Geomtería Diferencial

Hugo Del Castillo Mola

25 de septiembre de 2022

Índice general

Capítulo 1

Curvas

1.1. Curvas Parametrizadas

Definición 1.1 (Curva)**.** *Una curva en* $\mathbb{R}^3$ *es una función diferenciarle* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Definición 1.2 (Vector tangente)**.** *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva en* $\mathbb{R}^3$ *con* $\alpha = (\alpha_1, \alpha^2, \alpha^3)$. *Entonces,* $\forall t \in I$

$$\alpha'(t) = \big(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t)\big).$$

Observación. $\alpha'(t) = 1, \forall t \in I$.

Observación. *El vector tangente también se llama vector velocidad*

Observación (Interpretación geométrica)**.** *A partir de la definición de derivada tenemos que*

$$\alpha'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}$$

Esto es el vector de $\alpha(t)$ *a* $\alpha(t+h)$. *A medida que* $h \to 0$, $\alpha(t+h) \to \alpha(t)$ *obtenemos un vector tangente al punto* $\alpha(t)$

Ejemplo. *Sea* α *una linea recta* $\alpha(t) = p + tq$. *Entonces todos su vector tangen o vector velocidad es constante.*

Ejemplo. *Para una hélice* $\alpha(t) = (a\cos(t), a\,\mathrm{sen}(t), bt)$, *la velocidad es* $\alpha'(t) = (-a\,\mathrm{sen}(t), a\cos(t), b)$ *aumenta de manera constante en la dirección* $\vec{k}$ *y es perpendicular en el plano* $\vec{i}, \vec{j}$.

Ejemplo. *La curva* $\alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ *dada por* $\alpha(t) = (t, |t|), t \in \mathbb{R}$ *no es diferenciable.*

Definición 1.3 (Reparametrización). *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva, $h : J \to I$ una función diferenciable. Entonces, la función $\beta : J \to \mathbb{R}^3$*

$$\beta(t) = \alpha(h(t))$$

es una reparametrización de α por h.

Ejemplo. *Sea $\alpha(t) = \big(t, t\sqrt{t}, 1-t\big)$ en $I = (0,4)$, $h(s) = s^2$ en $J = (0,2)$. Entonces, la curva reparametrizada es $\beta(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(s^2) = (s, s^3, 1-s^2)$.*

Lema 1.0.1. *Si β es una reparametrización de α por h, entonces*

$$\beta'(t) = h'(t) \cdot \alpha'(h(t))$$

1.2. Curvas Regulares

Definición 1.4 (Curva Regular). *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular. Entonces, si $\alpha'(t) \neq 0. \forall t \in I$ decimos que es regular.*

Definición 1.5 (Longitud de Arco). *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3, t_0 \in I$. Definimos la función longitud de arco desde t_0 como $S : I \to \mathbb{R}$ donde*

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(u)||du.$$

Teorema 1.1. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Entonces, $\exists \beta : J \to \mathbb{R}^3$ tal que $||\beta(s)|| = 1, \forall s \in J$, es decir, β tiene velocidad unitaria.*

Definición 1.6. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable. Entonces, si $||\alpha(t)|| = 1, \forall t \in I$ decimos que la curva está parametrizada por longitud de arco.*

Observación. *Una reparametrización $\alpha(h)$ preserva la orientación si $h' \geq 0$ y la invierte si $h' \leq 0$.*

Observación. *Por definicón, una curva regular parametrizada por arco siempre conserva la orientación.*

Ejemplo. *Sea* $\alpha(t) = (a\cos(t), a\,\mathrm{sen}(t), bt)$.

$$\alpha'(t) = (-a\,\mathrm{sen}(t), a\cos(t), b)$$

Se tiene que la velocidad de α *es constante dado que*

$$||\alpha'(t)||^2 = ((\alpha'(t)\cdot\alpha'(t))^{\frac{1}{2}})^2 = \alpha'(t)\cdot\alpha'(t) =$$

$$= (-a\,\mathrm{sen}(t), a\cos(t), b)\cdot(-a\,\mathrm{sen}(t), a\cos(t), b) =$$
$$= a^2\,\mathrm{sen}(t)^2 + a^2\cos(t)^2 + b^2 = a^2 + b^2.$$

que es constante. Sea $c = ||\alpha'|| = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$*. Entonces, la longitud de arco de* α *es*

$$s(t) = \int_0^t c\,du = ct.$$

Cuya inversa es $t(s) = \frac{s}{c}$*. Ahora, si componemos* α *con* t *obtenemos un reparametrización de* α*, con longitud de arco unitaria*

$$\beta(s) = \alpha(\frac{s}{c}) = \Big(a\cos(\frac{s}{c}), a\,\mathrm{sen}(\frac{s}{c}), \frac{bs}{c}\Big).$$

1.3. Producto Vectorial

Definición 1.7 (Producto Vectorial)**.** *Sean* $u, v \in \mathbb{R}^3$*. El producto vectorial de* u, v *es*

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

Proposición 1.1 (Propiedades Producto vectorial)**.** *Sean* $u, v \in \mathbb{R}^3$*. Entonces,*

*(*I*)* $u \wedge v = -v \wedge u$.

*(*II*)* $u \wedge v$ *es lineal respecto de* u *y* v*, es decir, para* $w \in \mathbb{R}^3$ *y* $a, b \in \mathbb{R}$, $(au + bw)\wedge v = au\wedge v + bw \wedge v$.

*(*III*)* $u \wedge v = 0 \Leftrightarrow u, v$ *son linealmente dependientes.*

*(*IV*)* $(u\wedge v)\cdot u = 0, (u\wedge v)\cdot v = 0$.

1.4. Fórmulas de Frenet

Definición 1.8 (Curvatura). *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a., $s \in I$. Entonces, $||\alpha''(s)|| = k(s)$ se llama curvatura de α en s.*

Observación. *$k(s)$ describe el cambio en la dirección de la curva en un instante.*

Ejemplo. *Sea $u, v \in \mathbb{R}(3)$, $\alpha(s) = us + v$. Entonces, $k(s) = 0, \forall s \in I$. Reciprocamente, $k = ||\alpha''(s)|| = 0$. Entonces, $\int(\int kds)ds \Rightarrow \alpha(s) = us + v$.*

Proposición 1.2. *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a.. Entonces, $\alpha''(s) \perp \alpha'(s), \forall s \in I$.*

Demostración. $||\alpha'(s)|| = 1, \forall s \in I \Rightarrow \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1 \Rightarrow 2\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0 \Rightarrow \alpha''(s) \perp \alpha'(s), \forall s \in I$.

Proposición 1.3. *La curvatura se mantiene invariante ante un cambio de orientación.*

Demostración. $\beta(-s) = \alpha(s) \Rightarrow \beta'(s) = -\alpha'(s) \Rightarrow \beta''(-s) = \alpha''(s) = k(s)$.

Definición 1.9 (Vector Tangente Unitario). *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a.. Entonces,*

$$T(s) = \alpha'(s)$$

se llama vector tangente unitario a α en s.

Observación. $k(s) = ||T'(s)||$.

Nota. *Observamos que $\forall s \in I : k(s) > 0$, $k(s) = ||\alpha''(s)|| \Rightarrow \alpha''(s) = k(s)N(s)$ donde $N(s)$ es un vector unitario en la dirección de $\alpha''(s)$. Además, $\alpha''(s) \perp \alpha'(s) \Rightarrow N(s)$ es normal a $\alpha(s)$.*

Definición 1.10 (Vector Normal). *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva regular* *p.p.a.. Entonces,*

$$N(s) = \frac{T'(s)}{k(s)}$$

se llama vector normal a α en s.

Observación. *El vector normal N es perpendicular al vector tangente unitario T y normal a la curva α en s. Esto es, $\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) = T(s) \wedge k(s)N(s) = 0$*

Definición 1.11 (Plano Oscilador)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Entonces, $T(s), N(s)$ determinan un plano en $\mathbb{R}^3$ y lo llamamos plano oscilador.*

Observación. *También se llama Referencia móvil de Frenet para curvas planas.*

Definición 1.12 (Vector Binormal)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a.. Entonces, $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ es el vector normal al plano oscilador en s y se dice vector binormal en s.*

Observación. *$||B'(s)||$ mide la tasa de cambio del plano oscilador, es deicr, la rapidez con la que la curva se aleja del plano oscilador en s.*

Nota. *$B'(s) = T'(s) \wedge N'(s) + T(s) \wedge N'(s) = T(s) \wedge n'(s) \Rightarrow B'(s)$ es normal a $T(s)$y $B'(s)$ es paralelo a $N(s)$. Entonces, escribimos $B'(s) = \tau(s)N(s)$ para alguna función τ.*

Definición 1.13 (Torsión)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. tal que $\alpha''(s) \neq 0, s \in I$. Entonces, decimos que*

$$\tau(s) = \frac{B'(s)}{N(s)}$$

es la torsión de α en s.

Observación. *Si cambia la orientación entonces el signo del vector binormal cambia dado que $B = T \wedge N$. Por tanto, $B'(s)$ y la torsión se mantienen invariantes.*

Definición 1.14 (Tiedro de Frenet)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. tal que $k > 0$. Entonces, para cada valor $s \in I$, $\exists T(s), N(s), B(s)$ vectores unitarios mutuamente ortogonales y los llamamos el tiedro de Frenet en α. Estos vectores vienen dados de la siguiente forma*

$$T(s) = \alpha'(s) \quad \text{vector tangente} \;,$$

$$k(s) = ||T'(s)|| \text{ curvatura },$$

$$N(s) = \frac{1}{k(s)} T'(s) \text{ vector normal },$$

$$B = T \wedge N \text{ vector binormal },$$

$$\tau(s) = \frac{B'(s)}{N(s)} \text{ torsión}$$

donde $\langle N,N \rangle = \langle T,T \rangle = \langle B,B \rangle = 1$ *y cualquier otro producto escalar es* 0.

DIBUJO

Definición 1.15 (Fórmulas de Frenet)**.** *Sea* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *curva regualar p.p.a con* $k > 0$ *y torsión* τ*. Entonces,*

$$T' = kN,$$

$$N' = -kT + \tau B,$$

$$B' = -\tau N,$$

Proposición 1.4. $\tau = 0$ *si y solo si* α *es una curva en el plano.*

Demostración. *(*$\Rightarrow$*) Sea* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *una curva plana p.p.a.. Entonces,* $\exists p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^3$ *tal que* $(\alpha(s) - p) \cdot q = 0, \forall s \in I$*. Derivando,*

$$\alpha'(s) \cdot q = \alpha''(s) \cdot q = 0, \ \forall s \in I.$$

Por tanto, q *es ortogonal a* T *y* $N \Rightarrow B = \frac{q}{||q||} \Rightarrow B' = 0 \Rightarrow \tau = 0.$

($\Leftarrow$*) Sea* $\tau = 0 \Rightarrow B' = 0 \Rightarrow B' \ || \ B$*. Queremos ver que* α *es ortogonal a* B *en* 0*. Sea*

$$f(s) = (\alpha(s) - \alpha(0)) \cdot B, \forall s \in I.$$

Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \alpha' \cdot B = T \cdot B = 0$$

donde $f(0) = 0 \Rightarrow (\alpha(s) - \alpha(0)) \cdot B = 0, \ s \in I$*. Por tanto,* α *permanece en el plano ortogonal a* B*.*

Proposición 1.5. *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. con curvatura constante $k > 0$ y $\tau = 0$. Entonces α es parte de un circulo de radio $\frac{1}{k}$.*

Demostración. *$\tau = 0 \Rightarrow \alpha$ es una curva en plano. Sea $\gamma = \alpha + \frac{1}{k}N$ entonces,*

$$\gamma' = \alpha' + \frac{1}{k_\alpha}N'_\alpha = T_\alpha - \frac{1}{k_\alpha}k_\alpha T_\alpha = 0.$$

Como $T_\gamma = 0 \Rightarrow k_\gamma = 0 \Rightarrow \gamma$ es una recta horizontal. Sea $\gamma = c \in \mathbb{R}$

$$\gamma(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k_\alpha(s)}N(s) = c, \ \forall s \in I$$

$$\Rightarrow d(c, \alpha(s)) = ||c - \alpha(s)|| = ||\frac{1}{k}N(s)|| = \frac{1}{k}.$$

Luego, α es una curva que en todo punto se mantiene a distancia $\frac{1}{k}$ de un punto fijo c, el centro de la circunferencia.

1.5. Curvas Arbitrarias

Proposición 1.6. *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular con $k > 0$ y $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ su reparametrización por arco tal que $\beta(t) = \alpha(s(t))$ donde $s(t)$ es la longitud de arco. Entonces,*

$$T' = kvN$$

$$N' = -kvT + \tau vB$$

$$B' = -\tau vN$$

Demostración. $\frac{dT(s(t))}{dt} = T'(s(t)) \cdot s'(t) = k(s(t))N(s(t))v(t) = k(s)N(s)v.$

Proposición 1.7. *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular con $k > 0$ y $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ su reparametrización por arco tal que $\beta(t) = \alpha(s(t))$ donde $s(t)$ es la longitud de arco. Entonces,*

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'(s)\frac{ds}{dt} = vT(s),$$

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \frac{dv}{dt}T + vT' = v'T(s) + kv^2N$$

son la velocidad y aceleración de α en $s(t)$.

DIBUJO

Teorema 1.2. *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Entonces,*

$$T = \frac{\alpha'}{||\alpha'||},\ k = \frac{||\alpha' \wedge \alpha''||}{||\alpha'||^3},$$

$$N = B \wedge T,\ B = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{||\alpha' \wedge \alpha''||},$$

$$\tau = (\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \frac{\alpha'''}{||\alpha' \wedge \alpha'''||^2}.$$

Definición 1.16 (Hélice Cilíndrica)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular tal que $\langle T(t), u\rangle = \cos(\varphi), \forall t \in I$. Entonces, α es una hélice cilíndrica.*

Teorema 1.3. *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva regula con $k > 0$. Entonces, α es una hélice cilíndrica si y solo si $\frac{\tau}{k}$ es constante.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva regular p.p.a con $k > 0$. Entonces, si α es una hélice cilíndrica $T(t) \cdot u = \cos(\varphi),\ \forall t \in I \Rightarrow$

$$0 = (T \cdot u)' = T' \cdot u = kN \cdot u$$

donde $k > 0 \Rightarrow N \cdot u = 0$. Por tanto, $\forall t \in I$, u está en el plano determinado por $T(t)$ y $B(t)$. Es decir,

$$u = \cos(\varphi)T + \operatorname{sen}(\varphi)B.$$

Usando las fórmulas de Frenet

$$0 = (k\cos(\varphi) + \tau\operatorname{sen}(\varphi))N$$

$$\Rightarrow \frac{\tau}{k} = \frac{\cos(\varphi)}{sin(\varphi)}.$$

(⇐) Si $\frac{\tau(t)}{k(t)} = \cos(\varphi), \forall t \in I$. *Entonces, eligiendo* $\cot(\varphi) = \frac{\tau}{k}$, *si*

$$U = \cos(\varphi)T + \operatorname{sen}(\varphi)B$$

tenemos que

$$U' = (k\cos(\varphi) - \tau\operatorname{sen}(\varphi))N = 0$$

determina un vector unitario u *tal que* $T \cdot u = \cos(\varphi) \Rightarrow \alpha$ *es una hélice cilíndrica.*

Teorema 1.4 (Fundamental de la Teoría Local de Curvas)**.** *Sean* $k, \tau : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funciones diferenciables con* $k(s) > 0, \tau(s)$. *Entonces,* $\exists \alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *curva tal que* s *es la longitud de arco,* $k(s)$ *es la curvatura, y* $\tau(s)$ *es la torsión de* α.

Además, cualquier otra curva $\overline{\alpha}$ *difiere de* α *por un movimiento rígido, es decir,* $\exists \gamma : I \to \mathbb{R}$ *aplicación lineal ortogonal con* $\det \gamma > 0$ *y* $c \in \mathbb{R}^3$: $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha} \circ \gamma) + c$.