$

*de manera que $E_n \simeq X_{j_n}$ conexo. Haciedo uso de la Prop. 5.3. para*

$$F = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \text{ conexo}$$

*Ahora, $E_1 \subset F$ conexo donde $E$ es la unión de todos los espacios conexos del producto que contienen a $x \Rightarrow F \subset E$. Sea $y = (y_j)_{j\in J}$*

con $y_{j_k} = b_k, \forall k \in \{1, \cdots, n\}$ y $y_j = x_j, \forall j \in J \setminus \{j_1, \cdots, j_n\}$. Entonces, $y \in E_n \subset F$ y $y \in B \subset U \Rightarrow UcaoF \neq \emptyset \Rightarrow U \cap E \neq \emptyset \Rightarrow$ $E$ es denso $\Leftrightarrow \overline{E} = \prod_{j \in J} X_j, E$ es conexo $\Rightarrow \overline{E}$ conexo $\Rightarrow \prod_{j \in J} X_j$ conexo.

**Observación.** *$\forall (X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t. conexos, $(X + X', \mathcal{T}\mathcal{T}')$ no es conexo.*

## 5.2. Componentes Conexas

**Definición 5.2.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $x \in X$. Se llama componente conexa de $x$, a la unión de todos los subespacios conexos de $(X, \mathcal{T})$ que contienen a $x$.*

**Notación.** *$C_x$ componente conexa de $x$.*

**Observación.** *Si $(X, \mathcal{T})$ e.t., $x \in X, C_x$ es el mayor subespacio conexo de $(X, \mathcal{T})$ que contien a $x$.*

**Observación.** *$\forall x, y \in X$, es $C_x = C_y$ o $C_x \cap C_y = \neq$.*

**Demostración.** Si $C_x \cap C_y \neq \emptyset \Rightarrow C_x \cup C_y \ni y \subset C_x, \subset C_y \Rightarrow C_x = C_y$.

**Proposición 5.6.** *Si $(X, \mathcal{T})$ e.t., todas sus componentes son cerras.*

**Demostración.** $\forall x \in X, C_x$ componente $\Rightarrow \overline{C_x}$ conexa y $x \in \overline{C_x} \Rightarrow$ $\overline{C_x \subset C_x} \Rightarrow \overline{C_x} = C_x$ cerrado.

**Observación.** *Las componentes de un e.t. no son necesariamente abiertas.*

**Ejemplo.** $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{Q}})$

## 5.3. Espacio Localmente Conexo

**Definición 5.3** (Conexión Local)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t.. Se dice que $(X, \mathcal{T})$ es localmente conexo si $\forall x \in X$ existe alguna base de entornos conexos.*

**Observación.** *localmente conexo $\not\Rightarrow$ conexo.*

**Ejemplo.** $((0, 1) \cup (2, 5))$

**Observación.** *Conexo* $\not\Rightarrow$ *localmente conexo.*

**Ejemplo.** $X = [0,1] \times \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup (\{0,1\} \times \mathbb{R}); \mathcal{T}_u$

**Observación.** *La conexión local no es hereditaria. Se puede ver por el ejemplo anterior.*

**Proposición 5.7.** *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *e.t.. Entonces,* $(X,\mathcal{T})$ *es localmente conexo* $\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ *sus componentes son abiertas.*

**Demostración.** *Willard pg 201 212*

**Observación.** *Si* $(X,\mathcal{T})$ *es localmente conexo, sus componentes son cerrados y abiertos simultaneamente.*

**Observación.** *Si* $(X,\mathcal{T})$ *es localmente conexo sus y compacto, entonces el conjunto de sus componentes es finito.*

**Proposición 5.8.** *Sean* $(X,\mathcal{T})$, $(X',\mathcal{T}')$ *e.t.,* $(X,\mathcal{T})$ *localmente conexo,* $f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *identificación. Entonces,* $(X',\mathcal{T}')$ *es localmente conexo.*

**Demostración.** *content*

**Proposición 5.9.** *Sea* $\{(X_j,\mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia de e.t.. Entonces,* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *localmente conexo* $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j,\mathcal{T}_j)$ *localmente conexo y* $\forall j \in J \setminus F, (X_j,\mathcal{T}_j)$ *conexo, donde* $F$ *es finito.*

**Demostración.** *Dugundji*

**Proposición 5.10.** *Sea* $\{(X_j,\mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia no vacía de e.t.. Entonces,* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$ *localmente conexo* $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j,\mathcal{T}_j)$ *localmente conexo.*

**Demostración.** *content*

## 5.4. Conexión por caminos

**Observación.** $I = [0,1]$ *con la topología relativa.*

**Definición 5.4** (Conexo por Caminos)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Decimos que* $(X, \mathcal{T})$ *es conexo por caminos si* $\forall x, y \in X, \exists f : I = [0,1] \to (X, \mathcal{T})$ *continua tal que* $f(0) = x, f(1) = y$*. En este caso, se dice que* $f$ *es un camini en* $X$ *de origen* $x$ *y extremo* $y$*.*

**Observación.** *conexo por caminos* $\Rightarrow$ *conexo.*

**Demostración.** *Dugundji, proof wiki*

**Observación.** *conexo* $\not\Leftarrow$ *conexo por caminos.*

**Ejemplo.** *content*

**Observación.** *La conexión por caminos no es hereditaria.*

**Ejemplo.** *content*

**Observación.** *Conexo por caminos* $\not\Rightarrow$ *localmente conexo.*

**Ejemplo.** *content*

**Observación.** *Localmente conexo* $\not\Rightarrow$ *conexo por caminos.*

**Ejemplo.** *content*

**Proposición 5.11.** *Sea* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t.,* $(X, \mathcal{T})$ *conexo por caminos,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *continua, suprayectiva. Entonces,* $(X', \mathcal{T}')$ *es conexo por caminos.*

**Demostración.** *content*

**Corolario 5.0.2.** *La conexión por caminos es invariante tipológico.*

**Proposición 5.12.** *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia no vacía de e.t.. Entonces,* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *conexo por caminos* $\Leftrightarrow$ $(X_j, \mathcal{T}_j)$ *es conexo por caminos* $\forall j \in J$*.*

**Demostración.** *content*

**Observación.** $\forall (X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t. conexos por caminos,* $(X + X', \mathcal{T} + \mathcal{T}')$ *no es conexo* $\Rightarrow$ *no es conexo por caminos.*

# Capítulo 6

# Convergencia

## 6.1. Filtros

**Definición 6.1** (Sucesión). *Sea $X$ conjunto no vacío. Se llama sucesión a cualquier aplicación $s : \mathbb{N} \to X : n \mapsto s(n) \equiv s_n$ y $s3 = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

**Definición 6.2** (Punto límite). *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $X$, $x \in X$. Se dice que $s$ converge a $x$ en $(X, \mathcal{T})$ (o que $x$ es punto límite de $s$) si $\forall U_x$ entorno de $x$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : s_n \in U^x, \forall n \geq n_0$.*

**Observación.** *Si $(X, \mathcal{T})$ e.t. $M \subset X$ no vacío, entonces $x \in \overline{M} \not\Leftrightarrow \exists (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$.*

**Ejemplo.** $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CN})$, $M = (0,1), 0 \in \overline{M}$ *pero* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : x_n = 0, \forall n \geq m \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \not\subset M$

**Observación.** *No sirven las sucesiones para caracterizar puntos adherentes.*

**Observación.** *Sucesiones generalzadas se llaman redes.*

**Observación.** *Los filtros son más genereales que los sitemas de entornos.*

**Definición 6.3.** *Sea $X \neq \emptyset$ conjunto. Se llama filtro en $X$ a cualquier familia $\mathcal{F} \neq \emptyset$ de conjuntos no vacios tal que*

(I) $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$,

(II) $\forall F \in \mathcal{F}, \forall F' \subset X, F' \supset F \Rightarrow F' \in \mathcal{F}$.

**Ejemplo.** $\forall X$ *conjunto*, $\forall S \neq \emptyset, \mathcal{F}_S = \{F \subset X : F \supset S\}$.

**Ejemplo.** *Si $(X, \mathcal{T})$ e.t. $x \in X$. El sistema de entornos de $x$ es filtro en $X$.*

**Observación.** *Los filtros son demasiado grandes. En la práctica usamos bases de filtros.*

**Definición 6.4.** *Sea $X$ conjunto no vacío, $\mathcal{F}$ filtro en $X$. Se llama base del filtro $\mathcal{F}$ a cualquier subfamilia $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ tal que $\forall F \in \mathcal{F}, \exists B \in \mathcal{B} : B \subset F$. Decimos que $\mathcal{B}$ genera $\mathcal{F}$.*

**Ejemplo.** *$\forall X$ conjunto, $S \subset X$, $\mathcal{B} = \{S\}$ es una base de filtro.*

**Ejemplo.** *Si $(X, \mathcal{T})$ e.t., $\forall x \in X, \forall \mathcal{B}(x)$ base de entornos de $x$ es una base de filtro de $\mathcal{V}(X)$.*

**Proposición 6.1.** *Sea $X$ conjunto no vacío. Una familia $\mathcal{B} \neq \emptyset$ de conjuntos no vacíos es base de filtros para algún filtro de $X \Leftrightarrow \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

**Demostración.**

($\Rightarrow$) *Si $\mathcal{B}$ es base para algún $\mathcal{F}$ filtro $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ es subfamilia de $\mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$. Luego, $\forall B_i \in \mathcal{B}, i \in \{1,2\} \Rightarrow B_i \in \mathcal{F} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

($\Leftarrow$) *Sea $\mathcal{F} = \{F \subset X : F \supset B$ para algún $B \in \mathcal{B}\} \supset \mathcal{B}$ es una subfamilia no vacía de conjuntos no vacíos. Veamos que cumple la definición de filtro.*

- (I) *$\forall F_i \in \mathcal{F}, \forall i \in \{1,2\} \Rightarrow \exists B_i \in \mathcal{B} : B_i \subset F_i$. Entonces, por hipótesis $\exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset F_1 \cap F_2 \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.*
- (II) *$\forall F \in \mathcal{F}, \forall F' \subset X, F' \supset F \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset F \subset F' \Rightarrow F' \in \mathcal{F}$.*

**Definición 6.5.** *Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ dos filtros en $X$. Si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ se dice que $\mathcal{F}_2$ es más fino que $\mathcal{F}_1$*

**Definición 6.6.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $\mathcal{F}$ filtro en $X$, $x \in X$. Se dice que $\mathcal{F}$ converge a $x$ en $(X, \mathcal{T})$ (o que $x$ es un punto límite de $\mathcal{F}$) si $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}$, es decir, el sistema de entornos de $x$ es más fino que el filtro $\mathcal{F}$.*

**Notación.** $\mathcal{F} \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x$ *o* $x = \lim \mathcal{F}$.

**Definición 6.7** (Aglomeración)**.** *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *e.t.,* $\mathcal{F}$ *filtro en* $X$*,* $x \in X$*. Se dice que* $x$ *es un punto de aglomeración de* $\mathcal{F}$ *en* $(X,\mathcal{T})$ *si* $\forall U^x$ *entorno de* $x$ *en* $(X,\mathcal{T})$*,* $\forall F \in \mathcal{F}$ *tal que* $U^x \cap F \neq \emptyset$*.*

**Observación.** *La definición de límite es más fuerte que la de aglomeración.*

**Proposición 6.2.** *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *e.t.,* $\mathcal{F}$ *filtro en* $X$*,* $x \in X$*. Si* $\mathcal{F} \to x$*, entonces* $x$ *es un punto de aglomeración de* $\mathcal{F}$*.*

**Demostración.** $\mathcal{F} \to x \Leftrightarrow \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F} \Rightarrow \forall U^x \in \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}, \forall F \in \mathcal{F} \Rightarrow U^x, F \in \mathcal{F} \Rightarrow U^x \cap F \in \mathcal{F} \Rightarrow U^x \cap F \neq \emptyset \Rightarrow x$ *es punto de aglomeración de* $\mathcal{F}$*.*

**Proposición 6.3** (Caracterización punto de aglomeración)**.** *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *e.t.,* $\mathcal{F}$ *filtro en* $X$*,* $x \in X$*. Entonces,* $x$ *es punto de aglomeración de* $\mathcal{F}$ *en* $(X,\mathcal{T}) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F} \equiv \mathrm{Agl}(F)$

**Demostración.** $x$ *punto de aglomeración de* $\mathcal{F} \Leftrightarrow \forall U^x, \forall F \in \mathcal{F}, U^x \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall F \in \mathcal{F}, x \in \mathcal{F} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$*.*

**Proposición 6.4.** *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *e.t.* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesión en* $X$*,* $x \in X$*. Entonces,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x \Leftrightarrow$ *el filtro generado por* $\{\{x_n : n \geq m\} : m \in \mathbb{N}\}$ *(familia no vacía de conjuntos no vacíos es base de filtro) converge a* $x$ *en* $(X,\mathcal{T})$*.*

**Demostración.**

*Sea* $\mathcal{B} = \{\{x_n : n \geq m\} : m \in \mathbb{N}\}$*. Entonces,* $\mathcal{B}$ *es base de filtro* $\mathcal{F}$ *en* $X \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \Leftrightarrow \forall U^x, \exists m \in \mathbb{N} : x_n \in U^x, \forall n \geq m \Leftrightarrow \forall U^x, \exists m \in \mathbb{N}$ *tal que* $\{x_n : n \geq m\} \subset U^x$ *donde* $\{x_n : n \geq m\} \in \mathcal{B} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \forall U^x, U^x \in \mathcal{F}$ *filtro engendrado por* $\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F} \to x$*.*

**Proposición 6.5.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $x \in X, \mathcal{F}$ filtro en $X$. Entonces, $x$ es punto de aglomeración de $\mathcal{F} \Leftrightarrow \exists \mathcal{F}'$ filtro en $X$ tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}' \to x$.*

**Demostración.**

($\Rightarrow$) *$x$ punto de aglomeración $\Rightarrow \forall U^x$ entorno de $x$, $\forall F \in \mathcal{F}, U^x \cap F \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{B} = \{U \cap F : U \in \mathcal{V}(x), F \in \mathcal{F}\}$. Entonces, $\mathcal{B}$ es base de filtro en $X$. Sea $\mathcal{F}'$ el filtro engendrado por $\mathcal{B}$. Veamos que cumple las condiciones.*

(I) $\forall F \in \mathcal{F} \Rightarrow F \supset U \cap F, \forall U \in \mathcal{V}(x)$ *donde* $U \cap F \in \mathcal{B} \subset \mathcal{F}' \Rightarrow F \in \mathcal{F}' \Rightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.

(II) $\forall U \in \mathcal{V}(x), U \supset U \cap F, \forall F \in \mathcal{F}$ *donde* $U \cap B \in \mathcal{B} \subset \mathcal{F}' \Rightarrow U \in \mathcal{F}' \Rightarrow \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}' \Leftrightarrow \mathcal{F}' \to x$.

($\Leftarrow$) *Suponemos que $\mathcal{F}'$ filtro tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ y $\mathcal{F} \to x$. Entonces, $\forall U \in \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}', \forall F \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}' \Rightarrow U, F \in \mathcal{F}' \Rightarrow U \cap F \in \mathcal{F}' \Rightarrow U \cap F \neq \emptyset \Rightarrow x$ punto de aglomeración de $\mathcal{F}$.*

**Proposición 6.6** (Caracterización de puntos adherentes)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $x \in X$, $M \neq \emptyset \subset X$. Entonces, $x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \mathcal{F}$ filtro en $X$ tal que $\mathcal{F} \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x$ y $M \in \mathcal{F}$.*

**Demostración.**

($\Rightarrow$) *$\forall U^x$ entorno de $x$, $U^x \cap M \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{B} = \{U \cap M : U \in \mathcal{V}(x)\}$ familia no vacía de conjuntos no vacíos, es base de filtros en $X$. Sea $\mathcal{F}$ el filtro engendrado por $\mathcal{B}$ Veamos que cumple las condiciones.*

(I) $M \supset U \cap M \in \mathcal{B}, \forall U \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow M \in \mathcal{F}$.

(II) $\forall U \in \mathcal{V}(x), U \supset U \cap M \in \mathcal{B} \Rightarrow U \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F} \to x$.

($\Leftarrow$) *$\mathcal{F}$ filtro tal que $M \in \mathcal{F}, \mathcal{F} \to x$. Entonces, $\forall U \in \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F} \Rightarrow U \cap M \in \mathcal{F} \Rightarrow U \cap M \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{M}$.*

**Observación.** *Sean $X, Y$ conjuntos, $f : X \to Y$ aplicación, $\mathcal{F}$ filtro. Entonces, $\{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$ es base de filtro ya que $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}, F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow f(F_1 \cap F_2) \subset f(F_1) \cap f(F_2)$ y por tanto el conjunto verifica la caracterización de base de filtro.*

**Notación.** *$f(\mathcal{F})$ denota el filtro engendrado por la base $\{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$.*

**Proposición 6.7.** *Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : X \to X'$ aplicación, $x \in X$. Entonces, $f$ es continua en $x \Leftrightarrow \forall \mathcal{F}$ en $X$ tal que $\mathcal{F} \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x$ se tiene que $f(\mathcal{F}) \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} f(x)$.*

**Demostración.**

($\Rightarrow$) *Suponemos $f$ continua y $\mathcal{F} \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x$. Entonces, $\forall V \in \mathcal{V}(f(x)) \xRightarrow{f \text{ cont.}} \exists U \in \mathcal{V}(x) : f(U) \subset V$. Como $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}$, entonces $V \in f(\mathcal{F})$. Ahora, $\mathcal{V}(f(x)) \subset f(\mathcal{F}) \Leftrightarrow f(\mathcal{F}) \to f(x)$.*

($\Leftarrow$) *Como $\mathcal{V}(x)$ es filtro y esta contenido en si mismo, entonces $\mathcal{V}(x) \to x$ y por hipótesis $\Rightarrow f(\mathcal{V}(x)) \to f(x) \Leftrightarrow \mathcal{V}(f(x)) \subset f(\mathcal{V}(x))$. Por tanto, $\forall V \in \mathcal{V}(f(x)), V \in f(\mathcal{V}(x)) \Rightarrow \exists U \in \mathcal{V}(x) : f(U) \subset V \Rightarrow f$ continua en $x$.*

**Proposición 6.8.** *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia no vacía de e.t., $x \in \prod_{j \in J} X_j$, $\mathcal{F}$ filtro de $\prod_{j \in J} X_j$. Entonces, $\mathcal{F} \xrightarrow{(\prod_{j \in J} j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)} x \Leftrightarrow \forall j \in F, p_j(\mathcal{F}) \xrightarrow{(X_j, \mathcal{T}_j)} x_j = p_j(x)$.*

**Demostración.**

($\Rightarrow$) *Por la proposición anterior.*

($\Leftarrow$) *$\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset U$ tal que $B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k}), x_{j_k} \in U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}, \forall k \in \{1, \cdots, n\}$. Entonces, $\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \mathcal{V}(x_{j_k}) \subset p_{j_k}(\mathcal{F}) \Rightarrow U_{j_k} \in p_{j_k}(\mathcal{F}) \Rightarrow \forall k \in \{1, \cdots, n\}, \exists F_k \in \mathcal{F} : p_{j_k}(F_k) \subset U_{j_k}$. Por tanto, $\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \exists F_k \in \mathcal{F}$ tal que $F_k \subset p_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$. Entonces, cortando todo tenemos $F_1 \cap \cdots \cap F_n \subset B \subset U$ donde $F_1 \cap \cdots \cap F_2 \in \mathcal{F}$ de manera que $U \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)} x$.*

**Proposición 6.9** (Axioma de Zernado)**.** *Todo conjunto no vacío admite alguna "buena.ºrdenación (cada subconjunto tiene primer elemento).*

**Proposición 6.10** (Axioma de Zorn)**.** *Dado un conjunto ordena tal que toda cadena suya ( subconjunto totalmente ordenado ) tiene cota superior, entonces el conjunto tiene algún elemento maximal.*

**Definición 6.8** (Ultrafiltro)**.** *Sea $X$ conjutno, $\mathcal{F}$ filtro en $X$. Se dice que $\mathcal{F}$ es ultrafiltro si es maximal. (e.d. si no hay filtro estrictamente más fino que $\mathcal{F}$).*

**Proposición 6.11.** *Sea $X$ conjunto, $\mathcal{F}$ filtro en $X$. Entonces, existe algún ultrafiltro más fino que $\mathcal{F}$.*

**Demostración.** *Sea $\mathcal{Y}$ la familia de todos los filtros de $X$ más finos que $\mathcal{F}$, ordenada por $\subset$. Si $\{F_j\}_{j\in J}$ es cadena en $\mathcal{Y}$, tenemos que la unión de los filtros de esa cadena es cota superior, $\bigcup_{j\in J}\mathcal{F}_j$. Vemos que es filtro.*

- $\forall F_1, F_2 \in \bigcup_{j\in J}\mathcal{F}_j \Rightarrow \exists j_i \in J : F_i \in \mathcal{F}_{j_i}$. *Entonces,* $\mathcal{F}_{j_1} \subset \mathcal{F}_{j_2}$ *o* $\mathcal{F}_{j_k} \subset \mathcal{F}_{j_2} \subset \mathcal{F}_{j_1}$. *Suponemos que* $\mathcal{F}_{j_1} \subset \mathcal{F}_{j_2}$. *Ahora,* $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{j_k}$ *filtro* $\Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_{j_2} \Rightarrow F_{j_1} \cap F_{j_2} \in \bigcup_{j\in J}\mathcal{F}_j$.

- $\forall F \in \bigcup_{j\in J}\mathcal{F}_j, \forall F' \subset X : F' \supset F \Rightarrow \exists j_0 \in J, F \in \mathcal{F}_{j_0}$ *finito* $\Rightarrow F' \in \mathcal{F}_{j_0} \subset \bigcap_{j\in J}\mathcal{F}_j$.

*donde* $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_{j_0} \subset \bigcup_{j\in J}\mathcal{F}_j, \forall j_0 \in J$. *Estamos en condicones de aplicar el Axioma de Zorn, entonces* $\exists$ *elemento maximal de* $\mathcal{Y} \Rightarrow \mathcal{G}$ *ultrafiltro,* $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

**Proposición 6.12.** *Sea $X$ conjunto $\mathcal{F}$ filtro en $X$. Entonces, $\mathcal{F}$ es ultrafiltro $\Leftrightarrow \forall E \subset X, E \in \mathcal{F}$ o $X \setminus E \in \mathcal{F}$.*

**Demostración.**

($\Rightarrow$) *Suponemos que $\mathcal{F}$ ultrafiltro y $\forall E \subset X$. Entonces, $\forall F \in \mathcal{F}$ se tiene que $F \cap E \neq \emptyset$ o $F \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$. (no puede pasar que $\exists F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tal que $F_1 \subset E$ y $F_2 \subset X \setminus E$. En este caso, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$*

*que sería absurdo). Suponemos que* $\forall F \in \mathcal{F}, F \cap E \neq \emptyset$. *Entonces,* $\{F \cap E : F \in \mathcal{F}\}$ *familia no vacía de conjuntos no vacíos donde* $F \cap E \in \mathcal{F}, \forall F \in \mathcal{F} \Rightarrow$ *es base de filtros. Llamamos* $\mathcal{G}$ *a el fitro engendrado por la base. Entonces,* $\forall F \in \mathcal{F}, F \supset F \cap E \Rightarrow F \in \mathcal{G}$, *es decir,* $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. *Pero* $\mathcal{F}$ *es ultrafiltro. Por tanto,* $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. *Como* $E \supset F \cap E, \forall F \in \mathcal{F}$, *entonces* $E \in \mathcal{G} = \mathcal{F}$.

($\Leftarrow$) *Por la proposición anterior,* $\exists \mathcal{G}$ *ultrafiltro en* $X \Rightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. *Si* $\mathcal{F} \not\subset \mathcal{G}$*(contenido propio), entonces* $\exists G \in \mathcal{G} : G \notin \mathcal{F} \Rightarrow X \setminus G \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G} \Rightarrow G, X \setminus G \in \mathcal{G}$ *filtro, que es absurdo.*

**Proposición 6.13.** *Sea* $X$ *conjunto,* $f : X \to Y$ *aplicación. Si* $\mathcal{F}$ *es ultrafiltro en* $X$, *entonces* $f(\mathcal{F})$ *es ultrafiltro en* $\mathcal{Y}$.

**Demostración.** $\forall E \subset Y \Rightarrow f^{-1}(E) \subset X$. *Entonces, como* $\mathcal{F}$ *es ultrafiltro, tenemos que* $f^{-1}(E) \in \mathcal{F}$ *o* $(X \setminus f^{-1}) \in \mathcal{F}$.

- *Si* $f^{-1}(E) \in \mathcal{F} \xRightarrow{f(f^{-1}(E)) \subset E} E \in f(\mathcal{F})$.
- *Si* $X \setminus f^{-1}(E) \in \mathcal{F} \xRightarrow{f(X \setminus f^{-1}(E)) \subset Y \setminus E} Y \setminus E \in f(\mathcal{F})$.

*Entonces, por la proposición anterior,* $f(\mathcal{F})$ *es ultrafiltro.*

**Proposición 6.14.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $\mathcal{F}$ *filtro,* $x \in X$. *Entonces,* $x$ *es punto de aglomeración de* $\mathcal{F}$ *en* $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow \exists \mathcal{G}$ *ultrafiltro* $: \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ *y* $\mathcal{G} \to x$.

**Demostración.** *Hemos visto que* $x$ *es putno de aglomeración de* $\mathcal{F} \Leftrightarrow \exists \mathcal{F}'$ *filtro tal que* $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ *y* $\mathcal{F}' \to x$. *También hemos visto que para todo filtro existe ultrafiltro más fino.*

($\Rightarrow$) $x$ *punto de aglomeración de* $\mathcal{F} \Rightarrow \exists \mathcal{F}'$ *tal que* $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ *y* $\mathcal{F}' \to x$. *Por tanto,* $\exists \mathcal{G}$ *ultrafiltro tal que* $\mathcal{F}' \subset \mathcal{G}$ *donde* $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. *Como* $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}'$, *entonces* $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{G} \to x$.

($\Leftarrow$) *Equivalente a la caracterización de punto de aglomeración.*

## 6.2. Redes

**Definición 6.9** (Conjunto Dirigido)**.** *Sea $D \neq \emptyset$ conjunto y $\leq$ relación binaria en $D$ tal que es reflexiva y transitiva, y $\forall d_1, d_2 \in D, \exists d_3 \in D : d_1, d_2 \leq d_3$. El par $(D, \leq)$ se llama conjunto dirigido.*

**Definición 6.10** (Red)**.** *Sea $X \neq \emptyset$ conjunto se llama red en $X$ a cualquier aplicación $s$ de un conjunto dirigido en $X$,*

$$s : D \to X$$

$$d \mapsto s(d) \equiv s_d$$

**Notación.** *Una red $s$ se denota $s \equiv (s_d)_{d \in D}$.*

**Ejemplo.** *Toda sucesión es una red.*

**Ejemplo.** *Toda aplicación $s : \mathbb{R} \to X$ es red en $X$.*

**Definición 6.11** (Subred)**.** *Sea $X \neq \emptyset$ conjunto, $s$ red en $X$. Se llama subred de $s$ a cualquier red $t : \Lambda \to X : t = s \circ \varphi$ siendo $\varphi : \Lambda \to D$ aplicación que cumple*

*(I) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda, \lambda_1 \leq \lambda_2 \Rightarrow \varphi(\lambda_1) \leq \varphi(\lambda_2)$. Es decir, $\varphi$ es creciente.*

*(II) $\forall d \in D, \exists \lambda \in \Lambda : \alpha(\lambda) \geq d$. Es decir, $\varphi$ es cofinal.*

*de esta manera $t = (t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = ((s \circ \varphi)(\lambda))_{\lambda \in \Lambda} = (s_{\varphi(\lambda)})_{\lambda \in \Lambda}$.*

**Observación.** *Toda subsucesión de una sucesión es una subred suya.*

**Observación.** *Dada una sucesión puede haber subrees que no son sucesiones.*

**Definición 6.12** (Punto límite)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $s$ red en $X$, $x \in X$. Se dice que la red $s$ converge a $x$ en $(X, \mathcal{T})$ (o que $x$ es punto límite de $s$) si $\forall U^x$ entorno de $x$ en $(X, \mathcal{T})$, $\exists d_0 \in D : s_d \in U^x, \forall d \geq d_0$.*

**Observación.** *Los conjuntos dirigidos tienen ramificaciones $\Rightarrow$ no todos están en el entorno ( a partir de cierto n) como en los puntos límite de las suceciones.*

**Notación.** $s = (s_d)_{d\in D} \xrightarrow{(X,\mathcal{T})}$ *o* $x \in \lim s$.

**Definición 6.13** (Aglomeración)**.** *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *e.t.,* $s = (s_d)_{d\in D}$ *red en* $X$*,* $x \in X$*. Se dice que* $x$ *es un punto de aglomeración de* $s$ *en* $(X,\mathcal{T})$ *si* $\forall U^x$ *entorno de* $x$*,* $\forall d_0 \in D, \exists d \in D : d \geq d_0, s_d \in U^x$*.*

**Proposición 6.15.** *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *e.t.,* $s = (s_d)_{d\in D}$ *red en* $X$*,* $x \in X$*. Si* $s$ *converge a* $x$ *en* $(X,\mathcal{T})$ *entonces,* $x$ *es putno de aglomeración de* $s$*.*

**Demostración.** *Por la definición de convergencia, tenemos que* $\forall U^x, \exists d_0 \in D : s_d \in U^x, \forall d \geq d_0$*. Consideramos,* $\forall d_1 \in D \xRightarrow{\text{cj. dirigido}} \exists d_2 \in D : d_0, d_1 \leq d_2 \Rightarrow s_{d_2} \in U^x \Rightarrow x$ *punto de aglomeración de* $s$*.*

**Proposición 6.16.** *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *e.t.* $s$ *red en* $X$*,* $x \in X$*. Entonces,* $x$ *es punto de aglomeración de* $s$ *en* $(X,\mathcal{T}) \Leftrightarrow$ *existe alguna subred de* $s$ *que converge a* $x$ *en* $(X,\mathcal{T})$*.*

**Demostración.**

$(\Rightarrow)$ *A partir de la definición de punto de aglomeración definimos*

$$\Lambda = \big\{(d,U) : d \in D, U \in \mathcal{V}(x) : s_d \in U\big\}$$

*como* $x$ *es punto de aglomeración de* $s$*, entonces* $\Lambda \neq \emptyset$*. Definimos ahora una relación binaria*

$$(d_1,U_1) \leq (d_2,U_2) \Leftrightarrow d_1 \leq d_2, U_2 \subset U_1$$

*esta relación es reflexiva, transitiva y* $D$ *es conjunto dirigido. Por tanto,* $(\Lambda,\leq)$ *es conjunto dirigido. Definimos una aplicación*

$$\varphi : \Lambda \to D : (d,U) \to \varphi(d,U) \equiv d$$

*donde* $\varphi$ *es creciente y cofinal. Por tanto,* $s \circ \varphi \equiv t$ *es subred de* $S$*. Veamos que converge a* $x$*.*

*Como* $x$ *es punto de aglomeración, entonces* $\forall U^x$ *entorno de* $x$*,* $\forall d \in D, \exists d_0 \in D$ *tal que* $d_0 \geq d, s_{d_0} \in U^x$*. Por tanto, existe* $(d_0, U^x) \in$

$\Lambda \Rightarrow \Lambda \neq \emptyset$. *Ahora,* $\forall (d,U) \in \Lambda : (d,U) \geq (d_0, U^x) \Rightarrow t(d,U) = (s \circ \varphi)(d,U) = s(d) \in U \subset U^x \Rightarrow t = (t_{\varphi(d)})_{d \in D} \to x$.

($\Leftarrow$) *Sea* $t = (t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *subred de* $s$ *tal que* $t \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x$. *Entonces,* $\varphi : \Lambda \to D$ *aplicación creciente y cofinal con* $s \circ \varphi = t$. *Ahora,* $t \to x$, *entonces*

$$\forall U^x \text{entorno de } x, \exists \lambda_0 \in \Lambda : t_\lambda \in U^x, \forall \lambda \geq \lambda_0$$

*y por ser* $t$ *subred,* $t$ *es cofinal, entonces*

$$\forall d_0 \in D, \exists \lambda_1 \in \Lambda : \varphi(\lambda_1) \geq d_0.$$

*Como* $\Lambda$ *es conjunto dirigido, entonces*

$$\exists \lambda^* \in \Lambda : \lambda_0, \lambda_1 \leq \lambda^*$$

*Sea* $\varphi(\lambda^*) \equiv d^* \in D$, *como* $\varphi$ *es creciente*

$$\varphi(d^*) \geq \varphi(\lambda_0), \varphi(\lambda_1)$$

*donde* $\varphi(\lambda_1) \geq d_0 \Rightarrow d^* \geq d_0$. *Por tanto,* $s_{d^*} = s(\varphi(\lambda^*)) = t(\lambda^*) \in U^x, \forall \lambda^* \geq \lambda_0$. *Entonces,* $x$ *es punto de aglomeración* $s$ *en* $(X, \mathcal{T})$.

**Proposición 6.17.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $M \subset X$ *no vacío,* $x \in X$. *Entonces,* $x$ *es punto adherente (*$x \in \overline{M}$*)* $\Leftrightarrow$ *existe una red en* $M$ *tal que la red converge a* $x$ *en* $(X, \mathcal{T})$.

**Demostración.**

($\Rightarrow$) *Por la definición de punto afherente,* $x \in \overline{M} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{V}(x), U \cap M \neq \emptyset$. *Definimos relación binaria*

$$U_1, U_2 \in \mathcal{V}(x), \quad U_1 \leq U_2 \Leftrightarrow U_2 \subset U_1,$$

*entonces,* $(\mathcal{V}(x), \leq)$ *es conjunto dirigido, ya que* $\forall U_1, U_2, U_1 \in \mathcal{V}(x), U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}(x)$ *y* $U_2, U_1 \supset U_1 \cap U_2$. *Definimos una res* $s$ *en* $M \subset X$

$$s : \mathcal{V}(x) \to x : u \mapsto s(u) = s_u \in M.$$

*Como* $\forall U^x$ *entorno de* $x$, $U^x \in \mathcal{V}(x)$, *entonces* $\forall U \in \mathcal{V}(x) : U \geq U^x, s_u \in U \subset U^x \Rightarrow s = (s_u)_{u \in \mathcal{V}(x)} \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x$.

($\Leftarrow$) $\forall U^x$ *entorno de* $x$, $\exists d_0 \in D : d \geq d_0, s_d \in U^x, s_d \in M \Rightarrow s_d \in U^x \cap M \Leftrightarrow x \in \overline{M}$.

**Observación.** *Sea* $X, Y$ *conjuntos,* $f : X \to Y$ *aplicación. Si* $s$ *es una red en* $X$*, entonces* $f \circ s$ *es una red en* $Y$.

**Proposición 6.18.** *Sea* $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ *e.t.,* $f : X \to Y$ *aplicación,* $x_0 \in X$. *Entonces,* $f$ *es continua en* $x_0 \Leftrightarrow \forall s$ *red en* $X$ *tal que* $s \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x_0$ *se tiene que* $f \circ s \xrightarrow{(Y,\mathcal{S})} f(x_0)$.

**Demostración.**

($\Rightarrow$) $\forall V^{f(x_0)}$, *consideramos* $s$ *red en* $X$ *tal que* $s \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x_0$. *Como* $f$ *es continua, entonces* $\exists U^{x_0}$ *entorno de* $x_0$ *en* $(X, \mathcal{T})$ *tal que* $f(U^{x_0}) \subset V^{f(x_0)}$. *Por tanto,* $\exists d_0 \in D : s_d \in U^{x_0}, \forall d \geq d_0 \Rightarrow f(s_d) \in V^{f(x_0)}, \forall d \geq d_0$.

($\Leftarrow$) *Sea* $D = \{(x, U) : x \in X,\ U \in \mathcal{V}(x),\ x \in U\}$. *Entonces,* $D \neq \emptyset$, *ya que siempre hay un entorno* $U^{x_0}$ *de* $x_0$ *en* $(X, \mathcal{T})$. *Defininos una relación binaria*

$$(x_1, U_1) \leq (x_2, U_2) \Leftrightarrow U_2 \subset U_1$$

*entonces,* $(D, \leq)$ *es conjunto dirigido. Sea* $s$ *red en* $X$

$$s : D \to X : (x, U) \mapsto s(x, U) = x.$$

*Veamos* $s \to x$

$$\forall U^{x_0}, \exists (x_0, U^{x_0}) \in D,$$
$$\forall (x, U) \in D : (x, U) \geq (x_0, U^{x_0}),$$
$$s(x, U) = x \in U \subset U^{x_0}$$
$$\Rightarrow s \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x.$$

*Ahora, como* $f \circ s \xrightarrow{(Y,\mathcal{S})} f(x)$, *entonces* $\forall V^{f(x_0)}$ *entorno de* $f(x_0)$ *en* $(Y, \mathcal{S})$, $\exists (z_0, U_0) \in D : (f \circ s)(x, U) = f(x) \in V^{f(x_0)}, \forall (x, U) \geq (z_0, U_0)$. *Como* $\forall x \in U_0$ *se tiene que* $(x, U_0) \geq (z_0, U_0) \Rightarrow f(x) \in V^{f(x_0)}$, *entonces* $\forall x \in U_0, f(x) \in V^{f(x_0)} \Rightarrow f(U_0) \subset V^{f(x_0)}$. *Por tanto,* $f$ *es continua.*

**Proposición 6.19.** *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ familia no vacía de e.t., $x \in \prod_{j\in J} X_j$, $x$ red en $\prod_{j\in J} X_j$. Entonces, $s = (s_d)_{d\in D} \to x$ en $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \Leftrightarrow p_j \circ s \xrightarrow{(X_j,\mathcal{T}_j)} x_j, \forall j \in J$.*

**Demostración.**

($\Rightarrow$) *Dado que $p_j$ es continua, $s \to x \Rightarrow (p_j \circ s) \to x_j, \forall j \in J$.*

($\Leftarrow$) *$\forall U^x$ entorno de $x$ en $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$, $\exists B \in \mathcal{B}$ base de $\prod_{j\in J} \mathcal{T}_j$ : $x \in B \subset U^x$ donde*

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k}).$$

*Ahora $x_{j_k} \in U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}, \forall k \in \{1, \cdots, n\}$ y $s \xrightarrow{(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)} x$, entonces*

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \exists d_k \in D : p_{j_k}(s_d) \in U_{j_k}, \forall d \geq d_k.$$

*Por ser $D$ conjunto dirigido, $\exists d_0 \in D : d_1, \cdots, d_n \leq d_0$. Por tanto,*

$$\forall d \geq d_0, p_{j_k}(s_d) \in U_{j_k}, \quad \forall k \in \{1, \cdots, n\}$$

$$\Rightarrow s_d \in p_{j_k}^{-1}(U_{j_k}), \forall k \in \{1, \cdots, n\}, \forall d \geq d_0 \Leftrightarrow s_d \in B \subset U^x, \forall d \geq d_0$$

*Entonces, $s \xrightarrow{(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)} x$.*

**Definición 6.14** (Red Universal)**.** *Sea $X \neq \emptyset$ conjunto, $s$ red en $S$. Se dice que $s$ es red universal si $\forall M \subset X$ se tiene que ó $\exists d_1 \in D : s_d \in M, \forall d \geq d_1$ ó $\exists d_2 \in D : s_d \in X \setminus M, \forall d \geq d_2$.*

**Proposición 6.20.** *Sea $X, Y$ conjuntos no vacíos, $f : X \to Y$ aplicación continua, $s$ red universal en $X$, entonces $f \circ s$ es red universal en $Y$.*

**Demostración.** $\forall M \subset Y, f^{-1}(M) \subset X$, *$s$ red universal*

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists d_1 \in D : s_d \in f^{-1}(M), \forall d \geq d_1 \\ \exists d_2 \in D : s_d \in X \setminus f^{-1}(M), \forall d \geq d_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists d_1 \in D : f(s_d) \in M, \forall d \geq d_1 \\ \exists d_2 \in D : s_d \in Y \setminus M, \forall d \geq d_2 \end{cases}$$

*Por tanto,* $f \circ s$ *es red universal.*

## 6.3. Resultados

**Definición 6.15** (Filtro Asociado)**.** *Sea* $X$ *conjunto no vacío,* $s$ *red en* $X$*. Se llama filtro asociado a la red* $s$ *al filtro* $\mathcal{F}_s$ *engendrado por la base de filtro de las secciones* $\{B_{d_0} : d_0 \in D\}$ *tal que* $B_{d_0} = \{s_d : d \geq d_0\}$*.*

**Definición 6.16** (Red Asociada)**.** *Sea* $X$ *conjunto no vacío,* $\mathcal{F}$ *filtro en* $X$*,* $D_{\mathcal{F}} = \{(x, F) : x \in F, F \in \mathcal{F}\}, (x_1, F_1) \leq (x_2, F_2) \Leftrightarrow F_2 \subset F_1$*. Se llama red asociada al filtro* $\mathcal{F}$ *a* $s_{\mathcal{F}} : D_{\mathcal{F}} \to X : (x, F) \to s_{\mathcal{F}}(x, F) = x$*.*

**Proposición 6.21.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $x_0 \in X$*, entonces*

(I) *Si* $s$ *es una red en* $X$*,* $s \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x_0 \Leftrightarrow \mathcal{F}_s \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x_0$*.*

(II) *Si* $\mathcal{F}$ *filtro en* $X$*,* $\mathcal{F} \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x_0 \Leftrightarrow s_{\mathcal{F}} \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x_0$*.*

**Demostración.**

(I) *Como* $s$ *es red en* $(X, \mathcal{T})$ *y converge a* $x$ *tenemos que*

$$\begin{aligned} s \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x_0 &\Leftrightarrow \forall U^{x_0}, \exists d_0 \in D : s_d \in U^{x_0}, \forall d \geq d_0 \\ &\Leftrightarrow \forall U^{x_0}, \exists d_0 \in D : B_{d_0} \subset U^{x_0} \\ &\Leftrightarrow \forall U^{x_0}, U^{x_0} \in \mathcal{F}_s \\ &\Leftrightarrow \mathcal{V}(x_0) \subset \mathcal{F}_s \\ &\Leftrightarrow \mathcal{F}_s \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x_0 \end{aligned}$$

(II)

($\Rightarrow$) *Sea* $\mathcal{F}$ *filtro en* $(X, \mathcal{T})$ *y* $s_{\mathcal{F}}$ *la red asociada a* $\mathcal{F}$*. Como* $\mathcal{F} \to x$ $\Leftrightarrow \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}$*, entonces* $\forall U^{x_0} \in \mathcal{V}(x_0) \subset \mathcal{F}, \exists (x_0, U^{x_0}) \in D_{\mathcal{F}}$ *tal que* $\forall (x, F) \in D_{\mathcal{F}}, (x, F) \geq (x_0, U^{x_0})$*(Por la definición de* *filtro, la intersección de elementos es un elemento del filtro). Por tanto,* $s_{\mathcal{F}}(x,F) = x \in F \subset U^{x_0} \Rightarrow s_{\mathcal{F}} \to x_0$.

($\Leftarrow$) *Sea* $\mathcal{F}$ *filtro en* $(X,\mathcal{T})$ *y* $s_{\mathcal{F}}$ *la red asociada tal que* $s_{\mathcal{F}} \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x_0$. *Entonces,* $\forall U^{x_0} \in \mathcal{V}(x_0), \exists (z_0,F) \in D_{\mathcal{F}}$ *tal que* $\forall (z,F) \in D_{\mathcal{F}}, (z,F) \geq (z_0,F_0), s_{\mathcal{F}}(z,F) \in U^{x_0}$.

*Ahora,* $\forall z \in F_0, (z,F_0) \in D_{\mathcal{F}} \Rightarrow (z,F_0) \geq (z_0,F_0)$. *Por tanto,* $s_{\mathcal{F}}(z,F_0) \in U^{x_0} \Rightarrow F_0 \in \mathcal{F}$ *y* $F_0 \subset U^{x_0} \Rightarrow U^{x_0} \in \mathcal{F}$, *es decir,* $\mathcal{V}(x_0) \subset \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x$.

**Proposición 6.22.** *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *e.t.. Son equivalentes:*

*(I)* $(X,\mathcal{T})$ $T_2$,

*(II)* $\forall \mathcal{F}$ *filtro de* $X$ *convergente en* $(X,\mathcal{T})$ *tiene límite único,*

*(III) Toda red de* $X$ *convergente en* $(X,\mathcal{T})$ *tiene límite único.*

**Demostración.**

*a)* $\Rightarrow$ *b)* $\mathcal{F} \to x$ *y* $\mathcal{F} \to y, x \neq y \Rightarrow \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}$ *y* $\mathcal{V}(y) \subset \mathcal{F}$, *entonces* $\forall U^x$ *entorno de* $x$ *en* $(X,\mathcal{T})$, $\forall U^y$ *entorno de* $y$ *en* $(X,\mathcal{T})$, $U^x \cap U^y \in \mathcal{F} \Rightarrow U^x \cap U^y \neq \emptyset \Rightarrow (X,\mathcal{T})$ *no es Hausdorff. Por tanto, el límite es único.*

*b)* $\Rightarrow$ *a)* *Suponemos que* $(X,\mathcal{T})$ *no es Hausdorff* $\Leftrightarrow \exists x,y \in X : x \neq y$ *tal que*

$$\forall U^x, \forall U^y, U^x \cap U^y \neq \emptyset.$$

*Sea* $\mathcal{B} = \{U^x \cap U^y : U^x \in \mathcal{V}(x), U^y \in \mathcal{V}(y)\}$. *Entonces,* $\mathcal{B}$ *es una famila no vacía de conjuntos no vacíos y*

$$\forall U_1^x \cap U_1^y, U_2^x \cap U_2^y \in \mathcal{B},$$

$$(U_1^x \cap U_1^y) \cap (U_2^x \cap U_2^y) = (U_1^x \cap U_2^y) \cap (U_1^y \cap U_2^x)$$
$$(U_1^x \cap U_2^y) \cap (U_1^y \cap U_2^x) \supset U_1^x \cap U_2^y, U_1^y \cap U_2^x \in \mathcal{B}.$$

*Por tanto, $\mathcal{B}$ es base de filtro en $X$. Sea $\mathcal{F}$ el filtro engendrado por $\mathcal{B}$, entonces*

$$\forall U^x \in \mathcal{V}(x), \forall U^y \in \mathcal{V}(y), U^x \cap U^y \in \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F} \text{ y } \mathcal{V}(y) \subset \mathcal{F}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{F} \to x \text{ y } \mathcal{F} \to y, x \neq y$$

*contradice que el límite sea único $\Rightarrow (X, \mathcal{T})$ es Hausdorff.*

*b) $\Rightarrow$ c)* *Suponemos $\forall \mathcal{F}$ filtro de $X$ tal que $\mathcal{F} \to x$ tiene límite único y $s_{\mathcal{F}} \to x$ y $s_{\mathcal{F}} \to y$ con $x \neq y$. Pero $s_{\mathcal{F}} \to z \Leftrightarrow \mathcal{F} \to z$. Lo que contradice que el límite del filtro sea único.*

*c) $\Rightarrow$ b)* *De manera análoga, suponemos que $\forall s$ red en $X$ convergente en $(X, \mathcal{T})$, $s$ tiene límite único y que $\exists \mathcal{F}$ filtro en $X$ convergente en $(X, \mathcal{T})$ tal que el límite no es único. Pero $s \to z \Leftrightarrow \mathcal{F}_s \to z$. Lo que contradice que el límite sea único.*

**Proposición 6.23.** *Sea $X$ conjunto no vacío. Entonces,*

(I) *Si $s$ es red en $X$; $s$ es red universal $\Leftrightarrow \mathcal{F}_s$ es ultrafiltro.*

(II) *Si $\mathcal{F}$ filtro en $X$; $\mathcal{F}$ es ultrafiltro $\Leftrightarrow s_{\mathcal{F}}$ es red universal.*

**Demostración.**

(I) *$s$ red universal*

$$\Leftrightarrow \forall E \subset X \begin{cases} \text{ó } \exists d_1 \in D : s_d \in E, \forall d \geq d_1 \\ \text{ó } \exists d_2 \in D : s_d \in X \setminus E, \forall d \geq d_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall E \subset X \begin{cases} \text{ó } \exists d_1 \in D : B_{d_1} \subset E \\ \text{ó } \exists d_2 \in D : B_{d_2} \subset X \setminus E \end{cases}$$

*(el filtro asociado a $s$ tiene como base $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}_s$ las secciones $\{B_{d_0} : d_0 \in D\}$ y $\forall F \in \mathcal{F}_s, F \subset F' \Rightarrow F' \in \mathcal{F}_s$)*

$$\Leftrightarrow \forall E \subset X, \begin{cases} \text{ó } E \in \mathcal{F}_s \\ \text{ó } X \setminus E \in \mathcal{F}_s \end{cases}$$

*(es la caracterización de ultrafiltro)*

$$\Leftrightarrow \mathcal{F}_s \text{ es ultrafiltro.}$$

(II) *Suponemos que $\mathcal{F}$ es ultrafiltro*

$$\Leftrightarrow \forall E \subset X, \begin{cases} \text{ó } E \in \mathcal{F}_s \\ \text{ó } X \setminus E \in \mathcal{F}_s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall E \subset X, \begin{cases} \text{ó } \forall x \in E, \exists (x, E) \in D_{\mathcal{F}} \text{ tal que} \\ \quad \forall (z, F) \in D_{\mathcal{F}}, (z, F) \geq (x, E), s_{\mathcal{F}}(z, F) \in E \\ \\ \text{ó } \forall y \in X \setminus E, \exists (y, X \setminus E) \in D_{\mathcal{F}} \text{ tal que} \\ \quad \forall (z, F) \in D_{\mathcal{F}}, (z, F) \geq (y, X \setminus E), s_{\mathcal{F}}(z, F) \in X \setminus E \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$s_{\mathcal{F}}$ *es red universal*

**Proposición 6.24.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., son equivalentes*

(I) *$(X, \mathcal{T})$ es compacto,*

(II) *Todo filtro de $X$ tiene algún punto de aglomeración en $(X, \mathcal{T})$,*

(III) *Todo ultrafiltro de $X$ es convergente en $(X, \mathcal{T})$,*

(IV) *Toda red tiene algún punto de aglomeración en $(X, \mathcal{T})$,*

(V) *Toda red universal de $X$ es converegente en $(X, \mathcal{T})$.*

**Demostración.** *Vemos $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow c, b \Leftrightarrow d, c \Leftrightarrow e$.*

*a) $\Rightarrow$ b) Sea $\mathcal{F}$ filtro en $X$. Consideramos $\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$ familia de cerrados de $(X, \mathcal{T})$ compacto con la propiedad de interescciones finitas (la adherencia es un conjunto cerrado y que los filtros tienen la propiedad de interescciones finitas se puede ver por inducción usando la definición* de filtro). Entonces, por Prop. 4.3. se tiene que

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F} \neq \emptyset$$

donde $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F} = \mathrm{Agl}(\mathcal{F})$.

b) $\Rightarrow$ c) A partir de la Prop. 6.5. $\forall\mathcal{F}$ filtro en $X$, $\exists x \in X$ punto de alglomeración de $\mathcal{F}$. Entonces, $\forall\mathcal{F}'$ ultrafiltro, $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}' \to x$.

c) $\Rightarrow$ a) $(X, \mathcal{T})$ no compacto $\Leftrightarrow \exists\mathcal{U}$ recubrimiento abierto sin subrecubrimientos finitos. Entonces,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall U_1, \cdots U_n \in \mathcal{U}, \bigcup_{i=1}^{n} U_i \neq X$$

$$\Rightarrow \{X \setminus (U_1, \cdots U_n), n \in \mathbb{N}, U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U}\}$$

es base de filtro en $X$. Sea $\mathcal{F}$ el filtro engendrado por $\mathcal{B}$, entonces $\exists\mathcal{F}'$ ultrafiltro tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. Ahora, por hipótesis $\exists x \in X : \mathcal{F}' \to x \Rightarrow \subset \mathcal{F}'$ y como $x \in X \Rightarrow \exists U_0 \in \mathcal{U} : x \in U_0 \Rightarrow U_0 \in \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}'$, entonces $U_0 \in \mathcal{F}'$. Por tanto, $X \setminus U_0 \in \mathcal{B} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ que es absurdo.

b) $\Leftrightarrow$ d)

($\Rightarrow$) $s$ red en $X \Rightarrow \mathcal{F}_s$ filtro asociado a $s$. Por hipótesis, $\mathcal{F}_s$ tiene punto de aglomeración $\Leftrightarrow \bigcup_{F\in\mathcal{F}_s} \overline{F} \neq \emptyset$. Ahora,

$$\bigcap_{d\in D} \overline{B_d} = \bigcup_{F\in\mathcal{F}_s} \overline{F} \neq \emptyset$$

donde $B_{d_0} = \{s_d : d \geq d_0\}$. Por tanto,

$$\forall d \in D, \exists x \in \bigcap_{d\in D} \overline{B_d}, x \in \overline{B_d}$$

$$\Leftrightarrow \forall U^x, U^x \cap B_d \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \exists d' \in D : d' \geq d, s_{d'} \in U^x$$

Por tanto, $x$ es punto de aglomeración de $s$.

($\Leftarrow$) *$\mathcal{F}$ filtro en $X \Rightarrow s_{\mathcal{F}}$ red asociada a $\mathcal{F}$ en $X$, y toda red en tiene punto de aglomeración $\Rightarrow \exists x \in X$ punto de aglomeración de $s_{\mathcal{F}}$. Por tanto,*

$$\forall U^x, \forall F \in \mathcal{F}, F \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \in F : (z, F) \in D_{\mathcal{F}},$$

$$\exists (x, F') \in D_{\mathcal{F}} : (x, F') \geq (z, F),$$
$$s_{\mathcal{F}}(x, F') = x \in U^x.$$

*donde $x \in F' \subset F \Rightarrow U^x \cap F \neq \emptyset \Rightarrow x \in \mathrm{Agl}(\mathcal{F})$.*

*c) $\Leftrightarrow$ e) $\mathcal{F}$ ultrafiltro en $X \Leftrightarrow s_{\mathcal{F}}$ red universal $\Rightarrow \exists x \in X : s_{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \mathcal{F} \to x$.*

**Teorema 6.1** (Tychonoff). *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia no vacía de e.t.. Entonces, $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$ es compacto $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ es compacto.*

**Demostración** (Filtros).

($\Rightarrow$) *Por la continuidad de las proyecciones.*

($\Leftarrow$) *$\forall \mathcal{F}$ ultrafiltro en $\prod_{j \in J} X_j \Rightarrow \forall j \in J, p_j(\mathcal{F})$ ultrafiltro en $X_j \overset{\text{hip.}}{\Longrightarrow}$ $\forall j \in J, \exists x_j \in X_j : p_j(\mathcal{F}) \to x_j \Leftrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)} (x_j)_{j \in J} \Rightarrow$ $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$ compacto.*

**Demostración** (Redes).

($\Rightarrow$) *Igual*

($\Leftarrow$) *$\forall s$ red en $\prod_{j \in J} X_j \Rightarrow \forall j \in J, p_j \circ s$ red en $X_j \Rightarrow \forall j \in J, \exists x_j \in X_j :$ $p_j \circ s \to x_j \Leftrightarrow s \to (x_j)_{j \in J} \Rightarrow (\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$ compacto.*

# Parte II

# Topología Algebráica

# Capítulo 7

# Homotopía

**Definición 7.1** (Homotopía)**.** *Sea $X, Y$ e.t., $f, g : X \to Y$ aplicación continua. Se dice que $f$ es homótopa a $g$ ($f \simeq g$) si $\exists H : X \times I \to Y$ continua tal que*

$$H(x, 0) = f(x), \forall x \in X,$$

$$H(x, 1) = g(x), \forall x \in X.$$

*A $H$ se le llama homotopía de $f$ en $g$.*

**Proposición 7.1.** *Si $X, Y$ e.t., la relación de homotopía entre las aplicaciones continuas de $X$ en $Y$ es de equivalencia.*

**Demostración.**

- *Refrexiva: Sea $f : X \to Y$. Entonces, $H : X \times I \to X : H(x, t) = f(x) \Rightarrow f \simeq f$.*
- *Simétrica: Sean $f, g : X \to Y, f \simeq g \Rightarrow \exists H : X \times I \to X$ homotopía. Sea $H' : X \times I \to Y : H'(x, t) = H(x, 1-t)$. Entonces, $H'$ es continua y*

  $$H'(x, 0) = H(x, 1) = g(x), \forall x \in X,$$

  $$H'(x, 1) = H(x, 0) = f(x), \forall x \in X.$$

  *Por tanto, $g \simeq f$*
- *Transitiva: Sean $f, g, h : X \to Y$ continuas. Entonces, $f \simeq g \Rightarrow$*

$\exists H_1 : X \times I \to Y$ *tal que*

$$H_1(x, 0) = f(x),$$

$$H_1(x, 1) = g(x).$$

*Y* $g \simeq f \Rightarrow \exists H_2 : X \times I \to Y$ *continua tal que*

$$H_2(x, 0) = g(x),$$

$$H_2(x, 1) = h(x).$$

*Sea* $H : X \times I \to Y$ *definida por*

$$H(x, t) = \begin{cases} H_1(X, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_2(X, 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

*Como* $X \times [0, \frac{1}{2}]$, $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ *son cerrados de* $I$ *y recubren* $I$, *entonces por Prop. 1.20.* $H$ *es continua tal que*

$$H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = h(x).$$

*Por tanto,* $f \simeq h$.

**Ejemplo.** *Si* $C \subset \mathbb{R}^n, C$ *convexo,* $\forall f, g : (X, \mathcal{T}) \to (C, \mathcal{T}_u)$ *continua, entonces* $f \simeq g$.

**Demostración.** *Sea* $H : X \times I \to C : H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$. *Entonces,* $H$ *cumple*

$$\begin{cases} H(x, 0) = f(x), \forall x \in X \\ H(x, 1) = g(x), \forall x \in X \end{cases}$$

*Por tanto,* $f \simeq g$.

**Definición 7.2** (Clase de Homotopía)**.** *Dados dos e.t* $X$ *e* $Y$ *y la relación de homotopía de aplicación continua de* $X$ *en* $Y$, *entonces cada clase de equivalencia se llama clase de homotopía.*

**Definición 7.3** (Contractil)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t.. Se dice que $X$ es contractil si la identidad en $X$ es homótopa a alguna aplicación constante.*

**Ejemplo.** $\forall C \subset \mathbb{R}^n$ *conexo, entonces $C$ es contractil.*

**Demostración.** $\forall x_0 \in C, 1_X \simeq c_{x_0} : X \to x : x \mapsto x_0$, *entonces*

$$H(x,t) = (1-t) \cdot c_{x_0}(x) + t \cdot 1_X(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H(x,0) = c_{x_0} \\ H(x,1) = 1_X(x) \end{cases}$$

**Proposición 7.2.** *Sean $X, Y, Z$ e.t., $f_1, g_1 : X \to Y$ continuas tal que $f_1 \simeq g_1$ y $f_2, g_2 : Y \to Z$ continuas tal que $f_2 \simeq g_2$. Entonces, $f_2 \circ f_1 \simeq g_2 \circ g_1$.*

**Demostración.** $f_1 \simeq g_1 \Rightarrow \exists H_1 : X \times I \to Y$ *continua tal que*

$$\begin{cases} H_1(x,0) = f_1(x) \\ H_1(x,1) = g_1(x) \end{cases}$$

*y* $\exists H_1 : Y \times I \to Z$ *continua tal que*

$$\begin{cases} H_2(x,0) = f_2(x) \\ H_2(x,1) = g_2(x) \end{cases}$$

*Sea $H : X \times I \to Z : H(x,t) = H_2(H_1(x,t),t)$. Entonces, por ser composición de aplicaciones continuas $H$ también lo es y*

$$H(x,0) = H_2(H_1(x,0),0) = H_2(f_1(x),0) = (f_2 \circ f_1)(x),$$

$$H(x,1) = H_2(H_1(x,1),1) = H_2(f_2(x),1) = (g_2 \circ g_1)(x)$$

**Proposición 7.3.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t.. Entonces, $(X, \mathcal{T})$ es contractil si $\forall (Y, \mathcal{S})$ e.t., $\forall f, g : (Y, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{T})$ continuas es $f \simeq g$.*

**Demostración.**

($\Rightarrow$) *$X$ contractil $\Rightarrow \exists x_0 \in X : 1_X \simeq c_{x_0}$. Ahora, $\forall (Y, \mathcal{S})$ e.t., $\forall f, g : (Y, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{T})$ continuas, entonces la proposición anterior*

$$\Rightarrow \begin{cases} 1_X \circ f \simeq c_{x_0} \circ f : Y \to X : y \mapsto x_0 \\ 1_X \circ g \simeq c_{x_0} \circ g : Y \to X : y \mapsto x_0 \end{cases}$$

*Entonces, $c_{x_0} \circ f = c_{x_0} \circ g$. Por tanto, $f \simeq g$.*

($\Leftarrow$) *Suponemos que $f \simeq g, \forall f, g : (Y, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{T})$. Entonces, $1_X \simeq c_{x_0} \Rightarrow (X, \mathcal{T})$ es contractil.*

**Definición 7.4** (Equivalencia Homotópica)**.** *Sean $X, Y$ e.t.. Se dice que $X$ es homotopocamente equivalente a $Y$ (ó que $X$ es del mismo tipo de homotopía que $Y$) si $\exists f : X \to Y$ continua y $\exists g : Y \to X$ continua tal que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$. En este caso, decimos que $f$ es una equivalencia homotópica y $g$ es una inversa homotópica suya.*

**Observación.** *No tienen por que ser suprayectivas, en realidad se está considerando $g|_{f(X)} \circ f$.*

**Proposición 7.4.** *Dado un conjunto de e.t., la relación de ser homotópicamente equivalentes es relación de equivalencia.*

**Demostración.**

- *Reflexiva: $\forall X$ e.t., $1_X : X \to x \Rightarrow X$ es homotópicamente equivalente a $X$.*
- *Simétrica: $X$ es homotópicamente equivalente a $Y \Leftrightarrow Y$ es homotópicamente equivalente a $X$.*
- *Transitiva: Sea $X$ homotópicamente equivalente a $Y$ y $Y$ homotópicamente equivalente a $Z$, entonces*

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists f_1 : X \to Y \text{ cont. } : g_1 \circ f_1 \simeq 1_X \\ \exists g_1 : Y \to X \text{ cont. } : f_1 \circ g_1 \simeq 1_Y \end{cases}$$

$$y \Rightarrow \begin{cases} \exists f_2 : Y \to Z \text{ cont. } : g_2 \circ f_2 \simeq 1_Y \\ \exists g_2 : Z \to Y \text{ cont. } : f_2 \circ g_2 \simeq 1_Z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_2 \circ f_1 : X \to Z \text{ continua} \\ g_2 \circ g_1 : X \to Z \text{ continua} \end{cases}$$

*Entonces, por la propiedad asociativa*

$$\begin{aligned}(g_1 \circ g_2)(f_2 \circ f_1) &= g_1 \circ (g_2 \circ f_2) \circ f_1 \\ &\simeq g_1 \circ 1_Y \circ f_1 \\ &= g_1 \circ f_1 \\ &\simeq 1_X.\end{aligned}$$

*Análogamente,*

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1)(g_1 \circ g_2) &= f_2 \circ (f_1 \circ g_1) \circ g_2 \\ &\simeq f_2 \circ 1_Y \circ g_2 \\ &= f_2 \circ g_2 \\ &\simeq 1_Z.\end{aligned}$$

**Observación.** *Si $X$ e $Y$ et. homeomorfos, entonces tienen el mismo tipo de homotopía.*

**Proposición 7.5.** *Sea $X$ e.t.. Entonces, $X$ es contractil $\Leftrightarrow$ tiene el tipo de homotopía de un punto.*

**Demostración.**

$(\Rightarrow)$ $1_X \simeq c_{x_0} : x_0 \in X$. *Consideramos la inclusión*

$$j : \{x_0\} \to X = (X, \mathcal{T})$$

*y la aplicación*

$$c'_{x_0} : X \to \{x_0\}.$$

*Dado que ambas son continuas, entonces*

$$c'_{x_0} \circ j \simeq 1_{\{x_0\}} \quad \text{y} \quad j \circ c'_{x_0} = c_{x_0} \simeq 1_X,$$

*Por tanto, $X$ y $\{x_0\}$ son homotópicamente equivalentes.*

($\Leftarrow$) $\forall y \in X, \{y\}$ *con la topología trivial. Entonces,* $\{y\}, X$ *son homotópicamente equivalentes*

$$\Leftrightarrow \exists f : X \to \{y\} \text{ cont.} \quad \text{y} \quad \exists g : \{y\} \to X \text{ cont. tal que}$$

$$g \circ f \simeq 1_X \quad \text{y } f \circ g \simeq 1_{\{y\}}.$$

*Por tanto,* $g \circ f = c_{g(y)} \simeq 1_X \overset{\text{def.}}{\Longrightarrow} X$ *contractil.*

**Definición 7.5** (Retracción)**.** *Sea* $X$ *e.t.,* $A \subset X$ *no vacío. Se dice que* $A$ *es un retracto en* $X$ *si* $\exists r : X \to A$ *continua tal que* $r|_A = 1_A$ *que deja los puntos de* $A$ *fijos. Si occure esto, se dice que* $r$ *es una retracción de* $X$ *en* $A$.

**Definición 7.6** (Retracto por Deformación)**.** *Sea* $X$ *e.t.,* $A \subset X$ *no vacío. Se dice que* $A$ *es un retracto por deformación si* $\exists r : X \to A$ *retracción tal que* $j \circ r \simeq 1_X$ *donde* $j$ *es la inclusión* $j : A \to X$.