Ecuaciones Diferenciales

Hugo Del Castillo Mola

15 de diciembre de 2022

Índice general

Parte I

Estabilidad y Sistemas Autónomos

Capítulo 1

Estabilidad de Sistemas lineales

1.1. Sistemas lineales Homogéneos con coeficientes constantes

Definición 1.1 (Sistema Autónomo). *content*

Definición 1.2 (Punto de equilibrio). *content*

Definición 1.3 (Punto de equilibrio Hiperbólico). *content*

Definición 1.4 (Punto de equilibrio Atractor). *content*

Definición 1.5 (Punto de equilibrio Fuente). *content*

Observación. *Si el origen es punto atractor o fuente, entonces es hiperbólico.*

Definición 1.6 (Sistemas Topológicamente equivalentes). *content*

Definición 1.7 (Punto de Silla). *content*

Proposición 1.1 (Caracterización de puntos de equilibrio hiperbólicos). *content*

Proposición 1.2 (Soluciones Acotadas y Soluciones Periódicas). *content*

Definición 1.8 (Estabilidad de Soluciones). *content*

Definición 1.9 (Variedad Lineal Estable Local). *Sea el sistema autónomo lineal $y'(t) = A(t)y$. Se conoce como variedad lineal estable local (E_s), variedad lineal inestable local (E_s) y variedad lineal central (E_c) a*

$$E_s = \langle \lambda_1, \cdots, \lambda_m \rangle$$

$$E_u = \langle \lambda_m, \cdots, \lambda_{m+n} \rangle$$
$$E_c = \langle \lambda_{m+n}, \cdots, \lambda_{m+n+k} \rangle$$

donde $\lambda_i \in \rho(A)$ tal que

$$\begin{cases} \Re(\lambda_i) < 0, & 1 \leq i \leq m \\ \Re(\lambda_i) > 0, & m \leq i \leq n+m \\ \Re(\lambda_i) = 0, & m+n \leq i \leq m+n+k \end{cases}$$

Definición 1.10 (Variedad Estable Global). *Dado us sistema autónomo $y' = f(x) \in \mathbb{C}(\Omega)$ y x_∞ punto de equilibrio. La variedad estable global de y' es*

$$W_s(x_\infty) = \{x_0 \in \Omega : \lim_{t \to +\infty} x(t; 0, x_0) = x_\infty\}$$

Definición 1.11 (Variedad Inestable Global). *Dado us sistema autónomo $y' = f(x) \in \mathbb{C}(\Omega)$ y x_∞ punto de equilibrio. La variedad inestable global de y' es*

$$W_s(x_\infty) = \{x_0 \in \Omega : \lim_{t \to -\infty} x(t; 0, x_0) = x_\infty\}$$

1.2. Sistemas Lineales Homogéneos con Coeficientes Variables

Observación (Sistema Considerado). *content*

Observación (Forma Integral De Las Soluciones De Un Sistema Lineal Homogéneo Con Coeficientes Variables). *content*

Proposición 1.3 (Caracterización de Soluciones 1). *content*

Proposición 1.4 (Caracterización de Soluciones 2). *content*

1.3. Sistemas Lineales No Homogéneos

Observación (Sistema Considerado). *content*

Definición 1.12 (Sistema Lineal Asociado). *content*

Proposición 1.5 (Caracterización de las Soluciones 1). *content*

Proposición 1.6 (Caracterización de las Soluciones 2). *content*

1.4. Diagramas de Fases de Sistemas Planos

Esquema EDO.

Capítulo 2

Estabilidad de Sistemas no Lineales

2.1. Comportamiento Cualitativo De las Soluciones

Definición 2.1. *Dado el problema del valor inicial*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

donde $f \in \mathcal{C}([a, b] \times \Omega; \mathbb{R}^n)$. *Consideramos el sistema no lineal*

$$y' = f(t, y)$$

Entonces, decimos que

(I) $x \in \Omega$ *es un punto de equilibrio de* $y' = f(y)$ *si* $f(x) = 0$.

(II) *Un punto de equilibrio es hiperbólico si*

$$\forall \lambda \in \rho(Df(x)), \Re(\lambda) \neq 0.$$

(III) *Un punto de equilibrio se denomina no hiperbólico si*

$$\exists \lambda \in \rho(Df(x)) : \Re(\lambda) = 0.$$

(IV) *El sistema* $y' = Df(x) \cdot y$ *es el sistema lineal asociado.*

Definición 2.2 (Clasificación De Puntos De Equilibrio). *Sea x un punto de equilibrio hiperbólico del sistema no lineal. Considerando el sistema lineal asociado $Df(x)$, entonces este se clasifica de la misma forma que los puntos de equilibrio de un sistema lineal.*

Observación. *Un punto de equilibrio x foco es asintóticamente estable ($\forall \lambda \in \rho(Df(x)), \Re(\lambda) < 0$).*

Observación. *Un punto de equilibrio fuente o de silla es inestable.*

2.2. Teorema de la Variedad Estable

Definición 2.3 (Variedad No Lineal Estable). *Sea $y' = f(y)$ un sistema no lineal, entonces la variedades estables locales de y' son las del sistema lineal asociado $y' = Df(x)y$.*

Teorema 2.1 (de la Variedad Estable). *content*

Ejemplo (Cálculo de Variedades). *Calcular las variedades estables e inestables de un sistema no lineal.*

2.3. Teorema de Hartman-Grobman

Observación. *Bajo que condiciones los puntos de equilibrio de un sistema no lineal tienen el mismo comportamiento cualitativo que el sistema lineal asociado.*

Teorema 2.2. *Es condición suficiente que $Df(x_\infty)$ no tenga autovalores con parte real nula, es decir, que sea hiperbólico.*

2.4. Teorema de Lyapunov

Observación. *Consideramos la estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema no lineal*

$$y' = f(t, y),$$

Si el punto de equilibrio es hiperbólico determinamos la estabilidad según el signo de los autovalores del sistema lineal asociado $y' = Df(t) \cdot y$. Ahora, si el punto no es hiperbólico usamos el método de Lyapunov.

Teorema 2.3 (de Lyapunov). *Sea $\dot{u} = f(u)$ us sistema autónomo no lineal $u_\infty \in \mathbb{R}^\infty$. Si existe $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$*

(I) $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = u_\infty$,

(II) $V(x) > 0, \quad \forall x \neq u_\infty$,

Entonces,

- $\nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow u_\infty$ *es estable,*
- $\nabla V(x) \cdot f(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow u_\infty$ *es asintóticamente estable,*
- $\nabla V(x) \cdot f(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow u_\infty$ *es inestable.*

En caso de que exista, la función $V(x)$ se llama función de Lyapunov.

2.5. Teorema de Poincaré-Bendixson

Definición 2.4 (Órbita). *Sea $y' = f(y)$ un sistema autónomo. Si y es una solución en su intervalo máximo de existencia (α, ω), entonces*

$$\{y(t) : \alpha < t < \omega\}$$

se dice que es una órbita.

Observación. *Si ϕ es solución de y' entonces, $\{\phi(t) : t \in (\alpha, \omega)\}$ es una órbita.*

Proposición 2.1. *Dos órbitas son disjuntas o son iguales.*

Proposición 2.2. *Si dos órbitas tienen un punto en común, entonces son idénticas.*

Notación. *Se denota $\phi(t, y_0)$ a la solución única del sistema autónomo $y' = f(y)$ tal que $\phi(t_0, y_0) = y_0$. Es decir, $\phi(t, y_0)$ es la solución asociada al valor inicial y_0.*

Definición 2.5 (Positivamente Invariante). *Un conjunto S se dice que es positivamente invariante para el sistema $y' = f(y)$ si*

$$\forall y_0 \in S, \phi(t, y_0) \in S, \quad \forall t \in [0, \omega).$$

Notación. *Toda solución $\phi(t, y_0)$ del sistema autónomo $y' = f(y)$ se corresponde con una órbita en el espacio de fases que denotamos $\gamma(y_0)$, es decir,*

$$\gamma(y_0) = \{\phi(t, x_0) : t \in (\alpha, \omega)\}$$

Definición 2.6 (ω-límite). *El conjunto de los puntos límite de una órbita $\phi(t, y_0)$ en el intervalo $[0, +\infty)$ es*

$$\omega(\gamma(y_0)) = \{z \in \mathbb{R}^n : \exists (t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} : t_\lambda \to +\infty \Rightarrow \phi(t_\lambda, y_0) \to z\}.$$

Observación. *Es el conjunto de puntos a los que tiende la solución $\phi(t, y_0)$ cuando $t \to +\infty$.*

Definición 2.7 (α-límite). *El conjunto de los puntos límite de una órbita $\phi(t, y_0)$ en el intervalo $(-\infty, 0]$ es*

$$\omega(\gamma(y_0)) = \{z \in \mathbb{R}^n : \exists (t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} : t_\lambda \to -\infty \Rightarrow \phi(t_\lambda, y_0) \to z\}.$$

Observación. *Es el conjunto de puntos a los que tiende la solución $\phi(t, y_0)$ cuando $t \to -\infty$.*

Proposición 2.3 (Solución Periódica). *Sea $y' = f(y)$ un sistema autónomo, $y(t)$ una solución tal que $y(0) = y(\omega)$ es una solución periódica.*

Observación. *Una solución $y(t)$ que satisface $y(0) = y(\omega)$ es una curva cerrada.*

Definición 2.8 (Cíclo). *Un cíclo es una solución periódica no constante.*

Definición 2.9 (Ciclo-límite). *Si un ciclo es el ω-límite o α-límite de una órbita distinta, entonces se llama ciclo-límite.*

Definición 2.10 (Ciclo-límite estable). *Si un cíclo es el ω-límte de toda órbita cercana, entonces se llama ciclo-límite estable.*

Teorema 2.4 (Poincaré-Bendixson). *Sea $y' = f(y)$ un sistema autónomo. Si $\phi(t, y)$ es una órbita acotada para $t \geq 0$ entonces, se cumple una de las siguientes*

- *$\omega(\gamma(y))$ es un ciclo,*
- *$\forall z \in \omega(\gamma(y))$, $\omega(\gamma(z))$ es un conjunto de uno o más puntos de equilibrio.*

El mismo resultado se cumple para órbitas negativas.

Proposición 2.4. *Sea $y' = f(y)$ un sistema autónomo, $\phi(t, y_0)$ ciclo. Entonces, existe almenos un punto de equilibrio dentro del ciclo.*

Observación. *Si $D \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\partial D = \{\phi(t, y_0) : t \in [0, \omega)\}$, entonces $\exists y \in D : f(y) = 0$ es punto de equilibrio.*

Definición 2.11 (Simplemente Conexo). *Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ es simplemente conexo si es conexo y $\forall C$ curva cerrada tal que $C \subset \mathring{D}$ entonces $\mathring{C} \subset D$.*

Definición 2.12 (Divergencia). *Sea $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ la divergencia de F es*

$$\operatorname{div} F(x, y) = f_x(x, y) + g_y(x, y)$$

Teorema 2.5 (Bendixon-Dulac). *Sea $y' = f(y)$ un sistema autónomo tal que*

$$y' = \begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(y_1, y_2) \end{cases}$$

donde $F(y_1, y_2) = (f_1(y_1, y_2), f_2(y_1, y_2))$. Suponemos $\exists g \in \mathcal{C}^1(D)$, con $D \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexo tal que

$$\operatorname{div}(g(y_1, y_2) \cdot F(y_1, y_2))$$

es distinto de cero y tiene signo constante en D. Entonces, el sistema no *tiene ningún cilco en D.*

Observación. *El criterio negativo de Bendixon se obtiene cuando $g \equiv 1$.*