Ecuaciones Diferenciales

Hugo Del Castillo Mola

6 de octubre de 2022

Índice general

Capítulo 1

Teoremas de Existencia y Continuidad

1.1. Preliminares

Nota. *El objetivo principal de este capítulo es demostrar los siguientes resultados sobre las soluciones de un PVI*

(I) *Unicidad: Si $f(t,x)$ es Lipschitz continua respecto a x en D. Entonces, el PVI tiene solución única.*

(II) *Existencia: Si $f(t,x)$ es continua en D entonces existe una solución $x(t)$ del PVI en un intervalo $[t_0, t_0 + a]$.*

(III) *Estabilidad: Si $f(t,x)$ es continua respecto a t y es Lipschitz continua respecto a x, entonces la solución del PVI varia continuamente respecto a x_0.*

Definición 1.1 (Espacio Banach)**.** *Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado completo.*

Observación. *Sea $A \subset \mathbb{R}^p$. Entonces, $\mathcal{C}(A;\mathbb{R},d)$ es un espacio de Banach.*

Observación. *La convergencia de la norma del supremo equivale a convergencia uniforme en un espacio de Banach.*

Lema 1.0.1 (Lema de Gronwall)**.** *Sea $J \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in J$ y $a, \beta, u \in C(J, \mathbb{R}_+)$. Si*

$$u(t) \leq a(t) + \Big| \int_{t_0}^{t} \beta(s)u(s)ds \Big|, \forall t \in J,$$

Entonces,

$$u(t) \leq a(t) + \Big| \int_{t_0}^{t} a(s)\beta(s) e^{|\int_s^t \beta(\sigma)d\sigma|} ds \Big|, \forall t \in J.$$

Demostración. *Sea* $v(t) = \int_{t_0}^{t} \beta(s)u(s)ds$. *Entonces,*

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= \beta(t)u(t) \\ &\leq \beta(t)a(t) + \beta(t)\Big| \int_{t_0}^{t} B(s)u(s)ds \Big|, \forall t \in J. \\ &\leq a(t)\beta(t) + \operatorname{sgn}(t-t_0)\beta(t)v(t), \forall t \in J.\end{aligned}$$

Ahora, sea $\gamma = \exp\big\{ -\big| \int_{t_0}^{t} \beta(s)ds \big| \big\} = \exp\big\{ -\int_{t_0}^{t} \operatorname{sgn}(t-t_0)\beta(s)ds \big\}$, $\gamma\dot{v} \leq a\beta\gamma - \dot{\gamma}v \Rightarrow \dot{\gamma v} - a\beta\gamma \leq 0$ *donde integrando tenemos que*

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(t-t_0)v(t) &\leq \operatorname{sgn}(t-t_0)\int_{t_0}^{t} \frac{a\beta\gamma}{\gamma(t)} ds, \forall t \in J. \\ &= \Big| \int_{t_0}^{t} \frac{a(s)\beta(s)\gamma(s)}{\gamma(t)} ds \Big|, \forall t \in J.\end{aligned}$$

Sustituyendo en la hipótesis inicial, nos queda

$$\begin{aligned}u(t) &\leq a(t) + \operatorname{sgn}(t-t_0)v(t) \\ &\leq a(t)\Big| \int_{t_0}^{t} a(s)\beta(s) \exp\Big\{ \Big| \int_s^t \beta(\sigma)dgks \Big| \Big\} ds \Big|, \forall t \in J.\end{aligned}$$

Corolario 1.0.1. *Sea* $a(t) = a_0(|t-t_0|)$ *donde* $a_0 \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *es una función monótona crecient tal que*

$$u(t) \leq a(t) + \Big| \int_{t_0}^{t} \beta(s)u(s)ds \Big|, \forall t \in J.$$

Entonces,

$$u(t) \leq a(t) e^{|\int_{t_0}^{t} \beta(\sigma)ds|}, \forall t \in J.$$

Definición 1.2 (Función uniformemente Lipschitz continua)**.** *Sean X, Y espacios métricos y T un espacio topológico. Una función $f : T \times X \to Y$ se llama uniformemente Lipschitz continua respecto a $x \in X$, si $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+$ tal que*

$$|f(t,x) - f(t,x')| \leq \lambda |x - x'|, \forall x, x' \in X, \forall t \in T.$$

Notación. *Conjunto de funciones localmente Lipschitz continuas*

$$C^{0,1-}(T \times X, Y) = \{f : T \times X \to Y : f \in C(T \times X, Y),$$

$$f \text{ Lipschitz continua respecto a } x \in X\}$$

Si $f : X \to Y$, entonces

$$C^{1-}(X,Y) = \{f : X \to Y : f \text{ es Lipschitz continua }\}.$$

Conjunto de funciones continuas con dereivas parciales respecto a $x \in X$

$$C^{0,1}(T \times X, Y) = \{f \in C(T \times X, Y) : D_2 f \in C(T \times X, \mathcal{L}(E,F))\}.$$

Observación. $C^{-1}(X,Y) = C(X,Y)$ *y* $C^{0,1-}(T \times X, Y) \subset C(T \times X, Y)$.

Proposición 1.1. *Sea X, Y espacios métricos, T un e.t. compacto. Supongamos que $K \subset X$ es compacto y $f \in C^{0,1-}(T \times X, Y)$. Entonces, existe un entorno abierto W de K en X tal que $f|_{T \times W}$ es uniformemente Lipschitz continua respecto a $x \in W$.*

Definición 1.3 (Solución ecuación diferencial)**.** *Sea $U \subset \mathbb{R}^d$ abierto, $u \in C^1([0,T] \times \overline{U}, \mathbb{R}^d)$. Entonces, decimos que u es solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t,x)$ Si se verifica*

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)), \forall t \in [0,T]$$

Lema 1.0.2 (Forma Integral Solución PVI)**.** *Sea $U \subset \mathbb{R}^d$ abierto, $u \in C^1([0,T] \times \overline{U}, \mathbb{R}^d)$. Entonces u es una solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t,x) \Leftrightarrow u \in C(J_u, D)$ y*

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u(s))ds, \forall t \in [0,T]$$

donde $t_0 \in J_u$.

1.2. Teorema Picard

1.2.1. Unicidad Solución PVI

CAMBIAR NOTACIÓN

Teorema 1.1 (Unicidad Solución PVI)**.** *Sea* $J \subset \mathbb{R}; D \subset E$ *abierto donde* E *es un espacio de Banach;* $f \in C^{0,1-}(J \times D, E)$*;* $(t_0, x_0) \in J \times D$*;* $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ *y* $R = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{\mathbb{B}}(x_0, b) \subset J \times D$*. Entonces, el PVI*

$$\dot{x} = f(t, x),\ x(t_0) = x_0,$$

tiene solución única.

Revisar notación $t \in J$

Demostración. *Sean* $u(t), u'(t)$ *dos soluciones del PVI en* $[t_0, t_1]$*. Entonces,*

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds, \forall t \in J,$$

$$u'(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u'(s))ds, \forall t \in J,$$

$$\Rightarrow u(t) - u'(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) - f(s, u'(s))ds, \forall t \in J$$

$$\Rightarrow |u(t) - u'(t)| = |\int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) - f(s, u'(s))ds|, \forall t \in J$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, u(s)) - f(s, u'(s))|ds, \forall t \in J$$

$$\leq \lambda \int_{t_0}^{t} |u(t) - u'(t)|ds, \forall t \in J$$

$\Rightarrow$ *(Teo. Gronwall* $a = 0$*)* $|u(t) - u'(t)| = 0,\ \forall t \in J \Rightarrow u(t) = u'(t),\ \forall t \in J.$

1.2.2. Teorema del Punto Fijo de Banach

Definición 1.4 (Función Contractiva). *Sea X un espacio de Banach, $A \subset X$ cerrado y $f : A \to A$. Entonces, se dice que f es una contracción si $\exists \alpha \in (0,1)$ tal que*

$$||f(x) - f(y)|| \leq \alpha ||x - y||, \ \forall x, y \in A.$$

Observación. *Si f es contracción decimos que $x \in X$ es un punto fijo si $f(x) = x$. Además,*

Teorema 1.2 (del Punto Fijo de Banach). *Sea (X, d) un espacio métrico completo, $f : X \to X$ una aplicación contractiva. Entonces, $\exists! x^* \in X : f(x^*) = x^*$. Además, $\forall x_0 \in X$, $x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}$. Entonces, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$.*

Demostración. *Sea $|x_1 - x_0| = d$. Entonces,*

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq \alpha |x_n - x_{n-1}| \leq \cdots \leq \alpha^n d$$

donde $\alpha \in (0,1)$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \alpha^N < \frac{\epsilon}{d}$$

$$\Rightarrow |x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon, \forall n \geq N$$

Entonces, la sucesión (x_n) es de Cauchy y X completo $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. Además

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = f(x^*)$$

$\Rightarrow x^*$ es un punto fijo de f.

Si x_1^*, x_2^* son dos puntos fijos, entonces

$$|f(x_1^*) - f(x_2^*)| = |x_1^* - x_2^*| \geq d|x_1^* - x_2^*| \Rightarrow |x_1^* - x_2^*| = 0.$$

es contradicción

1.2.3. Teorema Existencia y Unicidad Picard

Teorema 1.3. *Sea $U \subset \mathbb{R}^d$ abierto, $u_0 \in U$, $f \in \mathcal{C}^{0,1-}([0,T] \times U, \mathbb{R}^d)$. Entoces, $\forall T_E$ existe, a lo sumo, una solución del PVI. Además, $\exists T_E : 0 < T_E \leq T$ tal que la soulución es única.*

Demostración. *Demos*

1.3. Teorema de Peano

Nota. *Demostramos que existe al menos una solución del PVI sin la condición Lipschitz.*

1.3.1. Equicontinuidad y Compacidad Relativa

CAMBIAR NOTACIÓN

Definición 1.5 (Solución Aproximada de ecuación diferencial)**.** *Sea $\epsilon > 0$, $u : J_u \to D$. Entonces, decimos que u es solución ϵ-aproximada de la ecuación diferencial*

$$\dot{x} = f(t, x)$$

Si se verifica

(I) $J_u \subset J : (\mathring{J_u}) \neq \emptyset$.

(II) $u \in C(J_u, D)$ *y u es continuamente diferenciable a trozos.*

(III) $\forall I \subset J_u : u$ *es continuamente diferenciable se tiene que*

$$||\dot{u}(t) - f(t, u(t))|| \leq \epsilon, \forall t \in I.$$

Observación. *Sea $u : J_u \to D$ una solución ϵ-aproximada de $\dot{x} = f(t, x)$. Entonces,*

$$||u(t) - u(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds|| \leq \epsilon|t - t_0|, \ \forall t \in J_u$$

donde $t_0 \in J_u$.

Definición 1.6 (Compacto Relativo)**.** *Un subconjunto de un espacio topológico es compacto relativo si su adherencia es compacto.*

Proposición 1.2 (Caracterización Compacto Relativo)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $K \subset X$*. Entonces,* K *es compacto relativo* $\Leftrightarrow K = \overline{K}$*.*

Definición 1.7 (Equicontinuidad)**.** *Sea* (X, d) *un espacio métrico,* $D \subset X$*,* F *espacio de Banach y* $\mathcal{F} \subset C(D, F)$*. entonces, decimos que* $f \in \mathcal{F}$ *es equicontinua en* $x_0 \in D$ *si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in D, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon, \forall f \in \mathcal{F}.$$

Decimos que $\mathcal{F}$ *es equicontinuo en* D *si es equicontinuo* $\forall x \in D$*.*

Teorema 1.4 (Ascoli)**.** *Sea* (K, d) *espacio métrico compacto,* F *espacio de Banach y* $\mathcal{M} \subset C(K, F)$*. Entonces,* $\mathcal{M}$ *es relativamente compacto* $\Leftrightarrow$

(I) $\mathcal{M}$ *es equicontinuo.*

(II) $\mathcal{M}(y) = \{f(y) : f \in \mathcal{M}\}$ *es relativamente compacto en* F*,* $\forall y \in K$*.*

Observación. *Para el caso de* $\mathbb{R}$*: Si* F *es finito, entonces* $\mathcal{M}$ *es precompacto* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}$ *es equicontinuo y acotado.*

Lema 1.4.1. *Sea* $M = \max |f(R)|$ *y* $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$*. Entonces,* $\forall \epsilon > 0$ *existe una solución* ϵ*-aproximada*

$$u \in C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \overline{\mathbb{B}}(x_0, b)),$$

de $\dot{x} = f(t, x)$ *con* $u(t_0) = x_0$ *y*

$$|u(t) - u(s)| \leq M|t - s|, \forall t, s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Demostración. f *uniformemente continua en* $R \Rightarrow \exists \delta > 0$ *tal que*

$$|f(t, x) - f(\bar{t}, \overline{x})| \leq \epsilon, \ \forall (t, x), (\bar{t}, \overline{x}) \in R$$

con $|t - \bar{t}|$ *y* $|x - \overline{x}| \leq \delta$*.*

Dividimos el intervalo $[t_0 + \alpha, t_0 - \alpha]$ *en subintervalos*

$$t_0 - \alpha = t_{-n} < t_{-n+1} < \cdots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_0 + \alpha,$$

tal que $\max |t_{i-1} - t_i| \leq \min(\delta, \frac{\delta}{M})$.

Desde (t_0, x_0) *construimos una recta con pendiente* $f(t_0, x_0)$ *hacia la derecha de* t_0 *y hasta que corte a* $t = t_1$. *Entonces, esta linea está en la región triangular acotada por por la rectas con pendiente* M *y* $-M$ *desde* (t_0, x_0).

De forma inductiva definimos

$$u(t) = \begin{cases} u(t_i) + (t - t_i)f(t_i, u(t_i)) & \text{si } i \geq 0 \\ u(t_{i+1}) + (t - t_{i+1})f(t_{i+1}, u(t_{i+1})) & \text{si } i \leq -1 \end{cases}$$

donde $t_i \leq t \leq t_{i+1}$.

Por tanto,

$$\dot{u}(t) = f(t_i, u(t_i)), \ \forall t \in [t_i, t_{i+1}] \text{ y } \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \cap (-\infty, t_0],$$

$$|u(t) - u(t_i)| \leq \delta, \ \forall t \in [t_i, t_{i+1}] \text{ y } \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \cap (-\infty, t_0].$$

De manera que, por continuidad uniforme tenemos que

$$|\dot{u}(t) - f(t, u(t))| = |f(t_i, u(t_i)) - f(t, u(t))| \leq \epsilon$$

entonces, u *es una solución* ϵ*-aproximada de* $\dot{x} = f(t, x)$.

1.3.2. Teorema de Existencia de Peano

CAMBIAR NOTACIÓN

Teorema 1.5 (Peano). *Sea* $f \in C([0, T] \times \overline{\mathbb{B}}(u_0, R), \mathbb{R}^d)$. *Entonces, el PVI*

$$\dot{x} = f(t, x), \ x(t_0) = x_0$$

tiene al menos una solución u *en* $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ *con* $u([t_0 + \alpha, t_0 + \alpha]) \subset \overline{\mathbb{B}}(x_0, b)$.

Demostración. *Por el teorema anterior* $\forall n \in \mathbb{N}$ *existe una solución* $\frac{1}{n}$*-aproximada en* $\overline{J}_\alpha$ *tal que* $u_n(\overline{J}_\alpha) \subset \overline{\mathbb{B}}(x_0, b)$ *y*

$$|u_n(t) - u_n(s)| \leq M|s - t|, \ \forall s, t \in \overline{J}_\alpha.$$

$\Rightarrow \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C(\overline{J}_\alpha, E)$ *es una familia equicontinua. Además,*

$$|u_n(t)| \leq |u_n(t_0)| + M|t - t_0| \leq |x_0| + b, \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \overline{J}_\alpha$$

$\Rightarrow \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *está acotada en* $C(\overline{J}_\alpha, E)$. *Por tanto,* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es precompacto.*

Entonces, por el teorema de Ascoli, $\exists\{u_{n_k}\} : u_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} u \in C(\overline{J}_\alpha, E) \Rightarrow u_{n_k} \to u$ *uniformemente.*

Sea

$$\Delta_{n_k}(t) = \begin{cases} \dot{u}_{n_k} - f((t, u_{n_k}(s))), & \textit{si } \exists \dot{u}_{n_k} \\ 0, & \textit{otrocaso} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{u}_{n_k} = f(t, u_{n_k}(t)) + \Delta_{n_k}(t)$$

$$\Rightarrow u_{n_k} = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_{n_k}(s)) + \Delta_{n_k}(s)ds$$

donde $|\Delta_{n_k}| \leq \frac{1}{n}$.

Por tanto, $u_{n_k} \to u$ *uniformemente* $\Rightarrow f(t, u_{n_k}(t)) \to f(t, u(t))$ *uniformemente, dado que* $f \in C(J \times D, E)$.

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} f(s, u_{n_k}(s))ds \xrightarrow{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds$$

$$\Rightarrow u_{n_k}(t) \xrightarrow{k\to\infty} u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds$$

que satisface la forma integral del PVI.

1.4. Teorema de Extensión

Definición 1.8 (Prolongación)**.** *Sea* $u(t)$ *solución de* $x' = f(t, x)$ *en* I_u. *Se dice que* $v(t)$ *es una prolongación de* $u(t)$ *si* $v(t)$ *es solución de* x' *en* I_v *tal que* $I_u \subset I_v$ *y* $u(t) = v(t), \forall t \in I_u \cap I_v$.

Definición 1.9 (Solución Maximal)**.** *Se dice que* $x(t)$ *es una solución maximal del PVI si no admite ninguna prolongación.*

Observación. *El intervalo de definición de una solución maximal ha de ser abierto. Si fuera* $(a, b]$ *entonces se pordría prolongar a la derecha* $(b, x(b))$.

Teorema 1.6. *Sea* $f \in C^{0,1-}(J \times D, E)$*,* $u : J_u \to D$ *y* $v : J_v \to D$ *soluciones de* $\dot{x} = f(t,x)$ *tal que* $\exists t_0 \in J_u \cap J_v : u(t_0) = v(t_0)$ *Entonces,* $u = v$ *en* $J_u \cap J_v$*.*

Ejemplo (Método de Prolongación)**.** *Sea* $(t_0, x_0) \in J \times D$*. Entonces, por el teorema de Picard,* $\exists \alpha > 0$ *tal que el PVI*

$$\dot{x} = f(t,x), \; x(t_0) = x_0$$

tiene solución única u *en* $\overline{J}_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$*. Usando de nuevo el teorema de Picard,* $\exists \beta > 0$ *tal que el PVI*

$$\dot{x} = f(t,x), \; x(t_0 + \alpha) = u(t_0 + \alpha)$$

tiene solución única v *en* $\overline{J}_{\alpha,\beta} = [t_0 + \alpha - \beta, t_0 + \alpha - \beta]$*. Por el teorema de Unicidad* $u(t) = v(t)$ *en* $\overline{J}_\alpha \cap \overline{J}_{\alpha,\beta}$ *y la función*

$$u_1 = \begin{cases} u, & \text{en } \overline{J}_\alpha \\ v, & \text{en } \overline{J}_{\alpha,\beta} \end{cases}$$

es una prolongación de la solución u*.*