Analísis Complejo

Hugo Del Castillo Mola

20 de octubre de 2022

Índice general

I Análisis Complejo **2**

1. Preliminares **3**
1.1. El Plano Complejo 3
1.2. Función Exponencial 5
1.3. Función Logaritmo 7

2. Funciones Holomorfas **11**
2.1. Derivación Compleja 11
2.2. Ecuaciones de Cauchy-Riemann 13
2.3. Función Inversa 15
2.4. Funciones Harmónicas 16
2.5. Aplicaciones Conformes 17
2.6. Integral de Funciones Complejas sobre Curvas 18
2.7. Teorema de Cauchy 22

3. Representación Analítica de las funciones holomorfas **28**
3.1. Sucesiones y Series 28
3.2. Series de Potencias 30
3.3. Funciones Analíticas 32
3.4. Ceros de Funciones Analíticas 34

Parte I

Análisis Complejo

Capítulo 1

Preliminares

1.1. El Plano Complejo

Definición 1.1 (Plano Complejo). *Definimos los números complejos como el conjunto* $\mathbb{C} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ *junto con las operaciones suma y producto*

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, bc + ad)$$

Observación. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *es un cuerpo conmutativo.*

(I) *La identidad de la suma es* $(0,0)$ *y la identidad del producto es* $(1,0)$.

(II) *Se satisfacen la prorpiedad asociativa, la distributiba y la conmutativa.*

(III) *Todo elemento distinto de cero tiene inverso en* $\mathbb{C}$.

Observación. *Consideramos los números reales* $\mathbb{R}$ *como el subconjunto de los números complejos* $\mathbb{C}$ *de la forma* $(a,0)$. *Dado* $(a,b) \in \mathbb{C}$ *podemos escribir* $(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$. *Sea* $i = (0,1)$ *entonces* $(a,b) = a + ib$. *Notese que* $i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) \to 1 \in \mathbb{R}$.

Observación. *La parte real de* $z = a + ib \in \mathbb{C}$ *es* a *y se denota* $\Re(z) = a$. *La parte imaginaria de* z *es* b *y se denota* $\Im(z) = b$.

Definición 1.2 (Módulo). *Sea* $z = a + ib \in \mathbb{C}$, *el módulo de* z *es*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observación. *El módulo de un número complejo es la distancia desde el punto del plano hasta el origen.*

Definición 1.3 (Conjugado). *Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$, el conjugado de z es*

$$\overline{z} = a - ib$$

Observación. *El conjugado de un número complejo es su simétrico respecto al eje de coordenadas.*

Proposición 1.1. *Se verifican las siguientes propiedades:*

(I) $\overline{\overline{z}} = z$ *y* $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

(II) $z + \overline{z} = 2\Re(z)$ *y* $z - \overline{z} = 2\Im(z)$.

(III) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ *y* $\overline{-z} = -\overline{z}$

(IV) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ *y si* $z \neq 0$ *entonces* $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$

(V) $|z|^2 = z\overline{z}$ *y* $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}, \ \forall z \neq 0$.

(VI) $|zw| = |z||w|$, $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$ *si* $(w \neq 0)$ *y* $|z| = |\overline{z}|$

(VII) $|z + w| \leq |z| + |w|$. *Además, si* $\exists t \geq 0 : z = tw$ *se tiene* $|z + w| = |z| + |w|$.

Observación. *El módulo permite definir una distancia en el plano complejo* $d(z, w) = |z - w|$. *De esta forma* $\mathbb{C}$ *y* $\mathbb{R}$ *son topológicamente iguales.*

Definición 1.4 (Representación polar de un número complejo). *Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$, z representa el punto (a, b) en el plano, cuya expresión en coordenadas polares es $(r \cos\theta, r \sin\theta)$. Y escribimos*

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) := re^{i\theta}$$

donde $r = |z|$ y $\theta = \arg(z) = \operatorname{arc\,tg}(\frac{b}{a})$.

Observación. *Si $-\pi < \theta < \pi$ lo llamamos argumento principal y se denota (z). El conjunto de todos los posibles argumentos de z es $\{Arg(z) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.*

Proposición 1.2. (I) $e^{i\theta} = e^{i(\theta + 2k\pi)} \forall k \in \mathbb{Z}$.

(II) $|e^{i\theta}| = 1, |\overline{e^{i\theta}}| = e^{-i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^{-1}$.

(III) $e^{i(\theta+\sigma)} = e^{i\theta}e^{i\sigma}$.

(IV) $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$ *y* $\arg(\overline{z}) = \arg(z^{-1}) = -\arg(z)$

Proposición 1.3. *Si* $z = re^{i\theta}$ *entonces* $z^n = r^n e^{in\theta} = |z|^n e^{in\arg(z)}$.

Observación. *Una raíz n-esima de un número complejo w es número z que cumple $z^n = w$. Si $w = 0$ la única raíz es 0, si $w \neq 0$ entonces por el Teorema Fundamental del Álgebra tenemos que hay n raíces distintas.*

Sean $w = |w|e^{i\theta}$ y $z = |z|e^{i\alpha}$, tenemos que

$$|w|e^{i\theta} = |z|^n e^{in\alpha}$$

y por tanto $|z| = |w|^{\frac{1}{n}}$ y $e^{i\theta} = e^{in\alpha}$, lo cual implica que $n\alpha = \theta + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$. Los valores de α son

$$\frac{\theta}{n}, \frac{\theta + 2\pi}{n}, \cdots, \frac{\theta + 2\pi(n-1)}{n}$$

Proposición 1.4. *Sea $w \in \mathbb{C}$ entonces w tiene n raíces n-simas distintas.*

Observación. *Estas n raíces son los vértices de un polígono regular de n lados inscritos en la circunferencia de centro 0 y radio $|w|^{\frac{1}{n}}$.*

1.2. Función Exponencial

Definición 1.5 (Función polinómica). *Sea $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ donde $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$.*

Observación. *Como $f(z) = z^k$ es continua (de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) se tiene que f es continua de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.*

Definición 1.6 (Función Exponencial). *Definimos la función exponencial como la solución de la ecuación diferencial*

$$f'(z) = f(z)$$

con el valor inicial $f(0) = 1$. Haciendo

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + na_n z^{n-1} + \cdots$$

se tiene que $a_{n-1} = na_n$ y $a_0 = 1$ y por inducción $a_n = \frac{1}{n!}$.

La solución se denota

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

que es una serie convergente.

Proposición 1.5 (Propiedades Exponencial)**.** *Se verfican las siguientes propiedades:*

(I) *Si $z \in \mathbb{R}$ entonces e^z coincide con la exponencial real.*

(II) $|e^z| = e^x$ *y* $\arg(e^z) = y$.

(III) $e^{\overline{z}} = \overline{e^{\overline{z}}}$.

(IV) $e^z \neq 0$ *y* $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.

(V) $e^{z+w} = e^z e^w, \forall z, w \in \mathbb{C}$.

(VI) $e^{2k\pi i} = 1, \forall k \in \mathbb{Z}$.

(VII) *es periódica,* $e^z = e^{z+2\pi i}$

(VIII) *es continua, Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos, si* $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0 \Rightarrow e^{z_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{z_0}$.

(IX) *No es inyectiva, exiten infinitos $z \in \mathbb{C}$ tal que $e^x = 1$.*

Observación. *En el plano la exponencial compleja transforma las rectas horizontales de la forma $z = x + ib$ en semirectas de radio e^x y ángulo b. Y rectas verticales de la forma $z = a + iy$ a circunferenciasde radio e^a y ángulo y.*

Definición 1.7 (Funciones Trigonométricas)**.** *Se definene las funciones* sen *y* cos *como*

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Proposición 1.6 (Propiedades cos y sen)**.** (I) *Son funciones continuas.*

(II) *Sobre los números reales coinciden con las correspondientes funciones reales.*

(III) $\cos(z) = \cos(-z)$ *y* $\operatorname{sen}(z) = -\operatorname{sen}(-z), \forall z \in \mathbb{C}$.

(IV) $\cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *y* $\operatorname{sen}(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi$ *para* $k \in \mathbb{Z}$.

(V) $\forall z, w \in \mathbb{C}$, *se tien* $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w)$ *y* $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen}(z)\cos(w) + \operatorname{sen}(w)\cos(z)$.

(VI) *El coseno y el seno son funciones periódicas de periodo* 2π.

(VII) $\cos(z)^2 + \operatorname{sen}(z)^2 = 1, \forall z \in \mathbb{C}$.

Demostración (ii)**.** *Veamos que si* $z \in \mathbb{R}$ *entonces la exponencial compleja coincide con la real*

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\big(\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + \cos(-x) + i\operatorname{sen}(-x)\big) = \cos(x)$$

Demostración. *(iv)* $\cos(z) = 0 \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 0 \Leftrightarrow e^{iz}(e^{iz} + e^{-iz}) = e^{2iz} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = -1 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$. *Si* $y \neq 0$ *entonces* $e^{2iz} = e^{2ix-2y} \Rightarrow |e^{2iz}| \neq -1$.

Definición 1.8 (Función Tangente)**.** *A partir de las funciones seno y coseno se define la tangente,*

$$\tan(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)} = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

Observación. *Todas las funciones trigonométricas son funciones de* e^{iz}.

Observación. *También podemos definir las funciones*

$$\operatorname{senh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \text{ y } \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

1.3. Función Logaritmo

Definición 1.9 (Logaritmo)**.** *La función logaritmo se define como la inve-rasa de la función exponencial,*

$$\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \log(z) = w$$

donde $\log(z) = w$ *es la raíz de la ecuación* $e^w = z$.

Observación. $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow$ *el* 0 *no tiene logaritmo.*

Observación. *Si* $w = x + iy \neq 0$, $z = e^w = e^{x+iy}$ *tiene soluciones*

$$e^x = |z|,\ e^{iy} = \frac{w}{|w|}$$

donde la primera ecución tiene solución única $x = \log(|z|)$ *y la segunda ecuación tiene inifinitas soluciones módulo* 2π.

Observación. *Distinguiendo la parte real y la parte imaginaria de* w *podemos escribir*

$$z = \log(z) = \log|z| + i\arg(z)$$

dado que $e^{\log(z)} = e^{\log|z|}e^{i\arg(z)} = |z|e^{i\arg(z)} = z$.

Observación. *Para distinguir las soluciones, se llama* **rama** *del logaritmo a la función que reside en* $\{x + iy : y_0 \leq y \leq y : 0 + 2\pi\}$. *Solo definimos la función* $\log(z)$ *cuando se especifica un intervalo de longitud* 2π *donde* $\arg(z)$ *toma valores y se dice elegir una rama específica.*

Observación. *La determinación principal del argumento induce una rama del logaritmo.*

Definición 1.10 (Potencias)**.** *Sea* $a, \alpha \in \mathbb{C}, a, \alpha \neq 0$

$$a^\alpha = e^{\alpha\log(a)}$$

Observación. *Si* $\alpha = 0 \Rightarrow a^0 = 1$.

Observación. *En general,* a^α *tiene infinitos valores. Una excepción es* $\alpha = n \Rightarrow a^n = e^{n\log(a)} = e^{\log(a)} \cdot \cdots \cdot e^{\log(a)} = a \cdot \cdots \cdot a$.

Proposición 1.7 (Propiedades Potencias)**.** *El logaritmo verifica las siguientes propiedades:*

(I) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

(II) $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta$ *solo si fijamos el valor de* $\log(a)$

(III) $1 = e^{-2k\pi y}(\cos(2k\pi x) + i\,\mathrm{sen}(2k\pi x))$ *donde* $\alpha = x + iy$

Proposición 1.8. (I) $f(z) = a^z$ *es continua en* $\mathbb{C}$

(II) *Sea* $\alpha \in \mathbb{C}, f(z) = z^\alpha$ *es continua en el dominio de la rama del logaritmo.*

Definición 1.11 (Transformación de Möbius)**.** *Sean* $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *tal que* $ad - bc \neq 0$. *Entonces, a la función de la forma*

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

se llama transfomación de Möbius.

Observación. S *es continua en* $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

Proposición 1.9. *La composición de transformaciones de Möbius es transfomación de Möbius.*

Proposición 1.10. $S : \mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C}\setminus\frac{a}{c}$ *es un homeomorfismo (biyectiva,* S *continua y* S^{-1} *continua) cuya inversa es*

$$S^{-1} : z \mapsto \frac{dw - b}{a - cw}$$

Observación. $S \circ S^{-1}(z) = S^{-1} \circ S(z) = z$

Observación. *Las transformaciones de Möbuis forman un grupo bajo la operación de composición de aplicaciones.*

Definición 1.12 (Möbius Ampliada)**.** *Sea* S *la transfomación de Möbius tal que* $S(-\frac{d}{c}) = \infty$ *y* $S(\infty) = \frac{a}{c}$ *si* $c = 0$ *y* $S(\infty) = \infty$ *si* $c = 0$. *Entoces, podemos definir* $S : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$.

Observación. *La transfomación de Möbius ampliada también es homeomorfismo.*

Teorema 1.1. *Toda transfomación de Möbius es composición de homotrcias, translaciones, inversiones y giros.*

Teorema 1.2. *Sean* $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*, w_0, w_1, w_2 \in \mathbb{C}^* : z_i \neq z_j, w_i \neq w_j, \forall i \neq j$. *Entonces,* $\exists! T(z)$ *transformación de Möbius tal que* $T(z_i) = w_i, \forall i \in \{0, 1, 2\}$.

Corolario 1.2.1. *Si una transformación de Möbius tiene tres puntos fijos entonces es la identidad.*

Corolario 1.2.2. *Si dos transformaciones de Möbius coinciden en tres puntos entonces son la misma.*

Teorema 1.3. *Las transformaciones de Möbius transforman circunferencias de* $\mathbb{C}^*$ *en circunferencias de* $\mathbb{C}^*$

Capítulo 2

Funciones Holomorfas

2.1. Derivación Compleja

Definición 2.1 (Derivada). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Decimos que f es derivable si existe*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Ejemplo. (I) *f constante $\Rightarrow f'(z_0) = 0$.*

(II) $f(z) = z \Rightarrow f'(z_0) = 1$.

(III) $f(z) = \overline{z} \Rightarrow \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} = \begin{cases} 1, & \text{si } z - z_0 \in \mathbb{R} \\ -1, & \text{si } z - z_0 \in i\mathbb{R} \end{cases} \quad \Rightarrow \nexists \lim_{z \to z_0}.$

Observación. *La continuidad de una función compleja es equivalente a la continuidad de la parte real y la parte imaginaria. No pasa lo mismo con derivabilidad.*

Proposición 2.1. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivable en $z_0 \in \Omega$. Entonces, f es continua en $z_0 \in \Omega$.*

Demostración. *Sigue de la reglas de los limites*

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z) + f(z_0) - f(z_0) \\ &= f(z_0) + \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0) \end{aligned}$$

donde $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \xrightarrow{z\to z_0} f'(z_0)$ y $(z-z_0) \xrightarrow{z\to z_0} 0 \Rightarrow f(z) \xrightarrow{z\to z_0} f(z_0)$

Proposición 2.2. *Sean $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivables en $z_0 \in \Omega$. Entonces,*

(I) *Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $(\alpha f \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0)$*

(II) $(fg)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)$.

(III) *Si $g(z_0) \neq 0$ entonces $(\frac{f}{g})'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$.*

Demostración.

Ejemplo. (I) $f(z) = z^n \Rightarrow f'(z) = nz^{n-1}, \forall z \in \mathbb{C}$.

(II) *Todo polinomio es derivable en $\mathbb{C}$.*

(III) $f(z) = \frac{1}{z}$ *es derivable* $\forall z \neq 0$.

Teorema 2.1 (Regla de la Cadena)**.** *Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ abiertos, $f : \Omega_1 \to \mathbb{C}$, $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ tal que f es derivable en $f(z_0) \in \Omega_2$ y g es derivable en $z_0 \in \Omega_1$. Entonces, $(f \circ g)$ es derivable en $z_0 \in \Omega_1$ y $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$.*

Demostración. *Sea* $G : \Omega_2 \to \mathbb{C} : G(w) = \begin{cases} \frac{g(w)-g(f(z_0))}{w-f(z_0)}, w \neq f(z_0) \\ g'(f(z_0)), w = f(z_0) \end{cases}$ *entonces, G está bien definida y* $\lim_{w\to f(z_0)} \frac{g(w)-g(f(z_0))}{w-f(z_0)} = g'(z_0) \Rightarrow G$ *es continua en* $f(z_0)$.

Si $z \neq 0$, entonces

$$\frac{(g\circ f)(z) - (g\circ f)(z_0)}{z-z_0} =$$

$$= \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z)-f(z_0)} \cdot \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =$$

$$= G(f(z))\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$\lim_{z\to z_0} G(f(z))\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =$$

$$= \lim_{z\to z_0} G(f(z)) \cdot \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =$$
$$= G'(f(z_0))f'(z_0).$$

Observación. *$f : \Omega \to \mathbb{C}$ es derivable $\forall z \in \Omega$. Entonces, f es holomorfa en Ω.*

2.2. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Notación. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = u(x, y) + iv(x, y),$$

donde $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Entonces, la matriz jacobiana de f es

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Nota. *Queremos ver que significa qeu u, v sean diferenciables. Si derivamos f en $z_0 \in \Omega$ respecto de x y y, parte real y parte imaginaria respectivamente, obtenemos dos expresiones de $f'(z_0)$ que dan lugar a las ecuaciones de Cauchy-Riemann.*

Teorema 2.2 (Ecuaciones Cauchy-Riemann)**.** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Entonces $f'(z_0)$ existe $\Leftrightarrow$ f es diferenciable en $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ con*

$$u_x = v_y,\ u_y = -v_x \text{ (Ecuaciones de C-R)},$$

es decir, si $\exists u_x, u_y, v_x, v_y$, son continuas en Ω y satisfacen las ecuaciones, entonces f es analítica en Ω.

Demostración. *($\Rightarrow$) En el límite*

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

sustituimos $z = x + iy_0$

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{u(x, y_0) + u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i\frac{v(x, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

donde $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \xrightarrow{x\to x_0} f'(z_0)$ *implica*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x, y_0) + u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i\frac{v(x, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

De manera análoga, si $z = x_0 + iy$ *entonces*

$$\lim_{y\to y_0} \frac{u(x_0, y) + u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{(y - y_0)}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Por tanto, $\exists f'(z_0)$ *y tiene el mismo valor independientemente de como* z *se acerque a* z_0

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y}$$

(⇒) A partir del teoremade Taylor

$$u(x+s, y+t) = u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)t + R(s, t)$$

donde $\frac{R(s,t)}{|h|} \xrightarrow{z\to z_0} 0$. *También*

$$v(x+s, y+t) = v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)t + G(s, t)$$

donde $\frac{G(s,t)}{|h|} \xrightarrow{z\to z_0} 0$. *Entonces,*

$$f(z+h) = f(z) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)t + R(h)$$

$$+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)s + i\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)t + iG(h)$$
$$= f(z) + \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\Big)h + R(h) + iG(h)$$

Entonces,

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\Big) + \frac{R(h)+iG(h)}{h}$$

Por tanto,

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

$\exists f'(z_0)$ *y es continua* $\Rightarrow f(z)$ *es anlítica.*

Corolario 2.2.1. *Sea* $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorfa,* Ω *abierto. Entonces,* $f'(z) = 0, \forall z \in \Omega \Rightarrow f$ *es constante.*

Teorema 2.3. *Si* $f(z)$ *es diferenciable, entonces la matriz Jacobian* $J_f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tiene determinante*

$$\det J_f(z) = |f'(z)|^2.$$

2.3. Función Inversa

Teorema 2.4 (Función Inversa)**.** *Sea* $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorfa,* $z_0 \in \Omega$ *y* $f'(z_0) \neq 0$*. Entonces, existe un entorno* $U \subset D : z_0 \in U$ *y un entorno de* $V \subset \mathbb{C} : f(z_0) \in V$ *tal que* $f : U \to V$ *es biyectiva y* f^{-1} *es holomorfa con*

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}, z \in U.$$

Demostración.

Sea $J_f(x_0, y_0)$ la matriz Jacobiana de f en $z_0 = (x_0, y_0)$, por el Teorema 2.3 $\det(J_f(z_0)) = |f'(z_0)|^2 \neq 0$. Entonces, podemos aplicar el Teorema de la Función Inversa Real ya que $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Solo falta ver que $J_f(z)^{-1}$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz Jacobiana invera es

$$(J_f(x,y))^{-1} = \frac{1}{\det(J_f)} \begin{pmatrix} v_y & -u_y \\ -v_x & u_x \end{pmatrix}$$

y la matriz Jacobiana de la función inversa

$$J_{f^{-1}}(x,y) = \begin{pmatrix} t_x & t_y \\ s_x & s_y \end{pmatrix}$$

Entonce,

$$t_x = \frac{1}{\det(J_f)} v_y = \frac{1}{\det(J_f)} u_x,$$
$$s_x = -\frac{1}{\det(J_f)} v_x = \frac{1}{\det(J_f)} u_y,$$
$$t_y = \frac{1}{\det(J_f)} v_x,$$
$$s_y = \frac{1}{\det(J_f)} v_y$$

las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen.

Ejemplo. *Sea $w = \log z$ la rama principal del logaritmo. Entonces, w es continua y es la inversa de $z = e^w, -\pi < w < \pi$. Como e^w es holomorfa con $(e^w)' \neq 0$, podemos aplicar el Teorema de la Función Inversa. Por tanto, $\log z$ es holomorfa.*

$$z = e^{\log z} \Rightarrow$$
$$1 = e^{\log z} \frac{d}{dz}(\log z) = z \frac{d}{dz}(\log z) \Rightarrow$$
$$\frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{z}.$$

2.4. Funciones Harmónicas

Definición 2.2 (Ecuación de Laplace)**.** *La ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = 0$$

se llama ecuación de Laplace.

Definición 2.3 (Laplaciano)**.** *El operador*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$$

se llama Laplaciano.

Observación. *La ecuación de Laplace se escribe $\Delta u = 0$.*

Definición 2.4 (Función Armónica)**.** *Las funciones que satisfacen la ecuación de Laplace se llaman funciones armónicas. Sea $u : A \to \mathbb{R}$, $u \in C^2$ tal que*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Teorema 2.5. *Si $f = u + iv$ es holomorfa y $u, v \in C^2$. Entonces, u y v son armónicas.*

Observación. $u = \Re(f), v = \Im(f)$.

Demostración. *content*

Definición 2.5 (Conjugado Armónico)**.** *Sea $u : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ armónica y v armónica tal que $f = u + iv$ es holomorfa. Entonces, decimos que v es el conjugado armónico.*

Ejemplo. $f(z) = z^2$, $u = x^2 + y^2$, $v = 2xy$.

Teorema 2.6. *Sea D un disco abierto o $D = \mathbb{R}^2$, $u : D \to \mathbb{R}$ armónica. Entonces, existe v armónica conjugada.*

Demostración. *content*

Corolario 2.6.1. *Toda función armónica es localmente la parte real de una función holomorfa.*

2.5. Aplicaciones Conformes

Definición 2.6 (Vector Tangente). *Sea $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $0 \leq t < 1$ una curva diferenciable parametrizada con $z_0 = \gamma(0)$. Entonces,*

$$\gamma'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} = x'(0) + iy'(0)$$

es el vector tangente a γ en z_0.

Definición 2.7 (Ángulo entre dos curvas). *Definimos el ángulo entre dos curvas en z_0 como el ángulo entre sus vectores tangentes en z_0*

Teorema 2.7. *Sea $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ una curva diferenciable parametrizada con $z_0 = \gamma(0)$ y sea $f(z)$ una función diferenciable en z_0. Entonces la tangente de la curva $f(\gamma(t))$*

$$(f \circ \gamma)'(0) = f'(z_0)\gamma'(0).$$

Definición 2.8 (Función Conforme). *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciable y sean para dos curvas γ_1, γ_2 con $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$. Entonces, decimos que f es conforme en z_0 si las curvas $(f \circ \gamma_1)$, $(f \circ \gamma_2)$ tienen $\gamma_1'(f(z_0)) \neq 0$, $\gamma_2'(f(z_0)) \neq 0$ y el ángulo entre $(f \circ \gamma_1')(z_0)$ y $(f \circ \gamma_2')(z_0)$ es el mismo que el ángulo entre $\gamma_1'(z_0)$ y $\gamma_2'(z_0)$.*

Observación. *Una función conforme $f : D \to V$ es una función diferenciable con derivadas parciales continuas que es conforme $\forall z \in D$ e inyectiva.*

Teorema 2.8. *Si $f(z)$ es diferenciable en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$, entonces $f(z)$ es conforme en z_0.*

2.6. Integral de Funciones Complejas sobre Curvas

Definición 2.9 (Integral). *Sea $h : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un función compleja de una variable real y sean u, v sus partes real e imaginaria respectivamente tal que $h(t) = u(t) + iv(t)$. Suponemos que u, v son continuas. Entonces,* *llamamos la integral de h a*

$$\int_a^b h(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt,$$

donde las integrales de u y v tienen el sentido usual de cálculo unidimensional.

Definición 2.10. *Sea f continua y definida en un conjunto abierto $A \subset \mathbb{C}$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$una curva diferenciable a trozos tal que $\gamma([a,b]) \subset A$. Entonces,*

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i-1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

es la integral de línea de f a lo largo de γ.

Proposición 2.3. *Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, entonces*

$$\int_\gamma f = \int_\gamma [u(x,y)dx - v(x,y)dy] + i\int_\gamma [u(x,y)dy + v(x,y)dx]$$

Demostración.

$$f(\gamma(t))\gamma'(t) = [u(x(t),y(tb)) + iv(x(t),y(t))] \cdot [x'(t) + iy'(t)]$$

$$= [u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)] + i[v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t)]$$

donde integrado sobre $[a_i, a_{i+1}]$ tenemos la expresión requerida.

Definición 2.11 (Reparametrización). *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva diferenciable a trozos. Una curva diferenciable a trozos $\overline{\gamma}[\overline{a},\overline{b}] \to \mathbb{C}$ se llama reparametrización de γ si $\exists\alpha : [a,b] \to [\overline{a},\overline{b}]$ con $\alpha'(t) > 0, \alpha(a) = \overline{a}$ y $\alpha(b) = \overline{b}$ tal que $\gamma(t) = \overline{\gamma}(\alpha(t))$.*

Proposición 2.4. *Si $\overline{\gamma}$ es una reparametrización de γ, entonces*

$$\int_\gamma f = \int_{\overline{\gamma}} f$$

para $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donde $\gamma([a,b]) \subset \Omega$.

Proposición 2.5. *Sean f, g funciones continuas, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ curvas diferenciables, entonces*

(I) $\int_\gamma (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_\gamma f + c_2 \int_\gamma g$,

(II) $\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f$,

(III) $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_\gamma f + \int_\gamma f$.

Teorema 2.9. *Sea γ un curva diferenciable a trozos. Si $h(z)$ es una función continua en γ, entonces*

$$\Big| \int_\gamma h(z)dz \Big| \leq \int_\gamma |h(z)||dz|.$$

Además, si γ tiene longitud L y $|h(z)| \leq M$ en γ, entonces

$$\Big| \int_\gamma h(z)dz \Big| \leq ML.$$

Observación. $\int_\gamma |h(z)||dz| = \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt$.

Demostración. *Sea $g : [a,b] \to \mathbb{C}$, entonces*

$$\Re\bigg(\int_a^b g(t)dt \bigg) = \int_a^b \Re(g(t))dt$$

dado que $\int_a^b g(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt = u(t) + iv(t)$.

Sea $\int_a^b g(t)dt = re^{i\theta}$, entonces $r = \int_a^b e^{-i\theta} g(t)dt$

$$\Rightarrow r = \Re(r) = \int_a^b \Re(e^{-i\theta} g(t))dt$$

como $\Re(e^{-i\theta}g(t)) \leq |e^{-i\theta}g(t)| = |g(t)|$, ya que $|e^{-i\theta}| = 1$, entonces tene-

mos que $\int_a^b \Re(e^{-i\theta}g(t))dt \leq \int_a^b |g(t)|dt$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b g(t)dt\right| = r \leq \int_a^b |g(t)|dt.$$

Y usando $|zz'| = |z||z'|$ *tenemos que*

$$|\int_\gamma f| = |\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt = \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt$$

Teorema 2.10 (Fundamental del Cálculo)**.** *Sea* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ *una curva diferenciable a trozos,* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto tal que* $\gamma([0,1]) \subset \Omega$*,* $F : \Omega \to \mathbb{C}$ *función holomorfa con* F' *continua. Entonces,*

$$\int_\gamma F'(z)dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$$

Observación. *Si* $\gamma(0) = \gamma(1)$*, entonces* $\int_\gamma F'(z)dz = 0$

Demostración.

$$\int_\gamma F'(z)dz = \int_0^1 F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^1 (F\circ\gamma)'(t)dt = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$$

Corolario 2.10.1. *Si* γ *es una curva cerrada, entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Teorema 2.11. *Si* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *es abierto convexo, y* $f : \Omega \to \mathbb{C}$*es continua, entonces* f *tiene primitica en* Ω *si y solo si*

$$\int_{\partial T} f(z)dz$$

para $T \subset \Omega$ *triángulo.*

Demostración. *content*

2.7. Teorema de Cauchy

Definición 2.12 (Teorema de Green)**.** *Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto conexo acotado tal que ∂D es una una curva cerrada y simple, Ω abierto tal que $\overline{D} \subset \Omega$ y $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Entonces,*

$$\int_{D^+} P dx Q dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx dy$$

Teorema 2.12 (Cauchy)**.** *Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto conexo acotado tal que su frontera es una curva simple cerrada, Ω abierto tal que $\overline{D} \subset \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función holomorfa tal que f' es continua. Entonces,*

$$\int_D f(z) dz = 0$$

Demostración. *Sea $f = u + iv$,*

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z) dz$$

$$= \int_\gamma (u + iv)(dx + dy)$$

$$= \int_\gamma (udx - vdy) + i \int_\gamma (udy + vdx)$$

donde aplicando el teorema de Green, tenemos que

$$\int_\gamma f = \iint_A \left[-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx dy + i \iint_A \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy$$

a partir de las ecuaciones de Cauchy-Riemann ambos términos son nulos.

Teorema 2.13 (Fórmula Integral de Cauchy)**.** *Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto, conexo y acotado tal que ∂D es una curva simple cerrada, Ω abierto tal que $\overline{D} \subset \Omega$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ un función holomorfa tal que f' es continua. Entonces,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{w - z} dw, \forall z \in D$$

Demostración. *Sea $z \in D, \epsilon > 0, D_\epsilon = D \setminus \{|w - z| \leq \epsilon\}$. La frontera ∂D^+ es la unión de ∂D y $\{|w - z| = \epsilon\}$ con orientación positiva.*

Dado que $\frac{f(z)}{w-z}$ es holomorfa para $w \in D_\epsilon$, por el teorema de Cauchy tenemos

$$\int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{w - z} dw = 0$$

separando la frontera e invirtiendo la orientación se tiene

$$\Rightarrow \int_{|w-z|=\epsilon} \frac{f(z)}{w - z} dw = \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

si escribimos $w = z + \epsilon e^{i\theta}, dw = i\epsilon e^{i\theta} dw$, obtenemos

$$\int_0^{2\pi} f(z + \epsilon e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{f(w)}{w - z} dw$$

por el teorema del valor medio para la funciones armónicas, la integral de la izquierda coincide con $f(z)$.

Teorema 2.14 (Fórmula Integral de Cauchy para las Derivadas)**.** *Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto, conexo y acotado talque ∂D es unacurva simple cerrada, $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto tal que $\overline{D} \subset \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función holomorfa tal que f' es continua. Entonces,*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw, \forall z \in D, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. *Sea $z \in D$ entonces $dist(z, \partial D) = r > 0$, f continua en*

$\partial D \Rightarrow \exists M > 0 : |f(w)| < M, \forall w \in \partial D$ *y* $|\frac{1}{w-z}| \leq \frac{1}{r}$

$$|\frac{f(w)}{w-z}| \leq \frac{M}{r}, \forall w \in \partial D$$

y dado que $\frac{d}{dz}(\frac{f(w)}{w-z}) = \frac{f(w)}{w-z}^2$ *entonces, por el teorema de derivación bajo el signo integral tenemos que*

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(w)}{(w-z)^2}dz$$

donde usando inducción y el teorema de derivación bajo el signo integral podemos ver que se cumple para las derivadas de orden n.

Corolario 2.14.1. *Sea* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *función holomorfa,* $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ *continua. Entonces* f *es infinitamente derivable.*

Teorema 2.15 (Morera)**.** *Sea* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *función continua y* $\int_{\partial T} f(z)dz = 0, \forall T \subset \Omega$ *triángulo. Entonces,* f *es infinitamente derivable.*

Demostración. *(Teorema fundamental del cálculo)* $\Rightarrow f$ *tiene primitiva, es decir,* $\exists F : f = F', F$ *holomorfa en* D *y* $F' = f$ *continua. Entonces, por el corolario anterior* F *infinitamente derivable* $\Rightarrow F'$ *infinitamente derivable.*

Teorema 2.16 (Goursat)**.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto,* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfa. Entonces,* f' *es continua.*

Demostración. *Esta demostración se basa en el teorema de Morera. Sea* T *un triángulo cerrado en* D*. Subdividimos* T *en cuatro subtriángulos iguales. Como la integral de* $f(z)$ *alrededor de* ∂T *es la suma de las integrales a lo largo de los subtriángulos, hay almenos un subtriángulo* T_1 *tal que*

$$\left|\int_{\partial T_1} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right|$$

Ahora, subdividimos T_1 *en cuatro subtriángulos iguales y repetimos el proceso. De manera inductiva obtenemos una sucesión de triángulos encajados*

$\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$\left|\int_{\partial T_n} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial T_{n-1}} f(z)dz\right| \geq \cdots \geq \frac{1}{4^n}\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right|$$

Dado que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es decreciente y* $\operatorname{diam}(T_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $T_n \xrightarrow{n\to\infty} z_0 \in D$. *Y dado que* $f(z)$ *es diferenciable en* z_0

$$|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)| \leq \epsilon_n . z \in T_n$$

donde $\epsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. *Sea* L *la longitud de* ∂T. *Entonces, la longitud de* T_n *es* $\frac{L}{2^n}$. *Si* $z \in T_n$ *entonces*

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)| \leq \epsilon_n |z - z_0| \leq 2\epsilon_n \frac{L}{2^n}$$

Por el toerema de Cauchy y la estimación de Cauchy

$$\Big|\int_{\partial T_n} f(z)dz\Big| = \Big|\int_{\partial T_n} df(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)\Big| \leq 2\epsilon_n \frac{L}{2^n}\cdot\frac{L}{2^n} = \frac{2L^2\epsilon_n}{4^n}$$

$$\Rightarrow \Big|\int_{\partial T} f(z)dz\Big| \leq 4^n \Big|\int_{\partial T_n} f(z)dz\Big| \leq 2L^2\epsilon_n$$

Como $\epsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, *entonces*

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0$$

Por el Teorema de Morera $f(z)$ *es holomorfa.*

Teorema 2.17 (Cauchy-Goursat)**.** *Sea* $D \subset \mathbb{C}$ *abierto, conexo y acotado tal que* ∂D *es una curva simple cerrada,* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto tal que* $\overline{D} \subset \Omega, f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfa. Entonces,*

$$\int_{\partial D^+} f(z)dz = 0$$

Definición 2.13 (Simplemente Conexo)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo. Entonces, si $\mathbb{C}^* \setminus \Omega$ es conexo, decimos que Ω es simplemente conexo.*

Observación. *$\Omega \subset \mathbb{C}$ conexo es simplemente conexo si $\forall \gamma \in \Omega$ curva cerrada es homotópica.*

Proposición 2.6. *Una curva que se puede transformar en un punto es una curva homótopa.*

Teorema 2.18 (Cauchy Homotópico)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplemente conexo, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y $\gamma \subset \Omega$ curva cerrada simple. Entonces,*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Demostración. *Ω simplemente conexo $\Rightarrow$ γ es homotópica a una curva constante $\lambda(t) = z_0, \forall t \Rightarrow \int_\gamma f = \int_\lambda f = 0$.*

Teorema 2.19 (Desigualdades de Cauchy)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$, $D = \overline{D}(z_0, R) \subset \Omega$, f holomorfa en D. Si $|f(z)| \leq M, \forall z \in \partial D$, entonces*

$$\left|f^{(k)}(z_0)\right| \leq \frac{k!}{R^k}M, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Demostración. *Por el teorema de Cauchy*

$$f_{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}dw$$

$$\Rightarrow |f_{(k)}(z_0)| = \frac{k!}{2\pi}\Big|\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}dw\Big|$$

Ahora,

$$\Big|\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\Big| \leq \frac{M}{R^{k+1}}$$

dado que $|w - z_0| = R, \forall w \in \partial D$. Entonces,

$$|f_{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^{k+1}} \cdot L$$

donde L es la longitud de γ.

Teorema 2.20 (Liouville)**.** *Sea f entera. Si $\exists M > 0 : |f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.*

Demostración. *Por las desigualdades de Cauchy con $k = 1$, $\forall z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow |f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}$ y para z_0, $\frac{M}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \Rightarrow |f'(z_0)| = 0 \Rightarrow f'(z_0) = 0 \Rightarrow f$ es constante.*

Teorema 2.21 (Teorema Fundamental del Álgebra)**.** *Sea $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$, $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$. Entonces, $\exists z_0 \in \mathbb{C} : P(z_0) = 0$.*

Demostración. *Sea $p(z_0) \neq 0, \forall z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces, $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ es entera $\Rightarrow f(z)$ no es constante dado que $a_n \neq 0$. Basta ver que, por el teorema de Liouville, que $f(z)$ es acotada.*

Sea $M > 0$, a partir de $P(z)$ por la desigualdad triangular

$$|P(z)| \geq |a_n||z|^n - |a_0| - \cdots - |a_{n-1}||z|^{n-1}$$

Sea $a = |a_0| + \cdots + |a_{n-1}|$. Si $z > 1$ entonces

$$|P(z)| \geq |z|^{n-1}\left(|a_n||z| - \frac{|a_0|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_1|}{|z|^{n-2}} - \cdots - \frac{|a_{n-1}|}{1}\right)$$

$$\geq |z|^{n-1}(|a_n||z| - a)$$

Sea $K = \max\{1, \frac{M+a}{|a_n|}\}$ entonces, si $|z| > K \Rightarrow |P(z)| \geq M$. Por tanto, si $|z| > K \Rightarrow \frac{1}{|P(z)|} < \frac{1}{M}$. Pero si z es tal que $|z| \leq K$, entonces $\frac{1}{P(z)}$ es acotada y en valor absoluto por que es continua, es decir, $\exists L > 0 : \frac{1}{|P(z)|} < \max\{\frac{1}{M}, L\} \Rightarrow |f(z)|$ es acotada en $\mathbb{C}$.

Capítulo 3

Representación Analítica de las funciones holomorfas

Nota. *Si f holomorfa se puede representar localmente como una serie de potencias convergente, en particular, una serie de Taylor.*

3.1. Sucesiones y Series

Definición 3.1 (Sucesión Convergente)**.** *Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de numeros complejos. Entonces, si*

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : |z_n - z_0| < \epsilon, \forall n \geq N,$$

decimos que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a z_0 y lo denotamos $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z_0$.

Definición 3.2 (Serie Convergente)**.** *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números complejos. Entonces, si la sucesión de sumas parciales*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

converge a S, decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a S y lo denotamos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

¿AÑADIR TEST CONVERGENCE?

Proposición 3.1. *Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos. Entonces,*

$$z_n \xrightarrow{n\to\infty} z_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Re(z_n) \xrightarrow{n\to\infty} \Re(z_0) \\ \Im(z_n) \xrightarrow{n\to\infty} \Im(z_0) \end{cases}$$

Definición 3.3 (Convergencia absoluta). *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie. Entonces, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, decimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.*

Observación. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

Proposición 3.2 (Producto de Series). *Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ series con $a_n, b_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$. Si*

$$c_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n-k} a_k$$

entonces,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$$

Proposición 3.3. *Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ series con $a_n, b_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ abosolutamente convergentes. Entonces, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ es absolutamente convergente.*

Definición 3.4 (Convergencia Puntual). *Sea $f, f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ funciones, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de funciones tal que $f_n(z) \xrightarrow{n\to\infty} f(z), \forall z \in \Omega$. Entonces, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} f$.*

Observación. $\sum f_n(z) \xrightarrow{n\to\infty} f(z), \forall z \in \Omega \Rightarrow \sum f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$.

Definición 3.5 (Convergencia Uniforme). *Sea $f, f_n : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funciones, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de funciones. Entonces, si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : |f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \forall n \geq N, \forall z \in \Omega$$

entonces decimos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge converge uniformemente y lo denotamos $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} f$ uniformemente.

Observación. $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *no depende de* $z \in \Omega$

Proposición 3.4. *Sea* $f, f_n : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *funciones,* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesión de funciones tal que* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} f$ *uniformemente en* Ω*. Entonces,*

$$f_n \text{ continua } \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f \text{ continua}$$

Observación. f *no es continua* $\Rightarrow \{f_n\}$ *no converge uniformemente.*

Teorema 3.1 (Weierstrass)**.** *Sea* $f_n : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *tal que* $\exists M_n : |f_n(z)| \leq M_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \Omega$*. Si* $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *converge, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente en* Ω

Observación. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente en* $\Omega \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ *converge unifomemente en* Ω *(convergencia absoluta de* $\sum f_n$*).*

Teorema 3.2. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto,* $f, f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ *funciones,* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesión de funciones tal que* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} f$ *uniformemente en* Ω *y* f_n *holomorfa* $\forall n \in \mathbb{N}$*. Entonces,* f *es holomnorfa.*

Demostración. f_n *holomorfa* $\xRightarrow{T.Cauchy} \int_{\partial T} f_n(z)dz = 0$ *y*

$$\int_{\partial T} f_n(z)dz \xrightarrow{n\to\infty} \int_{\partial T} f(z)dz$$

$\Rightarrow \int_{\partial T} f(z)dz = 0 \Rightarrow f$ *holomorfa.*

Corolario 3.2.1. *Si* $\{f_n\} \xrightarrow{n\to\infty} f$ *uniformemente en* K *compacto* $\forall K \subset \Omega$*, también se cumple el teorema anterior.*

3.2. Series de Potencias

Definición 3.6 (Serie de Potencias)**.** *Sean* $a_1, a_2, \cdots$ *tal que* $a_i \in \mathbb{C}, \forall i$*,*

$z_0 \in \mathbb{C}$. *Entonces,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

es una seríe de potencias.

Observación. *Sea* $w = z - z_0$ *entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_{z0})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ *es la traslación de la serie.*

Teorema 3.3. *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. *Entonces,* $\exists! R \geq 0$ *tal que*

(I) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *converge absolutamente en* $D(0, R)$,

(II) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *no converge si* $|z| > R$,

(III) $R > 0 \Rightarrow \forall r \in (0, R), \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *converge uniformemente en* $\overline{D}(0, R)$.

Además, $R^{-1} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$

Demostración. *content*

Notación.

- R *es el radio de convergencia,*
- $D(0, R)$ *es el disco de convergencia.*

Proposición 3.5 (Criterio del Cociente)**.** *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *una serie de potencias. Si*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

existe, entonces es igual a R, *el radio de convergencia.*

Ejemplo.

(I) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *tiene* $R = 1$ *ya que* $a_n = 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = 1$.

(II) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *tiene* $R = +\infty$ *ya que* $a_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = n + 1 \xrightarrow{n \to \infty} \infty$.

(III) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n n!$ *tiene radio de convergencia* $R = 0$ *ya que* $|\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

3.3. Funciones Analíticas

Teorema 3.4 (Derivada de Serie de Potencias)**.** *Sea $f : D(a, R) \to \mathbb{C}$ tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

con R radio de convergencia. Entonces, f es analítica y

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$$

tiene el mismo radio de convergencia y los coeficientes vienen dados por

$$a_n = \sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Demostración. *Supongamos que $a = 0$. Sea $g : D(0, R) \to \mathbb{C}$ tal que*

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Queremos ver que $g(z) = f'(z), \forall z \in D(0, R)$. Sea $z_0 \in D(0, R)$ y $r > 0$ tal que $D(z_0, 2r) \subset D(0, R)$. Si $z \in D(z_0, r)$ entonces

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^n - z_0^n)$$

$$= a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z_0^{n-1})$$

donde $z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots z_0^{n-1})$. Entonces, tomado límites

$$f'(z) = a_1 + \lim_{z \to z_0} \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z_0^{n-1})$$

$$= a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z_0^{n-1} + z_0^{n-2} z_0 + \cdots + z_0^{n-1})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} = g(z_0)$$

dado que la serie converge uniformemente por ser función continua.

Observación. $f^{(n)}(z) = n!a_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)(z-z_0)^{k-n}$
Observación. *Las funciones holomorfas son analíticas.*

Teorema 3.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, $z_0 \in \Omega$ y $D(z_0, R) \subset \mathbb{C}$. Entonces,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

converge en $D(z_0, r)$ con $r \geq R$ y

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, R)$$

Demostración. *Sea $D = D(z_0, R)$. Por la fórmula integral de Cauchy*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Queremos usar la serie geométrica para expandir el integrando como una serie de potencias en $z - z_0$. Como $z \in D$ y $w \in \partial D$, entonces

$$\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| < 1$$

donde

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}$$
$$= \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$$

por tanto,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\left[\frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n\right] dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \right] dw$$

Ahora, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n$$

converge uniformemente en D *y* $\frac{f(w)}{w-z_0}$ *es continua en* $\partial D \Rightarrow$ *está acotada, entonces la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

converge uniformemente en ∂D *tal que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} = \frac{f(w)}{w-z}$$

Por tanto,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(z-z_0)^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right]$$

Corolario 3.5.1. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}, f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfa. Entonces,* $\forall z_0 \in \Omega$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, R)$$

donde $R = \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$

Ejemplo. *hacer ejemplos* e^z *y* $\log(1+z)$

3.4. Ceros de Funciones Analíticas

Proposición 3.6. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica. Si $f^{(n)}(z_0) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}^+$, entonces $\exists r > 0 : f(z) = 0, \forall z \in D(z_0, r)$.*

Proposición 3.7. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica tal que f no es idéticamente nula. Entonces, $\exists n \in \mathbb{Z}^+ : f^{(n)}(z_0) \neq 0$.*

(I) *Si $n = 0$, entonces $f(z_0) \neq 0$.*

(II) *Si $n > 0$, entonces $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x) = 0$ pero $f^{(n)}(x) \neq 0$. En este caso decimos que f tiene un cero de orden n en z_0.*

Corolario 3.5.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica. Si $f(z_0) = 0$ y $\exists n \in \mathbb{Z}^+ : f^{(n)}(z_0) \neq 0$, entonces $\exists \varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ anlítica en $D(z_0, r)$ tal que $\varphi(z_0) \neq 0$ y*

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z), \forall z \in D(z_0, r)$$

y también $\exists r' > 0 : f(z) = 0$ solo para z_0 en $D(z_0, r')$

Corolario 3.5.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica, $z_0 \in \Omega$. Si $\exists \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de puntos distintos en Ω tal que $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z_0$ y $f(z_k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$, entonces $f(z) = 0, \forall z \in D(z_0, r)$ con r de manera que $D \subset \Omega$.*

Proposición 3.8. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa. Si $\exists z_0 \in \Omega : f^{(n)}(z_0) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $f(z) = 0, \forall z \in \Omega$.*

Observación. *Si Ω no es conexo $\Omega = U \cup V$ para U, V abiertos, entonces f puede tomar valor $f = 0$ en U y $f = 75$ en V.*

Demostración. *Sea $G = \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0, \forall n \geq 0\}$. Entonces, $z_0 \in G \Rightarrow G \neq \emptyset$. Luego, $\forall z \in G, \exists r > 0 : D(z, r) \subset \Omega$ tal que*

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(w - z)^n = 0, \quad \forall w \in D(z, r)$$

entonces, $D(z,r) \subset G \Rightarrow G$ *abierto. Ahora,*

$$G = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0\}$$

la intersección de cerrados es cerrado $\Rightarrow G$ *es cerrado. Por tanto,* G *abierto y cerrado no vacío* $\Rightarrow G = \Omega$.

Observación. G *cerrado en* Ω*, cerrado relativo.*

Corolario 3.5.4. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto conexo. Sea* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfa tal que* f *no es idénticamente nula. Supongamos* $f(a) = 0$*, entonces* $\exists m \in \mathbb{N}$ *y* $g : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfa tal que* $g(a) \neq 0$ *y* $f(z) = (z-a)^m g(z)$.

Demostración. *content*

Teorema 3.6 (Principio de Identidad)**.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto conexo. Sean* $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfas. Si* $A \subset \Omega : A' \cap \Omega \neq \emptyset$ *y* $f(z) = g(z), \forall z \in A$*, entonces* $f(z) = g(z), \forall z \in \Omega$.

Demostración. *Suponemos que* $g = 0$*. sea* $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega : z_i \neq z_j, \forall i \neq j$ *y* $z_n \xrightarrow{n \to \infty} z_0 \in \Omega$*. Entonces,* $f(z_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(z_0) = 0$*. Sea* m *el orden del cero* z_0*. Si desarrollamos* f *en* z_0

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^m \cdot h(z)$$

donde h *es holomorfa y* $h(z_0) = a_m \neq 0$*. Entonces,* $\exists r > 0 : h(z) \neq 0, \forall z \in D(z_0, r)$*. Por tanto,*

$$f(z_n) = (z_n - z_0)^m h(z_n) \neq 0$$

es una contradicción.

Teorema 3.7 (de La Aplicación Abierta)**.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto. Sea* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfa no constante. Entonces,* $f(G)$ *es abierto* $\forall G \subset \Omega$.

Demostración. *Basta ver que $f(\Omega)$ es abierto. Por el Principio de Identidad, los ceros de f' son aislados. Entonces,*

$$\Omega = (\Omega \setminus \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \cup D_1 \cup D_2 \cdots$$

donde $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son los ceros de f' y D_n son los discos centrados en z$_n$.$Portanto$,f'(z) $\neq 0, \forall z \in \Omega \setminus \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xRightarrow{T.F.I} f(\{\Omega \setminus \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\})$ es abierto. Como $f(D_n)$ es abierto $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $f(\Omega)$ es abierto.

Teorema 3.8 (Principio del Módulo Máximo)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa. Si $\exists a \in \Omega : |f(a)| \geq |f(z)|, \forall z \in \Omega$, entonces f constante.*

Demostración. *Si f no es constante, entonces $f(\Omega)$ es abierto, pero $f(a) \notin f(\mathring{\Omega})$, es una contradicción.*