

Geomtería Diferencial

Hugo Del Castillo Mola

28 de septiembre de 2022

Índice general

1. Curvas	2
1.1. Curvas Parametrizadas	2
1.2. Curvas Regulares	3
1.3. Producto Vectorial	4
1.4. Fórmulas de Frenet	5
1.5. Curvas Arbitrarias	8

Capítulo 1

Curvas

1.1. Curvas Parametrizadas

Definición 1.1 (Curva). Una curva en \mathbb{R}^3 es una función diferenciable $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Definición 1.2 (Vector tangente). Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva en \mathbb{R}^3 con $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Entonces, $\forall t \in I$

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t) \right).$$

Observación. $\alpha'(t) = 1, \forall t \in I$.

Observación. El vector tangente también se llama vector velocidad

Observación (Interpretación geométrica). A partir de la definición de derivada tenemos que

$$\alpha'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}$$

Esto es el vector de $\alpha(t)$ a $\alpha(t+h)$. A medida que $h \rightarrow 0$, $\alpha(t+h) \rightarrow \alpha(t)$ obtenemos un vector tangente al punto $\alpha(t)$

Ejemplo. Sea α una línea recta $\alpha(t) = p + tq$. Entonces todos su vector tangente o vector velocidad es constante.

Ejemplo. Para una hélice $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$, la velocidad es $\alpha'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), b)$ aumenta de manera constante en la dirección \vec{k} y es perpendicular en el plano \vec{i}, \vec{j} .

Ejemplo. La curva $\alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, |t|), t \in \mathbb{R}$ no es diferenciable.

Definición 1.3 (Reparametrización). Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva, $h : J \rightarrow I$ una función diferenciable. Entonces, la función $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\beta(t) = \alpha(h(t))$$

es una reparametrización de α por h .

Ejemplo. Sea $\alpha(t) = (t, t\sqrt{t}, 1-t)$ en $I = (0, 4)$, $h(s) = s^2$ en $J = (0, 2)$. Entonces, la curva reparametrizada es $\beta(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(s^2) = (s, s^3, 1-s^2)$.

Lema 1.0.1. Si β es una reparametrización de α por h , entonces

$$\beta'(t) = h'(t) \cdot \alpha'(h(t))$$

1.2. Curvas Regulares

Definición 1.4 (Curva Regular). Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular. Entonces, si $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$ decimos que es regular.

Definición 1.5 (Longitud de Arco). Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3, t_0 \in I$. Definimos la función longitud de arco desde t_0 como $S : I \rightarrow \mathbb{R}$ donde

$$S(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du.$$

Teorema 1.1. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular. Entonces, $\exists \beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\|\beta(s)\| = 1, \forall s \in J$, es decir, β tiene velocidad unitaria.

Definición 1.6. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable. Entonces, si $\|\alpha'(t)\| = 1, \forall t \in I$ decimos que la curva está parametrizada por longitud de arco.

Observación. Una reparametrización $\alpha(h)$ preserva la orientación si $h' \geq 0$ y la invierte si $h' \leq 0$.

Observación. Por definición, una curva regular parametrizada por arco siempre conserva la orientación.

Ejemplo. Sea $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$.

$$\alpha'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), b)$$

Se tiene que la velocidad de α es constante dado que

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\|^2 &= ((\alpha'(t) \cdot \alpha'(t))^{\frac{1}{2}})^2 = \alpha'(t) \cdot \alpha'(t) = \\ &= (-a \sin(t), a \cos(t), b) \cdot (-a \sin(t), a \cos(t), b) = \\ &= a^2 \sin(t)^2 + a^2 \cos(t)^2 + b^2 = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

que es constante. Sea $c = \|\alpha'\| = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$. Entonces, la longitud de arco de α es

$$s(t) = \int_0^t c \, du = ct.$$

Cuya inversa es $t(s) = \frac{s}{c}$. Ahora, si componemos α con t obtenemos un reparametrización de α , con longitud de arco unitaria

$$\beta(s) = \alpha\left(\frac{s}{c}\right) = \left(a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{bs}{c}\right).$$

1.3. Producto Vectorial

Definición 1.7 (Producto Vectorial). Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$. El producto vectorial de u, v es

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

Proposición 1.1 (Propiedades Producto vectorial). Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$. Entonces,

- (I) $u \wedge v = -v \wedge u$.
- (II) $u \wedge v$ es lineal respecto de u y v , es decir, para $w \in \mathbb{R}^3$ y $a, b \in \mathbb{R}$, $(au + bw) \wedge v = au \wedge v + bw \wedge v$.
- (III) $u \wedge v = 0 \Leftrightarrow u, v$ son linealmente dependientes.
- (IV) $(u \wedge v) \cdot u = 0, (u \wedge v) \cdot v = 0$.

1.4. Fórmulas de Frenet

Definición 1.8 (Curvatura). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a., $s \in I$. Entonces, $\|\alpha''(s)\| = k(s)$ se llama curvatura de α en s .

Observación. $k(s)$ describe el cambio en la dirección de la curva en un instante.

Ejemplo. Sea $u, v \in \mathbb{R}(3)$, $\alpha(s) = us + v$. Entonces, $k(s) = 0, \forall s \in I$. Recíprocamente, $k = \|\alpha''(s)\| = 0$. Entonces, $\int (\int k ds) ds \Rightarrow \alpha(s) = us + v$.

Proposición 1.2. Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a.. Entonces, $\alpha''(s) \perp \alpha'(s), \forall s \in I$.

Demostración. $\|\alpha'(s)\| = 1, \forall s \in I \Rightarrow \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1 \Rightarrow 2\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0 \Rightarrow \alpha''(s) \perp \alpha'(s), \forall s \in I$.

Proposición 1.3. La curvatura se mantiene invariante ante un cambio de orientación.

Demostración. $\beta(-s) = \alpha(s) \Rightarrow \beta'(s) = -\alpha'(s) \Rightarrow \beta''(-s) = \alpha''(s) = k(s)$.

Definición 1.9 (Vector Tangente Unitario). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a.. Entonces,

$$T(s) = \alpha'(s)$$

se llama vector tangente unitario a α en s .

Observación. $k(s) = \|T'(s)\|$.

Nota. Observamos que $\forall s \in I : k(s) > 0, k(s) = \|\alpha''(s)\| \Rightarrow \alpha''(s) = k(s)N(s)$ donde $N(s)$ es un vector unitario en la dirección de $\alpha''(s)$. Además, $\alpha''(s) \perp \alpha'(s) \Rightarrow N(s)$ es normal a $\alpha(s)$.

Definición 1.10 (Vector Normal). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva regular

p.p.a.. Entonces,

$$N(s) = \frac{T'(s)}{k(s)}$$

se llama vector normal a α en s .

Observación. El vector normal N es perpendicular al vector tangente unitario T y normal a la curva α en s . Esto es, $\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) = T(s) \wedge k(s)N(s) = 0$

Definición 1.11 (Plano Oscilador). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Entonces, $T(s), N(s)$ determinan un plano en \mathbb{R}^3 y lo llamamos plano oscilador.

Observación. También se llama Referencia móvil de Frenet para curvas planas.

Definición 1.12 (Vector Binormal). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a.. Entonces, $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ es el vector normal al plano oscilador en s y se dice vector binormal en s .

Observación. $\|B'(s)\|$ mide la tasa de cambio del plano oscilador, es decir, la rapidez con la que la curva se aleja del plano oscilador en s .

Nota. $B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s) = T(s) \wedge n'(s) \Rightarrow B'(s)$ es normal a $T(s)$ y $B'(s)$ es paralelo a $N(s)$. Entonces, escribimos $B'(s) = \tau(s)N(s)$ para alguna función τ .

Definición 1.13 (Torsión). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. tal que $\alpha''(s) \neq 0, s \in I$. Entonces, decimos que

$$\tau(s) = \frac{B'(s)}{N(s)}$$

es la torsión de α en s .

Observación. Si cambia la orientación entonces el signo del vector binormal cambia dado que $B = T \wedge N$. Por tanto, $B'(s)$ y la torsión se mantienen invariantes.

Definición 1.14 (Tiedro de Frenet). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. tal que $k > 0$. Entonces, para cada valor $s \in I$, $\exists T(s), N(s), B(s)$ vectores unitarios mutuamente ortogonales y los llamamos el tiedro de Frenet en α . Estos vectores vienen dados de la siguiente forma

$$T(s) = \alpha'(s) \text{ vector tangente ,}$$

$$\begin{aligned}
k(s) &= \|T'(s)\| \text{ curvatura ,} \\
N(s) &= \frac{1}{k(s)} T'(s) \text{ vector normal ,} \\
B &= T \wedge N \text{ vector binormal ,} \\
\tau(s) &= \frac{B'(s)}{N(s)} \text{ torsión}
\end{aligned}$$

donde $\langle N, N \rangle = \langle T, T \rangle = \langle B, B \rangle = 1$ y cualquier otro producto escalar es 0.

DIBUJO

Definición 1.15 (Fórmulas de Frenet). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva regular p.p.a con $k > 0$ y torsión τ . Entonces,

$$\begin{aligned}
T' &= kN, \\
N' &= -kT + \tau B, \\
B' &= -\tau N,
\end{aligned}$$

Proposición 1.4. $\tau = 0$ si y solo si α es una curva en el plano.

Demostración. (\Rightarrow) Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva plana p.p.a.. Entonces, $\exists p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^3$ tal que $(\alpha(s) - p) \cdot q = 0, \forall s \in I$. Derivando,

$$\alpha'(s) \cdot q = \alpha''(s) \cdot q = 0, \forall s \in I.$$

Por tanto, q es ortogonal a T y $N \Rightarrow B = \frac{q}{\|q\|} \Rightarrow B' = 0 \Rightarrow \tau = 0$.

(\Leftarrow) Sea $\tau = 0 \Rightarrow B' = 0 \Rightarrow B' \parallel B$. Queremos ver que α es ortogonal a B en 0. Sea

$$f(s) = (\alpha(s) - \alpha(0)) \cdot B, \forall s \in I.$$

Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \alpha' \cdot B = T \cdot B = 0$$

donde $f(0) = 0 \Rightarrow (\alpha(s) - \alpha(0)) \cdot B = 0, s \in I$. Por tanto, α permanece en el plano ortogonal a B .

Proposición 1.5. Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. con curvatura constante $k > 0$ y $\tau = 0$. Entonces α es parte de un círculo de radio $\frac{1}{k}$.

Demostración. $\tau = 0 \Rightarrow \alpha$ es una curva en plano. Sea $\gamma = \alpha + \frac{1}{k}N$ entonces,

$$\gamma' = \alpha' + \frac{1}{k_\alpha}N'_\alpha = T_\alpha - \frac{1}{k_\alpha}k_\alpha T_\alpha = 0.$$

Como $T_\gamma = 0 \Rightarrow k_\gamma = 0 \Rightarrow \gamma$ es una recta horizontal. Sea $\gamma = c \in \mathbb{R}$

$$\gamma(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k_\alpha(s)}N(s) = c, \forall s \in I$$

$$\Rightarrow d(c, \alpha(s)) = \|c - \alpha(s)\| = \left\| \frac{1}{k}N(s) \right\| = \frac{1}{k}.$$

Luego, α es una curva que en todo punto se mantiene a distancia $\frac{1}{k}$ de un punto fijo c , el centro de la circunferencia.

1.5. Curvas Arbitrarias

Proposición 1.6. Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular con $k > 0$ y $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ su reparametrización por arco tal que $\beta(t) = \alpha(s(t))$ donde $s(t)$ es la longitud de arco. Entonces,

$$T' = kvN$$

$$N' = -kvT + \tau vB$$

$$B' = -\tau vN$$

Demostración. $\frac{dT(s(t))}{dt} = T'(s(t)) \cdot s'(t) = k(s(t))N(s(t))v(t) = k(s)N(s)v.$

Proposición 1.7. Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular con $k > 0$ y $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ su reparametrización por arco tal que $\beta(t) = \alpha(s(t))$ donde $s(t)$ es la longitud de arco. Entonces,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'(s) \frac{ds}{dt} = vT(s),$$

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \frac{dv}{dt}T + vT' = v'T(s) + kv^2N$$

son la velocidad y aceleración de α en $s(t)$.

DIBUJO

Teorema 1.2. Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular. Entonces,

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \quad k = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3},$$

$$N = B \wedge T, \quad B = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|},$$

$$\tau = (\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \frac{\alpha'''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}.$$

Definición 1.16 (Hélice Cilíndrica). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular tal que $\langle T(t), u \rangle = \cos(\varphi), \forall t \in I$. Entonces, α es una hélice cilíndrica.

Teorema 1.3. Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva regular con $k > 0$. Entonces, α es una hélice cilíndrica si y solo si $\frac{\tau}{k}$ es constante.

Demostración.

(\Rightarrow) Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva regular p.p.a con $k > 0$. Entonces, si α es una hélice cilíndrica $T(t) \cdot u = \cos(\varphi), \forall t \in I \Rightarrow$

$$0 = (T \cdot u)' = T' \cdot u = kN \cdot u$$

donde $k > 0 \Rightarrow N \cdot u = 0$. Por tanto, $\forall t \in I$, u está en el plano determinado por $T(t)$ y $B(t)$. Es decir,

$$u = \cos(\varphi)T + \sin(\varphi)B.$$

Usando las fórmulas de Frenet

$$0 = (k \cos(\varphi) + \tau \sin(\varphi))N$$

$$\Rightarrow \frac{\tau}{k} = \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}.$$

(\Leftarrow) Si $\frac{\tau(t)}{k(t)} = \cos(\varphi), \forall t \in I$. Entonces, eligiendo $\cot(\varphi) = \frac{\tau}{k}$, si

$$U = \cos(\varphi)T + \sin(\varphi)B$$

tenemos que

$$U' = (k \cos(\varphi) - \tau \sin(\varphi))N = 0$$

determina un vector unitario u tal que $T \cdot u = \cos(\varphi) \Rightarrow \alpha$ es una hélice cilíndrica.

Teorema 1.4 (Fundamental de la Teoría Local de Curvas). Sean $k, \tau : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables con $k(s) > 0, \tau(s)$. Entonces, $\exists \alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva tal que s es la longitud de arco, $k(s)$ es la curvatura, y $\tau(s)$ es la torsión de α .

Además, cualquier otra curva $\bar{\alpha}$ difiere de α por un movimiento rígido, es decir, $\exists \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ aplicación lineal ortogonal con $\det \gamma > 0$ y $c \in \mathbb{R}^3$: $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha} \circ \gamma) + c$.