Ejercicios Topología

Hugo Del Castillo Mola

8 de noviembre de 2022

Índice general

Capítulo 1

Espacios Topológicos

1.1. Funciones Continuas

Ejercicio 1.1 (27). *Sea* $(X,\mathcal{T}),(X',\mathcal{T}')$ *e.t.,* $f:(X,\mathcal{T})\to(X',\mathcal{T}')$ *aplicación. Entonces,* $\mathcal{T}=\mathcal{T}_d \Leftrightarrow f$ *es continua.*

Solución.

($\Rightarrow$*)* $\mathcal{T}=\mathcal{T}_d \Rightarrow \forall A\subset X, A\in\mathcal{T}_d \Rightarrow \forall A'\in\mathcal{T}', f^{-1}(A')\in\mathcal{T}=\mathcal{T}_d$.

($\Leftarrow$*) ejercicio 26*

Ejercicio 1.2 (28). *Probar que existen aplicaciones abiertas y cerradas simultaneamente, pero que no son continuas.*

Solución (28). *Sea* $(X,\mathcal{T})$, $(X,\mathcal{T}')$, *e.t. tal que* $\mathcal{T}=\{\emptyset,X\}$ *topología trivial,* $\mathcal{T}'=\mathcal{P}(X')$, $\mathbb{1}:(X,\mathcal{T})\to(X',\mathcal{T}')$ *aplicación identidad. Entonces,* $\forall A\in\mathcal{T},\mathbb{1}(A)\in\mathcal{T}'$ *y* $\forall C$ *cerrado de* $(X,\mathcal{T}),\mathbb{1}(C)$ *cerrado de* $(X',\mathcal{T}')$. *Pero,* $\forall A'\in\mathcal{T}':A'\subset X, f^{-1}(A')\notin\mathcal{T}$.

Ejercicio 1.3 (29). *Sea* $(X,\mathcal{T}),(X',\mathcal{T}')$ *e.t.,* $f:(X,\mathcal{T})\to(X',\mathcal{T}')$ *continua, abierta y suprayectiva,* $\mathcal{B}$ *base de* $\mathcal{T}$. *Entonces,* $\mathcal{G}=\{f(B):B\in\mathcal{B}\}$ *es base de* $\mathcal{T}'$.

Solución. $\forall A'\in\mathcal{T}' \xRightarrow{f\text{ .cont}} f^{-1}(A')\in\mathcal{T} \xRightarrow{\mathcal{B}\text{ base de }\mathcal{T}} \exists\mathcal{B}'\subset\mathcal{B}: f^{-1}(A')=\bigcup_{B\in\mathcal{B}'}B \xRightarrow{f\text{ supra.}} f(f^{-1}(A'))=f\big(\bigcup_{B\in\mathcal{B}'}B\big)=\bigcup_{B\in\mathcal{B}'}f(B)$ *donde* $f^{-1}(A')\in\mathcal{T}\xRightarrow{f\text{ ab.}} f(f^{-1}(A'))=A'\in\mathcal{T}'\Rightarrow\mathcal{G}$ *base de* $\mathcal{T}'$.

Ejercicio 1.4 (30). *Sean $(X,\mathcal{T}),(X',\mathcal{T}'),(X'',\mathcal{T}'')$ aplicaciones continuas tales que $g\circ f$ es homeomorfismo y g es inyectiva (suprayectiva). Entonces, f y g son homeomorfismos.*

Solución. *Trivial.*

Ejercicio 1.5 (31). *Sea $(X,\mathcal{T}),(X',\mathcal{T}')$ espacios topológicos, $f:(X,\mathcal{T})\to(X',\mathcal{T}')$ homeomorfismo y $A\subset X: A\cap A'=\emptyset$. Entonces, $f(A)\cap f(A')=\emptyset$.*

Solución. *Supongamos que $A\cap A'=\emptyset$ y $f(A)\cap f(A')\neq\emptyset$. Entonces, f homeomorfismo $\Rightarrow$ f inyectiva $\Rightarrow f(A\cap A')=f(A)\cap f(A')\neq\emptyset$ pero $f(A\cap A')=f(\emptyset)=\emptyset\Rightarrow f(A\cap A')\neq f(A)\cap f(A')$ contradicción.*

Ejercicio 1.6 (32). *Sea $(X,\mathcal{T}),(X',\mathcal{T}')$ e.t., $f:(X,\mathcal{T})\to(X',\mathcal{T}')$ aplicación inyectiva y abierta, y $A\subset X$. Entonces, $f|_A:(A,\mathcal{T}|_A)\to(f(A),\mathcal{T}'|_{f(A)})$ es inyectiva y abierta.*

Solución. *Sea $G\in\mathcal{T}|_A\Rightarrow\exists U\in\mathcal{T}: G=U\cap A\Rightarrow f|_A(G)=f(G)=f(U\cap A)\xRightarrow{f\text{ iny.}} f(U\cap A)=f(U)\cap f(A)\in\mathcal{T}'|_{f(A)}$.*

Ejercicio 1.7 (33). *Sea $\{(X_j,\mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ familia no vacía de espacios topoógicos, $A_j\subset X_j,\forall i\in J$. Entonces, $\prod_{j\in J}\big(\mathcal{T}_j|_{A_j}\big)=\big(\prod_{j\in J}\mathcal{T}_j\big)|_{\prod_{j\in J}A_j}$*

Solución.

($\Rightarrow$) *$\forall B\in\mathcal{B}$ base de $\prod_{j\in J}(\mathcal{T}_j|_{A_j})$, $B=\prod_{j\in J}G_j$ tal que $G_j\in\mathcal{T}_j|_{A_j},\forall j\in J$ donde $A_j=X_j,\forall j\in J\setminus F$, con F finito de manera que*

$$\forall j\in F,\exists U_j\in\mathcal{T}_j: G_j=U_j\cap A_j$$
$$\forall j\in J\setminus F,\exists U_j=X_j: G_j=U_j\cap A_j=X_j\cap A_j=A_j$$

Como $\prod_{j\in J}U_j\in\prod_{j\in J}\mathcal{T}_j$ (para ver esto escribir la base de $\prod_{j\in J}\mathcal{T}_j$). Entonces,

$$B=\prod_{j\in J}(U_j\cap A_j)=\Big(\prod_{j\in J}U_j\Big)\cap\Big(\prod_{j\in J}A_j\Big)\in\big(\prod_{j\in J}\mathcal{T}_j\big)|_{\prod_{j\in J}A_j}$$

($\Leftarrow$) *Sea $\mathcal{B}'$ base de* $\left(\prod_{j\in J}\mathcal{T}_j\right)|_{\prod_{j\in J}A_j}$*, entonces* $\forall G\in\mathcal{B}', G = B\cap\prod_{j\in J}A_j, B\in \mathcal{B}$ *base de* $\prod_{j\in J}\mathcal{T}_j$*, donde* $B=\prod_{j\in J}B_j$ *tal que*

$$B_j = \begin{cases} X_j, & \text{si } j\in J\setminus F \\ B_j, & \text{si } j\in F \end{cases}$$

Ahora,

$$\mathcal{B}' = \{x : J \to \bigcup_{j\in J} X_j : \forall j\in F, x_j\in B_j\cap A_j, B_j\in\mathcal{T}_j \text{ y}$$

$$\forall j\in J\setminus F, x_j\in X_j\cap A_j\}$$

$$= \{\bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(B_j') : B_j'\in\mathcal{T}_j|_{A_j}, \forall j\in J\}$$

$$= \{\prod_{j\in J} B_j' : B_j'\in\mathcal{T}_j|_{A_j}\}$$

Por tanto,

$$G = \prod_{j\in J}B_j' \in \prod_{j\in J}\left(\mathcal{T}_j|_{A_j}\right).$$

Ejercicio 1.8 (34)**.** *Si X, Y son e.t. y $A\subset X$, $B\subset Y$, probar que en el espacio $X\times Y$ se verifica*

(I) $\overset{\circ}{A\times B} = \mathring{A}\times\mathring{B}$

(II) $\overline{A\times B} = \overline{A}\times\overline{B}$

(III) $\mathrm{Fr}(A\times B) = (\overline{A}\times\mathrm{Fr}(B))\cup(\mathrm{Fr}(A)\times\overline{B})$

Solución. *Sea $(X,\mathcal{T}), (X',\mathcal{T}')$ e.t., $A\subset X, A'\subset X'$. Entonces, $(X\times X', \mathcal{T}\times\mathcal{T}')$ es e.t..*

(I)

($\Rightarrow$) $\mathring{A}\in\mathcal{T}, \mathring{A}'\in\mathcal{T}'$. *Como $\mathring{A}\times\mathring{A}'\subset A\times A'\in\mathcal{T}\times\mathcal{T}'$ es abierto, tenemos que $\mathring{A}\times\mathring{A}'\subset \overset{\circ}{A\times A'}$ por ser $\overset{\circ}{A\times A'}$ el mayor abierto de $A\times A'$.*

($\Leftarrow$) *Por la definición de abierto, $\overset{\circ}{A\times A'} = \bigcup\{S\subset X\times X' : S\in\mathcal{T}\times\mathcal{T}', S\subset A\times A'\}$. Por tanto,*

$$\overset{\circ}{A\times A'} = \bigcup_{j\in J}(U_j\times U_j')$$

donde $U_j \in \mathcal{T}$, $U'_j \in \mathcal{T}'$ y $U_j \subset A$, $U'_j \subset A', \forall j \in J$. Como $U_j \subset \mathring{A}$ y $U'_j \subset \mathring{A}, \forall j \in J$, entonces

$$\bigcup_{j \in J}(U_j \times U'_j) \subset \mathring{A} \times \mathring{A}',$$

es decir, $A \overset{\circ}{\times} A' \subset \mathring{A} \times \mathring{A}'$.

(II)

($\Rightarrow$) *$A \subset \overline{A}$ y $A' \subset \overline{A}' \Rightarrow A \times A \subset \overline{A} \times \overline{A}'$. Como $\overline{A \times A'}$ es el menor cerrado que contine a $A \times A'$ entonces, $\overline{A \times A'} \subset \overline{A} \times \overline{A}'$¿ $\in \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$?.*

($\Leftarrow$) *A partir de la definición de clausura,*

$$\overline{A \times A'} = \bigcap \{C \times C' \subset A \times A' : C \times C' \text{ es cerrado en }, A \times A' \subset C \times C'\}$$

Entonces,

$$\overline{A \times A'} = \bigcap_{j \in J}(G_j \times G'_j)$$

donde G_j cerrado en $(X, \mathcal{T})$ y G'_j es cerrado en $(X', \mathcal{T}')$, y $A \subset G_j$ y $A' \subset G'_j, \forall j \in J \Rightarrow \overline{A} \subset G_j$ y $\overline{A}' \subset G'_j, \forall j \in J$. Por tanto,

$$\overline{A} \times \overline{A}' \subset \bigcap_{j \in J}(G_j \times G'_j) = \overline{A \times A'}$$

(III)

Ejercicio 1.9 (35)**.** *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia no vacía de e.t., $A_j \subset X_j, \forall j \in J$. Entonces, $\prod_{j \in J} A_j$ es denso en $\prod_{j \in J} X_j$ si y solo si A_j es denso en X_j, $\forall j \in J$.*

Solución.

($\Rightarrow$) *Por ser $\prod_{j \in J} A_j$ denso en ${}_{j \in J} X_j$, tenemos que*

$$\overline{\prod_{j \in J} A_j} =_{j \in J} X_j$$

entonces,

$$X_{j_0} = p_{j_0}(\prod_{j \in J} X_j) = p_{j_0}(\overline{\prod_{j \in J} A_j}) \subset \overline{p_{j_0}(\prod_{j \in J} A_j)} = \overline{A_{j_0}}$$

por tanto, $X_{j_0} = \overline{A_{j_0}} \Rightarrow A_j$ es denso en $X_j, \forall j \in J$.

($\Leftarrow$) *Sea* A_j *denso en* $X_j, \forall j \in J$. *Ahora,* $\forall U \in \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j \setminus \{\emptyset\}, \exists B \in \mathcal{B}$ *base de* $\prod_{j\in J} \mathcal{T}_j : B \subset U$, *entonces*

$$B = \prod_{j\in J} U_j : U_j \in \mathcal{T}_j \quad \text{y} \quad U_j = X_j, \forall j \in J \setminus F, F \text{ finito}$$

Como A_j *es denso en* X_j, *tenemos que* $U_j \cap A_j \neq \emptyset, \forall j \in J$. *Por tanto,*

$$\emptyset \neq (\prod_j U_j) \cap (\prod_{j\in J} A_j) \subset U \cap (\prod_{j\in J} A_j)$$

Es decir, $\prod_{j\in J} A_j$ *es denso en* $\prod_{j\in J} X_j$.

Ejercicio 1.10 (36). *Seas* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$, $\{(X'_j, \mathcal{T}'_j)\}_{j\in J}$ *familias no vacías de e.t.,* $(X_j, \mathcal{T}_j)$ *es homeomorfo a* $(X'_j, \mathcal{T}'_j)$, $\forall j \in J$. *Entonces,* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *es homeomorfo a* $(\prod_{j\in J} X'_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}'_j)$.

Solución. *Como* $(X_j, \mathcal{T}_j) \simeq (X'_j, \mathcal{T}'_j)$, *entonces* $\exists f_j : (X_j, \mathcal{T}_j) \to (X'_j, \mathcal{T}'{}_j)$ *homeomorfismo. Sea*

$$f : (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \to (\prod_{j\in J} X'_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}'{}_j)$$

$$f = \prod_{j\in J} f_j = f_1 \times f_2 \times \cdots$$

donde

$$(x_1, x_2, \cdots) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2), \cdots)$$

Entonces, f_j *continua* $\forall j \in J \Rightarrow f$ *continua y* f_j^{-1} *continua* $\forall j \in J \Rightarrow f^{-1}$ *continua, ya que*

$$\prod_{j\in J} (f_j^{-1}) = (\prod_{j\in J} f_j)^{-1}$$

Ejercicio 1.11 (37). *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$. *Probar que los subconjuntos de un espacio producto finito* $X = X_1 \times \cdots X_n$ *de la forma* $G_1 \times \cdots \times G_n$ *donde cada* $G_j \in \mathcal{T}_j$ *forman una base de* $X = \prod_{j\in J} X_j$.

Solución. *A partir de la base para un espacio producto arbitario.*

$$\mathcal{B} = \{\prod_{j\in J} G_j : G_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J \text{ y } G_j = X_{j\in J}, \forall j \in J \setminus F, F \text{ finito } \}$$

donde J *es finito,* $J = \{1, \cdots, n\}$. *Entoces,*

$$\mathcal{B} = \{\prod_{j\in J} G_j : G_j \in \mathcal{T}_j\}$$

es base de X.

Ejercicio 1.12 (38). *En la circunferencia* $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, *con la topología usual restringida, se identifican los puntos diametralmente opuestos. Probar que el espacio cociente resultante es homeomorfo al obtenido a partir del intervalo* $[0, 1]$ *identificando los extremos.*

Solución. *https://math.stackexchange.com/questions/311196/homeomorphism-between-the-real-projective-line-and-a-circle*

El obtenido a partir del intervalo $[0, 1]$ *identificando los extremos es homeomorfo a* $\mathbb{S}^1$.

Ejercicio 1.13 (46). *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.* T_1 *con* X *finito. Entonces,* $(X, \mathcal{T})$ *es discreto.*

Nota. *Sea* X *un conjunto y* $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$. *Entonces,* $\mathcal{T}_d$ *se llama topología discreta en* X *y* $(X, \mathcal{T}_d)$ *el espacio discreto en* X.

Solución.