Ejercicios Probabilidad

Hugo Del Castillo Mola

20 de octubre de 2022

Índice general

Capítulo 1

Probabilidad

1.1. Entrega 3

Ejercicio 1.1 (Ejercicio 2, Hoja 4). *Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{2}$ y $P(A|B) = \frac{1}{4}$. Indicar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:*

1. $A \subset B$,
2. A y B *independientes*,
3. A^c y B^c *independientes*,
4. A y B *incompatibles*,
5. $P(A^c|B^c) = \frac{1}{2}$,
6. $P(A|B) + P(A|B^c) = 1$

Solución. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *donde* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $A, B \in \mathcal{A}$ *tal que* $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{2}$ *y* $P(A|B) = \frac{1}{4}$.

(I) *(FALSO) Supongamos que* $A \subset B$*, entonces* $A \cap B = A \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)$ *y*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

Es contradicción, dado que $P(B|A) = \frac{1}{2}$*. Por tanto,* $A \not\subset B$.

(II) *(CIERTO) Sabemos que*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

entonces

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(A \cap B)$$
$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Ahora,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$\Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Como A y B son independientes $\Leftrightarrow$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A)$$

donde $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ y $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Deducimos que A y B son independientes.

(III) *(CIERTO) Veamos que A y B independientes $\Rightarrow$ A^c y B^c independientes. Queremos ver que $P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c)$.*

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

donde $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ por ser A y B independientes,

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)$$

$$= 1 - P(A) - P(B)(1 - P(A)) = P(A^c) - P(B) \cdot P(A^c)$$
$$= P(A^c)(1 - P(B^c)) = P(A^c) \cdot P(B^c)$$

(IV) *(FALSO) Si A y B son incompatibles, $P(A \cap B) = 0$ pero $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$.*

(V) *(FALSO) Por ser A^c y B^c independientes, tenemos que*

$$P(A^c|B^c) = P(A^c) = 1 - P(A) = \frac{3}{4} \neq \frac{1}{2}$$

(VI) *(FALSO) Por ser A y B independientes, A^c y B^c son independientes. También lo son A y B^c ya que*

$$P(A^c \cap B) = P(B \setminus (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B)$$

donde $A \cap B \subset B$, entonces

$$P(A^c \cap B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B) \cdot P(A^c)$$

A partir de la independencia de estos sucesos,

$$P(A|B) + P(A|B^c) = P(A) + P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 1.2 (Ejercicio 6, Hoja 4)**.** *Sean A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sucesos independientes. Demostrar que:*

(I) *$A_1 \cup A_2$, $A_3 \cap A_4$ y A_5 son independientes,*

(II) *$(A_1 \cup A_2) \cap A_3$ y ${A_4}^c \cup {A_5}^c$ son independientes.*

Solución. *Veamos primero que si A, B y C son independientes, entonces $A \cup B$ y C también lo son.*

$$P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C))$$

$$\begin{aligned}
&= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
&= P(A) \cdot P(C) + P(B) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \\
&= P(C) \cdot (P(A) + P(B) - P(A) * P(B)) \\
&= P(C) \cdot P(A \cup B)
\end{aligned}$$

por tanto, $A \cup B$ y C son independientes.

Veamos ahora que si A, B y C son independientes, entonces $A \cap B$ y C son independientes.

$$\begin{aligned}
P((A \cap B) \cap C) &= P(A \cap B \cap C) \\
&= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \\
&= P(A \cap B) \cdot P(C)
\end{aligned}$$

por tanto, $A \cap B$ y C son independientes.

(I) Por lo que hemos visto antes tenemos que $A_1 \cup A_2$ y A_5 son independientes y $A_3 \cap A_4$ y A_5 son independientes. Vemos que $A_1 \cup A_2$ y $A_3 \cap A_4$ son independientes.

$$P((A_1 \cup A_2) \cap (A_3 \cap A_4)) = P((A_1 \cap A_3 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_3 \cap A_4))$$

$$= P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - P((A_1 \cap A_3 \cap A_4) \cap (A_2 \cap A_3 \cap A_4))$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_3 \cap A_4) + P(A_2) \cdot P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_3 \cap A_4) + P(A_2) \cdot P(A_3 \cap A_4) - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3 \cap A_4)$$

$$= P(A_3 \cap A_4) \cdot (P(A_1) + P(A_2) + P(A_1) \cdot P(A_2))$$

$$= P(A_3 \cap A_4) \cdot P(A_1 \cup A_2)$$

Por tanto, $A_1 \cup A_2$ y $A_3 \cap A_4$ son independientes.

(II) Vemos que $(A_1 \cup A_2) \cap A_3$ y ${A_4}^c \cup {A_5}^c$ son independientes.

Sean A y B sucesos independientes arbitrarios $\Rightarrow$ A y B^c independientes, A^c y B^c independietes, y A^c y B independientes (demostrado en el ejercicio 2). Como $A_4^c \cup A_5^c = (A_4 \cap A_5)^c$ entonces, basta ver que $(A_1 \cup A_2) \cap A_3$ y $A_4 \cap A_5$ son independientes.

$$P((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \cap (A_4 \cap A_5)) = P\Big[\big[(A_1 \cup A_2) \cap (A_4 \cap A_5)\big] \cap \big[A_3 \cap (A_4 \cap A_5)\big]\Big]$$

$$= P((A_1 \cup A_2) \cap (A_4 \cap A_5) \cap A_3)$$

donde $A_1 \cup A_2$, $A_4 \cap A_5$ y A_3 son independientes. Por tanto,

$$P((A_1 \cup A_2) \cap (A_4 \cap A_5) \cap A_3) = P(A_1 \cup A_2) \cdot P(A_4 \cap A_5) \cdot P(A_3)$$

$$= P((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \cdot P(A_4 \cap A_5)$$

entonces $(A_1 \cup A_2) \cap A_3$ y $A_4 \cap A_5$ son independientes $\Rightarrow$ $(A_1 \cup A_2) \cap A_3$ y $A_4^c \cup A_5^c$ son independientes.