

Topología

Hugo Del Castillo Mola

23 de septiembre de 2022

Índice general

I	Topología General	2
1.	Espacios Topológicos y Funciones Continuas	3
1.1.	Espacios Topológicos	3
1.2.	Entornos	8
1.3.	Bases	13
1.4.	Subespacios	15
1.5.	Funciones continuas	16
1.6.	Espacio Producto	19
1.7.	Espacio Cociente	22

Parte I

Topología General

Capítulo 1

Espacios Topológicos y Funciones Continuas

1.1. Espacios Topológicos

Definición 1.1 (Topología). Se llama topología sobre un conjunto X a $\forall \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ que verifique:

(G1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(G2) $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$

(G3) $\forall \{A_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$

Observación. Al par (X, \mathcal{T}) se denomina espacio topológico y los elementos de X son puntos del espacio topológico.

Ejemplo. (I) Sea X un conjunto, entonces $\mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_D$ es una topología y se llama topología discreta.

(II) La colección $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ es también una topología y la llamamos topología trivial.

(III) Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{T}_d = \{U \subset X : \forall x \in U, \epsilon > 0 : B_\epsilon \subset U\}$ es una topología y la llamamos topología inducida por la métrica d .

Observación. Toda métrica induce un espacio topológico pero no todo espacio topológico es inducido por una métrica.

Definición 1.2 (Espacio Metrizable). Sea (X, \mathcal{T}) e.t., decimos que es un espacio metrizable si d métrica sobre X tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Definición 1.3 (Conjunto Abierto). Sea (x, \mathcal{T}) espacio topológico, decimos que $U \subset X$ es un conjunto abierto si $U \in \mathcal{T}$.

Observación. Si U es un conjunto abierto, entonces $X \setminus U$ es un conjunto cerrado.

Observación. Existen conjuntos que son abiertos y cerrados simultáneamente. Y existen conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.

Ejemplo. Sea el espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ entonces $S = (0, 1]$ no es ni abierto ni cerrado.

Ejemplo. Sea el espacio topológico (X, \mathcal{T}_d) donde $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ entonces $\forall S \subset X$, S es abierto y cerrado simultáneamente.

Definición 1.4 (Comparación de Topologías). Sean \mathcal{T} y \mathcal{T}' dos topologías sobre un conjunto $X \neq \emptyset$. Si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ se dice que \mathcal{T}' es más fina (más fuerte) que \mathcal{T} . También podemos decir que \mathcal{T} es menos fina que \mathcal{T}' .

Notación. Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} = \{C \subset X : C \text{ es cerrado en } (X, \mathcal{T})\}$.

Proposición 1.1 (Dualidad conjuntos abiertos y cerrados). Sea \mathcal{F} es la familia de conjuntos cerrados de un espacio topológico (X, \mathcal{F}) .

(F1) \emptyset, X son cerrados.

(F2) $\forall C_1, C_2$ cerrados $\Rightarrow C_1 \cup C_2$ es cerrado.

(F3) $\forall \{C_j\}_{j \in J}$ cerrados $\Rightarrow \bigcap_{j \in J} C_j$ es cerrado.

Recíprocamente, si $X \neq \emptyset$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ y \mathcal{F} cumple (i, ii, iii) entonces la colección de los miembros complementarios a \mathcal{F} es una topología sobre X en donde la familia de cerrados es \mathcal{F} .

Observación. Este resultado muestra la relación entre las nociones de conjuntos abiertos y cerrados. Cualquier resultado sobre conjuntos abiertos en un espacio topológico se convierte en uno sobre cerrados al remplazar **abierto** por **cerrado** y \cup por \cap .

Definición 1.5 (Adherencia). Sea (X, \mathcal{T}) e.t. y $S \subset X$ se llama adherencia de S en (X, \mathcal{T}) al conjunto

$$\bar{S} = \bigcap \{C \subset X : C \text{ es cerrado y } S \subset C\}$$

Observación. \bar{S} es cerrado, $S \subset \bar{S}$ y \bar{S} es el menor cerrado que contiene a S .

Lema 1.0.1. Si $A \subset B$, entonces $\bar{A} \subset \bar{B}$.

Demostración. Como $B \subset \bar{B}$, $A \subset B \Rightarrow A \subset \bar{B}$ y por ser \bar{B} cerrado, se tiene que $\bar{A} \subset \bar{B}$.

Proposición 1.2 (Propiedades Adherencia). Sea (X, \mathcal{T}) e.t. entonces

- (K1) $\bar{\emptyset} = \emptyset$,
- (K2) $\forall S \subset X, S \subset \bar{S}$,
- (K3) $\forall S \subset X, \bar{\bar{S}} = S$,
- (K4) $\forall A, B \subset X, \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$,
- (K5) $\forall C \subset X, C \text{ es cerrado} \Leftrightarrow C = \bar{C}$.

Demostración. (iv) Sea (X, \mathcal{T}) espacio topológico. Dado que $A \cup B \subset \overline{A \cup B}$ se tiene que $\bar{A \cup B} \subset \overline{A \cup B}$. Por otro lado, $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$ entonces $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$ y $\bar{B} \subset \overline{A \cup B} \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Teorema 1.1. Sea $X \neq \emptyset$ y $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X) : S \mapsto \varphi(S) \equiv \bar{S}$ tal que φ cumple las 4 propiedades anteriores. Entonces, existe una única topología \mathcal{F} sobre X tal que $\forall S \subset X, \varphi(S)$ es la adherencia de S en (X, \mathcal{F}) .

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{F \subset X : \bar{F} = F\} \subset \mathcal{P}(X)$. Queremos ver que se cumplen las propiedades de Prop.1.1.(i, ii, iii).

(I) Por Prop.1.2(i, ii).

(II) Por Prop.1.2(iv), sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Entonces, $\overline{F_1 \cup F_2} = \overline{F_1} \cup \overline{F_2} = F_1 \cup F_2 \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.

(III) Si $F \subset G$ por Prop.1.2(iv) $\overline{G} = \overline{F} \cup \overline{(G \setminus F)} \Rightarrow \overline{F} \subset \overline{G}$ Ahora, sean $F_j \in \mathcal{F}, \forall j \in J$ Entonces, $\bigcap_{j \in J} F_j \subset F_j, \forall j \in J \Rightarrow \overline{\bigcap_{j \in J} F_j} \subset \overline{F_j}, \forall j \in J$ y por tanto, $\overline{\bigcap_{j \in J} F_j} \subset \bigcap_{j \in J} \overline{F_j} = \bigcap_{j \in J} F_j$ y por Prop.1.2(ii) se tiene que $\overline{\bigcap_{j \in J} F_j} = \bigcap_{j \in J} F_j$, esto es, $\bigcap_{j \in J} F_j \in \mathcal{F}$.

Por tanto, \mathcal{F} es la familia de cerrados de algún e.t. (X, \mathcal{T}) . Falta por ver que la adherencia es la operación φ . Dado que $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$ se tiene que $\overline{S} \in \mathcal{F}$ y por Prop.1.2(ii) $S \subset \overline{S}$. Si $C \in \mathcal{F}$ tal que $S \subset C$ entonces $\overline{S} \subset \overline{C} = C \Rightarrow \overline{S}$ es el elemento de \mathcal{F} más pequeño que contiene a S .

Observación. A la operación anterior se le llama operación de clausura de Kuratowski.

Definición 1.6 (Interior). Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $S \subset X$ se llama interior de S en (X, \mathcal{T}) al conjunto

$$\overset{\circ}{S} = \bigcup \{A \subset X \text{ abierto y } A \subset S\}.$$

Observación. $\overset{\circ}{S}$ es abierto de \mathcal{T} , $\overset{\circ}{S} \subset S$ y es el mayor abierto contenido en S .

Proposición 1.3 (Propiedades interior). content

Proposición 1.4. Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $S \subset X$. Entonces:

$$(I) X \setminus \overline{S} = (X \setminus S)^\circ.$$

$$(II) X \setminus \overset{\circ}{S} = \overline{X \setminus S}.$$

Observación. $\overline{S^c} = \overset{\circ}{S}^c$.

Demostración. (I) $X \setminus \bigcap_{C \in \mathcal{F}: S \subset C} C = \bigcup_{C \in \mathcal{F}: S \subset C} X \setminus C = \bigcup_{G \in \mathcal{T}: G \subset X \setminus S} G = (X \setminus S)^\circ$

$$(II) X \setminus \overset{\circ}{S} = X \setminus \bigcup_{G \in \mathcal{T}: G \subset S} G = \bigcap_{G \in \mathcal{T}: G \subset S} (X \setminus G) = \bigcap_{C \in \mathcal{F}: X \setminus S \subset C} C =$$

$$\overline{X \setminus S}$$

Definición 1.7 (Frontera). Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $S \subset X$. Se llama frontera de S en (X, \mathcal{T}) a

$$Fr(S) = \overline{S} \cap \overline{(X \setminus S)}$$

Observación. $Fr(S)$ es cerrado

Observación. $Fr(S) = Fr(X \setminus S)$

Observación. $Fr(S) \not\subset S$

Proposición 1.5. Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $S \subset X$. Entonces:

$$(I) \quad \overline{S} = S \cup Fr(S)$$

$$(II) \quad \overset{\circ}{S} = S \setminus Fr(S) = S \setminus (Fr(S) \cap S)$$

$$(III) \quad X = \overset{\circ}{S} \cup (X \setminus \overset{\circ}{S}) \cup Fr(S)$$

$$(IV) \quad Fr(S) = \overline{S} \setminus \overset{\circ}{S}$$

Demostración. (I)

$$\begin{aligned} S \cup Fr(S) &= S \cup (\overline{S} \cap \overline{X \setminus S}) = \\ &= (S \cup \overline{S}) \cap (S \cup \overline{X \setminus S}) = \overline{S} \end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned} S \setminus Fr(S) &= S \setminus (\overline{S} \cap \overline{X \setminus S}) = \\ &= (S \setminus \overline{S}) \cup (S \setminus \overline{X \setminus S}) = \emptyset \cup (S \cap (X \setminus \overline{X \setminus S})) = \\ &= (S \cap (X \setminus (X \setminus \overset{\circ}{S}))) = (S \cap \overset{\circ}{S}) = \overset{\circ}{S} \end{aligned}$$

(III)

$$\begin{aligned} X &= \overset{\circ}{S} \cup (X \setminus \overset{\circ}{S}) = \overset{\circ}{S} \cup \overline{X \setminus \overset{\circ}{S}} = \\ &= \overset{\circ}{S} \cup [(X \setminus S) \cup Fr(X \setminus S)] = \\ &= \overset{\circ}{S} \cup [(X \setminus S) \cup (Fr(X \setminus S) \cap (X \setminus S)) \cup Fr(X \setminus S)] = \\ &= \overset{\circ}{S} \cup (X \setminus S) \cup Fr(X \setminus S) = \overset{\circ}{S} \cup (X \setminus \overset{\circ}{S}) \cup Fr(S) \end{aligned}$$

(IV)

$$Fr(S) = \bar{S} \cap \overline{(X \setminus S)} = \bar{S} \cap (X \setminus \overset{\circ}{S})$$

Definición 1.8. Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $S \subset X$ se dice que es denso en (X, \mathcal{T}) si $\bar{S} = X$

1.2. Entornos

Definición 1.9. Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $x \in X$, $V \subset X$. Se dice que V es un entorno de x en (X, \mathcal{T}) si $\exists A \in \mathcal{T} : x \in A \subset V$.

Definición 1.10. Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ es la colección de todos los entornos de x y se llama sistema de entornos de x en (X, \mathcal{T}) .

Observación. Si (X, \mathcal{T}) e.t., $x \in X$, $V \subset X$ entonces V es entorno de $x \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{V}$.

Notación. U^x, V^x entornos de x .

Proposición 1.6. Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $\mathcal{V}(x)$ tiene las siguiente propiedades:

- (N1) $\forall U \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in U$.
- (N2) $\forall U, V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{V}(x)$.
- (N3) $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $\forall y \in V, U \in \mathcal{V}(y)$.
- (N4) $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists V \subset X : U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$.

Demostración. (I) Trivial, a partir de la definición.

(II) $x \in \overset{\circ}{U}, x \in \overset{\circ}{V} \Rightarrow x \in \overset{\circ}{U} \cap \overset{\circ}{V} \subset U \cap V \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{V}(x)$.

(III) Sean $U \in \mathcal{V}(x), V = \overset{\circ}{U}$ como $x \in \overset{\circ}{U} = V \Rightarrow \forall y \in V \in \mathcal{T}$ y $V \subset U \Rightarrow U \in \mathcal{V}(y)$.

(IV) $U \in \mathcal{V}(x), U \subset V \Rightarrow x \in \overset{\circ}{U} \subset \overset{\circ}{V} \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$.

Proposición 1.7. Sea $X \neq \emptyset$, $\forall x \in X : \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{P}(x)$ que cumple (N1, N2, N3, N4) anteriores, entonces $\exists! \mathcal{T}$ sobre $X : \forall x \in X, \mathcal{V}(x)$ es el sistema de entornos de x en (X, \mathcal{T}) .

Demostración. Sea $\mathcal{T} = \{G \subset X : \forall x \in G, G \in \mathcal{V}(x)\}$. Vemos que \mathcal{T} es una topología:

(I) Prop.1.6.(N1) $X \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow X \in \mathcal{T}$

(II) $\forall G_1, G_2 \in \mathcal{T}, x \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow G_1, G_2 \in \mathcal{V}(x), \text{ Prop.1.6.(N2)} \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{V}(x)$.

(III) $\forall \{G_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{T}, x \in \bigcup_{j \in J} G_j \Rightarrow \exists j_0 \in J : G_{j_0} \in \mathcal{V}(x), \text{ Prop.1.6.(N4)} \Rightarrow \bigcup_{j \in J} G_j \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \bigcup_{j \in J} G_j \in \mathcal{T}$

$\Rightarrow \mathcal{T}$ es topología.

Vemos ahora que S es entorno de $x \Leftrightarrow S \in \mathcal{V}(x)$.

- (\Rightarrow) S entorno de x en $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow \exists G \in \mathcal{T} : x \in G \subset S \Rightarrow G \in \mathcal{V}(x) \text{ Prop.1.6.(iv)} \Rightarrow S \in \mathcal{V}(x)$.
- (\Leftarrow) $S \in \mathcal{V}(x)$. Sea $U \subset S$ ACABAR

Falta ver que \mathcal{T} es única.

Definición 1.11 (Base de Entorno). Sea $x \in X, \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$. Se dice que $\mathcal{B}(x)$ es una base de un entorno de x en (X, \mathcal{T}) si $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset U$.

Observación. De la definición de base queda determinado un entorno como $\mathcal{V}(x) = \{U \subset X : \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset U\}$

Ejemplo. $\forall (X, \mathcal{T})$ e.t. $\mathcal{V}(x)$ es una base de entornos de x .

Ejemplo. Sea $(X, \mathcal{T}_D), \mathcal{T}_D = \mathcal{P}(x), \forall x \in X$ entonces $\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}$ es base de entornos de x .

Ejemplo. Sea (X, \mathcal{T}) metrizable. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$, d métrica tal que $\forall x \in X, \mathcal{B}(x) = \{B_\epsilon(x) : \epsilon > 0\}$ entonces $\mathcal{B}(x)$ es base de entornos de x .

Ejemplo. $\forall (X, \mathcal{T})$ e.t., $\mathcal{B}(x) = \{\dot{U} : U \in \mathcal{V}(x)\}$ es base de entornos de x .

Ejemplo. Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) : \forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{B}(x) = \{[x - \epsilon, x + \epsilon] : \epsilon > 0\}$ entonces $\mathcal{B}(x)$ es base de entornos de x .

Proposición 1.8 (Propiedades de Bases de Entornos). Sea (X, \mathcal{T}) e.t. y $\mathcal{B}(x)$ una base de entornos de x en (X, \mathcal{T}) , $\forall x \in \mathcal{T}$. Entonces:

(V1) $B \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow x \in B$.

(V2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}(x) : B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

(V3) $B_1 \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow \exists B_2 \in \mathcal{B}(x) : \forall y \in B_2, \exists B \in \mathcal{B}(y)$ tal que $B \subset B_1$.

Demostración. (V1) $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x), B \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow x \in B$.

(V2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}(x) : B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

(V3) $B_1 \in \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ Prop.1.6.(iii) $\Rightarrow \exists U \in \mathcal{V}(x)$ tal que $\forall y \in U, B_1 \in \mathcal{B}(y) \Rightarrow \exists B_2 \in \mathcal{B}(x) : B_2 \subset U$ tal que $\forall y \in B_2, B_1 \in \mathcal{V}(y) \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}(y) : B \subset B_1$.

Proposición 1.9. Sea $X \neq \emptyset, \mathcal{B} : X \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ cumpliendo (i, ii, iii) anteriores, entonces se define una topología en X en la que $\mathcal{B}(x)$ es una base de entornos de $x, \forall x \in X$.

Demostración. Sea $\forall x \in X$,

$$\mathcal{V}(x) = \{U \subset X : \exists B \subset U \text{ para algún } B \in \mathcal{B}(x)\}$$

tal que $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ tiene las propiedades V1, V2, V3. Veamos que $\mathcal{V}(x)$ tiene las propiedades N1, N2, N3, N4.

(N1) $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists B \subset U : B \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow x \in B \subset U \Rightarrow x \in U$.

(N2) $U_1, U_2 \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x) : B_1 \subset U_1, B_2 \subset U_2$ y (V2) $\Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}(x) : B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$. Entonces, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}(x)$.

(N3) $U \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists B \subset U : B \in \mathcal{B}(x)$, (V3) $\Rightarrow \exists B_0 \in \mathcal{B}(x) : \forall y \in B_0, \exists B_y \in \mathcal{B}(y) : B_y \subset B$. Entonces $B \in \mathcal{V}(y), \forall y \in B_0 \Rightarrow U \in \mathcal{V}(y), \forall y \in B_0$.

(N4) $U \in \mathcal{V}(x), V \subset X : U \subset V \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$.

Entonces, $\mathcal{V}(x)$ es un sistema de entornos de x , $\forall x \in X$ y $\forall x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ es una base de entornos de x en la topología resultante en X .

Definición 1.12 (Bases de Entornos Equivalentes). Sea $X \neq \emptyset$. Si una topología sobre X está definida por dos bases de entornos, se dice que las bases son equivalentes.

Proposición 1.10. Sea $X \neq \emptyset$. Dos bases de entornos de x , $\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)$ de X son equivalentes si y solo si $\forall x \in X, \forall i \in \{1, 2\}, \forall B \in \mathcal{B}_i(x), \exists B_j \in \mathcal{B}_j(x) : B_j \subset B, \forall j \in \{1, 2\}, j \neq i$.

Proposición 1.11 (Caracterización bases equivalentes). Sean $\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)$ dos bases de entornos de x en (X, \mathcal{T}) , estas son equivalentes $\Leftrightarrow \forall x \in X, \forall i \in \{1, 2\}, \forall B_i \in \mathcal{B}_i(x), \exists B_j \in \mathcal{B}_j(x), j \in \{1, 2\}, j \neq i : B_j \subset B_i$.

Demostración. $(\Rightarrow) \forall i \in \{1, 2\}, \forall B_i \in \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists B_j \in \mathcal{B}(x), \forall j \in \{1, 2\}, j \neq i$.

(\Leftarrow)
ACABAR

Definición 1.13. Sea (X, \mathcal{T}) e.t. $S \subset X, x \in X$.

- (I) Se dice que x es un punto interior de S en (X, \mathcal{T}) si $\exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \subset S$.
- (II) Se dice que x es un punto adherente de S en (X, \mathcal{T}) si $\forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset$.
- (III) Se dice que x es un punto de acumulación si $\forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \setminus \{x\} \cap S \neq \emptyset$.
- (IV) Se dice que x es un punto de frontera si $\forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset, \mathcal{U}^x \cap (X \setminus S) \neq \emptyset$.
- (V) Se dice que x es punto aislado si $\exists \mathcal{U}^x$ tal que $\mathcal{U}^x \cap S = \{x\}$.

Definición 1.14. El conjunto de puntos de acumulación se llama conjunto derivado y se denota S' .

Proposición 1.12. Sea (X, \mathcal{T}) e.t. Entonces,

- (I) $A \subset X$ es abierto de $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \subset A$.
- (II) $C \subset X$ es cerrado $\Leftrightarrow \forall x \notin C, \exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \cap C = \emptyset$.
- (III) $S \subset X, \overset{\circ}{S} = \{x \in X : \exists \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \subset S\}$.
- (IV) $S \subset X, \overline{S} = \{x \in X : \forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset\}$.
- (V) $S \subset X, Fr(S) = \{x \in X : \forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset, \mathcal{U}^x \cap (X \setminus S) \neq \emptyset\}$.

Demostración. (I) Es la propiedad V1.

(II) C es cerrado $\Leftrightarrow X \setminus C \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in X \setminus C, \exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \subset X \setminus C \Rightarrow X \setminus C$ es abierto.

(III) Sigue de (iv) aplicando las leyes de De Morgan.

(IV) $X \setminus \overline{S} = (X \setminus S)^\circ = \{x \in X : \exists \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \subset X \setminus S\}$ cuyo complementario es $\overline{S} = \{x \in X : \forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset\}$.

(V) $Fr(S) = \overline{S} \cap \overline{X \setminus S}$

Observación. En la proposición anterior se pueden usar bases en lugar de sistemas de entornos.

Corolario 1.1.1. Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $S \subset X$ entonces

- (I) $\overline{S} = \{x \in X : x \text{ es punto adherente de } S\}$.
- (II) $\overset{\circ}{S} = \{x \in X : x \text{ es punto interior de } S\}$.
- (III) $Fr(S) = \{x \in X : x \text{ es punto frontera de } S\}$.

Proposición 1.13. Sea (X, \mathcal{T}) e.t. $E \subset X$. Entonces E es denso en $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, U \cap E \neq \emptyset$.

Demostración. (\Rightarrow) Suponemos que E es denso, es decir, $\overline{E} = X$. Entonces, $\forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$, U es abierto $\Rightarrow \forall x \in \overset{\circ}{U} = U \Rightarrow U$ es entorno de x en (X, \mathcal{T}) . Y como x es punto adherente de $E \Rightarrow U \cap E \neq \emptyset$.

(\Leftarrow) $\forall x \in X, \forall \mathcal{U}^x$ entorno de $x \Rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{U}}^x \subset \mathcal{U}^x \subset X \Rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{U}}^x \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ y por la hipótesis $\overset{\circ}{\mathcal{U}}^x \cap E \subset \mathcal{U}^x \cap E \neq \emptyset \Rightarrow x$ punto adherente de E , $x \in \overline{E} \Rightarrow X \subset \overline{E}$.

1.3. Bases

Definición 1.15 (Base). Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Se dice que \mathcal{B} es base de \mathcal{T} si $\forall A \in \mathcal{T}, \exists \mathcal{B}_A \subset \mathcal{B} : A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_A} B$. Y se dice que \mathcal{T} está engendrada por \mathcal{B} .

Observación. $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ tal que $\mathcal{T} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}_A} B : \mathcal{B}_A \subset \mathcal{B}\}$.

Observación. $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ es una base de $X \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{T}, \forall x \in A \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset A$.

Ejemplo. (I) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u), \mathcal{B} = \{(a, b) : a < b\}$ es base de \mathcal{T}_u .

(II) $(X, \mathcal{T}_u), \mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ es base de \mathcal{T}_u .

(III) (X, \mathcal{T}) metrizable, \mathcal{T}_d topología inducida por d . Entonces $\mathcal{B} = \{B : x \in X, \epsilon > 0\}$ es base de \mathcal{T}_d .

Proposición 1.14. Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ entonces, \mathcal{B} es base de $\mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ es base de entornos de x en (X, \mathcal{T}) .

Observación. La única diferencia entre bases y bases de entornos es que las bases no tienen por que consistir de conjuntos abiertos.

Demostración. (\Rightarrow) Suponemos que \mathcal{B} es base de X , $x \in X$ y $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$. Sea $U \in \mathcal{B}_x$ entonces $U \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T} : x \in U = \overset{\circ}{U} \Rightarrow U$ es un entorno de x . Sea $U \in \mathcal{V}(x)$, entonces $x \in \overset{\circ}{U} \in \mathcal{T}$ donde $\mathcal{T} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} B : \mathcal{B}_U \subset \mathcal{B}\}$, es decir, $\overset{\circ}{U}$ es la unión de elementos de \mathcal{B} entonces $\exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset \overset{\circ}{U}$. Por tanto, $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists B \in \mathcal{B}_x : B \subset U \Rightarrow \mathcal{B}_x$ es base de entornos de x .

(\Leftarrow) Suponemos que \mathcal{B}_x es una base de entornos de x , $\forall x \in X$ y $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$. Entonces, $\forall A \in \mathcal{T}, \forall x \in A, \exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subset A \Rightarrow$

$A = \bigcup \{B_x : x \in A\} \Rightarrow \mathcal{B} \subset A$, de manera que \mathcal{B} es base para X .

Teorema 1.2. Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces, \mathcal{B} es base de una topología \mathcal{T} en $X \Leftrightarrow$

$$(I) \quad X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

$$(II) \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, p \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} : p \in B_3 \subset B_1 \cap B_2.$$

Demostración. (I) $(\Rightarrow) \mathcal{T} = \{ \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \in \mathcal{B} \}, X \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists \mathcal{B}_0 \in \mathcal{B} : X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0} B.$

(II) (\Rightarrow) A partir de la definición de base. $(B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2).$

(\Leftarrow) Suponemos que $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ donde $\mathcal{B} = \{K \subset X : K \text{ cumple las propiedades (i), (ii)}\}$. Sea $\mathcal{T} = \{ \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \}$. Entonces,

$$(G1) \quad \emptyset = \bigcup_{B \in \emptyset} B \in \mathcal{T} \text{ y } X \in \mathcal{T}.$$

$$(G2) \quad \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B \right) \cap \left(\bigcup_{B' \in \mathcal{B}_2} B' \right) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1, B' \in \mathcal{B}_2} B \cap B', \text{ por (ii)} \Rightarrow \text{la intersección de dos elementos de } \mathcal{B} \text{ es una unión de elementos de } \mathcal{B}.$$

$$(G3) \quad \{A_j\}_{j \in J} = \{ \bigcup_{B \in \mathcal{B}_j} B : j \in J \} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}.$$

Definición 1.16 (Subbase). Sea (X, \mathcal{T}) e.t. $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Se dice que \mathcal{S} es una subbase de \mathcal{T} si la familia de todas las intersecciones finitas de \mathcal{S} es una base de \mathcal{T} .

Observación. $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}, \mathcal{B} = \{ \bigcap_{S \in \mathcal{S}'} S : \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \text{ es finito} \}$ es base de \mathcal{T} .

Proposición 1.15. Sea $X \neq \emptyset, \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces, \mathcal{S} es una subbase de alguna topología sobre $X \Leftrightarrow \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$.

Demostración. (\Rightarrow) Sea $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ una subbase de $\mathcal{T} \Rightarrow \{ \bigcap_{S \in \mathcal{S}'} S : \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \} = \mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T} \Rightarrow \forall B \in \mathcal{B}, \exists S_B \in \mathcal{S} : B \subset S_B \Rightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} S_B \subset \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \subset X \Rightarrow \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X.$

(\Leftarrow) Sea $\mathcal{B} = \{ \bigcap_{S \in \mathcal{S}'} S' : \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \}$.

- (i) $\bigcap_{S \in \mathcal{S}} S = X \Rightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.
- (ii) $(\bigcap_{S \in \mathcal{S}_1} S) \cap (\bigcap_{S' \in \mathcal{S}_2} S') \cap \bigcap_{S \in \mathcal{S}_1, S' \in \mathcal{S}_2} (S' \cap S) \subset \mathcal{B}$.

1.4. Subespacios

Definición 1.17 (Subespacio). Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $S \subset X$. Se llama *topología relativa a S* a

$$\mathcal{T}|_S = \{A \cap S : A \in \mathcal{T}\}$$

y el par $(S, \mathcal{T}|_S)$ se llama *subespacio topológico*.

Proposición 1.16 (Propiedades Subespacio). Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $S \subset X$. Entonces,

- (I) $C \subset S, C \in \mathcal{T}|_S \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{T} : A \cap S = C$.
- (II) $C \subset S, C$ cerrado en $S, \mathcal{T}|_S \Leftrightarrow \exists F$ cerrado en $(X, \mathcal{T}) : C = F \cap S$.
- (III) $\forall C \subset S, \overline{C}^S = S \cap \overline{C}^X$.
- (IV) $\forall x \in S, \mathcal{V}^x \subset S$ es un entorno de x en $(S, \mathcal{T}|_S) \Leftrightarrow \exists \mathcal{U}^x$ entorno de x en (X, \mathcal{T}) tal que $\mathcal{U}^x \cap S = \mathcal{V}^x$.
- (V) \mathcal{B} base de $\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{B}_S = \{B \cap S : B \in \mathcal{B}\}$ es base de $(S, \mathcal{T}|_S)$.

Demostración. (I) Definición de subespacio.

(II) Sigue de (i).

(III) Sigue de (ii) y la definición de clausura de C como la intersección de todos los conjunto cerrados que contienen E .

(IV) Sigue de (i) y la definición de entorno de x como un conjunto que contiene un subconjunto abierto que contiene a x .

(V) ACABAR

Observación. Sea $S \subset X, C \subset S$ entonces no necesariamente $\text{int}(C)_S \neq \text{int}(C)_X \cap S$. Por ejemplo, $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u), S = C = \{0\} \times \mathbb{R}$.

Definición 1.18. Sea (\mathcal{P}) una propiedad de e.t. Se dice que \mathcal{P} es propiedad hereditaria si dado e.t. que cumple \mathcal{P} todos sus subespacios cumplen \mathcal{P} .

1.5. Funciones continuas

Definición 1.19 (Función continua). Sean (X, \mathcal{T}) , (X', \mathcal{T}') dos e.t. y $f : X \rightarrow X'$ una aplicación. Se dice que $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es una aplicación continua en $a \in X$ si $\forall \mathcal{V}^{f(a)}$ entorno de $f(a)$ en (X', \mathcal{T}') , $\exists \mathcal{U}^a$ entorno de a en $(X, \mathcal{T}) : f(\mathcal{U}^a) \subset \mathcal{V}^{f(a)}$.

Observación. Se dice que f es continua si lo es $\forall a \in X$.

Teorema 1.3. Sean (X, \mathcal{T}) , (X', \mathcal{T}') dos e.t. y $f : X \rightarrow X'$ una aplicación. Entonces, son equivalentes:

- (I) $\forall A' \in \mathcal{T}', f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$
- (II) $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es aplicación continua.
- (III) $\forall C \subset X, f(\overline{C}^X) \subset \overline{(f(C))}^{X'}$.
- (IV) $\forall C' \subset X, \overline{f^{-1}(C')}^X \subset f^{-1}(\overline{C'}^{X'})$.
- (V) $\forall F'$ cerrado de (X', \mathcal{T}') , $f^{-1}(F')$ es cerrado de (X, \mathcal{T}) .

Demostración. $(i \Rightarrow ii)$ Sea $a \in X$, $\mathcal{V}^{f(a)}$ entorno de $f(a)$ en (X', \mathcal{T}') $\Rightarrow \mathcal{V}^{\circ f(a)}, f(a) \in \mathcal{V}^{\circ f(a)}$. Ahora, por (i), tenemos $a \in f^{-1}(\mathcal{V}^{\circ f(a)}) \in \mathcal{T}$. Sea $f^{-1}(\mathcal{V}^{f(a)}) = \mathcal{U}^a$. Entonces, $f(\mathcal{U}^a) = f(f^{-1}(\mathcal{V}^{f(a)})) \subset \mathcal{V}^{\circ f(a)} \subset \mathcal{V}^{f(a)} \Rightarrow f$ es continua.

$(iii \Rightarrow ii)$ Sea $C \subset X, a \in \overline{C}^X, \mathcal{V}^{f(a)}$ entorno de $f(a)$ en (X', \mathcal{T}') . Entonces, por (ii), $\exists \mathcal{U}^a$ entorno de a en (X, \mathcal{T}) tal que $f(\mathcal{U}^a) \subset \mathcal{V}^{f(a)} \Rightarrow \mathcal{U}^a \cap C \neq \emptyset \Rightarrow a \in \mathcal{U}^a \cap C \Rightarrow f(a) \in f(\mathcal{U}^a) \cap f(C) \subset \mathcal{V}^{f(a)} \cap f(C) \Rightarrow f(a) \in \overline{f(C)}^{X'}$.

$(iii \Rightarrow iv)$ $\forall C' \subset X' \Rightarrow f'(C') \subset X'$ y por (iii) $f(\overline{f^{-1}(C')})^X \subset \overline{f(f^{-1}(C'))}^{X'} \subset \overline{C'}^{X'} \Rightarrow \overline{f^{-1}(C')}^X \subset f^{-1}(\overline{C'}^{X'})$.

$(iv \Rightarrow v)$ F' cerrado de (X', \mathcal{T}') $\Rightarrow \overline{f^{-1}(C')}^X \subset f^{-1}(\overline{F'}^{X'}) = f^{-1}(F') \Rightarrow$

$f^{-1}(F')$ es cerrado en (X, \mathcal{T}) .

$(v \Rightarrow i) A' \in \mathcal{T}' \Rightarrow X' \setminus A'$ cerrado de (X', \mathcal{T}') $\Rightarrow f^{-1}(X' \setminus A')$ cerrado de $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow X \setminus f^{-1}(X' \setminus A') \in \mathcal{T}$. $\forall x \notin f^{-1}(X' \setminus A') \Leftrightarrow f(x) \notin X' \setminus A' \Leftrightarrow f(x) \in A' \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A') \Rightarrow X \setminus f^{-1}(X' \setminus A')$.

Observación. $\forall (X, \mathcal{T})$ e.t. la aplicación $1_X : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ es continua.

Observación. $\forall (X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t. $\forall x'_0 \in X'$ la aplicación constante con $c_{x'_0} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es constante.

Proposición 1.17. Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), (X'', \mathcal{T}'')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ aplicación continua, $f' : (X', \mathcal{T}') \rightarrow (X'', \mathcal{T}'')$ aplicación continua. Entonces, $(f' \circ f) : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X'', \mathcal{T}'')$ es continua.

Demostración. $\forall A'' \in \mathcal{T}'' \Rightarrow f^{-1}(A'') \in \mathcal{T}' \Rightarrow f^{-1}(f^{-1}(A'')) \in \mathcal{T}$ y $(f' \circ f)^{-1}(A'') = f^{-1}(f^{-1}(A''))$.

Proposición 1.18. Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$. Entonces, $f|_S : (S, \mathcal{T}|_S) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es aplicación continua.

Demostración. $\forall A' \in \mathcal{T}', (f|_S)^{-1}(A') = f^{-1}(A') \cap S \in \mathcal{T}|_S$.

Proposición 1.19. Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$, $S \subset X$. Entonces, $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (f(x), \mathcal{T}'|_{f(x)})$ es aplicación continua.

Demostración. $\forall G' \in \mathcal{T}'|_S \Rightarrow \exists A' \in \mathcal{T}' : G' = A' \cap f(x) \Rightarrow f^{-1}(G') = f^{-1}(A' \cap f(x)) = f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$.

Proposición 1.20. Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : X \rightarrow X'$ aplicación. Si F_1, F_2 son cerrados de (X, \mathcal{T}) tal que $X = F_1 \cup F_2$ y $f|_{F_i} : (F_i, \mathcal{T}_{F_i}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es continua. Entonces, $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es aplicación continua.

Demostración. $\forall F'$ cerrado de (X', \mathcal{T}') , $f^{-1}(F') = f^{-1}(F') \cap X = f^{-1}(F') \cap (F_1 \cup F_2) = (f^{-1}(F') \cap F_1) \cup (f^{-1}(F') \cap F_2)$ donde $(f^{-1}(F') \cap F_1) = f^{-1}|_{F_1}(F')$ cerrado en F_1 y $(f^{-1}(F') \cap F_2) = f^{-1}|_{F_2}(F')$ cerrado en $F_2 \Rightarrow f^{-1}(F')$ cerrado en (X, \mathcal{T}) .

Definición 1.20 (Espacio Homeomorfo). Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t. $f : X \rightarrow X'$ aplicación. Se dice que $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es homeomorfismo si f es biyectiva y f^{-1} es continua. En este caso, se dice que (X, \mathcal{T}) es homeomorfo a (X', \mathcal{T}') .

Definición 1.21 (Invariante Topológico). Sea (P) una propiedad de e.t.. Se dice que (P) es un invariante topológico si para todo e.t. que cumpla (P) todos los e.t. homeomorfos cumplen (P) .

Definición 1.22 (Aplicación Abierta). Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$. Entonces, f es aplicación abierta si $\forall A \in \mathcal{T}, f(A) \in \mathcal{T}'$

Observación. Una aplicación es cerrada si $\forall C$ cerrado de (X, \mathcal{T}) , $f(C)$ cerrado de (X', \mathcal{T}') .

Observación. No hay ninguna implicación entre aplicación continua, aplicación abierta y aplicación cerrada.

Proposición 1.21. Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), f : X \rightarrow X'$ aplicaciones biyectivas. Entonces, son equivalentes:

- (I) $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es homeomorfismo.
- (II) $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ aplicación continua y abierta.
- (III) $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ aplicación continua y cerrada.

Demostración.

$(i \Rightarrow ii)$ f homeomorfismo $\Rightarrow \exists f^{-1}$ aplicación continua $\Rightarrow \forall A' \in \mathcal{T}, (f^{-1}(A'))^{-1} \in \mathcal{T}'$ donde $(f^{-1}(A'))^{-1} = f(A) \Rightarrow f$ aplicación abierta.

$(ii \Rightarrow i)$ f abierta y continua $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, f(A) \in \mathcal{T}'$ donde $f(A) = (f^{-1}(A))^{-1} \Rightarrow f^{-1}$ aplicación continua.

(i \Leftrightarrow iii) es análoga.

1.6. Espacio Producto

Definición 1.23 (Producto Cartesiano). Sea $\{X_j\}_{j \in J} \neq \emptyset$ familia de conjuntos no vacíos. Se llama producto cartesiano de $\{X_j\}_{j \in J}$ a

$$\prod_{j \in J} X_j = \{x : J \rightarrow \bigcup_{j \in J} X_j \text{ aplicación} : x_j \in X_j, \forall j \in J\}$$

Observación. $\forall j \in J, p_{j_0} : \prod_{j \in J} X_j \rightarrow X_{j_0} : x \mapsto x_{j_0}$ se llama proyección.

Observación. Si $X_j = X, \forall j \in J$ entonces $\prod_{j \in J} X_j = X^J = \{x : J \rightarrow X, x \text{ aplicación}\}$.

Definición 1.24 (Axioma Elección). $\forall \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \neq \emptyset$ familia de conjuntos no vacíos disjuntos dos a dos. Entonces, $\exists A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda : A \cap B_\lambda$ tiene un solo elemento.

Definición 1.25 (Topología Producto). Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia de e.t.. Se llama topología producto a la topología sobre $\prod_{j \in J} X_j$ generada por subbase

$$\mathcal{S} = \{p_j^{-1}(U_j) : U_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J\}$$

Esta topología se denota $\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j$

Observación. El producto de abiertos no es necesariamente abierto.

Observación. La base engendrada por \mathcal{S} es

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(U_j) : U_j \in \mathcal{T}_j, F \in \mathcal{P}(J) \right\}$$

$$= \left\{ \prod_{j \in J} A_j : A_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J, A_j = X_j : \forall j \in J \setminus F \text{ no es finito} \right\}.$$

Observación. Si J es finito, entonces $\mathcal{B} = \left\{ \prod_{j \in J} A_j : A_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J \right\}$.

Observación. El producto espacios discretos no es necesariamente discreto.

Proposición 1.22. Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia finita de e.t.. Entonces, $\forall j_0 \in J$,

$$p_{j_0} : \left(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j \right) \rightarrow (X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0})$$

es aplicación abierta y continua.

Demostración. $\forall A \in \prod_{j \in J} \mathcal{A}_j$, $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ donde \mathcal{B} es subbase de $\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j$, $B_\lambda = \{\prod_{j \in J} U_{\lambda j} : U_{\lambda j} \in \mathcal{T}_j, U_{\lambda j} = X_j, \forall j \in J \setminus F : F \text{ finito}\}$. Entonces, $p_{j_0}(A) = p_{j_0}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} p_{j_0}(B_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_{\lambda j_0} \in \mathcal{T}_{j_0} \Rightarrow$ abierto.

Proposición 1.23. Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia no vacía de e.t.. Entonces, la topología producto es la más débil sobre $\prod_{j \in J} X_j$ que hace continuas a todas las proyecciones.

Demostración. Sea \mathcal{T} topología sobre $\prod_{j \in J} X_j$ tal que $p_{j_0} : (\prod_{j \in J} X_j, \mathcal{T}) \rightarrow (X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0})$ es una proyección continua. Entonces, $\forall j_0 \in J : U_{j_0} \in \mathcal{T}_{j_0}$ se tiene $p_{j_0}^{-1}(U_{j_0}) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ es subbase de $\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j \Rightarrow \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j \subset \mathcal{T}$.

Proposición 1.24 (Propiedad Universal Topología Producto). Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia $\neq \emptyset$ e.t., $f : X \rightarrow \prod_{j \in J} X_j$ aplicación. Entonces, $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$ continua $\Leftrightarrow (p_j \circ f) : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$ continua.

Demostración. (\Rightarrow) La composición de aplicaciones continuas es continua.

(\Leftarrow) $\forall j \in J$, $(p_j \circ f)^{-1}(U_j) \in \mathcal{T}, \forall U_j \in \mathcal{T}_j \Rightarrow (p_j \circ f)^{-1}(U_j) = f^{-1}(p_j^{-1}(U_j)) = f^{-1}(S) \in \mathcal{T}, \forall S \in \mathcal{S} = \{p_j^{-1}(U_j) : U_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J\}$. Entonces, $(p_j \circ f)^{-1}$ y p_j continuas $\Rightarrow f$ continua.

Proposición 1.25. Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia e.t., $\sigma : J \rightarrow J$ aplicación biyectiva. Entonces, (X_j, \mathcal{T}_j) y $(X_{\sigma(j)}, \mathcal{T}_{\sigma(j)})$ son homeomorfos.

Demostración. Sea $\alpha(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j) \rightarrow (\prod_{j \in J} X_{\sigma(j)}, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_{\sigma(j)}) :$
 $(x_j)_{j \in J} \mapsto \alpha((x_j)_{j \in J}) = (x_{\sigma(j)})_{j \in J}$, α es biyectiva.

(I) $(p_j \circ \alpha) = p_{\sigma(j)}$ es composición de funciones continuas (Propiedad Universal).

(II) $(p_j \circ \alpha)^{-1} = p_{\sigma(j)}^{-1}$ continua α^{-1} continua.

\Rightarrow holomorfa.

Definición 1.26. Sea (P) una propiedad de e.t.. Se dice que (P) es multiplicativa si para toda familia e.t. cada una cumpliendo (P) , su producto topológico cumple (P) .

Proposición 1.26. Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia \neq de e.t., (X, \mathcal{T}) e.t., $\forall j \in J, f_j : X \rightarrow X_j$ aplicación. Entonces, $(f_j)_{j \in J} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j) :$
 $x \mapsto (f_j)_{j \in J}(x) = (f_j(x))_{j \in J}$ es continua $\Leftrightarrow f_j : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$ es continua $\forall j \in J$.

Demostración. $\forall j_0 \in J, (p_{j_0} \circ (f_j)_{j \in J}) = f_{j_0}$

(\Rightarrow) composición de aplicaciones continuas es continua.

(\Leftarrow) por la propiedad universal de la topología producto.

Proposición 1.27. Sean $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}, \{(X'_j, \mathcal{T}'_j)\}_{j \in J}, \forall j \in J, f_j : X_j \rightarrow X'_j$ aplicación continua. Entonces, $\prod_{j \in J} f_j : (\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j) \rightarrow (\prod_{j \in J} X'_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}'_j) :$
 $(x_j)_{j \in J} \mapsto (\prod_{j \in J} f_j)((x_j)_{j \in J}) = (f_j(x_j))$ aplicación continua.

VER DIBUJO(Revisar abierta o continua)

Demostración. $\forall j_0 \in J, (p'_{j_0} \circ (\prod_{j \in J} f_j)) = (f_{j_0} \circ p_{j_0})$.

(\Rightarrow) Propiedad Universal de Topología Porducto.

(\Leftarrow) $\forall G'_{j_0} \in \mathcal{T}'_{j_0}$ como $\prod_{j \in J} f_j$ continua, entonces $(p_{j_0} \circ (\prod f_j))^{-1}(G_{j_0}) \in \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j$ es abierto y donde $(p_{j_0} \circ (\prod f_j))^{-1}(G_{j_0}) = (f_{j_0} \circ p_{j_0})^{-1}(G'_{j_0}) = p_{j_0}^{-1}(f_{j_0}^{-1}(G_{j_0}))$. Por ser p_{j_0} aplicación abierta y suprayectiva $p_{j_0}(p_{j_0}^{-1}(f_{j_0}^{-1}(G_{j_0}))) =$

$$f_{j_0}^{-1}((G'_{j_0})) \in \mathcal{T}_{j_0} .$$

1.7. Espacio Cociente

Definición 1.27 (Topología Cociente). Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $Y \neq \emptyset$, $f : X \rightarrow Y$. Se llama topología cociente inducida por f a $\mathcal{T}_f = \{G \subset Y : f^{-1}(G) \in \mathcal{T}\}$. El par (X, \mathcal{T}_f) se llama espacio topológico cociente inducido por f .

Definición 1.28 (Identificación). Sea (X, \mathcal{T}) , (X', \mathcal{T}') e.t., $f : X \rightarrow X'$ suprayectiva. Se dice que $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es identificación si \mathcal{T}' es topología cociente inducida por f .

Observación. f es continua.

Proposición 1.28. Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $Y \neq \emptyset$, $f : X \rightarrow Y$. La topología cociente inducida por f es la más fina de las topologías sobre Y que hacen continuas a f .

Demostración. Sea \mathcal{S} topología sobre Y tal que $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$ es continua. Entonces, $\forall A \in \mathcal{S}, f^{-1}(A) \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{S}, A \in \mathcal{T}_f \Leftrightarrow \mathcal{S} \subset \mathcal{T}_f$.

Proposición 1.29 (Propiedad Universal Topología Cociente). Sea (X, \mathcal{T}) e.t., (Z, \mathcal{S}) e.t., $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ aplicaciones. Entonces, $g : (Y, \mathcal{T}_f) \rightarrow (Z, \mathcal{S})$ es continua $\Leftrightarrow f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Z, \mathcal{S})$ es continua.

Demostración. (\Rightarrow) Trivial.

$(\Leftarrow) \forall A \in \mathcal{S}, (g \circ f)^{-1}(A) \in \mathcal{T} \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{S}, g^{-1}(A) \in \mathcal{T}_f \Rightarrow g$ continua.

Proposición 1.30. Sea (X, \mathcal{T}) , (X', \mathcal{T}') , e.t., $f : X \rightarrow X'$ aplicación. Si $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ suprayectiva, continua y abierta (resp. cerrada). Entonces, $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es identificación.

Demostración. \mathcal{T}_f es la topología más fina que hace continua a $f \Rightarrow \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}_f$. Sea $\forall A \in \mathcal{T}_f \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ con f abierta $\Rightarrow f(f^{-1}(A)) = A \in \mathcal{T}'$ abierto $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}_f, A \in \mathcal{T}' \Rightarrow \mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}'$. Entonces, $\mathcal{T}_f = \mathcal{T}'$.

Observación. Las identificaciones no son necesariamente abiertas o cerradas.

Definición 1.29. Sea (X, \mathcal{T}) e.t., \mathcal{R} relación de equivalencia en X , $p : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ proyección canónica. Se llama e.t. cociente de (X, \mathcal{T}) respecto a \mathcal{R} a $(X/\mathcal{R}, \mathcal{T}/\mathcal{R})$ donde \mathcal{T}/\mathcal{R} es topología cociente inducida por p .

Proposición 1.31. Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), (X'', \mathcal{T}'')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ identificación, $f' : (X', \mathcal{T}') \rightarrow (X'', \mathcal{T}'')$ identificación. Entonces, $(f' \circ f)$ es identificación.

REVISAR DEM

Demostración. Sea $(f' \circ f) : X \rightarrow X''$ suprayectiva. Entonces, $A'' \in \mathcal{T}'', (f' \text{ identificación} \Rightarrow \mathcal{T}'' = \mathcal{T}_f) \Leftrightarrow f'^{-1}(A'') \in \mathcal{T}' \Leftrightarrow (\mathcal{T}' = \mathcal{T}_f) f^{-1}(f'^{-1}(A'')) = (f' \circ f)^{-1}(A'') \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T}'' = \mathcal{T}_{(f' \circ f)}$

Proposición 1.32. Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ identificación. Entonces,

- (I) $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es abierta $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{T}, f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{T}$.
- (II) $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ cerrada $\Leftrightarrow \forall C$ cerrado (X, \mathcal{T}) , $f^{-1}(f(C))$ cerrado de (X, \mathcal{T}) .

Demostración.

- (1) $(\Rightarrow) \forall A \in \mathcal{T} \Rightarrow f(A) \in \mathcal{T}' \Rightarrow f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{T}$.
- $(\Leftarrow) \forall A \in \mathcal{T}, f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{T}, f \text{ identificación} \Rightarrow f(f^{-1}(f(A))) = f(A) \in \mathcal{T}_f = \mathcal{T}' \Rightarrow f \text{ aplicación abierta.}$

Proposición 1.33. Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), (X'', \mathcal{T}''), (X''', \mathcal{T}''')$, $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ identificación, $f' : (X', \mathcal{T}') \rightarrow (X'', \mathcal{T}'')$ identificación, $g : X \rightarrow X''$ aplicación tal que $\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (f' \circ g)(x_1) = (f' \circ g)(x_2)$. Entonces,

(I) $\exists \bar{g} : X' \rightarrow X'''$ aplicación tal que $(\bar{g} \circ f) = (f' \circ g)$

(II) Si $g : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X'', \mathcal{T}'')$ continua $\Rightarrow \bar{g}$ continua.

REVISAR

Demostración.

(I) $\bar{g} : X' \rightarrow X''' : x' \mapsto \bar{g}(x'_0) = f'(g(x)), \forall x \in f^{-1}(X') \Rightarrow f(x) = x' \Rightarrow \bar{g}(f(x)) = (f' \circ \bar{g})(x), \forall x \in X \Leftrightarrow (\bar{g} \circ f) = (f' \circ g)$.

(II) $(\bar{g} \circ f) = (f' \circ g), (g \text{ continua} \Rightarrow (f' \circ g) \text{ continua})$. Entonces, (Propiedad Universal Topología Cociente) $\Rightarrow \bar{g}$ continua.

Proposición 1.34. Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : X \rightarrow X'$ aplicación suprayectiva, R_f relación de equivalencia tal que $x_1, x_2 \in X, x_1 R_f x_2 \Leftrightarrow (def.) f(x_1) = f(x_2)$. Entonces, $\exists \alpha : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ homeomorfa tal que $(\alpha \circ f) = p \Leftrightarrow f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es identificación.

Demostración. content