Ecuaciones Diferenciales

Hugo Del Castillo Mola

18 de septiembre de 2022

Índice general

Capítulo 1

Teoremas de Existencia y Continuidad

1.1. Preliminares

Lema 1.0.1 (Lema de Gronwall). *Sea* $J \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in J$ *y* $a, \beta, u \in C(J, \mathbb{R}_+)$. *Si*

$$u(t) \leq a(t) + \Big| \int_{t_0}^{t} \beta(s)u(s)ds \Big|, \forall t \in J,$$

Entonces,

$$u(t) \leq a(t) + \Big| \int_{t_0}^{t} a(s)\beta(s)e^{|\int_s^t \beta(\sigma)d\sigma|}ds \Big|, \forall t \in J.$$

Demostración. *Sea* $v(t) = \int_{t_0}^{t} \beta(s)u(s)ds$. *Entonces,*

$$\dot{v}(t) = \beta(t)u(t)$$

$$\leq \beta(t)a(t) + \beta(t)\Big| \int_{t_0}^{t} B(s)u(s)ds \Big|, \forall t \in J.$$

$$\leq a(t)\beta(t) + \operatorname{sgn}(t - t_0)\beta(t)v(t), \forall t \in J.$$

Ahora, sea $\gamma = \exp\big\{ - \big| \int_{t_0}^{t} \beta(s)ds \big| \big\} = \exp\big\{ - \int_{t_0}^{t} \operatorname{sgn}(t - t_0)\beta(s)ds \big\}$,

$\gamma\dot{v} \leq a\beta\gamma - \dot{\gamma}v \Rightarrow \dot{\gamma v} - a\beta\gamma \leq 0$ *donde integrando tenemos que*

$$\operatorname{sgn}(t-t_0)v(t) \leq \operatorname{sgn}(t-t_0)\int_{t_0}^{t} \frac{a\beta\gamma}{\gamma(t)}ds, \forall t \in J.$$

$$= \Big| \int_{t_0}^{t} \frac{a(s)\beta(s)\gamma(s)}{\gamma(t)}ds \Big|, \forall t \in J.$$

Sustituyendo en la hipótesis inicial, nos queda

$$u(t) \leq a(t) + \operatorname{sgn}(t-t_0)v(t)$$

$$\leq a(t)\Big| \int_{t_0}^{t} a(s)\beta(s)\exp\Big\{\Big| \int_{s}^{t} \beta(\sigma)dgks\Big|\Big\}ds\Big|, \forall t \in J.$$

Corolario 1.0.1. *Sea* $a(t) = a_0(|t-t_0|)$ *donde* $a_0 \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *es una función monótona crecient tal que*

$$u(t) \leq a(t) + \Big| \int_{t_0}^{t} \beta(s)u(s)ds \Big|, \forall t \in J.$$

Entonces,

$$u(t) \leq a(t)e^{|\int_{t_0}^{t}\beta(\sigma)ds|}, \forall t \in J.$$

Demostración. *content*

Definición 1.1 (Función uniformemente Lipschitz continua)**.** *Sean* X, Y *espacios métricos y* T *un espacio topológico. Una función* $f : T \times X \to Y$ *se llama uniformemente Lipschitz continua respecto a* $x \in X$*, si* $\exists\lambda \in \mathbb{R}_+$ *tal que*

$$d(f(t,x), f(t,x')) \leq \lambda d(x,x'), \forall x, x' \in X, \forall t \in T.$$

Definición 1.2 (Función localmente Lipschitz continua)**.** *Sean* X, Y *espacios métricos y* T *un espacio topológico. Una función* $f : T \times X \to Y$ *se llama localmente Lipschitz continua con respecto a* $x \in X$*, si* $\forall(t_0, x_0) \in T \times X$ *tiene un vecino* $U \times V \subset T \times X$ *tal que* $f|_{U\times V}$ *es uniformemente Lipschitz continua con respecto a* $x \in X$.

Notación. *Conjunto de funciones localmente Lipschitz continuas*

$$C^{0,1-}(T \times X, Y) = \{f : T \times X \to Y | f \in C(T \times X, Y),$$

$$f \text{ Lipschitz continua respecto a } x \in X\}$$

Si $f : X \to Y$, entonces

$$C^{1-}(X, Y) = \{f : X \to Y | f \text{ es Lipschitz continua } \}.$$

Conjunto de funciones continuas con dereivas parciales respecto a $x \in X$

$$C^{0,1}(T \times X, Y) = \{f \in C(T \times X, Y) : D_2 f \in C(T \times X, \mathcal{L}(E, F))\}.$$

Observación. $C^{-1}(X, Y) = C(X, Y)$ *y* $C^{0,1-}(T \times X, Y) \subset C(T \times X, Y)$.

Proposición 1.1. *Sean E, F espacios de Banach con $D \subset E$ abierto y T e.t. arbitrario. Entonces*

$$C^{0,1}(T \times D, F) \subset C^{0,1-}(T \times D, F).$$

En particular,

$$C^1(D, F) \subset C^{1-}(T, F),$$

es decir, toda función diferenciable es Lipschitz continua.

Nota. *La siguente proposición establece que toda función Lipschitz continua definida en un subconjunto compacto es uniformemente Lipschitz continua.*

Proposición 1.2. *Sea X, Y espacios métricos, T un e.t. compacto. Supongamos que $K \subset X$ es compacto y $f \in C^{0,1-}(T \times X, Y)$. Entonces, existe un vecindario abierto W de K en X tal que $f|_{T \times W}$ es uniformemente Lipschitz continua respecto a $x \in W$.*

Notación. *(I) $J \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto.*

(II) E es un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$.

(III) $D \subset E$ es un abierto.

(IV) $f \in C(J \times D, E)$.

Definición 1.3 (Solución ecuación diferencial). *Sea* $u : J_u \to D$*. Entonces, decimos que* u *es solución de la ecuación diferencial*

$$\dot{x} = f(t, x)$$

Si se verifica

(I) $J_u \subset J : (\mathring{J_u}) \neq \emptyset$.

(II) $u \in C^1(J_u, D)$,

(III) $\dot{u}(t) = f(t, u(t)), \forall t \in J_u$.

Definición 1.4 (Solución Aproximada de ecuación diferencial). *Sea* $\epsilon > 0$, $u : J_u \to D$*. Entonces, decimos que* u *es solución* ϵ*-aproximada de la ecuación diferencial*

$$\dot{x} = f(t, x)$$

Si se verifica

(I) $J_u \subset J : (\mathring{J_u}) \neq \emptyset$.

(II) $u \in C(J_u, D)$ *y* u *es continuamente diferenciable a trozos.*

(III) $\forall I \subset J_u : u$ *es continuamente diferenciable se tiene que*

$$||\dot{u}(t) - f(t, u(t))|| \leq \epsilon, \forall t \in I.$$

Proposición 1.3. (I) *Sea* J_u *un subintervalo perfecto de* J, $u : J_u \to D$*. Entonces* u *es una solución de la ecuación diferencial* $\dot{x} = f(t, x) \Leftrightarrow u \in C(J_u, D)$ *y*

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds, \forall t \in J_u$$

donde $t_0 \in J_u$.

(II) *Sea* $u : J_u \to D$ *una solución* ϵ*-aproximada de* $\dot{x} = f(t, x)$*. Entonces,*

$$||u(t) - u(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds|| \leq \epsilon|t - t_0|, \forall t \in J_u$$

donde $t_0 \in J_u$.

Lema 1.0.2 (6.6). *content*

Teorema 1.1 (6.7). *content*

Definición 1.5 (Equicontinuidad). *Sea K un espacio métrico compacto, F un espacio de Banach, $\mathcal{M} \subset C(K,F)$. Entonces, decimos que $\mathcal{M}$ es equicontinuo si $\forall y \in K, \forall \epsilon > 0, \exists V$ entorno de y en K tal que*

$$||f(x) - f(y)|| < \epsilon, \qquad \forall x \in V, \forall f \in \mathcal{M}.$$

Proposición 1.4 (Compacto Relativo). *Sea K un espacio métrico compacto, F un espacio de Banach, $\mathcal{M} \subset C(K,F)$. Entonces, $\mathcal{M}$ es relativamente compacto $\Leftrightarrow \overline{\mathcal{M}}$ es compacto.*

Teorema 1.2 (Arzéla-Ascoli). *Sea K un espacio métrico compacto, F un espacio de Banach y $\mathcal{M} \subset (K,F)$. Entonces, $\mathcal{M}$ es relativamente compacto si y solo si se cumple que*

(I) $\mathcal{M}$ es equicontinua.

(II) $\mathcal{M}(y) = \{f(y) : f \in \mathcal{M}\}$ es relativamente compacto en $F, \forall y \in K$.

Demostración. *Ver desmostración Lang pg 73*

Corolario 1.2.1 (Precompacidad). *Sea K un espacio métrico compacto, F un espacio de Banach y $\mathcal{M} \subset C(K,F)$. Si F es de dimensión finita, entonces $\mathcal{M}$ es precompacto $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}$ es equicontinuo y acotado.*