

Topología

Hugo Del Castillo Mola

6 de octubre de 2022

Índice general

I	Topología General	2
1.	Espacios Topológicos Arbitrarios	3
1.1.	Espacios Topológicos	3
1.2.	Entornos	8
1.3.	Bases	13
1.4.	Subespacios	15
1.5.	Funciones continuas	16
1.6.	Espacio Producto	19
1.7.	Espacio Cociente	22
1.8.	Espacio Suma	25
2.	Propiedades de Separación	27
2.1.	Espacio Regular	31
2.2.	Espacio Completamente Regular	32
2.3.	Espacios Normales	34

Parte I

Topología General

Capítulo 1

Espacios Topológicos Arbitrarios

1.1. Espacios Topológicos

Definición 1.1 (Topología). Se llama topología sobre un conjunto X a $\forall \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ que verifique:

(G1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(G2) $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$

(G3) $\forall \{A_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$

Observación. Al par (X, \mathcal{T}) se denomina espacio topológico y los elementos de X son puntos del espacio topológico.

Ejemplo. (I) Sea X un conjunto, entonces $\mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_D$ es una topología y se llama topología discreta.

(II) La colección $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ es también una topología y la llamamos topología trivial.

(III) Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{T}_d = \{U \subset X : \forall x \in U, \epsilon > 0 : B_\epsilon \subset U\}$ es una topología y la llamamos topología inducida por la métrica d .

Observación. Toda métrica induce un espacio topológico pero no todo espacio topológico es inducido por una métrica.

Definición 1.2 (Espacio Metrizable). Sea (X, \mathcal{T}) e.t., decimos que es un espacio metrizable si \exists métrica sobre X tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Definición 1.3 (Conjunto Abierto). Sea (X, \mathcal{T}) espacio topológico, decimos que $U \subset X$ es un conjunto abierto si $U \in \mathcal{T}$.

Observación. Si U es un conjunto abierto, entonces $X \setminus U$ es un conjunto cerrado.

Observación. Existen conjuntos que son abiertos y cerrados simultáneamente. Y existen conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.

Ejemplo. Sea el espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ entonces $S = (0, 1]$ no es ni abierto ni cerrado.

Ejemplo. Sea el espacio topológico (X, \mathcal{T}_d) donde $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ entonces $\forall S \subset X$, S es abierto y cerrado simultáneamente.

Definición 1.4 (Comparación de Topologías). Sean \mathcal{T} y \mathcal{T}' dos topologías sobre un conjunto $X \neq \emptyset$. Si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ se dice que \mathcal{T}' es más fina (más fuerte) que \mathcal{T} . También podemos decir que \mathcal{T} es menos fina que \mathcal{T}' .

Notación. Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} = \{C \subset X : C \text{ es cerrado en } (X, \mathcal{T})\}$.

Proposición 1.1 (Dualidad conjuntos abiertos y cerrados). Sea \mathcal{F} es la familia de conjuntos cerrados de un espacio topológico (X, \mathcal{F}) .

(F1) \emptyset, X son cerrados.

(F2) $\forall C_1, C_2$ cerrados $\Rightarrow C_1 \cup C_2$ es cerrado.

(F3) $\forall \{C_j\}_{j \in J}$ cerrados $\Rightarrow \bigcap_{j \in J} C_j$ es cerrado.

Recíprocamente, si $X \neq \emptyset$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ y \mathcal{F} cumple (i, ii, iii) entonces la colección de los miembros complementarios a \mathcal{F} es una topología sobre X en donde la familia de cerrados es \mathcal{F} .

Observación. Este resultado muestra la relación entre las nociones de conjuntos abiertos y cerrados. Cualquier resultado sobre conjuntos abiertos en un espacio topológico se convierte en uno sobre cerrados al remplazar **abierto** por **cerrado** y \cup por \cap .

Definición 1.5 (Adherencia). Sea (X, \mathcal{T}) e.t. y $S \subset X$ se llama adherencia de S en (X, \mathcal{T}) al conjunto

$$\bar{S} = \bigcap \{C \subset X : C \text{ es cerrado y } S \subset C\}$$

Observación. \bar{S} es cerrado, $S \subset \bar{S}$ y \bar{S} es el menor cerrado que contiene a S .

Lema 1.0.1. Si $A \subset B$, entonces $\bar{A} \subset \bar{B}$.

Demostración. Como $B \subset \bar{B}$, $A \subset B \Rightarrow A \subset \bar{B}$ y por ser \bar{B} cerrado, se tiene que $\bar{A} \subset \bar{B}$.

Proposición 1.2 (Propiedades Adherencia). Sea (X, \mathcal{T}) e.t. entonces

- (K1) $\bar{\emptyset} = \emptyset$,
- (K2) $\forall S \subset X, S \subset \bar{S}$,
- (K3) $\forall S \subset X, \bar{\bar{S}} = S$,
- (K4) $\forall A, B \subset X, \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$,
- (K5) $\forall C \subset X, C \text{ es cerrado} \Leftrightarrow C = \bar{C}$.

Demostración. (iv) Sea (X, \mathcal{T}) espacio topológico. Dado que $A \cup B \subset \overline{A \cup B}$ se tiene que $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$. Por otro lado, $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$ entonces $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$ y $\bar{B} \subset \overline{A \cup B} \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Teorema 1.1. Sea $X \neq \emptyset$ y $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X) : S \mapsto \varphi(S) \equiv \bar{S}$ tal que φ cumple las 4 propiedades anteriores. Entonces, existe una única topología \mathcal{F} sobre X tal que $\forall S \subset X, \varphi(S)$ es la adherencia de S en (X, \mathcal{F}) .

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{F \subset X : \bar{F} = F\} \subset \mathcal{P}(X)$. Queremos ver que se cumplen las propiedades de Prop.1.1.(i, ii, iii).

(I) Por Prop.1.2(i, ii).

(II) Por Prop.1.2(iv), sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Entonces, $\overline{F_1 \cup F_2} = \overline{F_1} \cup \overline{F_2} = F_1 \cup F_2 \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.

(III) Si $F \subset G$ por Prop.1.2(iv) $\overline{G} = \overline{F} \cup (\overline{G \setminus F}) \Rightarrow \overline{F} \subset \overline{G}$ Ahora, sean $F_j \in \mathcal{F}, \forall j \in J$ Entonces, $\bigcap_{j \in J} F_j \subset F_j, \forall j \in J \Rightarrow \overline{\bigcap_{j \in J} F_j} \subset \overline{F_j}, \forall j \in J$ y por tanto, $\overline{\bigcap_{j \in J} F_j} \subset \bigcap_{j \in J} \overline{F_j} = \bigcap_{j \in J} F_j$ y por Prop.1.2(ii) se tiene que $\overline{\bigcap_{j \in J} F_j} = \bigcap_{j \in J} F_j$, esto es, $\bigcap_{j \in J} F_j \in \mathcal{F}$.

Por tanto, \mathcal{F} es la familia de cerrados de algún e.t. (X, \mathcal{T}) . Falta por ver que la adherencia es la operación φ . Dado que $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$ se tiene que $\overline{S} \in \mathcal{F}$ y por Prop.1.2(ii) $S \subset \overline{S}$. Si $C \in \mathcal{F}$ tal que $S \subset C$ entonces $\overline{S} \subset \overline{C} = C \Rightarrow \overline{S}$ es el elemento de \mathcal{F} más pequeño que contiene a S .

Observación. A la operación anterior se le llama operación de clausura de Kuratowski.

Definición 1.6 (Interior). Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $S \subset X$ se llama interior de S en (X, \mathcal{T}) al conjunto

$$\overset{\circ}{S} = \bigcup \{A \subset X \text{ abierto y } A \subset S\}.$$

Observación. $\overset{\circ}{S}$ es abierto de \mathcal{T} , $\overset{\circ}{S} \subset S$ y es el mayor abierto contenido en S .

Proposición 1.3 (Propiedades interior). content

Proposición 1.4. Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $S \subset X$. Entonces:

$$(I) X \setminus \overline{S} = (X \setminus S)^\circ.$$

$$(II) X \setminus \overset{\circ}{S} = \overline{X \setminus S}.$$

Observación. $\overline{S^c} = \overset{\circ}{S}^c$.

Demostración. (I) $X \setminus \bigcap_{C \in \mathcal{F}: S \subset C} C = \bigcup_{C \in \mathcal{F}: S \subset C} X \setminus C = \bigcup_{G \in \mathcal{T}: G \subset X \setminus S} G = (X \setminus S)^\circ$

$$(II) X \setminus \overset{\circ}{S} = X \setminus \bigcup_{G \in \mathcal{T}: G \subset S} G = \bigcap_{G \in \mathcal{T}: G \subset S} (X \setminus G) = \bigcap_{C \in \mathcal{F}: X \setminus S \subset C} C =$$

$$\overline{X \setminus S}$$

Definición 1.7 (Frontera). Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $S \subset X$. Se llama frontera de S en (X, \mathcal{T}) a

$$Fr(S) = \overline{S} \cap \overline{(X \setminus S)}$$

Observación. $Fr(S)$ es cerrado

Observación. $Fr(S) = Fr(X \setminus S)$

Observación. $Fr(S) \not\subset S$

Proposición 1.5. Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $S \subset X$. Entonces:

$$(I) \quad \overline{S} = S \cup Fr(S)$$

$$(II) \quad \overset{\circ}{S} = S \setminus Fr(S) = S \setminus (Fr(S) \cap S)$$

$$(III) \quad X = \overset{\circ}{S} \cup (X \setminus \overset{\circ}{S}) \cup Fr(S)$$

$$(IV) \quad Fr(S) = \overline{S} \setminus \overset{\circ}{S}$$

Demostración. (I)

$$\begin{aligned} S \cup Fr(S) &= S \cup (\overline{S} \cap \overline{X \setminus S}) = \\ &= (S \cup \overline{S}) \cap (S \cup \overline{X \setminus S}) = \overline{S} \end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned} S \setminus Fr(S) &= S \setminus (\overline{S} \cap \overline{X \setminus S}) = \\ &= (S \setminus \overline{S}) \cup (S \setminus \overline{X \setminus S}) = \emptyset \cup (S \cap (X \setminus \overline{X \setminus S})) = \\ &= (S \cap (X \setminus (X \setminus \overset{\circ}{S}))) = (S \cap \overset{\circ}{S}) = \overset{\circ}{S} \end{aligned}$$

(III)

$$\begin{aligned} X &= \overset{\circ}{S} \cup (X \setminus \overset{\circ}{S}) = \overset{\circ}{S} \cup \overline{X \setminus \overset{\circ}{S}} = \\ &= \overset{\circ}{S} \cup [(X \setminus S) \cup Fr(X \setminus S)] = \\ &= \overset{\circ}{S} \cup [(X \setminus S) \cup (Fr(X \setminus S) \cap (X \setminus S)) \cup Fr(X \setminus S)] = \\ &= \overset{\circ}{S} \cup (X \setminus S) \cup Fr(X \setminus S) = \overset{\circ}{S} \cup (X \setminus \overset{\circ}{S}) \cup Fr(S) \end{aligned}$$

(IV)

$$Fr(S) = \bar{S} \cap \overline{(X \setminus S)} = \bar{S} \cap (X \setminus \overset{\circ}{S})$$

Definición 1.8. Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $S \subset X$ se dice que es denso en (X, \mathcal{T}) si $\bar{S} = X$

1.2. Entornos

Definición 1.9. Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $x \in X$, $V \subset X$. Se dice que V es un entorno de x en (X, \mathcal{T}) si $\exists A \in \mathcal{T} : x \in A \subset V$.

Definición 1.10. Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ es la colección de todos los entornos de x y se llama sistema de entornos de x en (X, \mathcal{T}) .

Observación. Si (X, \mathcal{T}) e.t., $x \in X$, $V \subset X$ entonces V es entorno de $x \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{V}$.

Notación. U^x, V^x entornos de x .

Proposición 1.6. Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $\mathcal{V}(x)$ tiene las siguiente propiedades:

- (N1) $\forall U \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in U$.
- (N2) $\forall U, V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{V}(x)$.
- (N3) $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $\forall y \in V, U \in \mathcal{V}(y)$.
- (N4) $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists V \subset X : U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$.

Demostración. (I) Trivial, a partir de la definición.

(II) $x \in \overset{\circ}{U}, x \in \overset{\circ}{V} \Rightarrow x \in \overset{\circ}{U} \cap \overset{\circ}{V} \subset U \cap V \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{V}(x)$.

(III) Sean $U \in \mathcal{V}(x), V = \overset{\circ}{U}$ como $x \in \overset{\circ}{U} = V \Rightarrow \forall y \in V \in \mathcal{T}$ y $V \subset U \Rightarrow U \in \mathcal{V}(y)$.

(IV) $U \in \mathcal{V}(x), U \subset V \Rightarrow x \in \overset{\circ}{U} \subset \overset{\circ}{V} \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$.

Proposición 1.7. Sea $X \neq \emptyset$, $\forall x \in X : \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{P}(x)$ que cumple (N1, N2, N3, N4) anteriores, entonces $\exists! \mathcal{T}$ sobre $X : \forall x \in X, \mathcal{V}(x)$ es el sistema de entornos de x en (X, \mathcal{T}) .

Demostración. Sea $\mathcal{T} = \{G \subset X : \forall x \in G, G \in \mathcal{V}(x)\}$. Vemos que \mathcal{T} es una topología:

(I) Prop.1.6.(N1) $X \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow X \in \mathcal{T}$

(II) $\forall G_1, G_2 \in \mathcal{T}, x \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow G_1, G_2 \in \mathcal{V}(x)$, Prop.1.6.(N2) $\Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{V}(x)$.

(III) $\forall \{G_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{T}, x \in \bigcup_{j \in J} G_j \Rightarrow \exists j_0 \in J : G_{j_0} \in \mathcal{V}(x)$, Prop.1.6.(N4) $\Rightarrow \bigcup_{j \in J} G_j \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \bigcup_{j \in J} G_j \in \mathcal{T}$

$\Rightarrow \mathcal{T}$ es topología.

Vemos ahora que S es entorno de $x \Leftrightarrow S \in \mathcal{V}(x)$.

- (\Rightarrow) S entorno de x en $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow \exists G \in \mathcal{T} : x \in G \subset S \Rightarrow G \in \mathcal{V}(x)$ Prop.1.6.(iv) $\Rightarrow S \in \mathcal{V}(x)$.
- (\Leftarrow) $S \in \mathcal{V}(x)$. Sea $U \subset S$ ACABAR

Falta ver que \mathcal{T} es única.

Definición 1.11 (Base de Entorno). Sea $x \in X, \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$. Se dice que $\mathcal{B}(x)$ es una base de un entorno de x en (X, \mathcal{T}) si $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset U$.

Observación. De la definición de base queda determinado un entorno como $\mathcal{V}(x) = \{U \subset X : \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset U\}$

Ejemplo. $\forall (X, \mathcal{T})$ e.t. $\mathcal{V}(x)$ es una base de entornos de x .

Ejemplo. Sea $(X, \mathcal{T}_D), \mathcal{T}_D = \mathcal{P}(x), \forall x \in X$ entonces $\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}$ es base de entornos de x .

Ejemplo. Sea (X, \mathcal{T}) metrizable. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$, d métrica tal que $\forall x \in X, \mathcal{B}(x) = \{B_\epsilon(x) : \epsilon > 0\}$ entonces $\mathcal{B}(x)$ es base de entornos de x .

Ejemplo. $\forall (X, \mathcal{T})$ e.t., $\mathcal{B}(x) = \{\dot{U} : U \in \mathcal{V}(x)\}$ es base de entornos de x .

Ejemplo. Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) : \forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{B}(x) = \{[x - \epsilon, x + \epsilon] : \epsilon > 0\}$ entonces $\mathcal{B}(x)$ es base de entornos de x .

Proposición 1.8 (Propiedades de Bases de Entornos). Sea (X, \mathcal{T}) e.t. y $\mathcal{B}(x)$ una base de entornos de x en (X, \mathcal{T}) , $\forall x \in \mathcal{T}$. Entonces:

(V1) $B \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow x \in B$.

(V2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}(x) : B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

(V3) $B_1 \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow \exists B_2 \in \mathcal{B}(x) : \forall y \in B_2, \exists B \in \mathcal{B}(y)$ tal que $B \subset B_1$.

Demostración. (V1) $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x), B \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow x \in B$.

(V2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}(x) : B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

(V3) $B_1 \in \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ Prop.1.6.(iii) $\Rightarrow \exists U \in \mathcal{V}(x)$ tal que $\forall y \in U, B_1 \in \mathcal{B}(y) \Rightarrow \exists B_2 \in \mathcal{B}(x) : B_2 \subset U$ tal que $\forall y \in B_2, B_1 \in \mathcal{V}(y) \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}(y) : B \subset B_1$.

Proposición 1.9. Sea $X \neq \emptyset, \mathcal{B} : X \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ cumpliendo (i, ii, iii) anteriores, entonces se define una topología en X en la que $\mathcal{B}(x)$ es una base de entornos de $x, \forall x \in X$.

Demostración. Sea $\forall x \in X$,

$$\mathcal{V}(x) = \{U \subset X : \exists B \subset U \text{ para algún } B \in \mathcal{B}(x)\}$$

tal que $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ tiene las propiedades V1, V2, V3. Veamos que $\mathcal{V}(x)$ tiene las propiedades N1, N2, N3, N4.

(N1) $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists B \subset U : B \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow x \in B \subset U \Rightarrow x \in U$.

(N2) $U_1, U_2 \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x) : B_1 \subset U_1, B_2 \subset U_2$ y (V2) $\Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}(x) : B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$. Entonces, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}(x)$.

(N3) $U \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists B \subset U : B \in \mathcal{B}(x)$, (V3) $\Rightarrow \exists B_0 \in \mathcal{B}(x) : \forall y \in B_0, \exists B_y \in \mathcal{B}(y) : B_y \subset B$. Entonces $B \in \mathcal{V}(y), \forall y \in B_0 \Rightarrow U \in \mathcal{V}(y), \forall y \in B_0$.

(N4) $U \in \mathcal{V}(x), V \subset X : U \subset V \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$.

Entonces, $\mathcal{V}(x)$ es un sistema de entornos de x , $\forall x \in X$ y $\forall x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ es una base de entornos de x en la topología resultante en X .

Definición 1.12 (Bases de Entornos Equivalentes). Sea $X \neq \emptyset$. Si una topología sobre X está definida por dos bases de entornos, se dice que las bases son equivalentes.

Proposición 1.10. Sea $X \neq \emptyset$. Dos bases de entornos de x , $\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)$ de X son equivalentes si y solo si $\forall x \in X, \forall i \in \{1, 2\}, \forall B \in \mathcal{B}_i(x), \exists B_j \in \mathcal{B}_j(x) : B_j \subset B, \forall j \in \{1, 2\}, j \neq i$.

Proposición 1.11 (Caracterización bases equivalentes). Sean $\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)$ dos bases de entornos de x en (X, \mathcal{T}) , estas son equivalentes $\Leftrightarrow \forall x \in X, \forall i \in \{1, 2\}, \forall B_i \in \mathcal{B}_i(x), \exists B_j \in \mathcal{B}_j(x), j \in \{1, 2\}, j \neq i : B_j \subset B_i$.

Demostración. $(\Rightarrow) \forall i \in \{1, 2\}, \forall B_i \in \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists B_j \in \mathcal{B}(x), \forall j \in \{1, 2\}, j \neq i$.

(\Leftarrow)
ACABAR

Definición 1.13. Sea (X, \mathcal{T}) e.t. $S \subset X, x \in X$.

- (I) Se dice que x es un punto interior de S en (X, \mathcal{T}) si $\exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \subset S$.
- (II) Se dice que x es un punto adherente de S en (X, \mathcal{T}) si $\forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset$.
- (III) Se dice que x es un punto de acumulación si $\forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \setminus \{x\} \cap S \neq \emptyset$.
- (IV) Se dice que x es un punto de frontera si $\forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset, \mathcal{U}^x \cap (X \setminus S) \neq \emptyset$.
- (V) Se dice que x es punto aislado si $\exists \mathcal{U}^x$ tal que $\mathcal{U}^x \cap S = \{x\}$.

Definición 1.14. El conjunto de puntos de acumulación se llama conjunto derivado y se denota S' .

Proposición 1.12. Sea (X, \mathcal{T}) e.t. Entonces,

- (I) $A \subset X$ es abierto de $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \subset A$.
- (II) $C \subset X$ es cerrado $\Leftrightarrow \forall x \notin C, \exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \cap C = \emptyset$.
- (III) $S \subset X, \overset{\circ}{S} = \{x \in X : \exists \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \subset S\}$.
- (IV) $S \subset X, \overline{S} = \{x \in X : \forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset\}$.
- (V) $S \subset X, Fr(S) = \{x \in X : \forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset, \mathcal{U}^x \cap (X \setminus S) \neq \emptyset\}$.

Demostración. (I) Es la propiedad V1.

(II) C es cerrado $\Leftrightarrow X \setminus C \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in X \setminus C, \exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \subset X \setminus C \Rightarrow X \setminus C$ es abierto.

(III) Sigue de (iv) aplicando las leyes de De Morgan.

(IV) $X \setminus \overline{S} = (X \setminus S)^\circ = \{x \in X : \exists \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \subset X \setminus S\}$ cuyo complementario es $\overline{S} = \{x \in X : \forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset\}$.

(V) $Fr(S) = \overline{S} \cap \overline{X \setminus S}$

Observación. En la proposición anterior se pueden usar bases en lugar de sistemas de entornos.

Corolario 1.1.1. Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $S \subset X$ entonces

- (I) $\overline{S} = \{x \in X : x \text{ es punto adherente de } S\}$.
- (II) $\overset{\circ}{S} = \{x \in X : x \text{ es punto interior de } S\}$.
- (III) $Fr(S) = \{x \in X : x \text{ es punto frontera de } S\}$.

Proposición 1.13. Sea (X, \mathcal{T}) e.t. $E \subset X$. Entonces E es denso en $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, U \cap E \neq \emptyset$.

Demostración. (\Rightarrow) Suponemos que E es denso, es decir, $\overline{E} = X$. Entonces, $\forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$, U es abierto $\Rightarrow \forall x \in \overset{\circ}{U} = U \Rightarrow U$ es entorno de x en (X, \mathcal{T}) . Y como x es punto adherente de $E \Rightarrow U \cap E \neq \emptyset$.

(\Leftarrow) $\forall x \in X, \forall \mathcal{U}^x$ entorno de $x \Rightarrow \mathcal{U}^x \subset \mathcal{U}^x \subset X \Rightarrow \mathcal{U}^x \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ y por la hipótesis $\mathcal{U}^x \cap E \subset \mathcal{U}^x \cap E \neq \emptyset \Rightarrow x$ punto adherente de E , $x \in \overline{E} \Rightarrow X \subset \overline{E}$.

1.3. Bases

Definición 1.15 (Base). Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Se dice que \mathcal{B} es base de \mathcal{T} si $\forall A \in \mathcal{T}, \exists \mathcal{B}_A \subset \mathcal{B} : A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_A} B$. Y se dice que \mathcal{T} está engendrada por \mathcal{B} .

Observación. $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ tal que $\mathcal{T} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}_A} B : \mathcal{B}_A \subset \mathcal{B}\}$.

Observación. $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ es una base de $X \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{T}, \forall x \in A \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset A$.

Ejemplo. (I) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u), \mathcal{B} = \{(a, b) : a < b\}$ es base de \mathcal{T}_u .

(II) $(X, \mathcal{T}_u), \mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ es base de \mathcal{T}_u .

(III) (X, \mathcal{T}) metrizable, \mathcal{T}_d topología inducida por d . Entonces $\mathcal{B} = \{B : x \in X, \epsilon > 0\}$ es base de \mathcal{T}_d .

Proposición 1.14. Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ entonces, \mathcal{B} es base de $\mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ es base de entornos de x en (X, \mathcal{T}) .

Observación. La única diferencia entre bases y bases de entornos es que las bases no tienen por que consistir de conjuntos abiertos.

Demostración. (\Rightarrow) Suponemos que \mathcal{B} es base de X , $x \in X$ y $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$. Sea $U \in \mathcal{B}_x$ entonces $U \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T} : x \in U = \overset{\circ}{U} \Rightarrow U$ es un entorno de x . Sea $U \in \mathcal{V}(x)$, entonces $x \in \overset{\circ}{U} \in \mathcal{T}$ donde $\mathcal{T} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} B : \mathcal{B}_U \subset \mathcal{B}\}$, es decir, $\overset{\circ}{U}$ es la unión de elementos de \mathcal{B} entonces $\exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset \overset{\circ}{U}$. Por tanto, $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists B \in \mathcal{B}_x : B \subset U \Rightarrow \mathcal{B}_x$ es base de entornos de x .

(\Leftarrow) Suponemos que \mathcal{B}_x es una base de entornos de x , $\forall x \in X$ y $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$. Entonces, $\forall A \in \mathcal{T}, \forall x \in A, \exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subset A \Rightarrow$

$A = \bigcup \{B_x : x \in A\} \Rightarrow \mathcal{B} \subset A$, de manera que \mathcal{B} es base para X .

Teorema 1.2. Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces, \mathcal{B} es base de una topología \mathcal{T} en $X \Leftrightarrow$

$$(I) \quad X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

$$(II) \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, p \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} : p \in B_3 \subset B_1 \cap B_2.$$

Demostración. (I) $(\Rightarrow) \mathcal{T} = \{ \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \in \mathcal{B} \}, X \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists \mathcal{B}_0 \in \mathcal{B} : X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0} B$.

(II) (\Rightarrow) A partir de la definición de base. $(B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2)$.

(\Leftarrow) Suponemos que $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ donde $\mathcal{B} = \{K \subset X : K \text{ cumple las propiedades (i), (ii)}\}$. Sea $\mathcal{T} = \{ \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \}$. Entonces,

$$(G1) \quad \emptyset = \bigcup_{B \in \emptyset} B \in \mathcal{T} \text{ y } X \in \mathcal{T}.$$

$$(G2) \quad \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B \right) \cap \left(\bigcup_{B' \in \mathcal{B}_2} B' \right) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1, B' \in \mathcal{B}_2} B \cap B', \text{ por (ii)} \Rightarrow \text{la intersección de dos elementos de } \mathcal{B} \text{ es una unión de elementos de } \mathcal{B}.$$

$$(G3) \quad \{A_j\}_{j \in J} = \{ \bigcup_{B \in \mathcal{B}_j} B : j \in J \} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}.$$

Definición 1.16 (Subbase). Sea (X, \mathcal{T}) e.t. $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Se dice que \mathcal{S} es una subbase de \mathcal{T} si la familia de todas las intersecciones finitas de \mathcal{S} es una base de \mathcal{T} .

Observación. $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}, \mathcal{B} = \{ \bigcap_{S \in \mathcal{S}'} S : \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \text{ es finito} \}$ es base de \mathcal{T} .

Proposición 1.15. Sea $X \neq \emptyset, \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces, \mathcal{S} es una subbase de alguna topología sobre $X \Leftrightarrow \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$.

Demostración. (\Rightarrow) Sea $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ una subbase de $\mathcal{T} \Rightarrow \{ \bigcap_{S \in \mathcal{S}'} S : \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \} = \mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T} \Rightarrow \forall B \in \mathcal{B}, \exists S_B \in \mathcal{S} : B \subset S_B \Rightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} S_B \subset \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \subset X \Rightarrow \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$.

(\Leftarrow) Sea $\mathcal{B} = \{ \bigcap_{S \in \mathcal{S}'} S' : \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \}$.

- (i) $\bigcap_{S \in \mathcal{S}} S = X \Rightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.
- (ii) $(\bigcap_{S \in \mathcal{S}_1} S) \cap (\bigcap_{S' \in \mathcal{S}_2} S') \cap \bigcap_{S \in \mathcal{S}_1, S' \in \mathcal{S}_2} (S' \cap S) \subset \mathcal{B}$.

1.4. Subespacios

Definición 1.17 (Subespacio). Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $S \subset X$. Se llama *topología relativa a S* a

$$\mathcal{T}|_S = \{A \cap S : A \in \mathcal{T}\}$$

y el par $(S, \mathcal{T}|_S)$ se llama *subespacio topológico*.

Proposición 1.16 (Propiedades Subespacio). Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $S \subset X$. Entonces,

- (I) $C \subset S, C \in \mathcal{T}|_S \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{T} : A \cap S = C$.
- (II) $C \subset S, C$ cerrado en $S, \mathcal{T}|_S \Leftrightarrow \exists F$ cerrado en $(X, \mathcal{T}) : C = F \cap S$.
- (III) $\forall C \subset S, \overline{C}^S = S \cap \overline{C}^X$.
- (IV) $\forall x \in S, \mathcal{V}^x \subset S$ es un entorno de x en $(S, \mathcal{T}|_S) \Leftrightarrow \exists \mathcal{U}^x$ entorno de x en (X, \mathcal{T}) tal que $\mathcal{U}^x \cap S = \mathcal{V}^x$.
- (V) \mathcal{B} base de $\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{B}_S = \{B \cap S : B \in \mathcal{B}\}$ es base de $(S, \mathcal{T}|_S)$.

Demostración. (I) Definición de subespacio.

(II) Sigue de (i).

(III) Sigue de (ii) y la definición de clausura de C como la intersección de todos los conjunto cerrados que contienen E .

(IV) Sigue de (i) y la definición de entorno de x como un conjunto que contiene un subconjunto abierto que contiene a x .

(V) ACABAR

Observación. Sea $S \subset X, C \subset S$ entonces no necesariamente $\text{int}(C)_S \neq \text{int}(C)_X \cap S$. Por ejemplo, $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u), S = C = \{0\} \times \mathbb{R}$.

Definición 1.18. Sea (\mathcal{P}) una propiedad de e.t. Se dice que \mathcal{P} es propiedad hereditaria si dado e.t. que cumple \mathcal{P} todos sus subespacios cumplen \mathcal{P} .

1.5. Funciones continuas

Definición 1.19 (Función continua). Sean (X, \mathcal{T}) , (X', \mathcal{T}') dos e.t. y $f : X \rightarrow X'$ una aplicación. Se dice que $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es una aplicación continua en $a \in X$ si $\forall \mathcal{V}^{f(a)}$ entorno de $f(a)$ en (X', \mathcal{T}') , $\exists \mathcal{U}^a$ entorno de a en $(X, \mathcal{T}) : f(\mathcal{U}^a) \subset \mathcal{V}^{f(a)}$.

Observación. Se dice que f es continua si lo es $\forall a \in X$.

Teorema 1.3. Sean (X, \mathcal{T}) , (X', \mathcal{T}') dos e.t. y $f : X \rightarrow X'$ una aplicación. Entonces, son equivalentes:

- (I) $\forall A' \in \mathcal{T}', f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$
- (II) $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es aplicación continua.
- (III) $\forall C \subset X, f(\overline{C}^X) \subset \overline{(f(C))}^{X'}$.
- (IV) $\forall C' \subset X, \overline{f^{-1}(C')}^X \subset f^{-1}(\overline{C'}^{X'})$.
- (V) $\forall F'$ cerrado de (X', \mathcal{T}') , $f^{-1}(F')$ es cerrado de (X, \mathcal{T}) .

Demostración. $(i \Rightarrow ii)$ Sea $a \in X$, $\mathcal{V}^{f(a)}$ entorno de $f(a)$ en (X', \mathcal{T}') $\Rightarrow \mathcal{V}^{\circ f(a)}, f(a) \in \mathcal{V}^{\circ f(a)}$. Ahora, por (i), tenemos $a \in f^{-1}(\mathcal{V}^{\circ f(a)}) \in \mathcal{T}$. Sea $f^{-1}(\mathcal{V}^{f(a)}) = \mathcal{U}^a$. Entonces, $f(\mathcal{U}^a) = f(f^{-1}(\mathcal{V}^{f(a)})) \subset \mathcal{V}^{\circ f(a)} \subset \mathcal{V}^{f(a)} \Rightarrow f$ es continua.

$(ii \Rightarrow iii)$ Sea $C \subset X, a \in \overline{C}^X, \mathcal{V}^{f(a)}$ entorno de $f(a)$ en (X', \mathcal{T}') . Entonces, por (ii), $\exists \mathcal{U}^a$ entorno de a en (X, \mathcal{T}) tal que $f(\mathcal{U}^a) \subset \mathcal{V}^{f(a)} \Rightarrow \mathcal{U}^a \cap C \neq \emptyset \Rightarrow a \in \mathcal{U}^a \cap C \Rightarrow f(a) \in f(\mathcal{U}^a) \cap f(C) \subset \mathcal{V}^{f(a)} \cap f(C) \Rightarrow f(a) \in \overline{f(C)}^{X'}$.

$(iii \Rightarrow iv)$ $\forall C' \subset X' \Rightarrow f^{-1}(C') \subset X'$ y por (iii) $f(\overline{f^{-1}(C')})^X \subset \overline{f(f^{-1}(C'))}^{X'} \subset \overline{C'}^{X'} \Rightarrow \overline{f^{-1}(C')}^X \subset f^{-1}(\overline{C'}^{X'})$.

$(iv \Rightarrow v)$ F' cerrado de (X', \mathcal{T}') $\Rightarrow \overline{f^{-1}(C')}^X \subset f^{-1}(\overline{F'}^{X'}) = f^{-1}(F') \Rightarrow$

$f^{-1}(F')$ es cerrado en (X, \mathcal{T}) .

$(v \Rightarrow i) A' \in \mathcal{T}' \Rightarrow X' \setminus A'$ cerrado de (X', \mathcal{T}') $\Rightarrow f^{-1}(X' \setminus A')$ cerrado de $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow X \setminus f^{-1}(X' \setminus A') \in \mathcal{T}$. $\forall x \notin f^{-1}(X' \setminus A') \Leftrightarrow f(x) \notin X' \setminus A' \Leftrightarrow f(x) \in A' \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A') \Rightarrow X \setminus f^{-1}(X' \setminus A')$.

Observación. $\forall (X, \mathcal{T})$ e.t. la aplicación $1_X : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ es continua.

Observación. $\forall (X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t. $\forall x'_0 \in X'$ la aplicación constante con $c_{x'_0} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es constante.

Proposición 1.17. Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), (X'', \mathcal{T}'')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ aplicación continua, $f' : (X', \mathcal{T}') \rightarrow (X'', \mathcal{T}'')$ aplicación continua. Entonces, $(f' \circ f) : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X'', \mathcal{T}'')$ es continua.

Demostración. $\forall A'' \in \mathcal{T}'' \Rightarrow f^{-1}(A'') \in \mathcal{T}' \Rightarrow f^{-1}(f^{-1}(A'')) \in \mathcal{T}$ y $(f' \circ f)^{-1}(A'') = f^{-1}(f^{-1}(A''))$.

Proposición 1.18. Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$. Entonces, $f|_S : (S, \mathcal{T}|_S) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es aplicación continua.

Demostración. $\forall A' \in \mathcal{T}', (f|_S)^{-1}(A') = f^{-1}(A') \cap S \in \mathcal{T}|_S$.

Proposición 1.19. Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$, $S \subset X$. Entonces, $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (f(X), \mathcal{T}'|_{f(X)})$ es aplicación continua.

Demostración. $\forall G' \in \mathcal{T}'|_S \Rightarrow \exists A' \in \mathcal{T}' : G' = A' \cap f(X) \Rightarrow f^{-1}(G') = f^{-1}(A' \cap f(X)) = f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$.

Proposición 1.20. Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : X \rightarrow X'$ aplicación. Si F_1, F_2 son cerrados de (X, \mathcal{T}) tal que $X = F_1 \cup F_2$ y $f|_{F_i} : (F_i, \mathcal{T}_{F_i}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es continua. Entonces, $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es aplicación continua.

Demostración. $\forall F'$ cerrado de (X', \mathcal{T}') , $f^{-1}(F') = f^{-1}(F') \cap X = f^{-1}(F') \cap (F_1 \cup F_2) = (f^{-1}(F') \cap F_1) \cup (f^{-1}(F') \cap F_2)$ donde $(f^{-1}(F') \cap F_1) = f^{-1}|_{F_1}(F')$ cerrado en F_1 y $(f^{-1}(F') \cap F_2) = f^{-1}|_{F_2}(F')$ cerrado en $F_2 \Rightarrow f^{-1}(F')$ cerrado en (X, \mathcal{T}) .

Definición 1.20 (Espacio Homeomorfo). Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t. $f : X \rightarrow X'$ aplicación. Se dice que $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es homeomorfismo si f es biyectiva y f^{-1} es continua. En este caso, se dice que (X, \mathcal{T}) es homeomorfo a (X', \mathcal{T}') .

Observación. Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : X \rightarrow X'$ biyectiva. Entonces, f es homeomorfismo si y solo si $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow f(A) \in \mathcal{T}'$.

Definición 1.21 (Invariante Topológico). Sea (P) una propiedad de e.t.. Se dice que (P) es un invariante topológico si para todo e.t. que cumpla (P) todos los e.t. homeomorfos cumplen (P) .

Definición 1.22 (Aplicación Abierta). Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$. Entonces, f es aplicación abierta si $\forall A \in \mathcal{T}, f(A) \in \mathcal{T}'$.

Observación. Una aplicación es cerrada si $\forall C$ cerrado de (X, \mathcal{T}) , $f(C)$ cerrado de (X', \mathcal{T}') .

Observación. No hay ninguna implicación entre aplicación continua, aplicación abierta y aplicación cerrada.

Proposición 1.21. Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), f : X \rightarrow X'$ aplicaciones biyectivas. Entonces, son equivalentes:

- (I) $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es homeomorfismo.
- (II) $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ aplicación continua y abierta.
- (III) $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ aplicación continua y cerrada.

Demostración.

$(i \Rightarrow ii)$ f homeomorfismo $\Rightarrow \exists f^{-1}$ aplicación continua $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, ((f^{-1})^{-1}(A) \in \mathcal{T}'$ donde $((f^{-1})^{-1}(A) = f(A) \Rightarrow f$ aplicación abierta.

(ii \Rightarrow i) f abierta y continua $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, f(A) \in \mathcal{T}'$ donde $f(A) = ((f^{-1})^{-1}(A) \Rightarrow f^{-1}$ aplicación continua.

(i \Leftrightarrow iii) es análoga.

1.6. Espacio Producto

Nota. Queremos construir nuevos espacios topológicos de los ya existentes. Nos gustaria que ocurriera como los subespacios topológicos, si f es una función continua en un espacio topológico, también lo sea en el subespacio.

Dados $X, Y, X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$. Si consideramos $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ queremos ver que topología debemos usar para que poder trabajar con funciones. Si consideramos la topología $\mathcal{T} \times \mathcal{T}' \subset \mathcal{P}(X \times X')$ podemos ver que la unión de conjuntos de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ no pertenece a $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$. Entonces, eligimos la topología producto como la topología genereada por la base $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$,

$$\{W \subset X \times Y : \forall (x, y) \in W, \exists U \times V \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}' : (x, y) \in U \times V \subset W\}$$

Definición 1.23 (Producto Cartesiano). Sea $\{X_j\}_{j \in J} \neq \emptyset$ familia de conjuntos no vacios. Se llama producto castesiano de $\{X_j\}_{j \in J}$ a

$$\prod_{j \in J} X_j = \{x : J \rightarrow \bigcup_{j \in J} X_j \text{ aplicación} : x_j \in X_j, \forall j \in J\}$$

Observación. $\forall j \in J, p_{j_0} : \prod_{j \in J} X_j \rightarrow X_{j_0} : x \mapsto x_{j_0}$ se llama proyección.

Observación. Si $X_j = X, \forall j \in J$ entonces $\prod_{j \in J} X_j = X^J = \{x : J \rightarrow X, x \text{ aplicación}\}$.

Definición 1.24 (Axioma Elección). $\forall \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \neq \emptyset$ familia de conjuntos no vacios disjuntos dos a dos. Entonces, $\exists A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda : A \cap B_\lambda$ tiene un solo elemento.

Definición 1.25 (Topología Producto). Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_{j \in J})\}_{j \in J}$ familia de e.t.. Se llama topología producto a la topología sobre $\prod_{j \in J} X_j$ generada por subbase

$$\mathcal{S} = \{p_j^{-1}(U_j) : U_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J\}$$

Esta topología se denota $\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j$

Observación. El producto de abiertos no es necesariamente abierto.

Observación. La base engendrada por \mathcal{S} es

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(U_j) : U_j \in \mathcal{T}_j, F \in \mathcal{P}(J) \right\}$$

$$= \left\{ \prod_{j \in J} A_j : A_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J, A_j = X_j : \forall j \in J \setminus F \text{ no es finito} \right\}.$$

Observación. Si J es finito, entonces $\mathcal{B} = \left\{ \prod_{j \in J} A_j : A_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J \right\}$.

Observación. El producto espacios discretos no es necesariamente discreto.

Observación. $\mathcal{B} = \left\{ \prod_{j \in J} B_j : B_j \in \mathcal{T}_j \right\}$.

Observación. Si \mathcal{B}_j es base de (X_j, \mathcal{T}_j) , entonces $\mathcal{B} = \left\{ \prod_{j \in J} B_j : B_j \in \mathcal{B}_j \right\}$ es base de $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$.

Proposición 1.22. Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia finita de e.t.. Entonces, $\forall j_0 \in J$,

$$p_{j_0} : \left(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j \right) \rightarrow (X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0})$$

es aplicación abierta y continua.

Demostración. $\forall A \in \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j, A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda : B_\lambda \in \mathcal{B}$ donde \mathcal{B} es subbase de $\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j$, $B_\lambda = \left\{ \prod_{j \in J} U_{\lambda j} : U_{\lambda j} \in \mathcal{T}_j, U_{\lambda j} = X_j, \forall j \in J \setminus F : F \text{ finito} \right\}$. Entonces, $p_{j_0}(A) = p_{j_0}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} p_{j_0}(B_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_{\lambda j_0} \in \mathcal{T}_{j_0} \Rightarrow$ abierto.

Proposición 1.23. Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia no vacía de e.t.. Entonces, la topología producto es la más débil sobre $\prod_{j \in J} X_j$ que hace continuas a todas las proyecciones.

Demostración. Sea \mathcal{T} topología sobre $\prod_{j \in J} X_j$ tal que $p_{j_0} : (\prod_{j \in J} X_j, \mathcal{T}) \rightarrow (X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0})$ es una proyección continua. Entonces, $\forall j_0 \in J : U_{j_0} \in \mathcal{T}_{j_0}$ se tiene $p_{j_0}^{-1}(U_{j_0}) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ es subbase de $\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j \Rightarrow \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j \subset \mathcal{T}$.

Proposición 1.24 (Propiedad Universal Topología Producto). Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia $\neq \emptyset$ e.t., $f : X \rightarrow \prod_{j \in J} X_j$ aplicación. Entonces, $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$ continua $\Leftrightarrow (p_j \circ f) : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$ continua.

Demostración. (\Rightarrow) La composición de aplicaciones continuas es continua.

(\Leftarrow) $\forall j \in J, (p_j \circ f)^{-1}(U_j) \in \mathcal{T}, \forall U_j \in \mathcal{T}_j \Rightarrow (p_j \circ f)^{-1}(U_j) = f^{-1}(p_j^{-1}(U_j)) = f^{-1}(S) \in \mathcal{T}, \forall S \in \mathcal{S} = \{p_j^{-1}(U_j) : U_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J\}$. Entonces, $(p_j \circ f)^{-1}$ y p_j continuas $\Rightarrow f$ continua.

Proposición 1.25. Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia e.t., $\sigma : J \rightarrow J$ aplicación biyectiva. Entonces, (X_j, \mathcal{T}_j) y $(X_{\sigma(j)}, \mathcal{T}_{\sigma(j)})$ son homeomorfos.

Demostración. Sea $\alpha(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j) \rightarrow (\prod_{j \in J} X_{\sigma(j)}, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_{\sigma(j)}) : (x_j)_{j \in J} \mapsto \alpha((x_j)_{j \in J}) = (x_{\sigma(j)})_{j \in J}$, α es biyectiva.

(I) $(p_j \circ \alpha) = p_{\sigma(j)}$ son continuas (Propiedad Universal).

(II) $(p_j \circ \alpha)^{-1} = p_{\sigma(j)}^{-1}$ continua α^{-1} continua.

\Rightarrow homeomorfa.

Observación. El producto de homeomorfismos es homeomorfismo.

Definición 1.26. Sea (P) una propiedad de e.t.. Se dice que (P) es multiplicativa si para toda familia e.t. cada una cumpliendo (P) , su producto topológico cumple (P) .

Proposición 1.26. Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia \neq de e.t., (X, \mathcal{T}) e.t., $\forall j \in J, f_j : X \rightarrow X_j$ aplicación. Entonces, $(f_j)_{j \in J} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j) : x \mapsto (f_j)_{j \in J}(x) = (f_j(x))_{j \in J}$ es continua $\Leftrightarrow f_j : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$ es continua $\forall j \in J$.

Demostración. $\forall j_0 \in J, (p_{j_0} \circ (f_j)_{j \in J}) = f_{j_0}$

(\Rightarrow) composición de aplicaciones continuas es continua.

(\Leftarrow) por la propiedad universal de la topología producto.

Observación. El producto de funciones continuas es una función continua.

Proposición 1.27. Sean $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}, \{(X'_j, \mathcal{T}'_j)\}_{j \in J}, \forall j \in J, f_j : X_j \rightarrow X'_j$ aplicación continua. Entonces, $\prod_{j \in J} f_j : (\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j) \rightarrow (\prod_{j \in J} X'_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}'_j) : (x_j)_{j \in J} \mapsto (\prod_{j \in J} f_j)((x_j)_{j \in J}) = (f_j(x_j))$ aplicación continua.

VER DIBUJO(Revisar abierta o continua)

Demostración. $\forall j_0 \in J, (p'_{j_0} \circ (\prod_{j \in J} f_j)) = (f_{j_0} \circ p_{j_0})$.

(\Rightarrow) Propiedad Universal de Topología Producto.

(\Leftarrow) $\forall G'_{j_0} \in \mathcal{T}'_{j_0}$ como $\prod_{j \in J} f_j$ continua, entonces $(p_{j_0} \circ (\prod f_j))^{-1}(G'_{j_0}) \in \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j$ es abierto y donde $(p_{j_0} \circ (\prod f_j))^{-1}(G'_{j_0}) = (f_{j_0} \circ p_{j_0})^{-1}(G'_{j_0}) = p_{j_0}^{-1}(f_{j_0}^{-1}(G'_{j_0}))$. Por ser p_{j_0} aplicación abierta y suprayectiva $p_{j_0}(p_{j_0}^{-1}(f_{j_0}^{-1}(G'_{j_0}))) = f_{j_0}^{-1}(G'_{j_0}) \in \mathcal{T}_{j_0}$.

1.7. Espacio Cociente

Nota. La topología cociente es una construcción que formaliza la idea de "pegar". Decimos que \mathcal{R} es una relación de equivalencia en un conjunto X si es reflexiva, simétrica y transitiva. Una relación \mathcal{R} en X parte X en clases de equivalencia, denotadas $[x], \forall x \in X$.

La idea principal es, dado un espacio topológico (X, \mathcal{T}) queremos describir como se pegan las cosas juntas en (X, \mathcal{T}) mediante la definición de una relación de equivalencia. Dos puntos x_1, x_2 están relacionados si $x_1 \mathcal{R} x_2$, se podría decir que x_1, x_2 se pegan entre si. Entonces, definimos una topología en el conjunto de clases de equivalencia X/\mathcal{R} que conserve la topología en X para aquellos puntos que no están relacionados y que "peguen" correctamente.

Definición 1.27 (Topología Cociente). Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $Y \neq \emptyset, f : X \rightarrow$

Y . Se llama topología cociente inducida por f a $\mathcal{T}_f = \{G \subset Y : f^{-1}(G) \in \mathcal{T}\}$. El par (X, \mathcal{T}_f) se llama espacio topológico cociente inducido por f .

Definición 1.28 (Identificación). Sea (X, \mathcal{T}) , (X', \mathcal{T}') e.t., $f : X \rightarrow X'$ suprayectiva. Se dice que $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es identificación si \mathcal{T}' es topología cociente inducida por f .

Observación. f es continua.

Proposición 1.28. Sea (X, \mathcal{T}) e.t., $Y \neq \emptyset$, $f : X \rightarrow Y$ aplicación continua. La topología cociente inducida por f es la más fina de las topologías sobre Y que hacen continuas a f .

Demostración. Sea \mathcal{S} topología sobre Y tal que $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$ es continua. Entonces, $\forall A \in \mathcal{S}, f^{-1}(A) \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{S}, A \in \mathcal{T}_f \Leftrightarrow \mathcal{S} \subset \mathcal{T}_f$.

Proposición 1.29 (Propiedad Universal Topología Cociente). Sea (X, \mathcal{T}) e.t., (Z, \mathcal{S}) e.t., $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ aplicaciones. Entonces, $g : (Y, \mathcal{T}_f) \rightarrow (Z, \mathcal{S})$ es continua $\Leftrightarrow f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_f)$ es continua.

Demostración. (\Rightarrow) Trivial.

$(\Leftarrow) \forall A \in \mathcal{S}, (g \circ f)^{-1}(A) \in \mathcal{T} \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{S}, g^{-1}(A) \in \mathcal{T}_f \Rightarrow g$ continua.

Proposición 1.30. Sea (X, \mathcal{T}) , (X', \mathcal{T}') , e.t., $f : X \rightarrow X'$ aplicación. Si $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ suprayectiva, continua y abierta (resp. cerrada). Entonces, $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es identificación.

Demostración. \mathcal{T}_f es la topología más fina que hace continua a $f \Rightarrow \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}_f$. Sea $\forall A \in \mathcal{T}_f \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ con f abierta $\Rightarrow f(f^{-1}(A)) = A \in \mathcal{T}'$ abierto $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}_f, A \in \mathcal{T}' \Rightarrow \mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}'$. Entonces, $\mathcal{T}_f = \mathcal{T}'$.

Observación. Las identificaciones no son necesariamente abiertas o cerradas.

Definición 1.29. Sea (X, \mathcal{T}) e.t., \mathcal{R} relación de equivalencia en X , $p : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ proyección canónica. Se llama e.t. cociente de (X, \mathcal{T}) respecto a \mathcal{R} a $(X/\mathcal{R}, \mathcal{T}/\mathcal{R})$ donde \mathcal{T}/\mathcal{R} es topología cociente inducida por p .

Proposición 1.31. Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), (X'', \mathcal{T}'')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ identificación, $f' : (X', \mathcal{T}') \rightarrow (X'', \mathcal{T}'')$ identificación. Entonces, $(f' \circ f)$ es identificación.

REVISAR DEM

Demostración. Sea $(f' \circ f) : X \rightarrow X''$ suprayectiva. Entonces, $A'' \in \mathcal{T}''$, $(f' \text{ identificación} \Rightarrow \mathcal{T}'' = \mathcal{T}_{f'}) \Leftrightarrow f'^{-1}(A'') \in \mathcal{T}' \Leftrightarrow (\mathcal{T}' = \mathcal{T}_{f'})f^{-1}(f'^{-1}(A'')) = (f' \circ f)^{-1}(A'') \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T}'' = \mathcal{T}_{(f' \circ f)}$

Proposición 1.32. Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ identificación. Entonces,

- (I) $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es abierta $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{T}, f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{T}$.
- (II) $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ cerrada $\Leftrightarrow \forall C$ cerrado (X, \mathcal{T}) , $f^{-1}(f(C))$ cerrado de (X, \mathcal{T}) .

Demostración.

- (I) $(\Rightarrow) \forall A \in \mathcal{T} \Rightarrow f(A) \in \mathcal{T}' \Rightarrow f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{T}$.
- $(\Leftarrow) \forall A \in \mathcal{T}, f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{T}, f \text{ identificación} \Rightarrow f(f^{-1}(f(A))) = f(A) \in \mathcal{T}_f = \mathcal{T}' \Rightarrow f \text{ aplicación abierta.}$

Proposición 1.33. Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), (X'', \mathcal{T}''), (X''', \mathcal{T}''')$, $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ identificación, $f' : (X', \mathcal{T}') \rightarrow (X'', \mathcal{T}'')$ identificación, $g : X \rightarrow X''$ aplicación tal que $\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (f' \circ g)(x_1) = (f' \circ g)(x_2)$. Entonces,

- (I) $\exists \bar{g} : X' \rightarrow X'''$ aplicación tal que $(\bar{g} \circ f) = (f' \circ g)$
- (II) Si $g : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X'', \mathcal{T}'')$ continua $\Rightarrow \bar{g}$ continua.

REVISAR

Demostración.

- (I) $\bar{g} : X' \rightarrow X''' : x' \mapsto \bar{g}(x'_0) = f'(g(x))$, $\forall x \in f^{-1}(X') \Rightarrow f(x) = x' \Rightarrow \bar{g}(f(x)) = (f' \circ \bar{g})(x)$, $\forall x \in X \Leftrightarrow (\bar{g} \circ f) = (f' \circ g)$.
- (II) $(\bar{g} \circ f) = (f' \circ g)$, $(g \text{ continua} \Rightarrow (f' \circ g) \text{ continua})$. Entonces, $(\text{Propiedad Universal Topología Cociente}) \Rightarrow \bar{g} \text{ continua}$.

Proposición 1.34. Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : X \rightarrow X'$ aplicación suprayectiva, R_f relación de equivalencia tal que $x_1, x_2 \in X, x_1 R_f x_2 \Leftrightarrow (\text{ def. }) f(x_1) = f(x_2)$. Entonces, $\exists \alpha : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ homeomorfa tal que $(\alpha \circ f) = p \Leftrightarrow f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es identificación.

Demostración. $(\Rightarrow) (\alpha \circ f) = p \Rightarrow f = (\alpha^{-1} \circ p) \Rightarrow f \text{ identificación}$.

(\Leftarrow) Sea $\alpha : X \rightarrow X'/\mathcal{R}_f : x \mapsto \alpha(x') = [x] : x \in f^{-1}(X')$. Esta bien definida ya que, si $x_1, x_2 \in f^{-1}(x) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 R_f x_2 \Leftrightarrow [x_1] = [x_2]$. Sea $\varphi : X/\mathcal{R}_f \rightarrow X'/\mathcal{R}_f : [x] \mapsto \varphi/[x] = f(x)$. Está bien definida ya que, si $[x_1] = [x_2] \Leftrightarrow x_1 R_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Entonces, $(\varphi \circ \alpha = 1_{X'}, \alpha \circ \varphi = 1_{\mathcal{R}_f}) \Rightarrow \alpha \text{ inyectiva y } \alpha^{-1} = \varphi$. Por tanto, $\alpha(f(f(x))) = \alpha(x') = [x]p(x), \forall x \in X \Rightarrow \alpha \circ f = p \text{ continua} \Rightarrow \alpha \text{ continua}$.

1.8. Espacio Suma

Definición 1.30 (Topología Suma). Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$, familia $\neq \emptyset$ de e.t.,

$$\sum_{j \in J} X_j = \bigcup_{j \in J} X_j \times \{j\}$$

su unión disjunta. Se llama topología suma a

$$\sum_{j \in J} \mathcal{T}_k = \left\{ G \subset \sum_{j \in J} X_k : j_k^{-1}(G) \in \mathcal{T}_k, \forall k \in J \right\}$$

El par $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ se llama espacio topológico suma.

Observación. $\forall k_0 \in J, j_{k_0} : (X_{k_0}, \mathcal{T}_{k_0}) \rightarrow (X_{k_0} \times \{k_0\}, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k / (X_{k_0} \times \{k_0\})) : x \mapsto (x, k_0)$ es homomorfismo $j_{k_0}^{-1}(x, k_0) = x = p_1(x, k_0)$

Observación. $\forall c \in \sum_{k \in J} X_k, j_{k_0}^{-1}(c) = p(C \cap (X_{k_0} \times \{k_0\}))$.

Proposición 1.35. Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia $\neq \emptyset$ e.t.. Entonces, la topología suma es la más fina de las topologías sobre $\sum_{k \in J} X_k$ que hacen continua todas las inclusiones.

Demostración. Sea \mathcal{T} topología sobre $\sum_{j \in J} X_k$ tal que

$$\forall k_0 \in J, j_{k_0}(X_{k_0}, \mathcal{T}_{k_0}) \hookrightarrow \left(\sum_{k \in J} X_k, \mathcal{T}\right)$$

$$k_0 \in J, \forall A \in \mathcal{T}, j_{k_0}^{-1}(A) \in \mathcal{T}_{k_0} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, A \in \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k \Rightarrow \mathcal{T} \subset \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k.$$

Proposición 1.36 (Propiedad Universal Topología Suma). Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}, (X, \mathcal{T})$ e.t., $f : (\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ aplicación continua $\Leftrightarrow \forall k_0 \in J, f \circ j_{k_0} : (X_{k_0}, \mathcal{T}_{k_0}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ es continua.

Demostración. (\Rightarrow) Trivial

$$(\Leftarrow) \forall k_0 \in J, f \circ j_{k_0} \text{ continua} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, \forall k_0 \in J, (f \circ j_{k_0})^{-1}(A) = j_{k_0}^{-1}(f^{-1}(A)) \in \mathcal{T}_{k_0} \Rightarrow f^{-1}(A) \in \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k \Rightarrow f \text{ continua.}$$

Definición 1.31. Sea (P) propiedad de e.t.. Se dice que es aditiva si para toda familia de e.t. cada uno cumpliendo (P) , la suma cumple (P) .

Capítulo 2

Propiedades de Separación

Definición 2.1. Sea (X, \mathcal{T}) e.t.. Se dice que es T_0 si $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x : y \notin \mathcal{U}^x$ ó $\exists \mathcal{U}^y : x \notin \mathcal{U}^y$.

Ejemplo. Sea \mathcal{R} una relación en X tal que $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Entonces, \mathcal{R} es una relación de equivalencia en X y el espacio cociente resultante $(X/R, \mathcal{T}/R)$ es T_0 .

Observación. Los subespacios o espacios productos generados a partir de espacios T_0 son también T_0 , pero los espacios cocientes no lo son necesariamente.

Definición 2.2. Sea (X, \mathcal{T}) e.t.. Se dice que es T_1 si $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x : y \notin \mathcal{U}^x, \exists \mathcal{U}^y : x \notin \mathcal{U}^y$.

Observación. (X, \mathcal{T}) es T_1 si y solo si $\forall x, y \in X : x \neq y$ existe un entorno de cada uno que no contiene al otro.

Observación. $T_1 \Rightarrow T_0$

Observación. $T_0 \not\Rightarrow T_1$, ej.: $X = \{a, b\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ es T_0 , no T_1

Proposición 2.1. Sea (X, \mathcal{T}) e.t. son equivalentes

- (I) (X, \mathcal{T}) es T_1 ,
- (II) $\forall x \in X, \{x\}$ es cerrado de (X, \mathcal{T}) ,
- (III) $\forall E \subset X, E = \bigcap_{G \in \mathcal{T} : E \subset G} G$.

Demostración.

($a \Rightarrow b$) Sea (X, \mathcal{T}) e.t. T_1 , $x \in X$ entonces, $\forall y \neq x, \exists \mathcal{U}^y : \mathcal{U}^y \subset X \setminus \{x\} \Rightarrow X \setminus \{x\} \in \mathcal{T} \Rightarrow \{x\}$ es cerrado de (X, \mathcal{T}) .

(I) $A \subset X \Rightarrow A = \bigcap_{x \in X \setminus A} X \setminus \{x\} \Rightarrow A \subset \bigcap_{G \in \mathcal{T}, A \subset G} G \subset \bigcap_{x \in X \setminus A} (X \setminus \{x\}) = A$.

(II) $\forall x, y \in X : x \neq y, \{x\} = \bigcap_{G \in \mathcal{T}, \{x\} \subset G} G \Rightarrow \exists \mathcal{G}^x \in \mathcal{T} : y \in \mathcal{G}^x \Rightarrow T_1$.

Definición 2.3. Sea (X, \mathcal{T}) e.t.. Se dice que es T_2 ó de Hausdorff si $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x : x \in \mathcal{U}^x, \exists \mathcal{U}^y : y \in \mathcal{U}^y$ tal que $\mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y = \emptyset$.

Observación. $T_2 \Rightarrow T_1$.

Proposición 2.2. Sea (X, \mathcal{T}) e.t.. Entonces, (X, \mathcal{T}) es T_2 si y solo si $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ es cerrado en $(X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T})$.

Demostración. Probamos que $\Delta^c \in \mathcal{T}$.

(\Rightarrow) $\forall (x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta, x \neq y \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^y : \mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y = \emptyset \Rightarrow \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y$ entorno de $(x, y) : \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y \subset (X \times X) \setminus \Delta$? Si $\exists (z, z) \in \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y \Rightarrow z \in \mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y = \emptyset$ es absurdo. Entonces, $(X \times X) \setminus \Delta \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} \Leftrightarrow \Delta$ es cerrado de $(X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$.

(\Leftarrow) $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow (x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^y : \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y \subset (X \times X) \setminus \Delta \Rightarrow \mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y = \emptyset$. En caso contrario, $\exists z \in \mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y \Rightarrow (z, z) \in \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y$ es absurdo. Entonces, (X, \mathcal{T}) es T_2 .

Corolario 2.0.1. Sean $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ e.t., (Y, \mathcal{S}) es T_2 , $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$ aplicación. Entonces, $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ es cerrado en $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{S})$.

Demostración. Y es $T_2 \Rightarrow \Delta_Y$ es cerrado en $Y \times Y$, f continua $\Rightarrow f \times 1_Y : (X, \mathcal{T}) \times (Y, \mathcal{S}) \rightarrow (Y, \mathcal{S}) \times (Y, \mathcal{S})$ continua $\Rightarrow (f \times 1_Y)^{-1}(\Delta_Y) = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = y\}$ es cerrado.

Proposición 2.3. Sean $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ e.t., (Y, \mathcal{S}) es T_2 , $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$ continua. Entonces, $E = \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $(X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$

Demostración. $\forall (x_1, x_2) \in (X \times X) \setminus E, f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow \exists \mathcal{V}^{f(x_i)}, i \in \{1, 2\}$ entorno de x_i , por ser Y T_2 . Como f es continua $\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_i)})$ entorno de $x_i \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_1)}) \times f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_2)})$ entorno de (x_1, x_2) en $(X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$. Veamos que $f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_1)}) \times f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_2)}) \subset (X \times X) \setminus E$. Si $(z_1, z_2) \in E, (z_1, z_2) \in f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_1)}) \times f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_2)}) \Rightarrow f(z_1) = f(z_2)$ donde $f(z_1) \in \mathcal{V}^{f(x_1)}$ y $f(z_2) \in \mathcal{V}^{f(x_2)}$ que es absurdo.

Proposición 2.4. Sean $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$ aplicación superyectiva y abierta. Entonces, (Y, \mathcal{S}) es T_2 .

Demostración. $\forall y_1, y_2 \in Y : y_1 \neq y_2 \Rightarrow (f \text{ supra}) \exists x_i \in X, i \in \{1, 2\} : f(x_i) = y_i \Rightarrow (x_1, x_2) \in (X \times X) \setminus E \Rightarrow (\text{hip.}) \exists \mathcal{U}^{x_i}, i \in \{1, 2\} : \mathcal{U}^{x_1} \times \mathcal{U}^{x_2} \subset (X \times X) \setminus E \Rightarrow (f \text{ ab.}) f(\mathcal{U}^{x_i}), i \in \{1, 2\}$ entorno de y_i . ¿Son disjuntos? Si $\exists z \in f(\mathcal{U}^{x_1}) \cap f(\mathcal{U}^{x_2}) \Rightarrow z = f(t_i) : t_i \in \mathcal{U}^{x_i}, i \in \{1, 2\} \Rightarrow (t_1, t_2) \in E$ y $(t_1, t_2) \in (\mathcal{U}^{x_1} \times \mathcal{U}^{x_2})$ que es absurdo.

Proposición 2.5. Sean $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ e.t., (Y, \mathcal{S}) es T_2 , $f, g : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$ aplicaciones continuas. Entonces, $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en (X, \mathcal{T}) .

Demostración. Sea $f \times g : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S}) \times (Y, \mathcal{S})$ continua. Entonces, Y es $T_2 \Leftrightarrow \Delta_Y$ es cerrado $\Rightarrow (f \times g)^{-1}(\Delta_Y)$ cerrado en (X, \mathcal{T}) donde $(f \times g)^{-1}(\Delta_Y) = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$.

Corolario 2.0.2. Sean $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ e.t., (Y, \mathcal{S}) es T_2 , $f, g : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$ aplicación continua. Si $\exists D$ denso en (X, \mathcal{T}) tal que $f|_D = g|_D \Rightarrow f = g$.

Demostración. $f|_D = g|_D \Rightarrow D \subset \{x \in X : f(x) = g(x)\} = \mathcal{C} \Rightarrow \overline{D} \subset \overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$ donde $\overline{D} = X \Rightarrow X = \mathcal{C} \Leftrightarrow f = g$.

Observación. T_0, T_1, T_2 son invariantes topológicos.

Proposición 2.6. Todo subespacio de e.t. T_2 es T_2 .

Demostración. Sea (X, \mathcal{T}) T_2 , $E \subset X$. Entonces, $\forall x_1, x_2 \in E \subset X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists \mathcal{U}^{x_1}, \mathcal{U}^{x_2}$ entornos de x_1, x_2 en (X, \mathcal{T}) disjuntos $\Rightarrow \mathcal{U}^{x_1} \cap E, \mathcal{U}^{x_2} \cap E$ entorno en $(E, \mathcal{T}|_E)$ disjuntos.

Proposición 2.7. Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia de e.t.. Entonces, $(\sum_{j \in J} X_j, \sum_{j \in J} \mathcal{T}_j)$ es $T_2 \Leftrightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$ es $T_2, \forall j \in J$.

Demostración. $(\Rightarrow) \forall j \in J, \forall (a_j)_{j \in J} \in \sum_{j \in J} X_j, \{(x_j)_{j \in J} \in \sum_{j \in J} X_j : x_j = a_j, \forall j \in J \setminus \{0\}\} \subset \sum_{j \in J} X_j$ es homeomorfo a $X_{j_0} \times \{(a_j)_{j \in J \setminus \{0\}}\}$ que es homeomorfo a $X_{j_0} \times \sum_{j \in J \setminus \{0\}} \{a_j\}$.

$(\Leftarrow) \forall x, y \in \sum_{j \in J} X_j : x \neq y$, entonces se dan dos posibilidades. Si $\exists j_1, j_2 \in J : x \in X_{j_1} \times \{j_1\}, y \in X_{j_2} \times \{j_2\}$, entonces $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$ es T_2 . Y si $\exists! j_0 \in J : x, y \in X_{j_0} \times \{j_0\}$ homeomorfo a X_{j_0} que es $T_2 \Rightarrow p_1(x), p_1(y) \in X_{j_0} \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x : p_1(x) \in \mathcal{U}^x, \exists \mathcal{U}^y : p_1(y) \in \mathcal{U}^y$ abiertos de $\sum_{j \in J} \mathcal{T}_j \Rightarrow \mathcal{U}^x \times \{j_0\}, \mathcal{U}^y \times \{j_0\}$ en $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k) \Rightarrow$ es T_2 .

Proposición 2.8. Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia de e.t.. Entonces, $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$ es $T_2 \Leftrightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$ es $T_2, j \in J$.

Demostración. (\Rightarrow) Sea $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$ espacio T_2 . Entonces, $\forall j \in J, b_j \in X_j \Rightarrow$ el subespacio $\mathcal{S}_j = \{x \in \prod_{j \in J} X_j : x_{j_0} = b_{j_0}, \forall j \neq j_0\}$ es T_2 y es homeomorfo a X_j bajo la restricción de \mathcal{S}_j a la proyección $p_j \Rightarrow X_j$ es $T_2, \forall j \in J$.

(\Leftarrow) Sea (X_j, \mathcal{T}_j) e.t. $T_2, \forall j \in J$. Entonces, $\forall x, y \in \prod_{j \in J} X_j : x \neq y \Rightarrow \exists j_0 \in J : x_{j_0} \neq y_{j_0} \Rightarrow \exists \mathcal{U}_{j_0}^x, \mathcal{U}_{j_0}^y$ entornos disjuntos de x_{j_0} e y_{j_0} en $(X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0}) \Rightarrow p_{j_0}^{-1}(\mathcal{U}_{j_0}^x), p_{j_0}^{-1}(\mathcal{U}_{j_0}^y)$ entornos disjuntos de x e y en

$$(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j) \Rightarrow (\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j) \text{ es } T_2.$$

Observación. El cociente de un e.t. T_2 no es necesariamente T_2 .

2.1. Espacio Regular

Definición 2.4 (Espacio Regular). Sea (X, \mathcal{T}) e.t. Diremos que es regular si $\forall C$ cerrado de (X, \mathcal{T}) , $\forall x \in X : x \notin C, \exists U, V \in \mathcal{T}$ disjuntos tal que $x \in U, C \subset V$. Diremos que es T_3 si es regular y T_0 .

Observación. Regular y $T_0 \Leftrightarrow$ regular y $T_1 \Leftrightarrow$ regular y T_2 .

Demostración. (\Rightarrow) (X, \mathcal{T}) regular y $T_0 \Rightarrow \forall x, y \in X : x \neq y, \exists \mathcal{U}^x \in \mathcal{T} : y \in \mathcal{U}^x \Rightarrow X \setminus \mathcal{U}^x$ es cerrado $\Rightarrow \exists V_i \in \mathcal{T}, i \in \{1, 2\}$ disjuntos tal que $x \in V_1, y \in X \setminus \mathcal{U}^x \subset V_2 \Rightarrow$ es T_2 .

(\Leftarrow) Trivial.

Observación. $T_3 \Rightarrow T_2$.

Observación. Regular $\not\Rightarrow T_0$.

Proposición 2.9. Sea (X, \mathcal{T}) e.t.. Entonces, son equivalentes

- (I) (X, \mathcal{T}) regular
- (II) $\forall x \in X : \forall U \in \mathcal{T} : x \in U, \exists V \in \mathcal{T} : x \in V \subset \bar{V} \subset U$.
- (III) $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}$ base de entornos de x cerrados en (X, \mathcal{T}) .

Demostración.

$(i \Rightarrow ii)$ $x \in U \in \mathcal{T} \Rightarrow x \notin X \setminus U$ cerrado $\Rightarrow \exists V_i \in \mathcal{T}, i \in \{1, 2\} : X \setminus U \subset V_2 \Rightarrow V_1 \subset X \setminus V_2$ cerrado $\Rightarrow \bar{V}_1 \subset X \setminus V_2 \Rightarrow x \in V_1 \subset \bar{V}_1 \subset X \setminus V_2 \subset U$.

$(ii \Rightarrow iii)$ $\forall x \in X, \{\bar{V} : V \in \mathcal{T}, x \in V\}$ es base de entornos cerrados $\Rightarrow \forall \mathcal{U}^x, x \in \mathcal{U}^x \Rightarrow \exists V \in \mathcal{T} : x \in V \subset \bar{V} \subset \mathcal{U}^x \subset U^x$.

$(iii \Rightarrow i)$ $x \notin C$ cerrado $\Rightarrow x \in X \setminus C \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists V$ entorno cerrado de $x : V \subset X \setminus C \Rightarrow x \in \overset{\circ}{V} \in \mathcal{T}$ y $C \subset X \setminus V$ disjuntos.

Observación. La regularidad (y ser T_3) son invariantes topológicos.

Proposición 2.10. *Todo subespacio de uno regular (T_3) es regular (T_3) .*

Demostración. (X, \mathcal{T}) regular $E \subset X, \forall C$ cerrado de $(E, \mathcal{T}|_E), \forall x \in E : x \notin C \Rightarrow \exists F$ cerrado de (X, \mathcal{T}) tal que $C = F \cap E \Rightarrow x \notin F \Rightarrow \exists U, V \in \mathcal{T}$ disjuntos tal que $x \in U, F \subset V \Rightarrow U \cap E, V \cap E \in \mathcal{T}|_E$ disjuntos tal que $x \in U \cap E, C \subset V \cap E$.

Proposición 2.11. *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia de e.t.. Entonces $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$ es regular $(T_3) \Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ es regular (T_3) .*

Demostración. (\Rightarrow) Trivial

(\Leftarrow) $\forall x = (x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j, \forall \mathcal{U}^x$ entorno de $x \Rightarrow \exists B \subset \mathcal{B}$ base de $\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j$ tal que $x \in B \subset \mathcal{U}^x, B = \bigcap_{k=1}^n p_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$ donde $U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}$. Entonces, $x \in B \Rightarrow x_{j_k} \in U_{j_k}, \forall k \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \exists \mathcal{V}^{x_{j_k}}$ entorno cerrado de $x_{j_k}, \forall k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\mathcal{V}^{x_{j_k}} \subset U_{j_k} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n p_{j_k}^{-1}(\mathcal{V}^{x_{j_k}}) \subset B \subset \mathcal{U}^x$ entorno cerrado de x , que es la caracterización anterior de regular.

Proposición 2.12. *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia de e.t.. Entonces, $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ es regular $(T_3) \Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ regular (T_3) .*

Demostración. (\Rightarrow) $\forall j_0 \in J, X_{j_0}$ es homeomorfo a $X_{j_0} \times \{j_0\} \subset \sum_{j \in J} X_j$.

(\Leftarrow) $\forall x \in \sum_{j \in J} X_j \Rightarrow$ (por ser unión disjunta) $\exists ! j_0 \in J : x \in X_{j_0} \times \{x_{j_0}\}$ que es homeomorfo a X_{j_0} .

Observación. El coiente e.t. T_3 no es necesariamente regular.

Ejemplo. pg. 50

2.2. Espacio Completamente Regular

Definición 2.5 (Completamente Regular). *Sea (X, \mathcal{T}) e.t.. Diremos que (X, \mathcal{T}) es completamente regular si $\forall x \in X, \forall C$ cerrado de $(X, \mathcal{T}), x \notin$*

$C, \exists f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow [0, 1]$ continua, $f(x) = 0, f(C) = \{1\}$. Diremos que es T_{3a} si es completamente regular y T_1

Observación. (X, \mathcal{T}) es completamente regular $\Leftrightarrow \forall C$ cerrado, $\forall x \notin C, \exists g : (X, \mathcal{T}) \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $f(x) = 1, g(C) = \{0\}$.

Observación. completamente regular \Rightarrow regular.

Observación. $T_3 \not\Rightarrow T_{3a}$.

Proposición 2.13. Sea (X, \mathcal{T}) e.t. metrizable. Entonces, (X, \mathcal{T}) es T_{3a} .

Demostración. (X, \mathcal{T}) es T_2 y $\exists d$ métrica tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Entonces, $\forall C$ cerrado de $\mathcal{T}, \forall x \in X : x \notin C \Rightarrow d(x, C) > 0$. Sea $g : (X, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R} : z \mapsto g(z) = \frac{d(z, C)}{d(x, C)} \Rightarrow g$ es continua y

$$g = \begin{cases} 1, & \text{si } z = x, \\ \{0\} & \text{si } z = C \end{cases}$$

la imagen de g es un subconjunto de las semirectas derechas. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow [0, 1] : z \mapsto f(z) = \min\{g(z), 1\}$ entonces,

$$f = \begin{cases} 1, & \text{si } z = x, \\ \{0\} & \text{si } z = C \end{cases}$$

$\Rightarrow (X, \mathcal{T})$ es T_{3a} .

Observación. Ser completamente regular (T_{3a}) es un invariante topológico.

Proposición 2.14. Todo subespacio de un espacio completamente regular (T_{3a}) es completamente regular (T_{3a}).

Demostración. Sea (X, \mathcal{T}) completamente regular, $E \subset X, E \neq \emptyset$. Entonces, $\forall C$ cerrado de $(E, \mathcal{T}|_E), \forall x \in E : x \notin C \Rightarrow \exists F \neq \emptyset$ cerrado de $(X, \mathcal{T}) : C = F \cap E \Rightarrow f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in X, \\ \{1\} & \text{si } x = F \end{cases}$$

$\Rightarrow f|_E : (E, \mathcal{T}|_E) \rightarrow [0, 1]$ es continua tal que

$$f|_E = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in X, \\ \{1\} & \text{si } x = C \end{cases}$$

\Rightarrow completamente regular.

Proposición 2.15. Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia de e.t.. Entonces, $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$ es completamente regular (T_{3a}) si y solo si (X_j, \mathcal{T}_j) es completamente regular $(T_{3a}), \forall j \in J$.

Demostración. (\Rightarrow) Trivial.

(\Leftarrow) $\forall C$ cerrado de $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$, $\forall x = (x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j \setminus C \in \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$ base de $\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j$ tal que $x \in B \subset \prod_{j \in J} X_j \setminus C$, $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$, $U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}, \forall k \in \{1, \dots, n\}$. (hip.) $\Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}, \exists f_k : (X_{j_k}, \mathcal{T}_{j_k}) \rightarrow [0, 1]$ continua $\Rightarrow f_k(x_{j_k}) = 0, f_k(X_{j_k} \setminus U_{j_k}) = \{1\}$. Sea $f : (\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j) \rightarrow [0, 1]$ tal que $\forall z \in \prod_{j \in J} X_j, f(z) := \max \{ \}$ es continua dado que el máximo de funciones continuas es continuo $\Rightarrow f(x) = 0$ y si $\forall z \in C \Rightarrow z \in B \Rightarrow z \in \{1, \dots, n\} : z_{j_{k_0}} \notin U_{j_{k_0}} \Rightarrow f_{k_0}(z_{j_{k_0}}) = 1 \Rightarrow f(z) = 1 \Rightarrow f(C) = \{1\}$.

Proposición 2.16. Sea $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ familia de e.t.. Entonces, $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ es completamente regular (T_{3a}) si y solo si (X_j, \mathcal{T}_j) es completamente regular $(T_{3a}), \forall j \in J$.

Demostración. pág. 54

Observación. El cociente de e.t. es T_{3a} no es completamente regular.

2.3. Espacios Normales

Definición 2.6 (Normal). Sea (X, \mathcal{T}) e.t.. Decimos que es normal si $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos $\exists G_i, i \in \{1, 2\}$ abiertos disjuntos tal que $C_i \subset G_i$. Deci-

mos que es T_4 si es normal y T_1 .

Proposición 2.17. *Todo e.t. metrizable es T_4 .*

Demostración. (X, \mathcal{T}) e.t. metrizable $\Rightarrow \exists d$ métrica de (X, \mathcal{T}) tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d \Rightarrow \mathcal{T}$ es T_2 . Entonces, $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos de (X, \mathcal{T}) se pueden dar dos casos

- Si $C_1 = \emptyset$, sea $G_1 = \emptyset, G_2 = X$. Entonces, (X, \mathcal{T}) es T_4 .
- Si $C_1, C_2 \neq \emptyset \Rightarrow \forall x \in C_1, \exists \epsilon_x > 0 : B_{\epsilon_x}(x) \cap C_2 = \emptyset$ y $\forall y \in C_2, \exists \delta_y : B_{\delta_y}(y) \cap C_1 = \emptyset \Rightarrow C_1 \subset \bigcup_{x \in C_1} B_{\epsilon_{\frac{x}{3}}}(x) := G_1 \in \mathcal{T}$ y $C_1 \subset \bigcup_{x \in C_2} B_{\delta_{\frac{y}{3}}}(y) := G_2 \in \mathcal{T}$. En caso contrario, $\exists z \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow \exists x_0 \in C_1 : z \in B_{\epsilon_{\frac{x_0}{3}}}(x_0)$ y $\exists y_0 \in C_1 : z \in B_{\delta_{\frac{y_0}{3}}}(y_0)$. Suponemos que $\delta_{y_0} \leq \epsilon_{x_0}$, entonces $d(x_0, y_0) \leq d(x_0, z) + d(z, y_0) < \frac{\epsilon_{x_0}}{3} + \frac{\delta_{y_0}}{3} \leq \frac{2}{3}\epsilon_{x_0} \Rightarrow y_0 \in B_{\epsilon_{x_0}}, y_0 \in C_2$ absurdo.

Proposición 2.18. *Sea (X, \mathcal{T}) e.t.. Entonces, son equivalentes*

- (I) (X, \mathcal{T}) es normal.
- (II) $\forall C$ cerrado, $\forall U \in \mathcal{T} : C \subset U, \exists V \in \mathcal{T} : C \subset V \subset \overline{V} \subset U$.
- (III) $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos, $\exists G_1 \in \mathcal{T} : C_1 \subset G_1 : \overline{G_1} \cap C_2 = \emptyset$.
- (IV) $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos $\exists G_i \in \mathcal{T} : \overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \emptyset$ y $C_i \subset G_i, i \in \{1, 2\}$

Demostración.

- (a \Rightarrow b) Sea $C \subset U \in \mathcal{T} : C$ y $X \setminus U$ son cerrados disjuntos. Entonces, (X, \mathcal{T}) normal $\Rightarrow \exists V_i, i \in \{1, 2\}$ disjuntos tal que $C \subset V_1$ y $X \setminus U \subset V_2$ disjuntos $\Rightarrow V_1 \subset X \setminus V_2 \Rightarrow \overline{V_1} \subset X \setminus V_2$ cerrado $\Rightarrow C \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset X \setminus V_2 \subset U$.
- (b \Rightarrow c) C_1, C_2 cerrados disjuntos $\Rightarrow C_1 \subset X \setminus C_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists G_1 \in \mathcal{T} : C_1 \subset G_1 \subset \overline{G_1} \subset X \setminus C_2 \Rightarrow \overline{G_1} \cap C_2 = \emptyset$.
- (c \Rightarrow d) $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos $\Rightarrow \exists G_1 \in \mathcal{T} : C_1 \subset G_1, \overline{G_1} \cap C_2 = \emptyset$ y $\exists G_2 \in \mathcal{T} : C_2 \subset G_2 : \overline{G_2} \cap \overline{G_1} = \emptyset$.

(d \Rightarrow a) $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos $\exists G_1, G_2 \in \mathcal{T} : \overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \emptyset, C_1 \subset G_1, C_2 \subset G_2$ donde $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \emptyset \Rightarrow G_1 \cap G_2 = \emptyset \Rightarrow$ normal.

Lema 2.0.1 (Jones). Sea (X, \mathcal{T}) e.t.. Si $\exists D$ denso en (X, \mathcal{T}) , E cerrado en (X, \mathcal{T}) tal que $(E, \mathcal{T}|_E)$ es discreto y $\text{card}(E) \geq 2^{\text{card}(D)}$. Entonces, (X, \mathcal{T}) no es normal.

Demostración. Sea (X, \mathcal{T}) normal, $\forall C \subset E, C$ y E son disjuntos y cerrados en $(E, \mathcal{T}|_E)$ y en (X, \mathcal{T}) que es normal. Entonces, $\exists U_C, V_C \in \mathcal{T} : C \subset U_C, E \setminus C \subset V_C$. Ahora, sea $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(D) : c \mapsto f(c) = U_C \cap D$ aplicación. Veamos que f es inyectiva, $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{P}(E) : C_1 \neq C_2 \Rightarrow \exists x \in C_1 : x \notin C_2 \Rightarrow C_i \subset U_{C_i}, E \setminus C_i \subset V_{C_i}, i \in \{1, 2\} \Rightarrow x \in U_{C_1} \cap V_{C_2} \in \mathcal{T} \Rightarrow (D \text{ denso}) y \in U_{C_1} \cap V_{C_2} \cap D \neq \emptyset \Rightarrow$

$$\begin{cases} y \in U_{C_1} \cap D = f(C_1) \\ y \notin U_{C_2} \cap D = f(C_2) \end{cases}$$

$\Rightarrow f(C_1) \neq f(C_2) \Rightarrow \text{card}(E) < \text{card}(\mathcal{P}(E)) \leq \text{card}(\mathcal{P}(D)) = 2^{\text{card}(D)}$

Proposición 2.19. Sea (X, \mathcal{T}) e.t. normal (T_4) , $E \subset X$, E cerrado en (X, \mathcal{T}) . Entonces, $(E, \mathcal{T}|_E)$ es normal (T_4) .

Demostración. $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos en $(E, \mathcal{T}|_E)$. Entonces, C_1, C_2 cerrados disjuntos de (X, \mathcal{T}) que es normal $\Rightarrow \exists U_i \in \mathcal{T}$ disjuntos tal que $C_i \subset U_i, i \in \{1, 2\} \Rightarrow U_i \cap E \in \mathcal{T}|_E$ disjuntos tal que $C_i \subset U_i \cap E, i \in \{1, 2\}$.

Observación. El producto de e.t. normales no es necesariamente normal.

Proposición 2.20. Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia de e.t.. Entonces, $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ es normal $(T_4) \Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ es normal (T_4) .

Demostración. $(\Rightarrow) \forall j_0 \in J, X_{j_0} \simeq X_{j_0} \times \{j_0\} \subset \sum_{j \in J} X_j$ es cerrado.

$(\Leftarrow) \forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos de $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k) \Rightarrow \forall k \in J, j_k^{-1}(C_1), j_k^{-1}(C_2)$ cerrados disjuntos de (X_k, \mathcal{T}_k) que es normal $\Rightarrow \forall j \in J, \exists U_{k,1}, U_{k,2} \in \mathcal{T}_k$ disjuntos tal que $j_k^{-1}(C_i) \subset U_{k,i} \in \mathcal{T}_k, i \in \{1, 2\}$. Entonces, $U_1 = \bigcup_{k \in J} U_{k,1} \times \{k\}, \bigcup_{k \in J} U_{k,1} \times \{k\} \in \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k$ son abiertos dis-

juntos y $C_1 \subset U_1, C_2 \subset U_2$.

Proposición 2.21. Sea (X, \mathcal{T}) , (Y, \mathcal{S}) e.t. tal que (X, \mathcal{T}) es normal, $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$ suprayectiva, continua y cerrada. Entonces, (Y, \mathcal{S}) es normal (T_4).

Demostración. $\forall C_1, C_2$ cerrado disjunto $(Y, \mathcal{T}) \Rightarrow f^{-1}(C_1), f^{-1}(C_2)$ cerrados disjuntos de $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow \exists U_i \in \mathcal{T}$ disjuntos tal que $f^{-1}(C_i) \subset U_i, i \in \{1, 2\} \Rightarrow (f \text{ cerrada}) V_i = Y \setminus f(X \setminus U_i) \in \mathcal{S}, i \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_1 \cap V_2 &= (Y \setminus f(X \setminus U_1)) \cap (Y \setminus f(X \setminus U_2)) \\ &= (Y \setminus (f(X \setminus U_1) \cup f(X \setminus U_2))) \\ &= Y \setminus f(X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2) \\ &= Y \setminus f(X \setminus (U_1 \cap U_2)) \\ &= Y \setminus f(X) = Y \setminus Y = \emptyset \end{aligned}$$

\Rightarrow disjuntos.

$\dot{C} C_i \subset X \setminus f(X \setminus U_i)? \forall y \in C_i \Rightarrow f^{-1}(y) \subset f^{-1}(C_i) \subset U_i \Rightarrow X \setminus U_i \subset X \setminus f^{-1}(y) \Rightarrow f(X \setminus U_i) \subset f(X \setminus f^{-1}(y)) \Rightarrow z \in Y \setminus f(X \setminus f^{-1}(y)) \subset Y \setminus f(X \setminus U_i) = V_i \Rightarrow z \notin f(X \setminus f^{-1}(y)) \Rightarrow z = f(x') : x' \in X \setminus f^{-1}(y) \Rightarrow x' \in f^{-1}(y) \Rightarrow f(x') = y \Rightarrow z = y \Rightarrow \forall y \in C_i, y \in V_i.$

Para ver que es T_4 : (X, \mathcal{T}) es T_4 , $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y \Rightarrow (T_1) \{x\}$ cerrado $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow (f \text{ cerrada}) f(\{x\})$ es cerrado en (Y, \mathcal{S}) y $f(\{x\}) = \{y\}$.

Lema 2.0.2 (Urysohn). Sea (X, \mathcal{T}) e.t.. Entonces, (X, \mathcal{T}) normal $\Leftrightarrow \forall C_1, C_2$ cerrado disjunto, $\exists f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $f(C_1) = \{0\}, f(C_2) = \{1\}$.

Demostración. (\Rightarrow) Sea

$$J = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} J_n, J_n = \left\{ \frac{k}{2^n} : k \in \{0, 1, \dots, 2^n\} \right\}$$

Entonces, $\forall r \in J, \exists M_r \subset X$ tal que

- a) $M_0 = C_1, M_1 = X \setminus C_2$
- b) $\forall r, r' \in J, r < r' \Rightarrow \overline{M_r} \subset \overset{\circ}{M}_{r'}$

Hacemos la demostración por inducción.

Sea $n = 0 \Rightarrow J_0 = \{0, 1\} \Rightarrow M_0 = C_1, M_1 = X \setminus C_2 \Rightarrow \overline{M_0} = \overline{C_1} = C_1 \subset X \setminus C_2 = M_1 = \overset{\circ}{M}_1$.

Suponemos que es cierto para $m = p$. Veamos que se cumple para $m = p + 1$.

Si $m = p + 1$, entonces $\forall r \in J, r = \frac{k}{2^{p+1}}$. Distinguimos k par e impar.

- Si k par, entonces $k = 2k', k' \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow r = \frac{2k'}{2^{p+1}} = \frac{k'}{2^p} \in J_p \Rightarrow \exists U_r$ tal que cumple (a) y (b).
- Si k es impar $\Rightarrow s = \frac{k-1}{2^{p+1}}, t = \frac{k+1}{2^{p+1}} \in J_p \Rightarrow \exists M_s, M_t$ tal que cumplen (a) y (b) dado que $s < t, \overline{M_s} \subset \overset{\circ}{M}_t$ y como (X, \mathcal{T}) es normal $\Rightarrow \exists M_r \in \mathcal{T} : \overline{M_s} \subset M_r \subset \overline{M_r} \subset \overset{\circ}{M}_t$.

Sea $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \in J : x \in \overline{M_r}\}, & \text{si } x \notin C_2 (\Leftrightarrow x \in M_1) \\ 1, & \text{si } x \in C_2 \end{cases}$$

entonces, $f(C_2) = \{1\}$ por definición. Y $\forall x \in C_1 = M_0 = \overline{M_0}$ cerrado $\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f(C_1) = \{0\}$

Veamos que f es continua

- Si $0 < f(x) < 1$, J denso en $[0, 1] \Rightarrow \forall z \in [0, 1], \forall \delta > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^{m_0}} < \delta \Rightarrow \frac{k_0}{2^{m_0}} \in (z - \delta, z + \delta)$. Entonces, $\exists t, s \in J : f(x_0) - \epsilon < t < f(x_0) < s < f(x_0) + \epsilon$.
 - Si $t < f(x_0) \Rightarrow x_0 \notin \overline{M_t}$ (si $x_0 \in \overline{M_t} \Rightarrow \forall j \in J : t < j, x_0 \in \overset{\circ}{M}_j \subset \overline{M_j} \rightarrow f(x_0) \leq t$).

- Si $t(x_0) < s \Rightarrow x_0 \in \overset{\circ}{M}_s$ ($f(x_0) = \inf\{r \in J : x_0 \in \overline{M}_r\} < s \Rightarrow \exists j \in J : j < s, x_0 \in \overline{M}_j \subset \overset{\circ}{M}_s$)

$\Rightarrow x \in (X \setminus \overline{M}_t \cap \overset{\circ}{M}_s) \in \mathcal{T}$ donde $X \setminus \overline{M}_t = V^{x_0}$.

$x \in V^{x_0} \Rightarrow$

- Si $x \notin \overline{M}_t \Rightarrow f(x) \geq t$ (Si no , $f(x) < t, f(x) = \inf\{r \in J : x \in \overline{M}_r\} \Rightarrow \exists j \in J : j < t, x \in \overline{M}_j \subset \overset{\circ}{M}_t \subset \overline{M}_t$ absurdo)
- Si $x \in \overset{\circ}{M}_s \subset \overline{M}_s \Rightarrow f(x) \leq s$

Entonces, $f(V^{x_0}) \subset [t, s] \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$

- Si $f(x_0) = 1, \forall \epsilon > 0, \exists t \in J : f(x_0) - \epsilon = 1 - \epsilon < t < f(x_0) = 1$. Entonces, $t < f(x_0) \rightarrow x_0 \notin \overline{M}_t \Rightarrow x_0 \in X \setminus \overline{M}_t = V^{x_0}$. Por tanto, $\forall x \in V^{x_0} \Rightarrow x \notin \overline{M}_t \Rightarrow f(x) \geq t$. Por tanto, $f(V^{x_0}) \subset [t, 1] \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) = (1 - \epsilon, 1)$.
- Si $f(x_0) = 0$, entonces $\forall \epsilon > 0, \exists s \in J : 0 = f(x_0) < s < f(x_0) + \epsilon = \epsilon$ donde $f(x_0) < s \Rightarrow x_0 \in \overset{\circ}{M}_s = V^{x_0} \in \mathcal{T}$. Por tanto, $\forall x \in V^{x_0}, x \in \overset{\circ}{M}_s \subset \overline{M}_s \Rightarrow f(x) \leq s \Rightarrow f(V^{x_0}) \subset [0, s] \subset [0, \epsilon] = [f(x_0), f(x_0) + \epsilon)$.

$(\Leftarrow) \forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos.

- Si $C_1 = \emptyset$. Tomamos $M_1 = \emptyset, M_2 = X$,
- Si $C_1, C_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $f(C_1) = \{0\}, f(C_2) = \{1\} \Rightarrow f^{-1}([0, \frac{1}{2})), f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) \in \mathcal{T}$ disjuntos, donde $C_1 \subset f^{-1}([0, \frac{1}{2})), C_2 \subset f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) \in \mathcal{T}$.

Corolario 2.0.3. T_4 es más fuerte que T_{3a} , $T_4 \Rightarrow T_{3a}$.

Observación. Metrizable $\Rightarrow T_4, T_{3a}, T_3, T_2, T_1, T_0$.

Observación. $T_3 \not\Rightarrow T_4$, T_{3a} es multiplicativa y T_4 no.