

Ecuaciones Diferenciales

Hugo Del Castillo Mola

6 de diciembre de 2022

Índice general

I	Estabilidad y Sistemas Autónomos	2
1.	Estabilidad de Sistemas lineales	3
1.1.	Sistemas lineales Homogéneos con coeficientes constantes	3
1.2.	Sistemas Lineales Homogéneos con Coeficientes Variables	5
1.3.	Sistemas Lineales No Homogéneos	5
1.4.	Diagramas de Fases de Sistemas Planos	5
2.	Estabilidad de Sistemas no Lineales	6
2.1.	Comportamiento Cualitativo De las Soluciones	6
2.2.	Teorema de la Variedad Estable	7
2.3.	Teorema de Hartman-Grobman	7

Parte I

Estabilidad y Sistemas Autónomos

Capítulo 1

Estabilidad de Sistemas lineales

1.1. Sistemas lineales Homogéneos con coeficientes constantes

Definición 1.1 (Sistema Autónomo). *content*

Definición 1.2 (Punto de equilibrio). *content*

Definición 1.3 (Punto de equilibrio Hiperbólico). *content*

Definición 1.4 (Punto de equilibrio Atractor). *content*

Definición 1.5 (Punto de equilibrio Fuente). *content*

Observación. *Si el origen es punto atractor o fuente, entonces es hiperbólico.*

Definición 1.6 (Sistemas Topológicamente equivalentes). *content*

Definición 1.7 (Punto de Silla). *content*

Proposición 1.1 (Caracterización de puntos de equilibrio hiperbólicos). *content*

Proposición 1.2 (Soluciones Acotadas y Soluciones Periódicas). *content*

Definición 1.8 (Estabilidad de Soluciones). *content*

Definición 1.9 (Variedad Lineal Estable Local). *Sea el sistema autónomo lineal $y'(t) = A(t)y$. Se conoce como variedad lineal estable local (E_s), variedad lineal inestable local (E_u) y variedad lineal central (E_c) a*

$$E_s = \langle \lambda_1, \dots, \lambda_m \rangle$$

$$E_u = \langle \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{m+n} \rangle$$

$$E_c = \langle \lambda_{m+n+1}, \dots, \lambda_{m+n+k} \rangle$$

donde $\lambda_i \in \rho(A)$ tal que

$$\begin{cases} \Re(\lambda_i) < 0, & 1 \leq i \leq m \\ \Re(\lambda_i) > 0, & m+1 \leq i \leq m+n \\ \Re(\lambda_i) = 0, & m+n+1 \leq i \leq m+n+k \end{cases}$$

Definición 1.10 (Variedad Estable Global). *Dado us sistema autónomo $y' = f(x) \in \mathbb{C}(\Omega)$ y x_∞ punto de equilibrio. La variedad estable global de y' es*

$$W_s(x_\infty) = \{x_0 \in \Omega : \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; 0, x_0) = x_\infty\}$$

Definición 1.11 (Variedad Inestable Global). *Dado us sistema autónomo $y' = f(x) \in \mathbb{C}(\Omega)$ y x_∞ punto de equilibrio. La variedad inestable global de y' es*

$$W_u(x_\infty) = \{x_0 \in \Omega : \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t; 0, x_0) = x_\infty\}$$

1.2. Sistemas Lineales Homogéneos con Coeficientes Variables

Observación (Sistema Considerado). *content*

Observación (Forma Integral De Las Soluciones De Un Sistema Lineal Homogéneo Con Coeficientes Variables). *content*

Proposición 1.3 (Caracterización de Soluciones 1). *content*

Proposición 1.4 (Caracterización de Soluciones 2). *content*

1.3. Sistemas Lineales No Homogéneos

Observación (Sistema Considerado). *content*

Definición 1.12 (Sistema Lineal Asociado). *content*

Proposición 1.5 (Caracterización de las Soluciones 1). *content*

Proposición 1.6 (Caracterización de las Soluciones 2). *content*

1.4. Diagramas de Fases de Sistemas Planos

Esquema EDO.

Capítulo 2

Estabilidad de Sistemas no Lineales

2.1. Comportamiento Cualitativo De las Soluciones

Definición 2.1. *Dado el problema del valor inicial*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

donde $f \in \mathcal{C}([a, b] \times \Omega; \mathbb{R}^n)$. Consideramos el sistema no lineal

$$y' = f(t, y)$$

Entonces, decimos que

(I) *$x \in \Omega$ es un punto de equilibrio de $y' = f(y)$ si $f(x) = 0$.*

(II) *Un punto de equilibrio es hiperbólico si*

$$\forall \lambda \in \rho(Df(x)), \Re(\lambda) \neq 0.$$

(III) *Un punto de equilibrio se denomina no hiperbólico si*

$$\exists \lambda \in \rho(Df(x)) : \Re(\lambda) = 0.$$

(IV) *El sistema $y' = Df(x) \cdot y$ es el sistema lineal asociado.*

Definición 2.2 (Clasificación De Puntos De Equilibrio). Sea x un punto de equilibrio hiperbólico del sistema no lineal. Considerando el sistema lineal asociado $Df(x)$, entonces este se clasifica de la misma forma que los puntos de equilibrio de un sistema lineal.

Observación. Un punto de equilibrio x foco es asintóticamente estable ($\forall \lambda \in \rho(Df(x)), \Re(\lambda) < 0$).

Observación. Un punto de equilibrio fuente o de silla es inestable.

2.2. Teorema de la Variedad Estable

Definición 2.3 (Variedad No Lineal Estable). Sea $y' = f(y)$ un sistema no lineal, entonces la variedades estables locales de y' son las del sistema lineal asociado $y' = Df(x)y$.

Teorema 2.1 (de la Variedad Estable). *content*

Ejemplo (Cálculo de Variedades). Calcular las variedades estables e inestables de un sistema no lineal.

2.3. Teorema de Hartman-Grobman

Observación. Bajo que condiciones los puntos de equilibrio de un sistema no lineal tienen el mismo comportamiento cualitativo que el sistema lineal asociado.

Teorema 2.2. Es condición suficiente que $Df(x_\infty)$ no tenga autovalores con parte real nula, es decir, que sea hiperbólico.