

Ejercicios Topología

Hugo Del Castillo Mola

21 de octubre de 2022

Índice general

1. Espacios Topológicos	2
1.1. Funciones Continuas	2

Capítulo 1

Espacios Topológicos

1.1. Funciones Continuas

Ejercicio 1.1 (27). Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ aplicación. Entonces, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d \Leftrightarrow f$ es continua.

Solución.

(\Rightarrow) $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d \Rightarrow \forall A \subset X, A \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \forall A' \in \mathcal{T}', f^{-1}(A') \in \mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

(\Leftarrow) ejercicio 26

Ejercicio 1.2 (28). Probar que existen aplicaciones abiertas y cerradas simultáneamente, pero que no son continuas.

Solución (28). Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t. tal que $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ topología trivial, $\mathcal{T}' = \mathcal{P}(X')$, $\mathbb{1} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ aplicación identidad. Entonces, $\forall A \in \mathcal{T}, \mathbb{1}(A) \in \mathcal{T}'$ y $\forall C$ cerrado de $(X, \mathcal{T}), \mathbb{1}(C)$ cerrado de (X', \mathcal{T}') . Pero, $\forall A' \in \mathcal{T}' : A' \subset X, f^{-1}(A') \notin \mathcal{T}$.

Ejercicio 1.3 (29). Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ continua, abierta y suprayectiva, \mathcal{B} base de \mathcal{T} . Entonces, $\mathcal{G} = \{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$ es base de \mathcal{T}' .

Solución. $\forall A' \in \mathcal{T}' \xrightarrow{f \text{ .cont.}} f^{-1}(A') \in \mathcal{T} \xrightarrow{\mathcal{B} \text{ base de } \mathcal{T}} \exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} : f^{-1}(A') = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \xrightarrow{f \text{ supra.}} f(f^{-1}(A')) = f(\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} f(B)$ donde $f^{-1}(A') \in \mathcal{T} \xrightarrow{f \text{ ab.}} f(f^{-1}(A')) = A' \in \mathcal{T}' \Rightarrow \mathcal{G}$ base de \mathcal{T}' .

Ejercicio 1.4 (30). Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), (X'', \mathcal{T}'')$ aplicaciones continuas tales que $g \circ f$ es homeomorfismo y g es inyectiva (suprayectiva). Entonces, f y g son homeomorfismos.

Solución. Trivial.

Ejercicio 1.5 (31). Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ espacios topológicos, $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ homeomorfismo y $A \subset X : A \cap A' = \emptyset$. Entonces, $f(A) \cap f(A') = \emptyset$.

Solución. Supongamos que $A \cap A' = \emptyset$ y $f(A) \cap f(A') \neq \emptyset$. Entonces, f homeomorfismo $\Rightarrow f$ inyectiva $\Rightarrow f(A \cap A') = f(A) \cap f(A') \neq \emptyset$ pero $f(A \cap A') = f(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A')$ contradicción.

Ejercicio 1.6 (32). Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ aplicación inyectiva y abierta, y $A \subset X$. Entonces, $f|_A : (A, \mathcal{T}|_A) \rightarrow (f(A), \mathcal{T}'|_{f(A)})$ es inyectiva y abierta.

Solución. Sea $G \in \mathcal{T}|_A \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T} : G = U \cap A \Rightarrow f|_A(G) = f(G) = f(U \cap A) \xrightarrow{f \text{ iny.}} f(U \cap A) = f(U) \cap f(A) \in \mathcal{T}'|_{f(A)}$.

Ejercicio 1.7 (33). Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia no vacía de espacios topológicos, $A_j \subset X_j, \forall i \in J$. Entonces, $\prod_{j \in J} (\mathcal{T}_j|_{A_j}) = (\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)|_{\prod_{j \in J} A_j}$

Solución.

$(\Rightarrow) \forall B \in \mathcal{B}$ base de $\prod_{j \in J} (\mathcal{T}_j|_{A_j}), B = \prod_{j \in J} G_j$ tal que $G_j \in \mathcal{T}_j|_{A_j}, \forall j \in J$ donde $A_j = X_j, \forall j \in J \setminus F$, con F finito de manera que

$$\forall j \in F, \exists U_j \in \mathcal{T}_j : G_j = U_j \cap A_j$$

$$\forall j \in J \setminus F, \exists U_j = X_j : G_j = U_j \cap A_j = X_j \cap A_j = A_j$$

Como $\prod_{j \in J} U_j \in \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j$ (para ver esto escribir la base de $\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j$). Entonces,

$$B = \prod_{j \in J} (U_j \cap A_j) = \left(\prod_{j \in J} U_j \right) \cap \left(\prod_{j \in J} A_j \right) \in \left(\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j \right)|_{\prod_{j \in J} A_j}$$

(\Leftarrow) Sea \mathcal{B}' base de $(\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)|_{\prod_{j \in J} A_j}$, entonces $\forall G \in \mathcal{B}', G = B \cap \prod_{j \in J} A_j, B \in \mathcal{B}$ base de $\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j$, donde $B = \prod_{j \in J} B_j$ tal que

$$B_j = \begin{cases} X_j, & \text{si } j \in J \setminus F \\ B_j, & \text{si } j \in F \end{cases}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}' &= \{x : J \rightarrow \bigcup_{j \in J} X_j : \forall j \in F, x_j \in B_j \cap A_j, B_j \in \mathcal{T}_j \text{ y} \\ &\quad \forall j \in J \setminus F, x_j \in X_j \cap A_j\} \\ &= \{\bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(B'_j) : B'_j \in \mathcal{T}_j|_{A_j}, \forall j \in J\} \\ &= \{\prod_{j \in J} B'_j : B'_j \in \mathcal{T}_j|_{A_j}\} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$G = \prod_{j \in J} B'_j \in \prod_{j \in J} (\mathcal{T}_j|_{A_j}).$$

Ejercicio 1.8 (34). Si X, Y son e.t. y $A \subset X, B \subset Y$, probar que en el espacio $X \times Y$ se verifica

(I) $A \overset{\circ}{\times} B = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$

(II) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

(III) $\text{Fr}(A \times B) = (\overline{A} \times \text{Fr}(B)) \cup (\text{Fr}(A) \times \overline{B})$

Solución. Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $A \subset X, A' \subset X'$. Entonces, $(X \times X', \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es e.t..

(I)

(\Rightarrow) $\overset{\circ}{A} \in \mathcal{T}, \overset{\circ}{A'} \in \mathcal{T}'$. Como $\overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{A'} \subset A \times A' \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ es abierto, tenemos que $\overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{A'} \subset A \overset{\circ}{\times} A'$ por ser $A \overset{\circ}{\times} A'$ el mayor abierto de $A \times A'$.

(\Leftarrow) Por la definición de abierto, $A \overset{\circ}{\times} A' = \bigcup \{S \subset X \times X' : S \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}', S \subset A \times A'\}$. Por tanto,

$$A \overset{\circ}{\times} A' = \bigcup_{j \in J} (U_j \times U'_j)$$

donde $U_j \in \mathcal{T}$, $U'_j \in \mathcal{T}'$ y $U_j \subset A$, $U'_j \subset A'$, $\forall j \in J$. Como $U_j \subset \overset{\circ}{A}$ y $U'_j \subset \overset{\circ}{A'}$, $\forall j \in J$, entonces

$$\bigcup_{j \in J} (U_j \times U'_j) \subset \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{A'},$$

es decir, $A \times A' \subset \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{A'}$.

(II)

(\Rightarrow) $A \subset \overline{A}$ y $A' \subset \overline{A'} \Rightarrow A \times A' \subset \overline{A} \times \overline{A'}$. Como $\overline{A \times A'}$ es el menor cerrado que contine a $A \times A'$ entonces, $\overline{A \times A'} \subset \overline{A} \times \overline{A'}$ ¿ $\in \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$?

(\Leftarrow) A partir de la definición de clausura,

$$\overline{A \times A'} = \bigcap \{C \times C' \subset A \times A' : C \times C' \text{ es cerrado en } X \times X', A \times A' \subset C \times C'\}$$

Entonces,

$$\overline{A \times A'} = \bigcap_{j \in J} (G_j \times G'_j)$$

donde G_j cerrado en (X, \mathcal{T}) y G'_j es cerrado en (X', \mathcal{T}') , y $A \subset G_j$ y $A' \subset G'_j$, $\forall j \in J \Rightarrow \overline{A} \subset G_j$ y $\overline{A'} \subset G'_j$, $\forall j \in J$. Por tanto,

$$\overline{A} \times \overline{A'} \subset \bigcap_{j \in J} (G_j \times G'_j) = \overline{A \times A'}$$

(III)