Geomtería Diferencial

Hugo Del Castillo Mola

20 de noviembre de 2022

Índice general

I Curvas **3**

1. Estudio Local **4**
1.1. Curvas Parametrizadas 4
1.2. Curvas Regulares 5
1.3. Producto Vectorial 5
1.4. Fórmulas de Frenet 6
1.5. Curvas Arbitrarias 9

2. Estudio Global **12**

II Superficies **13**

3. Plano Tangente y Diferenciabilidad **14**
3.1. Definición de Superficie 14
3.2. Cambio de Parámetros 16
3.3. Funciones Diferenciables 19
3.4. Plano Tangente 20
3.5. Diferencial de una Aplicación Diferenciable 21

4. Orientabilidad **27**
4.1. Campos 27

5. Primera Forma Fundamental **31**
5.1. Primera Forma Fundamental 31
5.2. Isometrías 32
5.3. Area de una Superficie 34
5.4. Ángulo de Aplicaciones Conformes 34

6. Curvatura **36**
6.1. Resumen Orientación 36

6.2. Segunda Forma Fundamental 37
6.3. Coordenadas Locales 43
6.4. Ecuaciones de Compatibilidad 43

Parte I

Curvas

Capítulo 1

Estudio Local

1.1. Curvas Parametrizadas

Definición 1.1 (Curva)**.** *Una curva en* $\mathbb{R}^3$ *es una función diferenciarle* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Definición 1.2 (Vector tangente)**.** *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva en* $\mathbb{R}^3$ *con* $\alpha = (\alpha_1, \alpha^2, \alpha^3)$. *Entonces,* $\forall t \in I$

$$\alpha'(t) = \Big(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t)\Big).$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}$$

Observación. *El vector tangente también se llama vector velocidad*

Definición 1.3 (Reparametrización)**.** *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva,* $h : J \to I$ *una función diferenciable. Entonces, la función* $\beta : J \to \mathbb{R}^3$

$$\beta(t) = \alpha(h(t))$$

es una reparametrización de α *por* h.

Ejemplo. *Sea* $\alpha(t) = \big(t, t\sqrt{t}, 1 - t\big)$ *en* $I = (0, 4)$, $h(s) = s^2$ *en* $J = (0, 2)$. *Entonces, la curva reparametrizada es* $\beta(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(s^2) = (s, s^3, 1 - s^2)$.

Lema 1.0.1. *Si β es una reparametrización de α por h, entonces*

$$\beta'(t) = h'(t) \cdot \alpha'(h(t))$$

1.2. Curvas Regulares

Definición 1.4 (Curva Regular)**.** *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada. Entonces, si $\alpha'(t) \neq 0.\forall t \in I$ decimos que es regular.*

Definición 1.5 (Longitud de Arco)**.** *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3, t_0 \in I$. Definimos la función longitud de arco desde t_0 como $s : I \to \mathbb{R}$ donde*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(u)||du.$$

Definición 1.6 (Curva Parametriza por Longitud de Arco)**.** *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable. Entonces, si $||\alpha'(t)|| = 1, \forall t \in I$ decimos que la curva está parametrizada por longitud de arco.*

Teorema 1.1. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Entonces, $\exists \beta : J \to \mathbb{R}^3$ tal que $||\beta'(s)|| = 1, \forall s \in J$, es decir, β tiene velocidad unitaria.*

Observación. *Una reparametrización $\alpha(h)$ preserva la orientación si $h' \geq 0$ y la invierte si $h' \leq 0$.*

Observación. *Por definición, una curva regular parametrizada por arco siempre conserva la orientación.*

1.3. Producto Vectorial

Definición 1.7 (Producto Vectorial)**.** *Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$. El producto vectorial de u, v es*

$$u \times v = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

Proposición 1.1 (Propiedades Producto vectorial). *Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$. Entonces,*

(I) $u \times v = -v \times u$.

(II) $u \times v$ *es lineal respecto de u y v, es decir, para $w \in \mathbb{R}^3$ y $a, b \in \mathbb{R}$, $(au + bw) \times v = au \times v + bw \times v$.*

(III) $u \times v = 0 \Leftrightarrow u, v$ *son linealmente dependientes.*

(IV) $(u \times v) \cdot u = 0, (u \times v) \cdot v = 0$.

1.4. Fórmulas de Frenet

Definición 1.8 (Curvatura). *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a., $s \in I$. Entonces, $||\alpha''(s)|| = k(s)$ se llama curvatura de α en s.*

Observación. *$k(s)$ describe el cambio en la dirección de la curva en un instante.*

Proposición 1.2. *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a.. Entonces, $\alpha''(s) \perp \alpha'(s), \forall s \in I$.*

Demostración. $||\alpha'(s)|| = 1, \forall s \in I \Rightarrow \alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = 1 \Rightarrow 2\alpha''(s) \cdot \alpha'(s) = 0 \Rightarrow \alpha''(s) \perp \alpha'(s), \forall s \in I$.

Proposición 1.3. *La curvatura se mantiene invariante ante un cambio de orientación.*

Demostración. $\beta(-s) = \alpha(s) \Rightarrow \beta'(s) = -\alpha'(s) \Rightarrow \beta''(-s) = \alpha''(s) = k(s)$.

Definición 1.9 (Vector Tangente Unitario). *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a.. Entonces,*

$$T(s) = \alpha'(s)$$

se llama vector tangente unitario a α en s.

Observación. $k(s) = ||T'(s)||$.

Nota. *Observamos que $\forall s \in I : k(s) > 0,\ k(s) = ||\alpha''(s)|| \Rightarrow \alpha''(s) = k(s)N(s)$ donde $N(s)$ es un vector unitario en la dirección de $\alpha''(s)$. Además, $\alpha''(s) \perp \alpha'(s) \Rightarrow N(s)$ es normal a $\alpha(s)$.*

Definición 1.10 (Vector Normal)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva regular p.p.a.. Entonces,*

$$N(s) = \frac{T'(s)}{k(s)}$$

se llama vector normal a α en s.

Observación. *El vector normal N es perpendicular al vector tangente unitario T y normal a la curva α en s. Esto es, $\alpha'(s) \cdot \alpha''(s) = T(s) \cdot k(s)N(s) = 0$*

Definición 1.11 (Plano Oscilador)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Entonces, $T(s), N(s)$ determinan un plano en $\mathbb{R}^3$ y lo llamamos plano oscilador.*

Observación. *También se llama Referencia móvil de Frenet para curvas planas.*

Definición 1.12 (Vector Binormal)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a.. Entonces, $B(s) = T(s) \times N(s)$ es el vector normal al plano oscilador en s y se dice vector binormal en s.*

Observación. *$||B'(s)||$ mide la tasa de cambio del plano oscilador, es deicr, la rapidez con la que la curva se aleja del plano oscilador en s.*

Nota. *$B' = T' \times N' + T \times N' = T \times N' \Rightarrow B'$ es normal a T y B' es paralelo a N. Entonces, escribimos $B' = \tau N$ para alguna función τ.*

Definición 1.13 (Torsión)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. tal que $\alpha''(s) \neq 0, s \in I$. Entonces, decimos que*

$$\tau(s) = \frac{B'(s)}{N(s)}$$

es la torsión de α en s.

Observación. *Si cambia la orientación entonces el signo del vector binormal cambia dado que $B = T \times N$. Por tanto, $B'(s)$ y la torsión se mantienen invariantes.*

Definición 1.14 (Tiedro de Frenet). *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. tal que $k > 0$. Entonces, para cada valor $s \in I$, $\exists T(s), N(s), B(s)$ vectores unitarios mutuamente ortogonales y los llamamos el tiedro de Frenet en α. Estos vectores vienen dados de la siguiente forma*

$$T(s) = \alpha'(s) \ \text{ vector tangente },$$

$$k(s) = ||T'(s)|| \text{ curvatura },$$

$$N(s) = \frac{1}{k(s)} T'(s) \text{ vector normal },$$

$$B = T \times N \text{ vector binormal },$$

$$\tau(s) = \frac{B'(s)}{N(s)} \text{ torsión}$$

donde $T \cdot T = N \cdot N = B \cdot B = 1$ y cualquier otro producto escalar es 0.

DIBUJO

Definición 1.15 (Fórmulas de Frenet). *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva regualar p.p.a con $k > 0$ y torsión τ. Entonces,*

$$T' = kN,$$

$$N' = -kT + \tau B,$$

$$B' = -\tau N,$$

Proposición 1.4. *$\tau = 0$ si y solo si α es una curva en el plano.*

Demostración. *($\Rightarrow$) Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva plana p.p.a.. Entonces, $\exists p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^3$ tal que $(\alpha(s) - p) \cdot q = 0, \forall s \in I$. Derivando,*

$$\alpha'(s) \cdot q = \alpha''(s) \cdot q = 0, \ \forall s \in I.$$

Por tanto, q es ortogonal a T y $N \Rightarrow B = \frac{q}{||q||} \Rightarrow B' = 0 \Rightarrow \tau = 0$.

($\Leftarrow$) Sea $\tau = 0 \Rightarrow B' = 0 \Rightarrow B' \ || \ B$. Queremos ver que α es ortogonal a B en 0. Sea

$$f(s) = (\alpha(s) - \alpha(0)) \cdot B, \forall s \in I.$$

Entonces,
$$\frac{\partial f}{\partial s} = \alpha' \cdot B = T \cdot B = 0$$
donde $f(0) = 0 \Rightarrow (\alpha(s) - \alpha(0)) \cdot B = 0, \ \ s \in I$. *Por tanto,* α *permanece en el plano ortogonal a* B.

Proposición 1.5. *Sea* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *una curva regular p.p.a. con curvatura constante* $k > 0$ *y* $\tau = 0$. *Entonces* α *es parte de un circulo de radio* $\frac{1}{k}$.

Demostración. $\tau = 0 \Rightarrow \alpha$ *es una curva en plano. Sea* $\gamma = \alpha + \frac{1}{k}N$ *entonces,*
$$\gamma' = \alpha' + \frac{1}{k_\alpha}N'_\alpha = T_\alpha - \frac{1}{k_\alpha}k_\alpha T_\alpha = 0.$$
Como $T_\gamma = 0 \Rightarrow k_\gamma = 0 \Rightarrow \gamma$ *es una recta horizontal. Sea* $\gamma = c \in \mathbb{R}$
$$\gamma(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k_\alpha(s)}N(s) = c, \ \forall s \in I$$
$$\Rightarrow d(c, \alpha(s)) = ||c - \alpha(s)|| = ||\frac{1}{k}N(s)|| = \frac{1}{k}.$$
Luego, α *es una curva que en todo punto se mantiene a distancia* $\frac{1}{k}$ *de un punto fijo* c, *el centro de la circunferencia.*

1.5. Curvas Arbitrarias

Proposición 1.6. *Sea* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *una curva regular con* $k > 0$ *y* $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ *su reparametrización por arco tal que* $\beta(t) = \alpha(s(t))$ *donde* $s(t)$ *es la longitud de arco. Entonces,*
$$T' = kvN$$
$$N' = -kvT + \tau vB$$
$$B' = -\tau vN$$

Demostración. $\frac{dT(s(t))}{dt} = T'(s(t)) \cdot s'(t) = k(s(t))N(s(t))v(t) = k(s)N(s)v.$

Proposición 1.7. *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular con $k > 0$ y $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ su reparametrización por arco tal que $\beta(t) = \alpha(s(t))$ donde $s(t)$ es la longitud de arco. Entonces,*

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'(s)\frac{ds}{dt} = vT(s),$$

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \frac{dv}{dt}T + vT' = v'T(s) + kv^2N$$

son la velocidad y aceleración de α en $s(t)$.

DIBUJO

Teorema 1.2. *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Entonces,*

$$T = \frac{\alpha'}{||\alpha'||},\ k = \frac{||\alpha' \times \alpha''||}{||\alpha'||^3},$$

$$N = B \times T,\ B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{||\alpha' \times \alpha''||},$$

$$\tau = (\alpha' \times \alpha'') \cdot \frac{\alpha'''}{||\alpha' \times \alpha'''||^2}.$$

Definición 1.16 (Hélice Cilíndrica)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular tal que $T(t) \cdot u = \cos(\varphi), \forall t \in I$. Entonces, α es una hélice cilíndrica.*

Teorema 1.3. *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva regula con $k > 0$. Entonces, α es una hélice cilíndrica si y solo si $\frac{\tau}{k}$ es constante.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva regular p.p.a con $k > 0$. Entonces, si α es una hélice cilíndrica $T(t) \cdot u = \cos(\varphi),\ \forall t \in I \Rightarrow$

$$0 = (T \cdot u)' = T' \cdot u = kN \cdot u$$

donde $k > 0 \Rightarrow N \cdot u = 0$. Por tanto, $\forall t \in I$, u está en el plano *determinado por $T(t)$ y $B(t)$. Es decir,*

$$u = \cos(\varphi)T + \operatorname{sen}(\varphi)B.$$

Usando las fórmulas de Frenet

$$0 = (k\cos(\varphi) + \tau\operatorname{sen}(\varphi))N$$

$$\Rightarrow \frac{\tau}{k} = \frac{\cos(\varphi)}{sin(\varphi)}.$$

($\Leftarrow$) Si $\frac{\tau(t)}{k(t)} = \cos(\varphi), \forall t \in I$. Entonces, eligiendo $\cot(\varphi) = \frac{\tau}{k}$, si

$$U = \cos(\varphi)T + \operatorname{sen}(\varphi)B$$

tenemos que

$$U' = (k\cos(\varphi) - \tau\operatorname{sen}(\varphi))N = 0$$

determina un vector unitario u tal que $T \cdot u = \cos(\varphi) \Rightarrow \alpha$ es una hélice cilíndrica.

Teorema 1.4 (Fundamental de la Teoría Local de Curvas)**.** *Sean $k, \tau : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables con $k(s) > 0, \tau(s)$. Entonces, $\exists \alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva tal que s es la longitud de arco, $k(s)$ es la curvatura, y $\tau(s)$ es la torsión de α.*

Además, cualquier otra curva $\overline{\alpha}$ difiere de α por un movimiento rígido, es decir, $\exists \gamma : I \to \mathbb{R}$ aplicación lineal ortogonal con $\det \gamma > 0$ y $c \in \mathbb{R}^3$: $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha} \circ \gamma) + c$.

Demostración. *content*

Capítulo 2

Estudio Global

Parte II

Superficies

Capítulo 3

Plano Tangente y Diferenciabilidad

3.1. Definición de Superficie

Definición 3.1 (Superficies). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$. Entonces, decimos que S es una superficie si $\forall p \in S, \exists V \subset \mathbb{R}^3$ entorno de p en S y $\exists X : U \to V \cap S$ aplicación con $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto tal que*

(I) X es diferenciable,

(II) $X : U \to V$ es homeomorfismo,

(III) $(dX)_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva $\forall q \in U$.

donde $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y V entorno de p en S.

Observación. *En $I)$ si $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ entonces, $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ tienen derivadas parciales continuas en U.*

Observación. *En $II)$ dado que X es continua por $I)$ solo faltaría ver que X tiene inversa $X^{-1} : V \cap S \to U$ continua.*

Observación. *$(dX)_q$ inyectiva $\forall q \in U \Leftrightarrow \frac{\partial X}{\partial u}(q), \frac{\partial X}{\partial v}(q)$ l.i.*

Notación.

- *X se llama parametrización de S.*
- *u, v se llaman coordenadas locales de S.*

- *Las curvas obtenidas al fijar una de las variables, $X(u_0, v), X(u, v_0)$ se llaman curvas coordenadas.*
- *La imagén de X se llama entorno coordenado.*

Definición 3.2 (Valor Regular)**.** *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, $a \in \mathbb{R}$. Entonces, decimos que a es un valor regular de f si $\forall p \in U : f(p) = a, (df)_p \neq 0$.*

Teorema 3.1 (de la Función Implícita)**.** *Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $p = (x_0, y_0, z_0) \in U, a \in \mathbb{R}$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $f(p) = a$ y $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$, entonces $\exists U^{(x_0,y_0)} \subset \mathbb{R}^2, V^{z_0} \subset \mathbb{R}, g : U \to V$ tal que $U \times V \subset U, g(x_0, y_0) = z_0$ y*

$$\{p \in U \times V | f(p) = a\} = \big\{(x, y, g(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y \in U)\big\},$$

es decir, $f(x, y, z) = a$ se puede resolver para z cerca de p.

Proposición 3.1 (Gráfica es Superficie)**.** *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces, la gráfica de f es una superficie regular.*

Demostración. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ aplicación diferenciable, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$ su gráfica, $X : U \to S : X(u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$ parametrización con $X(U) = S$. Entonces, X es diferenciable dado que f es diferenciable, X_u, X_v son linealmente independientes y x^{-1} es continua. Por tanto, S es una superficie.*

Proposición 3.2 (Imagen Inversa de Valor Regular)**.** *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ función diferenciable, $a \in f(U) \subset \mathbb{R}$ un valor regular de f. Entonces, $S = f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset \Rightarrow S$ es superficie.*

Demostración. *Sea $p \in f^{-1}(\{a\})$. Entonces, a valor regular $\Rightarrow \exists i \in \{x, y, z\} : f_i(p) \neq 0$. Supongamos que $f_z(p) \neq 0$ y sea $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 :$*

$(x,y,z) \mapsto (x,y,f(x,y,z))$. *Entonces,*

$$(dF)_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det((dF)_p) = f_z(p) \neq 0$. *Por tanto, podemos aplicar el Teorema de la Función Inversa. Entonces,* $\exists V$ *entorno de* p *y* W *entorno de* $f(p)$ *tal que* $F : V \to W$ *es invertible y* $F^{-1} : W \to V$ *es diferenciable. Por tanto, las funciones coordenada de* F^{-1}

$$x = u, \quad y = v, \quad z = g(u,v,t), \qquad (u,v,t) \in W$$

son diferenciables. En particular, $z = g(u,v,a) = h(x,y)$ *es una función diferenciable definida en la proyección de* V *al plano* XY. *Como*

$$F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u,v,t) : t = a\}$$

tenemos que $f^{-1}(a) \cap V$ *es la gráfica de* $h \Rightarrow$ *es un entorno coordenado de* $p \Rightarrow \forall p \in f^{-1}(a)$ *se puede cubrir con un entorno coordenado* $\Rightarrow f^{-1}(a)$ *es una superficie regular. REVISAR*

Proposición 3.3. *Sea* $S \subset \mathbb{R}^3$ *superficie,* $p \in S$, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *aplicación con* $p \in X(U) \subset S$ *tal que* X *es diferenciable y* $(dX)_q$ *es inyectiva* $\forall q \in U$. *Entonces, si* X *es inyectiva,* X^{-1} *es continua.*

Demostración. *Similar a la siguiente prop*

3.2. Cambio de Parámetros

Definición 3.3 (Difeomorfismo)**.** *Un difeomorfismo es un homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable, es decir, una función biyectiva continua diferenciable con inversa continua diferenciable.*

Observación. *Un homeomorfismo es una aplicación biyectiva continua con inversa continua. Como* f *diferenciable* $\Rightarrow f$ *continua, para ver que* f *es difeomorfismo solo es necesario* f *biyectiva diferenciable con* f^{-1} *diferenciable.*

Proposición 3.4. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $X : U \to S$ parametrización tal que $p \in X(U)$. Sea $p_0 \in U : X(p_0) = p$. Entonces, $\exists V$ entorno de p_0 y $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ proyección ortogonal tal que $W = (\pi \circ X)(V) \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $\pi \circ X : V \to W$ es un difeomorfismo.*

Demostración. *Sea $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Entonces,*

$$(dX)_{p_0} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}_{(p_0)}$$

Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto \pi(x, y, z) = (x, y)$, entonces $\pi \circ X : U \to \mathbb{R}^2$ es diferenciable y

$$d(\pi \circ X)_{p_0} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}_{(p_0)}$$

donde $\det(d(\pi \circ X)_{p_0}) \neq 0 \Rightarrow$ por el teorema de la función inversa, $\exists V \subset U$ entorno de p_0 en U y V_1 entorno de $\pi \circ X(p_0)$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $\pi \circ X$ es biyectiva y diferenciable con $(\pi \circ X)^{-1}$ diferenciable $\Rightarrow$ difeomorfismo, tal que $d(\pi \circ X)^{-1}_{p_0} = d(\pi \circ X^{-1})_{p_0}$.

Observación. *Un difeomorfismo es un homeomorfismo diferenciable con inverasa diferenciable.*

Observación. *$Y = X \circ (\pi \circ X)^{-1} : W \to S$ es parametrización del abierto $\pi^{-1}(W) \cap U \cap S$ como grafo sobre alguno de los planos coordenados.*

Proposición 3.5. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superfice, $p \in S$. Entonces, $\exists V$ entorno de p en S tal que V es la gráfica de una función diferenciable definida en uno de los planos coordenados.*

Demostración. *Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ parametrización de S en p tal que*

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v), (u, v) \in U.$$

Dado que X_u, X_v son linealmente independientes $\Rightarrow \det((dX)_q) \neq 0$ donde $q = X^{-1}(p)$, suponemos que

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}_q \neq 0$$

Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto \pi(x, y, z) = (x, y)$, entonces $\pi \circ X : U \to \mathbb{R}^2$ y $\det(d(\pi \circ X)_q) \neq 0$. Entonces, podemos aplicar el teorema de la función inversa $\Rightarrow \exists V_1$ entorno de q, V_2 entorno de $(\pi \circ X)(q)$ tal que $(\pi \circ X)|_{V_1} : V_1 \to V_2$ difeomorfismo con inversa $(\pi \circ X)^{-1} : V_2 \to V_1$.

Además, como X es homemorfismo, $X(V_1) = V$ es entorno de p en S. Ahora, sea $z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$. Entonces, V es la gráfica de la función f.

Proposición 3.6 (Cambio de Parámetros)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superfice, $p \in S$, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$, $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \to S$ dos parametrizaciones de S tal que $p \in X(U) \cap Y(V) = W$. Entonces, $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \to X^{-1}(W)$ es un difeomorfismo. Se dice que h es un cambio de parámetros.*

Observación. *Si X, Y vienen dados por*

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U$$

$$Y(\xi, \omega) = (x(\xi, \omega), y(\xi, \omega), z(\xi, \omega)), \quad (\xi, \omega) \in V$$

entonces h viene dado por

$$u = u(\xi, \omega), v = v(\xi, \omega), \quad (\xi, \omega) \in Y^{-1}(W)$$

Además, h se puede invertir tal que h^{-1} viene dado por

$$\xi = \xi(u, v), \omega = \omega(u, v), \quad (u, v) \in X^{-1}(W)$$

Demostración. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $p \in S$,*

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S, \quad Y : V \subset \mathbb{R}^3 \to S$$

parametrizaciones de S tal que $p \in X(U) \cap Y(V) = W$ y

$$h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \to X^{-1}(W)$$

cambio de parámetros. Entonces, X parametrización $\Rightarrow$ X diferenciable y X_u, X_v son l.i. $\Rightarrow \det((dX)_p) \neq 0, \forall p \in U$. Entonces, por el teorema de la función inversa X es difeomorfismo. De la misma manera, Y es difeomorfismo. Por tanto, $h = X^{-1} \circ Y$ también lo es.

Observación. *X, Y son difeomorfismos $\Rightarrow$ h es difeomorfismo.*

Definición 3.4 (Caracterización Superficie)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Entonces, $\forall p \in S, \exists V \subset S : p \in V$ entorno, $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $X : U \to V$ difeomorfismo.*

Observación. *Una superfice regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es difeomorfica a $\mathbb{R}^2$*

3.3. Funciones Diferenciables

Nota. *La idea es reducir la difereciabilidad de una superficiea a diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$.*

Definición 3.5 (Función Diferenciable en $\mathbb{R}$)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $f : V \subset S \to \mathbb{R}$ función. Entonces, f es diferenciable en $p \in V$ si $\exists X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ parametrización con $p \in x(U) \subset V$ tal que $f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $q = X^{-1}(p)$.*

Observación. *f es diferenciable en V si f es diferenciable $\forall p \in V$.*

Observación. *La diferenciabilidad no depende de la elección de parametrización. Si $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \to S$ es otra parametrización con $p \in Y(V)$ y $h = X^{-1} \circ Y$ entonces $f \circ Y = f \circ X \circ h$ también es diferenciable.*

Definición 3.6 (Función Diferenciable en $\mathbb{R}^k$)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $f : S \to \mathbb{R}^k$. Si $f_j : S \to \mathbb{R}$ es diferenciable $\forall j \in \{1, \cdots, k\}$ con $f(p) = (f_1(p), \cdots, f_k(p))$, entonces f es diferenciable.*

Definición 3.7 (Función Diferenciable entre Superficies)**.** *Sea $S_1 \subset \mathbb{R}^3$, $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ superficies,*

$$\varphi : V_1 \subset S_1 \to S_2$$

una aplicación continua. Dadas

$$X_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to S_1, \quad X_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to S_2$$

con $p \in X_1(U)$ y $\varphi(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$ tal que

$$X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 : U_1 \to U_2$$

es diferenciable en $q = X_1^{-1}(p)$, entonces, φ es diferenciable en $p \in V_1$.

Proposición 3.7 (Composición de Funciones Diferenciables)**.** *Sea* $S_1, S_2, S_3 \subset \mathbb{R}^3$ *superficies,* $f : S_1 \to S_2, g : S_2 \to S_3$ *diferenciables. Entonces,* $f \circ g$ *es diferenciable.*

Demostración. *content*

3.4. Plano Tangente

Definición 3.8 (Vector Tangente)**.** *Sea* $S \subset \mathbb{R}^3$ *superficie,* $p \in S$*. Decimos que* $v \in \mathbb{R}^3$ *es un vector tangente a* S *en* p *si* $\exists \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S, \epsilon > 0$ *tal que* $\alpha(0) = p$ *y* $\alpha'(0) = v$

Notación. *El conjunto de vectores tangentes a* S *en* p *se llama Plano Tangente en* p *y se representa* T_pS*.*

Proposición 3.8 (Caracterización Plano Tangente)**.** *Sea* $S \subset \mathbb{R}^3$ *una superfice,* $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ *parametrización,* $q \in U$*. Entonces,*

$$T_{X(q)}(S) = (dX)_q(\mathbb{R}^2)$$

Demostración.

($\Rightarrow$) *Sea* $w \in T_{X(q)}(S)$*. Entonces, para* $\epsilon > 0$, $\exists \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to X(U) \subset S$ *diferenciable tal que* $\alpha(0) = X(q)$ *y* $\alpha'(0) = w$*. Entonces,* $\beta = X^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ *es diferenciable. Por tanto, para* $X \circ \beta = \alpha$*, la definición de diferencial* $\Rightarrow (dX)_q(\beta'(0)) = \alpha'(0) = w \Rightarrow w \in (dX)_q$*.*

($\Leftarrow$) *Sea* $w = (dX)_q(v), v \in \mathbb{R}^2$*, donde* $v \in \mathbb{R}^2$ *es la pendiente de* $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ *tal que* $\gamma(t) = vt + q, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon)$*. Entonces, por definición de diferencial,* $w = \alpha'(0)$ *para* $\alpha = X \circ \gamma \Rightarrow w \in T_q(S)$

Observación. *El plano tangente a* S *en* p $T_pS = (dX)_{X^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2)$ *no depende de la elección de* X *parametrización. Pero si que determina una base* $\{\frac{\partial X}{\partial u}(q), \frac{\partial X}{\partial v}(q)\}$ *que genera* $T_{X(q)}S$*.*

Ejemplo. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ parametrización de S, $T_p(S)$ plano tangente en p generado por X, $w \in T_p(S)$ vector tangente. Entonces, las coordenadas de w en la base asociada a X se determina de la siguiente manera.*

El vector tangente $w = \alpha'(0)$ donde $\alpha = X \circ \beta$ donde $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ es una curva diferenciable dada por $\beta(t) = (X^{-1} \circ \alpha)(t) = (u(t), v(t))$ con $\beta(0) = q = X^{-1}(p)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\alpha'(0) &= \frac{d}{dt}(X \circ \beta)(0) = \frac{d}{dt}X(u(t), v(t))(0) \\ &= X_u(q)u'(0) + X_v(q)v'(0) = w\end{aligned}$$

Por tanto en la base $\{X_u(q), X_v(q)\}$, w tiene coordenadas $(u'(0), v'(0))$.

Observación. *Sea $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ superficies, $\varphi : V \subset S_1 \to S_2$ aplicación diferenciable. $\forall p \in V, \exists w \in T_p(S_1)$ tal que $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to V$ curva diferenciable con $\alpha'(0) = w, \alpha(0) = p$. Entonces, $\beta = \varphi \circ \alpha$ curva con $\beta(0) = \varphi(p) \Rightarrow \beta'(0) \in T_{\varphi(p)}(S_2)$.*

Además, $\beta'(0)$ no depende de la elección de α. La apliación $(d\varphi)_p : T_p(S_1) \to T_{\varphi(p)}(S_2)$ definida por $(d\varphi)_p(w) = \beta'(0)$ es lineal.

3.5. Diferencial de una Aplicación Diferenciable

Definición 3.9 (Diferencial)**.** *Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable. Sea $w \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ curva diferenciable tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$. Entonces, la curva $\beta = F \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable y $(dF)_p(w) = \beta'(0)$ es la diferencial de F en p, donde $(dF)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es aplicación lineal.*

Observación. *Forma para tangente*

Proposición 3.9. *La aplicación $(df)_p : T_pS \to \mathbb{R}^m$ está bien definida, es decir, $(df)_p(v)$ no depende de α. Además, es una aplicación lineal.*

Demostración. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ parametrización con $p \in X(U)$. Entonces, $T_pS = (dX)_q(\mathbb{R}^2)$ con $q = X^{-1}(p) \Rightarrow (dX)_q : \mathbb{R}^2 \to T_pS$ es un isomorfismo lineal (definición).*

Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, $\alpha(-\epsilon, \epsilon) \subset X(U)$. Ahora, la curva $X^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ es tal que $(X^{-1} \circ \alpha)(0) = q$. Como $X \circ (X^{-1} \circ \alpha) = \alpha$ derivando en $t = 0$ tenemos que

$$(dX)_q\big[(X^{-1} \circ \alpha)'(0)\big] = \alpha'(0) = w,$$

es decir,

$$(X^{-1} \circ \alpha)'(0) = (dX)_q^{-1}(w).$$

Por la regla de la cadena,

$$(f \circ \alpha)'(0) = \frac{d}{dy}(f \circ X) \circ (X^{-1} \circ \alpha)$$

$$= d(f \circ X)_q((X^{-1} \circ \alpha)'(0)) = d(f \circ X)_q \circ (dX)_q^{-1}(w)$$

Por tanto,

$$(df)_p = d(f \circ X)_q \circ (dX)_q^{-1}$$

Teorema 3.2 (Regla de la Cadena)**.** *Sean $S_1, S_2, S_3 \subset \mathbb{R}^3$ superficies, $f : S_1 \to S_2, g : S_2 \to S_3$ aplicaiones diferenciables. Entonces, dado $p \in S_1$ tenemos que*

$$d(g \circ f)_p = (dg)_{f(p)} \circ (df)_p$$

(También para F:rnm -¿rnn, G:rnn -¿rnk)

Demostración. *Si $v \in T_pS_1$, elegimos*

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S_1$$

tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Entonces,

$$f \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S_2$$

tal que $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$ y $(f \circ \alpha)'(0) = (df)_p(v)$. Por tanto,

$$d(g \circ f)_p(v) = [(g \circ f) \circ \alpha]'(0)$$

$$= [g \circ (f \circ \alpha)'](0)$$

$$= (dg)_{f(p)}((df)_p(v)).$$

Teorema 3.3 (de la Función Inversa)**.** *Sea* $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *difereciable,* $p \in U : (dF)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es isomorfismo. Entonces,* $\exists V \subset U : p \in V$ *entorno y* $\exists W \subset \mathbb{R}^n : F(p) \in W$ *entorno tal que* $F : V \to W$ *tiene inversa difereciable* $F^{-1} : W \to V$*.* $F|_V$ *es difeomorfismo.*

Observación. *Un isomorfismo es una función biyectiva.*

Proposición 3.10. *Sea* $S \subset \mathbb{R}^3$ *superficie. Entonces,*

(I) $f : S \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable,* S *conexo y* $(df)_p = 0, \forall p \in S \Rightarrow f$ *es constante.*

(II) $f : S \to \mathbb{R}$ *diferenciable y* $p \in S$ *es un extremo local de* $f \Rightarrow p$ *es un punto crítico de* f*.*

Demostración.

(I) *Sea* $a \in f(S)$*. Entonces,* $A = \{p \in S : f(p) = a\} \neq \emptyset, A \subset S$ *cerrado. Veamos que* A *es abierto. Si* $p \in A$*,* $X : U \to S$ *parametrización tal que* $p \in X(U)$ *con* U *conexo, entonces* $\forall q \in U, d(f \circ X)_q = (dX)_{X(p)} \circ (dX)_q = 0$*. Entonces,* $f \circ X$ *es constante en* $U \Rightarrow f = (f \circ X) \circ X^{-1}$ *es constante en* $X(U)$*. Como* $\forall p \in A, f(p) = a \Rightarrow p \in X(U) \subset A \Rightarrow A$ *es abierto. Luego,* S *conexo* $\Rightarrow A = S$*, es decir,* f *es constante.*

(II) *Sea* $p \in S$ *extremo local de* f*. Si* $v \in T_pS$ *y* $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ *tal que* $\alpha(0) = p$ *y* $\alpha'(0) = v$*, entonces* $(f \circ \alpha)$ *tiene un extremo local en* $t = 0 \Rightarrow (df)_p(v) = (f \circ \alpha)'(0) = 0 \Rightarrow p$ *es punto crítico de* f*.*

Teorema 3.4 (de la Función Implícita para Superficies)**.** *Sea* $S \subset \mathbb{R}^3$ *superficie,* $f : S \to \mathbb{R}$ *diferenciable,* $p \in S$*,* $a \in \mathbb{R}$*. Si* $f(p) = a$ *y* $(df)_p \neq 0$ *(*p *no es punto crítico de* f*). Entoces,* $\exists V \subset S$ *entorno de* p *en* S *y* $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ *curva regular inyectiva homeomorfa a su imagen con* $\epsilon > 0$ *tal que*

$$\alpha(0) = p \quad \text{y} \quad f^{-1}(\{a\}) \cap V = \alpha(-\epsilon, \epsilon)$$

Por tanto, si $a \in f(S)$ *entonces* $f^{-1}(\{a\})$ *es una curva simple.*

Demostración. *Sea* $U \subset \mathbb{R}^2 : (0,0) \in U$, $X : U \to S$ *parametrización con* $X(0,0) = p$. *Definimos*

$$g : U \to \mathbb{R}$$

tal que $g = f \circ X$, *entonces*

$$g(0,0) = f(X(0,0)) = f(p) = a$$

y, por la regla de la cadena,

$$(df)_{(0,0)} = (df)_p \circ (dX)_{(0,0)}.$$

Dado que $(dX)_{(0,0)}$ *es inyectiva y* $(df)_p \neq 0$, *tenemos que*

$$(dg)_{(0,0)} \neq 0,$$

es decir, $(g_u, g_v)(0,0) \neq (0,0)$. *Supongamos que* $g_v(0,0) \neq 0$. *Por el toerema de la aplicación implícita,* $\exists \epsilon, \delta > 0$ *y*

$$h : (-\epsilon, \epsilon) \to (-\delta, \delta)$$

tal que $(-\epsilon, \epsilon) \times (-\delta, \delta) \subset U$ *y* $h(0) = 0$ *ACABAR*

Nota.

Definición 3.10 (Superficies Transversales)**.** *Sea* $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ *superficies,* $p \in S_1 \cap S_2$ *es un punto de intersección. Si*

$$T_p(S_1) = T_p(S_2),$$

entonces S_1 *y* S_2 *son tangentes en* p. *En el caso contrario, si*

$$T_p(S_1) \neq T_p(S_2),$$

entonces S_1 *y* S_2 *se cortan transversalmente en* p *y, de forma local, la intersección es la traza de la curva.*

Observación. S_1 *y* S_2 *son transversales si lo son* $\forall p \in S_1 \cap S_2$.

Proposición 3.11. *Sea* $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ *superficies que se cortan transversal-*

mente en p. Entonces, $\exists V \subset \mathbb{R}^3$ entorno de p, $I \subset \mathbb{R}$ abierto, $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ homeomorfa a $\alpha(I)$ tal que $\alpha(I) = V \cap S_1 \cap S_2$.

Demostración. *Sea $O \subset \mathbb{R}^3$ entorno de p y $g : O \to \mathbb{R}$ tal que 0 es un valor regular y $S_2 \cap O = g^{-1}(\{0\})$. Definimos*

$$f : S_1 \cap O \to \mathbb{R}$$

por $f = g|_{S_1 \cap O}$ diferenciable tal que $p \in f(S_1 \cap O)$. Ademaś, $f(p) = g(p) = 0$ y $(df)_p = (dg)_{p|_{T_pS_1}}$. Si p fuera punto crítico de f, tendríamos que $T_pS_1 \subset \ker(dg)_p = T_pS_2$. Pero esto es imposible ya que S_1 y S_2 se cortan transversalmente. Aplicando el teorema de la función implícita tenemos el resultado.

Teorema 3.5. *La intersección transversal de dos superficies es vacía o es un curva simple.*

Teorema 3.6 (Función Inversa)**.** *Sean $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$, $f : S_1 \to S_2$ aplicación difereciable, $p \in S_1$. Si $(df)_p : T_p(S_1) \to T_{f(p)}(S_2)$ es un isomorfismo lineal, entonces $\exists V_1$ entorno de p en S_1 y $\exists V_2$ entorno de $f(p)$ en S_2 tal que $f(V_1) = V_2$ y $f|_{V_1} : V_1 \to V_2$ es un difeomorfismo.*

Demostración. *Sea*

$$X_i : U_i \to S_i, \quad i \in \{1, 2\}$$

parametrizaciones tal que $p \in X_1(U_1), f(p) \in X_2(U_2)$ y $f(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$. Sea $q_i \in U_i, i \in \{1, 2\}$ tal que $X_1(q_1) = p$ y $X_2(q_2) = f(p)$. La aplicación

$$X_2^{-1} \circ f \circ X_1 : U_1 \to U_2$$

es diferenciable y

$$d(X_2^{-1} \circ f \circ X_1)_{q_1} = (dX_2)_{q_2}^{-1} \circ (df)_p \circ (dX_1)_{q_1}$$

es un isomorfismo lineal por ser composición de isomorfismos. Ahora, podemos aplicar el teorema de la función inversa. Entonces, $\exists W_i \subset U_i$ entornos de $q_i, i \in \{1, 2\}$ tal que

$$(X_2^{-1} \circ f \circ X_1)(W_1) = W_2$$

y tal que

$$X_2^{-1} \circ f \circ X_1 : W_1 \to W_2$$

es un difeomorfismo. Para $V_i = X_i(W_i) \subset S_i, i \in \{1, 2\}$, *tenemos que* $V_1 \subset S_1$ *es un entorno de* p *y* $V_2 \subset S_2$ *es un entorno de* $f(p)$. *Además,* $f(V_1) = V_2$ *y*

$$f|_{V_1} = X_2 \circ (X_2^{-1} \circ f \circ X_1) \circ X_1^{-1} : V_1 \to V_2$$

es un difeomorfismo, ya que es composición de difeomorfismos.

Proposición 3.12. *Sean* $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ *superficies,* $\phi : S_1 \to S_2$ *difeomorfismo,* $p \in S_1$. *Entonces,* $(d\phi)_p : T_p(S_1) \to T_{f(p)(S_2)}$ *es isomorfismo lineal y* $(d\phi)_p^{-1} = (d\phi^{-1})_p$.

Demostración. *Sea* $w \in T_{\phi(p)}S_2$ *y* $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to S_2$ *tal que* $\beta(0) = \phi(p), \beta'(0) = w$. *Entonces,* $\alpha = \phi^{-1} \circ \beta : (-\epsilon, \epsilon) \to S_1$ *diferenciable tal que* $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = w$ *y* $(d\phi)_p(\alpha(0)) = (\phi \circ \alpha)'(0) = \beta'(0) = w$.

ACABAR

Capítulo 4

Orientabilidad

4.1. Campos

Definición 4.1 (Campo). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Un espacio vectorial diferenciable en S es una aplicación diferenciable $V : S \to \mathbb{R}^3$.*

- *Si $V(p) \in T_p(S), \forall p \in S$, decimos que V es un campo tangente a S.*
- *Si $V(p) \perp T_p(S), \forall p \in S$, decimos que V es un campo normal a S.*

Además, si $|V(p)| = 1, \forall p \in S$, decimos que V es el campo unitario.

Observación. *$\forall p \in S$, hay dos vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$ perpendiculares al plano tangente $T_p(S)$.*

Nota. *Sea $X : U \to S$ una parametrización con $p \in S$. Determinamos la orientación asociada a $\{X_u, X_v\}$. Si p pertence a un entorno coordenado de otra parametrización $\overline{X}(\overline{u}, \overline{v})$, la nueva base $\{\overline{X}_{\overline{u}}, \overline{X}_{\overline{v}}\}$ se expresa en términos de la primera*

$$\overline{X}_{\overline{u}} = X_u \frac{\partial u}{\partial \overline{u}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \overline{u}},$$
$$\overline{X}_{\overline{v}} = X_u \frac{\partial u}{\partial \overline{v}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \overline{v}},$$

donde $u = (\overline{u}, \overline{v})$ y $v = (\overline{u}, \overline{v})$. Por tanto, las bases $\{X_u, X_v\}$ y $\{\overline{X}_{\overline{u}}, \overline{X}_{\overline{v}}\}$ determinan la misma orientación de $T_p(S)$ si y solo si el Jacobiano

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\overline{u}, \overline{v})}$$

del cambio de coordenadas.

Nota (Interpretación Geométrica Orientabilidad). *Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ superficie. Entonces, eligiendo $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ en $p \in S$ determinamis un vector normal unitario $\forall q \in X(U)$,*

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q)$$

de manera que $N : X(U) \to \mathbb{R}^3$ es diferenciable. Tomando otro sistema local de coordenadas $\overline{X}(\overline{u}, \overline{v})$ en p tenemos que

$$\overline{X}_{\overline{u}} \times \overline{X}_{\overline{v}} = (X_u \times X_v)\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})},$$

donde $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}$ es el jacobiano del cambio de coordenadas. Por tanto, N conservará o invertirá el signo dependiendo de si el jacobiano es positivo o negativo.

Proposición 4.1. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $X : U \to \mathbb{R}^3$ parametrización de S. Entonces, $\exists N : V = X(U) \to \mathbb{R}^3$ campo normal unitario.*

Demostración. *content*

Lema 4.0.1. *Sea S una superficie conexa y N_1, N_2 dos campos normales unitarios en S. Entonces, $N_1 = N_2$ o $N_1 = -N_2$.*

Demostración. *content*

Definición 4.2 (Supercicies Orientable). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Decimos que S es orientable si admite un campo normal unitario global $N : S \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Decimos que N es una orientación de S. Cada superficie S tiene dos orientaciones. Fijada N decimos que S está orientada.*

Observación. *el campo vectorial unitario global N se conoce como aplicación de Gauss.*

Ejemplo (Plano). *Por la Prop. 4.1. los planos son orientables. Sea*

$$P = \{p \in \mathbb{R}^3 : (p - p_0) \cdot a = 0\}$$

el plano que pasa por p_0 con vector normal unitario a. Si $p \in P$, entonces

$$T_p(P) = \{v \in \mathbb{R}^3 : v \cdot a = 0\}.$$

Por tanto, $N : P \to \mathbb{R}^3$ definida por $N(p) = a, \forall p \in P$ es un campo normal unitario en P.

Ejemplo (Esfera). *Hacemos uso de la Prop. 4.1. Sea $\mathbb{S}^2(r)$ la esfera de radio r centrada en p_0. Si $p \in \mathbb{S}^2(r)$ el plano tangente correspondiente es el complemento ortogonal del vector $p - p_0$, es decir,*

$$T_p(\mathbb{S}^2(r)) = \{v \in \mathbb{R}^3 : (p - p_0) \cdot v = 0\}.$$

Entonces, la aplicación $N : \mathbb{S}^2(r) \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$N(p) = \frac{1}{r}(p - p_0), \quad \forall p \in \mathbb{S}^2(r)$$

es el campo normal unitario definido en la esfera.

Ejemplo (Grafo). *Hacemos uso de la Prop. 4.1. Sea S una superficie que es el grafo de una función diferenciable $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde U es abierto. Sabemos que $X : U \to \mathbb{R}^3$ definida por $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ es parametrización que cubre S totalmente. Entonces, $N = N^X \circ X^{-1} : S \to \mathbb{R}^3$ con*

$$N^X = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}(-f_u, -f_v, 1),$$

campo normal unitario en S.

Ejemplo (Imagen Inversa). *Sea $O \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $f : O \to \mathbb{R}$ diferenciable, $a \in \mathbb{R}$ valor regular de f y $S = f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$ superficie. Entonces, $\forall p \in S$,*

$$T_p(S) = \ker(df)_p = \{v \in \mathbb{R}^3 : (\nabla f)_p \cdot v = 0\}.$$

Por tanto, $\nabla f|_S = (f_x, f_y, f_z)$ es un campo normal en S. Como a es valor regular, $\nabla f(p) \neq 0, \forall p \in S$. Entonces, la aplicación $N : S \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$N = \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f|_S = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}(f_x, f_y, f_z),$$

es el campo normal unitario en S.

Ejemplo (Cilindro). *Sea $O = \mathbb{R}^3$ y $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Entonces, $S = f^{-1}(\{r^2\}), r > 0$ es un cilindro de radio r con eje principal el eje z. Por tanto, $N(x, y, z) = \frac{1}{r}(x, y, 0)$ es un campo normal unitario en el cilindro.*

Proposición 4.2. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Entonces, S es orientable $\Leftrightarrow$ $\exists N : S \to \mathbb{R}^3$ en S.*

Demostración. *content*

Ejemplo (Superficie no orientable)**.** *content*

Proposición 4.3. *Sea* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = a\}$ *superficie con* $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *diferenciable y* a *valor regular de* f*. Entonces,* S *es orientable.*

Demostración. *Ejemplo imagen inversa.*

Teorema 4.1. S *es una superficie orientable* $\Leftrightarrow \exists\{X_i : U_i \to S\}_{i\in J}$ *familia de parametrizaciones que cubren* S *tal que* $X_j \circ X_i$ *tiene jacobiano positivo* $\forall j, i \in J, \forall p \in S$.

Lema 4.1.1. $X_i^{-1} \circ X_j$ *tiene jacibiano positivo* $\Leftrightarrow N^{X_j}, N^{X_i}$ *inducen la misma orientación en la intersección* $N^{X_i} \circ X_i^{-1}|_W = N^{X_j} \circ X_j^{-1}|_W$ *con* $W = X_i(U_i) \cap X_j(U_j)$.

Demostración. *content*

Capítulo 5

Primera Forma Fundamental

5.1. Primera Forma Fundamental

Proposición 5.1. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Entonces, el producto interior natural de $\mathbb{R}^3$ induce en cada plano tangente $T_p(S)$ un producto interior $\langle , \rangle_p$, cuya forma quadrática es $I_p : T_p(S) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^w \geq 0.$$

Definición 5.1. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Decimos que la primera forma fundamental de S es la restricción del producto escalar de $\mathbb{R}^3$ a cada plano tangente $T_p(S)$. Es decir, la forma quadrática I_p en $T_p(S)$ es la primera forma fundamental de S en p.*

Observación. *La primera forma fundamental nos permite tomar medidas sobre la superficie sin referirnos al espacio $\mathbb{R}^3$.*

Nota (Expresión de la Primera Forma Fundamental)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superfice, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ parametrización. Entonces, $\exists \{X_u, X_v\}$ base de X en $p \in S$. Como el vector tangete $w \in T_p(S)$ es tangete a la curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ con $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ y $p = \alpha(0) = X(u_0, v_0)$ tenemos que*

$$I_p(\alpha'(0)) = \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p$$

$$\langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle_p$$

$$\langle X_u, X_u \rangle_p (u')^2 + 2\langle X_u, X_v \rangle_p u'v' + \langle X_v, X_v \rangle_p (v')^2$$

$$E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2$$

donde $t = 0$ y

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle_p,$$
$$F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle_p,$$
$$G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle_p$$

Ejemplo. *Un sistema de coordenadas para un plano $P \subset \mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y que contiene los vectores ortonormales $w_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $w_2 = (b_1, b_2, b_3)$ viene dado por*

$$X(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

Para calcular la primera forma fundamental en un punto arbitrario de P observamos que $X_u = w_1, X_v = w_2$. Dado que w_1 y w_2 son vectores unitarios ortogonales, la funciones E, F, G son constantes y vienen dadas por

$$E = 1, \quad F = 1, \quad G = 1.$$

Ejemplo. *El cilindro sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ admite como parametrización $X : U \to \mathbb{R}^3$ definida por*

$$X(u, v) = (\cos(u), \operatorname{sen}(u), v),$$
$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in (0, 2\pi), v \in (-\infty, +\infty)\}.$$

Para calcular la primera forma fundamental, calculamos las derivadas paraciales

$$X_u = (-\operatorname{sen}(u), \cos(v), 0), \quad X_v = (0, 0, 1),$$

entonces,

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

5.2. Isometrías

Definición 5.2 (Superficies Isométricas)**.** *Un difeomorfismo $\varphi : S \to S'$ es un isometría si $\forall p \in S, \forall w_1, w_2 \in T_p(S)$ se tiene que*

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}$$

Las superficies S y S' se dice que son isométricas.

Observación. *Si $\forall p \in S, (d\varphi)_p : T_p(S) \to T_p(S')$ conserva el producto escalar, entonces φ es una isometría.*

Definición 5.3. *Sea $\varphi : V \to \overline{S}$ aplicación donde V es un entorno de p en $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Entonces, φ es una isometría local si $\exists \overline{V}$ entorno de $\varphi(p)$ en $\overline{S}$ tal que $\varphi : V \to \overline{V}$ es una isometría.*

- *Si $\forall p \in S$, existe una isometría local en $\overline{S}$ entonces, decimos que S es localmente isométrica a $\overline{S}$.*
- *Decimos que S y $\overline{S}$ son isométricas si S es localmente isométrica a $\overline{S}$ y $\overline{S}$ es localmente isométrica a S.*

Observación. *Si $\varphi : S \to \overline{S}$ es difeomorfismo y isometría local $\forall p \in S$, entonces φ es isometría global.*

Ejemplo. *Consideramos el cilindro del ejemplo anterior. Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to C$ definida por*

$$\varphi(u, v) = (\cos(u), \operatorname{sen}(u), v).$$

De esta manera φ es difeomorfismo local e isometría local ya que es φ diferenciable, biyectiva, $(d\varphi)_q$ es isomorfismo $\forall q \in V$ entonor de p en S, φ^{-1} es diferenciable y $\langle (d\varphi)_p(w), (dX)_p(w) \rangle_p = ||w||^2$.

Proposición 5.2. *Sea $f : S \to S'$ difeomorfismo local. Entonces, f es isometría local $\Leftrightarrow$ f preserva longitudes de curvas.*

Demostración. *content*

Proposición 5.3. *Sea $\phi : S \to \overline{S}$ una isometría entre superficies, $X : U \to S$ parametrización de S. Entonces, $\overline{X} = \phi \circ X$ es una parametrización de $\phi(X(U)) \subset \overline{S}$ y*

$$E = \overline{E}, \quad F = \overline{F}, \quad G = \overline{G}.$$

Demostración. *content*

Corolario 5.0.1. *Una propiedad local P de una superficie en términos de E, F, G es invariante por isometrías. Si $\phi : S \to S'$ es isometría, S satisface P si y solo si S' satisface P.*

Proposición 5.4. *Sean $X : U \to S$ y $X' : U \to S'$ parametrizaciones tal que $\forall (u,v) \in U$,*

$$E(u,v) = E'(u,v), \quad F(u,v) = F'(u,v), \quad G(u,v) = G'(u,v),$$

Entonces, $\varphi = X' \circ X^{-1} : X(U) \to S'$ es isometría local.

Demostración. *content*

5.3. Area de una Superficie

Definición 5.4. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $X : U \to S$ parametrización. Llamamos área de $R = X(Q)$ una región acotada de S a*

$$A(R) = \iint_Q ||X_u \times X_v|| du\ dv$$

$$= \iint_Q \sqrt{EG - F^2}\ du\ dv$$

Observación. *El área no depende de la parametrización que escojamos.*

Demostración. *content*

5.4. Ángulo de Aplicaciones Conformes

Definición 5.5. *Sean $\alpha : I \to S, \beta : J \to S$ curvas diferenciables en S que se cortan en $p = \alpha(0) = \beta(0)$. Decimos que se cortan con ángulo θ donde*

$$\cos(\theta) = \frac{\alpha'(0) \cdot \beta'(0)}{||\alpha'(0)|| \cdot ||\beta'(0)||}.$$

Definición 5.6. *Sea $\varphi : S \to S'$ diferenciable. Decimos que φ preserva ángulos en $p \in S$ si $\forall v, w \in T_p(S)$, el ángulo entre v y w es el mismo que el ángulo entre $(d\varphi)_p(v)$ y $(d\varphi)_p(w)$. Decimos que φ preserva ángulos si φ preserva ángulos $\forall p \in S$.*

Proposición 5.5. *Las isometrías locales preservan ángulos.*

Demostración. *content*

Proposición 5.6. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *aplicación lineal. Son equivalentes,*

(I) f *preserva ángulos*

$$\frac{f(u) \cdot f(v)}{||f(u)||||f(v)||} = \frac{u \cdot v}{||u||||v||}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2.$$

(II) $\exists \lambda > 0 : f(v) \cdot f(w) = \lambda^2 (v \cdot w), \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^2.$

(III) $\exists \lambda > 0 : ||f(v)|| = \lambda ||v||, \quad \forall v \in \mathbb{R}^2.$

(IV) *Dada base ortonormal* $\{u_1, u_2\}, \exists \lambda > 0 : ||f(u_i)|| = \lambda ||u_i||$ *y* $(f(u_1) \cdot f(u_2)) = 0.$

Demostración. *content*

Definición 5.7. *Un difeomorfismo* $\varphi : S \to \overline{S}$ *es una aplicación conforme si* $\forall p \in S, \forall v_1, v_2 \in T_p(S)$

$$(d\varphi)_p(v_1) \cdot (d\varphi)_p(v_2) = \lambda^2(p) \langle v_1, v_2 \rangle_p,$$

donde $\lambda^2 > 0$ *es una aplicación diferenciable en* S.

Capítulo 6

Curvatura

6.1. Resumen Orientación

Nota. *Dada una parametrización $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ de una superficie regular S en un punto $p \in S$, podemos elegir un vector normal unitario en cada punto de $X(U)$*

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q), \quad q \in X(U).$$

Entonces, tenemos una aplicación diferencial $N : X(U) \to \mathbb{R}^3$ que asocia a cada $q \in X(U)$un vector normal unitaro. En general, si $V \subset S$ es un abierto de S y $N : V \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferencial que asocia $\forall q \in V$ un vector normal unitario en q, entonces decimos que N es un campo normal unitaro diferenciale en V.

Observación. *No todas las superficies admiten un campo normal unitario diferenciable. Por ejemplo, la band de Mobius.*

Definición 6.1. *Decimos que S superficie es orientable si admite un campo normal unitario diferenciable en todo S. A este campo lo llamamos orientación de S.*

Observación. *Toda superficie cubierta por un solo sistema de coordenadas es trivialmente orientable. Por ejemplo, la superficies representadas por grafos de funciones diferenciables.*

Proposición 6.1. *Una orientación N en S induce una orientación en el espacio tangenete $T_p(S)$. Sea $p \in S$. Definimos $\{v, w\} \subset T_p(S)$ como base* *positiva si $(v \times w) \cdot N > 0$. Entonces, el conjunto de todas las bases positivas de $T_p(S)$ es una orientación para $T_p(S)$.*

Notación. *Una superficie S orientable tiene orientación N, donde N es un campo normal unitario diferenciable.*

6.2. Segunda Forma Fundamental

Definición 6.2 (Aplicación de Gauss)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con orientación N. La aplicación $N : S \to \mathbb{R}^3$ toma valores en la esfera unidad*

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

La aplicación $N : S \to \mathbb{S}^2$ se llama aplicación de Gauss de S.

Observación. *La aplicación de Gauss es diferenciable tal que $(dN)_p : T_p(S) \to T_{N(p)}(\mathbb{S}^2) = T_p(S)$ es una aplicación lineal.*

Nota. *Para cada curva parametrizada $\alpha(t)$ en S con $\alpha(0) = p$, la curva parametrizada $N \circ \alpha(t) = N(t) \in \mathbb{S}^2$ tiene vector tangente $N'(0) = (dN)_p(\alpha'(0)) \in T_p(S)$. Es decir, la aplicación lineal $(dN)_p : T_p(S) \to T_{N(p)}(\mathbb{S}^2)$ mide la tasa de cambio de los vectores normales a $\alpha(t)$ en S.*

Ejemplo (Plano)**.** *Sea $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz + d = 0\}$, $N = (a, b, c)/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Entonces, $(dN) = 0$.*

Ejemplo (Esfera)**.** *Sea $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Si $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es una curva parametrizada en $\mathbb{S}^2$, entonces*

$$2xx' + 2yy' + 2zz' = 0,$$

es decir, (x, y, z) es normal a la esfera. Por tanto, $\overline{N} = (x, y, z)$ y $N = (-x, -y, -z)$ son campos normales unitarios en $\mathbb{S}^2$. Fijamos la orientación N en $\mathbb{S}^2$. El vector normal restringido a la curva $\alpha(t)$ es

$$N(t) = (-x(t), -y(t), -z(t))$$

es una función vectorial en t y

$$N'(t) = (-x'(t), -y'(t), -z'(t))$$

es decir, $(dN)_p(v) = -v$.

Ejemplo (Cilindro). *Sea* $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. *Se tiene que* $\overline{N} = (x, y, 0)$ *y* $N = (-x, -y, 0)$ *son vectores unitarios normales a* (x, y, z). *Fijamos la orientación* $N = (-x, -y, -z)$. *Considerando la curva* $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ *contenida en el cilindor, es decir,* $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 1$, *tenemos que* $N(t) = (-x(t), -y(t), 0)$. *Por tanto,*

$$N'(t) = (-x'(t), -y'(t), 0)$$

de manera que $(dN)_p(v) = 0$ *donde* v *es un vector tangente al cilindro y paralelo al eje* z *o* $(dN)_p(w) = -w$ *donde* w *es un vector tangente al cilindro y paralelo al plano* XY.

Ejemplo (Paraboloide Hiperbólico). *Sea* $p = (0, 0, 0)$, $p \in H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - x^2\}$. *Consideramos la parametrización*

$$X(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$$

donde

$$X_u = (1, 0, -2u), X_v = (0, 1, 2v),$$

de manera que

$$N = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + \frac{1}{4}}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2 + \frac{1}{4}}}, \frac{1}{2\sqrt{u^2 + v^2 + \frac{1}{4}}} \right)$$

Ahora, en p *se tiene* $X_u = (1, 0, 0)$ *y* $X_v = (0, 1, 0)$. *Por tanto, el vector tangente a* $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ *en* p *con* $\alpha(0) = p$ *es* $(u'(t), v'(t), 0)$. *Restringiendo* $N(u, v)$ *a esta curva tenemos que*

$$N'(0) = (2u'(0), -2v'(0), 0).$$

Por tanto, $(dN)_p(u'(0), v'(0), 0) = (2u'(0), -2u'(0), 0)$.

Proposición 6.2. *La diferencial* $(dN)_p : T_p(S) \to T_p(S)$ *de la aplicación de Gauss es una aplicación lineal auto-adjunta.*

Demostración. *content*

Definición 6.3 (Segunda Forma Fundamental). *La forma bilineal* $\sigma : T_p(S) \times T_p(S) \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\sigma_p(v, w) = -\langle (dN)_p(v), w \rangle, \quad v, w \in T_p(S)$$

se llama segunfa forma fundamental de S en p.

Definición 6.4 (Curvatura Normal)**.** *Sea C un curva regular en S que pasa por $p \in S$, k la curvatura de C en p, y $\cos(\theta) = n \cdot N$ donde n es el vector normal a C y N es el vector normal a S en p. El número $k_n = k\cos(\theta)$ se llama curvatura normal de $C \subset S$ en p.*

Observación. *k_n es la longitud de la proyección del vector kn sobre la normal a la superficie en p con signo dado por la orientación N de S en p.*

Observación. *La curvatura normal de C no depende de la orientación de C pero cambia de signo si esta cambia.*

Nota (Interpretación Segunda Forma Fundamental)**.** *Sea $C \subset S$ una curva parametrizada por $\alpha(s)$, donde s es la longitud de arco de C y $\alpha(0) = p$. Si denotamos por $N(s)$ la restricción de N a la curva $\alpha(s)$ tenemos que $N(s) \cdot \alpha'(s) = 0$. Por tanto,*

$$N(s) \cdot \alpha''(s) = -(N'(s) \cdot \alpha'(s))$$

de manera que

$$\begin{aligned}\sigma_p(\alpha'(0)) &= -((dN)_p(\alpha'(0)) \cdot \alpha'(0)) \\ &= -(N'(0) \cdot \alpha'(0)) \\ &= N(0) \cdot \alpha''(0) \\ &= N(0) \cdot (k(0) \cdot n(0) = k(0) \cdot (N(0) \cdot n(0))\end{aligned}$$

donde $N \cdot n = \cos(\theta)$ Por tanto,

$$\sigma_p(\alpha'(0)) = k \cdot \cos(\theta) = k_n(p).$$

Observación. *$\forall v \in T_p(S)$ unitario, $\sigma_p(v, v)$ es la curvatura normal de la curva C que pasa por p y es tangente a v.*

Proposición 6.3. *Todas las curvas en S que tienen la misma tangente en p tienen la misma curvatura normal.*

Demostración. *Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $p \in M$, l recta perpendicular a M_p, $X \in M_p$ vector unitario. Consideramos el plano P que pasa por p formado por l y X, entonces la intersección $P \cap M$ forma una curva c_X con $c_X(0) = p$. Suponemos que c_X es parametrizada por arco tal que $c'_X(0) = X$. Elegimos $v(p)$ vector unitario perpendicular a M_p tal que $v(p) \cdot X > 0$. Entonces, c_X tiene curvatura k_X en 0. Sea P_θ cualquier otro plano que contiene X y forma un ángulo θ con P. Entonces, la intersección $P_\theta \cap M$ forma otra* *curva c_θ con $c_\theta(0) = p$ y $c'_\theta = X$ y curvatura k_θ en 0.*

Ahora, $c''_X(0) = k_X v_p$, entonces

$$\sigma_p(X) = c''_X(0) \cdot v(p) = k_X,$$

y como $c'_X(0) = c'_\theta(0) = X$, entonces

$$\sigma_p(X) = c''_\theta(0) \cdot v(p) = k_X.$$

Para v_θ vector unitario perpendicular a X en P' se tiene que

$$v' \cdot v(p) = \cos(\theta).$$

Por tanto,

$$k_X = c''_\theta \cdot v(p) = k_\theta v_\theta \cdot v(p) = k_\theta \cdot \cos(\theta).$$

Definición 6.5 (Sección Normal). *Sea $v \in T_p(S)$. La intersección del plano formado por $N(p)$ y v con S se llama sección normal de S en p.*

Observación. *En un entorno de p, la sección normal a S en p es una curva plana regular en S cuyo vector normal n en p es $\pm N(p)$ o 0. Es decir, el valor absoluto de la curvatura normal en p de $\alpha(s)$ es la curvatura de la sección normal a S en p a lo largo de $\alpha'(0)$.*

Ejemplo (Superficie de Revolución). *Consideramos la superficie de revolución obtenida rotando la curva $z = y^4$ alrededor del eje z. Veamos que $(dN)_p = 0$ en $p = (0,0,0)$. En p, la curvatura de $z = y^4$ es cero. Además, como el plano XY es un plano tangente a la superficie, el vector normal $N(p)$ es paralelo al eje z. Por tanto, toda sección normal en p se obtiene mediante una rotación de $z = y^4$, entonces la curvatura es cero. De esta manera, deducimos que todas las curvaturas normales en p son cero, entonces $(dN)_p = 0$.*

Ejemplo (Plano). *Si consideramos un plano P, todas sus secciones normales son rectas. Por tanto, todas las curvaturas normales son $k_n = 0$ y la segunda forma fundamental $\sigma_p(w, v) = 0$. De esta forma concluimos que $(dN) \equiv 0$.*

Ejemplo (Esfera). *En la esfera $\mathbb{S}^2$ con N orientación hacia afuera, la secciones normales en un punto $p \in \mathbb{S}^2$ son círculos de radio 1. Por tanto, todas las curvaturas normales son 1 y la segunda forma fundamental $\sigma_p(v, v) = 1, \forall p \in \mathbb{S}^2, \forall v \in T_p(S) : |v| = 1$.*

Ejemplo (Cilindro). *En un cilindro, la secciones normales en un punto p varian desde un círculo perpendicular al eje principal del cilindro, a una recta paralela* *al eje principal y una familia de elipses. Por tanto, la curvatura normal varia de* 0 *a* 1.

Observación. *Visualizando como son las secciones normales correspondientes a un punto es posible dar una estimación de las curvaturas normales.*

Nota. *Considerando* $(dN)_p$. *Entonces,* $\exists\{e_1, e_2\}$ *bas ortonormal de* $T_p(S)$ *tal que* $(dN)_p(e_1) = -k_1e_1, (dN)_p(e_2) = -k_2e_2$. *Además,* k_1, k_2 *con* $k_1 \geq k_2$ *son el máximo y el mínimo de la segunda forma fundamental* σ_p *restringida al circulo unitario de* $T_p(S)$, *es decir, son valores extremos de la curvatura normal.*

Definición 6.6. *La curvatura máxima normal* k_1 *y la curvatura mínima normal* k_2 *se llaman curvaturas principales en* p *y la direcciones* e_1 *y* e_2 *son las direcciones principales en* p.

Ejemplo (Plano)**.** *Si consideramos un plano, todas las direcciones de todos los puntos son direcciones principales.*

Ejemplo (Esfera)**.** *Si consideramos una esfera, la segunda forma fundamental restringida a vectores unitarios es constante y por tanto, todas las direcciones son extremos para la curvatura normal.*

Ejemplo (Cilindro)**.** *Si consideramos un cilindro, los vectores* $v, w \in T_p(S)$ *tal que* v *es paralelo al eje* z *y* w *es paralelo al plano* XY *dan las direcciones principales en* p, *correspondientes a las curvaturas principales* 0 *y* 1, *respectivamente.*

Definición 6.7 (Curvatura de recta/Linea de Curvatura)**.** *Sea* C *un curva regular conexa en* S *tal que* $\forall p \in C$ *la recta tangente de* C *en* p *es la dirección principal en* p, *entonces decimos que* C *es una recta de curvatura en* S.

Proposición 6.4. *Sea* C *una curva regular conexa en* S *tal que* C *es una recta de curvatura* $\Leftrightarrow$ $\forall\alpha(t)$ *parametrización de* C *con* $N(t) = N \circ \alpha(t)$ *se tiene*

$$N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t),$$

donde $\lambda(t)$ *es una función diferenciable en* t. *En este caso,* $-\lambda(t)$ *es la curvatura principal a lo largo de* $\alpha'(t)$.

Nota. *Conociendo las curvaturas principales en* p *podemos calcular la curvatura normal a lo largo de una dirección* $v \in T_p(S)$. *Si* $|v| = 1$, *entonces* $\{e_1, e_2\}$ *es una base ortonormal de* $T_p(S)$ *y*

$$v = e_1 \cos(\theta) + e_2 \operatorname{sen}(\theta),$$

donde θ es el ángulo entre e_1 y v en la orientación de $T_p(S)$. Entonces, la curvatura normal a lo largo de v viene dada por

$$k_n = \sigma_p(v) = -\langle (dN)_p(v), v\rangle$$

$$= -(dN)_p(e_1\cos(\theta) + e_2\operatorname{sen}(\theta)) \cdot (e_1\cos(\theta) + e_2\operatorname{sen}(\theta))$$
$$= (e_1k_1\cos(\theta) + e_2k_2\operatorname{sen}(\theta)) \cdot (e_1\cos(\theta) + e_2\operatorname{sen}(\theta))$$
$$= k_1\cos^2(\theta) + k_2\operatorname{sen}^2(\theta).$$

Esta ultima expresión se conoce como la fórmula de Euler que es la segunda forma fundamental expresada en la base $\{e_1, e_2\}$.

Observación. *La aplicación $(dN)_p : T_p(S) \to T_p(S)$ es lineal, de dimensión 2 y tiene base $\{e_1, e_2\}$. Por tanto,*

$$\det(dN_p) = \begin{vmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{vmatrix} = (-k_1)(-k_2) = k_1 \cdot k_2$$

y la traza es

$$\operatorname{tr}(dN_p) = -(k_1 + k_2)$$

si cambiamos la orientación, el determinante no cambia pero si lo hace la traza.

Definición 6.8. *Sea $p \in S$ y $dN_p : T_p(S) \to T_p(S)$ la aplicación diferencial de la aplicación de Gauss. El determinante de dN_p es la curvatura K de S en p. La mitad negativa de la traza de dN_p se llama la curvatura media H de S en p.*

Observación. *Considerando la aplicación dN_p en la base $\{e_1, e_2\}$ escribimos*

$$K = k_1k_2, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Definición 6.9. *Un punto $p \in S$ superficie se llama*

(I) *Elíptico si $K(p) > 0$,*

(II) *Hiperbólico si $K(p) < 0$,*

(III) *Parabólico si $K(p) = 0$ con $dN_p \neq 0$,*

(IV) *Plano si $K(p) = 0$.*

Observación. *Si $p \in S$ es un punto elíptico, entonces la curvatura es positiva y ambas curvaturas principales tienen el mismo signo. Por tanto, toda curva que pase por p tiene sus vectores normales apuntando hacia el mismo lado del plano tangente.*

Observación. *Si $p \in S$ es un punto hiperbólico, entonces la curvatura es negativa y las curvaturas principales tienen signo contrario. Por tanto, hay curvas en p cuyos vectores normales apuntan hacia ambos lados del plano tangente.*

Observación. *Si $p \in S$ es punto parabólico, entonces la curvatura es cero pero alguna de las curvaturas principales es distinta de cero ($K(p) = 0 : k_1 \neq 0$ ó $k_2 \neq 0$).*

Observación. *Si $p \in S$ es un punto plano, entonces las curvaturas principales son cero.*

Definición 6.10 (Punto Umbílico)**.** *Si $p \in S$, $k_1 = k_2$, entonces p se llama punto umbílico.*

Observación. *Los puntos planos, es decir, $p \in S$ tal que $k_1 = k_2 = 0$ son puntos umbílicos.*

6.3. Coordenadas Locales

6.4. Ecuaciones de Compatibilidad