Ecuaciones Diferenciales

Hugo Del Castillo Mola

7 de diciembre de 2022

Índice general

I Estabilidad y Sistemas Autónomos **2**

1. Estabilidad de Sistemas lineales **3**
1.1. Sistemas lineales Homogéneos con coeficientes constantes 3
1.2. Sistemas Lineales Homogéneos con Coeficientes Variables 5
1.3. Sistemas Lineales No Homogéneos 5
1.4. Diagramas de Fases de Sistemas Planos 5

2. Estabilidad de Sistemas no Lineales **6**
2.1. Comportamiento Cualitativo De las Soluciones 6
2.2. Teorema de la Variedad Estable 7
2.3. Teorema de Hartman-Grobman 7
2.4. Teorema de Lyapunov 7

Parte I

Estabilidad y Sistemas Autónomos

Capítulo 1

Estabilidad de Sistemas lineales

1.1. Sistemas lineales Homogéneos con coeficientes constantes

Definición 1.1 (Sistema Autónomo)**.** *content*

Definición 1.2 (Punto de equilibrio)**.** *content*

Definición 1.3 (Punto de equilibrio Hiperbólico)**.** *content*

Definición 1.4 (Punto de equilibrio Atractor)**.** *content*

Definición 1.5 (Punto de equilibrio Fuente)**.** *content*

Observación. *Si el origen es punto atractor o fuente, entonces es hiperbólico.*

Definición 1.6 (Sistemas Topológicamente equivalentes)**.** *content*

Definición 1.7 (Punto de Silla)**.** *content*

Proposición 1.1 (Caracterización de puntos de equilibrio hiperbólicos). *content*

Proposición 1.2 (Soluciones Acotadas y Soluciones Periódicas). *content*

Definición 1.8 (Estabilidad de Soluciones). *content*

Definición 1.9 (Variedad Lineal Estable Local). *Sea el sistema autónomo lineal $y'(t) = A(t)y$. Se conoce como variedad lineal estable local (E_s), variedad lineal inestable local (E_s) y variedad lineal central (E_c) a*

$$E_s = \langle \lambda_1, \cdots, \lambda_m \rangle$$

$$E_u = \langle \lambda_m, \cdots, \lambda_{m+n} \rangle$$
$$E_c = \langle \lambda_{m+n}, \cdots, \lambda_{m+n+k} \rangle$$

donde $\lambda_i \in \rho(A)$ tal que

$$\begin{cases} \Re(\lambda_i) < 0, & 1 \leq i \leq m \\ \Re(\lambda_i) > 0, & m \leq i \leq n+m \\ \Re(\lambda_i) = 0, & m+n \leq i \leq m+n+k \end{cases}$$

Definición 1.10 (Variedad Estable Global). *Dado us sistema autónomo $y' = f(x) \in \mathbb{C}(\Omega)$ y x_∞ punto de equilibrio. La variedad estable global de y' es*
$$W_s(x_\infty) = \{x_0 \in \Omega : \lim_{t \to +\infty} x(t; 0, x_0) = x_\infty\}$$

Definición 1.11 (Variedad Inestable Global). *Dado us sistema autónomo $y' = f(x) \in \mathbb{C}(\Omega)$ y x_∞ punto de equilibrio. La variedad inestable global de y' es*
$$W_s(x_\infty) = \{x_0 \in \Omega : \lim_{t \to -\infty} x(t; 0, x_0) = x_\infty\}$$

1.2. Sistemas Lineales Homogéneos con Coeficientes Variables

Observación (Sistema Considerado). *content*

Observación (Forma Integral De Las Soluciones De Un Sistema Lineal Homogéneo Con Coeficientes Variables). *content*

Proposición 1.3 (Caracterización de Soluciones 1). *content*

Proposición 1.4 (Caracterización de Soluciones 2). *content*

1.3. Sistemas Lineales No Homogéneos

Observación (Sistema Considerado). *content*

Definición 1.12 (Sistema Lineal Asociado). *content*

Proposición 1.5 (Caracterización de las Soluciones 1). *content*

Proposición 1.6 (Caracterización de las Soluciones 2). *content*

1.4. Diagramas de Fases de Sistemas Planos

Esquema EDO.

Capítulo 2

Estabilidad de Sistemas no Lineales

2.1. Comportamiento Cualitativo De las Soluciones

Definición 2.1. *Dado el problema del valor inicial*

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

donde $f \in \mathcal{C}([a,b] \times \Omega; \mathbb{R}^n)$. *Consideramos el sistema no lineal*

$$y' = f(t,y)$$

Entonces, decimos que

(I) $x \in \Omega$ *es un punto de equilibrio de* $y' = f(y)$ *si* $f(x) = 0$.

(II) *Un punto de equilibrio es hiperbólico si*

$$\forall \lambda \in \rho(Df(x)), \Re(\lambda) \neq 0.$$

(III) *Un punto de equilibrio se denomina no hiperbólico si*

$$\exists \lambda \in \rho(Df(x)) : \Re(\lambda) = 0.$$

(IV) *El sistema* $y' = Df(x) \cdot y$ *es el sistema lineal asociado.*

Definición 2.2 (Clasificación De Puntos De Equilibrio)**.** *Sea x un punto de equilibrio hiperbólico del sistema no lineal. Considerando el sistema lineal asociado $Df(x)$, entonces este se clasifica de la misma forma que los puntos de equilibrio de un sistema lineal.*

Observación. *Un punto de equilibrio x foco es asintóticamente estable ($\forall\lambda \in \rho(Df(x)), \Re(\lambda) < 0$).*

Observación. *Un punto de equilibrio fuente o de silla es inestable.*

2.2. Teorema de la Variedad Estable

Definición 2.3 (Variedad No Lineal Estable)**.** *Sea $y' = f(y)$ un sistema no lineal, entonces la variedades estables locales de y' son las del sistema lineal asociado $y' = Df(x)y$.*

Teorema 2.1 (de la Variedad Estable)**.** *content*

Ejemplo (Cálculo de Variedades)**.** *Calcular las variedades estables e inestables de un sistema no lineal.*

2.3. Teorema de Hartman-Grobman

Observación. *Bajo que condiciones los puntos de equilibrio de un sistema no lineal tienen el mismo comportamiento cualitativo que el sistema lineal asociado.*

Teorema 2.2. *Es condición suficiente que $Df(x_\infty)$ no tenga autovalores con parte real nula, es decir, que sea hiperbólico.*

2.4. Teorema de Lyapunov

Observación. *Consideramos la estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema no lineal*

$$y' = f(t, y),$$

Si el punto de equilibrio es hiperbólico de terminamos la estabilidad según el signo de los autovalores del sistema lineal asociado $y' = Df(t) \cdot y$. Ahora, si el punto no es hiperbólico usamos el método de Lyapunov.

Teorema 2.3 (de Lyapunov)**.** *Sea* $\dot{u} = f(u)$ *us sistema autónomo no lineal* $u_\infty \in \mathbb{R}^\infty$. *Si existe* $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

(I) $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = u_\infty$,

(II) $V(x) > 0, \quad \forall x \neq u_\infty$,

Entonces,

- $\nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow u_\infty$ *es estable,*
- $\nabla V(x) \cdot f(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow u_\infty$ *es asintóticamente estable,*
- $\nabla V(x) \cdot f(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow u_\infty$ *es inestable.*

En caso de que exista, la función $V(x)$ *se llama función de Lyapunov.*