

# Anal sis Complejo

Hugo Del Castillo Mola

6 de febrero de 2023

# Índice general

<b>I</b>	<b>Análisis Complejo</b>	<b>3</b>
<b>1.</b>	<b>Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1.	El Plano Complejo . . . . .	4
1.2.	Función Exponencial . . . . .	6
1.3.	Función Logaritmo . . . . .	8
1.4.	Transformación de Möbius . . . . .	10
<b>2.</b>	<b>Funciones Holomorfas</b>	<b>12</b>
2.1.	Derivación Compleja . . . . .	12
2.2.	Ecuaciones de Cauchy-Riemann . . . . .	14
2.3.	Función Inversa . . . . .	16
2.4.	Funciones Harmónicas . . . . .	18
2.5.	Aplicaciones Conformes . . . . .	19
<b>3.</b>	<b>Integración Compleja</b>	<b>21</b>
3.1.	Integral de Funciones Complejas sobre Curvas . . . . .	21
3.2.	Teorema de Cauchy . . . . .	24
3.3.	Consecuencias Teorema Cauchy . . . . .	29
<b>4.</b>	<b>Representación Analítica de las funciones holomorfas</b>	<b>32</b>
4.1.	Sucesiones y Series . . . . .	32
4.2.	Series de Potencias . . . . .	34
4.3.	Funciones Analíticas . . . . .	36
4.4.	Ceros de Funciones Analíticas . . . . .	38
<b>5.</b>	<b>Singularidades Aisladas</b>	<b>42</b>
5.1.	Series de Laurent . . . . .	42
5.2.	Singularidades Aisladas . . . . .	43
5.3.	Cálculo de Residuos . . . . .	45

<b>6. Miscelanea</b>	<b>47</b>
6.1. Principio Del Argumento . . . . .	47
6.2. Teorema de Rouché . . . . .	49
6.3. Propiedades Funciones Armónicas . . . . .	49

# **Parte I**

## **Análisis Complejo**

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. El Plano Complejo

**Definición 1.1** (Plano Complejo). Definimos los números complejos como el conjunto  $\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$  junto con las operaciones suma y producto

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

**Observación.**  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  es un cuerpo conmutativo.

(I) La identidad de la suma es  $(0, 0)$  y la identidad del producto es  $(1, 0)$ .

(II) Se satisfacen la propiedad asociativa, la distributiva y la conmutativa.

(III) Todo elemento distinto de cero tiene inverso en  $\mathbb{C}$ .

**Observación.** Consideramos los números reales  $\mathbb{R}$  como el subconjunto de los números complejos  $\mathbb{C}$  de la forma  $(a, 0)$ . Dado  $(a, b) \in \mathbb{C}$  podemos escribir  $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$ . Sea  $i = (0, 1)$  entonces  $(a, b) = a + ib$ . Notese que  $i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \rightarrow 1 \in \mathbb{R}$ .

**Observación.** La parte real de  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  es  $a$  y se denota  $\Re(z) = a$ . La parte imaginaria de  $z$  es  $b$  y se denota  $\Im(z) = b$ .

**Definición 1.2** (Módulo). Sea  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ , el módulo de  $z$  es

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

**Observación.** El módulo de un número complejo es la distancia desde el punto del plano hasta el origen.

**Definición 1.3** (Conjugado). Sea  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ , el conjugado de  $z$  es

$$\bar{z} = a - ib$$

**Observación.** El conjugado de un número complejo es su simétrico respecto al eje de coordenadas.

**Proposición 1.1.** Se verifican las siguientes propiedades:

- (I)  $\bar{\bar{z}} = z$  y  $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ .
- (II)  $z + \bar{z} = 2\Re(z)$  y  $z - \bar{z} = 2\Im(z)$ .
- (III)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$  y  $\overline{-z} = -\bar{z}$
- (IV)  $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$  y si  $z \neq 0$  entonces  $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$
- (V)  $|z|^2 = z\bar{z}$  y  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ ,  $\forall z \neq 0$ .
- (VI)  $|zw| = |z||w|$ ,  $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$  si  $(w \neq 0)$  y  $|z| = |\bar{z}|$
- (VII)  $|z + w| \leq |z| + |w|$ . Además, si  $\exists t \geq 0 : z = tw$  se tiene  $|z + w| = |z| + |w|$ .

**Observación.** El módulo permite definir una distancia en el plano complejo  $d(z, w) = |z - w|$ . De esta forma  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{R}$  son topológicamente iguales.

**Definición 1.4** (Representación polar de un número complejo). Sea  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ,  $z$  representa el punto  $(a, b)$  en el plano, cuya expresión en coordenadas polares es  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Y escribimos

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) := re^{i\theta}$$

donde  $r = |z|$  y  $\theta = \arg(z) = \arctan(\frac{b}{a})$ .

**Observación.** Si  $-\pi < \theta < \pi$  lo llamamos argumento principal y se denota  $\text{Arg}(z)$ . El conjunto de todos los posibles argumentos de  $z$  es  $\{\text{Arg}(z) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Proposición 1.2.** (I)  $e^{i\theta} = e^{i(\theta + 2k\pi)} \forall k \in \mathbb{Z}$ .

(II)  $|e^{i\theta}| = 1$ ,  $|\overline{e^{i\theta}}| = e^{-i\theta} = (e^{i\theta})^{-1}$ .

$$(III) e^{i(\theta+\sigma)} = e^{i\theta}e^{i\sigma}.$$

$$(IV) \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \text{ y } \arg(\bar{z}) = \arg(z^{-1}) = -\arg(z)$$

**Proposición 1.3.** Si  $z = re^{i\theta}$  entonces  $z^n = r^n e^{in\theta} = |z|^n e^{in \arg(z)}$ .

**Observación.** Una raíz  $n$ -ésima de un número complejo  $w$  es número  $z$  que cumple  $z^n = w$ . Si  $w = 0$  la única raíz es 0, si  $w \neq 0$  entonces por el Teorema Fundamental del Álgebra tenemos que hay  $n$  raíces distintas.

Sean  $w = |w|e^{i\theta}$  y  $z = |z|e^{i\alpha}$ , tenemos que

$$|w|e^{i\theta} = |z|^n e^{in\alpha}$$

y por tanto  $|z| = |w|^{\frac{1}{n}}$  y  $e^{i\theta} = e^{in\alpha}$ , lo cual implica que  $n\alpha = \theta + 2k\pi$  para  $k \in \mathbb{Z}$ . Los valores de  $\alpha$  son

$$\frac{\theta}{n}, \frac{\theta + 2\pi}{n}, \dots, \frac{\theta + 2\pi(n-1)}{n}$$

**Proposición 1.4.** Sea  $w \in \mathbb{C}$  entonces  $w$  tiene  $n$  raíces  $n$ -ésimas distintas.

**Observación.** Estas  $n$  raíces son los vértices de un polígono regular de  $n$  lados inscritos en la circunferencia de centro 0 y radio  $|w|^{\frac{1}{n}}$ .

## 1.2. Función Exponencial

**Definición 1.5** (Función polinómica). Sea  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$  donde  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ .

**Observación.** Como  $f(z) = z^k$  es continua (de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) se tiene que  $f$  es continua de  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Definición 1.6** (Función Exponencial). Definimos la función exponencial como la solución de la ecuación diferencial

$$f'(z) = f(z)$$

con el valor inicial  $f(0) = 1$ . Haciendo

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + na_n z^{n-1} + \dots$$

se tiene que  $a_{n-1} = na_n$  y  $a_0 = 1$  y por inducción  $a_n = \frac{1}{n!}$ .  
La solución se denota

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

que es una serie convergente.

**Proposición 1.5** (Propiedades Exponencial). Se verifican las siguientes propiedades:

- (I) Si  $z \in \mathbb{R}$  entonces  $e^z$  coincide con la exponencial real.
- (II)  $|e^z| = e^x$  y  $\arg(e^z) = y$ .
- (III)  $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ .
- (IV)  $e^z \neq 0$  y  $(e^z)^{-1} = e^{-z}$ .
- (V)  $e^{z+w} = e^z e^w, \forall z, w \in \mathbb{C}$ .
- (VI)  $e^{2k\pi i} = 1, \forall k \in \mathbb{Z}$ .
- (VII) es periódica,  $e^z = e^{z+2\pi i}$
- (VIII) es continua, Sea  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números complejos, si  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0 \Rightarrow e^{z_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{z_0}$ .
- (IX) No es inyectiva, existen infinitos  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $e^z = 1$ .

**Observación.** En el plano la exponencial compleja transforma las rectas horizontales de la forma  $z = x + ib$  en semirectas de radio  $e^x$  y ángulo  $b$ . Y rectas verticales de la forma  $z = a + iy$  a circunferencias de radio  $e^a$  y ángulo  $y$ .

**Definición 1.7** (Funciones Trigonómicas). Se definen las funciones  $\sin$  y  $\cos$  como

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

**Proposición 1.6** (Propiedades cos y sen). (I) Son funciones continuas.

(II) Sobre los números reales coinciden con las correspondientes funciones reales.



(III)  $\cos(z) = \cos(-z)$  y  $\sin(z) = -\sin(-z)$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

(IV)  $\cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi$  y  $\sin(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi$  para  $k \in \mathbb{Z}$ .

(V)  $\forall z, w \in \mathbb{C}$ , se tien  $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$  y  $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z)$ .

(VI) El coseno y el seno son funciones periódicas de periodo  $2\pi$ .

(VII)  $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

**Demostración (ii).** Veamos que si  $z \in \mathbb{R}$  entonces la exponencial compleja coincide con la real

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \\ &= \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x) + \cos(-x) + i\sin(-x)) = \cos(x)\end{aligned}$$

**Demostración.** (iv)  $\cos(z) = 0 \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 0 \Leftrightarrow e^{iz}(e^{iz} + e^{-iz}) = e^{2iz} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = -1 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$ . Si  $y \neq 0$  entonces  $e^{2iz} = e^{2ix-2y} \Rightarrow |e^{2iz}| \neq -1$ .

**Definición 1.8** (Función Tangente). A partir de las funciones seno y coseno se define la tangente,

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

**Observación.** Todas las funciones trigonométricas son funciones de  $e^{iz}$ .

**Observación.** También podemos definir las funciones

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \text{ y } \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

## 1.3. Función Logaritmo

**Definición 1.9** (Logaritmo). La función logaritmo se define como la inversa de la función exponencial,

$$\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \log(z) = w$$

donde  $\log(z) = w$  es la raíz de la ecuación  $e^w = z$ .

**Observación.**  $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow$  el 0 no tiene logaritmo.

**Observación.** Si  $w = x + iy \neq 0$ ,  $z = e^w = e^{x+iy}$  tiene soluciones

$$e^x = |z|, \quad e^{iy} = \frac{w}{|w|}$$

donde la primera ecuación tiene solución única  $x = \log(|z|)$  y la segunda ecuación tiene infinitas soluciones módulo  $2\pi$ .

**Observación.** Distinguiendo la parte real y la parte imaginaria de  $w$  podemos escribir

$$z = \log(z) = \log |z| + i \arg(z)$$

dado que  $e^{\log(z)} = e^{\log |z|} e^{i \arg(z)} = |z| e^{i \arg(z)} = z$ .

**Observación.** La rama principal del logaritmo es

$$\text{Log } z = \log |z| + i \text{Arg}(z), \quad z \neq 0$$

De esta manera,  $\text{Log}(z)$  es la inversa de  $e^w$  con valores en  $-\pi < \Im w \leq \pi$ .

**Observación.** Determinada la rama principal del logaritmo se tiene que

$$\log(z) = \text{Log}(z) + i\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

para cualquier otra rama.

**Definición 1.10** (Potencias). Sea  $a, \alpha \in \mathbb{C}, a, \alpha \neq 0$

$$a^\alpha = e^{\alpha \log(a)}$$

**Observación.** Si  $\alpha = 0 \Rightarrow a^0 = 1$ .

**Observación.** En general,  $a^\alpha$  tiene infinitos valores. Una excepción es  $\alpha = n \Rightarrow a^n = e^{n \log(a)} = e^{\log(a)} \dots e^{\log(a)} = a \dots a$ .

**Proposición 1.7** (Propiedades Potencias). El logaritmo verifica las siguientes propiedades:

$$(I) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(II) \quad a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta \text{ solo si fijamos el valor de } \log(a)$$

$$(III) \quad 1 = e^{-2k\pi y} (\cos(2k\pi x) + i \sin(2k\pi x)) \text{ donde } \alpha = x + iy$$

**Proposición 1.8.** (I)  $f(z) = a^z$  es continua en  $\mathbb{C}$

(II) Sea  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $f(z) = z^\alpha$  es continua en el dominio de la rama del logaritmo.

## 1.4. Transformación de Möbius

**Definición 1.11** (Transformación de Möbius). Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tal que  $ad - bc \neq 0$ . Entonces, a la función de la forma

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

se llama transformación de Möbius.

**Observación.**  $S$  es continua en  $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ .

**Proposición 1.9.** La composición de transformaciones de Möbius es transformación de Möbius.

**Proposición 1.10.**  $S : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \frac{a}{c}$  es un homeomorfismo ( biyectiva,  $S$  continua y  $S^{-1}$  continua ) cuya inversa es

$$S^{-1} : z \mapsto \frac{dw - b}{a - cw}$$

**Observación.**  $S \circ S^{-1}(z) = S^{-1} \circ S(z) = z$

**Observación.** Las transformaciones de Möbius forman un grupo bajo la operación de composición de aplicaciones.

**Definición 1.12** (Möbius Ampliada). Sea  $S$  la transformación de Möbius tal que

$$S\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \quad \text{y} \quad S(\infty) = \frac{a}{c}, \quad \text{si } c \neq 0$$
$$S(\infty) = \infty, \quad \text{si } c = 0$$

Entonces, podemos definir  $S : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ .

**Observación.** La transformación de Möbius ampliada también es homeomorfismo.

**Teorema 1.1.** Toda transformación de Möbius es composición de homotecias, traslaciones, inversiones y giros.

**Observación.** Toda transformación de Möbius se puede expresar apartir de homotecias, traslaciones, inversiones y giros.

**Teorema 1.2.** Sean  $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*, w_0, w_1, w_2 \in \mathbb{C}^* : z_i \neq z_j, w_i \neq w_j, \forall i \neq j$ . Entonces,  $\exists! T(z)$  transformación de Möbius tal que  $T(z_i) = w_i, \forall i \in \{0, 1, 2\}$ .

**Corolario 1.2.1.** Si una transformación de Möbius tiene tres puntos fijos entonces es la identidad.

**Corolario 1.2.2.** Si dos transformaciones de Möbius coinciden en tres puntos entonces son la misma.

**Teorema 1.3.** Las transformaciones de Möbius transforman circunferencias de  $\mathbb{C}^*$  en circunferencias de  $\mathbb{C}^*$

## Capítulo 2

# Funciones Holomorfas

### 2.1. Derivación Compleja

**Definición 2.1** (Derivada). Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  abierto,  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Decimos que  $f$  es derivable si existe

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

**Ejemplo.** (I)  $f$  constante  $\Rightarrow f'(z_0) = 0$ .

(II)  $f(z) = z \Rightarrow f'(z_0) = 1$ .

(III)  $f(z) = \bar{z} \Rightarrow \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} = \begin{cases} 1, & \text{si } z - z_0 \in \mathbb{R} \\ -1, & \text{si } z - z_0 \in i\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{z \rightarrow z_0}.$

**Observación.** La continuidad de una función compleja es equivalente a la continuidad de la parte real y la parte imaginaria. No pasa lo mismo con derivabilidad.

**Proposición 2.1.** Sea  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  derivable en  $z_0 \in \Omega$ . Entonces,  $f$  es continua en  $z_0 \in \Omega$ .

**Demostración.** Sigue de la reglas de los limites

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z) + f(z_0) - f(z_0) \\ &= f(z_0) + \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) \end{aligned}$$

donde  $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} f'(z_0)$  y  $(z-z_0) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0 \Rightarrow f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} f(z_0)$

**Proposición 2.2.** Sean  $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  derivables en  $z_0 \in \Omega$ . Entonces,

- (I) Si  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $(\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0)$
- (II)  $(fg)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)$ .
- (III) Si  $g(z_0) \neq 0$  entonces  $(\frac{f}{g})'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$ .

**Demostración.**

**Ejemplo.** (I)  $f(z) = z^n \Rightarrow f'(z) = nz^{n-1}, \forall z \in \mathbb{C}$ .

(II) Todo polinomio es derivable en  $\mathbb{C}$ .

(III)  $f(z) = \frac{1}{z}$  es derivable  $\forall z \neq 0$ .

**Teorema 2.1** (Regla de la Cadena). Sean  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$  abiertos,  $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f$  es derivable en  $f(z_0) \in \Omega_2$  y  $g$  es derivable en  $z_0 \in \Omega_1$ . Entonces,  $(f \circ g)$  es derivable en  $z_0 \in \Omega_1$  y  $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$ .

**Demostración.** Sea  $G : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C} : G(w) = \begin{cases} \frac{g(w)-g(f(z_0))}{w-f(z_0)}, & w \neq f(z_0) \\ g'(f(z_0)), & w = f(z_0) \end{cases}$

entonces,  $G$  está bien definida y  $\lim_{w \rightarrow f(z_0)} \frac{g(w)-g(f(z_0))}{w-f(z_0)} = g'(z_0) \Rightarrow G$  es continua en  $f(z_0)$ .

Si  $z \neq 0$ , entonces

$$\begin{aligned} & \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{z - z_0} = \\ &= \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \\ &= G(f(z)) \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ & \lim_{z \rightarrow z_0} G(f(z)) \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z \rightarrow z_0} G(f(z)) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \\
&= G'(f(z_0))f'(z_0).
\end{aligned}$$

**Observación.**  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es derivable  $\forall z \in \Omega$ . Entonces,  $f$  es holomorfa en  $\Omega$ .

## 2.2. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

**Notación.** Sea  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = u(x, y) + iv(x, y),$$

donde  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces, la matriz jacobiana de  $f$  es

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

**Nota.** Queremos ver que significa que  $u, v$  sean diferenciables. Si derivamos  $f$  en  $z_0 \in \Omega$  respecto de  $x$  y  $y$ , parte real y parte imaginaria respectivamente, obtenemos dos expresiones de  $f'(z_0)$  que dan lugar a las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

**Teorema 2.2** (Ecuaciones Cauchy-Riemann). Sea  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Entonces  $f'(z_0)$  existe  $\Leftrightarrow f$  es diferenciable en  $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  con

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad (\text{Ecuaciones de C-R}),$$

es decir, si  $\exists u_x, u_y, v_x, v_y$ , son continuas en  $\Omega$  y satisfacen las ecuaciones, entonces  $f$  es analítica en  $\Omega$ .

**Demostración.**

( $\Rightarrow$ ) En el límite

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

sustituimos  $z = x + iy_0$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{u(x, y_0) + u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \frac{v(x, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

donde  $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} f'(z_0)$  implica

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) + u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \frac{v(x, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

De manera análoga, si  $z = x_0 + iy$  entonces

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) + u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{(y - y_0)} \\ = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ = -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Por tanto,  $\exists f'(z_0)$  y tiene el mismo valor independientemente de como  $z$  se acerque a  $z_0$

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

( $\Leftarrow$ ) A partir del teorema de Taylor

$$u(x + s, y + t) = u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)t + R(s, t)$$

donde  $\frac{R(s, t)}{|h|} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$ . También

$$v(x + s, y + t) = v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)t + G(s, t)$$

donde  $\frac{G(s, t)}{|h|} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$ . Entonces,

$$f(z + h) = f(z) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)t + R(h)$$



$$\begin{aligned}
& + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)s + i \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)t + iG(h) \\
& = f(z) + \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \right) h + R(h) + iG(h)
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \right) + \frac{R(h) + iG(h)}{h}$$

Por tanto,

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$\exists f'(z_0)$  y es continua  $\Rightarrow f(z)$  es análítica.

**Corolario 2.2.1.** Sea  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa,  $\Omega$  abierto. Entonces,  $f'(z) = 0, \forall z \in \Omega \Rightarrow f$  es constante.

**Teorema 2.3.** Si  $f(z)$  es diferenciable, entonces la matriz Jacobian  $J_f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tiene determinante

$$\det J_f(z) = |f'(z)|^2.$$

**Demostración.**

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Por tanto, el determinante es

$$\det J_f(x, y) = u_x v_y - u_y v_x$$

Si sustituimos las derivadas parciales de las ecuaciones de Cauchy nos queda

$$\begin{aligned}
\det J_f(x, y) &= u_x u_x + v_x v_x \\
&= |u_x + i v_x|^2 \\
&= |f'(z)|^2
\end{aligned}$$

## 2.3. Función Inversa

**Teorema 2.4** (Función Inversa). Sea  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa,  $z_0 \in \Omega$  y  $f'(z_0) \neq 0$ . Entonces, existe un entorno  $U \subset D : z_0 \in U$  y un entorno de  $V \subset \mathbb{C} : f(z_0) \in V$  tal que  $f : U \rightarrow V$  es biyectiva y  $f^{-1}$  es holomorfa con

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}, z \in U.$$

### Demostración.

Sea  $J_f(x_0, y_0)$  la matriz Jacobiana de  $f$  en  $z_0 = (x_0, y_0)$ , por el Teorema 2.3  $\det(J_f(z_0)) = |f'(z_0)|^2 \neq 0$ . Entonces, podemos aplicar el Teorema de la Función Inversa Real ya que  $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Solo falta ver que  $J_f(z)^{-1}$  cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz Jacobiana inversa es

$$(J_f(x, y))^{-1} = \frac{1}{\det(J_f)} \begin{pmatrix} v_y & -u_y \\ -v_x & u_x \end{pmatrix}$$

y la matriz Jacobiana de la función inversa

$$J_{f^{-1}}(x, y) = \begin{pmatrix} t_x & t_y \\ s_x & s_y \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$t_x = \frac{1}{\det(J_f)} v_y = \frac{1}{\det(J_f)} u_x,$$

$$s_x = -\frac{1}{\det(J_f)} v_x = \frac{1}{\det(J_f)} u_y,$$

$$t_y = \frac{1}{\det(J_f)} v_x,$$

$$s_y = \frac{1}{\det(J_f)} v_y$$

las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen.

**Ejemplo.** Sea  $w = \log z$  la rama principal del logaritmo. Entonces,  $w$  es continua y es la inversa de

$$z = e^w, \quad -\pi < w < \pi$$

Como  $e^w$  es holomorfa con  $(e^w)' \neq 0$ , podemos aplicar el Teorema de la Función Inversa. Por tanto,  $\log z$  es holomorfa.

$$\begin{aligned} z &= e^{\log z} \Rightarrow \\ 1 &= e^{\log z} \frac{d}{dz}(\log z) = z \frac{d}{dz}(\log z) \Rightarrow \\ \frac{d}{dz}(\log z) &= \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

**Observación.** Toda rama del logaritmo difiere de la principal por una constante. Por tanto, tiene la misma derivada.

## 2.4. Funciones Harmónicas

**Definición 2.2** (Ecuación de Laplace). La ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = 0$$

se llama ecuación de Laplace.

**Definición 2.3** (Laplaciano). El operador

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$$

se llama Laplaciano.

**Observación.** La ecuación de Laplace se escribe  $\Delta u = 0$ .

**Definición 2.4** (Función Armónica). Las funciones que satisfacen la ecuación de Laplace se llaman funciones armónicas. Sea  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \in C^2$  tal que

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

**Teorema 2.5.** Si  $f = u + iv$  es holomorfa y  $u, v \in C^2$ . Entonces,  $u$  y  $v$  son armónicas.

**Observación.**  $u = \Re(f)$ ,  $v = \Im(f)$ .

**Demostración.** *content*

**Definición 2.5** (Conjugado Armónico). Sea  $u : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  armónica y  $v$  armónica tal que  $f = u + iv$  es holomorfa. Entonces, decimos que  $v$  es el conjugado armónico.

**Ejemplo.**  $f(z) = z^2$ ,  $u = x^2 + y^2$ ,  $v = 2xy$ .

**Teorema 2.6.** Sea  $D$  un disco abierto o  $D = \mathbb{R}^2$ ,  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  armónica. Entonces, existe  $v$  armónica conjugada.

**Ejemplo.** Sea  $u(x, y) = xy$  tenemos que

$$\frac{\partial^2 xy^2}{\partial x} = -\frac{\partial^2 xy^2}{\partial y} = 0.$$

Resolviendo las ecuaciones de Cauchy-Riemann se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Por tanto,

$$v(x, y) = \frac{y^2}{2} + h(x)$$

Ahora,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Entonces,

$$h(x) = -\frac{x^2}{2} + C$$

Por tanto,

$$f(x, y) = xy - i\left(\frac{x^2 + y^2}{2} + k\right)$$

**Corolario 2.6.1.** Toda función armónica es localmente la parte real de una función holomorfa.

## 2.5. Aplicaciones Conformes

**Definición 2.6** (Vector Tangente). Sea  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $0 \leq t < 1$  una curva diferenciable parametrizada con  $z_0 = \gamma(0)$ . Entonces,

$$\gamma'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} = x'(0) + iy'(0)$$

es el vector tangente a  $\gamma$  en  $z_0$ .

**Definición 2.7** (Ángulo entre dos curvas). Definimos el ángulo entre dos curvas en  $z_0$  como el ángulo entre sus vectores tangentes en  $z_0$

**Teorema 2.7.** Sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva diferenciable parametrizada con  $z_0 = \gamma(0)$  y sea  $f(z)$  una función diferenciable en  $z_0$ . Entonces la tangente de la curva  $f(\gamma(t))$

$$(f \circ \gamma)'(0) = f'(z_0)\gamma'(0).$$

**Definición 2.8** (Función Conforme). Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  diferenciable y sean para dos curvas  $\gamma_1, \gamma_2$  con  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$ . Si  $(f \circ \gamma_1)'(z_0) \neq 0$  y  $(f \circ \gamma_2)'(z_0) \neq 0$ , y

$$\langle \gamma_1(z_0), \gamma_2(z_0) \rangle = \langle (f \circ \gamma_1)'(z_0), (f \circ \gamma_2)'(z_0) \rangle$$

entonces, decimos que  $f$  es conforme en  $z_0$ .

**Observación.** Una función conforme  $f : D \rightarrow V$  es una función diferenciable con derivadas parciales continuas que es conforme  $\forall z \in D$  e inyectiva.

**Teorema 2.8.** Si  $f(z)$  es diferenciable en  $z_0$  y  $f'(z_0) \neq 0$ , entonces  $f(z)$  es conforme en  $z_0$ .

**Ejemplo.** La función  $f(z) = z^2$  es un aplicación conforme de  $\{\Re z > 0\}$  a  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . Si  $z_0 = r_0 \cdot e^{i\theta_0}$ , entonces  $f(z_0) = r_0^2 \cdot e^{i2\theta_0}$ .

## Capítulo 3

# Integración Compleja

### 3.1. Integral de Funciones Complejas sobre Curvas

**Definición 3.1** (Integral). Sea  $h : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  un función compleja de una variable real y sean  $u, v$  sus partes real e imaginaria respectivamente tal que  $h(t) = u(t) + iv(t)$ . Suponemos que  $u, v$  son continuas. Entonces, llamamos la integral de  $h$  a

$$\int_a^b h(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt,$$

donde las integrales de  $u$  y  $v$  tienen el sentido usual de cálculo unidimensional.

**Proposición 3.1.** Sea  $f : \omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Entonces,

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)|dt.$$

**Definición 3.2.** Sea  $f$  continua y definida en un conjunto abierto  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva diferenciable a trozos tal que  $\gamma([a, b]) \subset A$ .

Entonces,

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

es la integral de línea de  $f$  a lo largo de  $\gamma$ .

**Proposición 3.2.** Sea  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , entonces

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} [u(x, y)dx - v(x, y)dy] + i \int_{\gamma} [u(x, y)dy + v(x, y)dx]$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} f(\gamma(t))\gamma'(t) &= [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] \cdot [x'(t) + iy'(t)] \\ &= [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)] + i[v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)] \end{aligned}$$

donde integrado sobre  $[a_i, a_{i+1}]$  tenemos la expresión requerida.

**Definición 3.3** (Reparametrización). Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva diferenciable a trozos. Una curva diferenciable a trozos  $\bar{\gamma}[\bar{a}, \bar{b}] \rightarrow \mathbb{C}$  se llama reparametrización de  $\gamma$  si  $\exists \alpha : [a, b] \rightarrow [\bar{a}, \bar{b}]$  con  $\alpha'(t) > 0$ ,  $\alpha(a) = \bar{a}$  y  $\alpha(b) = \bar{b}$  tal que  $\gamma(t) = \bar{\gamma}(\alpha(t))$ .

**Proposición 3.3.** Si  $\bar{\gamma}$  es una reparametrización de  $\gamma$ , entonces

$$\int_{\gamma} f = \int_{\bar{\gamma}} f$$

para  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  donde  $\gamma([a, b]) \subset \Omega$ .

**Proposición 3.4.** Sean  $f, g$  funciones continuas,  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$  curvas diferenciables, entonces

$$(I) \int_{\gamma} (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_{\gamma} f + c_2 \int_{\gamma} g,$$

$$(II) \int_{-\gamma} f = - \int_{\gamma} f,$$

$$(III) \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

**Teorema 3.1.** Sea  $\gamma$  un curva diferenciable a trozos. Si  $h(z)$  es una función continua en  $\gamma$ , entonces

$$\left| \int_{\gamma} h(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |h(z)| |dz|.$$

Además, si  $\gamma$  tiene longitud  $L$  y  $|h(z)| \leq M$  en  $\gamma$ , entonces

$$\left| \int_{\gamma} h(z) dz \right| \leq ML.$$

**Observación.**  $\int_{\gamma} |h(z)| |dz| = \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt.$

**Demostración.** Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , entonces

$$\Re \left( \int_a^b g(t) dt \right) = \int_a^b \Re(g(t)) dt$$

dado que  $\int_a^b g(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt = u(t) + iv(t).$

Sea  $\int_a^b g(t) dt = re^{i\theta}$ , entonces  $r = \int_a^b e^{-i\theta} g(t) dt$

$$\Rightarrow r = \Re(r) = \int_a^b \Re(e^{-i\theta} g(t)) dt$$

como  $\Re(e^{-i\theta} g(t)) \leq |e^{-i\theta} g(t)| = |g(t)|$ , ya que  $|e^{-i\theta}| = 1$ , entonces tenemos que  $\int_a^b \Re(e^{-i\theta} g(t)) dt \leq \int_a^b |g(t)| dt$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b g(t) dt \right| = r \leq \int_a^b |g(t)| dt.$$

Y usando  $|zz'| = |z||z'|$  tenemos que

$$\left| \int_{\gamma} f \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt = \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt$$



**Teorema 3.2** (Fundamental del Cálculo). Sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva diferenciable a trozos,  $\Omega \subset \mathbb{C}$  abierto tal que  $\gamma([0, 1]) \subset \Omega$ ,  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  función holomorfa con  $F'$  continua. Entonces,

$$\int_{\gamma} F'(z) dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$$

**Observación.** Si  $\gamma(0) = \gamma(1)$ , entonces  $\int_{\gamma} F'(z) dz = 0$

**Demostración.**

$$\int_{\gamma} F'(z) dz = \int_0^1 F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^1 (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$$

**Corolario 3.2.1.** Si  $\gamma$  es una curva cerrada, entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

**Teorema 3.3.** Si  $\Omega \subset \mathbb{C}$  es abierto convexo, y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es continua, entonces  $f$  tiene primitiva en  $\Omega$  si y solo si

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

para  $T \subset \Omega$  triángulo.

**Demostración.** content

## 3.2. Teorema de Cauchy

**Definición 3.4** (Teorema de Green). Sea  $D \subset \mathbb{C}$  abierto conexo acotado tal que  $\partial D$  es una curva cerrada y simple,  $\Omega$  abierto tal que  $\overline{D} \subset \Omega$  y

$P, Q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ . Entonces,

$$\int_{\partial D^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

**Teorema 3.4** (Cauchy). Sea  $D \subset \mathbb{C}$  abierto conexo acotado tal que su frontera es una curva simple cerrada,  $\Omega$  abierto tal que  $\overline{D} \subset \Omega$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  función holomorfa en  $D$  tal que  $f'$  es continua. Entonces,

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

**Observación.** La conclusión del teorema de Cauchy también se cumple si asumimos solo que  $f$  es continua en un disco  $D$  y holomorfa en  $D \setminus \{z_1\}$  donde  $z_1 \in D$ .

**Demostración.** Sea  $f = u + iv$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_{\gamma} f(z)dz \\ &= \int_{\gamma} (u + iv)(dx + dy) \\ &= \int_{\gamma} (udx - vdy) + i \int_{\gamma} (udy + vdx) \end{aligned}$$

donde aplicando el teorema de Green, tenemos que

$$\int_{\gamma} f = \iint_A \left[ -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] dxdy + i \iint_A \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] dxdy$$

a partir de las ecuaciones de Cauchy-Riemann ambos términos son nulos.

**Teorema 3.5** (Fórmula Integral de Cauchy). Sea  $D \subset \mathbb{C}$  abierto, conexo y acotado tal que  $\partial D$  es una curva simple cerrada,  $\Omega$  abierto tal que  $\overline{D} \subset \Omega$ . Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  un función holomorfa tal que  $f'$  es continua. Entonces,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad \forall z \in D$$

**Demostración.** Sea  $z \in D, \epsilon > 0, D_\epsilon = D \setminus \{|w - z| \leq \epsilon\}$ . La frontera  $\partial D^+$  es la unión de  $\partial D$  y  $\{|w - z| = \epsilon\}$  con orientación positiva.

Dado que  $\frac{f(w)}{w-z}$  es holomorfa para  $w \in D_\epsilon$ , por el teorema de Cauchy tenemos

$$\int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0$$

separando la frontera e invirtiendo la orientación se tiene

$$\Rightarrow \int_{|w-z|=\epsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

si escribimos  $w = z + \epsilon e^{i\theta}$ ,  $dw = i\epsilon e^{i\theta} d\theta$ , obtenemos

$$\int_0^{2\pi} f(z + \epsilon e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

por el teorema del valor medio para la funciones armónicas, la integral de la izquierda coincide con  $f(z)$ .

**Teorema 3.6** (Fórmula Integral de Cauchy para las Derivadas). Sea  $D \subset \mathbb{C}$  abierto, conexo y acotado talque  $\partial D$  es una curva simple cerrada,  $\Omega \subset \mathbb{C}$  abierto tal que  $\overline{D} \subset \Omega$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  función holomorfa tal que  $f'$  es continua. Entonces,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad \forall z \in D, \forall n \in \mathbb{N}.$$

es decir,  $f$  tiene derivada de orden  $n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Demostración.** Sea  $z \in D$  entonces  $\text{dist}(z, \partial D) = r > 0$ ,  $f$  continua en  $\partial D \Rightarrow \exists M > 0 : |f(w)| < M, \forall w \in \partial D$  y  $|\frac{1}{w-z}| \leq \frac{1}{r}$

$$\left| \frac{f(w)}{w-z} \right| \leq \frac{M}{r}, \quad \forall w \in \partial D$$

y dado que  $\frac{d}{dz} \left( \frac{f(w)}{w-z} \right) = \frac{f(w)}{(w-z)^2}$  entonces, por el teorema de derivación bajo el

signo integral tenemos que

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dz$$

donde usando inducción y el teorema de derivación bajo el signo integral podemos ver que se cumple para las derivadas de orden  $n$ .

**Corolario 3.6.1.** Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa. Entonces,  $f$  es infinitamente derivable y sus derivadas son holomorfas en  $\Omega$ .

**Demostración.** Fórmula integral de Cauchy para las derivadas  $\Rightarrow f^{(n)}(z)$  es derivable  $\forall n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f^{(n)}(z)$  es continua. Por tanto,  $f^{(n)}(z)$  es holomorfa  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 3.7** (Morera). Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  función continua y  $\int_{\partial T} f(z) dz = 0, \forall T \subset \Omega$  triángulo. Entonces,  $f$  es infinitamente derivable.

**Observación.** Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  continua tal que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para toda curva cerrada  $\gamma$  en  $\Omega$ . Entonces,  $f = F'$  es holomorfa en  $\Omega$  y existe  $F$  holomorfa en  $\Omega$ .

**Demostración.** (Teorema fundamental del cálculo)  $\Rightarrow f$  tiene primitiva, es decir,  $\exists F : f = F', F$  holomorfa en  $D$  y  $F' = f$  continua. Entonces, por el corolario anterior  $F$  infinitamente derivable  $\Rightarrow F'$  infinitamente derivable.

**Teorema 3.8** (Goursat). Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  abierto,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  función continua en  $\Omega$ . Entonces,  $f$  es holomorfa en  $\Omega$ .

**Observación.** El teorema de Goursat establece que la hipótesis de  $f'$  continua en el teorema de Cauchy es redundante.

**Demostración.** Esta demostración se basa en el teorema de Morera. Sea  $T$  un triángulo cerrado en  $D$ . Subdividimos  $T$  en cuatro subtriángulos iguales. Como la integral de  $f(z)$  alrededor de  $\partial T$  es la suma de las integrales a lo largo de los subtriángulos, hay al menos un subtriángulo  $T_1$  tal que

$$\left| \int_{\partial T_1} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial T} f(z) dz \right|$$

Ahora, subdividimos  $T_1$  en cuatro subtriángulos iguales y repetimos el proceso. De manera inductiva obtenemos una sucesión de triángulos encajados  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\left| \int_{\partial T_n} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial T_{n-1}} f(z) dz \right| \geq \cdots \geq \frac{1}{4^n} \left| \int_{\partial T} f(z) dz \right|$$

Dado que  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es decreciente y  $\text{diam}(T_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ,  $T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0 \in D$ . Y dado que  $f(z)$  es diferenciable en  $z_0$

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| \leq \epsilon_n, z \in T_n$$

donde  $\epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Sea  $L$  la longitud de  $\partial T$ . Entonces, la longitud de  $T_n$  es  $\frac{L}{2^n}$ . Si  $z \in T_n$  entonces

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \epsilon_n |z - z_0| \leq 2\epsilon_n \frac{L}{2^n}$$

Por el teorema de Cauchy y la estimación de Cauchy

$$\left| \int_{\partial T_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial T_n} df(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) \right| \leq 2\epsilon_n \frac{L}{2^n} \cdot \frac{L}{2^n} = \frac{2L^2\epsilon_n}{4^n}$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial T_n} f(z) dz \right| \leq 2L^2\epsilon_n$$

Como  $\epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , entonces

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

Por el Teorema de Morera  $f(z)$  es holomorfa.

**Teorema 3.9** (Cauchy-Goursat). Sea  $D \subset \mathbb{C}$  abierto, conexo y acotado tal que  $\partial D$  es una curva simple cerrada,  $\Omega \subset \mathbb{C}$  abierto tal que  $\overline{D} \subset \Omega$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. Entonces,

$$\int_{\partial D^+} f(z) dz = 0$$

**Definición 3.5** (Simplemente Conexos). Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  abierto y conexo. Entonces, si  $\mathbb{C}^* \setminus \Omega$  es conexo, decimos que  $\Omega$  es simplemente conexo.

**Observación.**  $\Omega \subset \mathbb{C}$  conexo es simplemente conexo si  $\forall \gamma \in \Omega$  curva cerrada es homotópica.

**Proposición 3.5.** Una curva que se puede transformar en un punto es una curva homotopa.

**Teorema 3.10** (Cauchy Homotópico). Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  simplemente conexo,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa y  $\gamma \subset \Omega$  curva cerrada simple. Entonces,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

**Demostración.**  $\Omega$  simplemente conexo  $\Rightarrow \gamma$  es homotópica a una curva constante  $\lambda(t) = z_0, \forall t \Rightarrow \int_{\gamma} f = \int_{\lambda} f = 0$ .

### 3.3. Consecuencias Teorema Cauchy

**Teorema 3.11** (Desigualdades de Cauchy). Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$ ,  $D = \overline{D}(z_0, R) \subset \Omega$ ,  $f$  holomorfa en  $D$ . Si  $|f(z)| \leq M, \forall z \in \partial D$ , entonces

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{R^k} M, \forall k \in \mathbb{N}$$

**Demostración.** Por el teorema de Cauchy

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw$$

$$\Rightarrow |f^{(k)}(z_0)| = \frac{k!}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw \right|$$

Ahora,

$$\left| \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} \right| \leq \frac{M}{R^{k+1}}$$

dado que  $|w - z_0| = R, \forall w \in \partial D$ . Entonces,

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^{k+1}} \cdot L$$

donde  $L$  es la longitud de  $\gamma$ .

**Teorema 3.12** (Liouville). Sea  $f$  entera. Si  $\exists M > 0 : |f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$ , entonces  $f$  es constante.

**Demostración.** Por las desigualdades de Cauchy con  $k = 1, \forall z_0 \in \mathbb{C}$  se tiene que

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R},$$

Entonces, si  $R \rightarrow \infty$  tenemos que

$$\frac{M}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Por tanto,  $|f'(z_0)| = 0 \Rightarrow f'(z_0) = 0 \Rightarrow f$  es constante.

**Teorema 3.13** (Teorema Fundamental del Álgebra). Sea  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ,  $n \geq 1, a_n \neq 0, P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ . Entonces,  $\exists z_0 \in \mathbb{C} : P(z_0) = 0$ .

**Demostración.** Sea  $p(z_0) \neq 0, \forall z_0 \in \mathbb{C}$ . Entonces,  $f(z) = \frac{1}{P(z)}$  es entera  $\Rightarrow f(z)$  no es constante dado que  $a_n \neq 0$ . Basta ver que, por el teorema de Liouville, que  $f(z)$  es acotada.

Sea  $M > 0$ , a partir de  $P(z)$  por la desigualdad triangular

$$|P(z)| \geq |a_n||z|^n - |a_0| - \dots - |a_{n-1}||z|^{n-1}$$

Sea  $a = |a_0| + \cdots + |a_{n-1}|$ . Si  $z > 1$  entonces

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |z|^{n-1} \left( |a_n||z| - \frac{|a_0|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_1|}{|z|^{n-2}} - \cdots - \frac{|a_{n-1}|}{1} \right) \\ &\geq |z|^{n-1} (|a_n||z| - a) \end{aligned}$$

Sea  $K = \max\{1, \frac{M+a}{|a_n|}\}$  entonces, si  $|z| > K \Rightarrow |P(z)| \geq M$ . Por tanto, si  $|z| > K \Rightarrow \frac{1}{|P(z)|} < \frac{1}{M}$ . Pero si  $z$  es tal que  $|z| \leq K$ , entonces  $\frac{1}{|P(z)|}$  es acotada y en valor absoluto por que es continua, es decir,  $\exists L > 0 : \frac{1}{|P(z)|} < \max\{\frac{1}{M}, L\} \Rightarrow |f(z)|$  es acotada en  $\mathbb{C}$ .



## Capítulo 4

# Representación Analítica de las funciones holomorfas

**Nota.** Si  $f$  holomorfa se puede representar localmente como una serie de potencias convergente, en particular, una serie de Taylor.

### 4.1. Sucesiones y Series

**Definición 4.1** (Sucesión Convergente). Sea  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números complejos. Entonces, si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : |z_n - z_0| < \epsilon, \quad \forall n \geq N,$$

decimos que  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $z_0$  y lo denotamos  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$ .

**Definición 4.2** (Serie Convergente). Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie de números complejos. Entonces, si la sucesión de sumas parciales

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

converge a  $S$ , decimos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge a  $S$  y lo denotamos  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ .

¿AÑADIR TEST CONVERGENCE?

**Proposición 4.1.** Sea  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números complejos. Entonces,

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Re(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Re(z_0) \\ \Im(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Im(z_0) \end{cases}$$

**Definición 4.3** (Convergencia absoluta). Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie. Entonces, si  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  converge, decimos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente.

**Observación.**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

**Proposición 4.2** (Producto de Series). Sean  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  series con  $a_n, b_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ . Si

$$c_n = \sum_{k=0}^n b_{n-k} a_k$$

entonces,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)$$

**Proposición 4.3.** Sean  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  series con  $a_n, b_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$  absolutamente convergentes. Entonces,  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  es absolutamente convergente.

**Definición 4.4** (Convergencia Puntual). Sea  $f, f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  funciones,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones tal que  $f_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(z), \forall z \in \Omega$ . Entonces,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  puntualmente.

**Observación.**  $\sum f_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(z), \forall z \in \Omega \Rightarrow \sum f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ .

**Definición 4.5** (Convergencia Uniforme). Sea  $f, f_n : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  funciones,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones. Entonces, si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : |f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \quad \forall n \geq N, \forall z \in \Omega,$$

decimos que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente y lo denotamos  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  uniformemente.

**Observación.**  $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  no depende de  $z \in \Omega$

**Proposición 4.4.** Sea  $f, f_n : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  funciones,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones tal que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  uniformemente en  $\Omega$ . Entonces,

$$f_n \text{ continua } \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f \text{ continua}$$

**Observación.**  $f$  no es continua  $\Rightarrow \{f_n\}$  no converge uniformemente.

**Teorema 4.1** (Weierstrass). Sea  $f_n : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$\exists M_n : |f_n(z)| \leq M_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \Omega.$$

Si  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  converge, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge uniformemente en  $\Omega$ .

**Observación.**  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge uniformemente en  $\Omega \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$  converge uniformemente en  $\Omega$  (convergencia absoluta de  $\sum f_n$ ).

**Teorema 4.2.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  abierto,  $f, f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  funciones,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones tal que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  uniformemente en  $\Omega$  y  $f_n$  holomorfa  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Entonces,  $f$  es holomorfa.

**Demostración.**  $f_n$  holomorfa  $\xrightarrow{T.Cauchy} \int_{\partial T} f_n(z) dz = 0$  y

$$\int_{\partial T} f_n(z) dz \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\partial T} f(z) dz$$

$\Rightarrow \int_{\partial T} f(z) dz = 0 \Rightarrow f$  holomorfa.

**Corolario 4.2.1.** Si  $\{f_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  uniformemente en  $K$  compacto  $\forall K \subset \Omega$ , también se cumple el teorema anterior.

## 4.2. Series de Potencias

**Definición 4.6** (Serie de Potencias). Sean  $a_1, a_2, \dots$  tal que  $a_i \in \mathbb{C}, \forall i$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Entonces,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

es una serie de potencias.

**Observación.** Sea  $w = z - z_0$  entonces  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$  es la traslación de la serie.

**Teorema 4.3.** Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . Entonces,  $\exists! R \geq 0$  tal que

- (I)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  converge absolutamente en  $D(0, R)$ ,
  - (II)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  no converge si  $|z| > R$ ,
  - (III)  $R > 0 \Rightarrow \forall r \in (0, R), \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  converge uniformemente en  $\overline{D}(0, R)$ .
- Además,  $R^{-1} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$

**Demostración.** content

**Notación.**

- $R$  es el radio de convergencia,
- $D(0, R)$  es el disco de convergencia.

**Proposición 4.5** (Criterio del Cociente). Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  una serie de potencias. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

existe, entonces es igual a  $R$ , el radio de convergencia.

**Ejemplo.**

- (I)  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  tiene  $R = 1$  ya que  $a_n = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$ .
- (II)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  tiene  $R = +\infty$  ya que  $a_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = n + 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ .
- (III)  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n n!$  tiene radio de convergencia  $R = 0$  ya que  $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

### 4.3. Funciones Analíticas

**Teorema 4.4** (Derivada de Serie de Potencias). Sea  $f : D(a, R) \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

con  $R$  radio de convergencia. Entonces,  $f$  es analítica y

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - a)^{n-1}$$

tiene el mismo radio de convergencia y los coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

**Demostración.** Supongamos que  $a = 0$ . Sea  $g : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Queremos ver que  $g(z) = f'(z)$ ,  $\forall z \in D(0, R)$ . Sea  $z_0 \in D(0, R)$  y  $r > 0$  tal que  $D(z_0, 2r) \subset D(0, R)$ . Si  $z \in D(z_0, r)$  entonces

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^n - z_0^n) \\ &= a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z_0^{n-1}) \end{aligned}$$

donde  $z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-1})$ . Entonces, tomado límites

$$\begin{aligned} f'(z) &= a_1 + \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z_0^{n-1}) \\ &= a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z_0^{n-1} + z_0^{n-2} z_0 + \cdots + z_0^{n-1}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} = g(z_0)$$

dado que la serie converge uniformemente por ser función continua.

**Observación.**  $f^{(n)}(z) = n!a_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1)(k-2) \cdots (k-n+1)(z-z_0)^{k-n}$

**Observación.** Las funciones holomorfas son analíticas.

**Teorema 4.5 (Taylor).** Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa,  $z_0 \in \Omega$  y  $D(z_0, R) \subset \Omega$ . Entonces,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

converge en  $D(z_0, r)$  con  $r \geq R$  y

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, R)$$

**Demostración.** Sea  $D = D(z_0, R)$ . Por la fórmula integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Queremos usar la serie geométrica para expandir el integrando como una serie de potencias en  $z - z_0$ . Como  $z \in D$  y  $w \in \partial D$ , entonces

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| < 1$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{w - z} &= \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} \\ &= \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n \end{aligned}$$

por tanto,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \left[ \frac{f(w)}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n \right] dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} \right] dw$$

Ahora, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n$$

converge uniformemente en  $D$  y  $\frac{f(w)}{w - z_0}$  es continua en  $\partial D \Rightarrow$  está acotada, entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}$$

converge uniformemente en  $\partial D$  tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} = \frac{f(w)}{w - z}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (z - z_0)^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right] \end{aligned}$$

**Corolario 4.5.1.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. Entonces,  $\forall z_0 \in \Omega$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, R)$$

donde  $R = \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$

**Ejemplo.** hacer ejemplos  $e^z$  y  $\log(1 + z)$

## 4.4. Ceros de Funciones Analíticas

**Definición 4.7** (Identicamente Nula). Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa,  $z_0 \in \Omega$ . Entonces,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < r$$

Si  $f^{(n)}(z_0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$f(z) = 0, \quad \forall z \in D(z_0, r)$$

y decimos que  $f(z)$  es idénticamente nula en  $D(z_0, r)$ . Si por el contrario,

$$\exists n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Distinguimos dos casos

- Si  $n = 0$ , entonces  $f(z_0) \neq 0$ .
- Si  $n > 0$ , entonces  $f(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$  y  $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ . En este caso decimos que  $f$  tiene un cero de orden  $n$  en  $z_0$ .

Además, en el último caso  $\exists \varphi(z)$  holomorfa en  $D(z_0, r)$  con  $\varphi(z_0) \neq 0$  y

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z), \quad \forall z \in D(z_0, r)$$

y  $\exists \rho > 0 : f(z) = 0, \forall z \in D(z_0, \rho)$ .

**Corolario 4.5.2.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  abierto,  $z_0 \in \Omega$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  analítica. Si  $f^{(k)}(z_0) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}^+$ , entonces  $f(z) = 0, \forall z \in \Omega$ .

**Demostración.** Sea  $G = \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0, \forall n \geq 0\}$ . Entonces,  $z_0 \in G \Rightarrow G \neq \emptyset$ . Luego,  $\forall z \in G, \exists r > 0 : D(z, r) \subset \Omega$  tal que

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} (w - z)^n = 0, \quad \forall w \in D(z, r)$$

entonces,  $D(z, r) \subset G \Rightarrow G$  abierto. Ahora,

$$G = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0\}$$



la intersección de cerrados es cerrado  $\Rightarrow G$  es cerrado. Por tanto,  $G$  abierto y cerrado no vacío  $\Rightarrow G = \Omega$ .

**Observación.**  $G$  cerrado en  $\Omega$ , cerrado relativo.

**Teorema 4.6** (Principio de Identidad). Sean  $f$  y  $g$  holomorfas en  $A$ . Supongamos que  $\exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  sucesión de puntos distintos tal que  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0 \in A$ , y  $f(z_n) = g(z_n), \forall n \in \mathbb{N}$ . Entonces,  $f(z) = g(z), \forall z \in A$ .

**Demostración.** Suponemos que  $g = 0$ . sea  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega : z_i \neq z_j, \forall i \neq j$  y  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0 \in \Omega$ . Entonces,  $f(z_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(z_0) = 0$ . Sea  $m$  el orden del cero  $z_0$ . Si desarrollamos  $f$  en  $z_0$

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^m \cdot h(z)$$

donde  $h$  es holomorfa y  $h(z_0) = a_m \neq 0$ . Entonces,  $\exists r > 0 : h(z) \neq 0, \forall z \in D(z_0, r)$ . Por tanto,

$$f(z_n) = (z_n - z_0)^m h(z_n) \neq 0$$

es una contradicción.

**Teorema 4.7** (de La Aplicación Abierta). Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  abierto. Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa no constante. Entonces,  $f$  es abierta.

**Demostración.** Basta ver que  $f(\Omega)$  es abierto. Por el Principio de Identidad, los ceros de  $f'$  son aislados. Entonces,

$$\Omega = (\Omega \setminus \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \cup D_1 \cup D_2 \cdots$$

donde  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son los ceros de  $f'$  y  $D_n$  son los discos centrados en  $z_n$ . Por tanto,  $f'(z) \neq 0, \forall z \in \Omega \setminus \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{T.F.I} f(\{\Omega \setminus \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}\})$  es abierto. Como  $f(D_n)$  es abierto  $\forall n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f(\Omega)$  es abierto.

**Teorema 4.8** (Principio del Módulo Máximo). Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  abierto conexo. Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. Si  $\exists a \in \Omega : |f(a)| \geq |f(z)|, \forall z \in \Omega$ , entonces  $f$  constante.

**Demostración.** Si  $f$  no es constante, entonces  $f(\Omega)$  es abierto, pero  $f(a) \notin f(\overset{\circ}{\Omega})$ , es una contradicción.

# Capítulo 5

## Singularidades Aisladas

### 5.1. Series de Laurent

**Teorema 5.1.** Sea  $0 \leq r_1 < r_2$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Consideramos la región  $A = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$  donde puede ser  $r_1 = 0$  o/y  $r_2 = \infty$ . Sea  $f$  analítica en  $A$ . Entonces,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

donde ambas series convergen absolutamente en  $A$  y uniformemente en  $B_{\rho_1, \rho_2} = \{z : \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}$  donde  $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$ . Esta serie se llama serie de Laurent alrededor de  $z_0$  en la corona circular  $A$ .

Si  $\gamma$  es un círculo alrededor de  $z_0$  con radio  $r$ , donde  $r_1 < r < r_2$ , entonces los coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad n \in \{0, 1, \dots\}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w)(w - z_0)^{n-1} dw, \quad n \in \{1, 2, \dots\}$$

**Observación.** Si escribimos  $b_n = a_{-n}$ , entonces la fórmula cubre ambos casos

**Observación.** La serie de Laurent es única.

**Demostración.** content

## 5.2. Singularidades Aisladas

**Definición 5.1** (Singularidades Aisladas). *Caso de la serie de Laurent con  $r_1 = 0$ . En este caso,  $f$  es analítica en  $D(z_0, r_2) \setminus \{z_0\} = \{z : 0 < |z - z_0| < r_2\}$ . Decimos que  $z_0$  es singularidad aislada. Podemos expandir la serie de Laurent de la siguiente forma:*

$$f(z) = \cdots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

donde  $0 < |z - z_0| < r_2$ .

**Definición 5.2.** Si  $f$  es analítica en  $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ ,  $R > 0$ , entonces  $z_0$  es una singularidad aislada.

- (I)  $\forall j \in J \setminus F, b_j = 0, F$  finito, entonces  $z_0$  es un polo de  $f$ . Sea  $j_0 = \max\{j \in J : b_j \neq 0\}$ . Entonces  $z_0$  es un polo de orden  $j_0$ .
- (II)  $\forall j \in J, b_j \neq 0$ , entonces  $z_0$  es una singularidad esencial.
- (III)  $\forall j \in J, b_j = 0$ , entonces  $z_0$  es una singularidad evitable.

**Observación.**  $f$  tiene un polo en  $z_0$  si y solo si la serie de Laurent en  $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$  es de la forma

$$\frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

la parte de los  $b$ 's se llama parte principal.

**Observación.** Si  $f$  tiene una singularidad evitable, entonces la serie de Laurent es de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

que es una serie convergente.  $f$  tiene una singularidad evitable en  $z_0$  si y solo si se puede definir en  $z_0$  tal que  $f$  es analítica en  $z_0$ .

**Proposición 5.1.** Sea  $f$  analítica en  $A$ ,  $z_0$  singularidad aislada.

- (I)  $z_0$  tiene una singularidad evitable si y solo si se da una de las siguientes condiciones
  - a)  $f$  es acotada en  $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ .

$$\text{b)} \exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z).$$

$$\text{c)} \exists \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z) = 0$$

(II)  $z_0$  es un polo simple  $\Leftrightarrow \exists \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z) \neq 0$

(III)  $z_0$  es un polo de orden  $\leq k$  o una singularidad evitable  $\Leftrightarrow$  se cumple una de las siguientes

$$\text{a)} \exists M > 0, k \geq 1 : |f(z)| \leq \frac{M}{|z - z_0|^k} \text{ en } D(z_0, R) \setminus \{z_0\}.$$

$$\text{b)} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{k+1} \cdot f(z) = 0.$$

$$\text{c)} \exists \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z).$$

(IV)  $z_0$  es un polo de orden  $k \geq 1 \Leftrightarrow \exists \phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  donde  $U \setminus \{z_0\} \subset A, \phi(z_0) \neq 0$  y

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^k}, \quad \forall z \in U, z \neq z_0$$

**Demostración.** content

**Teorema 5.2** (de Picard). Sea  $f$  con singularidad esencial en  $z_0$  y  $U$  entorno de  $z_0$  tal que  $z_0 \notin U$ . Entonces,  $\forall w \in \mathbb{C}$ , excepto quizás un punto,  $f(z) = w$  tiene infinitas soluciones en  $z$  en  $U$ .

**Teorema 5.3** (Casorati-Weierstrass). Si  $f$  tiene una singularidad esencial en  $z_0$  entonces  $\forall \delta > 0$  se tiene que  $f(D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\})$  es denso en  $\mathbb{C}$ .

**Demostración.** Suponemos que el resultado no es cierto. Entonces,  $\exists \delta > 0$ ,  $\exists \epsilon > 0$  y  $\exists w_0 \in \mathbb{C}$  tal que

$$|f(z) - w_0| > \epsilon, \quad \forall z \in D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$$

Sea  $g : D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}.$$

Como  $g$  es holomorfa y

$$|g(z)| \leq \frac{1}{\epsilon}$$

entonces,  $g$  tiene singularidad evitable en  $z_0$ . Si  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$ , entonces  $z_0$  es singularidad evitable de  $f$  ya que  $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$ . Si  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$ , entonces  $z_0$  es un polo de  $f$  ya que  $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ . Ambos casos son una contradicción.

### 5.3. Cálculo de Residuos

**Nota.** Si  $f$  tiene una singularidad aislada en  $z_0$ , entonces  $f$  admite desarrollo de Laurent en un entrono  $U \setminus \{z_0\}$  de  $z_0$

$$f(z) = \cdots + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_1}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

donde  $b_1 = \text{Res}(f, z_0)$  es el residuo de  $f$  en  $z_0$

**Proposición 5.2.** Sea  $f$  con singularidad aislada en  $z_0$  y sea  $k \geq 0$  el menor entero tal que  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (z - z_0)^n f(z)$ . Entonces,  $f(z)$  tiene un polo de orden  $k$  en  $z_0$ . Sea  $\phi(z) = (z - z_0)^k f(z)$ , entonces  $\phi$  se puede definir únicamente en  $z_0$  tal que  $\phi$  es analítica en  $z_0$  y

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{\phi^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

**Teorema 5.4** (de los Residuos). Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  simplemente conexo,  $\{z_1, \dots, z_N\} \subset \Omega$ ,  $f : \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_N\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa,  $\{z_1, \dots, z_N\}$  singularidades. Entonces,

$$\int_{\gamma^+} f(z) dz = 2\pi \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

**Definición 5.3** (Residuos en el Infinito). Sea  $F(z) = f(\frac{1}{z})$ . Entonces, decimos que

- (I)  $f$  tiene un polo de orden  $k$  en  $\infty$  si  $F$  tiene un polo de orden  $k$  en  $0$ ,
- (II)  $f$  tiene un zero de orden  $k$  en  $\infty$  si  $F$  tiene un zero de orden  $k$  en  $0$ ,

$$(III) \operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}F(z), 0\right).$$

**Proposición 5.3.** *Si  $a$  es un polo de orden  $m$  de  $f$ , entonces*

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$$

*donde  $g(z) = (z - a)^m f(z)$*

# Capítulo 6

## Miscelanea

### 6.1. Principio Del Argumento

**Nota** (Integral Logarítmica). Sea  $f$  holomorfa en  $\Omega$ ,  $\gamma$  una curva en  $\Omega$  tal que  $f(z) \neq 0$  en  $\gamma$ , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} d\log(f(z))$$

es la integral logarítmica de  $f(z)$  a lo largo de  $\gamma$  y mide el cambio de  $\log(z)$  a lo largo de la curva  $\gamma$ .

**Nota** (Derivada Logarítmica). Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(z) \neq 0$  en  $\Omega$ . Entonces,  $\log(f(z)) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en  $\Omega$  y

$$\log(f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

**Proposición 6.1.** Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(z) \neq 0$  en  $\Omega$ . Entonces, los ceros de  $f$  son singularidades aisladas de la derivada logarítmica. En particular, los ceros de  $f$  son polos de la derivada logarítmica.

**Demostración.** Suponemos que  $a$  es un cero de orden  $m$  de  $f$ . Entonces,

$$f(z) = (z - a)^m g(z)$$

donde  $g$  es holomorfa y  $g(a) \neq 0$ . Ahora,

$$f'(z) = m(z - a)^{m-1} g(z) + (z - a)^m g'(z)$$



$$\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \quad \forall z \neq a.$$

Por tanto,  $a$  es un polo simple de la derivada logarítmica y

$$\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = m.$$

**Definición 6.1** (Meromorfa). Una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es meromorfa si es holomorfa salvo en los polos.

**Observación.** Si  $f$  tiene infinitos polos en  $\Omega$  acotado, entonces estos se acumulan en la frontera. En este caso, se puede elegir  $\Omega' \subset \Omega$  tal que el número de polos en  $\Omega'$  es finito.

**Proposición 6.2.** Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f \neq 0$  en  $\Omega$  y  $a \in \Omega$  un polo de orden  $m$  de  $f$ . Entonces,  $a$  es un polo de la derivada logarítmica de  $f$  y es de orden  $-m$ .

**Demostración.** Sea  $f$  con un polo en  $a$ , entonces

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

en un entorno de  $a$  en  $\Omega$ , donde  $g$  es holomorfa en un entorno de  $a$  y  $g(a) \neq 0$ . Ahora,

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{-m(z-a)^{-m-1}g(z) + (z-a)^{-m}g'(z)}{(z-a)^{-m}g(z)} \\ &= -\frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)} \end{aligned}$$

Por tanto,  $a$  es polo simple de  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  y  $\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right)$ .

**Teorema 6.1** (Principio del Argumento). Sea  $\Omega$  simplemente conexo,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  meromorfa,  $\gamma \subset \Omega$  curva cerrada simple que no pasa por ningún cero y ningún polo de  $f$ . Entonces,

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (Z_f - P_f)$$

donde  $Z_f$  es el número de ceros de  $f$  dentro de  $\gamma$  y  $P_f$  es el número de polos de  $f$  dentro de  $\gamma$ , contadas con su multiplicidad.

**Nota** (Interpretación del Principio el Argumento). VER QUE

$$2\pi(Z_f - P_f) = \Delta_\gamma \arg(f)$$

## 6.2. Teorema de Rouché

**Teorema 6.2** (Rouche). Sea  $\Omega$  abierto simplemente conexo,  $f, g$  holomorfas salvo en  $\Omega$  salvo en los ceros y los polos,  $\gamma$  curva cerrada en  $\Omega$  que no pasa por ningún cero o polo de  $f, g$ . Si

$$|g(z)| < |f(z)|, \quad \forall z \in \gamma,$$

entonces se tiene que

$$(I) \quad \Delta \arg(f) = \Delta \arg(g),$$

$$(II) \quad Z_f - P_f = Z_g - P_g.$$

**Demostración.** *content*

## 6.3. Propiedades Funciones Armónicas

**Proposición 6.3.** Sea  $D$  un disco abierto,  $u(x, y)$  un función armónica en  $D$ . Entonces,  $\exists v(x, y)$  función en  $D$  tal que  $u + iv$  es analítica en  $D$ .

**Teorema 6.3** (Principio del Máximo). Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  abierto conexo,  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  armónica en  $D$ . Si  $\exists z_0 \in D : u(z) \leq u(z_0), \forall z \in D$ , entonces  $u$  es constante.

**Demostración.** *content*

**Teorema 6.4** (Principio del Mínimo). Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  abierto, conexo y acotado,  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  armónica tal que  $u$  se puede extender con continuidad a

*la  $\partial D$ . Si  $\exists m, M : m \leq u(z) \leq M, \forall z \in \partial D$ , entonces*

$$m \leq u(z) \leq M, \quad \forall z \in D$$