Ecuaciones Diferenciales

Hugo Del Castillo Mola

23 de septiembre de 2022

Índice general

Capítulo 1

Teoremas de Existencia y Continuidad

1.1. Preliminares

Nota. *El objetivo principal de este capítulo es demostrar los siguientes resultados sobre las soluciones de un PVI*

(I) *Unicidad: Si $f(t,x)$ es Lipschitz continua respecto a x en D. Entonces, el PVI tiene solución única.*

(II) *Existencia: Si $f(t,x)$ es continua en D entonces existe una solución $x(t)$ del PVI en un intervalo $[t_0, t_0 + a]$.*

(III) *Estabilidad: Si $f(t,x)$ es continua respecto a t y es Lipschitz continua respecto a x, entonces la solución del PVI varia continuamente respecto a x_0.*

Lema 1.0.1 (Lema de Gronwall)**.** *Sea $J \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in J$ y $a, \beta, u \in C(J, \mathbb{R}_+)$. Si*

$$u(t) \leq a(t) + \left| \int_{t_0}^{t} \beta(s)u(s)ds \right|, \forall t \in J,$$

Entonces,

$$u(t) \leq a(t) + \left| \int_{t_0}^{t} a(s)\beta(s)e^{\left|\int_s^t \beta(\sigma)d\sigma\right|}ds \right|, \forall t \in J.$$

Demostración. *Sea* $v(t) = \int_{t_0}^{t} \beta(s)u(s)ds$. *Entonces,*

$$\dot{v}(t) = \beta(t)u(t)$$

$$\leq \beta(t)a(t) + \beta(t)\Big|\int_{t_0}^{t} B(s)u(s)ds\Big|, \forall t \in J.$$

$$\leq a(t)\beta(t) + \operatorname{sgn}(t-t_0)\beta(t)v(t), \forall t \in J.$$

Ahora, sea $\gamma = \exp\big\{-\big|\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\big|\big\} = \exp\big\{-\int_{t_0}^{t} \operatorname{sgn}(t-t_0)\beta(s)ds\big\}$, $\gamma\dot{v} \leq a\beta\gamma - \dot{\gamma}v \Rightarrow \dot{\gamma v} - a\beta\gamma \leq 0$ *donde integrando tenemos que*

$$\operatorname{sgn}(t-t_0)v(t) \leq \operatorname{sgn}(t-t_0)\int_{t_0}^{t} \frac{a\beta\gamma}{\gamma(t)}ds, \forall t \in J.$$

$$= \Big|\int_{t_0}^{t} \frac{a(s)\beta(s)\gamma(s)}{\gamma(t)}ds\Big|, \forall t \in J.$$

Sustituyendo en la hipótesis inicial, nos queda

$$u(t) \leq a(t) + \operatorname{sgn}(t-t_0)v(t)$$

$$\leq a(t)\Big|\int_{t_0}^{t} a(s)\beta(s)\exp\Big\{\Big|\int_{s}^{t} \beta(\sigma)dgks\Big|\Big\}ds\Big|, \forall t \in J.$$

Corolario 1.0.1. *Sea* $a(t) = a_0(|t-t_0|)$ *donde* $a_0 \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *es una función monótona crecient tal que*

$$u(t) \leq a(t) + \Big|\int_{t_0}^{t} \beta(s)u(s)ds\Big|, \forall t \in J.$$

Entonces,

$$u(t) \leq a(t)e^{|\int_{t_0}^{t} \beta(\sigma)ds|}, \forall t \in J.$$

Definición 1.1 (Función uniformemente Lipschitz continua)**.** *Sean* X, Y *espacios métricos y* T *un espacio topológico. Una función* $f : T \times X \to Y$ *se llama uniformemente Lipschitz continua respecto a* $x \in X$, *si* $\exists\lambda \in \mathbb{R}_+$ *tal que*

$$|f(t,x) - f(t,x')| \leq \lambda|x - x'|, \forall x, x' \in X, \forall t \in T.$$

Notación. *Conjunto de funciones localmente Lipschitz continuas*

$$C^{0,1-}(T \times X, Y) = \{f : T \times X \to Y | f \in C(T \times X, Y),$$

$$f \text{ Lipschitz continua respecto a } x \in X\}$$

Si $f : X \to Y$, *entonces*

$$C^{1-}(X, Y) = \{f : X \to Y | f \text{ es Lipschitz continua }\}.$$

Conjunto de funciones continuas con dereivas parciales respecto a $x \in X$

$$C^{0,1}(T \times X, Y) = \{f \in C(T \times X, Y) : D_2 f \in C(T \times X, \mathcal{L}(E, F))\}.$$

Observación. $C^{-1}(X, Y) = C(X, Y)$ *y* $C^{0,1-}(T \times X, Y) \subset C(T \times X, Y)$.

Proposición 1.1. *Sea* X, Y *espacios métricos,* T *un e.t. compacto. Supongamos que* $K \subset X$ *es compacto y* $f \in C^{0,1-}(T \times X, Y)$*. Entonces, existe un entorno abierto* W *de* K *en* X *tal que* $f|_{T \times W}$ *es uniformemente Lipschitz continua respecto a* $x \in W$.

Notación. (I) $J \subset \mathbb{R}$ *es un intervalo abierto.*

(II) E *es un espacio de Banach sobre* $\mathbb{K}$.

(III) $D \subset E$ *es un abierto.*

(IV) $f \in C(J \times D, E)$.

Definición 1.2 (Solución ecuación diferencial)**.** *Sea* $u : J_u \to D$*. Entonces, decimos que* u *es solución de la ecuación diferencial* $\dot{x} = f(t, x)$ *Si se verifica*

(I) $J_u \subset J : (\mathring{J_u}) \neq \emptyset$.

(II) $u \in C^1(J_u, D)$,

(III) $\dot{u}(t) = f(t, u(t)), \forall t \in J_u$.

Lema 1.0.2 (Forma Integral Solución PVI). *Sea J_u un subintervalo perfecto de J, $u : J_u \to D$. Entonces u es una solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t,x) \Leftrightarrow u \in C(J_u, D)$ y*

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds, \forall t \in J_u$$

donde $t_0 \in J_u$.

AÑADIR ESPACIO BANACH, EQUICONTINUA, ETC?

1.2. Unicidad

Teorema 1.1 (de Unicidad). *Sea $J \subset \mathbb{R}; D \subset E$ abierto donde E es un espacio de Banach; $f \in C^{0,1-}(J \times D, E)$; $(t_0, x_0) \in J \times D$; $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ y $R = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{\mathbb{B}}(x_0, b) \subset J \times D$. Entonces, el PVI*

$$\dot{x} = f(t,x),\ x(t_0) = x_0,$$

tiene solución única.

Revisar notación x_0

Demostración. *Sean $u(t), u'(t)$ dos soluciones del PVI en $[t_0, t_1]$. Entonces,*

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds, \forall t \in [t_0, t_1],$$

$$u'(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, u'(s))ds, \forall t \in [t_0, t_1]$$

$$\Rightarrow u(t) - u'(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) - f(s, u'(s))ds, \forall t \in [t_0, t_1]$$

$$\Rightarrow |u(t) - u'(t)| = |\int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) - f(s, u'(s))ds|, \forall t \in [t_0, t_1]$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, u(s)) - f(s, u'(s))|ds, \forall t \in [t_0, t_1]$$

$$\leq \lambda \int_{t_0}^{t} |u(t) - u'(t)| ds, \forall t \in [t_0, t_1]$$

$\Rightarrow$ *(Teo. Gronwall $a = 0$)* $|u(t) - u'(t)| = 0, \ \forall t \in [t_0, t_1] \Rightarrow u(t) = u'(t), \ \forall t \in [t_0, t_1]$.

1.3. Existencia

Teorema 1.2 (Picard)**.** *Sean $J \subset \mathbb{R}$ abierto, E espacio de Banach, $D \subset E$. Sea $f \in C^{0,1-}(J \times D, E)$, $(t_0, x_0) \in J \times D$ y $a, b, \lambda, M \in \mathbb{R}$ tal que $R = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{\mathbb{B}}(x_0, b) \subset J \times D$ y $|f(t, x)| \leq M, \forall (t, x) \in R$, $\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ y $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Entonces el PVI*

$$\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0,$$

tiene solución única $u : I \to \mathbb{B}(x_0, b)$

Nota (Esquema Demostración)**.** *Usando la iteración de picard*

$$u_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_{n-1}(s)) ds, \ foralln \in \mathbb{N}, \ t \in I.$$

(I) $\{u_n\}_{j \in J}$ está bien definida, u_n tiene derivadas continuas $\forall n \in N$, $|u_n - x_0| \leq b$ y $f(t, u_n(t))$ está bien definida.

(II) $\{u_n\}_{j \in J}$ satisface $|u_n(t) - u_{n-1}(t)| \leq \frac{M}{\lambda} \frac{(h\lambda)^n}{n!}, t \in I$.

(III) $\{u_n\}_{j \in J}$ converge uniformemente en I.

(IV) u satisface PVI en I.

Demostración. *(I) Pocedemos por inducción.*

Si $m = 1$ es trivial comprobar que existe

$$u_1(x) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0) ds, \ t \in I,$$

y tiene derivada continua en I tal que $|u_1(t) - x_0| < b, \ t \in I \Rightarrow (t, x_0) \in R_1 = I \times \overline{\mathbb{B}}(x_0, b)$; y $f(t, x_0)$ está definida y es continua en I. Además, $|f(t, x_0)| \leq M, \ t \in I$.

Suponemos que se cumple para $m = n-1$, es decir, existe $u_{n-1}(x)$ de manera que

$$u_{n-1}(x) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_{n-2}(s))ds,\ t \in I,$$

y tiene derivada continua en I tal que $|u_{n-1}(t) - x_0| < b,\ t \in I \Rightarrow (t, x_0) \in R_1 = I \times \overline{\mathbb{B}}(x_0, b)$; y $f(t, u_{n-1})$ está definida y es continua en I. Además, $|f(t, u_{n-1})| \leq M,\ t \in I$.

Ahora, vemos que se cumple para $m = n$. Sea

$$u_n(x) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_{n-1}(s))ds,\ t \in I,$$

Entonces, u_n existe y tiene derivada continua en I. Luego,

$$|u_n(t) - x_0| = \Big| \int_{t_0}^{t} f(s, u_{n-1}(s))ds \Big|, \forall t \in I,$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, u_{n-1}(s))|ds$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} M ds \leq M(t - t_0) \leq Mh \leq b$$

$\Rightarrow (t, u_n(x)) \in R_1$ *y $f(t, u_n(x))$ está bien definida y es continua.*

(II) *Procedemos por inducción.*

Es trivial comprobar que se cumple para $m = 1$. Suponemos que se cumple para $m = n-1$

$$|u_{n-1}(x) - u_{n-2}(x)| \leq \frac{M\lambda^{n-1}}{(n-1)!}(t - t_0)^{n-1},\ t \in I,$$

Entonces,

$$|u_n(x) - u_{n-1}(x)| = \Big| \int_{t_0}^{t} f(s, u_{n-1}(s)) - f(s, u_{n-2}(s))ds \Big|,\ t \in I,$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \lambda \int_{t_0}^{t} |u_{n-1}(s) - u_{n-2}| ds \\
&\leq \lambda \int_{t_0}^{t} \frac{M\lambda^{n-2}}{(n-1)!}(s-t_0)^{n-2} ds \\
&\leq \frac{M\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(s-t_0)^n}{n}\Bigg|_{t_0}^{t} \\
&= \frac{M\lambda^{n-1}}{(n)!}(t-t_0)^n \\
&= \frac{M}{\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\alpha^n \leq \frac{M}{\alpha}\frac{(\lambda\alpha)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

(III)

(IV)