# Geomtería Diferencial

Hugo Del Castillo Mola

6 de noviembre de 2022

# Índice general

# Parte I

# Curvas

# Capítulo 1

# Estudio Local

## 1.1. Curvas Parametrizadas

**Definición 1.1** (Curva)**.** *Una curva en* $\mathbb{R}^3$ *es una función diferenciarle* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$*.*

**Definición 1.2** (Vector tangente)**.** *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva en* $\mathbb{R}^3$ *con* $\alpha = (\alpha_1, \alpha^2, \alpha^3)$*. Entonces,* $\forall t \in I$

$$\alpha'(t) = \Big(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t)\Big).$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}$$

**Observación.** *El vector tangente también se llama vector velocidad*

**Definición 1.3** (Reparametrización)**.** *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva,* $h : J \to I$ *una función diferenciable. Entonces, la función* $\beta : J \to \mathbb{R}^3$

$$\beta(t) = \alpha(h(t))$$

*es una reparametrización de* $\alpha$ *por* $h$*.*

**Ejemplo.** *Sea* $\alpha(t) = \big(t, t\sqrt{t}, 1-t\big)$ *en* $I = (0, 4)$*,* $h(s) = s^2$ *en* $J = (0, 2)$*. Entonces, la curva reparametrizada es* $\beta(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(s^2) = (s, s^3, 1 - s^2)$*.*

**Lema 1.0.1.** *Si $\beta$ es una reparametrización de $\alpha$ por $h$, entonces*

$$\beta'(t) = h'(t) \cdot \alpha'(h(t))$$

## 1.2. Curvas Regulares

**Definición 1.4** (Curva Regular)**.** *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada. Entonces, si $\alpha'(t) \neq 0.\forall t \in I$ decimos que es regular.*

**Definición 1.5** (Longitud de Arco)**.** *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3, t_0 \in I$. Definimos la función longitud de arco desde $t_0$ como $s : I \to \mathbb{R}$ donde*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(u)||du.$$

**Definición 1.6** (Curva Parametriza por Longitud de Arco)**.** *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable. Entonces, si $||\alpha'(t)|| = 1, \forall t \in I$ decimos que la curva está parametrizada por longitud de arco.*

**Teorema 1.1.** *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Entonces, $\exists \beta : J \to \mathbb{R}^3$ tal que $||\beta'(s)|| = 1, \forall s \in J$, es decir, $\beta$ tiene velocidad unitaria.*

**Observación.** *Una reparametrización $\alpha(h)$ preserva la orientación si $h' \geq 0$ y la invierte si $h' \leq 0$.*

**Observación.** *Por definición, una curva regular parametrizada por arco siempre conserva la orientación.*

## 1.3. Producto Vectorial

**Definición 1.7** (Producto Vectorial)**.** *Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$. El producto vectorial de $u, v$ es*

$$u \times v = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

**Proposición 1.1** (Propiedades Producto vectorial)**.** *Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$. Entonces,*

(I) $u \times v = -v \times u$.

(II) $u \times v$ *es lineal respecto de* $u$ *y* $v$*, es decir, para* $w \in \mathbb{R}^3$ *y* $a, b \in \mathbb{R}, (au + bw) \times v = au \times v + bw \times v$.

(III) $u \times v = 0 \Leftrightarrow u, v$ *son linealmente dependientes.*

(IV) $(u \times v) \cdot u = 0, (u \times v) \cdot v = 0$.

## 1.4. Fórmulas de Frenet

**Definición 1.8** (Curvatura)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a., $s \in I$. Entonces, $||\alpha''(s)|| = k(s)$ se llama curvatura de $\alpha$ en $s$.*

**Observación.** *$k(s)$ describe el cambio en la dirección de la curva en un instante.*

**Proposición 1.2.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a.. Entonces, $\alpha''(s) \perp \alpha'(s), \forall s \in I$.*

**Demostración.** $||\alpha'(s)|| = 1, \forall s \in I \Rightarrow \alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = 1 \Rightarrow 2\alpha''(s) \cdot \alpha'(s) = 0 \Rightarrow \alpha''(s) \perp \alpha'(s), \forall s \in I$.

**Proposición 1.3.** *La curvatura se mantiene invariante ante un cambio de orientación.*

**Demostración.** $\beta(-s) = \alpha(s) \Rightarrow \beta'(s) = -\alpha'(s) \Rightarrow \beta''(-s) = \alpha''(s) = k(s)$.

**Definición 1.9** (Vector Tangente Unitario)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a.. Entonces,*

$$T(s) = \alpha'(s)$$

*se llama vector tangente unitario a $\alpha$ en $s$.*

**Observación.** $k(s) = ||T'(s)||$.

**Nota.** *Observamos que $\forall s \in I : k(s) > 0,\ k(s) = ||\alpha''(s)|| \Rightarrow \alpha''(s) = k(s)N(s)$ donde $N(s)$ es un vector unitario en la dirección de $\alpha''(s)$. Además, $\alpha''(s) \perp \alpha'(s) \Rightarrow N(s)$ es normal a $\alpha(s)$.*

**Definición 1.10** (Vector Normal)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva regular p.p.a.. Entonces,*

$$N(s) = \frac{T'(s)}{k(s)}$$

*se llama vector normal a $\alpha$ en $s$.*

**Observación.** *El vector normal $N$ es perpendicular al vector tangente unitario $T$ y normal a la curva $\alpha$ en $s$. Esto es, $\alpha'(s) \cdot \alpha''(s) = T(s) \cdot k(s)N(s) = 0$*

**Definición 1.11** (Plano Oscilador)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Entonces, $T(s), N(s)$ determinan un plano en $\mathbb{R}^3$ y lo llamamos plano oscilador.*

**Observación.** *También se llama Referencia móvil de Frenet para curvas planas.*

**Definición 1.12** (Vector Binormal)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a.. Entonces, $B(s) = T(s) \times N(s)$ es el vector normal al plano oscilador en $s$ y se dice vector binormal en $s$.*

**Observación.** *$||B'(s)||$ mide la tasa de cambio del plano oscilador, es deicr, la rapidez con la que la curva se aleja del plano oscilador en $s$.*

**Nota.** *$B' = T' \times N' + T \times N' = T \times N' \Rightarrow B'$ es normal a $T$ y $B'$ es paralelo a $N$. Entonces, escribimos $B' = \tau N$ para alguna función $\tau$.*

**Definición 1.13** (Torsión)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. tal que $\alpha''(s) \neq 0, s \in I$. Entonces, decimos que*

$$\tau(s) = \frac{B'(s)}{N(s)}$$

*es la torsión de $\alpha$ en $s$.*

**Observación.** *Si cambia la orientación entonces el signo del vector binormal cambia dado que $B = T \times N$. Por tanto, $B'(s)$ y la torsión se mantienen invariantes.*

**Definición 1.14** (Tiedro de Frenet)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. tal que $k > 0$. Entonces, para cada valor $s \in I$, $\exists T(s), N(s), B(s)$ vectores unitarios mutuamente ortogonales y los llamamos el tiedro de Frenet en $\alpha$. Estos vectores vienen dados de la siguiente forma*

$$T(s) = \alpha'(s) \quad \textit{vector tangente} \ ,$$

$$k(s) = ||T'(s)|| \ \textit{curvatura} \ ,$$

$$N(s) = \frac{1}{k(s)} T'(s) \ \textit{vector normal} \ ,$$

$$B = T \times N \ \textit{vector binormal} \ ,$$

$$\tau(s) = \frac{B'(s)}{N(s)} \ \textit{torsión}$$

*donde $T \cdot T = N \cdot N = B \cdot B = 1$ y cualquier otro producto escalar es $0$.*

DIBUJO

**Definición 1.15** (Fórmulas de Frenet)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva regualar p.p.a con $k > 0$ y torsión $\tau$. Entonces,*

$$T' = kN,$$

$$N' = -kT + \tau B,$$

$$B' = -\tau N,$$

**Proposición 1.4.** *$\tau = 0$ si y solo si $\alpha$ es una curva en el plano.*

**Demostración.** *($\Rightarrow$) Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva plana p.p.a.. Entonces, $\exists p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^3$ tal que $(\alpha(s) - p) \cdot q = 0, \forall s \in I$. Derivando,*

$$\alpha'(s) \cdot q = \alpha''(s) \cdot q = 0, \ \forall s \in I.$$

*Por tanto, $q$ es ortogonal a $T$ y $N \Rightarrow B = \frac{q}{||q||} \Rightarrow B' = 0 \Rightarrow \tau = 0$.*

*($\Leftarrow$) Sea $\tau = 0 \Rightarrow B' = 0 \Rightarrow B' \ || \ B$. Queremos ver que $\alpha$ es ortogonal a $B$ en $0$. Sea*

$$f(s) = (\alpha(s) - \alpha(0)) \cdot B, \forall s \in I.$$

*Entonces,*

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \alpha' \cdot B = T \cdot B = 0$$

*donde* $f(0) = 0 \Rightarrow (\alpha(s) - \alpha(0)) \cdot B = 0, \ s \in I$*. Por tanto,* $\alpha$ *permanece en el plano ortogonal a* $B$*.*

**Proposición 1.5.** *Sea* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *una curva regular p.p.a. con curvatura constante* $k > 0$ *y* $\tau = 0$*. Entonces* $\alpha$ *es parte de un circulo de radio* $\frac{1}{k}$*.*

**Demostración.** $\tau = 0 \Rightarrow \alpha$ *es una curva en plano. Sea* $\gamma = \alpha + \frac{1}{k}N$ *entonces,*

$$\gamma' = \alpha' + \frac{1}{k_\alpha}N'_\alpha = T_\alpha - \frac{1}{k_\alpha}k_\alpha T_\alpha = 0.$$

*Como* $T_\gamma = 0 \Rightarrow k_\gamma = 0 \Rightarrow \gamma$ *es una recta horizontal. Sea* $\gamma = c \in \mathbb{R}$

$$\gamma(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k_\alpha(s)}N(s) = c, \ \forall s \in I$$

$$\Rightarrow d(c, \alpha(s)) = ||c - \alpha(s)|| = ||\frac{1}{k}N(s)|| = \frac{1}{k}.$$

*Luego,* $\alpha$ *es una curva que en todo punto se mantiene a distancia* $\frac{1}{k}$ *de un punto fijo* $c$*, el centro de la circunferencia.*

## 1.5. Curvas Arbitrarias

**Proposición 1.6.** *Sea* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *una curva regular con* $k > 0$ *y* $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ *su reparametrización por arco tal que* $\beta(t) = \alpha(s(t))$ *donde* $s(t)$ *es la longitud de arco. Entonces,*

$$T' = kvN$$

$$N' = -kvT + \tau vB$$

$$B' = -\tau vN$$

**Demostración.** $\frac{dT(s(t))}{dt} = T'(s(t)) \cdot s'(t) = k(s(t))N(s(t))v(t) = k(s)N(s)v.$

**Proposición 1.7.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular con $k > 0$ y $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ su reparametrización por arco tal que $\beta(t) = \alpha(s(t))$ donde $s(t)$ es la longitud de arco. Entonces,*

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'(s)\frac{ds}{dt} = vT(s),$$

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \frac{dv}{dt}T + vT' = v'T(s) + kv^2N$$

*son la velocidad y aceleración de $\alpha$ en $s(t)$.*

DIBUJO

**Teorema 1.2.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Entonces,*

$$T = \frac{\alpha'}{||\alpha'||},\ k = \frac{||\alpha' \times \alpha''||}{||\alpha'||^3},$$

$$N = B \times T,\ B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{||\alpha' \times \alpha''||},$$

$$\tau = (\alpha' \times \alpha'') \cdot \frac{\alpha'''}{||\alpha' \times \alpha'''||^2}.$$

**Definición 1.16** (Hélice Cilíndrica). *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular tal que $T(t) \cdot u = \cos(\varphi), \forall t \in I$. Entonces, $\alpha$ es una hélice cilíndrica.*

**Teorema 1.3.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva regula con $k > 0$. Entonces, $\alpha$ es una hélice cilíndrica si y solo si $\frac{\tau}{k}$ es constante.*

**Demostración.**

*($\Rightarrow$) Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva regular p.p.a con $k > 0$. Entonces, si $\alpha$ es una hélice cilíndrica $T(t) \cdot u = \cos(\varphi),\ \forall t \in I \Rightarrow$*

$$0 = (T \cdot u)' = T' \cdot u = kN \cdot u$$

*donde $k > 0 \Rightarrow N \cdot u = 0$. Por tanto, $\forall t \in I$, $u$ está en el plano* *determinado por $T(t)$ y $B(t)$. Es decir,*

$$u = \cos(\varphi)T + \operatorname{sen}(\varphi)B.$$

*Usando las fórmulas de Frenet*

$$0 = (k\cos(\varphi) + \tau\operatorname{sen}(\varphi))N$$

$$\Rightarrow \frac{\tau}{k} = \frac{\cos(\varphi)}{sin(\varphi)}.$$

*(⇐) Si $\frac{\tau(t)}{k(t)} = \cos(\varphi), \forall t \in I$. Entonces, eligiendo $\cot(\varphi) = \frac{\tau}{k}$, si*

$$U = \cos(\varphi)T + \operatorname{sen}(\varphi)B$$

*tenemos que*

$$U' = (k\cos(\varphi) - \tau\operatorname{sen}(\varphi))N = 0$$

*determina un vector unitario $u$ tal que $T \cdot u = \cos(\varphi) \Rightarrow \alpha$ es una hélice cilíndrica.*

**Teorema 1.4** (Fundamental de la Teoría Local de Curvas)**.** *Sean $k, \tau : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables con $k(s) > 0, \tau(s)$. Entonces, $\exists \alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva tal que $s$ es la longitud de arco, $k(s)$ es la curvatura, y $\tau(s)$ es la torsión de $\alpha$.*

*Además, cualquier otra curva $\overline{\alpha}$ difiere de $\alpha$ por un movimiento rígido, es decir, $\exists \gamma : I \to \mathbb{R}$ aplicación lineal ortogonal con $\det\gamma > 0$ y $c \in \mathbb{R}^3$ : $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha} \circ \gamma) + c$.*

**Demostración.** *content*

# Capítulo 2

# Estudio Global

# Parte II

# Superficies

# Capítulo 3

# Plano Tangente y Diferenciabilidad

## 3.1. Definición de Superficie

**Definición 3.1** (Superficies). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$. Entonces, decimos que $S$ es una superficie si $\forall p \in S, \exists V \subset \mathbb{R}^3$ entorno de $p$ en $S$ y $\exists X : U \to V \cap S$ aplicación con $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto tal que*

*(I) $X$ es diferenciable,*

*(II) $X : U \to V$ es homeomorfismo,*

*(III) $(dX)_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva $\forall q \in U$.*

*donde $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $V$ entorno de $p$ en $S$.*

**Observación.** *En $I)$ si $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ entonces, $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ tienen derivadas parciales continuas en $U$.*

**Observación.** *En $II)$ dado que $X$ es continua por $I)$ solo faltaría ver que $X$ tiene inversa $X^{-1} : V \cap S \to U$ continua.*

**Observación.** $(dX)_q$ *inyectiva* $\forall q \in U \Leftrightarrow \frac{\partial X}{\partial u}(q), \frac{\partial X}{\partial v}(q)$ *l.i.*

**Notación.**

- *$X$ se llama parametrización de $S$.*
- *$u, v$ se llaman coordenadas locales de $S$.*

- *Las curvas obtenidas al fijar una de las variables, $X(u_0, v), X(u, v_0)$ se llaman curvas coordenadas.*
- *La imagén de $X$ se llama entorno coordenado.*

**Definición 3.2** (Valor Regular)**.** *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, $a \in \mathbb{R}$. Entonces, decimos que $a$ es un valor regular de $f$ si $\forall p \in U : f(p) = a, (df)_p \neq 0$.*

**Teorema 3.1** (de la Función Implícita)**.** *Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $p = (x_0, y_0, z_0) \in U, a \in \mathbb{R}$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $f(p) = a$ y $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$, entonces $\exists U^{(x_0,y_0)} \subset \mathbb{R}^2, V^{z_0} \subset \mathbb{R}, g : U \to V$ tal que $U \times V \subset U, g(x_0, y_0) = z_0$ y*

$$\{p \in U \times V | f(p) = a\} = \big\{(x, y, g(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y \in U)\big\},$$

*es decir, $f(x, y, z) = a$ se puede resolver para $z$ cerca de $p$.*

**Proposición 3.1** (Gráfica es Superficie)**.** *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces, la gráfica de $f$ es una superficie regular.*

**Demostración.** *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ aplicación diferenciable, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$ su gráfica, $X : U \to S : X(u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$ parametrización con $X(U) = S$. Entonces, $X$ es diferenciable dado que $f$ es diferenciable, $X_u, X_v$ son linealmente independientes y $x^{-1}$ es continua. Por tanto, $S$ es una superficie.*

**Proposición 3.2** (Imagen Inversa de Valor Regular)**.** *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ función diferenciable, $a \in f(U) \subset \mathbb{R}$ un valor regular de $f$. Entonces, $S = f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset \Rightarrow S$ es superficie.*

**Demostración.** *Sea $p \in f^{-1}(\{a\})$. Entonces, $a$ valor regular $\Rightarrow \exists i \in \{x, y, z\} : f_i(p) \neq 0$. Supongamos que $f_z(p) \neq 0$ y sea $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 :$*

$(x, y, z) \mapsto (x, y, f(x, y, z))$. *Entonces,*

$$(dF)_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det((dF)_p) = f_z(p) \neq 0$. *Por tanto, podemos aplicar el Teorema de la Función Inversa. Entonces,* $\exists V$ *entorno de* $p$ *y* $W$ *entorno de* $f(p)$ *tal que* $F : V \to W$ *es invertible y* $F^{-1} : W \to V$ *es diferenciable. Por tanto, las funciones coordenada de* $F^{-1}$

$$x = u, \quad y = v, \quad z = g(u, v, t), \qquad (u, v, t) \in W$$

*son diferenciables. En particular,* $z = g(u, v, a) = h(x, y)$ *es una función diferenciable definida en la proyección de* $V$ *al plano* $XY$*. Como*

$$F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, t) : t = a\}$$

*tenemos que* $f^{-1}(a) \cap V$ *es la gráfica de* $h \Rightarrow$ *es un entorno coordenado de* $p \Rightarrow \forall p \in f^{-1}(a)$ *se puede cubrir con un entorno coordenado* $\Rightarrow f^{-1}(a)$ *es una superficie regular. REVISAR*

**Proposición 3.3.** *Sea* $S \subset \mathbb{R}^3$ *superficie,* $p \in S$, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *aplicación con* $p \in X(U) \subset S$ *tal que* $X$ *es diferenciable y* $(dX)_q$ *es inyectiva* $\forall q \in U$. *Entonces, si* $X$ *es inyectiva,* $X^{-1}$ *es continua.*

**Demostración.** *Similar a la siguiente prop*

## 3.2. Cambio de Parámetros

**Definición 3.3** (Difeomorfismo)**.** *Un difeomorfismo es un homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable, es decir, una función biyectiva continua diferenciable con inversa continua diferenciable.*

**Observación.** *Un homeomorfismo es una aplicación biyectiva continua con inversa continua. Como* $f$ *diferenciable* $\Rightarrow f$ *continua, para ver que* $f$ *es difeomorfismo solo es necesario* $f$ *biyectiva diferenciable con* $f^{-1}$ *diferenciable.*

**Proposición 3.4.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $X : U \to S$ parametrización tal que $p \in X(U)$. Sea $p_0 \in U : X(p_0) = p$. Entonces, $\exists V$ entorno de $p_0$ y $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ proyección ortogonal tal que $W = (\pi \circ X)(V) \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $\pi \circ X : V \to W$ es un difeomorfismo.*

**Demostración.** *Sea $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Entonces,*

$$(dX)_{p_0} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}_{(p_0)}$$

*Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto \pi(x,y,z) = (x,y)$, entonces $\pi \circ X : U \to \mathbb{R}^2$ es diferenciable y*

$$d(\pi \circ X)_{p_0} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}_{(p_0)}$$

*donde $\det(d(\pi \circ X)_{p_0}) \neq 0 \Rightarrow$ por el teorema de la función inversa, $\exists V \subset U$ entorno de $p_0$ en $U$ y $V_1$ entorno de $\pi \circ X(p_0)$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $\pi \circ X$ es biyectiva y diferenciable con $(\pi \circ X)^{-1}$ diferenciable $\Rightarrow$ difeomorfismo, tal que $d(\pi \circ X)^{-1}_{p_0} = d(\pi \circ X^{-1})_{p_0}$.*

**Observación.** *Un difeomorfismo es un homeomorfismo diferenciable con inverasa diferenciable.*

**Observación.** *$Y = X \circ (\pi \circ X)^{-1} : W \to S$ es parametrización del abierto $\pi^{-1}(W) \cap U \cap S$ como grafo sobre alguno de los planos coordenados.*

**Proposición 3.5.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superfice, $p \in S$. Entonces, $\exists V$ entorno de $p$ en $S$ tal que V es la gráfica de una función diferenciable definida en uno de los planos coordenados.*

**Demostración.** *Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ parametrización de $S$ en $p$ tal que*

$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v), (u,v) \in U.$$

*Dado que $X_u, X_v$ son linealmente independientes $\Rightarrow \det((dX)_q) \neq 0$ donde $q = X^{-1}(p)$, suponemos que*

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}_q \neq 0$$

*Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto \pi(x, y, z) = (x, y)$, entonces $\pi \circ X : U \to \mathbb{R}^2$ y $\det(d(\pi \circ X)_q) \neq 0$. Entonces, podemos aplicar el teorema de la función inversa $\Rightarrow \exists V_1$ entorno de $q$, $V_2$ entorno de $(\pi \circ X)(q)$ tal que $(\pi \circ X)|_{V_1} : V_1 \to V_2$ difeomorfismo con inversa $(\pi \circ X)^{-1} : V_2 \to V_1$.*

*Además, como $X$ es homemorfismo, $X(V_1) = V$ es entorno de $p$ en $S$. Ahora, sea $z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$. Entonces, $V$ es la gráfica de la función $f$.*

**Proposición 3.6** (Cambio de Parámetros)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superfice, $p \in S$, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$, $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \to S$ dos parametrizaciones de $S$ tal que $p \in X(U) \cap Y(V) = W$. Entonces, $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \to X^{-1}(W)$ es un difeomorfismo. Se dice que $h$ es un cambio de parámetros.*

**Observación.** *Si $X, Y$ vienen dados por*

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U$$

$$Y(\xi, \omega) = (x(\xi, \omega), y(\xi, \omega), z(\xi, \omega)), \quad (\xi, \omega) \in V$$

*entonces $h$ viene dado por*

$$u = u(\xi, \omega), v = v(\xi, \omega), \quad (\xi, \omega) \in Y^{-1}(W)$$

*Además, $h$ se puede invertir tal que $h^{-1}$ viene dado por*

$$\xi = \xi(u, v), \omega = \omega(u, v), \quad (u, v) \in X^{-1}(W)$$

**Demostración.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $p \in S$,*

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S, \quad Y : V \subset \mathbb{R}^3 \to S$$

*parametrizaciones de $S$ tal que $p \in X(U) \cap Y(V) = W$ y*

$$h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \to X^{-1}(W)$$

*cambio de parámetros. Entonces, $X$ parametrización $\Rightarrow$ $X$ diferenciable y $X_u, X_v$ son l.i. $\Rightarrow \det((dX)_p) \neq 0, \forall p \in U$. Entonces, por el teorema de la función inversa $X$ es difeomorfismo. De la misma manera, $Y$ es difeomorfismo. Por tanto, $h = X^{-1} \circ Y$ también lo es.*

**Observación.** *$X, Y$ son difeomorfismos $\Rightarrow$ $h$ es difeomorfismo.*

**Definición 3.4** (Caracterización Superficie)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Entonces, $\forall p \in S, \exists V \subset S : p \in V$ entorno, $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $X : U \to V$ difeomorfismo.*

**Observación.** *Una superfice regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es difeomorfica a $\mathbb{R}^2$*

## 3.3. Funciones Diferenciables

**Nota.** *La idea es reducir la difereciabilidad de una superficiea a diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$.*

**Definición 3.5** (Función Diferenciable en $\mathbb{R}$)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $f : V \subset S \to \mathbb{R}$ función. Entonces, $f$ es diferenciable en $p \in V$ si $\exists X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ parametrización con $p \in x(U) \subset V$ tal que $f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $q = X^{-1}(p)$.*

**Observación.** *$f$ es diferenciable en $V$ si $f$ es diferenciable $\forall p \in V$.*

**Observación.** *La diferenciabilidad no depende de la elección de parametrización. Si $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \to S$ es otra parametrización con $p \in Y(V)$ y $h = X^{-1} \circ Y$ entonces $f \circ Y = f \circ X \circ h$ también es diferenciable.*

**Definición 3.6** (Función Diferenciable en $\mathbb{R}^k$)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $f : S \to \mathbb{R}^k$. Si $f_j : S \to \mathbb{R}$ es diferenciable $\forall j \in \{1, \cdots, k\}$ con $f(p) = (f_1(p), \cdots, f_k(p))$, entonces $f$ es diferenciable.*

**Definición 3.7** (Función Diferenciable entre Superficies)**.** *Sea $S_1 \subset \mathbb{R}^3$, $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ superficies,*

$$\varphi : V_1 \subset S_1 \to S_2$$

*una aplicación continua. Dadas*

$$X_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to S_1, \quad X_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to S_2$$

*con $p \in X_1(U)$ y $\varphi(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$ tal que*

$$X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 : U_1 \to U_2$$

*es diferenciable en $q = X_1^{-1}(p)$, entonces, $\varphi$ es diferenciable en $p \in V_1$.*

**Proposición 3.7** (Composición de Funciones Diferenciables). *Sea* $S_1, S_2, S_3 \subset \mathbb{R}^3$ *superficies,* $f : S_1 \to S_2, g : S_2 \to S_3$ *diferenciables. Entonces,* $f \circ g$ *es diferenciable.*

**Demostración.** *content*

## 3.4. Plano Tangente

**Definición 3.8** (Vector Tangente). *Sea* $S \subset \mathbb{R}^3$ *superficie,* $p \in S$. *Decimos que* $v \in \mathbb{R}^3$ *es un vector tangente a* $S$ *en* $p$ *si* $\exists \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S, \epsilon > 0$ *tal que* $\alpha(0) = p$ *y* $\alpha'(0) = v$

**Notación.** *El conjunto de vectores tangentes a* $S$ *en* $p$ *se llama Plano Tangente en* $p$ *y se representa* $T_pS$.

**Proposición 3.8** (Caracterización Plano Tangente). *Sea* $S \subset \mathbb{R}^3$ *una superfice,* $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ *parametrización,* $q \in U$. *Entonces,*

$$T_{X(q)}(S) = (dX)_q(\mathbb{R}^2)$$

**Demostración.**

($\Rightarrow$) *Sea* $w \in T_{X(q)}(S)$. *Entonces, para* $\epsilon > 0$, $\exists \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to X(U) \subset S$ *diferenciable tal que* $\alpha(0) = X(q)$ *y* $\alpha'(0) = w$. *Entonces,* $\beta = X^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ *es diferenciable. Por tanto, para* $X \circ \beta = \alpha$, *la definición de diferencial* $\Rightarrow (dX)_q(\beta'(0)) = \alpha'(0) = w \Rightarrow w \in (dX)_q$.

($\Leftarrow$) *Sea* $w = (dX)_q(v), v \in \mathbb{R}^2$, *donde* $v \in \mathbb{R}^2$ *es la pendiente de* $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ *tal que* $\gamma(t) = vt + q, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon)$. *Entonces, por definición de diferencial,* $w = \alpha'(0)$ *para* $\alpha = X \circ \gamma \Rightarrow w \in T_q(S)$

**Observación.** *El plano tangente a* $S$ *en* $p$ $T_pS = (dX)_{X^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2)$ *no depende de la elección de* $X$ *parametrización. Pero si que determina una base* $\{\frac{\partial X}{\partial u}(q), \frac{\partial X}{\partial v}(q)\}$ *que genera* $T_{X(q)}S$.

**Ejemplo.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ parametrización de $S$, $T_p(S)$ plano tangente en $p$ generado por $X$, $w \in T_p(S)$ vector tangente. Entonces, las coordenadas de $w$ en la base asociada a $X$ se determina de la siguiente manera.*

*El vector tangente $w = \alpha'(0)$ donde $\alpha = X \circ \beta$ donde $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ es una curva diferenciable dada por $\beta(t) = (X^{-1} \circ \alpha)(t) = (u(t), v(t))$ con $\beta(0) = q = X^{-1}(p)$. Entonces,*

$$\begin{aligned}\alpha'(0) = \frac{d}{dt}(X \circ \beta)(0) &= \frac{d}{dt}X(u(t), v(t))(0) \\ &= X_u(q)u'(0) + X_v(q)v'(0) = w\end{aligned}$$

*Por tanto en la base $\{X_u(q), X_v(q)\}$, $w$ tiene coordenadas $(u'(0), v'(0))$.*

**Observación.** *Sea $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ superficies, $\varphi : V \subset S_1 \to S_2$ aplicación diferenciable. $\forall p \in V, \exists w \in T_p(S_1)$ tal que $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to V$ curva diferenciable con $\alpha'(0) = w, \alpha(0) = p$. Entonces, $\beta = \varphi \circ \alpha$ curva con $\beta(0) = \varphi(p) \Rightarrow \beta'(0) \in T_{\varphi(p)}(S_2)$.*

*Además, $\beta'(0)$ no depende de la elección de $\alpha$. La apliación $(d\varphi)_p : T_p(S_1) \to T_{\varphi(p)}(S_2)$ definida por $(d\varphi)_p(w) = \beta'(0)$ es lineal.*

## 3.5. Diferencial de una Aplicación Diferenciable

**Definición 3.9** (Diferencial)**.** *Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable. Sea $w \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ curva diferenciable tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$. Entonces, la curva $\beta = F \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable y $(dF)_p(w) = \beta'(0)$ es la diferencial de $F$ en $p$, donde $(dF)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es aplicación lineal.*

**Observación.** *Forma para tangente*

**Proposición 3.9.** *La aplicación $(df)_p : T_pS \to \mathbb{R}^m$ está bien definida, es decir, $(df)_p(v)$ no depende de $\alpha$. Además, es una aplicación lineal.*

**Demostración.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ parametrización con $p \in X(U)$. Entonces, $T_pS = (dX)_q(\mathbb{R}^2)$ con $q = X^{-1}(p) \Rightarrow (dX)_q : \mathbb{R}^2 \to T_pS$ es un isomorfismo lineal (definición).*

*Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, $\alpha(-\epsilon, \epsilon) \subset X(U)$. Ahora, la curva $X^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ es tal que $(X^{-1} \circ \alpha)(0) = q$. Como $X \circ (X^{-1} \circ \alpha) = \alpha$ derivando en $t = 0$ tenemos que*

$$(dX)_q \big[(X^{-1} \circ \alpha)'(0)\big] = \alpha'(0) = w,$$

*es decir,*

$$(X^{-1} \circ \alpha)'(0) = (dX)_q^{-1}(w).$$

*Por la regla de la cadena,*

$$(f \circ \alpha)'(0) = \frac{d}{dy}(f \circ X) \circ (X^{-1} \circ \alpha)$$

$$= d(f \circ X)_q((X^{-1} \circ \alpha)'(0)) = d(f \circ X)_q \circ (dX)_q^{-1}(w)$$

*Por tanto,*

$$(df)_p = d(f \circ X)_q \circ (dX)_q^{-1}$$

**Teorema 3.2** (Regla de la Cadena)**.** *Sean $S_1, S_2, S_3 \subset \mathbb{R}^3$ superficies, $f : S_1 \to S_2, g : S_2 \to S_3$ aplicaiones diferenciables. Entonces, dado $p \in S_1$ tenemos que*

$$d(g \circ f)_p = (dg)_{f(p)} \circ (df)_p$$

*(También para F:rnm -¿rnn, G:rnn -¿rnk)*

**Demostración.** *Si $v \in T_pS_1$, elegimos*

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S_1$$

*tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Entonces,*

$$f \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S_2$$

*tal que $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$ y $(f \circ \alpha)'(0) = (df)_p(v)$. Por tanto,*

$$d(g \circ f)_p(v) = [(g \circ f) \circ \alpha]'(0)$$

$$= [g \circ (f \circ \alpha)'](0)$$

$$= (dg)_{f(p)}((df)_p(v)).$$

**Teorema 3.3** (de la Función Inversa). *Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ difereciable, $p \in U : (dF)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es isomorfismo. Entonces, $\exists V \subset U : p \in V$ entorno y $\exists W \subset \mathbb{R}^n : F(p) \in W$ entorno tal que $F : V \to W$ tiene inversa difereciable $F^{-1} : W \to V$. $F|_V$ es difeomorfismo.*

**Observación.** *Un isomorfismo es una función biyectiva.*

**Proposición 3.10.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Entonces,*

(I) *$f : S \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, $S$ conexo y $(df)_p = 0, \forall p \in S \Rightarrow f$ es constante.*

(II) *$f : S \to \mathbb{R}$ diferenciable y $p \in S$ es un extremo local de $f \Rightarrow p$ es un punto crítico de $f$.*

**Demostración.**

(I) *Sea $a \in f(S)$. Entonces, $A = \{p \in S : f(p) = a\} \neq \emptyset, A \subset S$ cerrado. Veamos que $A$ es abierto. Si $p \in A$, $X : U \to S$ parametrización tal que $p \in X(U)$ con $U$ conexo, entonces $\forall q \in U, d(f \circ X)_q = (dX)_{X(p)} \circ (dX)_q = 0$. Entonces, $f \circ X$ es constante en $U \Rightarrow f = (f \circ X) \circ X^{-1}$ es constante en $X(U)$. Como $\forall p \in A, f(p) = a \Rightarrow p \in X(U) \subset A \Rightarrow A$ es abierto. Luego, $S$ conexo $\Rightarrow A = S$, es decir, $f$ es constante.*

(II) *Sea $p \in S$ extremo local de $f$. Si $v \in T_pS$ y $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, entonces $(f \circ \alpha)$ tiene un extremo local en $t = 0 \Rightarrow (df)_p(v) = (f \circ \alpha)'(0) = 0 \Rightarrow p$ es punto crítico de $f$.*

**Teorema 3.4** (de la Función Implícita para Superficies). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $f : S \to \mathbb{R}$ diferenciable, $p \in S$, $a \in \mathbb{R}$. Si $f(p) = a$ y $(df)_p \neq 0$ ($p$ no es punto crítico de $f$). Entoces, $\exists V \subset S$ entorno de $p$ en $S$ y $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ curva regular inyectiva homeomorfa a su imagen con $\epsilon > 0$ tal que*

$$\alpha(0) = p \quad \text{y} \quad f^{-1}(\{a\}) \cap V = \alpha(-\epsilon, \epsilon)$$

*Por tanto, si $a \in f(S)$ entonces $f^{-1}(\{a\})$ es una curva simple.*

**Demostración.** *Sea* $U \subset \mathbb{R}^2 : (0,0) \in U$, $X : U \to S$ *parametrización con* $X(0,0) = p$. *Definimos*

$$g : U \to \mathbb{R}$$

*tal que* $g = f \circ X$, *entonces*

$$g(0,0) = f(X(0,0)) = f(p) = a$$

*y, por la regla de la cadena,*

$$(df)_{(0,0)} = (df)_p \circ (dX)_{(0,0)}.$$

*Dado que* $(dX)_{(0,0)}$ *es inyectiva y* $(df)_p \neq 0$, *tenemos que*

$$(dg)_{(0,0)} \neq 0,$$

*es decir,* $(g_u, g_v)(0,0) \neq (0,0)$. *Supongamos que* $g_v(0,0) \neq 0$. *Por el toerema de la aplicación implícita,* $\exists \epsilon, \delta > 0$ *y*

$$h : (-\epsilon, \epsilon) \to (-\delta, \delta)$$

*tal que* $(-\epsilon, \epsilon) \times (-\delta, \delta) \subset U$ *y* $h(0) = 0$ *ACABAR*

**Nota.**

**Definición 3.10** (Superficies Transversales)**.** *Sea* $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ *superficies,* $p \in S_1 \cap S_2$ *es un punto de intersección. Si*

$$T_p(S_1) = T_p(S_2),$$

*entonces* $S_1$ *y* $S_2$ *son tangentes en* $p$. *En el caso contrario, si*

$$T_p(S_1) \neq T_p(S_2),$$

*entonces* $S_1$ *y* $S_2$ *se cortan transversalmente en* $p$ *y, de forma local, la intersección es la traza de la curva.*

**Observación.** $S_1$ *y* $S_2$ *son transversales si lo son* $\forall p \in S_1 \cap S_2$.

**Proposición 3.11.** *Sea* $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ *superficies que se cortan transversal-*

*mente en $p$. Entonces, $\exists V \subset \mathbb{R}^3$ entorno de $p$, $I \subset \mathbb{R}$ abierto, $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ homeomorfa a $\alpha(I)$ tal que $\alpha(I) = V \cap S_1 \cap S_2$.*

**Demostración.** *Sea $O \subset \mathbb{R}^3$ entorno de $p$ y $g : O \to \mathbb{R}$ tal que $0$ es un valor regular y $S_2 \cap O = g^{-1}(\{0\})$. Definimos*

$$f : S_1 \cap O \to \mathbb{R}$$

*por $f = g|_{S_1 \cap O}$ diferenciable tal que $p \in f(S_1 \cap O)$. Ademaś, $f(p) = g(p) = 0$ y $(df)_p = (dg)_{p|_{T_p S_1}}$. Si $p$ fuera punto crítico de $f$, tendríamos que $T_p S_1 \subset \ker(dg)_p = T_p S_2$. Pero esto es imposible ya que $S_1$ y $S_2$ se cortan transversalmente. Aplicando el teorema de la función implícita tenemos el resultado.*

**Teorema 3.5.** *La intersección transversal de dos superficies es vacía o es un curva simple.*

**Teorema 3.6** (Función Inversa)**.** *Sean $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$, $f : S_1 \to S_2$ aplicación difereciable, $p \in S_1$. Si $(df)_p : T_p(S_1) \to T_{f(p)}(S_2)$ es un isomorfismo lineal, entonces $\exists V_1$ entorno de $p$ en $S_1$ y $\exists V_2$ entorno de $f(p)$ en $S_2$ tal que $f(V_1) = V_2$ y $f|_{V_1} : V_1 \to V_2$ es un difeomorfismo.*

**Demostración.** *Sea*

$$X_i : U_i \to S_i, \quad i \in \{1, 2\}$$

*parametrizaciones tal que $p \in X_1(U_1), f(p) \in X_2(U_2)$ y $f(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$. Sea $q_i \in U_i, i \in \{1, 2\}$ tal que $X_1(q_1) = p$ y $X_2(q_2) = f(p)$. La aplicación*

$$X_2^{-1} \circ f \circ X_1 : U_1 \to U_2$$

*es diferenciable y*

$$d(X_2^{-1} \circ f \circ X_1)_{q_1} = (dX_2)_{q_2}^{-1} \circ (df)_p \circ (dX_1)_{q_1}$$

*es un isomorfismo lineal por ser composición de isomorfismos. Ahora, podemos aplicar el teorema de la función inversa. Entonces, $\exists W_i \subset U_i$ entornos de $q_i, i \in \{1, 2\}$ tal que*

$$(X_2^{-1} \circ f \circ X_1)(W_1) = W_2$$

*y tal que*

$$X_2^{-1} \circ f \circ X_1 : W_1 \to W_2$$

*es un difeomorfismo. Para* $V_i = X_i(W_i) \subset S_i, i \in \{1, 2\}$*, tenemos que* $V_1 \subset S_1$ *es un entorno de* $p$ *y* $V_2 \subset S_2$ *es un entorno de* $f(p)$*. Además,* $f(V_1) = V_2$ *y*

$$f|_{V_1} = X_2 \circ (X_2^{-1} \circ f \circ X_1) \circ X_1^{-1} : V_1 \to V_2$$

*es un difeomorfismo, ya que es composición de difeomorfismos.*

**Proposición 3.12.** *Sean* $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ *superficies,* $\phi : S_1 \to S_2$ *difeomorfismo,* $p \in S_1$*. Entonces,* $(d\phi)_p : T_p(S_1) \to T_{f(p)(S_2)}$ *es isomorfismo lineal y* $(d\phi)_p^{-1} = (d\phi^{-1})_p$*.*

**Demostración.** *Sea* $w \in T_{\phi(p)}S_2$ *y* $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to S_2$ *tal que* $\beta(0) = \phi(p), \beta'(0) = w$*. Entonces,* $\alpha = \phi^{-1} \circ \beta : (-\epsilon, \epsilon) \to S_1$ *diferenciable tal que* $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = w$ *y* $(d\phi)_p(\alpha(0)) = (\phi \circ \alpha)'(0) = \beta'(0) = w$*.*

*ACABAR*

# Capítulo 4

# Orientabilidad

## 4.1. Campos

**Definición 4.1** (Campo). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Un espacio vectorial diferenciable en $S$ es una aplicación diferenciable $V : S \to \mathbb{R}^3$.*

- *Si $V(p) \in T_p(S), \forall p \in S$, decimos que $V$ es un campo tangente a $S$.*
- *Si $V(p) \perp T_p(S), \forall p \in S$, decimos que $V$ es un campo normal a $S$.*

*Además, si $|V(p)| = 1, \forall p \in S$, decimos que $V$ es el campo unitario.*

**Observación.** *$\forall p \in S$, hay dos vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$ perpendiculares al plano tangente $T_p(S)$.*

**Nota.** *Sea $X : U \to S$ una parametrización con $p \in S$. Determinamos la orientación asociada a $\{X_u, X_v\}$. Si $p$ pertence a un entorno coordenado de otra parametrización $\overline{X}(\overline{u}, \overline{v})$, la nueva base $\{\overline{X}_{\overline{u}}, \overline{X}_{\overline{v}}\}$ se expresa en términos de la primera*

$$\overline{X}_{\overline{u}} = X_u \frac{\partial u}{\partial \overline{u}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \overline{u}},$$
$$\overline{X}_{\overline{v}} = X_u \frac{\partial u}{\partial \overline{v}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \overline{v}},$$

*donde $u = (\overline{u}, \overline{v})$ y $v = (\overline{u}, \overline{v})$. Por tanto, las bases $\{X_u, X_v\}$ y $\{\overline{X}_{\overline{u}}, \overline{X}_{\overline{v}}\}$ determinan la misma orientación de $T_p(S)$ si y solo si el Jacobiano*

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\overline{u}, \overline{v})}$$

*del cambio de coordenadas.*

**Nota** (Interpretación Geométrica Orientabilidad). *Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ superficie. Entonces, eligiendo $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ en $p \in S$ determinamis un vector normal unitario $\forall q \in X(U)$,*

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q)$$

*de manera que $N : X(U) \to \mathbb{R}^3$ es diferenciable. Tomando otro sistema local de coordenadas $\overline{X}(\overline{u}, \overline{v})$ en $p$ tenemos que*

$$\overline{X}_{\overline{u}} \times \overline{X}_{\overline{v}} = (X_u \times X_v)\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})},$$

*donde $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}$ es el jacobiano del cambio de coordenadas. Por tanto, $N$ conservará o invertirá el signo dependiendo de si el jacobiano es positivo o negativo.*

**Proposición 4.1.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $X : U \to \mathbb{R}^3$ parametrización de $S$. Entonces, $\exists N : V = X(U) \to \mathbb{R}^3$ campo normal unitario.*

**Demostración.** *content*

**Lema 4.0.1.** *Sea $S$ una superficie conexa y $N_1, N_2$ dos campos normales unitarios en $S$. Entonces, $N_1 = N_2$ o $N_1 = -N_2$.*

**Demostración.** *content*

**Definición 4.2** (Supercicies Orientable). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Decimos que $S$ es orientable si admite un campo normal unitario global $N : S \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Decimos que $N$ es una orientación de $S$. Cada superficie $S$ tiene dos orientaciones. Fijada $N$ decimos que $S$ está orientada.*

**Observación.** *el campo vectorial unitario global $N$ se conoce como aplicación de Gauss.*

**Ejemplo** (Plano). *Por la Prop. 4.1. los planos son orientables. Sea*

$$P = \{p \in \mathbb{R}^3 : (p - p_0) \cdot a = 0\}$$

*el plano que pasa por $p_0$ con vector normal unitario $a$. Si $p \in P$, entonces*

$$T_p(P) = \{v \in \mathbb{R}^3 : v \cdot a = 0\}.$$

*Por tanto, $N : P \to \mathbb{R}^3$ definida por $N(p) = a, \forall p \in P$ es un campo normal unitario en $P$.*

**Ejemplo** (Esfera). *Hacemos uso de la Prop. 4.1. Sea $\mathbb{S}^2(r)$ la esfera de radio $r$ centrada en $p_0$. Si $p \in \mathbb{S}^2(r)$ el plano tangente correspondiente es el complemento ortogonal del vector $p - p_0$, es decir,*

$$T_p(\mathbb{S}^2(r)) = \{v \in \mathbb{R}^3 : (p - p_0) \cdot v = 0\}.$$

*Entonces, la aplicación $N : \mathbb{S}^2(r) \to \mathbb{R}^3$ definida por*

$$N(p) = \frac{1}{r}(p - p_0), \quad \forall p \in \mathbb{S}^2(r)$$

*es el campo normal unitario definido en la esfera.*

**Ejemplo** (Grafo). *Hacemos uso de la Prop. 4.1. Sea $S$ una superficie que es el grafo de una función diferenciable $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde $U$ es abierto. Sabemos que $X : U \to \mathbb{R}^3$ definida por $X(u,v) = (u, v, f(u,v))$ es parametrización que cubre $S$ totalmente. Entonces, $N = N^X \circ X^{-1} : S \to \mathbb{R}^3$ con*

$$N^X = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}(-f_u, -f_v, 1),$$

*campo normal unitario en $S$.*

**Ejemplo** (Imagen Inversa). *Sea $O \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $f : O \to \mathbb{R}$ diferenciable, $a \in \mathbb{R}$ valor regular de $f$ y $S = f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$ superficie. Entonces, $\forall p \in S$,*

$$T_p(S) = \ker(df)_p = \{v \in \mathbb{R}^3 : (\nabla f)_p \cdot v = 0\}.$$

*Por tanto, $\nabla f|_S = (f_x, f_y, f_z)$ es un campo normal en $S$. Como $a$ es valor regular, $\nabla f(p) \neq 0, \forall p \in S$. Entonces, la aplicación $N : S \to \mathbb{R}^3$ definida por*

$$N = \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f|_S = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}(f_x, f_y, f_z),$$

*es el campo normal unitario en $S$.*

**Ejemplo** (Cilindro). *Sea $O = \mathbb{R}^3$ y $f(x,y,z) = x^2 + y^2$. Entonces, $S = f^{-1}(\{r^2\}), r > 0$ es un cilindro de radio $r$ con eje principal el eje $z$. Por tanto, $N(x,y,z) = \frac{1}{r}(x, y, 0)$ es un campo normal unitario en el cilindro.*

**Proposición 4.2.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Entonces, $S$ es orientable $\Leftrightarrow$ $\exists N : S \to \mathbb{R}^3$ en $S$.*

**Demostración.** *content*

**Ejemplo** (Superficie no orientable). *content*

**Proposición 4.3.** *Sea* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = a\}$ *superficie con* $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *diferenciable y* $a$ *valor regular de* $f$*. Entonces,* $S$ *es orientable.*

**Demostración.** *Ejemplo imagen inversa.*

**Teorema 4.1.** $S$ *es una superficie orientable* $\Leftrightarrow \exists\{X_i : U_i \to S\}_{i \in J}$ *familia de parametrizaciones que cubren* $S$ *tal que* $X_j \circ X_i$ *tiene jacobiano positivo* $\forall j, i \in J, \forall p \in S$.

**Lema 4.1.1.** $X_i^{-1} \circ X_j$ *tiene jacibiano positivo* $\Leftrightarrow$ $N^{X_j}, N^{X_i}$ *inducen la misma orientación en la intersección* $N^{X_i} \circ X_i^{-1}|_W = N^{X_j} \circ X_j^{-1}|_W$ *con* $W = X_i(U_i) \cap X_j(U_j)$.

**Demostración.** *content*

# Capítulo 5

# Primera Forma Fundamental

## 5.1. Primera Forma Fundamental, Isometrías

**Proposición 5.1.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Entonces, el producto interior natural de $\mathbb{R}^3$ induce en cada plano tangente $T_p(S)$ un producto interior $\langle , \rangle_p$, cuya forma quadrática es $I_p : T_p(S) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$I_p(w) = \langle w,w \rangle_p = |w|^w \geq 0.$$

**Definición 5.1.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Decimos que la primera forma fundamental de $S$ es la restricción del producto escalar de $\mathbb{R}^3$ a cada plano tangente $T_p(S)$. Es decir, la forma quadrática $I_p$ en $T_p(S)$ es la primera forma fundamental de $S$ en $p$.*

**Observación.** *La primera forma fundamental nos permite tomar medidas sobre la superficie sin referirnos al espacio $\mathbb{R}^3$.*

**Nota** (Expresión de la Primera Forma Fundamental)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superfice, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ parametrización. Entonces, $\exists \{X_u, X_v\}$ base de $X$ en $p \in S$. Como el vector tangete $w \in T_p(S)$ es tangete a la curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ con $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ y $p = \alpha(0) = X(u_0, v_0)$ tenemos que*

$$I_p(\alpha'(0)) = \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p$$

$$\langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle_p$$

$$\langle X_u, X_u \rangle_p (u')^2 + 2\langle X_u, X_v \rangle_p u'v' + \langle X_v, X_v \rangle_p (v')^2$$

$$E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2$$

*donde* $t = 0$ *y*

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle_p,$$
$$F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle_p,$$
$$G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle_p$$