Ejercicios Probabilidad

Hugo Del Castillo Mola

20 de noviembre de 2022

Índice general

1. Probabilidad **2**
1.1. Entrega 4 2

Capítulo 1

Probabilidad

1.1. Entrega 4

Ejercicio 1.1 (Ejercicio 2, Hoja 6). *Estudiar, para cada una de las siguientes funciones, si es función característica de alguna variable aleatoria y, en caso afirmativo, determinar la función de probabilidad correspodiente.*

(I) $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt)$ *con* $a_n \geq 0$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$,

(II) $\varphi(t) = \frac{1}{1+a(1-e^{it})}$ *con* $a > 0$.

Solución.

(I) *Sea* $\varphi_n(t) = \cos(nt)$ *función característica, entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ *es una combinación lineal convexa de* $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *numerable. Por tanto,* $\varphi(t)$ *también es función característica.*

Para X_n *v.a. discreta con* $D_{X_n} = \{-n, n\}$ *y función de masa*

$$p_{X_n} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in D_X \\ 0 & \text{si } x \notin D_X \end{cases}$$

Entonces, se tiene que

$$\varphi_n(t) = \mathbb{E}[e^{itX_n}]$$
$$= \frac{e^{itn} + e^{-itn}}{2} = \cos(nt)$$

Por tanto la función de distribución asociada a φ_n *es una distribución uniforme discreta* $U(-n, n)$.

(II) Aplicando el teorema de inversión

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{1}{1 + a(1 - e^{it})} dt$$