Topología

Hugo Del Castillo Mola

28 de julio de 2023

Índice general

Parte I

Topología General

Capítulo 1

Espacios Topológicos Arbitrarios

1.1. Espacios Topológicos

Definición 1.1 (Topología). *Se llama topología sobre un conjunto X a $\forall \tau \subset \mathcal{P}(X)$ que verifique:*

(G1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(G2) $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$

(G3) $\forall \{A_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$

Observación. *Al par $\big(X, \mathcal{T}\big)$ se denomina espacio topológico y los elementos de X son puntos del espacio topológico.*

Ejemplo. (I) *Sea X un conjunto, entonces $\mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_D$ es una topología y se llama topología discreta.*

(II) *La colección $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ es también una topología y la llamamos topología trivial.*

(III) *Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{T}_d = \{U \subset X : \forall x \in U, \epsilon > 0 : B_\epsilon \subset U\}$ es una topología y la llamamos topología inducida por la métrica d.*

Observación. *Toda métrica induce un espacio topológico pero no todo espacio topológico es inducido por una métrica.*

Definición 1.2 (Espacio Metrizable). *Sea $\big(X, \mathcal{T}\big)$ e.t., decimos que es un espacio matizable si d métrica sobre X tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.*

Definición 1.3 (Conjunto Abierto)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico, decimos que $U \subset X$ es un conjunto abierto si $U \in \mathcal{T}$.*

Observación. *Si U es un conjunto abierto, entonces $X \setminus U$ es un conjunto cerrado.*

Observación. *Existen conjuntos que son abiertos y cerrados simultáneamente. Y existen conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.*

Ejemplo. *Sea el espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ entonces $S = (0, 1])$ no es ni abierto ni cerrado.*

Ejemplo. *Sea el espacio topológico $(X, \mathcal{T}_d)$ donde $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ entonces $\forall S \subset X$, S es abierto y cerrado simultáneamente.*

Definición 1.4 (Comparación de Topologías)**.** *Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías sobre un conjunto $X \neq \emptyset$. Si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ se dice que $\mathcal{T}'$ es más fina (más fuerte) que $\mathcal{T}$. También podemos decir que $\mathcal{T}$ es menos fina que $\mathcal{T}'$.*

Notación. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} = \{C \subset X : C$ es cerrado en $(X, \mathcal{T})\}$.*

Proposición 1.1 (Dualidad conjuntos abiertos y cerrados)**.** *Sea $\mathcal{F}$ es la familia de conjuntos cerrados de un espacio topológico $(X, \mathcal{F})$.*

(F1) $\emptyset, X$ son cerrados.

(F2) $\forall C_1, C_2$ cerrados $\Rightarrow C_1 \cup C_2$ es cerrado.

(F3) $\forall \{C_j\}_{j \in J}$ cerrados $\Rightarrow \bigcap_{j \in J} C_j$ es cerrado.

Recíprocamente, si $X \neq \emptyset$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ y $\mathcal{F}$ cumple (i, ii, iii) entonces la colección de los miembros complementarios a $\mathcal{F}$ es una topología sobre X en donde la familia de cerrados es $\mathcal{F}$.

Observación. *Este resultado muestra la relación entre las nociones de conjuntos abiertos y cerrados. Cualquier resultado sobre conjuntos abiertos en un espacio topológico se convierte en uno sobre cerrados al remplazar* **abierto** *por* **cerrado** *y $\cup$ por $\cap$.*

Definición 1.5 (Adherencia). *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. y $S \subset X$ se llama adherencia de S en $(X, \mathcal{T})$ al conjunto*

$$\overline{S} = \bigcap \{C \subset X : C \text{ es cerrado y } S \subset C\}$$

Observación. *$\overline{S}$ es cerrado, $S \subset \overline{S}$ y $\overline{S}$ es el menor cerrado que contiene a S.*

Lema 1.0.1. *Si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

Demostración. *Como $B \subset \overline{B}$, $A \subset B \Rightarrow A \subset \overline{B}$ y por ser $\overline{B}$ cerrado, se tiene que $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

Proposición 1.2 (Propiedades Adherencia). *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. entonces*

(K1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$,

(K2) $\forall S \subset X, S \subset \overline{S}$,

(K3) $\forall S \subset X, \overline{\overline{S}} = S$,

(K4) $\forall A, B \subset X, \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

(K5) $\forall C \subset X$, *C es cerrado* $\Leftrightarrow C = \overline{C}$.

Demostración. *(iv) Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico. Dado que $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ se tiene que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Por otro lado, $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ y $\overline{B} \subset \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.*

Teorema 1.1. *Sea $X \neq \emptyset$ y $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X) : S \mapsto \varphi(S) \equiv \overline{S}$ tal que φ cumple las 4 propiedades anteriores. Entonces, existe una única topología $\mathcal{F}$ sobre X tal que $\forall S \subset X, \varphi(S)$ es la adherencia de S en $(X, \mathcal{F})$.*

Demostración. *Sea $\mathcal{F} = \{F \subset X : \overline{F} = F\} \subset \mathcal{P}(X)$. Queremos ver que se cumplen las propiedades de Prop.1.1.(i, ii, iii).*

(I) *Por Prop.1.2(i, ii).*

(II) *Por Prop.1.2(iv), sean* $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. *Entonces,* $\overline{F_1 \cup F_2} = \overline{F_1} \cup \overline{F_2} = F_1 \cup F_2 \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.

(III) *Si* $F \subset G$ *por Prop.1.2(iv)* $\overline{G} = \overline{F} \cup (\overline{G \setminus F}) \Rightarrow \overline{F} \subset \overline{G}$ *Ahora, sean* $F_j \in \mathcal{F}, \forall j \in J$ *Entonces,* $\bigcap_{j\in J} F_j \subset F_j, \forall j \in J \Rightarrow \overline{\bigcap_{j\in J} F_j} \subset \overline{F_j}, \forall j \in J$ *y por tanto,* $\overline{\bigcap_{j\in J} F_j} \subset \bigcap_{j\in J} \overline{F_j} = \bigcap_{j\in J} F_j$ *y por Prop.1.2(ii) se tiene que* $\overline{\bigcap_{j\in J} F_j} = \bigcap_{j\in J} F_j$, *esto es,* $\bigcap_{j\in J} F_j \in \mathcal{F}$.

Por tanto, $\mathcal{F}$ *es la familia de cerrados de algún e.t.* $\big(X, \mathcal{T}\big)$. *Falta por ver que la adherencia es la operación* φ. *Dado que* $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$ *se tiene que* $\overline{S} \in \mathcal{F}$ *y por Prop.1.2(ii)* $S \subset \overline{S}$. *Si* $C \in \mathcal{F}$ *tal que* $S \subset C$ *entonces* $\overline{S} \subset \overline{C} = C \Rightarrow \overline{S}$ *es el elemento de* $\mathcal{F}$ *más pequeño que contiene a* S.

Observación. *A la operación anterior se le llama operación de clausura de Kuratowski.*

Definición 1.6 (Interior)**.** *Sea* $\big(X, \mathcal{T}\big)$ *e.t.,* $S \subset X$ *se llama interior de* S *en* $\big(X, \mathcal{T}\big)$ *al conjunto*

$$\mathring{S} = \bigcup\{A \subset X \text{ abierto y } A \subset S\}.$$

Observación. $\mathring{S}$ *es abierto de* $\mathcal{T}$, $\mathring{S} \subset S$ *y es el mayor abierto contenido en* S.

Proposición 1.3 (Propideades interior)**.** *content*

Proposición 1.4. *Sea* $\big(X, \mathcal{T}\big)$ *e.t.,* $S \subset X$. *Enotnces:*

(I) $X \setminus \overline{S} = (X \mathring{\setminus} S)$.

(II) $X \setminus \mathring{S} = \overline{X \setminus S}$.

Observación. $\overline{S^c} = \mathring{S}^c$.

Demostración. (I) $X \setminus \bigcap_{C\in\mathcal{F}:S\subset C} C = \bigcup_{C\in\mathcal{F}:S\subset C} X \setminus C = \bigcup_{G\in\mathcal{T}:G\subset X\setminus S} G = (X \mathring{\setminus} S)$

(II) $X \setminus \mathring{S} = X \setminus \bigcup_{G\in\mathcal{T}:G\subset S} G = \bigcap_{G\in\mathcal{T}:G\subset S}(X \setminus G) = \bigcap_{C\in\mathcal{F}:X\setminus S\subset C} C =$

$\overline{X \setminus S}$

Definición 1.7 (Frontera)**.** *Sea $\big(X, \mathcal{T}\big)$ e.t., $S \subset X$. Se llama frontera de S en $\big(X, \mathcal{T}\big)$ a*

$$Fr(S) = \overline{S} \cap \overline{(X \setminus S)}$$

Observación. $Fr(S)$ *es cerrado*

Observación. $Fr(S) = Fr(X \setminus S)$

Observación. $Fr(S) \not\subset S$

Proposición 1.5. *Sea $\big(X, \mathcal{T}\big)$ e.t., $S \subset X$. Entonces:*

(i) $\overline{S} = S \cup Fr(S)$

(ii) $\mathring{S} = S \setminus Fr(S) = S \setminus \big(Fr(S) \cap S\big)$

(iii) $X = \mathring{S} \cup (X \overset{\circ}{\setminus} S) \cup Fr(S)$

(iv) $Fr(S) = \overline{S} \setminus \mathring{S}$

Demostración. *(i)*

$$S \cup Fr(S) = S \cup \big(\overline{S} \cap \overline{X \setminus S}\big) =$$

$$= (S \cup \overline{S}) \cap (S \cup \overline{X \setminus S}) = \overline{S}$$

(ii)

$$S \setminus Fr(S) = S \setminus (\overline{S} \cap \overline{X \setminus S}) =$$
$$= (S \setminus \overline{S}) \cup (S \setminus \overline{X \setminus S}) = \emptyset \cup (S \cap (X \setminus \overline{X \setminus S})) =$$
$$= (S \cap (X \setminus (X \setminus \mathring{S}))) = (S \cap \mathring{S}) = \mathring{S}$$

(iii)

$$X = \mathring{S} \cup (X \setminus \mathring{S}) = \mathring{S} \cup \overline{X \setminus S} =$$
$$= \mathring{S} \cup \big[(X \setminus S) \cup Fr(X \setminus S)\big] =$$
$$= \mathring{S} \cup \big[(X \overset{\circ}{\setminus} S) \cup \big(Fr(X \setminus S) \cap (X \setminus S)\big) \cup Fr(X \setminus S)\big] =$$
$$= \mathring{S} \cup (X \overset{\circ}{\setminus} S) \cup Fr(X \setminus S) = \mathring{S} \cup (X \overset{\circ}{\setminus} S) \cup Fr(S)$$

(IV)

$$Fr(S) = \overline{S} \cap \overline{(X \setminus S)} = \overline{S} \cap (X \setminus \mathring{S})$$

Definición 1.8. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $S \subset X$ se dice que es denso en $(X, \mathcal{T})$ si $\overline{S} = X$*

1.2. Entornos

Definición 1.9. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $x \in X$, $V \subset X$. Se dice que V es un entorno de x en $(X, \mathcal{T})$ si $\exists A \in \mathcal{T} : x \in A \subset V$.*

Definición 1.10. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ es la colección de todos los entornos de x y se llama sistema de entornos de x en $(X, \mathcal{T})$.*

Observación. *Si $(X, \mathcal{T})$ e.t., $x \in X$, $V \subset X$ entonces V es entorno de $x \Leftrightarrow x \in \mathring{V}$.*

Notación. *U^x, V^x entornos de x.*

Proposición 1.6. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $\mathcal{V}(x)$ tiene las siguiente propiedades:*

(N1) $\forall U \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in U$.

(N2) $\forall U, V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{V}(x)$.

(N3) $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists V \in \mathcal{V}(x)$ *tal que* $\forall y \in V, U \in \mathcal{V}(y)$.

(N4) $\forall U \in \mathcal{V}(x)$, $\exists V \subset X : U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$.

Demostración. *(I) Trivial, a partir de la definición.*

(II) $x \in \mathring{U}, x \in \mathring{V} \Rightarrow x \in \mathring{U} \cap \mathring{V} \subset U \mathring{\cap} V \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{V}(x)$.

(III) Sean $U \in \mathcal{V}(x), V = \mathring{U}$ *como* $x \in \mathring{U} = V \Rightarrow \forall y \in V \in \mathcal{T}$ *y* $V \subset U \Rightarrow U \in \mathcal{V}(y)$.

(IV) $U \in \mathcal{V}(x), U \subset V \Rightarrow x \in \mathring{U} \subset \mathring{V} \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$.

Proposición 1.7. *Sea $X \neq \emptyset$, $\forall x \in X : \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{P}(x)$ que cumple (N1, N2, N3, N4) anteriores, entonces $\exists! \mathcal{T}$ sobre $X : \forall x \in X, \mathcal{V}(x)$ es el sistema de entornos de x en $\big(X, \mathcal{T}\big)$.*

Demostración. *Sea $\mathcal{T} = \{G \subset X : \forall x \in G, G \in \mathcal{V}(x)\}$. Vemos que $\mathcal{T}$es una topología:*

(I) *Prop1.6.(N1) $X \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow X \in \mathcal{T}$*

(II) *$\forall G_1, G_2 \in \mathcal{T}, x \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow G_1, G_2 \in \mathcal{V}(x)$, Prop.1.6.(N2) $\Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{V}(x)$.*

(III) *$\forall \{G_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{T}, x \in \bigcup_{j\in J} G_j \Rightarrow \exists j_0 \in J : G_{j_0} \in \mathcal{V}(x)$, Prop.1.6.(N4) $\Rightarrow \bigcup_{j\in J} G_j \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \bigcup_{j\in J} G_j \in T$*

$\Rightarrow \mathcal{T}$ es topolgía.
Vemos ahora que S es entorno de $x \Leftrightarrow S \in \mathcal{V}(x)$.

- *$(\Rightarrow)$ S entorno de x en $\big(X, \mathcal{T}\big) \Rightarrow \exists G \in \mathcal{T} : x \in G \subset S \Rightarrow G \in \mathcal{V}(x)$ Prop.1.6.(iv) $\Rightarrow S \in \mathcal{V}(x)$.*
- *$(\Leftarrow)$ $S \in \mathcal{V}(x)$. Sea $U \subset S$ ACABAR*

Falta ver que $\mathcal{T}$ es única.

Definición 1.11 (Base de Entorno)**.** *Sea $x \in X, \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$. Se dice que $\mathcal{B}(x)$ es una base de un entorno de x en $\big(X, \mathcal{T}\big)$ si $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset U$.*

Observación. *De la definición de base queda determinado un entorno como $\mathcal{V}(x) = \{U \subset X : \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset U\}$*

Ejemplo. *$\forall \big(X, \mathcal{T}\big)$ e.t. $\mathcal{V}(x)$ es una base de entornos de x.*

Ejemplo. *Sea $\big(X, \mathcal{T_D}\big), \mathcal{T}_D = \mathcal{P}(x), \forall x \in X$ entonces $\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}$ es base de entornos de x.*

Ejemplo. *Sea $\big(X, \mathcal{T}\big)$ metrizable. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$, d métrica tal que $\forall x \in X, \mathcal{B}(x) = \{B_\epsilon(x) : \epsilon > 0\}$ entonces $\mathcal{B}(x)$ es base de entornos de x.*

Ejemplo. *$\forall \big(X, \mathcal{T}\big)$ e.t., $\mathcal{B}(x) = \{\mathring{U} : U \in \mathcal{V}(x)\}$ es base de entornos de x.*

Ejemplo. *Sea $\big(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u\big) : \forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{B}(x) = \{\big[x - \epsilon, x + \epsilon\big] : \epsilon > 0\}$ entonces $\mathcal{B}(x)$ es base de entornos de x.*

Proposición 1.8 (Propiedades de Bases de Entornos)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. y* $\mathcal{B}(x)$ *una base de entornos de* x *en* $(X, \mathcal{T})$, $\forall x \in \mathcal{T}$. *Entonces:*

(V1) $B \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow x \in B$.

(V2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}(x) : B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

(V3) $B_1 \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow \exists B_2 \in \mathcal{B}(x) : \forall y \in B_2, \exists B \in \mathcal{B}(y)$ *tal que* $B \subset B_1$.

Demostración. *(V1)* $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x), B \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow x \in B$.

(V2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}(x) : B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

(V3) $B_1 \in \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ *Prop.1.6.(iii)* $\Rightarrow \exists U \in \mathcal{V}(x)$ *tal que* $\forall y \in U, B_1 \in \mathcal{B}(y) \Rightarrow \exists B_2 \in \mathcal{B}(x) : B_2 \subset U$ *tal que* $\forall y \in B_2, B_1 \in \mathcal{V}(y) \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}(y) : B \subset B_1$.

Proposición 1.9. *Sea* $X \neq \emptyset, \mathcal{B} : X \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{P}(x))$ *cumpliendo (i, ii, iii) anteriores, entonces se define una topología en* X *en la que* $\mathcal{B}(x)$ *es una base de entornos de* $x, \forall x \in X$.

Demostración. *Sea* $\forall x \in X$,

$$\mathcal{V}(x) = \{U \subset X : \exists B \subset U \text{ para algún } B \in \mathcal{B}(x)\}$$

tal que $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ *tiene las propiedades V1, V2, V3. Veamos que* $\mathcal{V}(x)$ *tiene las propiedades N1, N2, N3, N4.*

(N1) $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists B \subset U : B \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow x \in B \subset U \Rightarrow x \in U$.

(N2) $U_1, U_2 \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x) : B_1 \subset U_1, B_2 \subset U_2$ *y (V2)* $\Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}(x) : B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$. *Entonces,* $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}(x)$.

(N3) $U \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists B \subset U : B \in \mathcal{B}(x)$, *(V3)* $\Rightarrow \exists B_0 \in \mathcal{B}(x) : \forall y \in B_0, \exists B_y \in \mathcal{B}(y) : B_y \subset B$. *Entonces* $B \in \mathcal{V}(y), \forall y \in B_0 \Rightarrow U \in \mathcal{V}(y), \forall y \in B_0$.

(N4) $U \in \mathcal{V}(x), V \subset X : U \subset V \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$.

Entonces, $\mathcal{V}(x)$ es un sitema de entornos de $x, \forall x \in X$ y $\forall x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ es una base de entornos de x en la topología resultante en X.

Definición 1.12 (Bases de Entronos Equivalentes)**.** *Sea $X \neq \emptyset$. Si una topología sobre X está definida por dos bases de entornos, se dice que las bases son equivalentes.*

Proposición 1.10. *Sea $X \neq \emptyset$. Dos bases de entornos de x, $\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)$ de X son equivalentes si y solo si $\forall x \in X, \forall i \in \{1,2\}, \forall B \in \mathcal{B}_i(x), \exists B_j \in \mathcal{B}_i(x) : B_j \subset B_i, \forall j \in \{1,2\}, j \neq i$.*

Proposición 1.11 (Caracterización bases equivalentes)**.** *Sean $\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)$ dos bases de entornos de x en $\big(X, \mathcal{T}\big)$, estas son equivalentes $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X, \forall i \in \{1,2\}, \forall B_i \in \mathcal{B}_i(x), \exists B_j \in \mathcal{B}_j(x), j \in \{1,2\}, j \neq i : B_j \subset B_i$.*

Demostración. *($\Rightarrow$)* $\forall i \in \{1,2\}, \forall B_i \in \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists B_j \in \mathcal{B}(x), \forall j \in \{1,2\}, j \neq i$.

($\Leftarrow$)
ACABAR

Definición 1.13. *Sea $\big(X, \mathcal{T}\big)$ e.t. $S \subset X, x \in X$.*

(I) *Se dice que x es un puto interior de S en $\big(X, \mathcal{T}\big)$ si $\exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \subset S$.*

(II) *Se dice que x es un punto adherente de S en $\big(X, \mathcal{T}\big)$ si $\forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset$.*

(III) *Se dice que x es un punto de acumulación si $\forall \mathcal{U}^x$, $\mathcal{U}^x \setminus \{x\} \cap S \neq \emptyset$.*

(IV) *Se dice que x es un punto de frontera si $\forall \mathcal{U}^x$, $\mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset, \mathcal{U}^x \cap (X \setminus S) \neq \emptyset$.*

(V) *Se dice que x es punto aislado si $\exists \mathcal{U}^x$ tal que $\mathcal{U}^x \cap S = \{x\}$.*

Definición 1.14. *El conjunto de puntos de acumulación se llama conjunto derivado y se denota* S'.

Proposición 1.12. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. Entonces,*

(I) $A \subset X$ *es abierto de* $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \subset A$.

(II) $C \subset X$ *es cerrado* $\Leftrightarrow \forall x \notin C, \exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \cap C = \emptyset$.

(III) $S \subset X,\ \mathring{S} = \{x \in X : \exists \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \subset S\}$.

(IV) $S \subset X, \overline{S} = \{x \in X : \forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset\}$.

(V) $S \subset X, Fr(S) = \{x \in X : \forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset, \mathcal{U}^x \cap (X \setminus S) \neq \emptyset\}$.

Demostración. (I) *Es la propiedad V1.*

(II) C *es cerrado* $\Leftrightarrow X \backslash C \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in X \backslash C, \exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \subset X \backslash C \Rightarrow X \backslash C$ *es abierto.*

(III) *Sigue de (iv) aplicando las leyes de De Morgan.*

(IV) $X \backslash \overline{S} = (X \mathring{\setminus} S) = \{x \in X : \exists \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \subset X \backslash S\}$ *cuyo complementario es* $\overline{S} = \{x \in X : \forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset\}$.

(V) $Fr(S) = \overline{S} \cap \overline{X \setminus S}$

Observación. *En la proposición anterior se pueden usar bases en lugar de sistemas de entornos.*

Corolario 1.1.1. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $S \subset X$ *entonces*

(I) $\overline{S} = \{x \in X : x$ *es punto adherente de* $S\}$.

(II) $\mathring{S} = \{x \in X : x$ *es punto interior de* $S\}$.

(III) $Fr(S) = \{x \in X : x$ *es punto frontera de* $S\}$.

Proposición 1.13. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.* $E \subset X$. *Entonces* E *es denso en* $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, U \cap E \neq \emptyset$.

Demostración. *(⇒) Suponemos que E es denso, es decir, $\overline{E} = X$. Entonces, $\forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$, U es abierto $\Rightarrow \forall x \in \mathring{U} = U \Rightarrow U$ es entorno de x en $\big(X, \mathcal{T}\big)$. Y como x es punto adherente de $E \Rightarrow U \cap F \neq \emptyset$.*

(⇐) $\forall x \in X, \forall \mathcal{U}^x$ entorno de $x \Rightarrow \mathring{\mathcal{U}}^x \subset \mathcal{U}^x \subset X \Rightarrow \mathring{\mathcal{U}}^x \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ y por la hipótesis $\mathring{\mathcal{U}}^x \cap E \subset \mathcal{U}^x \cap E \neq \emptyset \Rightarrow x$ punto adherente de E, $x \in \overline{E} \Rightarrow X \subset \overline{E}$.

1.3. Bases

Definición 1.15 (Base). *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Se dice que $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$ si $\forall A \in \mathcal{T}, \exists \mathcal{B}_A \subset \mathcal{B} : A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_A} B$. Y se dice que $\mathcal{T}$ está engendrada por $\mathcal{B}$.*

Observación. *$\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ tal que $\mathcal{T} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}_A} B : \mathcal{B}_A \subset \mathcal{B}\}$.*

Observación. *$\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ es una base de $X \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{T}, \forall x \in A \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset A$.*

Ejemplo. *(I) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u), \mathcal{B} = \{(a, b) : a < b\}$ es base de $\mathcal{T}_u$.*

(II) $(X, \mathcal{T}_u), \mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ es base de $\mathcal{T}_u$.

(III) $(X, \mathcal{T})$ metrizble, $\mathcal{T}_d$ topología inducida por d. Entonces $\mathcal{B} = \{B_\epsilon(x) : x \in X, \epsilon > 0\}$ es base de $\mathcal{T}_d$.

Proposición 1.14. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ entonces, $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ es base de entornos de x en $(X, \mathcal{T})$.*

Observación. *La única diferencia entre bases y bases de entornos es que las bases no tinen por que consister de conjuntos abiertos.*

Demostración. *(⇒) Suponemos que $\mathcal{B}$ es base de X, $x \in X$ y $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$. Sea $U \in \mathcal{B}_x$ entonces $U \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T} : x \in U = \mathring{U} \Rightarrow U$ es un entorno de x. Sea $U \in \mathcal{V}(x)$, entonces $x \in \mathring{U} \in \mathcal{T}$ donde $\mathcal{T} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} B : \mathcal{B}_U \subset \mathcal{B}\}$, es decir, $\mathring{U}$ es la unión de elementos de $\mathcal{B}$ entonces $\exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset \mathring{U}$. Por tanto, $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists B \in \mathcal{B}_x : B \subset U \Rightarrow \mathcal{B}_x$ es base de entronos de x.*

(⇐) Suponesmos que $\mathcal{B}_x$ es una base de entornos de x, $\forall x \in X$ y $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$. Entonces, $\forall A \in \mathcal{T}, \forall x \in A, \exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subset A \Rightarrow$

$A = \bigcup\{B_x : x \in A\} \Rightarrow \mathcal{B}$ *es base para* X.

Teorema 1.2. *Sea* $X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. *Entonces,* $\mathcal{B}$ *es base de una topología* $\mathcal{T}$ *en* $X \Leftrightarrow$

(I) $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$.

(II) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B},\ p \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} : p \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Demostración. (I) ($\Rightarrow$) $\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{B\in\mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \in \mathcal{B}\right\}, X \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists \mathcal{B}_0 \in \mathcal{B} : X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_0} B$.

(II) ($\Rightarrow$) *A partir de la definición de base.* ($B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2$).

($\Leftarrow$) *Suponemos que* $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$ *donde* $\mathcal{B} = \{K \subset X : K$ *cumple las propiedades (i), (ii)* $\}$. *Sea* $\mathcal{T} = \{\bigcup_{B\in\mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}$. *Entonces,*

(G1) $\emptyset = \bigcup_{B\in\emptyset} B \in \mathcal{T}$ *y* $X \in \mathcal{T}$.

(G2) $\left(\bigcup_{B\in\mathcal{B}_1} B\right) \cap \left(\bigcup_{B'\in\mathcal{B}_2} B'\right) = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_1, B'\in\mathcal{B}_2} B \cap B'$, *por (ii)* $\Rightarrow$ *la intersección de dos elementos de* $\mathcal{B}$ *es una unión de elementos de* $\mathcal{B}$.

(G3) $\{A_j\}_{j\in J} = \{\bigcup_{B\in\mathcal{B}_j} B : j \in J\} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}$.

Definición 1.16 (Subbase)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.* $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. *Se dice que* $\mathcal{S}$ *es una subbase de* $\mathcal{T}$ *si la familia de todas las interseccións finitas de* $\mathcal{S}$ *es una base de* $\mathcal{T}$.

Observación. $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}, \mathcal{B} = \{\bigcap_{S\in\mathcal{S}'} S : \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ *es finito*$\}$ *es base de* $\mathcal{T}$.

Proposición 1.15. *Sea* $X \neq \emptyset, \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. *Entonces,* $\mathcal{S}$ *es una subbase de alguna topolpgía sobre* $X \Leftrightarrow \bigcup_{S\subset\mathcal{S}} S = X$.

Demostración. ($\Rightarrow$) *Sea* $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ *una subbase de* $\mathcal{T} \Rightarrow \{\bigcap_{S\in\mathcal{S}'} S : \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\} = \mathcal{B}$ *es base de* $\mathcal{T} \Rightarrow \forall B \in \mathcal{B}, \exists S_B \in \mathcal{S} : B \subset S_B \Rightarrow \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}} S_B \subset \bigcup_{S\in\mathcal{S}} S \subset X \Rightarrow \bigcup_{S\in\mathcal{S}} = X$.

($\Leftarrow$) *Sea* $\mathcal{B} = \{\bigcap_{S\in\mathcal{S}'} \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\}$.

(i) $\bigcap_{S\in\mathcal{S}} S = X \Rightarrow \bigcup_{B\in\mathcal{B}} = X$.

(ii) $\left(\bigcap_{S\in\mathcal{S}_1} S\right) \cap \left(\bigcap_{S'\in\mathcal{S}_2} S'\right) \bigcap_{S\in\mathcal{S}_1, S'\in\mathcal{S}_2} (S'\cap S) \subset \mathcal{B}$.

1.4. Subespacios

Definición 1.17 (Subespacio). *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *e.t.,* $S\subset X$. *Se llama topología relativa a* S *a*

$$\mathcal{T}|_S = \{A\cap S : A\in\mathcal{T}\}$$

y el par $(S,\mathcal{T}|_S)$ *se llama subespacio topológico.*

Proposición 1.16 (Propiedades Subespacio). *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *e.t.,* $S\subset X$. *Entonces,*

(I) $C\subset S, C\in\mathcal{T}|_S \Leftrightarrow \exists A\in\mathcal{T} : A\cap S = C$.

(II) $C\subset S$, C *cerrado en* $(S,\mathcal{T}|_S) \Leftrightarrow \exists F$ *cerrado en* $(X,\mathcal{T}) : C = F\cap S$.

(III) $\forall C\subset S$, $\overline{C}^S = S\cap\overline{C}^X$.

(IV) $\forall x\in S, \mathcal{V}^x\subset S$ *es un entorno de* x *en* $(S,\mathcal{T}|_S) \Leftrightarrow \exists\mathcal{U}^x$ *entorno de* x *en* $(X,\mathcal{T})$ *tal que* $\mathcal{U}^x\cap S = \mathcal{V}^x$.

(V) $\mathcal{B}$ *base de* $T \Rightarrow \mathcal{B}_S = \{B\cap S : B\in\mathcal{B}\}$ *es base de* $(S,\mathcal{T}|_S)$.

Demostración. (I) *Definición de subespacio.*

(II) *Sigue de (i).*

(III) *Sigue de (ii) y la definición de clausura de* C *como la intersección de todos los conjunto cerrados que contienen* E.

(IV) *Sigue de (i) y la definición de entorno de* x *como un conjunto que contiene un subconjunto abierto que contiene a* x.

(V) *ACABAR*

Observación. *Sea* $S\subset X, C\subset S$ *entonces no necesariamente* $int(C)_S \neq int(C)_X\cap S$. *Por ejemplo,* $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}_u), S = C = \{0\}\times\mathbb{R}$.

Definición 1.18. *Sea $(\mathcal{P})$ una propiedad de e.t. Se dice que $\mathcal{P}$ es propiedad hereditaria si dado e.t. que cumple $\mathcal{P}$ todos sus subespacios cumplen $\mathcal{P}$.*

1.5. Funciones continuas

Definición 1.19 (Función continua)**.** *Sean $(X,\mathcal{T})$, $(X',\mathcal{T}')$ dos e.t. y $f : X \to X'$ una aplicación. Se dice que $f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ es una aplicación continua en $a \in X$ si $\forall \mathcal{V}^{f(a)}$ entorno de $f(a)$ en $(X',\mathcal{T}')$, $\exists \mathcal{U}^a$ entorno de a en $(X,\mathcal{T}) : f(\mathcal{U}^a) \subset \mathcal{V}^{f(a)}$.*

Observación. *Se dice que f es continua si lo es $\forall a \in X$.*

Teorema 1.3. *Sean $(X,\mathcal{T})$, $(X',\mathcal{T}')$ dos e.t. y $f : X \to X'$ una aplicación. Entonces, son equivalentes:*

(I) $\forall A' \in \mathcal{T}', f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$

(II) $f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *es aplicación continua.*

(III) $\forall C \subset X, f(\overline{C}^X) \subset (\overline{f(C)})^{X'}$.

(IV) $\forall C' \subset X, \overline{f^{-1}(C')}^X \subset f^{-1}(\overline{C'}^{X'})$.

(V) $\forall F'$ *cerrado de* $(X',\mathcal{T}')$, $f^{-1}(F')$ *es cerrado de* $(X,\mathcal{T})$.

Demostración. *$(i \Rightarrow ii)$ Sea $a \in X$, $\mathcal{V}^{f(a)}$ entorno de $f(a)$ en $(X',\mathcal{T}') \Rightarrow \mathring{\mathcal{V}}^{f(a)}$, $f(a) \in \mathring{\mathcal{V}}^{f(a)}$. Ahora, por (i), tenemos $a \in f^{-1}(\mathring{\mathcal{V}}^{f(a)}) \in \mathcal{T}$. Sea $f^{-1}(\mathring{\mathcal{V}}^{f(a)}) = \mathcal{U}^a$. Entonces, $f(\mathcal{U}^a) = f(f^{-1}(\mathring{\mathcal{V}}^{f(a)})) \subset \mathring{\mathcal{V}}^{f(a)} \subset \mathcal{V}^{f(a)} \Rightarrow f$ es continua.*

$(ii \Rightarrow iii)$ Sea $C \subset X, a \in \overline{C}^X, \mathcal{V}^{f(a)}$ entorno de $f(a)$ en $(X',\mathcal{T}')$. Entonces, por (ii), $\exists \mathcal{U}^a$ entorno de a en $(X,\mathcal{T})$ tal que $f(\mathcal{U}^a) \subset \mathcal{V}^{f(a)} \Rightarrow \mathcal{U}^a \cap C \neq \emptyset \Rightarrow a \in \mathcal{U}^a \cap C \Rightarrow f(a) \in f(\mathcal{U}^a) \cap f(C) \subset \mathcal{V}^{f(a)} \cap f(C) \Rightarrow f(a) \in \overline{f(C)}^{X'}$.

(iii $\Rightarrow$ iv) $\forall C' \subset X' \Rightarrow f'(C') \subset X'$ y por (iii) $f(\overline{f^{-1}(C')})^X \subset \overline{f(f^{-1}(C'))}^{X'} \subset \overline{C'}^{X'} \Rightarrow \overline{f^{-1}(C')}^X \subset f^{-1}(\overline{C'}^{X'})$.

(iv $\Rightarrow$ v) F' cerrado de $(X',\mathcal{T}') \Rightarrow \overline{f^{-1}(C')}^X \subset f^{-1}(\overline{F'}^{X'}) = f^{-1}(F') \Rightarrow$

$f^{-1}(F')$ *es cerrado en* $(X, \mathcal{T})$.

(v $\Rightarrow$ *i)* $A' \in \mathcal{T}' \Rightarrow X' \setminus A'$ *cerrado de* $(X', \mathcal{T}') \Rightarrow f^{-1}(X' \setminus A)$ *cerrado de* $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow X \setminus f^{-1}(X' \setminus A') \in \mathcal{T}$. *Y* $x \notin f^{-1}(X' \setminus A') \Leftrightarrow f(x) \notin X' \setminus A' \Leftrightarrow f(x) \in A' \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A') \Rightarrow X \setminus f^{-1}(X' \setminus A')$.

Observación. $\forall (X, \mathcal{T})$ *e.t. la aplicación* $1_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ *es continua.*

Observación. $\forall (X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t.* $\forall x'_0 \in X'$ *la aplicación constante con* $c_{x'_0} : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *es constante.*

Proposición 1.17. *Sea* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), (X'', \mathcal{T}'')$ *e.t.,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *aplicación continua,* $f' : (X', \mathcal{T}') \to (X'', \mathcal{T}'')$ *aplicación continua. Entonces,* $(f' \circ f) : (X, \mathcal{T}) \to (X'', \mathcal{T}'')$ *es continua.*

Demostración. $\forall A'' \in \mathcal{T}'' \Rightarrow f^{-1}(A'') \in \mathcal{T}' \Rightarrow f^{-1}(f^{-1}(A'')) \in \mathcal{T}$ *y* $(f' \circ f)^{-1}(A'') = f^{-1}(f^{-1}(A''))$.

Proposición 1.18. *Sea* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t.,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *continua. Entoces,* $f|_S : (S, \mathcal{T}|_S) \to (X', \mathcal{T}')$ *es aplicación continua.*

Demostración. $\forall A' \in \mathcal{T}', (f|_S)^{-1}(A') = f^{-1}(A') \cap S \in \mathcal{T}|_S$.

Proposición 1.19. *Sea* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t.,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *continua,* $S \subset X$. *Entonces,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (f(X), \mathcal{T}'|_{f(X)})$ *es aplicación continua.*

Demostración. $\forall G' \in \mathcal{T}'|_S \Rightarrow \exists A' \in \mathcal{T}' : G' = A' \cap f(X) \Rightarrow f^{-1}(G') = f^{-1}(A' \cap f(X)) = f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$.

Proposición 1.20. *Sean* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t.,* $f : X \to X'$ *aplicación. Si* F_1, F_2 *son cerrados de* $(X, \mathcal{T})$ *tal que* $X = F_1 \cap F_2$ *y* $f|_{F_i} : (F_i, \mathcal{T}_{F_i}) \to (X', \mathcal{T}')$ *es continua. Entonces,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *es aplicación continua.*

Demostración. *$\forall F'$ cerrado de $(X', \mathcal{T}')$, $f^{-1}(F') = f^{-1}(F') \cap X = f^{-1}(F') \cap (F_1 \cup F_2) = (f^{-1}(F') \cap F_1) \cup (f^{-1}(F') \cap F_2)$ donde $(f^{-1}(F') \cap F_1) = f^{-1}|_{F_1}(F')$ cerrado en F_1 y $(f^{-1}(F') \cap F_2) = f^{-1}|_{F_2}(F')$ cerrado en $F_2 \Rightarrow f^{-1}(F')$ cerrado en $(X, \mathcal{T})$.*

Definición 1.20 (Espacio Homeomorfo)**.** *Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t. $f : X \to X'$ aplicación. Se dice que $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ es homeomorfismo si f es biyectiva y f^{-1} es continua. En este caso, se dice que $(X, \mathcal{T})$ es homeomorfo a $(X', \mathcal{T}')$.*

Observación. *Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : X \to X'$ biyectiva. Entonces, f es homeomorfismo si y solo si $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow f(A) \in \mathcal{T}'$.*

Definición 1.21 (Invariante Topológico)**.** *Sea (P) una propiedad de e.t.. Se dice que (P) es un invariante topológico si para todo e.t. que cumpla (P) todos los e.t. homeomorfos cumplen (P).*

Definición 1.22 (Aplicación Abierta)**.** *Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$. Entonces, f es aplicación abierta si $\forall A \in \mathcal{T}$, $f(A) \in \mathcal{T}'$*

Observación. *Una aplicación es cerrada si $\forall C$ cerrado de $(X, \mathcal{T})$, $f(C)$ cerrado de $(X', \mathcal{T}')$.*

Observación. *No hay ninguna implicación entre aplicación continua, aplicación abiera y aplicación cerrada.*

Proposición 1.21. *Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), f : X \to X'$ aplicaciones biyectivas. Entonces, son equivalentes:*

(i) *$f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ es homeomorfismo.*

(ii) *$f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ aplicación continua y abierta.*

(iii) *$f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ aplicación continua y cerrada.*

Demostración.

($i \Rightarrow ii$) f homeomorfismo $\Rightarrow \exists f^{-1}$ aplicación continua $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, ((f^{-1})^{-1}(A) \in \mathcal{T}'$ donde $((f^{-1})^{-1}(A) = f(A) \Rightarrow f$ aplicación abierta.

(*ii* $\Rightarrow$ *i*) f *abierta y continua* $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, f(A) \in \mathcal{T}'$ *donde* $f(A) = ((f^{-1})^{-1}(A) \Rightarrow$ f^{-1} *aplicación continua.*

(*i* $\Leftrightarrow$ *iii*) *es análoga.*

1.6. Espacio Producto

Definición 1.23 (Producto Cartesiano)**.** *Sea* $\{X_j\}_{j\in J} \neq \emptyset$ *familia de conjuntos no vacios. Se llama producto castesiano de* $\{X_j\}_{j\in J}$ *a*

$$\prod_{j\in J} X_j = \{x : J \to \bigcup_{j\in J} X_j \text{ aplicación } : x_j \in X_j, \forall j \in J\}$$

Observación. $\forall j \in J, p_{j_0} : \prod_{j\in J} X_j \to X_{j_0} : x \mapsto x_{j_0}$ *se llama proyección.*

Observación. *Si* $X_j = X, \forall j \in J$ *entonces* $\prod_{j\in J} X_j = X^J = \{x : J \to X,\ x \text{ aplicación } \}$.

Definición 1.24 (Axioma Elección)**.** $\forall \{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \neq \emptyset$ *familia de conjuntos no vacios disjuntos dos a dos. Entonces,* $\exists A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda : A \cap B_\lambda$ *tiene un solo elemento.*

Definición 1.25 (Topología Producto)**.** *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_{j\in J})\}_{j\in J}$ *familia de e.t.. Se llama topología producto a la topología sobre* $\prod_{j\in J} X_j$ *generada por subbase*

$$\mathcal{S} = \{p_j^{-1}(U_j) : U_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J\}$$

Esta topología se denota $\prod_{j\in J} \mathcal{T}_j$

Observación. *El producto de abiertos no es necesesariamente abierto.*

Observación. *La base engendrada por* $\mathcal{S}$ *es*

$$\mathcal{B} = \Big\{ \bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(U_j) : U_j \in \mathcal{T}_j, F \in \mathcal{P}(J) \Big\}$$

$$= \Big\{ \prod_{j\in J} A_j : A_j \subset X_j, A_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J, \quad A_j = X_j : \forall j \in J \setminus F,\ F \text{ finito } \Big\}.$$

Observación. *Si* J *es finito, entonces* $\mathcal{B} = \Big\{ \prod_{j\in J} A_j : A_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J \Big\}$.

Observación. *El producto espacios discretos no es necesesariamente discreto.*

Observación. $\mathcal{B} = \{\prod_{j\in J} B_j : B_j \in \mathcal{T}_j\}$.

Observación. *Si* $\mathcal{B}_j$ *es base de* $(X_j, \mathcal{T}_j)$*, entonces* $\mathcal{B} = \{\prod_{j\in J} B_j : B_j \in \mathcal{B}_j\}$ *es base de* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$.

Proposición 1.22. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia finita de e.t.. Entonces,* $\forall j_0 \in J$,

$$p_{j_0} : (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \to (X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0})$$

es aplicación abierta y continua.

Demostración. $\forall A \in \prod_{j\in J} A_j, A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda : B_\lambda \in \mathcal{B}$ *donde* $\mathcal{B}$ *es subbase de* $\prod_{j\in J} \mathcal{T}_j$, $B_\lambda = \{\prod_{j\in J} U_{\lambda j} : U_{\lambda j} \in \mathcal{T}_j, U_{\lambda j} = X_j, \forall j \in J \setminus F : F$ *finito* $\}$. *Entonces,* $p_{j_0}(A) = p_{j_0}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} p_{j_0}(B_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_{\lambda j} \in \mathcal{T}_j \Rightarrow$ *abierto.*

Proposición 1.23. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia no vacia de e.t.. Entonces, la topología producto es la más débil sobre* $\prod_{j\in J} X_j$ *que hace continuas a todas las proyecciones.*

Demostración. *Sea* $\mathcal{T}$ *topología sobre* $\prod_{j\in J} X_j$ *tal que* $p_{j_0} : (\prod_{j\in J} X_j, \mathcal{T}) \to (X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0})$ *es una proyección continua. Entonces,* $\forall j_0 \in J : U_{j_0} \in \mathcal{T}_{j_0}$ *se tiene* $p_0^{-1}(U_{j_0}) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ *es subbase de* $\prod_{j\in J} \mathcal{T}_j \Rightarrow \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j \subset \mathcal{T}$.

Proposición 1.24 (Propiedad Universal Topología Porducto)**.** *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia* $\neq \emptyset$ *e.t.,* $f : X \to \prod_{j\in J} X_j$ *aplicación. Entonces,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *continua* $\Leftrightarrow (p_j \circ f) : (X, \mathcal{T}) \to (X_j, \mathcal{T}_j)$ *continua.*

Demostración. *(*$\Rightarrow$*) La composición de aplicaciones continuas es continua.*

($\Leftarrow$*)* $\forall j \in J, (p_j \circ f)^{-1}(U_j) \in \mathcal{T}, \forall U_j \in \mathcal{T}_j \Rightarrow (p_j \circ f)^{-1}(U_j) = f^{-1}(p_j^{-1}(U_j)) = f^{-1}(S) \in \mathcal{T}, \forall S \in \mathcal{S} = \{p_j^{-1}(U_j) : U_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J\}$. *Entonces,* $(p_j \circ f)^{-1}$ *y* p_j *continuas* $\Rightarrow f$ *continua.*

Proposición 1.25. *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ familia e.t., $\sigma : J \to J$ aplicación biyectiva. Entonces, $(X_j, \mathcal{T}_j)$ y $(X_{\sigma(j)}, \mathcal{T}_{\sigma(j)})$ son homeomorfos.*

Demostración. *Sea $\alpha(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \to (\prod_{j\in J} X_{\sigma(j)}, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_{\sigma(j)})$: $(x_j)_{j\in J} \mapsto \alpha((x_j)_{j\in J}) = (x_{\sigma(j)})_{j\in J}$, α es biyectiva.*

(I) $(p_j \circ \alpha) = p_{\sigma(j)}$ son continuas (Propiedad Universal).

(II) $(p_j \circ \alpha)^{-1} = p_{\sigma(j)}^{-1}$ continua α^{-1} continua.

$\Rightarrow$ homeomorfa.

Observación. *El producto de homeomorfismos es homeomorfismo.*

Definición 1.26. *Sea (P) una propiedad de e.t.. Se dice que (P) es multiplicativa si para toda familia e.t. cada una cumpliendo (P), su producto topológico cumple (P).*

Proposición 1.26. *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ familia $\neq$ de e.t., $(X, \mathcal{T})$ e.t., $\forall j \in J, f_j : X \to X_j$ aplicación. Entonces, $(f_j)_{j\in J} : (X, \mathcal{T}) \to (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$: $x \mapsto (f_j)_{j\in J}(x) = (f_j(x))_{j\in J}$ es continua $\Leftrightarrow$ $f_j : (X, \mathcal{T}) \to (X_j, \mathcal{T}_j)$ es continua $\forall j \in J$.*

Demostración. $\forall j_0 \in J, (p_{j_0} \circ (f_j)_{j\in J}) = f_{j_0}$

($\Rightarrow$) composición de aplicaciones continuas es continua.

($\Leftarrow$) por la propiedad universal de la topología producto.

Observación. *El producto de funciones continuas es una función continua.*

Proposición 1.27. *Sean $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$, $\{(X'_j, \mathcal{T}'_j)\}_{j\in J}$, $\forall j \in J$, $f_j : X_j \to X'_j$ aplicación continua. Entonces, $\prod_{j\in J} f_j : (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \to (\prod_{j\in J} X'_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}'_j)$: $(x_j)_{j\in J} \mapsto (\prod_{j\in J} f_j)((x_j)_{j\in J}) = (f_j(x_j))$ aplicación continua.*

VER DIBUJO(Revisar abierta o continua)

Demostración. $\forall j_0 \in J, (p'_{j_0} \circ (\prod_{j\in J} f_j)) = (f_{j_0} \circ p_{j_0})$.

($\Rightarrow$) Propiedad Universal de Topología Porducto.

($\Leftarrow$) $\forall G'_{j_0} \in \mathcal{T}'_{j_0}$ como $\prod_{j\in J} f_j$ continua, entonces $(p_{j_0} \circ (\prod f_j))^{-1}(G_{j_0}) \in \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j$ es abierto y donde $(p_{j_0}\circ(\prod f_j))^{-1}(G_{j_0}) = (f_{j_0}\circ p_{j_0})^{-1}(G'_{j_0}) = p_{j_0}^{-1}(f_{j_0}^{-1}(G_{j_0}))$. Por ser p_{j_0} aplicación abierta y suprayectiva $p_{j_0}(p_{j_0}^{-1}(f_{j_0}^{-1}(G_{j_0}))) = f_{j_0}^{-1}((G'_{j_0})) \in \mathcal{T}_{j_0}$.

1.7. Espacio Cociente

Definición 1.27 (Topología Cociente)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $Y \neq \emptyset, f : X \to Y$. Se llama topología cociente inducida por f a $\mathcal{T}_f = \{G \subset Y : f^{-1}(G) \in \mathcal{T}\}$. El par $(X, \mathcal{T}_f)$ se llama espacio topológico cociente inducido por f.*

Definición 1.28 (Identificación)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : X \to X'$ suprayectiva. Se dice que $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ es identificación si $\mathcal{T}'$ es topología cociente inducida por f.*

Observación. *f es continua.*

Proposición 1.28. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $Y \neq \emptyset$, $f : X \to Y$ aplicación continua. La topología cociente inducida por f es la más fina de las topologías sobre Y que hacen continuas a f.*

Demostración. *Sea $\mathcal{S}$ topología sobre Y tal que $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ es continua. Entonces, $\forall A \in \mathcal{S}, f^{-1}(A) \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{S}, A \in \mathcal{T}_f \Leftrightarrow \mathcal{S} \subset \mathcal{T}_f$.*

Proposición 1.29 (Propiedad Universal Topología Cociente)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $(Z, \mathcal{S})$ e.t., $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ aplicaciones. Entonces, $g : (Y, \mathcal{T}_f) \to (Z, \mathcal{S})$ es continua $\Leftrightarrow$ $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_f)$ es continua.*

Demostración. *($\Rightarrow$) Trivial.*

($\Leftarrow$) $\forall A \in \mathcal{S}, (g\circ f)^{-1}(A) \in \mathcal{T} \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{S}, g^{-1}(A) \in$

$\mathcal{T}_f \Rightarrow g$ *continua.*

Proposición 1.30. *Sea* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$, *e.t.,* $f : X \to X'$ *aplicación. Si* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *suprayectiva, continua y abierta (resp. cerrada). Entonces,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *es identificación.*

Demostración. $\mathcal{T}_f$ *es la topología más fina que hace continua a* $f \Rightarrow \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}_f$. *Sea* $\forall A \in \mathcal{T}_f \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ *con* f *abierta* $\Rightarrow f(f^{-1}(A)) = A \in \mathcal{T}'$ *abierto* $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}_f, A \in \mathcal{T}' \Rightarrow \mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}'$. *Entonces,* $\mathcal{T}_f = \mathcal{T}'$.

Observación. *Las identificaciones no son necesariamente abierta o cerradas.*

Definición 1.29. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $\mathcal{R}$ *relación de equivalencia en* X, $p : X \to X/\mathcal{R}$ *proyección canónica. Se llama e.t. cociente de* $(X, \mathcal{T})$ *respecto a* $\mathcal{R}$ *a* $(X/\mathcal{R}, \mathcal{T}/\mathcal{R})$ *donde* $\mathcal{T}/\mathcal{R}$ *es topología cociente inducida por* p.

Proposición 1.31. *Sean* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), (X'', \mathcal{T}'')$ *e.t.,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *identificación,* $f' : (X', \mathcal{T}') \to (X'', \mathcal{T}'')$ *identificación. Entonces,* $(f' \circ f)$ *es identificación.*

REVISAR DEM

Demostración. *Sea* $(f' \circ f) : X \to X''$ *suprayectiva. Entonces,* $A'' \in \mathcal{T}'', (f'$ *identficación* $\Rightarrow \mathcal{T}'' = \mathcal{T}_f) \Leftrightarrow f'^{-1}(A'') \in \mathcal{T}' \Leftrightarrow (\mathcal{T}' = \mathcal{T}_f) f^{-1}(f'^{-1}(A'')) = (f' \circ f)^{-1}(A'') \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T}'' = \mathcal{T}_{(f' \circ f)}$

Proposición 1.32. *Sean* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t.,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *identificación. Entonces,*

(I) $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *es abierta* $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{T}, f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{T}$.

(II) $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *cerrada* $\Leftrightarrow \forall C$ *cerrado* $(X, \mathcal{T})$, $f^{-1}(f(C))$ *cerrado de* $(X, \mathcal{T})$.

Demostración.

(1) ($\Rightarrow$*)* $\forall A \in \mathcal{T} \Rightarrow f(A) \in \mathcal{T}' \Rightarrow f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{T}$.

(⇐) $\forall \in \mathcal{T}, f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{T}, f$ *identificación* $\Rightarrow f(f^{-1}(f(A))) = f(A) \in \mathcal{T}_f = \mathcal{T}' \Rightarrow f$ *aplicación abierta.*

Proposición 1.33. *Sea* $(X,\mathcal{T}),(X',\mathcal{T}'),(X'',\mathcal{T}''),(X''',\mathcal{T}'''), f:(X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *identificación,* $f':(X'',\mathcal{T}'') \to (X''',\mathcal{T}''')$ *identificación,* $g: X \to X''$ *aplicación tal que* $\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (f' \circ g)(x_1) = (f' \circ g)(x_2)$*. Entonces,*

(I) $\exists \overline{g} : X' \to X'''$ *aplicación tal que* $(\overline{g} \circ f) = (f' \circ g)$

(II) Si $g:(X,\mathcal{T}) \to (X'',\mathcal{T}'')$ *continua* $\Rightarrow \overline{g}$ *continua.*

REVISAR

Demostración.

(I) $\overline{g} : X' \to X''' : x' \mapsto \overline{g}(x'_0) = f'(g(x)),\ \forall x \in f^{-1}(X') \Rightarrow f(x) = x' \Rightarrow \overline{g}(f(x)) = (f' \circ \overline{g})(x),\ \forall x \in X \Leftrightarrow (\overline{g} \circ f) = (f' \circ g)$.

(II) $(\overline{g} \circ f) = (f' \circ g)$, $(g$ *continua* $\Rightarrow (f' \circ g)$ *continua* $)$. *Entonces, (Propiedad Universal Topología Cociente)* $\Rightarrow \overline{g}$ *continua.*

Proposición 1.34. *Sea* $(X,\mathcal{T}),(X',\mathcal{T}')$ *e.t.,* $f : X \to X'$ *aplicación suprayectiva,* R_f *relación de equivalencia tal que* $x_1, x_2 \in X, x_1 R_f x_2 \Leftrightarrow$ *(def.)*$f(x_1) = f(x_2)$*. Entonces,* $\exists \alpha : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *homeomorfa tal que* $(\alpha \circ f) = p \Leftrightarrow f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *es identificación.*

Demostración. *(⇒)* $(\alpha \circ f) = p \Rightarrow f = (\alpha^{-1} \circ p) \Rightarrow f$ *identificación.*

(⇐) Sea $\alpha : X \to X'/\mathcal{R}_f : x \mapsto \alpha(x') = [x] : x \in f^{-1}(X')$*. Esta bien definida ya que, si* $x_1, x_2 \in f^{-1}(x) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \mathcal{R}_f \Leftrightarrow [x_1] = [x_2]$*. Sea* $\varphi : X/\mathcal{R}_f \to X'/\mathcal{R}_f : [x] \mapsto \varphi/[x] = f(x)$*. Está bien definida ya que, si* $[x_1] = [x_2] \Leftrightarrow x_1 \mathcal{R} x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$*. Entonces,* $(\varphi \circ \alpha = 1_{X'}, \alpha \circ \varphi = 1_{\mathcal{R}_f}) \Rightarrow \alpha$ *inyectiva y* $\alpha^{-1} = \varphi$*. Por tanto,* $\alpha(f(f(x)) = \alpha(x') = [x]p(x), \forall x \in X \Rightarrow \alpha \circ f = p$ *continua* $\Rightarrow \alpha$ *continua.*

1.8. Espacio Suma

Definición 1.30 (Topología Suma). *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$, familia $\neq \emptyset$ de e.t.,*

$$\sum_{j\in J} X_j = \bigcup_{j\in J} X_j \times \{j\}$$

su unión disjunta. Se llama topología suma a

$$\sum_{j\in J} \mathcal{T}_k = \Big\{G \subset \sum_{j\in J} X_k : j_k^{-1}(G) \in \mathcal{T}_k, \forall k \in J\Big\}$$

El par $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$ se llama espacio topológico suma.

Observación. $\forall k_0 \in J$, $j_{k_0} : (X_{k_0}, \mathcal{T}_{k_0}) \to (X_{k_0} \times \{k_0\}, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k/(X_{k_0} \times \{k_0\}\}) : x \mapsto (x, k_0)$ es homomorfismo $j_{k_0}^{-1}(x, k_0) = x = p_1(x, k_0)$

Observación. $\forall c \subset \sum_{k\in J} X_k, j_{k_0}^{-1}(c) = p(C \cap (X_{k_0} \times \{k_0\}))$.

Proposición 1.35. *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ familia $\neq \emptyset$ e.t.. Entonces, la topología suma es la más fina de las topologías sobre $\sum_{k\in J} X_k$ que hacen continua todas las inclusiones.*

Demostración. *Sea $\mathcal{T}$ topología sobre $\sum_{j\in J} X_k$ tal que*

$$\forall k_0 \in J, j_{k_0}(X_{k_0}, \mathcal{T}_{k_0}) \hookrightarrow (\sum_{k\in J} X_k, \mathcal{T})$$

$k_0 \in J, \forall A \in \mathcal{T}, j_0^{-1}(A) \in \mathcal{T}_{k_0} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, A \in \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k \Rightarrow \mathcal{T} \subset \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k$.

Proposición 1.36 (Propiedad Universal Universal Topología Suma). *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$, $(X, \mathcal{T})$ e.t., $f : (\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k) \to (X, \mathcal{T})$ aplicación continua $\Leftrightarrow \forall k_0 \in J, f \circ j_{k_0} : (X_{k_0}, \mathcal{T}_{k_0}) \to (X, \mathcal{T})$ es continua.*

Demostración. *($\Rightarrow$) Trivial*

($\Leftarrow$) $\forall k_0 \in J, f \circ j_{k_0}$ *continua* $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, \forall k_0 \in J, (f \circ j_k)^{-1}(A) = j_{k_0}^{-1}(f^{-1}(A)) \in \mathcal{T}_{k_0} \Rightarrow f^{-1}(A) \in \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k \Rightarrow f$ *continua.*

Definición 1.31. *Sea* (P) *propiedad de e.t.. Se dice que es aditiva si para toda familia de e.t. cada uno cumpliendo* (P)*, la suma cumple* (P)*.*

Capítulo 2

Propiedades de Separación

2.1. Espacio Hausdorff

Definición 2.1 (T_0)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Se dice que es* T_0 *si* $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x : y \notin \mathcal{U}^x$ *ó* $\exists \mathcal{U}^y : x \notin \mathcal{U}^y$.

Ejemplo. *Sea* $\mathcal{R}$ *una relación en* X *tal que* $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$*. Entonces,* $\mathcal{R}$ *es una relación de equivalencia en* X *y el espacio cociente resultante* $(X/R, \mathcal{T}/R)$ *es* T_0.

Observación. *Los subespacios o espacios productos genereados a partir de espacios* T_0 *son también* T_0*, pero los espacios cocientes no lo son necesariamente.*

Definición 2.2 (T_1)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Se dice que es* T_1 *si* $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x : y \notin \mathcal{U}^x, \exists \mathcal{U}^y : x \notin \mathcal{U}^y$.

Observación. $(X, \mathcal{T})$ *es* T_1 *si y solo si* $\forall x, y \in X : x \neq y$ *existe un entorno de cada uno que no contiene al otro.*

Observación. $T_1 \Rightarrow T_0$

Observación. $T_0 \not\Rightarrow T_1$*, ej.:* $X = \{a, b\}$*,* $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ *es* T_0*, no* T_1

Proposición 2.1. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. son equivalentes*

(I) $(X, \mathcal{T})$ *es* T_1,

(II) $\forall x \in X, \{x\}$ *es cerrado de* $(X, \mathcal{T})$,

(III) $\forall E \subset X, E = \bigcap_{G \in \mathcal{T} : E \subset G} G$.

Demostración.

($a \Rightarrow b$) *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.* $T_1, x \in X$ *entonces,* $\forall y \neq x, \exists \mathcal{U}^y : \mathcal{U}^y \subset X \setminus \{x\} \Rightarrow X \setminus \{x\} \in \mathcal{T} \Rightarrow \{x\}$ *es cerrado de* $(X, \mathcal{T})$.

(I) $A \subset X \Rightarrow A = \bigcap_{x \in X \setminus A} X \setminus \{x\} \Rightarrow A \subset \bigcap_{G \in \mathcal{T} A \subset G} G \subset \bigcap_{x \in X \setminus A} (X \setminus \{x\}) = A$.

(II) $\forall x, y \in X : x \neq y$, $\{x\} = \bigcap_{G \in \mathcal{T}; \{x\} \subset G} G \Rightarrow \exists \mathcal{G}^x \in \mathcal{T} : y \in \mathcal{G}^x \Rightarrow T_1$.

Definición 2.3 (T_2)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Se dice que es* T_2 *ó de Hausdorff si* $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x : x \in \mathcal{U}^x, \exists \mathcal{U}^y : y \in \mathcal{U}^y$ *tal que* $\mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y = \emptyset$.

Observación. $T_2 \Rightarrow T_1$.

Proposición 2.2. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Entonces,* $(X, \mathcal{T})$ *es* T_2 *si y solo si* $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ *es cerrado en* $(X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T})$.

Demostración. *Probamos que* $\Delta^c \in \mathcal{T}$.

($\Rightarrow$) $\forall (x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$, $x \neq y \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^y : \mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y = \emptyset \Rightarrow$. *¿*$\mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y$ *entorno de* $(x, y) : \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y \subset (X \times X) \setminus \Delta$*? Si* $\exists (z, z) \in \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y \Rightarrow z \in \mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y = \emptyset$ *es absurdo. Entonces,* $(X \times X) \setminus \Delta \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} \Leftrightarrow \Delta$ *es cerrado de* $(X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$.

($\Leftarrow$) $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow (x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^y : \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y \subset (X \times X) \setminus \Delta \Rightarrow \mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y = \emptyset$. *En caso contrario,* $\exists z \in \mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y \Rightarrow (z, z) \in \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y$ *es absurdo. Entonces,* $(X, \mathcal{T})$ *es* T_2.

Corolario 2.0.1. *Sean* $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ *e.t.,* $(Y, \mathcal{S})$ *es* T_2, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ *aplicación. Entonces,* $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ *es cerrado en* $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{S})$.

Demostración. Y *es* $T_2 \Rightarrow \Delta_Y$ *es cerrado en* $Y \times Y$, f *continua* $\Rightarrow f \times 1_Y : (X, \mathcal{T}) \times (Y, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{S}) \times (Y, \mathcal{S})$ *continua* $\Rightarrow (f \times 1_Y)^{-1}(\Delta_Y) = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = y\}$ *es cerrado.*

Proposición 2.3. *Sean* $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ *e.t.,* $(Y,\mathcal{S})$ *es* T_2*,* $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{S})$ *continua. Entonces,* $E=\{(x_1,x_2)\in X\times X : f(x_1)=f(x_2)\}$ *es cerrado en* $(X\times X,\mathcal{T}\times\mathcal{T})$

Demostración. $\forall(x_1,x_2)\subset(X\times X)\setminus E$, $f(x_1)\neq f(x_2)\Rightarrow\exists\mathcal{V}^{f(x_i)}, i\in\{1,2\}$ *entorno de* x_i*, por ser* Y T_2*. Como* f *es continua* $\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_i)})$ *entorno de* $x_i\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_1)})\times f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_i)})$ *entorono de* (x_1,x_2) *en* $(X\times X,\mathcal{T}\times\mathcal{T})$*. Veamos que* $f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_1)})\times f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_i)})\subset(X\times X)\setminus E$*. Si* $(z_1,z_2)\in E,(z_1,z_2)\in f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_1)})\times f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_2)})\Rightarrow f(z_1)=f(z_2)$ *donde* $f(z_1)\in\mathcal{V}^{f(x_1)}$ *y* $f(z_2)\in\mathcal{V}^{f(x_2)}$ *que es absurdo.*

Proposición 2.4. *Sean* $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ *e.t.,* $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{S})$ *aplicación suparyectiva y abierta. Si* $(X,\mathcal{T})$ *es* T_2 *entonces,* $(Y,\mathcal{S})$ *es* T_2*.*

Demostración. $\forall y_1,y_2\in Y : y_1\neq y_2\Rightarrow(f$ *supra*$)$ $\exists x_i\in X, i\in\{1,2\} : f(x_i)=y_i\Rightarrow(x_1,x_2)\in(X\times X)\setminus E\Rightarrow($ *hip.*$)$ $\exists\mathcal{U}^{x_i}, i\in\{1,2\} : \mathcal{U}^{x_1}\times\mathcal{U}^{x_2}\subset(X\times X)\setminus E\Rightarrow(f$ *ab.*$)$ $f(\mathcal{U}^{x_i}), i\in\{1,2\}$ *entorno de* y_i*. ¿Son disjuntos? Si* $\exists z\in f(\mathcal{U}^{x_1})\cap f(\mathcal{U}^{x_2})\Rightarrow z=f(t_i) : t_i\in\mathcal{U}^{x_i}, i\in\{1,2\}\Rightarrow(t_1,t_2)\in E$ *y* $(t_1,t_2)\in(\mathcal{U}^{x_1}\times\mathcal{U}^{x_2})$ *que es absurdo.*

Proposición 2.5. *Sean* $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ *e.t.,* $(Y,\mathcal{S})$ *es* T_2*,* $f,g:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{S})$ *aplicaciones continuas. Entonces,* $\{x\in X : f(x)=g(x)\}$ *es cerrado en* $(X,\mathcal{T})$*.*

Demostración. *Sea* $f\times g:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{S})\times(Y,\mathcal{S})$ *continua. Entonces,* Y *es* $T_2\Leftrightarrow\Delta_Y$ *es cerrado* $\Rightarrow(f\times g)^{-1}(\Delta_Y)$ *cerrado en* $(X,\mathcal{T})$ *donde* $(f\times g)^{-1}(\Delta_Y)=\{x\in X : f(x)=g(x)\}$*.*

Corolario 2.0.2. *Sean* $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ *e.t.,* $(Y,\mathcal{S})$ *es* T_2*,* $f,g:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{S})$ *aplicación continua. Si* $\exists D$ *denso en* $(X,\mathcal{T})$ *tal que* $f|_D=g|_D\Rightarrow f=g$*.*

Demostración. $f|_D = g|_D \Rightarrow D \subset \{x \in X : f(x) = g(x)\} = \mathcal{C} \Rightarrow \overline{D} \subset \overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$ *donde* $\overline{D} = X \Rightarrow X = \mathcal{C} \Leftrightarrow f = g$.

Observación. T_0, T_1, T_2 *son invariantes topológicos.*

Proposición 2.6. *Todo subespacio de e.t.* T_2 *es* T_2.

Demostración. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ T_2, $E \subset X$. *Entonces,* $\forall x_1, x_2 \in E \subset X$: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists \mathcal{U}^{x_1}, \mathcal{U}^{x_2}$ *entornos de* x_1, x_2 *en* $(X, \mathcal{T})$ *disjuntos* $\Rightarrow \mathcal{U}^{x_1} \cap E, \mathcal{U}^{x_2} \cap E$ *entorno en* $(E, \mathcal{T}|_E)$ *disjuntos.*

Proposición 2.7. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia de e.t.. Entonces,* $(\sum_{j\in J} X_j, \sum_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *es* $T_2 \Leftrightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$ *es* T_2, $\forall j \in J$.

Demostración. *(*$\Rightarrow$*)* $\forall j \in J, \forall (a_j)_{j\in J} \in \sum_{j\in J} X_j, \{(x_j)_{j\in J} \in \sum_{j\in J} X_j : x_j = a_j, \forall j \in J \backslash \{0\}\} \subset \sum_{j\in J} X_j$ *es homeomorfo a* $X_{j_0} \times \{(a_j)_{j\in J\backslash 0}\}$ *que es homeomorfoa a* $X_{j_0} \times \sum_{j\in J\backslash\{0\}} \{a_j\}$.

($\Leftarrow$*)* $\forall x, y \in \sum_{j\in J} X_j : x \neq y$, *entonces se dan dos posibilidades. Si* $\exists j_1, j_2 \in J : x \in X_{j_1} \times \{j_1\}, y \in X_{j_2} \times \{j_2\}$, *entonces* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *es* T_2. *Y si* $\exists! j_0 \in J : x, y \in X_{j_0} \times \{j_0\}$ *homeomorfo a* X_{j_0} *que es* $T_2 \Rightarrow p_1(x), p_1(y) \in X_{j_0} \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x : p_1(x) \in \S^x, \exists \mathcal{U}^y : p_1(y) \in \mathcal{U}^y$ *abiertos de* $\sum_{j\in J} \mathcal{T}_j \Rightarrow \mathcal{U}^x \times \{j_0\}, \mathcal{U}^y \times \{j_0\}$ *en* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k) \Rightarrow$ *es* T_2.

Proposición 2.8. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia de e.t.. Entonces,* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *es* $T_2 \Leftrightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$ *es* T_2, $j \in J$.

Demostración. *(*$\Rightarrow$*) Sea* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *espacio* T_2. *Entonces,* $\forall j \in J, b_j \in X_j \Rightarrow$ *el subespacio* $\mathcal{S}_j = \{x \in \prod_{j\in J} X_j : x_{j_0} = b_{j_0}, \forall j \neq j_0\}$ *es* T_2 *y es homeomorfo a* X_j *bajo la restricción de* $\mathcal{S}_j$ *a la proyeción* $p_j \Rightarrow X_j$ *es* $T_2, \forall j \in J$.

($\Leftarrow$*) Sea* $(X_j, \mathcal{T}_j)$ *e.t.* T_2, $\forall j \in J$. *Entonces,* $\forall x, y \in \prod_{j\in J} X_j : x \neq y \Rightarrow \exists j_0 \in J : x_{j_0} \neq y_{j_0} \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x_{j_0}, \mathcal{U}^y_{j_0}$ *entornos disjuntos de* x_{j_0} *e* y_{j_0} *en* $(X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0}) \Rightarrow p_{j_0^{-1}(\mathcal{U}^x_{j_0})}, p_{j_0^{-1}(\mathcal{U}^y_{j_0})}$ *entornos disjuntos de* x *e* y *en*

$(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \Rightarrow (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *es* T_2.

Observación. *El cociente de un e.t.* T_2 *no es necesariamente* T_2.

2.2. Espacio Regular

Definición 2.4 (Espacio Regular)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. Diremos que es regular si* $\forall C$ *cerrado de* $(X, \mathcal{T})$, $\forall x \in X : x \notin C, \exists U, V \in \mathcal{T}$ *disjuntos tal que* $x \in U, C \subset V$. *Diremos que es* T_3 *si es regular y* T_0.

Observación. *Regular y* $T_0 \Leftrightarrow$ *regular y* $T_1 \Leftrightarrow$ *regular y* T_2.

Demostración. *(*$\Rightarrow$*)* $(X, \mathcal{T})$ *regular y* $T_0 \Rightarrow \forall x, y \in X : x \neq y$, $\exists \mathcal{U}^x \in \mathcal{T} : y \in \mathcal{U}^x \Rightarrow X \setminus \mathcal{U}^x$ *es cerrado* $\Rightarrow \exists V_i \in \mathcal{T}, i \in \{1, 2\}$ *disjuntos tal que* $x \in V_1, y \in X \setminus \mathcal{U}^x \subset V_2 \Rightarrow$ *es* T_2.

($\Leftarrow$*) Trivial.*

Observación. $T_3 \Rightarrow T_2$.

Observación. *Regular* $\not\Rightarrow T_0$.

Proposición 2.9. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Entonces, son equivalentes*

(I) $(X, \mathcal{T})$ *regular*

(II) $\forall x \in X : \forall U \in \mathcal{T} : x \in U, \exists V \in \mathcal{T} : x \in V \subset \overline{V} \subset U$.

(III) $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}$ *base de entornos de* x *cerrados en* $(X, \mathcal{T})$.

Demostración.

(i $\Rightarrow$ *ii)* $x \in U \in \mathcal{T} \Rightarrow x \notin X \setminus U$ *cerrado* $\Rightarrow \exists V_i \in \mathcal{T}, i \in \{1, 2\} : X \setminus U \subset V_2 \Rightarrow V_1 \subset X \setminus V_2$ *cerrado* $\Rightarrow \overline{V_1} \subset X \setminus V_2 \Rightarrow x \in V_1 \subset \overline{V_1} X \setminus V_2 \subset U$.

(ii $\Rightarrow$ *iii)* $\forall x \in X, \{\overline{V} : V \in \mathcal{T}, x \in V\}$ *es base de entornos cerrados* $\Rightarrow \forall \mathcal{U}^x, x \in \mathring{\mathcal{U}}^x \Rightarrow \exists V \in \mathcal{T} : x \in V \subset \overline{V} \subset \mathring{\mathcal{U}}^x \subset \mathcal{U}^x$.

(iii $\Rightarrow$ *i)* $x \notin C$ *cerrado* $\Rightarrow x \in X \setminus C \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists V$ *entorno cerrado de* $x : V \subset X \setminus C \Rightarrow x \in \mathring{V} \in \mathcal{T}$ *y* $C \subset X \setminus V$ *disjuntos.*

Observación. *La regularidad (y ser* T_3*) son invariantes topológicos.*

Proposición 2.10. *Todo subespacio de uno regular (T_3) es regular (T_3).*

Demostración. $(X,\mathcal{T})$ *regular* $E \subset X, \forall C$ *cerrado de* $(E, \mathcal{T}|_E)$, $\forall x \in E$: $x \notin C \Rightarrow \exists F$ *cerrado de* $(X,\mathcal{T})$ *tal que* $C = F \cap E \Rightarrow x \notin F \Rightarrow \exists U, V \in T$ *disjuntos tal que* $x \in U, F \subset V \Rightarrow U \cap E, V \cap E \in \mathcal{T}|_E$ *disjuntos tal que* $x \in U \cap E, C \subset V \cap E$.

Proposición 2.11. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ *familia de e.t.. Entonces* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *es regular (T_3)* $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ *es regular* (T_3).

Demostración. *($\Rightarrow$) Trivial*

($\Leftarrow$) $\forall x = (x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} X_j$, $\forall \mathcal{U}^x$ *entorno de* $x \Rightarrow \exists B \subset \mathcal{B}$ *base de* $\prod_{j\in J} \mathcal{T}_j$ *tal que* $x \in B \subset \mathcal{U}^x, B = \bigcap_{k=1}^n p_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$ *donde* $U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}$. *Entonces,* $x \in B \Rightarrow x_{j_k} \in U_{j_k}, \forall k \in \{1, \cdots, n\} \Rightarrow \exists \mathcal{V}^{x_{j_k}}$ *entorno cerrado de* $x_{j_k}, \forall k \in \{1, \cdots, n\}$ *tal que* $\mathcal{V}^{x_{j_k}} \subset U_{j_k} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n p_{j_k}^{-1}(\mathcal{V}^{x_{j_k}}) \subset B \subset \mathcal{U}^x$ *entorno cerrado de* x, *que es la caracterización antrior de regular.*

Proposición 2.12. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ *familia de e.t.. Entonces,* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$ *es regular* (T_3) $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ *regular* (T_3).

Demostración. *($\Rightarrow$)* $\forall j_0 \in J, X_{j_0}$ *es homeomorfo a* $X_{j_0} \times \{j_0\} \subset \sum_{j\in J} X_j$.

($\Leftarrow$) $\forall x \in \sum_{j\in J} X_j \Rightarrow$ (*por ser unión disjunta*)$\exists ! j_0 \in J : x \in X_{j_0} \times \{x_{j_0}\}$ *que es homeomorfo a* X_{j_0}.

Observación. *El coiente e.t. T_3 no es necesariamente regular.*
Ejemplo. *pg. 50*

2.3. Espacio Completamente Regular

Definición 2.5 (Completamente Regular)**.** *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *e.t.. Diremos que* $(X,\mathcal{T})$ *es completamente regular si* $\forall x \in X, \forall C$ *cerrado de* $(X,\mathcal{T})$, $x \notin$

$C, \exists f : (X, \mathcal{T}) \to [0,1]$ *continua,* $f(x) = 0, f(C) = \{1\}$. *Diremos que es* T_{3a} *si es completamente regular y* T_1

Observación. $(X, \mathcal{T})$ *es completamente regular* $\Leftrightarrow \forall C$ *cerrado,* $\forall x \notin C, \exists g : (X, \mathcal{T}) \to [0,1]$ *continua tal que* $f(x) = 1, g(C) = \{C\}$.

Observación. *completamente regular* $\Rightarrow$ *regular.*

Observación. $T_3 \not\Rightarrow T_{3a}$.

Proposición 2.13. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. metrizable. Entonces,* $(X, \mathcal{T})$ *es* T_{3a}.

Demostración. $(X, \mathcal{T})$ *es* T_2 *y* $\exists d$ *métrica tal que* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. *Entonces,* $\forall C$ *cerrado de* $\mathcal{T}$, $\forall x \in X : x \notin C \Rightarrow d(x, C) > 0$. *Sea* $g : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R} : z \mapsto g(z) = \frac{d(z,C)}{d(x,C)} \Rightarrow g$ *es continua y*

$$g = \begin{cases} 1, & \text{si } z = x, \\ \{0\}, & \text{si } z = C \end{cases}$$

la imagen de g *es un subconjunto de las semirectas derechas. Sea* $f : (X, \mathcal{T}) \to [0,1] : z \mapsto f(z) = \min\{g(z), 1\}$ *entonces,*

$$f = \begin{cases} 1, & \text{si } z = x, \\ \{0\} & \text{si } z = C \end{cases}$$

$\Rightarrow (X, \mathcal{T})$ *es* $\mathcal{T}_{3a}$.

Observación. *Ser completamente regular* (T_{3a}) *es un invariante topológico.*

Proposición 2.14. *Todo subespacio de un espacio completamente regular* (T_{3a}) *es completamente regular* (T_{3a}).

Demostración. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *completamente regular,* $E \subset X$, $E \neq \emptyset$. *Entonces,* $\forall C$ *cerrado de* $(E, \mathcal{T}|_E)$, $\forall x \in E : x \notin C \Rightarrow \exists F \neq \emptyset$ *cerrado de* $(X, \mathcal{T}) : C = F \cap E \Rightarrow f : (X, \mathcal{T}) \to [0,1]$ *tal que*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in X, \\ \{1\} & \text{si } x = F \end{cases}$$

$\Rightarrow f|_E : (E, \mathcal{T}|_E) \to [0,1]$ *es continua tal que*

$$f|_E = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in X, \\ \{1\} & \text{si } x = C \end{cases}$$

$\Rightarrow$ *completamente regular.*

Proposición 2.15. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia de e.t.. Entonces,* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *es completamente regular* (T_{3a}) *si y solo si* $(X_j, \mathcal{T}_j)$ *es completamente regular* $(T_{3a}), \forall j \in J$.

Demostración. *(*$\Rightarrow$*) Trivial.*

($\Leftarrow$*)* $\forall C$ *cerrado de* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$, $\forall x = (x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} x_j \setminus C \in \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$ *base de* $\prod_{j\in J} \mathcal{T}_j$ *tal que* $x \in B \subset \prod_{j\in J} X_j \setminus C, B = \bigcap_{k=1}^{\infty} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k}), U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}, \forall k \in \{1, \cdots, n\}$. *(hip.)* $\Rightarrow \forall k \in \{1, \cdots, n\}, \exists f_k : (X_{j_k}, \mathcal{T}_{j_k}) \to [0,1]$ *continua* $\Rightarrow f_k(x_{j_k}) = 0, f_k(X_{j_k} \setminus U_{j_k}) = \{1\}$. *Sea* $f : (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \to [0,1]$ *tal que* $\forall z \in \prod_{j\in J} X_j, f(z) := \text{máx}\{\}$ *es continua dado que el máximo de funciones continuas es continuo* $\Rightarrow f(x) = 0$ *y si* $\forall z \in C \Rightarrow \in B \Rightarrow_o \in \{1, \cdots, n\} : z_{j_{k_0}} \notin U_{j_{k_0}} \Rightarrow f_{k_0}(z_{j_{k_0}}) = 1 \Rightarrow f(z) = 1 \Rightarrow f(C) = \{1\}$.

Proposición 2.16. *Sea* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$ *familia de e.t.. Entonces,* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$ *es completamente regular* (T_{3a}) *si y solo si* $(X_j, \mathcal{T}_j)$ *es completamente regular* $(T_{3a}), \forall j \in J$.

Demostración. *pág. 54*

Observación. *El cociente de e.t. es* T_{3a} *no es completamente regular.*

2.4. Espacios Normales

Definición 2.6 (Normal)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Decimos que es normal si* $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos* $\exists G_i, i \in \{1,2\}$ *abiertos disjuntos tal que* $C_i \subset G_i$. *Deci-*

mos que es T_4 si es normal y T_1.

Proposición 2.17. *Todo e.t. metrizable es T_4.*

Demostración. $(X, \mathcal{T})$ *e.t. metrizable* $\Rightarrow \exists d$ *métrica de* $(X, \mathcal{T})$ *tal que* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d \Rightarrow \mathcal{T}$ *es* T_2. *Entonces,* $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos de* $(X, \mathcal{T})$ *se pueden dar dos caos*

- *Si* $C_1 = \emptyset$, *sea* $G_1 = \emptyset, G_2 = X$. *Entonces,* $(X, \mathcal{T})$ *es* T_4.
- *Si* $C_1, C_2 \neq \emptyset \Rightarrow \forall x \in C_1, \exists \epsilon_x > 0 : B_{\epsilon_x}(x) \cap C_2 = \emptyset$ *y* $\forall y \in C_2, \exists \delta_y : B_{\delta_y}(y) \cap C_1 = \emptyset \Rightarrow C_1 \subset \bigcup_{x \in C_1} B_{\epsilon_{\frac{x}{3}}}(x) := G_1 \in \mathcal{T}$ *y* $C_1 \subset \bigcup_{x \in C_2} B_{\delta_{\frac{y}{3}}}(y) := G_2 \in \mathcal{T}$. *En caso contrario,* $\exists z \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow \exists x_0 \in C_1 : z \in B_{\epsilon_{\frac{x_0}{3}}}(x_0)$ *y* $\exists y_0 \in C_1 : z \in B_{\delta_{\frac{y_0}{3}}}(y_0)$. *Suponemos que* $\delta_{y_0} \leq \epsilon_{x_0}$, *entonces* $d(x_0, y_0) \leq d(x_0, z) + d(z, y_0) <= \frac{\epsilon_{x_0}}{3} + \frac{\delta_{y_0}}{3} \leq \frac{2}{3}\epsilon_{x_0} \Rightarrow y_0 \in B_{\epsilon_{x_0}}, y_0 \in C_2$ *absurdo.*

Proposición 2.18. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Entonces, son equivalentes*

(I) $(X, \mathcal{T})$ *es normal.*

(II) $\forall C$ *cerrado,* $\forall U \in \mathcal{T} : C \subset U, \exists V \in \mathcal{T} : C \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

(III) $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos,* $\exists G_1 \in \mathcal{T} : C_1 \subset G_1 : \overline{G_1} \cap C_2 = \emptyset$.

(IV) $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos* $\exists G_i \in \mathcal{T} : \overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \emptyset$ *y* $C_i \subset G_i, i \in \{1, 2\}$

Demostración.

$(a \Rightarrow b)$ *Sea* $C \subset U \in \mathcal{T} : C$ *y* $X \setminus U$ *son cerrados disjuntos. Entonces,* $(X, \mathcal{T})$ *normal* $\Rightarrow \exists V_i, i \in \{1, 2\}$ *disjuntos tal que* $C \subset V_1$ *y* $X \setminus U \subset V_2$ *disjuntos* $\Rightarrow V_1 \subset X \setminus V_2 \Rightarrow \overline{V_1} \subset X \setminus V_2$ *cerrado* $\Rightarrow C \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset X \setminus V_2 \subset U$.

$(b \Rightarrow c)$ C_1, C_2 *cerrados disjuntos* $\Rightarrow C_1 \subset X \setminus C_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists G_1 \in \mathcal{T} : C_1 \subset G_1 \subset \overline{G_1} \subset X \setminus G_2 \Rightarrow \overline{G_1} \cap C_2 = \emptyset$.

$(c \Rightarrow d)$ $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos* $\Rightarrow \exists G_1 \in \mathcal{T} : C_1 \subset G_1, \overline{G_1} \cap C_2 = \emptyset$ *y* $\exists G_2 \in \mathcal{T} : C_2 \subset G_2 : \overline{G_2} \cap \overline{C_2} = \emptyset$.

($d \Rightarrow a$) $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos* $\exists G_1, G_2 \in \mathcal{T} : \overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \emptyset$, $C_1 \subset G_1, C_2 \subset G_2$ *donde* $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \emptyset \Rightarrow G_1 \cap G_2 = \emptyset \Rightarrow$ *normal.*

Lema 2.0.1 (Jones). *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Si* $\exists D$ *denso en* $(X, \mathcal{T})$, E *cerrado en* $(X, \mathcal{T})$ *tal que* $(E, \mathcal{T}|_E)$ *es discreto y* $\operatorname{card}(E) \geq 2^{\operatorname{card}(D)}$. *Entonces,* $(X, \mathcal{T})$ *no es normal.*

Demostración. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *normal,* $\forall C \subset E, C$ *y* $E \setminus C$ *son disjuntos y cerrados en* $(E, \mathcal{T}|_E)$ *y en* $(X, \mathcal{T})$ *que es normal. Entonces,* $\exists U_C, V_C \in \mathcal{T} : C \subset U_C, E \setminus C \subset V_C$. *Ahora, sea* $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(D) : c \mapsto f(c) = U_C \cap D$ *aplicación. Veamos que* f *es inyectiva,* $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{P}(E) : C_1 \neq C_2 \Rightarrow \exists x \in C_1 : x \notin C_2 \Rightarrow C_i \subset U_{C_i}, E \setminus C_i \subset V_{C_i}, i \in \{1, 2\} \Rightarrow x \in U_{C_1} \cap V_{C_2} \in \mathcal{T} \Rightarrow$ (D *denso*)$y \in U_{C_1} \cap V_{C_2} \cap D \neq \emptyset \Rightarrow$

$$\begin{cases} y \in U_{C_1} \cap D = f(C_1) \\ y \notin U_{C_2} \cap D = f(C_2) \end{cases}$$

$\Rightarrow f(C_1) \neq f(C_2) \Rightarrow \operatorname{card}(E) < \operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) \leq \operatorname{card}(\mathcal{P}(D)) = 2^{\operatorname{card}(D)}$

Proposición 2.19. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. normal* (T_4), $E \subset X$, E *cerrado en* $(X, \mathcal{T})$. *Entonces,* $(E, \mathcal{T}|_E)$ *es normal* (T_4).

Demostración. $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos en* $(E, \mathcal{T}|_E)$. *Entonces,* C_1, C_2 *cerrados disjuntos de* $(X, \mathcal{T})$ *que es normal* $\Rightarrow \exists U_i \in \mathcal{T}$ *disjuntos tal que* $C_i \subset U_i, i \in \{1, 2\} \Rightarrow U_i \cap E \in \mathcal{T}|_E$ *disjuntos tal que* $C_i \subset U_i \cap E, i \in \{1, 2\}$.

Observación. *El producto de e.t. normales no es necesariamente normal.*

Proposición 2.20. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ *familia de e.t.. Entonces,* $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ *es normal* $(T_4) \Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ *es normal* (T_4).

Demostración. ($\Rightarrow$) $\forall j_0 \in J, X_{j_0} \simeq X_{j_0} \times \{j_0\} \subset \sum_{j \in J} X_j$ *es cerrado.*

($\Leftarrow$) $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos de* $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k) \Rightarrow \forall k \in J, j_k^{-1}(C_1), j_k^{-1}(C_2)$ *cerrados disjuntos de* $(X_k, \mathcal{T}_k)$ *que es normal* $\Rightarrow \forall j \in J, \exists U_{k,1}, U_{k,2} \in \mathcal{T}_k$ *disjuntos tal que* $j_k^{-1}(C_i) \subset U_{k,i} \in \mathcal{T}_k, i \in \{1, 2\}$. *Entonces,* $U_1 = \bigcup_{k \in J} U_{k,1} \times \{k\}, \bigcup_{k \in J} U_{k,1} \times \{k\} \in \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k$ *son abiertos dis-*

juntos y $C_1 \subset U_1, C_2 \subset U_2$.

Proposición 2.21. *Sea* $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ *e.t. tal que* $(X, \mathcal{T})$ *es normal,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ *suprayectiva, continua y cerrada. Entonces,* $(Y, \mathcal{S})$ *es normal* (T_4).

Demostración. $\forall C_1, C_2$ *cerrado disjunto* $(Y, \mathcal{T}) \Rightarrow f^{-1}(C_1), f^{-1}(C_2)$ *cerrados disjuntos de* $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow \exists U_i \in \mathcal{T}$ *disjuntos tal que* $f^{-1}(C_i) \subset U_i, i \in \{1,2\} \Rightarrow (f$ *cerrada* $) V_i = Y \setminus f(X \setminus U_i) \in \mathcal{S}, i \in \{1,2\}$

$$\Rightarrow V_1 \cap V_2 = (Y \setminus f(X \setminus U_1)) \cap (Y \setminus f(X \setminus U_2))$$

$$= (Y \setminus (f(X \setminus U_1) \cup f(X \setminus U_2)))$$
$$= Y \setminus f(X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2)$$
$$= Y \setminus f(X \setminus (U_1 \cap U_2))$$
$$Y \setminus f(X) = Y \setminus Y = \emptyset$$

$\Rightarrow$ *disjuntos.*

¿$C_i \subset X \setminus f(X \setminus U_i)$*?* $\forall y \in C_i \Rightarrow f^{-1}(y) \subset f^{-1}(C_i) \subset U_i \Rightarrow X \setminus U_i \subset X \setminus f^{-1}(y) \Rightarrow f(X \setminus U_i) \subset f(X \setminus f^{-1}(y)) \Rightarrow z \in Y \setminus f(X \setminus f^{-1}(y)) \subset Y \setminus f(X \setminus U_i) = V_i \Rightarrow z \notin f(X \setminus f^{-1}(y)) \Rightarrow z = f(x') : x' \in X \setminus f^{-1}(y) \Rightarrow x' \in f^{-1}(y) \Rightarrow f(x') = y \Rightarrow z = y \Rightarrow \forall y \in C_i, y \in V_i$.

Para ver que es T_4*:* $(X, \mathcal{T})$ *es* T_4, $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y \Rightarrow (T_1)$ $\{x\}$ *cerrado* $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow$ $(f$ *cerrada* $)$ $f(\{x\})$ *es cerrado en* $(Y, \mathcal{S})$ *y* $f(\{x\}) = \{y\}$.

Lema 2.0.2 (Urysohn)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Entonces,* $(X, \mathcal{T})$ *normal* $\Leftrightarrow \forall C_1, C_2$ *cerrado disjunto,* $\exists f : (X, \mathcal{T}) \to [0,1]$ *continua tal que* $f(C_1) = \{0\}, f(C_2) = \{1\}$.

Demostración. *(*$\Rightarrow$*) Sea*

$$J = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} J_n,\ J_n = \{\frac{k}{2^n} : k \in \{0, 1, \cdots, 2^n\}\}$$

Entonces, $\forall r \in J, \exists M_r \subset X$ *tal que*

a) $M_0 = C_1, M_1 = X \setminus C_2$

b) $\forall r, r' \in J, r < r' \Rightarrow \overline{M}_r \subset \mathring{M}_r$

Hacemos la demostración por inducción.

Sea $n = 0 \Rightarrow J_0 = \{0, 1\} \Rightarrow M_0 = C_1, M_1 = X \setminus C_2 \Rightarrow \overline{M_0} = \overline{C_1} = C_1 \subset X \setminus C_2 = M_1 = \mathring{M}_1$.

Suponemos que es cierto para $m = p$. *Veamos que se cumple para* $m = p + 1$.

Si $m = p+1$, *entonces* $\forall r \in J, r = \frac{k}{2^{p+1}}$. *Distinguimos* k *par e impar.*

- *Si* k *par, entonces* $k = 2k', k' \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow r = \frac{2k'}{2^{p+1}} = \frac{k'}{2^p} \in J_p \Rightarrow \exists U_r$ *tal que cumple* (a) *y* (b).
- *Si* k *es impar* $\Rightarrow s = \frac{k-1}{2^{p+1}}, t = \frac{k+1}{2^{p+1}} \in J_p \Rightarrow \exists M_s, M_t$ *tal que cumplen* (a) *y* (b) *dado que* $s < t, \overline{M}_s \subset \mathring{M}_t$ *y como* $(X, \mathcal{T})$ *es normal* $\Rightarrow \exists M_r \in \mathcal{T} : \overline{M_s} \subset M_r \subset \overline{M}_r \subset \mathring{M}_t$.

Sea $f : X \to [0, 1]$ *tal que*

$$f(x) = \begin{cases} \text{ínf}\{r \in J : x \in \overline{M}_r\}, \text{ si } x \notin C_2 \ (\Leftrightarrow x \in M_1) \\ 1, \text{ si } x \in C_2 \end{cases}$$

entonces, $f(C_2) = \{1\}$ *por definición. Y* $\forall x \in C_1 = M_0 = \overline{M}_0$ *cerrado* $\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f(C_1) = \{0\}$

Veamos que f *es continua*

- *Si* $0 < f(x) < 1$, J *denso en* $[0, 1] \Rightarrow \forall z \in [0, 1], \forall \delta > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^{m_0}} < \delta \Rightarrow \frac{k_0}{2^{m_0}} \in (z - \delta, z + \delta)$. *Entonces,* $\exists t, s \in J : f(x_0) - \epsilon < t < f(x_0) < s < f(x_0) + \epsilon$.

  - *Si* $t < f(x_0) \Rightarrow x_0 \notin \overline{M}_t($ *si* $x_0 \in \overline{M}_t \Rightarrow \forall j \in J : t < j, x_0 \in \mathring{M}_j \subset \overline{M}_j \to f(x_0) \leq t)$.

- Si $t(x_0) < s \Rightarrow x_0 \in \mathring{M}_s$ ($f(x_0) = \inf\{r \in J : x_0 \in \overline{M}_r\} < s \Rightarrow \exists j \in J : j < s, x_0 \in \overline{M}_j \subset \mathring{M}_s$)

$\Rightarrow x \in (X \setminus \overline{M}_t \cap \mathring{M}_s) \in \mathcal{T}$ donde $X \setminus \overline{M}_t = V^{x_0}$.

$x \in V^{x_0} \Rightarrow$

- Si $x \notin \overline{M}_t \Rightarrow f(x) \geq t$ (Si no , $f(x) < t, f(x) = \inf\{r \in J : x \in \overline{M}_r\} \Rightarrow \exists j \in J : j < t, x \in \overline{M}_j \subset \mathring{M}_t \subset \overline{M}_t$ absurdo)
- Si $x \in \mathring{M}_s \subset \overline{M}_s \Rightarrow f(x) \leq s$

Entonces, $f(V^{x_0}) \subset [t, s] \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$

- Si $f(x_0) = 1$, $\forall \epsilon > 0, \exists t \in J : f(x_0) - \epsilon = 1 - \epsilon < t < f(x_0) = 1$. *Entonces,* $t < f(x_0) \rightarrow x_0 \notin \overline{M}_t \Rightarrow x_0 \in X \setminus \overline{M}_t = V^{x_0}$. *Por tanto,* $\forall x \in V^{x_0} \Rightarrow x \notin \overline{M}_t \Rightarrow f(x) \geq t$. *Por tanto ,* $f(V^{x_0}) \subset [t, 1] \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) = (1 - \epsilon, 1)$.
- Si $f(x_0) = 1$, *entonces* $\forall \epsilon > 0, \exists s \in J : 0 = f(x_0) < s < f(x_0) + \epsilon = \epsilon$ *donde* $f(x_0) < s \Rightarrow x_0 \in \mathring{M}_s = V^{x_0} \in \mathcal{T}$. *Por tanto,* $\forall x \in V^{x_0}, x \in \mathring{M}_s \subset \overline{M} \subset_s \Rightarrow f(x) \leq s \Rightarrow f(V^{x_0}) \subset [0, s] \subset [0, \epsilon] = [f(x_0), f(x_0) + \epsilon)$.

($\Leftarrow$) $\forall C_1, C_2$ *cerradps disjuntos.*

- Si $C_! = \emptyset$. *Tomamos* $M_1 = \emptyset, M_2 = X$,
- Si $C_1, C_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow [0, 1]$ *con tinua tal que* $f(C_1) = \{0\}, f(C_2) = \{1\} \Rightarrow f^{-1}([0, \frac{1}{2})), f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) \in \mathcal{T}$ *disjuntos, donde* $C_1 \subset f^{-1}([0, \frac{1}{2})), C_2 \subset f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) \in \mathcal{T}$.

Corolario 2.0.3. T_4 *es más fuerte que* T_{3a}, $T_4 \Rightarrow T_{3a}$.

Observación. *Metrizable* $\Rightarrow T_4, T_{3a}, T_3, T_2, T_1, T_0$.

Observación. $T_3 \not\Rightarrow T_4$, T_{3a} *es multiplicativa y* T_4 *no.*

Teorema 2.1 (de Extension de Tietze)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Entonces,* $(X, \mathcal{T})$ *es normal* $\Leftrightarrow \forall C \neq \emptyset$ *cerrado,* $\forall f : (C, \mathcal{T}|_C) \rightarrow [-1, 1]$ *aplicación continua,* $\exists F : (X, \mathcal{T}) \rightarrow [-1, 1]$ *continua tal que* $F|_C = f$.

Observación. *Cualquier aplicación continua de* C *a* $[a, b]$ *puede extenderse a una aplicación continua de* X *a* $[a, b]$.

Demostración. *($\Rightarrow$) Supongamos C cerrado de $(X,\mathcal{T})$, $f : A \to [-1,1]$. Sea*

$$A_1 = \Big\{x \in C : f(x) \geq \frac{1}{3}\Big\},\ B_1 = \Big\{x \in C : f(x) \leq -\frac{1}{3}\Big\}$$

Entonces, A_1 y B_1 son cerrados disjuntos en $(X,\mathcal{T})$ que es normal. Por el Lema de Uryshon $\Rightarrow \exists f_1 : X \to [-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$ tal que $f_1(A_1) = \frac{1}{3}$, $f_1(B_1) = -\frac{1}{3}$. Por tanto, $\forall \in C, |f(x) - f_1(x)| \leq \frac{2}{3}$.

De la misma forma, sea $g_1 = f - f_1|_C : (C,\mathcal{T}|_C) \to [-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$ continua y

$$A_2 = \Big\{x \in C : f(x) \geq \frac{2}{9}\Big\},\ B_2 = \Big\{x \in C : f(x) \leq -\frac{2}{9}\Big\}$$

Por el Lemma de Uryshon $\Rightarrow \exists f_2 : (X,\mathcal{T}) \to [-\frac{2}{9},\frac{2}{9}]$ tal que $f_2(A_2) = \{\frac{2}{9}\}$ y $f_2(B_2) = \{-\frac{2}{9}\}$. Evidentemente, $\forall x \in C|g_1(x) - f_2(x)| \leq (\frac{2}{3})^2$.

Continuando el proceso, $\exists \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, f_n : (X,\mathcal{T}) \to [-1,1]$ funciones continuas en C tal que $\forall x \in X, |f_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Entonces,

$$\Big| f - \sum_{k=1}^{n} f_k \Big| \leq \Big(\frac{2}{3}\Big)^n$$

Por el criterio de Wieistrass $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente $\Rightarrow f_n \xrightarrow{n\to\infty} F \Rightarrow F$ continua $\Rightarrow F|_C = f$.

($\Leftarrow$) $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos, entonces $C_1 \cup C_2$ es cerrado en $(X,\mathcal{T})$ y la función $f : C_1 \cap C_2 \to [-1,1]$ definida por $f(C_1) = \{-1\}, f(C_2) = \{1\}$ es continua en $C_! \cap C_2$. Entonces, la extensión de f a todo X será la función de Uryshon para C_1 y $C_2 \Rightarrow (X,\mathcal{T})$ es normal.

Proposición 2.22 (Variantes del Teorema de Tietze)**.** *Sea $(X,\mathcal{T})$ e.t., $\forall s > 0$. Entonces, son equivalentes*

(I) *$(X,\mathcal{T})$ es normal*

(II) *$\forall C \neq \emptyset$ cerrado ,$\forall f : (C,\mathcal{T}|_C) \to (-s,s)$ continua, $\exists \overline{f} : (X,\mathcal{T}) \to (-s,s)$ tal que $\overline{f}|_C = f$.*

(III) $\forall C \neq \emptyset$ *cerrado*, $\forall g : (C, \mathcal{T}|_C) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ *continua*, $\exists \hat{g} : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ *continua tal que* $\hat{g}|_C = g$.

Demostración. $\boxed{i) \Rightarrow ii)}$ *Dado que* $(-s, s)$ *es abierto y* $(-s, s) \subset [-s, s]$, *el teorema de Tietze* $\Rightarrow \exists F : (X, \mathcal{T}) \to [-s, s]$ *continua tal que* $F|_C = f$.

- *Si* $F(X) \subset (-s, s)$ *hemos terminado.*
- *Si* $F(X) \not\subset (-s, s)\big(\Leftrightarrow F^{-1}(\{s, -s\}) = C_1 \neq \emptyset C, C_1$ *disjuntos* $\big)$. *Entonces, por el Lema de Uryshon* $\Rightarrow \exists h : (X, \mathcal{T}) \to [0, 1]$ *continua tal que* $h(C_1) = \{0\}, h(C) = \{1\}$. *Sea* $\hat{f} = F(x) \cdot h(x), \forall x \in X$. *Entonces,* $\hat{f}$ *es continua y* $\hat{f}(x) \subset (-s, s) \Rightarrow \hat{f}|_C = f$

$\boxed{ii) \Rightarrow iii)}$ *Sea* $g : (C, \mathcal{T}|_C) \to \mathbb{R}$ *continua,* $\exists h : \mathbb{R} \to (-s, s) \simeq f = h \circ g : (C, \mathcal{T}|_C) \to (-s, s)$ *continua. Por* $ii) \Rightarrow \exists \hat{f} : (X, \mathcal{T}) \to (-s, s)$ *continua tal que* $\hat{f}|_C = f$. *Sea* $\hat{g} = h^{-1} \circ \hat{f} : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ *continua* $\Rightarrow \hat{g}|_C = h^{-1} \circ f = h \circ (h^{-1} \circ g) = g$. *Y como* $\mathbb{R} \simeq (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, *tenemos el resultado requerido.*

$\boxed{iii) \Rightarrow i)}$ $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos*

- *Si* $C_1 = \emptyset$, *hemos terminado.*
- *Si* $C_1, C_2 \neq \emptyset \Rightarrow C_1 \cup C_2 \neq \emptyset$ *cerrado de* $(X, \mathcal{T})$. *Sea* $g : (C_1 \cup C_2, \mathcal{T}|_{C_1 \cup C_2}) \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(C_1) = \{-1\}, g(C_2) = \{1\}$, *entonces* g *es continua y por la hipótesis se puede extender, es decirm* $\exists \hat{g} : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ *continua tal que* $\hat{g}|_{C_1 \cup C_2} = g \Rightarrow \hat{g}^{-1}((\leftarrow, 0)), \hat{g}^{-1}((0, \to)) \in \mathcal{T}$ *donde* $C_1 \subset \hat{g}^{-1}((\leftarrow, 0)), C_2 \subset \hat{g}^{-1}((0, \to))$ *abiertos disjuntos* $\Rightarrow (X, \mathcal{T})$ *es normal.*

Capítulo 3

Propiedades Numerabilidad

3.1. Axiomas Numerabilidad

Definición 3.1 (Numerable). *Sea X conjunto, X es numerable si* $\text{card}(X) \leq \mathcal{X}_0 = \text{card}(\mathbb{N})$.

Definición 3.2 (Primer Axioma de Numerabilidad). *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t.. Se dice que verifica el primer axioma de numerabilidad si $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}(x)$ base de entornos de x en $(X, \mathcal{T})$ numerable.*

Ejemplo. $\forall X$ *conjunto,* $(X, \mathcal{T}_D), \mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}, \forall x \in X$ *es finito* $\Rightarrow$ *numerable* $\Rightarrow 1$ *axioma.*

Ejemplo. $\forall X$ *conjunto* $(X, \mathcal{T}), \mathcal{V}(x) = \{x\} = \mathcal{B}(x), \forall x \in X.$

Ejemplo. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *metrizable,* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d, \forall x \in X, \mathcal{B}(x) = \{B^x_{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\}$.

Definición 3.3 (Segundo Axioma). *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t.. Se dice que verifica el segundo axioma de numerabilidad si $\exists \mathcal{B}$ base de $\mathcal{T}$, numerable.*

Ejemplo. $\forall X$ *conjunto,* $(X, \mathcal{T}), \mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$.

Ejemplo. *Si* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u), \mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}\}$

Observación. *2º axioma* $\Rightarrow$ *1º axioma.*

Observación. *1º axioma* $\not\Rightarrow$ *2º axioma.*

Sea X conjunto tal que $\text{card}(X) > \mathcal{X}_0 \Rightarrow (X, \mathcal{T}_d)$ *es 1º axioma pero no segundo. Dado que* $\forall x \in X, \{x\} \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \forall \mathcal{B}$ *base de* $\mathcal{T}_d$, $\forall x \in X, \exists B_x \subset \mathcal{B} : B_x \subset \{x\} \Rightarrow \mathcal{X}_0 < \text{card}(X) = \text{card}(\{B_x : x \in X\}) \leq \text{card}((\mathcal{B}))$.

Proposición 3.1. *El 1º y 2º axioma de numerabilidad son propiedades hereditarias.*

Demostración.

(I) $(X,\mathcal{T})$ *1º axioma,* $E \subset X$. $\forall x \in E \Rightarrow \exists \mathcal{B}(x) = \{B_n^x : n \in \mathbb{N}\}$ *base de entornos de* x *en* $(X,\mathcal{T}) \Rightarrow \mathcal{B}(x) = \{B_n^x \cap E : n \in \mathbb{N}\}$ *es base de entornos de* x *en* $(E, \mathcal{T}|_E)$.

(II) $(X,\mathcal{T})$ *2º axioma,* $E \subset X \Rightarrow \exists \mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ *base de* $\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{B}' = \{B_n \cap E : n \in \mathbb{N}\}$ *es base de* $\mathcal{T}|_E$.

Proposición 3.2. *Sean* $(X,\mathcal{T}),(X',\mathcal{T}')$ *e.t.* $f:(X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *aplicación suprayectiva, abierta y continua, Si* $(X,\mathcal{T})$ *es 1º axioma (2º axioma), también lo es* $(X',\mathcal{T}')$.

Demostración. $\boxed{a)}$ $\forall x' \in X' \xrightarrow{f supra} \exists x \in X : f(x) = x'$. *Por hipótesis* $\exists \mathcal{B}(x) = \{B_n^x : n \in \mathbb{N}\}$ *es base de entornos de* x *numerable* $\Rightarrow \mathcal{B}'(x) = \{f(B_n^x) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{V}(x)$ *es numerable. Veamos que es base de entornos de* x'. $\forall V^{x'}$ *entorno de* x' *en* $(X',\mathcal{T}') \xrightarrow{f cont.} f^{-1}(V^{x'})$ *entorno de* x $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : B_{n_0}^x \subset f^{-1}(V^{x'}) \Rightarrow f(B_{n_0}^x) \subset f(f^{-1}(V^{x'})) = V^{x'}$ *donde* $f(B_{n_0}^{x'}) \in \mathcal{B}(x)$.

$\boxed{b)}$ *Por hipótesis,* $\exists \mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ *base de* $\mathcal{T} \xrightarrow{f\text{ ab.}} \mathcal{B}' = \{f(B_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}'$. *Entonces,* $\forall A' \in \mathcal{T}' \setminus \{\emptyset\}, \forall x' \in A' \xrightarrow{f\text{ cont y supra}} x \in f^{-1}(x') \subset f^{-1}(A') \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : B_{n_0} \subset f^{-1}(A') \Rightarrow f(x) = x' \in f(B_{n_0}) \subset f(f^{-1}(A')) = A$.

Corolario 3.0.1. *1º, 2º axioma son invariantes topológicos.*

Observación. *El producto numerable de espacios primer/segundo axioma es primer/segundo axioma.*

Proposición 3.3. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia no vacía de e.t.. Entonces,* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *1º axioma (2º axioma)* $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ *es 1º axioma (2º axioma) y* $K = \{j \in J : \mathcal{T}_j$ *no es trivial* $\}$ *es numerable.*

Demostración.

(I)

($\Rightarrow$) *Suponemos que* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *es primer axioma. Entonces,* $\forall j \in J, p_j : (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \to (X_j, \mathcal{T}_j)$ *suprayectiva, continua y abierta* $\Rightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$ *es primer axioma. Ahora, por hipótesis,* $\forall a \in \prod_{j\in J} X_j : a = (a_j)_{j\in J}$, $\exists \mathcal{B}(a) = \{B_n^a : n \in \mathbb{N}\}$ *base de entornos numerable de* a *en* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$. *Por tanto,* $\forall j \in J, H_n = \{p_j(B_n^a) : n \in \mathbb{N}\}$ *es base de entornos numerable de* a_j *en* $(X_j, \mathcal{T}_j)$ *donde* $\forall n \in \mathbb{N}, \{j \in J : p_j(B_n^a) \neq X_j\}$ *es numerable. (Esto es debido a que* $\prod_{j\in J} U_j \subset B_n^a : U_j \in \mathcal{T}_j$ *donde* $U_j = X_j, \forall J \setminus F$ *para* F *finito, por tanto,* $\forall j \in J \setminus F, p_j(B_n^a) = X_j$*). Como* H_n *es finito* $\Rightarrow H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ *es numerable. Falta ver* $K \subset H$. $\forall j \in J \Rightarrow \mathcal{T}_j \neq \{\emptyset, X_j\} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : p_j(B_{n_0}^a) \neq X_j \Rightarrow j \in H_{n_0} \subset H$.

($\Leftarrow$) *Sea* K *numerable.* $\forall a = (a_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} X_j$. *Por hipótesis,* $\forall j \in J, \exists \mathcal{B}(a_j) = \{B_n^{a_j} : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{X_j\}$ *base numerable de* a_j. *Sea* $\mathcal{B}(a) = \{\prod_{j\in J} A_j : A_j = X_j, \forall j \in J \setminus F : F$ *finito y* $A_j \in \mathcal{B}(a_j), \forall j \in F\}$ *es base de entornos de* a. *Luego* $\mathrm{card}(\mathcal{B}(a)) = \mathrm{card}(\mathcal{P}_F(K)) \Rightarrow$ *numerable.*

(II)

($\Rightarrow$) $\forall j_0 \in J, p_{j_0} : (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \to (X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0})$ *suprayectiva, continua y abierta* $\Rightarrow (X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0})$ *es 2º axioma. Y 2º axioma* $\Rightarrow$ *1º axioma* $\Rightarrow K$ *numerable.*

($\Leftarrow$) $\forall j \in J, \exists \mathcal{B}_j = \{B_n : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{X_j\}$. *Sea* $\mathcal{B} = \{\prod_{j\in J} A_j : A_j = X_j, \forall j \in J \setminus F, F$ *finito* $, A_j \in \mathcal{B}_j, j \in F\} \Rightarrow \mathrm{card}(\mathcal{B}) = \mathrm{card}(\mathcal{P}_F(K)) \Rightarrow$ *numerable.*

Observación (Desmotración a) por contradicción)**.** *El producto de espacios es primer axioma, entonces cada espacio es primer axioma dado que son homeomorfos a un subespacio del producto. Si el número de la familia de topologías no triviales es no contable, entoncs para* $x \in \prod X_j$ *el número de bases de entornos es no contable.*

Observación. *El producto numerable de espacios primer/segundo axioma es primer/segundo axioma*

Proposición 3.4. *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ familia no vacía de e.t.. Entonces, $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$ 1º axioma $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$es 1º axioma*

Demostración.

($\Rightarrow$) $\forall j_0 \in J, X_{j_0} \simeq X_j \times \{j_0\} \subset \sum_{j=0} X_j$ *ACABAR*

($\Leftarrow$) $\forall x \in \sum_{j\in J} \Rightarrow \exists! j_0 \in J : x \in X_{j_0} \times \{j_0\} \simeq X_{j_0}$. *Por hipótesis,* $\exists \mathcal{B}$ *base entornos de* $p_1(x)$ *en* $(X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0}) \Rightarrow \exists$ *base de entornos de* x *en* $X_{j_0} \times \{j_0\}$ *y en* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$.

Proposición 3.5. *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ familia no vacía de e.t.. Entonces, $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$ 2º axioma $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$es 2º axioma y J es numerable.*

Demostración.

($\Rightarrow$) $\forall j_0 \in J, X_{j_0} \simeq X_{j_0} \times \{j_0\} \subset \sum_{j\in J} X_j, \exists \mathcal{B}$ *base numerable de* $\sum_{j\in J} \mathcal{T}_j \Rightarrow \forall j \in J, \exists B_k \in \mathcal{B} : B_k \subset X_k \times \{k\}$ *disjuntos dos dos* $\Rightarrow \operatorname{card}\{B_k : k \in J\} \leq \operatorname{card}(\mathcal{B}) \leq \mathcal{X}_0$ *por ser subfamilia. Y por ser disjuntos* $\Rightarrow \forall k, k' \in \mathcal{T} : k \neq k', B_k \cap B_{k'} = \emptyset \Rightarrow \operatorname{card} J \leq \operatorname{card}\{B_k : k \in J\} \leq \operatorname{card} \mathcal{X}_0$.

($\Leftarrow$) $\forall k \in J, \exists \mathcal{B}_k$ *base numerable de* $\mathcal{T}_k \Rightarrow \{B \times \{k\} : B \in \mathcal{B}_k\}$ *base de entornos de* $\mathcal{T}_k \Rightarrow \mathcal{B} = \bigcup_{k\in J}\{B \times \{k\} : B \in \mathcal{B}_k\}$ *es numerable y es base de* $\sum_{j\in J} \mathcal{T}_j$.

Observación. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. 1º axioma entonces,* $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}(x) = \{B_n^x : n \in \mathbb{N}\} : B_{n+1}^x \subset B_n^x, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración. $\forall x \in X, \exists \{V_n^x : n \in \mathbb{N}\}$ *base de entornos numerable.*

$$B_1^x = V_1^x$$

$$B_2^x = V_1^x \cap V_2^x$$

$$B_3^x = V_1^x \cap V_2^x \cap V_3^x$$

$$B_n^x = \cap_{k=1}^n V_k^x$$

entonces $B_n^x \subset V_n^x$ *y* $B_{n+1}^x \subset B_n^x$

Definición 3.4 (Sucesión Convergente). *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. *Entonces,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \in X \Leftrightarrow \forall \mathcal{U}^x$ *entorno de* x *in* $(X, \mathcal{T})$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in \mathcal{U}^x, \forall n \geq n_0$.

Proposición 3.6. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. 1º axioma. Entonces,*

(I) $M \subset X, x \in X \Rightarrow x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} x$.

(II) $M \subset X, x \in X \Rightarrow x \in M' \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M \setminus \{x\} : \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} x$.

(III) $M \subset X, M$ *cerrado en* $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M \Rightarrow \lim(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$.

(IV) $(X', \mathcal{T}')$ *e.t.,* $f : X \to X', x \in X, f$ *continua en* $x \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \Rightarrow (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \to f(x)$.

Demostración.

(I)

($\Rightarrow$) $x \in \overline{M}$ *y* $\exists \mathcal{B}(x) = \{B_n^x : n \in \mathbb{N}\} : B_{n+1}^x \subset B_n^x$. *Entonces,* $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in B_n^x \cap M \neq \emptyset \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$.

($\Leftarrow$) $\forall \mathcal{U}^x, \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in \mathcal{U}^x$ *donde* $x_n \in M, \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in M \cap \mathcal{U}^x \neq \emptyset$.

(II)

($\Rightarrow$) $x \in M' \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, B_n^x \setminus \{x\} \cap M \neq \emptyset \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M \setminus \{x\}$.

($\Leftarrow$) *Análogo.*

(III) M *cerrado* $\Leftrightarrow \overline{M} = M \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M \Rightarrow \lim(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M$.

(IV)

($\Rightarrow$) f *cont en* x *y* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \Rightarrow \forall V^{f(x)}, \exists U^x : f(U^x) \subset V^{f(x)} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in U^x, \forall n \geq n_0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : f(x_n) \in f(U^x) \subset V^{f(x)}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \to f(x)$.

($\Leftarrow$) *Si* f *no es continua, entonces* $\exists V^{f(x)} : \forall U^x, f(U^x) \not\subset V^{f(x)} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f(B_n^x) \not\subset V^{f(x)} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in B_n^x : f(x_n) \notin V^{f(x)}$. *Ahora,* $B_{n+1}^x \subset B_n^x, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$ *y* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \not\to f(x)$.

3.2. Separable

Definición 3.5 (Separable)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Se dice que es separable si* $\exists D$ *denso numerable en* $(X, \mathcal{T})$.

Proposición 3.7. *Todo 2º axioma es separable.*

Demostración. $\exists \mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ *base numerable de* T. *Podemos suponer que* $\mathcal{B} \neq \emptyset$. *Entonces,* $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in B_n$ *de manera que* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = D$ *es numerable. Además,* $\forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : B_{n_0} \in \mathcal{B} : x_{n_0} \in B_{n_0} \subset U$ *y* $U \cap D \neq \emptyset \Rightarrow D$ *es denso.*

Observación. *La sepraración no es hederitaria.*

Demostración. *content*

Proposición 3.8. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. separable,* $G \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$. *Entonces,* $(G, \mathcal{T}|_G)$ *es seprable.*

Demostración. $\exists D$ *denso numera en* $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow G \cap D \neq \emptyset$. *Como* D *es numerable* $\Rightarrow G$ *numerable. Ahora,* $\forall U \in \mathcal{T}|_G \setminus \{\emptyset\} \Rightarrow U \subset G \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\} \Rightarrow U \cap D \neq \emptyset$ *donde* $U \cap D = U \cap (D \cap G) \Rightarrow G \cap D$ *denso en* $(G, \mathcal{T}|_G)$.

Proposición 3.9. *Sea* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t.,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *suprayectiva y continua. Si* $(X, \mathcal{T})$ *es separable, entonces también lo es* $(X', \mathcal{T}')$.

Demostración. $\exists D$ *denso numerable en* $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow \overline{D} = X \Rightarrow f(\overline{D}) \subset \overline{f(D)}$ *donde* $f(\overline{D}) = f(X) \Rightarrow f(X) \subset \overline{f(D)} \Rightarrow f(X) = \overline{f(D)} \Rightarrow f(D)$ *denso y numerable.*

Proposición 3.10. *Sean* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia no vacia de e.t.* T_2 *y* $\operatorname{card} X_j \geq 2, \forall j \in J$. *Entonces,* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *es separable* $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ *es separable y* $\operatorname{card} J \leq 2^{\mathcal{X}_0}$.

Demostración.

($\Rightarrow$) $\forall j \in J, p_j$ *continua y suprayectiva* $\Rightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$ *separable* $\forall j \in J$. *Luego,* $\forall j \in J, \exists U_j, V_j \in \mathcal{T}_j \setminus \{\emptyset\} : U_j \cap V_j = \emptyset$ *de manera que* $p_j^{-1}(U_j) \in \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j$ *no vacío y* $\exists D$ *denso en* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \Rightarrow D \cap p_j^{-1}(U_j) = D \cap D_j \neq \emptyset$. *Sea*

$$F : J \to \mathcal{P}(D) : j \mapsto D_j.$$

Veamos que F *es inyectiva.* $\forall j, j' \in J : j \neq j', p_j^{-1}(U_j) \cap p_{j'}^{-1}(V_j) \neq \emptyset$ *por ser* p_j *aplicación abierta. Entonces,* $D \cap p_j^{-1}(U_j) \cap (p_{j'})^{-1}(V_j) \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) *Sea*

$$D = \{P^{n_1,\cdots,n_k}_{J_1,\cdots,J_k}, k \in \mathbb{N}, n_1, \cdots, n_k \in \mathbb{N},$$

$J_1, \cdots, J_k$ *segmento de extremos racionales disjuntos contenido en* $[0,1]\}$

Entonces, $D \subset \prod_{j\in J} X_j$ *y* D *es numerable. Por tanto,* $\forall U \in \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j \setminus \{\emptyset\}, \exists B \in \mathcal{B} : B \subset U$ *tal que* $B = \bigcap_{i=1}^m p_{ji}^{-1}(U_{ji})$ *donde* $U_{ji} \in \mathcal{T}_{ji} \setminus \{\emptyset\}, \forall i \in \{1, \cdots, m\}$. *Por tanto,* $\forall i \in \{1, \cdots, m\}, D_{j_i} \cap U_{j_i} = d_{j_i n_i} \neq \emptyset, j_1, \cdots, j_m \in [0,1]$. *Entonces,* $P^{n_1,\cdots,n_k}_{J_1,\cdots,J_k}$ *in* D *y* $\forall i \in \{1, \cdots, m\}$, $p_{ji}(P^{n_1,\cdots,n_k}_{J_1,\cdots,J_k}) = d_{j_i n_i} \in U_{i_j} \Rightarrow P^{n_1,\cdots,n_k}_{J_1,\cdots,J_k} \in D, B \Rightarrow D \cap B \neq \emptyset \Rightarrow D \cap U \neq \emptyset$.

Proposición 3.11. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia no vacía de e.t.. Entonces,* $(\sum_{j\in J} X_j, \sum_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *separable* $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ *es separable y* J *es numerable.*

Demostración.

($\Rightarrow$) *Por hipótesis,* D *denso numerable en* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k) \Rightarrow \forall k \in J, (X_k \times \{k\}) \cap D \neq \emptyset$. *Sea* $z_k \in (X_k \times \{k\}) \cap D$, *entonces* $\{z_k : k \in J\} \subset D$ *es conjunto de puntos distintos. Podemos usar una aplicación injectiva de* $\{z_k : k \in J\}$ *a* J *para ver que* $\operatorname{card} J \leq \operatorname{card} D \leq \mathcal{X}_0$.

($\Leftarrow$) $\forall k \in J, \exists D_k$ *denso numerable en* $(X_k, \mathcal{T}_k)$. *Sea* $D = \bigcup_{k \in J} mbD_k \times \{k\}$ *es numerable por ser unión de conjuntos numerables y es subespacio del espacio suma* $\Rightarrow$ *es denso en* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$.

3.3. Lindelöf

Definición 3.6 (Recubrimiento)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$. *Se dice que* $\mathcal{U}$ *es un recubrimiento de* X *si* $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X$. *Si* $\forall U \in \mathcal{U}, U \in \mathcal{T}$, *entonces* $\mathcal{U}$ *es un recubrimiento abierto.*

Definición 3.7 (Subrecubrimiento)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$,$\mathcal{U}$ *recubrimiento de* X, $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. *Se dice que* $\mathcal{V}$ *es un subrecubrimiento si* $\mathcal{V}$ *también es un recubrimiento de* X.

Observación. *Puede ser que* $\mathcal{V} = \mathcal{U}$.

Definición 3.8 (Lindelöf)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. es Lindelöf si* $\forall \mathcal{U}$ *recubrimiento abierto de* X, $\exists \mathcal{V}$ *subrecubrimiento numerable de* $\mathcal{U}$.

Proposición 3.12. *Todo e.t. 2º axioma es de Lindelöf.*

Demostración. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *2º axioma* $\Rightarrow \exists \mathcal{B}$ *base numerable de* $\mathcal{T}$. *Entonces,* $\forall \mathcal{U}$ *recubrimiento abierto de* $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}, \forall x \in U, \exists B_U^x \in \mathcal{B} : x \in B_U^x \subset U$. *Sea* $\mathcal{C} = \{B_U^x : x \in U \in \mathcal{U}\} \subset \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ *numerable y* $\mathcal{C}$ *recubre a* X *pero no es subrecubrimiento. Luego,* $\forall B \in \mathcal{C}, \exists U_B \in \mathcal{U} : B \subset U_B \Rightarrow \mathcal{V} = \{U_B : B \in \mathcal{C}\} \subset \mathcal{U}$ *es numerable y recubre a* $X \Rightarrow \mathcal{V}$ *es subrecubrimiento de* $\mathcal{U} \Rightarrow$ *es* $(X, \mathcal{T})$ *es Lindelöf.*

Observación. *Lindelöf no es hereditaria.*

Ejemplo. *VER EJEMPLO*

Proposición 3.13. *Todo subespacio cerrado de un e.t. Lindelöf es Lindelöf.*

Demostración. *Sea* $(X, \mathcal{T})$, *Lindelöf,* E *cerrado no vación de* $(X, \mathcal{T})$. *Entonces,* $\forall \mathcal{U}$ *recubrimiento abierto de* $(E, \mathcal{T}|_E)$, $\mathcal{U} = \{U_j : j \in J\} \Rightarrow \forall j \in J, \exists V_j \in \mathcal{T} : U_j = V_j \cap E$. *Luego,* $\mathcal{U}' = \{V_j : j \in J\} \cup \{X \setminus E\}$ *es* *recubrimiento abierto de* $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow \exists \mathcal{V}' = \{V_{jn} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{X \setminus E\}$ *es sub recubrimiento de* $\mathcal{U}' \Rightarrow \mathcal{V} = \{U_{jn} : n \in \mathbb{N}\}$ *es subrecubrimiento de* $\mathcal{U}$.

Proposición 3.14. *Sea* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t.,* $(X, \mathcal{T})$ *Lindelöf,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *aplicación continua suprayectiva. Entonces,* $(X', \mathcal{T}')$ *es Lindelöf.*

Demostración. $\forall \mathcal{U}' = \{U'_j : j \in J\}$ *recubrimiento abierto de* $(X', \mathcal{T}')$. *Entonces,* $\mathcal{U} = \{f^{-1}(U'_j) : j \in J\}$ *es recubrimiento abierto de* $(X, \mathcal{T})$. *Por ser* $(X, \mathcal{T})$ *Lindelöf* $\Rightarrow \exists \mathcal{V} = \{f^{-1}(U'_{jn}) : n \in \mathbb{N}\}$ *subrecubrimiento numerable de* $\mathcal{U} \xRightarrow{f \text{ supra.}} \mathcal{V}' = \{U'_{jn} : n \in \mathbb{N}\}'$ *subrecubrimiento numerable de* $\mathcal{U}'$.

Observación. *El producto de dos e.t. de Lindelöf no es Lindelöf.*

Ejemplo. *VER EJEMPLO*

Proposición 3.15. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ *familia no vacía de e.t.. Entonces,* $(\sum_{j \in J} X_j, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ *es Lindelöf* $\Leftrightarrow$ $(X_j, \mathcal{T}_j)$ *es Lindeöf* $\forall j \in J$ *y* J *es numerable.*

Demostración.

($\Rightarrow$) $\forall k \in J, X_k \simeq X_k \times \{k\} \subset \sum_{j \in J} X_j$ *y dado que Lindelöf se conserva por aplicaciones continuas* $\Rightarrow$ *Lindelöf es invariante, tenemos que* $(X_k, \mathcal{T}_k)$ *es Lindelöf,* $\forall k \in J$. *Como* $\{X_k \times \{k\} : k \in J\}$ *es recubrimiento de* $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ *por conjuntos disjuntos doa a dos* $\Rightarrow J$ *numerable. REVISAR.*

($\Leftarrow$) *Sea* $\mathcal{U}$ *recubrimiento abierto de* $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$. *Entonces,* $\forall k \in J, \{U \cap (X_k \times \{k\}) : U \in \mathcal{U}\} = \mathcal{U}_k$ *recubrimiento abierto de* $X_k \times \{k\} \simeq (X_k, \mathcal{T}_k)$. *Por tanto* $\forall k \in J, \exists \mathcal{V}_k$ *subrecubrimiento numerable de* $\mathcal{U}_k$. *Sea* $\mathcal{V} = \bigcup_{k \in J} \{U : U \cap (X_k \times \{k\}) \in \mathcal{V}_k\} \subset \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{V}$ *es subrecubrimiento numerable de* $\mathcal{U} \Rightarrow (\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ *es Lindelöf.*

Proposición 3.16. *Todo e.t. Lindelöf y regular es normal.*

Demostración. *Sea $(X,\mathcal{T})$ e.t. Lindelöf y regular. Entonces, $\forall C_1, C_2$ cerrados de $(X,\mathcal{T})$*

- *Si $C_1 = \emptyset$, entonces $U_1 = \emptyset, U_2 = X$.*
- *Si $C_1, C_2 \neq \emptyset$, entonces*

$$\begin{cases} \forall x \in C_1, \exists V^x \in \mathcal{T} : \overline{V}^x \cap C_2 = \emptyset \Rightarrow C_1 \subset \bigcup_{x\in C_1} V^x \\ \forall y \in C_2, \exists U^y \in \mathcal{T} : \overline{U}^y \cap C_1 = \emptyset \Rightarrow C_2 \subset \bigcup_{y\in C_2} U^y \end{cases}$$

Dado que todo espacio cerrado de un e.t. Lindelöf es Lindelöf, entonces

$$\begin{cases} \exists\{V^{x_n} : n \in \mathbb{N}\} : C_1 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V^{x_n} \text{ subfamilia numerable} \\ \exists\{U^{y_n} : n \in \mathbb{N}\} : C_2 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U^{y_n} \text{ subfamilia numerable} \end{cases}$$

Ahora, sean

$$\begin{aligned} A_1 = V^{x_1}, &\quad B_1 = U^{y_1} \setminus \overline{A_1} \\ A_2 = V^{x_2} \setminus \overline{B_1}, &\quad B_2 = U^{y_2} \setminus \overline{A_1 \cup A_2} \\ A_3 = V^{x_3} \setminus \overline{B_1 \cup B_2}, &\quad B_3 = U^{y_3} \setminus \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} \\ \dots \end{aligned}$$

son recubrimietos abiertos de T. Sean

$$G_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}, \quad G_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{T}.$$

Veamos que $C_i \subset G_i, \forall i \in \mathbb{N}$ y $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

$\boxed{C_1 \subset G_1}$ $\forall z \in C_1 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : z \in V^{x_n}$. *Como $z \in C_1$, entonces* $z \notin \overline{U}^{y_m}, \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow U^{y_m} \subset B_m \Rightarrow z \notin \overline{U}^{y_m} \subset \overline{B}_m, \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow z \in A_n \subset G_1$.

Veamos que G_1 y G_2 son disjuntos.

$\boxed{G_1 \cap G_2 = \emptyset}$ *Si* $\exists z \in G_1 \cap G_2$, *entonces*

$$\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N} : z \in A_{n_0} \Rightarrow z \notin B_n, \forall n < n_0 \\ \exists m_0 \in \mathbb{N} : z \in B_{m_0} \Rightarrow z \notin A_m, \forall m \leq m_0 \end{cases}$$

pero $z \in A_{n_0} \Rightarrow n_0 > m_0$ *y* $z \in B_{m_0} \Rightarrow m_0 \geq n_0$ *es absurdo.*

Teorema 3.1. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. metrizable. Entonces, son equivalentes*

(I) $(X, \mathcal{T})$ *es 2º axioma,*

(II) $(X, \mathcal{T})$ *es Lindelöf,*

(III) $(X, \mathcal{T})$ *es separable.*

Demostración. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *tal que* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

$\boxed{b \Rightarrow a}$ *Como* $(X, \mathcal{T})$ *Lindelöf, entonces* $\forall \mathcal{U}$ *recubrimiento abierto de* $\mathcal{U}$, $\exists \mathcal{V}$ *subrecubrimiento numerable de* $\mathcal{U}$. *Por tanto,* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{U}_n = \{B_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X\}$$

es un recubrimiento abierto de $(X, \mathcal{T})$. *Luego,* $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n : \mathcal{V}_n$ *es subrecubrimiento numerable de* $\mathcal{U}_n$. *Entonces,* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n \equiv \mathcal{B} \subset \mathcal{T}$.

Veamos que $\mathcal{B}$ *es base de* $\mathcal{T}$. $\forall W \in \mathcal{T}, \forall x \in W \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : B_{\frac{1}{m}}(x) \subset W$ *entonces,* $\mathcal{V}_{2m}$ *es recubrimiento abierto de* $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow \exists y \in X : x \in B_{\frac{1}{2m}}(y) \in \mathcal{V}_{2m}$.

Ahora, $x \in B_{\frac{1}{2m}}(y) \subset B_{\frac{1}{m}}(x) \subset W$. *Entonces,* $\mathcal{B}$ *es base de* $\mathcal{T}$. *Para ver esto,* $\forall z \in B_{\frac{1}{2m}}(x), d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) \leq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m} \Rightarrow B_{\frac{1}{2m}}(y) \subset B_{\frac{1}{m}}(x) \Rightarrow \mathcal{B}$ *es base de* $\mathcal{T}$.

$\boxed{c \Rightarrow a}$ $(X, \mathcal{T})$ *separable* $\Rightarrow \exists D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ *numerable y denso en* $(X, \mathcal{T})$. *Sea* $\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{m}}(d_n) : n, m \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}$ *es colección de abiertos numerable* $\Rightarrow \mathcal{B}$ *es numerable.*

Veamos que $\mathcal{B}$ *es base de* $\mathcal{T}$.

$$\forall W \in \mathcal{T}, \forall x \in W \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : B_{\frac{1}{m}}(x) \subset W.$$

Por ser D denso y $B_{\frac{1}{2m}}(x)$ abierto. Entonces,

$$\forall z \in B_{\frac{1}{2m}}(d_n), d(z,x) \leq d(z,d_n) + d(x,d_n) \leq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m}$$

entonces, $B_{\frac{1}{2m}}(y) \subset B_{\frac{1}{m}}(x) \Rightarrow \mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$.

Capítulo 4

Espacios Compactos

4.1. Compacidad

Definición 4.1 (Compacto)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t.. Se dice que $(X, \mathcal{T})$ es compacto si $\forall \mathcal{U}$ recubrimiento abierto de $(X, \mathcal{T})$, $\exists \mathcal{V}$ sub recubrimiento finito suyo.*

Observación. *Compacto $\Rightarrow$ Lindelöf.*

Observación. *Lindelöf $\not\Rightarrow$ Compacto.*

Ejemplo. *$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es de Lindelöf pero no es compacto.*

Observación. *La compacidad se conserva por aplicaciones continuas (imagen directa).*

Proposición 4.1. *Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $(X, \mathcal{T})$ compacto, $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ suprayectiva y continua. Entonces, $(X', \mathcal{T}')$ es compacto.*

Demostración. $\forall \mathcal{U}' = \{U'_j : j \in J\} \xrightarrow{f \text{ cont.}} \mathcal{U} = \{f^{-1}(U'_j)\}$ es recubrimiento abierto de $(X, \mathcal{T})$. Entonces, $\mathcal{V} = \{f^{-1}(U'_{j1}), \cdots, f^{-1}(U'_{jn})\} \xrightarrow{f \text{ supra.}} \mathcal{V}' = \{U'_{j1}, \cdots, U'_{jn}\}$ es subrecubrimiento finito de $\mathcal{U}$.

Corolario 4.0.1. *La compacidad es invariante topológico.*

Proposición 4.2. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. compacto,* $E \neq \emptyset \subset X$ *cerrado de* $(X, \mathcal{T})$*. Entonces,* $(E, \mathcal{T}|_E)$ *es compacto.*

Demostración. $\forall \mathcal{U} = \{U_j : j \in J\}$ *recubrimiento abierto de* $(E, \mathcal{T}|_E) \Rightarrow \forall j \in J, \exists V_j \in \mathcal{T} : U_j = V_j \cap E \Rightarrow \mathcal{U}' = \{V_j : j \in J\} \cup \{X \setminus E\}$ *recubrimiento abierto de* $(X, \mathcal{T}) \xRightarrow{\text{hip.}} \exists \mathcal{V}' = \{V_{j_1}, \cdots, V_{j_n}\} \cup \{X \setminus E\}$ *subrecubrimiento finito de* $\mathcal{U}' \Rightarrow \mathcal{V} = \{U_j, \cdots, U_{j_n}\}$ *subrecubrimiento finito de* $\mathcal{U}$.

Proposición 4.3. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Entonces,* $(X, \mathcal{T})$ *es compacto* $\Leftrightarrow \forall \mathcal{C} = \{C_j\}_{j \in J}$ *familia de cerrados de* $(X, \mathcal{T})$ *con la propiedad de intersección finita (todas las intersecciónes de subfamilias de* $\mathcal{C}$ *son no vacías), se tiene que* $\bigcap_{j \in J} C_j \neq \emptyset$.

Demostración.

($\Rightarrow$) *Supongamos que* $\exists \mathcal{C} = \{C_j\}_{j \in J}$ *familia de cerrados con la p.i.f. tal que* $\bigcap_{j \in J} C_j = \emptyset$*. Entonces,*

$$\{X \setminus C_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{T}.$$

es recubrimiento abierto de $(X, \mathcal{T})$*. Por tanto,* $\exists \{X \setminus C_{j_1}, \cdots, X \setminus C_{j_n}\}$ *subrecubrimiento finito tal que* $\bigcup_{k=1}^{n} X \setminus C_{j_k} \supset X \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} C_{j_k} = \emptyset$ *que es una contradicción. (SIMPLIFICAR)*

($\Leftarrow$) *Supongamos que* $(X, \mathcal{T})$ *no es compacto. Entonces,* $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ *recubrimiento abierto de* $(X, \mathcal{T})$ *tal que* $\nexists$ *subrecubrimiento finito. Luego,* $\{X \setminus U_j : j \in J\}$ *es familia de cerrados con la p.i.f tal que* $\bigcap_{j \in J} (X \setminus U_j) = \emptyset$*, es una contradicción.*

Proposición 4.4. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ T_2*,* $E \subset X : (E, \mathcal{T}|_E)$ *es compacto. Entonces,* E *es cerrado de* $(X, \mathcal{T})$.

Observación. *No confundir. Todo subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto, y un subconjunto compacto de un espacio* T_2 *es cerrado.*

Observación. *Si* $C \subset X$ *es compacto, entonces* $\forall K$ *subfamilia arbitraria the subconjuntos abiertos* $C \subset \bigcup_{G \in K} G$*,* $\exists F \subset K$ *subfamilia finita* $C \subset \bigcup_{G \in F} G$.

Demostración. *Sea* $E \subset X$. *Entonces, como* X *es* T_2, $\forall x \in X \setminus E, \forall y \in E, \exists U_y^x, \exists U^y \in \mathcal{T}$ *disjuntos. La colección*

$$\{U^y : y \in E\}$$

es un recubrimiento abierto de E, *entonces* E *compacto* $\Rightarrow \exists y_1, \cdots y_n \in E$ *tal que* $\{U^{y_1}, \cdots, U^{y_n}\}$ *es un subrecubrimiento finito de* E. *Por tanto,*

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{n} U^{y_i} \equiv G \in \mathcal{T}$$

que es disjunto de

$$x \in U_{y_1}^x \cap \cdots \cap U_{y_2}^x \equiv V^x$$

ya que $\forall z \in U_{i_0}^y, z \notin U_{y_0}^x \Rightarrow z \notin V^x$. *Entonces,*

$$V^x \cap G = \emptyset \Rightarrow V^x \cap E = \emptyset \Leftrightarrow V^x \subset X \setminus E \in \mathcal{T}$$

si y solo si E *es cerrado de* $(X, \mathcal{T})$.

Observación. *La compacidad no es propiedad hereditaria.*
Ejemplo. $([0,1], \mathcal{T}_u|_{[0,1]})$ *pero* $((0,1), \mathcal{T}_u|_{(0,1)})$ *no es compacto.*

Proposición 4.5. *Sea* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t.,* $(X, \mathcal{T})$ *compacto,* $(X', \mathcal{T}')$ T_2, $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *continua. Entonces,* f *es apicación cerrada.*

Demostración. $\forall E \subset X : E \neq \emptyset$ *es cerrado, entonces* $(E, \mathcal{T}|_E)$ *es compacto* $\xRightarrow{f \text{ cont.}}$ $(f(E), \mathcal{T}'|_{f(E)})$ *es compacto en* $(X', \mathcal{T}')$ *que es* T_2 $\Rightarrow$ $(f(E), \mathcal{T}'|_{f(E)})$ *es cerrado de* $(X', \mathcal{T}')$.

Demostración. $\forall E \subset X$ *cerrado* $\Rightarrow (E, \mathcal{T}|_E)$ *es cerrado y por ser* $(X, \mathcal{T})$ *compacto, entonces* $(E, \mathcal{T}|_E)$ *es compacto. Ahora,* $f|_E : (E, \mathcal{T}|_E) \to (f(E), \mathcal{T}|_{f(E)})$ *es suprayectiva y continua, y* $(X, \mathcal{T})$ *compacto* $\Rightarrow (f(E), \mathcal{T}|_{f(E)})$ *es compacto en* $(X', \mathcal{T}')$. *Como* $(X', \mathcal{T}')$ *es* T_2, *entonces* $(f(E), \mathcal{T}|_{f(E)})$ *es cerrado de* $(X', \mathcal{T}')$.

Proposición 4.6. *Sea $(X,\mathcal{T})$ e.t. T_2, $C_1, C_2 \subset X$ disjuntos tal que $(C_i, \mathcal{T}|_{C_i})$ compacto, $\forall i \in \{1,2\}$. Entonces, $\exists G_i \in \mathcal{T}, i \in \{1,2\}$ disjuntos tal que $C_i \subset G_i$.*

Demostración. *Por ser $(X,\mathcal{T})$ T_2 tenemos que $\forall x \in C_1, \forall y \in C_2, \exists U_y^x, \exists U_x^y \in \mathcal{T}$ disjuntos. Consideramos $x \in C_1$ entonces $\{U_x^y : y \in C_2\}$ es un recubrimiento abierto de $(C_2, \mathcal{T}|_{C_2}) \Rightarrow \exists y_1, \cdots, y_n \in C_2 : \{U_x^{y_1}, \cdots, U_x^{y_n}\}$ es subrecubrimiento finito de $(C_1, \mathcal{T}|_{C_1})$ tal que*

$$C_2 \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_x^{y_i} \equiv A_x$$

es disjunto de

$$x \in U_{y_1}^x \cap \cdots \cap U_{y_n}^x \equiv V^x \in \mathcal{T}$$

Como $C_1 \subset \bigcup_{x \in C_1} V^x$ es recubrimiento abierto de $(C_1, \mathcal{T}|_{C_1})$, entonces $\exists x_1, \cdots, x_m \in C_1 : \{V^{x_1, \cdots, V^{x_n}}\}$ es subrecubrimiento finito tal que

$$C_1 \subset \bigcup_{j=1}^{m} V^{x_j} \equiv G_1 \in \mathcal{T}.$$

Entonces, para

$$C_2 \subset A_{x_1} \cap \cdots \cap A_{x_m} \equiv G_2 \in \mathcal{T}$$

tenemos que $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

Corolario 4.0.2. *Todo e.t. compacto y T_2 es T_4.*

Proposición 4.7. *Sea $(X,\mathcal{T})$ e.t. regular, $C_1, C_2 \subset X$ disjuntos tal que $(C_1, \mathcal{T}|_{C_1})$ es compacto y $(C_2, \mathcal{T}|_{c_2})$ es cerrado. Entonces, $\exists G_i \in \mathcal{T}, i \in \{1,2\}$ disjuntos tal que $C_i \subset G_i$.*

Demostración. *Suponemos que $C_2 \neq \emptyset$. Entonces, por regularidad $\forall x \in C_1, \exists U^x, \exists U_x \in \mathcal{T}$ disjuntos tal que $x \in U^x, C_2 \subset U_x$. Entonces, $\{U^x : x \in C_1\}$ es recubrimiento abierto de $(C_1, \mathcal{T}|_{C_1})$ tal que*

$$C_1 \subset \bigcup_{x \in C_1} U^x$$

entonces, $\exists x_1, \cdots, x_n$ *tal que*

$$\{U^{x_1}, \cdots U^{x_n}\}$$

es subrecubrimiento finito de $(C_1, \mathcal{T}|_{C_1})$ *y*

$$C_1 \subset \bigcap_{i=1}^{n} U^{x_i}$$

Ahora,

$$C_2 \subset U_{x_1} \cap \cdots \cap U_{x_n} \equiv G_2 \in \mathcal{T}$$

entonces, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$*.*

POSIBLE ERROR: en las demostraciones anteriores ponemos como recubrimiento y subrecubrimientos finitos cuando la compacidad es relativa a un subconjunto de X, es decir, serían familias y subfamilias finitas, y no rcubrimientos y subrecubrimientos finitos.

Proposición 4.8. *Sean* $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ *e,t,* $A \subset X, B \subset Y : (A, \mathcal{T}|_A)$ *es compacto y* $(B, \mathcal{S}|_B)$ *es compacto,* $W \in \mathcal{T} \times \mathcal{S} : A \times B \subset W$*. Entonces,* $\exists U \in \mathcal{T}, \exists V \in \mathcal{S} : A \times B \subset U \times V \subset W$*.*

Demostración. $\forall (x, y) \in A \times B \subset W \in \mathcal{T} \times \mathcal{S} \Rightarrow \exists U_y^x \in \mathcal{T}, \exists V_x^y \in \mathcal{S} :$ $U_y^x \times V_x^y \subset W$*. Ahora,* $\forall y \in B \subset Y$*,*

$$A \subset \bigcup_{x \in A} U_y^x$$

donde A *es compacto. Por tanto,* $\exists x_1, \cdots, x_n \in A$ *tal que*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_y^{x_i} \equiv G_y \in \mathcal{T}.$$

Luego,

$$y \in V_{x_1}^y \cap \cdots \cap V_{x_n}^y \equiv V^y \in \mathcal{S}$$

entonces, $G_y \times V^y \subset W$ *(ya que* $\forall (z, t) \in G_y \times V^x, z \in U_y^{x_{i_0}}, t \in V_{x_{i_0}}^y \Rightarrow$ $(z, t) \in U^{x_{i_0}} \times V_{x_{i_0}}^y \subset W$*). Ahora,*

$$B \subset \bigcup_{y \in B} V^y$$

entonces, $\exists y_1, \cdots, y_n \in B$ *tal que*

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{n} V^{y_j} \equiv V \in \mathcal{S}$$

donde B *es compacto. Por tanto,* $\exists y_1, \cdots, y_m \in B$ *tal que*

$$B \subset \bigcup_{j=1} V^{y_j} \equiv V \in \mathcal{S}.$$

Luego,

$$A \subset G_{y_1} \cap \cdots \cap G_{y_m} \equiv U \in \mathcal{T}$$

Hemos visto que $A \times B \subset U \times V$*. Veamos que* $U \times V \subset W$*. Sea* $(z,t) \in U \times V, z \in U, t \in V \Rightarrow \exists j_0 : z \in V^{y_{j_0}}$ *y* $G_{y_{j_0}} \Rightarrow V^{y_{j_0}} \times G_{y_{j_0}} \subset W$.

Teorema 4.1 (de Tychonoff)**.** *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ *familia no vacía de e.t.. Entonces,* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$ *es compacto si y solo si* $(X_j, \mathcal{T}_j)$ *es compacto* $\forall j \in J$.

Proposición 4.9. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia e.t.. Entonces,* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$ *es compacto si y solo si* $\forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ *es compacto y* J *es finito.*

Demostración.

($\Rightarrow$) $\forall k \in J, X_k \simeq X_k \times \{k\} \subset \sum_{j\in J} X_j$ *donde* $X_k \times \{k\}$*. Como la compacidad es invariante topológico, tenemos que* $(X_k, \mathcal{T}_k)$ *es compacto* $\forall k$*. Veamos que* J *es finito. Sea* $\mathcal{U} = \{X_k \times \{k\} : k \in J\}$ *entonces,* $\mathcal{U}$ *es recubrimiento abierto de* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$ *por conjuntos disjuntos dos a dos. Por tanto,* J *es finito.*

($\Leftarrow$) $\forall \mathcal{U}$ *recubrimiento abierto de* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$, $\forall k \in J, \mathcal{U}_k = \{U \cap (X_k \times \{k\}) : U \in \mathcal{U}\}$ *es recubrimiento abierto de* $X_k \times \{k\} \simeq X_k \Rightarrow \exists \mathcal{V}_k \subset \mathcal{U}_k : \mathcal{V}_k$ *es subrecubrimiento finito de* $\mathcal{U}_k$.

Sea $\mathcal{V} = \bigcup_{k\in J}\{U \in \mathcal{U} : U \cap (X_k \times \{k\}) \in \mathcal{V}_k\}$*. Entonces* $\mathcal{V}$ *es subrecubrimiento finito de* $\mathcal{U}$*. Por tanto,* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$ *es compacto.*

Lema 4.1.1 (del número ρ de Lebesgue)**.** *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *e.t. compacto y metrizable,* $\mathcal{U}=\{U_j\}_{j\in J}$ *recubrimiento abierto de* $(X,\mathcal{T})$*. Entonces,* $\exists\rho>0:\forall x\in X, B_\rho(x)\subset U_{j_x}\in\mathcal{U}$*.*

Demostración. $(X,\mathcal{T})$ *compacto* $\Rightarrow \exists\mathcal{U}'\subset\mathcal{U}:\mathcal{U}'=\{U_1,\cdots,U_n\}'$ *es un subrecubrimiento finito de* $\mathcal{U}$*. Ahora,*

$$\forall x\in X,\exists i_x\in\{1,\cdots,n\}:x\in U_{i_x}\in\mathcal{U}'\subset\mathcal{U}$$

$$\Rightarrow x\notin X\setminus U_{i_x}$$

Definimos, $\forall i\in\{1,\cdots,n\}, f_i:X\to\mathbb{R}$ *tal que*

$$f_i(x)=d(x,X\setminus U_i)$$

entonces, f_i *es continua. Sea* $f:X\to\mathbb{R}$ *tal que*

$$f(x)=max\{f_i(x):i\in\{1,\cdots,n\}\}$$

entonces, f *es continua. Por ser* f *máximo de* f_i *tenemos que*

$$\forall x\in X, f(x)\geq f_i(x)=d(x,X\setminus U_{i_x})>0$$

Por tanto, $f(X)\subset(0,\to)$ *donde* $f(X)$ *es compacto por ser* X *compacto y* f *continua. Como* f *continua* $\Rightarrow$ *tiene un valor mínimo. Entoces,*

$$\exists\rho>0:f(x)>\rho,\forall x\in X$$

Veamos que ρ *es el número de Lebesgue. Dado que* $f(x)$ *es máximo, entonces* $\exists i\in\{1,\cdots,n\}$ *tal que*

$$f(x)=f_i(x)=d(x,X\setminus U_{i_x})$$

Consideramos, $\forall y\in B_\rho(x)$*. Entonces,*

$$\rho<d(x,X\setminus U_{i_x})\leq d(x,y)+d(y,X\setminus U_{i_x})<\rho+d(y,X\setminus U_{i_x})$$

por tanto, $d(y,X\setminus U_{i_x})>0\Leftrightarrow y\in U_{i_x}\Rightarrow B_\rho(x)\subset U_{i_x}\in\mathcal{U}$*.*

4.2. Compacidad Local

Definición 4.2 (Compacidad Local)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t.. Diremos que es localmente compacto si $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}(x)$ base de entornos de x en $(X, \mathcal{T})$ formada por compactos.*

Observación. *Es equivalente que alguno de los elementos de la base sea compacto y que lo sean todos si el espacio es Hausdorff.*

Observación. *Localmente compacto $\not\Rightarrow$ compacto.*

Ejemplo. *$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es localmente compacto pero no es compacto-*

Observación. *Compacto $\not\Rightarrow$ localmente compacto.*

Ejemplo. *$X = \mathbb{Q} \cup \{r\} : r \notin \mathbb{Q}$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_u|_{\mathbb{Q}} \cup \{X\}$. Entonces $(X, \mathcal{T})$ es compacto pero no hay base formada por compactos.*

Observación. *Localmente compacto y $T_2 \Rightarrow$ regular.*

Proposición 4.10. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. T_2. Entonces, $(X, \mathcal{T})$ es localmente compacto $\Leftrightarrow \forall x \in X$ existe algún entorno de x compacto en $(X, \mathcal{T})$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) *Por la definición de localmente compacto, existe una base de entornos de x formada por compactos.*

($\Leftarrow$) *$\forall x \in X, \exists C^x$ entorno compacto de x en $(X, \mathcal{T})$.Sea $\forall U$ entorno de x en $(X, \mathcal{T})$. Entonces,*

$$U \mathring{\cap} C^x \equiv V$$

es entorno abierto de x en $(X, \mathcal{T})$. Ahora, $\overline{V} \subset \overline{C}^x = C^x$ donde C^x es compacto en $(X, \mathcal{T})$. Entoces, $(\overline{V}, \mathcal{T}|_{\overline{V}})$ es subespacio compacto de $(X, \mathcal{T})$ $T_2 \Rightarrow (\overline{V}, \mathcal{T}|_{\overline{V}})$ es T_4. En particular, $(\overline{V}, \mathcal{T}|_{\overline{V}})$ es regular.

Ahora, V es entorno abierto de x en $\overline{V}$. Por regularidad, $\exists W \in \mathcal{T}$: $x \in W$ tal que

$$W \cap \overline{V} \subset \overline{W} \cap \overline{V} \subset V \subset U$$

donde $x \in W \cap V \in \mathcal{T}$ y $\overline{W} \cap \overline{V}$ es compacto. Entonces, $\overline{W} \cap \overline{V}$ es entorno compacto de x en $(X, \mathcal{T})$.

Corolario 4.1.1. *Todo e.t. compacto y T_2 es localmente compacto.*

Observación. *La compacidad local no es hereditaria.*

Ejemplo. *$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es localmente compacto pero $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}|_{\mathbb{Q}})$ no lo es.*

Proposición 4.11. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. localmente compacto.*

(I) $\forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$, *entonces $(U, \mathcal{T}|_U)$ es localmente compacto.*

(II) $\forall F \neq \emptyset$ *cerrado de $(X, \mathcal{T})$, entonces $(F, \mathcal{T}|_F)$ es localmente compacto.*

Demostración.

(I) $\forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, \forall x \in U, \forall V^x$ *entorno abierto de x en $(U, \mathcal{T}|_U)$ subespacio abierto. Entonces, V^x es entorno abierto de x en $\mathcal{T} \Rightarrow \exists C^x$ entorno compacto de x en $(X, \mathcal{T})$ tal que $C^x \subset V^x \subset U$.*

(II) $\forall F \neq \emptyset$ *cerrado de $(X, \mathcal{T})$, $\forall x \in F, \forall V^x$ entorno de x en $(F, \mathcal{T}|_F)$. Entonces, $\exists U^x$ entorno de x en $(X, \mathcal{T})$ tal que $V^x = U^x \cap F$. Ahora, por hipótesis, $\exists C^x$ entorno compacto de x en $(X, \mathcal{T})$ tal que $C^x \subset U^x \Rightarrow C^x \cap F \subset U^x \cap F = V^x$ entorno compacto de x en $(F, \mathcal{T}|_F)$.*

Proposición 4.12. *Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $(X, \mathcal{T})$ localmente compacto, $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ suprayectiva, continua y abierta. Entonces, $(X', \mathcal{T}')$ es localmente compacto.*

Demostración. $\forall x' \in X', \forall V^{x'}$ *entorno de x' en $(X', \mathcal{T}')$ dado que f es suprayectiva, tenemos que $f^{-1}(x') \neq \emptyset$ y $f^{-1}(V^{x'})$ es entorno de $\forall x \in f^{-1}(x')$. Ahora, por hipótesis, $\exists C^x$ entorno compacto de x en $(X, \mathcal{T})$ tal que $C^x \subset f^{-1}(V^{x'}) \xRightarrow{f \text{ cont. ab.}} f(C^x) \subset V^{x'}$, donde $f(C^x)$ es entorno compacto de x'. Por tanto, $(X', \mathcal{T}')$ es localmente compacto.*

Corolario 4.1.2. *La compacidad local es invariante topológico.*

Proposición 4.13. *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia no vacía de e.t.. Entonces $(\prod_{k \in J} X_k, \prod_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ es localmente compacto $\Leftrightarrow \forall j \in J$ $(X_j, \mathcal{T}_j)$ es localmente compacto y $\forall j \in J \setminus F, F$ finito, $(X_j, \mathcal{T}_j)$ compacto.*

Demostración.

($\Rightarrow$) *Para la primera parte,* $\forall j \in J, p_j$ *suprayectiva continua y abierta* $\Rightarrow$ *por la proposición anterior,* $(X_j, \mathcal{T}_j)$ *es localmente compacto. Veamos la segunda parte. Consideramos* $\forall x = (x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} X_j, \exists C^x$ *entorno compacto de* x *en* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$*. Entonces,* $\exists B \in \mathcal{B}$ *base de* $\prod_{j\in J} \mathcal{T}_j$ *tal que* $x \in B \subset C^x$*. Este* B *es de la forma*

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k}) : U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}, \quad \forall k \in \{1, \cdots, n\}$$

donde los $x \in U_{j_k}$ *son entornos de* x_{j_k}*. Por tanto,* $p_j(B) \subset p_j(C^x)$*. Ahora, sea* $F_0 = \{j_1, \cdots, j_n\} \subset J$*,* F_0 *es finito y*

$$\forall j_0 \in J \setminus F_0, \quad p_{j_0}(B) = X_{j_0} \subset p_{j_0}(C^x) \subset X_{j_0}$$

$$\Rightarrow p_{j_0}(C^x) = X_{j_0}$$

Entonces, X_{j_0} *es compacto. Por tanto,* $\forall j \in J \setminus F_0, (X_j, \mathcal{T}_j)$ *es compacto.*

($\Leftarrow$) $\forall (x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} X_j$*, entonces* $\forall U^x$ *entorno de* x *en* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j), \in$ $\mathcal{B}$ *base de* $\prod_{j\in J} \mathcal{T}_j$ *tal que* $x \in B \subset U^x$*. Este* B *es de la forma*

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k}) : U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}, \quad \forall k \in \{1, \cdots, n\}$$

donde los $x \in U_{j_k}$ *son entornos de* x_{j_k}*. Por tanto,* $p_j(B) \subset p_j(U^x)$*. Ahora, sea* $F_0 = \{j_1, \cdots, j_n\} \subset J$*,* F_0 *es finito. Ahora,* $F_0 \cup F = H \subset J$ *es finito y* $\forall j \in H$

- *Si* $j \in F_0 \Rightarrow \exists k \in \{1, \cdots, n\} : j = j_k \in F_0 \Rightarrow \exists V^{x_j}$ *entorno compacto de* $x_{j_k}, V^{x_{j_k}} \subset U^{x_{j_k}}$*.*
- *Si* $j \in F \Rightarrow \exists V^{x_j}$ *entorno compacto tal que* $V^{x_j} \subset X_j$*.*

Entonces, $\bigcap_{j\in H} p_j^{-1}(V^{x_j})$ *es entorno de* x *y* $\bigcap_{j\in H} p_j^{-1}(V^{x_j}) \subset B \subset U^x$*. Además,*

$$\bigcap_{j\in H} p_j^{-1}(V^{x_j}) \simeq \prod_{j\in H} V^{x_j} \times \prod_{j\in J\setminus H} X_j$$

pero $J \setminus H = (J \setminus F_0) \cap (J \setminus F) \subset J \setminus F$. *Entonce,* $\prod_{j \in J \setminus H} X_j$ *es compacto. Como* $\prod_{j \in H} V^{x_j}$ *es compacto, entonces* $\prod_{j \in H} V^{x_j} \times \prod_{j \in J \setminus H} X_j$ *es un entorno compacto de* x_j *en* $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$. *Por tanto,* $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$ *es localmente compacto.*

REVISAR TEO Tychonoff

Proposición 4.14. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ *familia no vacía de e.t.. Entonces,* $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ *es localmente compacto* $\Leftrightarrow$ $(X_j, \mathcal{T}_j)$*es localmente compacto,* $\forall j \in J$.

Demostración.

($\Rightarrow$) $\forall k \in J, X_k \simeq X_k \times \{k\} \subset \sum_{j \in J} X_j \Rightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$ *localmente compacto.*

($\Leftarrow$) $\forall x \in \sum_{j \in J} X_j \Rightarrow \exists! j_0 \in J : x \in X_{j_0} \times \{j_0\} \simeq X_{j_0}$. *Por hipótesis,* $p_1(x)$ *tiene una base de entornos compactos en* $(X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0})$. *Ahora,* p_1 *es continua. Entonces, por imagen inversa,* x *tiene base de entornos compactos en* $X_{j_0} \times \{j_0\}$. *Por tanto, la suma de las bases es base de entornos compactos en* $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$.

Teorema 4.2 (de Baire)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. localmente compacto y* T_2, $\{A_j\}_{j \in J}$ *familia numerable de abiertos densos de* $(X, \mathcal{T})$. *Entonces,* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ *es denso.*

Demostración. *Como* A_n *es denso en* $(X, \mathcal{T})$, *entonces* $\forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, U \cap A_1 \neq \emptyset$ *donde* $U \cap A_1 \in \mathcal{T}$, *entonces* $\exists x_1 \in X : x_1 \in U \cap A_1$. *Por ser* $(X, \mathcal{T})$ *localmente compacto y* T_2, $\exists B_1 \in \mathcal{T} : x_1 \in B_1 \subset \overline{B_1} \subset U \cap A_1$ *con* $\overline{B_1}$ *compacto.*

> *Veamos esta última implicación.* $x \in G \in \mathcal{T}, (X, \mathcal{T})$ *l.c.* $T_2 \Rightarrow \exists C^x$ *entorno compacto de* x *tal que* $x \in C^x \subset G$. *Entonces,* $x \in \mathring{C}^x$ *y por ser* $(X, \mathcal{T})$ *regular, tenemos que* $\exists V^x \in \mathcal{T} : x \in V^x \subset \overline{V}^x \subset \mathring{C}^x \subset G$ *donde* $\overline{V}^x$ *es compacto.*

Ahora, $B_1 \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ *y* A_2 *denso* $\Rightarrow A_2 \cap B_1 \neq \emptyset \Rightarrow x_2 \in A_2 \cap B_1$. *Entonces,* $\exists B_2 \in \mathcal{T} : \overline{B}_2 \subset A_2 \cap B_1$ *con* $\overline{B}_2$ *compacto. Repitiendo el proceso,* $\exists \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T} : \overline{B_n}$ *es compacto,* $\overline{B_{n+1}} \subset B_n, \forall n \in \mathbb{N}$ *y* $B_1 \subset$

$\overline{B_1} \subset U \cap A_1$. *Entonces, la colección de adherencias es familia de cerrados con la propiedad de intersección finita y* $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B_1}$ *entonces*

$$\emptyset \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}_n \subset \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \cap U$$

Por tanto, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *es denso en* $(X, \mathcal{T})$.

Observación. *La hipótesis de que la familia se numerable y de abiertos es esencial.*

Ejemplo. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ *es l.c y* T_2. *Sea,* $\forall x \in \mathbb{R}, A_x = \mathbb{R}\setminus\{x\} \in \mathcal{T}_u$ *denso. Entonces,* $\{A_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ *no es numerable y* $\bigcap_{x\in\mathbb{R}} A_x = \bigcap_{x\in\mathbb{R}}(\mathbb{R}\setminus\{x\}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{R} = \emptyset$.

Ejemplo. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u), A_1 = \mathbb{Q}, A_2 = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ *son densos y* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ *ya que np spn abiertos no se cumple el teorema de Baire.*

4.3. Compactación

Definición 4.3 (Inversión topológica)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ *e.t.. Decimos que* $(X, \mathcal{T})$ *está sumergido en* $(Y, \mathcal{S})$ *si* $\exists f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ *tal que* $f|_{f(X)} : (X, \mathcal{T}) \to (f(X), \mathcal{S}|_{f(X)})$ *es homeomorfismo. En este caso,* $f|_{f(X)}$ *es inversión topológica de* $(X, \mathcal{T})$ *en* $(Y, \mathcal{S})$.

Definición 4.4 (Compactación)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $(K, \mathcal{S})$ *e.t. compacto. Se llama compactación de* X *a todo par* (K, f) *tal que* K *es compacto y* f *inversión topológica de* $(X, \mathcal{T})$ *en* $(K, \mathcal{S})$ *tal que* $f(X)$ *es denso en* $(K, \mathcal{S})$.

Ejemplo. $((0,1), \mathcal{T}_u|_{(0,1)})$ *entonces* $([0,1), j)$ *es compactación.*

Definición 4.5 (Compactación T_2)**.** *Si* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.* $(K, \mathcal{S})$ *e.t. compacto,* (K, f) *compactación de* X. *Se dice que* (K, f) *es compactación* T_2 *si* K *es* T_2.

Definición 4.6 (Compactación por un solo punto)**.** *Se dice que* (K, f) *es compactación por un solo punto si* $K \setminus f(X)$ *es un punto.*

Definición 4.7 (Equivalencia Topológica). *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.* $(K_1, f_1), (K_2, f_2)$ *dos compactaciones de* X. *Se dice que son topológicamente equivalentes si* $\exists g : K_1 \to K_2$ *homeomorfismo tal que* $g \circ f_1 = f_2$

Observación. *es relación de equivalencia.*

Definición 4.8. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $(K_1, f_1), (T_2, f_2)$ *dos compactaciones de* X. *Decimos que* $(K_1, f_1) \geq (K_2, f_2)$ *si* $\exists g : K_1 \to K_2$ *suprayectiva y continua tal que* $g \circ f_1 = f_2$.

Observación. *Es una relación reflexiva y transitiva.*

Proposición 4.15. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.* $(K_1, f_1), (K_2, f_2)$ *compactaciones* T_2 *tal que* $(K_1, f_1) \geq (K_2, f_2)$ *y* $(K_2, f_2) \geq (K_1, f_1)$. *Entonces,* (K_1, f_1) *y* (K_2, f_2) *son topológicamente equivalentes.*

Demostración. *Por hipótesis,*

$$\exists g_1 : K_1 \to K_2 \text{ supra. cont. tal que } g_1 \circ f_1 = f_2$$

$$\exists g_2 : K_1 \to K_2 \text{ supra. cont. tal que } g_2 \circ f_1 = f_2$$

entonces,

$$g_2 \circ g_1 : K_1 \to K_2 \text{ cont., } T_2$$

Por tanto,

$$(g_2 \circ g_1)|_{f_1(X)} = 1_{f_1(X)}$$

Por ser f *inversión topológica con* $f(X)$ *denso*

$$\overline{f(X)} = K_1$$

entonces,

$$g_2 \circ g_1 = 1_{K_1}$$

$$g_1 \circ g_2 = 1_{K_2}$$

Por tanto, g_1 *es biyectiva y* $g_1^{-1} = g_2 \Rightarrow g_1$, *y* g_2 *es biyectiva y* $g_2^{-1} = g_1 \Rightarrow g_2$. *Entonces,* g_1 *y* g_2 *son homeomorfismos.*

Teorema 4.3 (Alessandroff). *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. no compacto, $\omega \notin X$,*

$$X^* = X \cup \{\omega\},$$

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{U \subset X^* : \omega \in U \text{ y } X \setminus U \text{ es compactación y cerrado }\},$$

Entonces, $\mathcal{T}^*$ es topología sobre X^*, $(X^*, \mathcal{T}^*)$ es compacto y X es denso en $(X^*, \mathcal{T}^*)$.

Demostración.

(I) *Veamos que $\mathcal{T}^*$ es topología.*

a) $\emptyset \in \mathcal{T}, \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^* \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{T}^*$ *y X^* pertenenece a la segunda familia* $\Rightarrow X^* \in \mathcal{T}^*$.

b) $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{T}^*$

- $\forall U_i \in \mathcal{T}, i \in \{1, 2\} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$.
- $\forall U_i : \omega \in U_i, X \setminus U_i$ *compacto y cerrado* $\forall i \in \{1, 2\} \Rightarrow w \in U_1 \cap U_2, X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$ *que es compacto y cerrado en* $(X^*, \mathcal{T}^*)$.
- $\forall U_1 \in \mathcal{T}, \omega \in U_2, X \setminus U_2$ *compacto cerrado. Como* $X \setminus U_2$ *es compacto y cerrado* $\rightarrow X \setminus (U_2 \cap X) = X \setminus U_2$, *entonces* $U_2 \cap X \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap U_2 = U_1 \cap (U_2 \cap X) \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$.

c) $\forall \{U_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{T}^*$

- $\forall \{U_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{j \in J} U_j \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$.
- $\forall j \in J, \omega \in U_j, X \setminus U_j$ *compacto y cerrado, entoces* $\omega \in \bigcup_{j \in J} U_j, X \setminus (\bigcup_{j \in J} U_j) = \bigcap_{j \in J} (X \setminus U_j)$ *cerrado en* $X \setminus U_{j_0}$ *compacto* $\Rightarrow X \setminus (\bigcup_{j \in J} U_j)$ *cerrado y compacto.*
- *El terces caso se reduce a* $U_1 \in \mathcal{T}, \omega \in U_2, X \setminus U_2$ *compacto y cerrado* $\Rightarrow \omega \in U_1 \cup U_2$ *y* $X \setminus (U_1 \cup U_2) = (X \setminus U_1) \cap (X \setminus U_2)$ *cerrado y compacto.*

(II) $\mathcal{T}^*|_X = \mathcal{T}$

($\Rightarrow$) $\forall U \in \mathcal{T}^*$

$$\begin{cases} \text{si } U \in \mathcal{T}, U \subset X \Rightarrow U \cap X = U \in \mathcal{T} \\ \text{si } \omega \in U, X \setminus U \text{ compacto y cerrado } \Rightarrow U \cap X \in \mathcal{T} \end{cases}$$

($\Leftarrow$) $\forall \mathcal{U}$ recubrimiento abierto de $(X^*, \mathcal{T}^*)$, $\exists U_0 \in \mathcal{U} : \omega \in U_0 \Rightarrow X^* \setminus U_0 = X \setminus U_0$ compacto y cerrado en $(X, \mathcal{T})$, por ser compactación. Entonces, $\exists U_1, \cdots, U_n$ sub familia finita tal que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \supset X \setminus U_0$$

Ahora, considramos

$$\mathcal{V} = \{U_0\} \cup \{U_1, \cdots, U_n\} \subset \mathcal{U}$$

que es un subrecubrimiento finito. Por tanto, $\mathcal{V}$ es compacto.

(III) Veamos que X es denso en X^*. $\forall U \in \mathcal{T}^* \setminus \{\emptyset\}$

- $U \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap X = U \neq \emptyset$.
- $U \ni \omega, X \setminus U$ cerrado y compacto en $(X, \mathcal{T})$. Como $X \setminus U = X \setminus (U \cap X)$, entonces $U \cap X = \emptyset$. En caso contrario X es compacto, que es absurdo.

Definición 4.9 (Compactación Alexandrof)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. no compacto. Se llama compactación de Alexandrof a $((X^*, \mathcal{T}^*), j)$.*

Observación. *Es una compactación por un solo punto.*

Proposición 4.16. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. no compacto. Entonces,*

(I) $(X, \mathcal{T})$ admite alguna compactación T_2 por un solo punto $\Leftrightarrow (X, \mathcal{T})$ es localmente compacto y T_2.

(II) Si $(X, \mathcal{T})$ es localmente compacto y T_2. Entonces, Todas las compactaciones T_2 por un punto son topológicamente equivalentes.

Observación. *En la segunda parte de la proposición la equivalencia no depende del punto.*

Demostración. *(I)*

($\Rightarrow$) $\exists((X', \mathcal{T}'), f)$ compactación T_2 por un punto de $(X, \mathcal{T})$, entonces

$$X' \setminus f(X) = \{x_0'\} \Leftrightarrow X' \setminus \{x_0'\} = f(X).$$

Como $((X', \mathcal{T}'), f)$ compactación $T_2 \Rightarrow (X', \mathcal{T}')$ es localmente *compacto y* $T_2 \Rightarrow (X', \mathcal{T}')$ *es* $T_1 \Rightarrow \{x_0'\}$ *es cerrado en* $(X', \mathcal{T}')$. *Por tanto,* $X' \setminus \{x_0'\}$ *es abierto* $\Rightarrow f(X)$ *es abierto (*f *homeomorfismo)* $\Rightarrow f$ *abierta. Entonces,* $f(X)$ *localmente compacto.*

($\Leftarrow$) $(X, \mathcal{T})$ *no compacto, localmente compacto y* T_2*. Veamos que* $(X, \mathcal{T})$ *admite una compactación* T_2 *por un solo punto. En particular, admite una compactación de Alezandrof* T_2.

$\forall w \notin X, X^* = X \cup \{w\}$, $((X^*, \mathcal{T}^*), j)$ *es compactación de Alexandrof. Ahora,* $\forall x \in X$, $(X, \mathcal{T})$ *localmente compacto y* T_2 $\Rightarrow \exists U^x$ *entorno compacto y cerrado en* $(X, \mathcal{T})$*. Consideramos,*

$$X^* \setminus U^x = W$$

entonces, $w \in W, X \setminus W = X \setminus (W \cap X) = U^x$*. Como* U^x *es compacto y cerrado* $\Rightarrow w \in W \in \mathcal{T}^*$ *y* $U^x \cap W = \emptyset$ *disjuntos* $\Rightarrow (X^*, \mathcal{T}^*)$ *es* T_2.

(II) $(X, \mathcal{T})$ *localmente compacto* T_2*. Sean* $((X_1', \mathcal{T}_1'), f_1)$, $((X_2', \mathcal{T}_2'), f_2)$ *compactaciones* T_2 *en un solo punto de* $(X, \mathcal{T})$*. Entonces, por ser compactaciones por un solo punto*

$$X_1' \setminus f_1(X) = \{x_1'\} X_2' \setminus f_2(X) = \{x_2'\}$$

Buscamos un homeomorfismo que complete el diagrama. Sea $h : X_1' \to X_2'$ *definido por*

$$h(z) = \begin{cases} f_2(f_1^{-1}(z)), & \text{si } z \in f_1(X) \\ x_2', & \text{si } z = x_1 \end{cases}$$

h *así definida es aplicación abierta y cierra el diagrama,* $h \circ f_1 = f_2$.

Veamos que h *es aplicación abierta.* $\forall G' \in \mathcal{T}_1'$

- *Si* $G' \not\ni x_1' \Rightarrow h(G') = (f_2 \circ f_1^{-1})(G') \in \mathcal{T}_2'|_{f_2(X)} \Rightarrow h(G') \in T_2'$.
- *Si* $G' \ni x_1' \Leftrightarrow X_1' \setminus G' \not\ni x_1' \Rightarrow h(X_1' \setminus G') = (f_2 \circ f_1^{-1})(X_1' \setminus G')$ *es compacto en* $(X_2', \mathcal{T}_2')$*, ya que* $(X_1' \setminus G')$ *es compacto y* $f_2 \circ f_1^{-1}$ *es continua. Como,* $X_1' \setminus G'$ *es cerrado* $h(X_1' \setminus G')$ *es compacto en* $(X_2', \mathcal{T}_2')$ T_2 *y* h *es continua, entonces* $h(X_1' \setminus G')$ *es cerrado. Por tanto,* $X_2' \setminus h(X_1' \setminus G') = h(G') \in \mathcal{T}_2'$ *(no necesariamente inmedianto ver los contenidos por puntos)* $\Rightarrow h(G') \in \mathcal{T}_2'$.

Igual que hemos cogido $h : X_1' \to X_2'$ lo podíamos haber hecho $h : X_2' \to X_1'$. Por tanto, h^{-1} es continua $\Rightarrow h$ es homeomorfismo.

Ejemplo. $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$ *es compactación de Alexandrof.*

Capítulo 5

Conexión

5.1. Espacio conexo

Definición 5.1 (Conexo)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Se dice que es conexo si* $\nexists C_i \neq \emptyset, i \in \{1,2\}$ *cerrado, disjuntos de* $(X, \mathcal{T})$ *tal que* $X = C_1 \cup C_2$*.*

Observación. $(X, \mathcal{T})$ *conexo* $\Leftrightarrow \nexists A_i \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, i \in \{1,2\}$ *disjuntos tal que* $X = A_1 \cup A_2 \Leftrightarrow \nexists C \neq \emptyset \subset X : C \in \mathcal{T}$ *y cerrado simultaneamente.*

Observación. *La conexión no es hereditaria.*

Ejemplo. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ *conexo y* $[0,1] \cup (2,3)$ *no lo es.*

Proposición 5.1. *Sean* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t. tal que* $(X, \mathcal{T})$ *conexo,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *continua y suprayectiva. Entonces,* $(X', \mathcal{T}')$ *conexo.*

Observación. *Se puede omitir suprayectiva.*

Demostración. *Supongamos que no sucede. Entonces,* $\exists A_i \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, i \in \{1,2\}$ *disjuntos tal que* $X' = A_1 \cup A_2 \Rightarrow f^{-1}(A_i') \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, i \in \{1,2\}$ *disjuntos. Por tanto,* $X = f^{-1}(A_1') \cup f^{-1}(A_2') \Rightarrow (X, \mathcal{T})$ *no es conexo, que es absurdo.*

Corolario 5.0.1. *La conexión es invariante topológico.*

Proposición 5.2. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $\{X_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{P}(X)$ *tal que* $\bigcup_{j \in J} X_j = X$ *donde* $(X_j, \mathcal{T}|_{X_j})$ *es conexo* $\forall j \in J$ *y* $\bigcap_{j \in J} X_j \neq \emptyset$*. Entoces,* $(X, \mathcal{T})$ *es* conexo.

Demostración. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *no conexo* $\Rightarrow \exists C_i \neq \emptyset, i \in \{1,2\}$ *disjuntos tal que* $X = C_1 \cap C_2$. *Por otra parte,* $\bigcap_{j\in J} X_j \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \bigcap_{j\in J} X_j \Rightarrow \exists i_0 \in J : x \in C_{i_0}$. *Suponemos que* $x \in C_1$. *Ahora,* $C_2 \neq \emptyset$ *y* $C_2 \subset \bigcup_{j\in J} X_j$ $\Rightarrow \exists j_0 \in J : C_2 \cap X_{j_0} \equiv F_2 \neq \emptyset$. *Entonces,* $x \in C_1 \cap X_{j_0} \equiv F_1 \neq \emptyset \Rightarrow$ $F_i, i \in \{1,2\}$ *cerrados de* $(X_{j_0}, \mathcal{T}|_{X_{j_0} X_{j_0}})$ *y* $F_i \subset C_i, i \in \{1,2\}$ *disjuntos* $\Rightarrow F_i, i \in \{1,2\}$ *disjuntos. Por tanto,*

$$F_1 \cup F_2 = (C_1 \cap X_{j_0}) \cup (C_2 \cap X_{j_0})$$

$$= (C_1 \cup C_2) \cap X_{j_0} = X \cap X_{j_0} = X_{j_0},$$

entonces, $(X_{j_0}, \mathcal{T}|_{X_{j_0}})$ *no es conexo, que es una contradicción. Por tanto,* $(X_{j_0}, \mathcal{T}|_{X_{j_0}})$ *es conexo.*

Ejemplo. $\mathbb{R}^n = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0}[x]$, $\bigcap_{x\in\mathbb{R}, x\neq 0}[x] = \{0\} \neq \emptyset$ *y* $[x] \simeq \mathbb{R}$ *conexo.*

Proposición 5.3. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X, (X_n, \mathcal{T}|_{X_n})$ *es conexo* $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \cap X_{n+1} \neq \emptyset$. *Entonces,* $(X, \mathcal{T})$ *es conexo.*

Demostración. $\forall m \in \mathbb{N}, C_m = X_1 \cup \cdots \cup X_m$. *Si* $m = 1, C_1 = X_1$ *conexo. Supongamos que se cumple para* $m = p$ *y veamos que también se cumple para* $m = p + 1$. *En este caso,*

$$C_{p+1} = X_1 \cup \cdots \cup X_p \cup X_{p+1}$$

donde X_{p+1} *es conexo y* $X_1 \cup \cdots \cup X_p = C_p$ *es conexo por la hipótesis de induccción. Además,* $X_p \cap X_{p+1} \neq \emptyset \Rightarrow C_p \cap X_{p+1} \neq \emptyset$. *Entonces, por la Prop. 5.2.* C_{p+1} *es conexo y por inducción* C_m *es conexo* $\forall m \in \mathbb{N}$. *Aplicando otra vez la Prop. 5.2. tenemos que* $X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_m$ *con* C_m *conexo y* $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} C_m = C_1 = X_1 \neq \emptyset$ *conexo. Por tanto,* $(X, \mathcal{T})$.

Proposición 5.4. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $E \subset X$ *tal que* $(E, \mathcal{T}|_E)$ *es conexo,* $C \subset X, E \subset C \subset \overline{E}$. *Entonces,* $(C, \mathcal{T}|_C)$ *es conexo.*

Demostración. *Si C no es conexo, entonces $\exists F_1, F_2$ cerrados de $(C, \mathcal{T}|_C)$ disjuntos tal que $C = F_1 \cup F_2 \Rightarrow F_1, F_2 \in \mathcal{T}|_C$. Ahora, $E \subset C \Rightarrow \forall x \in E \subset C, x \in F_1$ o $x \in F_2$. Supongamos que $x \in F_1$, entonces $\exists U \in \mathcal{T} : x \in F_1 = U \cap C$ y $x \in \overline{E} \Rightarrow U \cap E \neq \emptyset$. Como $E \subset C \Rightarrow U \cap E \cap C \neq \emptyset$ donde $U \cap C = F_1$, entonce $F_1 \cap E \equiv H_1 \neq \emptyset$. Análogamente, $F_2 \cap E \equiv H_2 \neq \emptyset$. Por tanto, H_1, H_2 son cerrados de $(E, \mathcal{T}|_E)$ tal que $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ y $F_1 \cup F_2 = C \Rightarrow H_1 \cup H_2 = E$ que es absurdo ya que E era conexo por hipótesis.*

Proposición 5.5. *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia no vacía de e.t.. Entonces, $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$ conexo $\Leftrightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$ conexo $\forall j \in J$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) *Trivial.*

($\Leftarrow$) $\forall x \in \prod_{j \in J} X_j, x = (x_j)_{j \in J}$. *Sea E la unión de todos los espacios conexos del producto $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ que continen a x. Entonces, E es conexo por la Prop. 5.2.. Además, es el mayor espacio conexon que contiene a x. Queremos ver que E es denso. $\forall U \in \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j \setminus \{\emptyset\} \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$ base tal que $B \subset U, B = \bigcap_{k=1}^n p_{j_k}^{-1}(U_{j_k}), U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}, \forall k = 1, \cdots, n \Rightarrow \exists b_k \in U_{j_k}, \forall k \in \{1, \cdots, n\}$. Sea*

$$E_1 = \{(z_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j : z_j = x_j, \forall j \in J \backslash \{j_1\}\} \simeq X_{j_1} \times \{(x_j)_{j \in J \backslash \{j_1\}}\}$$

$$E_2 = \{(z_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j : z_{j_1} = b_1, z_j = x_j, \forall j \in J \backslash \{j_1, j_2\}\} \simeq \{b_1\} \times X_{j_2} \times \{(x_j)_{j \in J \backslash \{j_1, j_2\}}\}$$

donde $E_1 \simeq X_{j_1}$ conexo y $X_{j_2} \simeq E_2$ conexo. Repitiendo el proceso tenemos que

$$E_n = \{(z_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j : z_{j_k} = b_k, \forall k \in \{1, \cdots, j_{n-1}\},$$

$$z_j = x_j, \forall j \in J \backslash \{j_1, \cdots, j_n\}\} \simeq \{b_1, \cdots, b_{n-1}\} \times X_{j_n} \times \{(x_j)_{j \in J \backslash \{j_1, \cdots, j_{n-1}\}}\}$$

de manera que $E_n \simeq X_{j_n}$ conexo. Haciedo uso de la Prop. 5.3. para

$$F = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \text{ conexo}$$

Ahora, $E_1 \subset F$ conexo donde E es la unión de todos los espacios conexos del producto que contienen a $x \Rightarrow F \subset E$. Sea $y = (y_j)_{j\in J}$ con $y_{j_k} = b_k, \forall k \in \{1, \cdots, n\}$ y $y_j = x_j, \forall j \in J \setminus \{j_1, \cdots, j_n\}$. Entonces, $y \in E_n \subset F$ y $y \in B \subset U \Rightarrow UcaoF \neq \emptyset \Rightarrow U \cap E \neq \emptyset \Rightarrow$ E es denso $\Leftrightarrow \overline{E} = \prod_{j\in J} X_j, E$ es conexo $\Rightarrow \overline{E}$ conexo $\Rightarrow \prod_{j\in J} X_j$ conexo.

Observación. *$\forall (X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t. conexos, $(X + X', \mathcal{T} + \mathcal{T}')$ no es conexo.*

5.2. Componentes Conexas

Definición 5.2. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $x \in X$. Se llama componente conexa de x a la unión de todos los subespacios conexos de $(X, \mathcal{T})$ que contienen a x.*

Notación. *C_x componente conexa de x.*

Observación. $C_x = \bigcup \{U \subset X : x \in U \text{ y } U \text{ conexo } \}$

Observación. *Si $(X, \mathcal{T})$ e.t., $x \in X$, entonces C_x es el mayor subespacio conexo de $(X, \mathcal{T})$ que contien a x.*

Observación. *$\forall x, y \in X$, es $C_x = C_y$ o $C_x \cap C_y = \emptyset$.*

Demostración. *Si $C_x \cap C_y \neq \emptyset \Rightarrow C_x \cap C_y \ni y$, entonces $y \in C_x$ y $y \in C_y \Rightarrow C_x = C_y$.*

Proposición 5.6. *Si $(X, \mathcal{T})$ e.t., todas sus componentes son cerradas.*

Demostración. *$\forall x \in X, C_x$ componente $\Rightarrow \overline{C_x}$ conexa y $x \in \overline{C_x} \Rightarrow C_x \subset \overline{C_x} \Rightarrow \overline{C_x} = C_x$ cerrado.*

Observación. *Las componentes de un e.t. no son necesariamente abiertas.*

Ejemplo. $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{Q}})$

5.3. Espacio Localmente Conexo

Definición 5.3 (Conexión Local)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t.. Se dice que $(X, \mathcal{T})$ es localmente conexo si $\forall x \in X$ existe alguna base de entornos conexos.*

Observación. *content*

Observación. *localmente conexo $\not\Rightarrow$ conexo.*

Ejemplo. $((0,1) \cup (2,5))$

Observación. *Conexo $\not\Rightarrow$ localmente conexo.*

Ejemplo. $X = [0,1] \times \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup (\{0,1\} \times \mathbb{R}); \mathcal{T}_u$

Observación. *La conexión local no es hereditaria. Se puede ver por el ejemplo anterior.*

Proposición 5.7. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t.. Entonces, $(X, \mathcal{T})$ es localmente conexo $\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ sus componentes son abiertas.*

Demostración. *Willard pg 201 212*

Observación. *Si $(X, \mathcal{T})$ es localmente conexo, sus componentes son cerrados y abiertos simultaneamente.*

Observación. *Si $(X, \mathcal{T})$ es localmente conexo y compacto, entonces el conjunto de sus componentes es finito.*

Proposición 5.8. *Sean $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ e.t., $(X, \mathcal{T})$ localmente conexo, $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ identificación. Entonces, $(X', \mathcal{T}')$ es localmente conexo.*

Demostración. *content*

Proposición 5.9. *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia de e.t.. Entonces, $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$ localmente conexo $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ localmente conexo y $\forall j \in J \setminus F, (X_j, \mathcal{T}_j)$ conexo, donde F es finito.*

Demostración. *Dugundji*

Proposición 5.10. *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ familia no vacía de e.t.. Entonces, $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$ localmente conexo $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ localmente conexo.*

Demostración. *content*

5.4. Conexión por caminos

Observación. *$I = [0, 1]$ con la topología relativa.*

Definición 5.4 (Conexo por Caminos)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t.. Decimos que $(X, \mathcal{T})$ es conexo por caminos si $\forall x, y \in X, \exists f : I = [0, 1] \to (X, \mathcal{T})$ continua tal que $f(0) = x, f(1) = y$. En este caso, se dice que f es un camino en X de origen x y extremo y.*

Observación. *conexo por caminos $\Rightarrow$ conexo.*

Demostración. *Dugundji, proof wiki*

Observación. *conexo $\not\Rightarrow$ conexo por caminos.*

Ejemplo. *content*

Observación. *La conexión por caminos no es hereditaria.*

Ejemplo. *content*

Observación. *Conexo por caminos $\not\Rightarrow$ localmente conexo.*

Ejemplo. *content*

Observación. *Localmente conexo $\not\Rightarrow$ conexo por caminos.*

Ejemplo. *content*

Proposición 5.11. *Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $(X, \mathcal{T})$ conexo por caminos, $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ continua, suprayectiva. Entonces, $(X', \mathcal{T}')$ es conexo por caminos.*

Demostración. *content*

Corolario 5.0.2. *La conexión por caminos es invariante tipológico.*

Proposición 5.12. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia no vacía de e.t.. Entonces,* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *conexo por caminos* $\Leftrightarrow$ $(X_j, \mathcal{T}_j)$ *es conexo por caminos* $\forall j \in J$.

Demostración. *content*

Observación. $\forall (X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t. conexos por caminos,* $(X + X', \mathcal{T} + \mathcal{T}')$ *no es conexo* $\Rightarrow$ *no es conexo por caminos.*

Capítulo 6

Convergencia

6.1. Filtros

Definición 6.1 (Sucesión). *Sea X conjunto no vacío. Se llama sucesión a cualquier aplicación $s : \mathbb{N} \to X : n \mapsto s(n) \equiv s_n$ y $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Definición 6.2 (Punto límite). *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en X, $x \in X$. Se dice que s converge a x en $(X, \mathcal{T})$ (o que x es punto límite de s) si $\forall U^x$ entorno de x, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : s_n \in U^x, \forall n \geq n_0$.*

Observación. *Si $(X, \mathcal{T})$ e.t. $M \subset X$ no vacío, entonces $x \in \overline{M} \not\Leftrightarrow \exists (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$.*

Ejemplo. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CN})$, $M = (0,1), 0 \in \overline{M}$ *pero* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : x_n = 0, \forall n \geq m \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \not\subset M$

Observación. *No sirven las sucesiones para caracterizar puntos adherentes.*

Observación. *Sucesiones generalzadas se llaman redes.*

Observación. *Los filtros son más genereales que los sitemas de entornos.*

Definición 6.3 (Filtro). *Sea $X \neq \emptyset$ conjunto. Se llama filtro en X a cualquier familia $\mathcal{F} \neq \emptyset$ de conjuntos no vacios tal que*

(I) $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$,

(II) $\forall F \in \mathcal{F}, \forall F' \subset X, F' \supset F \Rightarrow F' \in \mathcal{F}$.

Ejemplo. $\forall X$ *conjunto,* $\forall S \neq \emptyset, \mathcal{F}_S = \{F \subset X : F \supset S\}$.

Ejemplo. *Si $(X, \mathcal{T})$ e.t. $x \in X$. El sistema de entornos de x es filtro en X.*

Observación. *Los filtros son demasiado grandes. En la práctica usamos bases de filtros.*

Definición 6.4 (Base de Filtro)**.** *Sea X conjunto no vacío, $\mathcal{F}$ filtro en X. Se llama base del filtro $\mathcal{F}$ a cualquier subfamilia $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ tal que $\forall F \in \mathcal{F}, \exists B \in \mathcal{B} : B \subset F$. Decimos que $\mathcal{B}$ genera $\mathcal{F}$.*

Ejemplo. *$\forall X$ conjunto, $S \subset X$, $\mathcal{B} = \{S\}$ es una base de filtro.*

Ejemplo. *Si $(X, \mathcal{T})$ e.t., $\forall x \in X, \forall \mathcal{B}(x)$ base de entornos de x es una base de filtro de $\mathcal{V}(X)$.*

Proposición 6.1 (Caracterización Base de Filtro)**.** *Sea X conjunto no vacío. Una familia $\mathcal{B} \neq \emptyset$ de conjuntos no vacíos es base de filtros para algún filtro de $X \Leftrightarrow \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) *Si $\mathcal{B}$ es base para algún $\mathcal{F}$ filtro $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ es subfamilia de $\mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$. Luego, $\forall B_i \in \mathcal{B}, i \in \{1, 2\} \Rightarrow B_i \in \mathcal{F} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

($\Leftarrow$) *Sea $\mathcal{F} = \{F \subset X : F \supset B$ para algún $B \in \mathcal{B}\} \supset \mathcal{B}$ es una subfamilia no vacía de conjuntos no vacíos. Veamos que cumple la definición de filtro.*

(I) *$\forall F_i \in \mathcal{F}, \forall i \in \{1, 2\} \Rightarrow \exists B_i \in \mathcal{B} : B_i \subset F_i$. Entonces, por hipótesis $\exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset F_1 \cap F_2 \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.*

(II) *$\forall F \in \mathcal{F}, \forall F' \subset X, F' \supset F \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset F \subset F' \Rightarrow F' \in \mathcal{F}$.*

Definición 6.5 (Comparación Filtros)**.** *Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ dos filtros en X. Si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ se dice que $\mathcal{F}_2$ es más fino que $\mathcal{F}_1$*

Definición 6.6 (Punto Límite en Filtro)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $\mathcal{F}$ filtro en X, $x \in X$. Se dice que $\mathcal{F}$ converge a x en $(X, \mathcal{T})$ (o que x es un punto límite de $\mathcal{F}$) si $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}$, es decir, el sistema de entornos de x es más fino que el filtro $\mathcal{F}$.*

Notación. $\mathcal{F} \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x$ *o* $x = \lim \mathcal{F}$.

Definición 6.7 (Aglomeración)**.** *Sea $(X,\mathcal{T})$ e.t., $\mathcal{F}$ filtro en X, $x \in X$. Se dice que x es un punto de aglomeración de $\mathcal{F}$ en $(X,\mathcal{T})$ si y solo si $\forall U^x$ entorno de x en $(X,\mathcal{T})$, $\forall F \in \mathcal{F}$ tal que $U^x \cap F \neq \emptyset$.*

Observación. *La definición de límite es más fuerte que la de aglomeración.*

Proposición 6.2. *Sea $(X,\mathcal{T})$ e.t., $\mathcal{F}$ filtro en X, $x \in X$. Si $\mathcal{F} \to x$, entonces x es un punto de aglomeración de $\mathcal{F}$.*

Demostración. $\mathcal{F} \to x \Leftrightarrow \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F} \Rightarrow \forall U^x \in \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}, \forall F \in \mathcal{F} \Rightarrow U^x, F \in \mathcal{F} \Rightarrow U^x \cap F \in \mathcal{F} \Rightarrow U^x \cap F \neq \emptyset \Rightarrow x$ *es punto de aglomeración de* $\mathcal{F}$.

Proposición 6.3 (Caracterización punto de aglomeración)**.** *Sea $(X,\mathcal{T})$ e.t., $\mathcal{F}$ filtro en X, $x \in X$. Entonces, x es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$ en $(X,\mathcal{T}) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F} \equiv \mathrm{Agl}(F)$*

Demostración. x *punto de aglomeración de* $\mathcal{F} \Leftrightarrow \forall U^x, \forall F \in \mathcal{F}, U^x \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall F \in \mathcal{F}, x \in \mathcal{F} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$.

Proposición 6.4 (Convergencia Sucesiones)**.** *Sea $(X,\mathcal{T})$ e.t. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en X, $x \in X$. Entonces, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x \Leftrightarrow$ el filtro generado por $\{\{x_n : n \geq m\} : m \in \mathbb{N}\}$ (familia no vacía de conjuntos no vacíos es base de filtro) converge a x en $(X,\mathcal{T})$.*

Demostración.

Sea $\mathcal{B} = \{\{x_n : n \geq m\} : m \in \mathbb{N}\}$. *Entonces,* $\mathcal{B}$ *es base de filtro* $\mathcal{F}$ *en* $X \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \Leftrightarrow \forall U^x, \exists m \in \mathbb{N} : x_n \in U^x, \forall n \geq m \Leftrightarrow \forall U^x, \exists m \in \mathbb{N}$ *tal que* $\{x_n : n \geq m\} \subset U^x$ *donde* $\{x_n : n \geq m\} \in \mathcal{B} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \forall U^x, U^x \in \mathcal{F}$ *filtro engendrado por* $\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F} \to x$.

Proposición 6.5 (Caracterización Punto Aglomeración)**.** *Sea $(X,\mathcal{T})$ e.t., $x\in X, \mathcal{F}$ filtro en X. Entonces, x es punto de aglomeración de $\mathcal{F} \Leftrightarrow \exists\mathcal{F}'$ filtro en X tal que $\mathcal{F}\subset\mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}'\to x$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) *x punto de aglomeración $\Rightarrow \forall U^x$ entorno de x, $\forall F\in\mathcal{F}, U^x\cap F\neq\emptyset$. Sea $\mathcal{B}=\{U\cap F : U\in\mathcal{V}(x), F\in\mathcal{F}\}$. Entonces, $\mathcal{B}$ es base de filtro en X. Sea $\mathcal{F}'$ el filtro engendrado por $\mathcal{B}$. Veamos que cumple las condiciones.*

(I) *$\forall F\in\mathcal{F}\Rightarrow F\supset U\cap F, \forall U\in\mathcal{V}(x)$ donde $U\cap F\in\mathcal{B}\subset\mathcal{F}'\Rightarrow F\in\mathcal{F}'\Rightarrow\mathcal{F}\subset\mathcal{F}'$.*

(II) *$\forall U\in\mathcal{V}(x), U\supset U\cap F, \forall F\in\mathcal{F}$ donde $U\cap F\in\mathcal{B}\subset\mathcal{F}'\Rightarrow U\in\mathcal{F}'\Rightarrow\mathcal{V}(x)\subset\mathcal{F}'\Leftrightarrow\mathcal{F}'\to x$.*

($\Leftarrow$) *Suponemos que $\mathcal{F}'$ filtro tal que $\mathcal{F}\subset\mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}\to x$. Entonces, $\forall U\in\mathcal{V}(x)\subset\mathcal{F}', \forall F\in\mathcal{F}\subset\mathcal{F}'\Rightarrow U,F\in\mathcal{F}'\Rightarrow U\cap F\in\mathcal{F}'\Rightarrow U\cap F\neq\emptyset\Rightarrow x$ punto de aglomeración de $\mathcal{F}$.*

Proposición 6.6 (Caracterización de puntos adherentes)**.** *Sea $(X,\mathcal{T})$ e.t., $x\in X$, $M\neq\emptyset\subset X$. Entonces, $x\in\overline{M}\Leftrightarrow\exists\mathcal{F}$ filtro en X tal que $\mathcal{F}\xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x$ y $M\in\mathcal{F}$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) *$\forall U^x$ entorno de x, $U^x\cap M\neq\emptyset$. Sea $\mathcal{B}=\{U\cap M : U\in\mathcal{V}(x)\}$ familia no vacía de conjuntos no vacíos, es base de filtros en X. Sea $\mathcal{F}$ el filtro engendrado por $\mathcal{B}$ Veamos que cumple las condiciones.*

(I) *$M\supset U\cap M\in\mathcal{B}, \forall U\in\mathcal{V}(x)\Rightarrow M\in\mathcal{F}$.*

(II) *$\forall U\in\mathcal{V}(x), U\supset U\cap M\in\mathcal{B}\Rightarrow U\in\mathcal{F}\Rightarrow\mathcal{V}(x)\subset\mathcal{F}\Leftrightarrow\mathcal{F}\to x$.*

($\Leftarrow$) *$\mathcal{F}$ filtro tal que $M\in\mathcal{F},\mathcal{F}\to x$. Entonces, $\forall U\in\mathcal{V}(x)\subset\mathcal{F}\Rightarrow U\cap M\in\mathcal{F}\Rightarrow U\cap M\neq\emptyset\Rightarrow x\in\overline{M}$.*

Observación. *Sean X, Y conjuntos, $f : X \to Y$ aplicación, $\mathcal{F}$ filtro. Entonces, $\{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$ es base de filtro ya que $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}, F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow f(F_1 \cap F_2) \subset f(F_1) \cap f(F_2)$ y por tanto el conjunto verifica la caracterización de base de filtro.*

Notación. *$f(\mathcal{F})$ denota el filtro engendrado por la base $\{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$.*

Proposición 6.7 (Continuidad Aplicaciones)**.** *Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : X \to X'$ aplicación, $x \in X$. Entonces, f es continua en $x \Leftrightarrow \forall \mathcal{F}$ en X tal que $\mathcal{F} \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x$ se tiene que $f(\mathcal{F}) \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} f(x)$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) *Suponemos f continua y $\mathcal{F} \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x$. Entonces, $\forall V \in \mathcal{V}(f(x)) \xRightarrow{f\ cont.} \exists U \in \mathcal{V}(x) : f(U) \subset V$. Como $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}$, entonces $V \in f(\mathcal{F})$. Ahora, $\mathcal{V}(f(x)) \subset f(\mathcal{F}) \Leftrightarrow f(\mathcal{F}) \to f(x)$.*

($\Leftarrow$) *Como $\mathcal{V}(x)$ es filtro y esta contenido en si mismo, entonces $\mathcal{V}(x) \to x$ y por hipótesis $\Rightarrow f(\mathcal{V}(x)) \to f(x) \Leftrightarrow \mathcal{V}(f(x)) \subset f(\mathcal{V}(x))$. Por tanto, $\forall V \in \mathcal{V}(f(x)), V \in f(\mathcal{V}(x)) \Rightarrow \exists U \in \mathcal{V}(x) : f(U) \subset V \Rightarrow f$ continua en x.*

Proposición 6.8. *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ familia no vacía de e.t., $x \in \prod_{j\in J} X_j$, $\mathcal{F}$ filtro de $\prod_{j\in J} X_j$. Entonces, $\mathcal{F} \xrightarrow{(\prod_{j\in J} j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)} x \Leftrightarrow \forall j \in F, p_j(\mathcal{F}) \xrightarrow{(X_j,\mathcal{T}_j)} x_j = p_j(x)$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) *Por la proposición anterior.*

($\Leftarrow$) *$\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset U$ tal que $B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k}), x_{j_k} \in U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}, \forall k \in \{1, \cdots, n\}$. Entonces, $\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \mathcal{V}(x_{j_k}) \subset p_{j_k}(\mathcal{F}) \Rightarrow U_{j_k} \in p_{j_k}(\mathcal{F}) \Rightarrow \forall k \in \{1, \cdots, n\}, \exists F_k \in \mathcal{F} : p_{j_k}(F_k) \subset U_{j_k}$. Por tanto, $\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \exists F_k \in \mathcal{F}$ tal que $F_k \subset p_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$. Entonces, cortando todo tenemos $F_1 \cap \cdots \cap F_n \subset B \subset U$ donde $F_1 \cap \cdots \cap F_2 \in \mathcal{F}$ de manera que $U \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F} \Leftrightarrow$*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)} x.$$

Proposición 6.9 (Axioma de Zernado)**.** *Todo conjunto no vacío admite alguna buena ordenación (cada subconjunto tiene primer elemento).*

Proposición 6.10 (Axioma de Zorn)**.** *Dado un conjunto ordenado tal que toda cadena suya (subconjunto totalmente ordenado) tiene cota superior, entonces el conjunto tiene algún elemento maximal.*

Definición 6.8 (Ultrafiltro)**.** *Sea X conjunto, $\mathcal{F}$ filtro en X. Se dice que $\mathcal{F}$ es ultrafiltro si es maximal. (e.d. si no hay filtro estrictamente más fino que $\mathcal{F}$).*

Proposición 6.11 (Existencia Ultrafiltro)**.** *Sea X conjunto, $\mathcal{F}$ filtro en X. Entonces, existe algún ultrafiltro más fino que $\mathcal{F}$.*

Demostración. *Sea $\mathcal{Y}$ la familia de todos los filtros de X más finos que $\mathcal{F}$, ordenada por $\subset$. Si $\{F_j\}_{j\in J}$ es cadena en $\mathcal{Y}$, tenemos que la unión de los filtros de esa cadena es cota superior, $\bigcup_{j\in J} \mathcal{F}_j$. Vemos que es filtro.*

- $\forall F_1, F_2 \in \bigcup_{j\in J} \mathcal{F}_j \Rightarrow \exists j_i \in J : F_i \in \mathcal{F}_{j_i}$. *Entonces,* $\mathcal{F}_{j_1} \subset \mathcal{F}_{j_2}$ *o* $\mathcal{F}_{j_k} \subset \mathcal{F}_{j_2} \subset \mathcal{F}_{j_1}$. *Suponemos que* $\mathcal{F}_{j_1} \subset \mathcal{F}_{j_2}$. *Ahora,* $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{j_k}$ *filtro* $\Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_{j_2} \Rightarrow F_{j_1} \cap F_{j_2} \in \bigcup_{j\in J} \mathcal{F}_j$.

- $\forall F \in \bigcup_{j\in J} \mathcal{F}_j, \forall F' \subset X : F' \supset F \Rightarrow \exists j_0 \in J, F \in \mathcal{F}_{j_0}$ *finito* $\Rightarrow F' \in \mathcal{F}_{j_0} \subset \bigcap_{j\in J} \mathcal{F}_j$.

donde $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_{j_0} \subset \bigcup_{j\in J} \mathcal{F}_j, \forall j_0 \in J$. *Estamos en condicones de aplicar el Axioma de Zorn, entonces $\exists$ elemento maximal de $\mathcal{Y} \Rightarrow \mathcal{G}$ ultrafiltro, $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.*

Proposición 6.12 (Caracterización Ultrafiltro)**.** *Sea X conjunto $\mathcal{F}$ filtro en X. Entonces, $\mathcal{F}$ es ultrafiltro $\Leftrightarrow \forall E \subset X, E \in \mathcal{F}$ o $X \setminus E \in \mathcal{F}$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) *Suponemos que $\mathcal{F}$ ultrafiltro y $\forall E \subset X$. Entonces, $\forall F \in \mathcal{F}$ se tiene que $F \cap E \neq \emptyset$ o $F \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$. (no puede pasar que $\exists F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tal que $F_1 \subset E$ y $F_2 \subset X \setminus E$. En este caso, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ que sería absurdo). Suponemos que $\forall F \in \mathcal{F}, F \cap E \neq \emptyset$. Entonces, $\{F \cap E : F \in \mathcal{F}\}$ familia no vacía de conjuntos no vacíos donde $F \cap E \in \mathcal{F}, \forall F \in \mathcal{F} \Rightarrow$ es base de filtros. Llamamos $\mathcal{G}$ a el fitro engendrado por la base. Entonces, $\forall F \in \mathcal{F}, F \supset F \cap E \Rightarrow F \in \mathcal{G}$, es decir, $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Pero $\mathcal{F}$ es ultrafiltro. Por tanto, $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Como $E \supset F \cap E, \forall F \in \mathcal{F}$, entonces $E \in \mathcal{G} = \mathcal{F}$.*

($\Leftarrow$) *Por la proposición anterior, $\exists \mathcal{G}$ ultrafiltro en $X \Rightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Si $\mathcal{F} \not\subset \mathcal{G}$(contenido propio), entonces $\exists G \in \mathcal{G} : G \notin \mathcal{F} \Rightarrow X \setminus G \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G} \Rightarrow G, X \setminus G \in \mathcal{G}$ filtro, que es absurdo.*

Proposición 6.13. *Sea $X, Y \neq \emptyset$ conjuntos, $f : X \to Y$ aplicación continua. Si $\mathcal{F}$ es ultrafiltro en X, entonces $f(\mathcal{F})$ es ultrafiltro en $\mathcal{Y}$.*

Demostración. *$\forall E \subset Y \Rightarrow f^{-1}(E) \subset X$. Entonces, como $\mathcal{F}$ es ultrafiltro, tenemos que $f^{-1}(E) \in \mathcal{F}$ o $X \setminus f^{-1}(E) \in \mathcal{F}$.*

- *Si $f^{-1}(E) \in \mathcal{F} \xRightarrow{f(f^{-1}(E)) \subset E} E \in f(\mathcal{F})$.*
- *Si $X \setminus f^{-1}(E) \in \mathcal{F} \xRightarrow{f(X \setminus f^{-1}(E)) \subset Y \setminus E} Y \setminus E \in f(\mathcal{F})$.*

Entonces, por la proposición anterior, $f(\mathcal{F})$ es ultrafiltro.

Proposición 6.14. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $\mathcal{F}$ filtro, $x \in X$. Entonces, x es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$ en $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow \exists \mathcal{G}$ ultrafiltro $: \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \to x$.*

Demostración. *Hemos visto que x es putno de aglomeración de $\mathcal{F} \Leftrightarrow \exists \mathcal{F}'$ filtro tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}' \to x$. También hemos visto que para todo filtro existe ultrafiltro más fino.*

($\Rightarrow$) *x punto de aglomeración de $\mathcal{F} \Rightarrow \exists \mathcal{F}'$ tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}' \to x$. Por tanto, $\exists \mathcal{G}$ ultrafiltro tal que $\mathcal{F}' \subset \mathcal{G}$ donde $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. Como $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}'$,* *entonces $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{G} \to x$.*

($\Leftarrow$) *Equivalente a la caracterización de punto de aglomeración.*

6.2. Redes

Definición 6.9 (Conjunto Dirigido)**.** *Sea $D \neq \emptyset$ conjunto y $\leq$ relación binaria en D tal que es reflexiva y transitiva, y $\forall d_1, d_2 \in D, \exists d_3 \in D : d_1, d_2 \leq d_3$. El par $(D, \leq)$ se llama conjunto dirigido.*

Definición 6.10 (Red)**.** *Sea $X \neq \emptyset$ conjunto se llama red en X a cualquier aplicación s de un conjunto dirigido en X,*

$$s : D \to X$$

$$d \mapsto s(d) \equiv s_d$$

Notación. *Una red s se denota $s \equiv (s_d)_{d \in D}$.*

Ejemplo. *Toda sucesión es una red.*
Ejemplo. *Toda aplicación $s : \mathbb{R} \to X$ es red en X.*

Definición 6.11 (Subred)**.** *Sea $X \neq \emptyset$ conjunto, s red en X. Se llama subred de s a cualquier red $t : \Lambda \to X : t = s \circ \varphi$ siendo $\varphi : \Lambda \to D$ aplicación que cumple*

(I) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda, \lambda_1 \leq \lambda_2 \Rightarrow \varphi(\lambda_1) \leq \varphi(\lambda_2)$. Es decir, φ es creciente.

(II) $\forall d \in D, \exists \lambda \in \Lambda : \alpha(\lambda) \geq d$. Es decir, φ es cofinal.

de esta manera $t = (t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = ((s \circ \varphi)(\lambda))_{\lambda \in \Lambda} = (s_{\varphi(\lambda)})_{\lambda \in \Lambda}$.

Observación. *Toda subsucesión de una sucesión es una subred suya.*
Observación. *Dada una sucesión puede haber subrees que no son sucesiones.*

Definición 6.12 (Punto límite)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., s red en X, $x \in X$. Se dice que la red s converge a x en $(X, \mathcal{T})$ (o que x es punto límite de s) si $\forall U^x$ entorno de x en $(X, \mathcal{T})$, $\exists d_0 \in D : s_d \in U^x, \forall d \geq d_0$.*

Observación. *Los conjuntos dirigidos tienen ramificaciones $\Rightarrow$ no todos están en el entorno (a partir de cierto n) como en los puntos límite de las suceciones.*

Notación. $s = (s_d)_{d\in D} \xrightarrow{(X,\mathcal{T})}$ *o* $x \in \lim s$.

Definición 6.13 (Aglomeración)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $s = (s_d)_{d\in D}$ red en X, $x \in X$. Se dice que x es un punto de aglomeración de s en $(X, \mathcal{T})$ si $\forall U^x$ entorno de x, $\forall d_0 \in D, \exists d \geq d_0 : s_d \in U^x$.*

Proposición 6.15. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $s = (s_d)_{d\in D}$ red en X, $x \in X$. Si s converge a x en $(X, \mathcal{T})$ entonces, x es punto de aglomeración de s.*

Demostración. *Por la definición de convergencia, tenemos que $\forall U^x, \exists d_0 \in D : s_d \in U^x, \forall d \geq d_0$. Consideramos, $\forall d_1 \in D \xRightarrow{\text{cj. dirigido}} \exists d_2 \in D : d_0, d_1 \leq d_2 \Rightarrow s_{d_2} \in U^x \Rightarrow x$ punto de aglomeración de s.*

Proposición 6.16. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. s red en X, $x \in X$. Entonces, x es punto de aglomeración de s en $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow$ existe alguna subred de s que converge a x en $(X, \mathcal{T})$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) *A partir de la definición de punto de aglomeración definimos*

$$\Lambda = \big\{(d, U) : d \in D, U \in \mathcal{V}(x) : s_d \in U\big\}$$

como x es punto de aglomeración de s, entonces $\Lambda \neq \emptyset$. Definimos ahora una relación binaria

$$(d_1, U_1) \leq (d_2, U_2) \Leftrightarrow d_1 \leq d_2, U_2 \subset U_1$$

esta relación es reflexiva, transitiva y D es conjunto dirigido. Por tanto, $(\Lambda, \leq)$ es conjunto dirigido. Definimos una aplicación

$$\varphi : \Lambda \to D : (d, U) \to \varphi(d, U) \equiv d$$

donde φ es creciente y cofinal. Por tanto, $s \circ \varphi \equiv t$ es subred de S. Veamos que converge a x.

Como x es punto de aglomeración, entonces $\forall U^x$ entorno de x, $\forall d \in D, \exists d_0 \in D$ tal que $d_0 \geq d, s_{d_0} \in U^x$. Por tanto, existe $(d_0, U^x) \in \Lambda \Rightarrow \Lambda \neq \emptyset$. Ahora, $\forall (d,U) \in \Lambda : (d,U) \geq (d_0, U^x) \Rightarrow t(d,U) = (s \circ \varphi)(d,U) = s(d) \in U \subset U^x \Rightarrow t = (t_{\varphi(d)})_{d \in D} \to x$.

$(\Leftarrow)$ *Sea $t = (t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ subred de s tal que $t \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x$. Entonces, $\varphi : \Lambda \to D$ aplicación creciente y cofinal con $s \circ \varphi = t$. Ahora, $t \to x$, entonces*

$$\forall U^x \text{entorno de } x, \exists \lambda_0 \in \Lambda : t_\lambda \in U^x, \forall \lambda \geq \lambda_0$$

y por ser t subred, t es cofinal, entonces

$$\forall d_0 \in D, \exists \lambda_1 \in \Lambda : \varphi(\lambda_1) \geq d_0.$$

Como Λ es conjunto dirigido, entonces

$$\exists \lambda^* \in \Lambda : \lambda_0, \lambda_1 \leq \lambda^*$$

Sea $\varphi(\lambda^*) \equiv d^* \in D$, como φ es creciente

$$\varphi(d^*) \geq \varphi(\lambda_0), \varphi(\lambda_1)$$

donde $\varphi(\lambda_1) \geq d_0 \Rightarrow d^* \geq d_0$. Por tanto, $s_{d^*} = s(\varphi(\lambda^*)) = t(\lambda^*) \in U^x, \forall \lambda^* \geq \lambda_0$. Entonces, x es punto de aglomeración s en $(X, \mathcal{T})$.

Proposición 6.17. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $M \subset X$ no vacío, $x \in X$. Entonces, x es punto adherente ($x \in \overline{M}$) $\Leftrightarrow$ existe una red en M tal que la red converge a x en $(X, \mathcal{T})$.*

Demostración.

$(\Rightarrow)$ *Por la definición de punto afherente, $x \in \overline{M} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{V}(x), U \cap M \neq \emptyset$. Definimos relación binaria*

$$U_1, U_2 \in \mathcal{V}(x), \quad U_1 \leq U_2 \Leftrightarrow U_2 \subset U_1,$$

entonces, $(\mathcal{V}(x), \leq)$ es conjunto dirigido, ya que $\forall U_1, U_2, U_1 \in \mathcal{V}(x), U_1 \cap$

$U_2 \in \mathcal{V}(x)$ *y* $U_2, U_1 \supset U_1 \cap U_2$. *Definimos una res* s *en* $M \subset X$

$$s : \mathcal{V}(x) \to x : u \mapsto s(u) = s_u \in M.$$

Como $\forall U^x$ *entorno de* x, $U^x \in \mathcal{V}(x)$, *entonces* $\forall U \in \mathcal{V}(x) : U \geq U^x, s_u \in U \subset U^x \Rightarrow s = (s_u)_{u \in \mathcal{V}(x)} \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x$.

($\Leftarrow$) $\forall U^x$ *entorno de* x, $\exists d_0 \in D : d \geq d_0, s_d \in U^x, s_d \in M \Rightarrow s_d \in U^x \cap M \Leftrightarrow x \in \overline{M}$.

Observación. *Sea* X, Y *conjuntos,* $f : X \to Y$ *aplicación. Si* s *es una red en* X*, entonces* $f \circ s$ *es una red en* Y.

Proposición 6.18. *Sea* $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ *e.t.,* $f : X \to Y$ *aplicación,* $x_0 \in X$. *Entonces,* f *es continua en* $x_0 \Leftrightarrow \forall s$ *red en* X *tal que* $s \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x_0$ *se tiene que* $f \circ s \xrightarrow{(Y,\mathcal{S})} f(x_0)$.

Demostración.

($\Rightarrow$) $\forall V^{f(x_0)}$, *consideramos* s *red en* X *tal que* $s \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x_0$. *Como* f *es continua, entonces* $\exists U^{x_0}$ *entorno de* x_0 *en* $(X, \mathcal{T})$ *tal que* $f(U^{x_0}) \subset V^{f(x_0)}$. *Por tanto,* $\exists d_0 \in D : s_d \in U^{x_0}, \forall d \geq d_0 \Rightarrow f(s_d) \in V^{f(x_0)}, \forall d \geq d_0$.

($\Leftarrow$) *Sea* $D = \{(x, U) : x \in X,\ U \in \mathcal{V}(x),\ x \in U\}$. *Entonces,* $D \neq \emptyset$, *ya que siempre hay un entorno* U^{x_0} *de* x_0 *en* $(X, \mathcal{T})$. *Defininos una relación binaria*

$$(x_1, U_1) \leq (x_2, U_2) \Leftrightarrow U_2 \subset U_1$$

entonces, $(D, \leq)$ *es conjunto dirigido. Sea* s *red en* X

$$s : D \to X : (x, U) \mapsto s(x, U) = x.$$

Veamos $s \to x$

$$\forall U^{x_0}, \exists (x_0, U^{x_0}) \in D,$$
$$\forall (x, U) \in D : (x, U) \geq (x_0, U^{x_0}),$$
$$s(x, U) = x \in U \subset U^{x_0}$$
$$\Rightarrow s \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x.$$

Ahora, como $f \circ s \xrightarrow{(Y,\mathcal{S})} f(x)$*, entonces* $\forall V^{f(x_0)}$ *entorno de* $f(x_0)$ *en* $(Y, \mathcal{S})$*,* $\exists (z_0, U_0) \in D : (f \circ s)(x, U) = f(x) \in V^{f(x_0)}, \forall (x, U) \geq (z_0, U_0)$*. Como* $\forall x \in U_0$ *se tiene que* $(x, U_0) \geq (z_0, U_0) \Rightarrow f(x) \in V^{f(x_0)}$*, entonces* $\forall x \in U_0, f(x) \in V^{f(x_0)} \Rightarrow f(U_0) \subset V^{f(x_0)}$*. Por tanto,* f *es continua.*

Proposición 6.19. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia no vacía de e.t.,* $x \in \prod_{j\in J} X_j$*,* x *red en* $\prod_{j\in J} X_j$*. Entonces,* $s = (s_d)_{d\in D} \to x$ *en* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \Leftrightarrow p_j \circ s \xrightarrow{(X_j,\mathcal{T}_j)} x_j, \forall j \in J$*.*

Demostración.

$(\Rightarrow)$ *Dado que* p_j *es continua,* $s \to x \Rightarrow (p_j \circ s) \to x_j, \forall j \in J$*.*

$(\Leftarrow)$ $\forall U^x$ *entorno de* x *en* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$*,* $\exists B \in \mathcal{B}$ *base de* $\prod_{j\in J} \mathcal{T}_j$ *:* $x \in B \subset U^x$ *donde*

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k}).$$

Ahora $x_{j_k} \in U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}, \forall k \in \{1, \cdots, n\}$ *y* $s \xrightarrow{(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)} x$*, entonces*

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \exists d_k \in D : p_{j_k}(s_d) \in U_{j_k}, \forall d \geq d_k.$$

Por ser D *conjunto dirigido,* $\exists d_0 \in D : d_1, \cdots, d_n \leq d_0$*. Por tanto,*

$$\forall d \geq d_0, p_{j_k}(s_d) \in U_{j_k}, \quad \forall k \in \{1, \cdots, n\}$$

$$\Rightarrow s_d \in p_{j_k}^{-1}(U_{j_k}), \forall k \in \{1, \cdots, n\}, \forall d \geq d_0 \Leftrightarrow s_d \in B \subset U^x, \forall d \geq d_0$$

Entonces, $s \xrightarrow{(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)} x$*.*

Definición 6.14 (Red Universal)**.** *Sea* $X \neq \emptyset$ *conjunto,* s *red en* S*. Se dice que* s *es red universal si* $\forall M \subset X$ *se tiene que ó* $\exists d_1 \in D : s_d \in M, \forall d \geq d_1$ *ó* $\exists d_2 \in D : s_d \in X \setminus M, \forall d \geq d_2$*.*

Proposición 6.20. *Sea X, Y conjuntos no vacíos, $f : X \to Y$ aplicación continua, s red universal en X, entonces $f \circ s$ es red universal en Y.*

Demostración. $\forall M \subset Y, f^{-1}(M) \subset X$, *$s$ red universal*

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists d_1 \in D : s_d \in f^{-1}(M), \forall d \geq d_1 \\ \exists d_2 \in D : s_d \in X \setminus f^{-1}(M), \forall d \geq d_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists d_1 \in D : f(s_d) \in M, \forall d \geq d_1 \\ \exists d_2 \in D : s_d \in Y \setminus M, \forall d \geq d_2 \end{cases}$$

Por tanto, $f \circ s$ es red universal.

6.3. Resultados

Definición 6.15 (Filtro Asociado)**.** *Sea X conjunto no vacío, s red en X. Se llama filtro asociado a la red s al filtro $\mathcal{F}_s$ engendrado por la base de filtro de las secciones $\{B_{d_0} : d_0 \in D\}$ tal que $B_{d_0} = \{s_d : d \geq d_0\}$.*

Definición 6.16 (Red Asociada)**.** *Sea X conjunto no vacío, $\mathcal{F}$ filtro en X, $D_{\mathcal{F}} = \{(x, F) : x \in F, F \in \mathcal{F}\}, (x_1, F_1) \leq (x_2, F_2) \Leftrightarrow F_2 \subset F_1$. Se llama red asociada al filtro $\mathcal{F}$ a $s_{\mathcal{F}} : D_{\mathcal{F}} \to X : (x, F) \to s_{\mathcal{F}}(x, F) = x$.*

Proposición 6.21. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $x_0 \in X$, entonces*

(I) *Si s es una red en X, $s \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x_0 \Leftrightarrow \mathcal{F}_s \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x_0$.*

(II) *Si $\mathcal{F}$ filtro en X, $\mathcal{F} \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x_0 \Leftrightarrow s_{\mathcal{F}} \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x_0$.*

Demostración.

(I) *Como s es red en $(X, \mathcal{T})$ y converge a x tenemos que*

$$s \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x_0 \Leftrightarrow \forall U^{x_0}, \exists d_0 \in D : s_d \in U^{x_0}, \forall d \geq d_0$$

$$\Leftrightarrow \forall U^{x_0}, \exists d_0 \in D : B_{d_0} \subset U^{x_0}$$

$$\Leftrightarrow \forall U^{x_0}, U^{x_0} \in \mathcal{F}_s$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{V}(x_0) \subset \mathcal{F}_s$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{F}_s \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x_0$$

(II)

($\Rightarrow$) *Sea $\mathcal{F}$ filtro en $(X,\mathcal{T})$ y $s_{\mathcal{F}}$ la red asociada a $\mathcal{F}$. Como $\mathcal{F} \to x$ $\Leftrightarrow \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}$, entonces $\forall U^{x_0} \in \mathcal{V}(x_0) \subset \mathcal{F}, \exists (x_0, U^{x_0}) \in D_{\mathcal{F}}$ tal que $\forall (x,F) \in D_{\mathcal{F}}, (x,F) \geq (x_0, U^{x_0})$. Por tanto, $s_{\mathcal{F}}(x,F) = x \in F \subset U^{x_0} \Rightarrow s_{\mathcal{F}} \to x_0$.*

($\Leftarrow$) *Sea $\mathcal{F}$ filtro en $(X,\mathcal{T})$ y $s_{\mathcal{F}}$ la red asociada tal que $s_{\mathcal{F}} \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x_0$. Entonces, $\forall U^{x_0} \in \mathcal{V}(x_0), \exists (z_0, F) \in D_{\mathcal{F}}$ tal que $\forall (z,F) \in D_{\mathcal{F}}, (z,F) \geq (z_0, F_0), s_{\mathcal{F}}(z,F) \in U^{x_0}$.*

Ahora, $\forall z \in F_0, (z, F_0) \in D_{\mathcal{F}} \Rightarrow (z, F_0) \geq (z_0, F_0)$. Por tanto, $s_{\mathcal{F}}(z, F_0) \in U^{x_0} \Rightarrow F_0 \in \mathcal{F}$ y $F_0 \subset U^{x_0} \Rightarrow U^{x_0} \in \mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{V}(x_0) \subset \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} x$.

Proposición 6.22. *Sea $(X,\mathcal{T})$ e.t.. Son equivalentes:*

(I) $(X,\mathcal{T})$ T_2,

(II) $\forall \mathcal{F}$ filtro de X convergente en $(X,\mathcal{T})$ tiene límite único,

(III) Toda red de X convergente en $(X,\mathcal{T})$ tiene límite único.

Demostración.

a) $\Rightarrow$ b) $\mathcal{F} \to x$ y $\mathcal{F} \to y, x \neq y \Rightarrow \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}$ y $\mathcal{V}(y) \subset \mathcal{F}$, entonces $\forall U^x$ entorno de x en $(X,\mathcal{T})$, $\forall U^y$ entorno de y en $(X,\mathcal{T})$, $U^x \cap U^y \in \mathcal{F} \Rightarrow U^x \cap U^y \neq \emptyset \Rightarrow (X,\mathcal{T})$ no es Hausdorff. Por tanto, el límite es único.

b) $\Rightarrow$ a) Suponemos que $(X,\mathcal{T})$ no es Hausdorff $\Leftrightarrow \exists x, y \in X : x \neq y$ tal que

$$\forall U^x, \forall U^y, U^x \cap U^y \neq \emptyset.$$

Sea $\mathcal{B} = \{U^x \cap U^y : U^x \in \mathcal{V}(x), U^y \in \mathcal{V}(y)\}$. Entonces, $\mathcal{B}$ es una famila no vacía de conjuntos no vacíos y

$$\forall U_1^x \cap U_1^y, U_2^x \cap U_2^y \in \mathcal{B},$$

$$(U_1^x \cap U_1^y) \cap (U_2^x \cap U_2^y) = (U_1^x \cap U_2^y) \cap (U_1^y \cap U_2^x)$$
$$(U_1^x \cap U_2^y) \cap (U_1^y \cap U_2^x) \supset U_1^x \cap U_2^y, U_1^y \cap U_2^x \in \mathcal{B}.$$

Por tanto, $\mathcal{B}$ es base de filtro en X. Sea $\mathcal{F}$ el filtro engendrado por $\mathcal{B}$, entonces

$$\forall U^x \in \mathcal{V}(x), \forall U^y \in \mathcal{V}(y), U^x \cap U^y \in \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F} \text{ y } \mathcal{V}(y) \subset \mathcal{F}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{F} \to x \text{ y } \mathcal{F} \to y, x \neq y$$

contradice que el límite sea único $\Rightarrow (X, \mathcal{T})$ es Hausdorff.

b) $\Rightarrow$ c) Suponemos $\forall \mathcal{F}$ filtro de X tal que $\mathcal{F} \to x$ tiene límite único y $s_{\mathcal{F}} \to x$ y $s_{\mathcal{F}} \to y$ con $x \neq y$. Pero $s_{\mathcal{F}} \to z \Leftrightarrow \mathcal{F} \to z$. Lo que contradice que el límite del filtro sea único.

c) $\Rightarrow$ b) De manera análoga, suponemos que $\forall s$ red en X convergente en $(X, \mathcal{T})$, s tiene límite único y que $\exists \mathcal{F}$ filtro en X convergente en $(X, \mathcal{T})$ tal que el límite no es único. Pero $s \to z \Leftrightarrow \mathcal{F}_s \to z$. Lo que contradice que el límite sea único.

Proposición 6.23. *Sea X conjunto no vacío. Entonces,*

(I) *Si s es red en X; s es red universal $\Leftrightarrow \mathcal{F}_s$ es ultrafiltro.*

(II) *Si $\mathcal{F}$ filtro en X; $\mathcal{F}$ es ultrafiltro $\Leftrightarrow s_{\mathcal{F}}$ es red universal.*

Demostración.

(I) *s red universal*

$$\Leftrightarrow \forall E \subset X, \quad \begin{cases} \text{ó } \exists d_1 \in D : s_d \in E, \forall d \geq d_1 \\ \text{ó } \exists d_2 \in D : s_d \in X \setminus E, \forall d \geq d_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall E \subset X, \quad \begin{cases} \text{ó } \exists d_1 \in D : B_{d_1} \subset E \\ \text{ó } \exists d_2 \in D : B_{d_2} \subset X \setminus E \end{cases}$$

(el filtro asociado a s tiene como base $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}_s$ las secciones $\{B_{d_0} : d_0 \in D\}$ y $\forall F \in \mathcal{F}_s, F \subset F' \Rightarrow F' \in \mathcal{F}_s$)

$$\Leftrightarrow \forall E \subset X, \quad \begin{cases} \text{ó } E \in \mathcal{F}_s \\ \text{ó } X \setminus E \in \mathcal{F}_s \end{cases}$$

(es la caracterización de ultrafiltro)

$$\Leftrightarrow \mathcal{F}_s \text{ es ultrafiltro.}$$

(II) *Suponemos que $\mathcal{F}$ es ultrafiltro*

$$\Leftrightarrow \forall E \subset X, \begin{cases} \text{ó } E \in \mathcal{F}_s \\ \text{ó } X \setminus E \in \mathcal{F}_s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall E \subset X, \begin{cases} \text{ó } \forall x \in E, \exists (x,E) \in D_{\mathcal{F}} \text{ tal que} \\ \quad \forall (z,F) \in D_{\mathcal{F}}, (z,F) \geq (x,E), s_{\mathcal{F}}(z,F) \in E \\ \\ \text{ó } \forall y \in X \setminus E, \exists (y, X \setminus E) \in D_{\mathcal{F}} \text{ tal que} \\ \quad \forall (z,F) \in D_{\mathcal{F}}, (z,F) \geq (y, X \setminus E), s_{\mathcal{F}}(z,F) \in X \setminus E \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$s_{\mathcal{F}}$ *es red universal*

Proposición 6.24. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., son equivalentes*

(I) *$(X, \mathcal{T})$ es compacto,*

(II) *Todo filtro de X tiene algún punto de aglomeración en $(X, \mathcal{T})$,*

(III) *Todo ultrafiltro de X es convergente en $(X, \mathcal{T})$,*

(IV) *Toda red tiene algún punto de aglomeración en $(X, \mathcal{T})$,*

(V) *Toda red universal de X es converegente en $(X, \mathcal{T})$.*

Demostración. *Vemos* $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow c, b \Leftrightarrow d, c \Leftrightarrow e.$

a) $\Rightarrow$ b) *Sea* $\mathcal{F}$ *filtro en* X. *Consideramos* $\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$ *familia de cerrados de* $(X, \mathcal{T})$ *compacto con la propiedad de interescciones finitas (la adherencia es un conjunto cerrado y que los filtros tienen la propiedad de interescciones finitas se puede ver por inducción usando la definición de filtro). Entonces, por Prop. 4.3. se tiene que*

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \neq \emptyset$$

donde $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} = \mathrm{Agl}(\mathcal{F})$.

b) $\Rightarrow$ c) *A partir de la Prop. 6.5.* $\forall \mathcal{F}$ *filtro en* X, $\exists x \in X$ *punto de aglomeración de* $\mathcal{F}$. *Entonces,* $\forall \mathcal{F}'$ *ultrafiltro,* $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}' \to x$.

c) $\Rightarrow$ a) $(X, \mathcal{T})$ *no compacto* $\Leftrightarrow \exists \mathcal{U}$ *recubrimiento abierto sin subrecubrimientos finitos. Entonces,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall U_1, \cdots U_n \in \mathcal{U}, \bigcup_{i=1}^{n} U_i \neq X$$

$$\Rightarrow \{X \setminus (U_1, \cdots U_n), n \in \mathbb{N}, U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U}\}$$

es base de filtro en X. *Sea* $\mathcal{F}$ *el filtro engendrado por* $\mathcal{B}$, *entonces* $\exists \mathcal{F}'$ *ultrafiltro tal que* $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. *Ahora, por hipótesis* $\exists x \in X : \mathcal{F}' \to x \Rightarrow \subset \mathcal{F}'$ *y como* $x \in X \Rightarrow \exists U_0 \in \mathcal{U} : x \in U_0 \Rightarrow U_0 \in \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}'$, *entonces* $U_0 \in \mathcal{F}'$. *Por tanto,* $X \setminus U_0 \in \mathcal{B} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ *que es absurdo.*

b) $\Leftrightarrow$ d)

($\Rightarrow$) s *red en* $X \Rightarrow \mathcal{F}_s$ *filtro asociado a* s. *Por hipótesis,* $\mathcal{F}_s$ *tiene punto de aglomeración* $\Leftrightarrow \bigcup_{F \in \mathcal{F}_s} \overline{F} \neq \emptyset$. *Ahora,*

$$\bigcap_{d \in D} \overline{B_d} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_s} \overline{F} \neq \emptyset$$

donde $B_{d_0} = \{s_d : d \geq d_0\}$. *Por tanto,*

$$\forall d \in D, \exists x \in \bigcap_{d \in D} \overline{B_d}, x \in \overline{B_d}$$

$$\Leftrightarrow \forall U^x, U^x \cap B_d \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \exists d' \in D : d' \geq d, s_{d'} \in U^x$$

Por tanto, x es punto de aglomeración de s.

($\Leftarrow$) *$\mathcal{F}$ filtro en $X \Rightarrow s_{\mathcal{F}}$ red asociada a $\mathcal{F}$ en X, y toda red en tiene punto de aglomeración $\Rightarrow \exists x \in X$ punto de aglomeración de $s_{\mathcal{F}}$. Por tanto,*

$$\forall U^x, \forall F \in \mathcal{F}, F \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \in F : (z, F) \in D_{\mathcal{F}},$$

$$\exists (x, F') \in D_{\mathcal{F}} : (x, F') \geq (z, F),$$

$$s_{\mathcal{F}}(x, F') = x \in U^x.$$

donde $x \in F' \subset F \Rightarrow U^x \cap F \neq \emptyset \Rightarrow x \in \mathrm{Agl}(\mathcal{F})$.

c) $\Leftrightarrow$ e) $\mathcal{F}$ ultrafiltro en $X \Leftrightarrow s_{\mathcal{F}}$ red universal $\Rightarrow \exists x \in X : s_{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \mathcal{F} \to x$.

Teorema 6.1 (Tychonoff). *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia no vacía de e.t.. Entonces, $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$ es compacto $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ es compacto.*

Demostración (Filtros).

($\Rightarrow$) *Por la continuidad de las proyecciones.*

($\Leftarrow$) *$\forall \mathcal{F}$ ultrafiltro en $\prod_{j \in J} X_j \Rightarrow \forall j \in J, p_j(\mathcal{F})$ ultrafiltro en $X_j \overset{\text{hip.}}{\Longrightarrow}$ $\forall j \in J, \exists x_j \in X_j : p_j(\mathcal{F}) \to x_j \Leftrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)} (x_j)_{j \in J} \Rightarrow$ $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$ compacto.*

Demostración (Redes).

($\Rightarrow$) *Igual*

($\Leftarrow$) *$\forall s$ red en $\prod_{j \in J} X_j \Rightarrow \forall j \in J, p_j \circ s$ red en $X_j \Rightarrow \forall j \in J, \exists x_j \in X_j :$ $p_j \circ s \to x_j \Leftrightarrow s \to (x_j)_{j \in J} \Rightarrow (\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$ compacto.*

Parte II

Topología Algebráica

Capítulo 7

Homotopía

7.1. Homotopía

Definición 7.1 (Homotopía)**.** *Sea X, Y e.t., $f, g : X \to Y$ aplicación continua. Se dice que f es homótopa a g ($f \simeq g$) si $\exists H : X \times I \to Y$ continua tal que*

$$H(x, 0) = f(x), \forall x \in X,$$

$$H(x, 1) = g(x), \forall x \in X.$$

A H se le llama homotopía de f en g.

Proposición 7.1. *Si X, Y e.t., la relación de homotopía entre las aplicaciones continuas de X en Y es de equivalencia.*

Demostración.

- *Refrexiva: Sea $f : X \to Y$. Entonces, $H : X \times I \to X : H(x, t) = f(x) \Rightarrow f \simeq f$.*
- *Simétrica: Sean $f, g : X \to Y, f \simeq g \Rightarrow \exists H : X \times I \to X$ homotopía. Sea $H' : X \times I \to Y : H'(x, t) = H(x, 1 - t)$. Entonces, H' es continua y*

$$H'(x, 0) = H(x, 1) = g(x), \forall x \in X,$$

$$H'(x, 1) = H(x, 0) = f(x), \forall x \in X.$$

  Por tanto, $g \simeq f$
- *Transitiva: Sean $f, g, h : X \to Y$ continuas. Entonces, $f \simeq g \Rightarrow$*

$\exists H_1 : X \times I \to Y$ *tal que*

$$H_1(x,0) = f(x),$$

$$H_1(x,1) = g(x).$$

Y $g \simeq f \Rightarrow \exists H_2 : X \times I \to Y$ *continua tal que*

$$H_2(x,0) = g(x),$$

$$H_2(x,1) = h(x).$$

Sea $H : X \times I \to Y$ *definida por*

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(X,2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_2(X,2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Como $X \times [0, \frac{1}{2}]$*,* $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ *son cerrados de* I *y recubren* I*, entonces por Prop. 1.20.* H *es continua tal que*

$$H(x,0) = f(x), H(x,1) = h(x).$$

Por tanto, $f \simeq h$*.*

Ejemplo. *Si* $C \subset \mathbb{R}^n, C$ *convexo,* $\forall f, g : (X, \mathcal{T}) \to (C, \mathcal{T}_u)$ *continua, entonces* $f \simeq g$*.*

Demostración. *Sea* $H : X \times I \to C : H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$*. Entonces,* H *cumple*

$$\begin{cases} H(x,0) = f(x), \forall x \in X \\ H(x,1) = g(x), \forall x \in X \end{cases}$$

Por tanto, $f \simeq g$*.*

Definición 7.2 (Clase de Homotopía)**.** *Dados dos e.t* X *e* Y *y la relación de homotopía de aplicación continua de* X *en* Y*, entonces cada clase de equivalencia se llama clase de homotopía.*

Definición 7.3 (Contractil). *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t.. Se dice que X es contractil si la identidad en X es homótopa a alguna aplicación constante.*

Ejemplo. $\forall C \subset \mathbb{R}^n$ *conexo, entonces C es contractil.*

Demostración. $\forall x_0 \in C, 1_X \simeq c_{x_0} : X \to x : x \mapsto x_0$, *entonces*

$$H(x,t) = (1-t) \cdot c_{x_0}(x) + t \cdot 1_X(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H(x,0) = c_{x_0} \\ H(x,1) = 1_X(x) \end{cases}$$

Proposición 7.2. *Sean X, Y, Z e.t., $f_1, g_1 : X \to Y$ continuas tal que $f_1 \simeq g_1$ y $f_2, g_2 : Y \to Z$ continuas tal que $f_2 \simeq g_2$. Entonces, $f_2 \circ f_1 \simeq g_2 \circ g_1$.*

Demostración. $f_1 \simeq g_1 \Rightarrow \exists H_1 : X \times I \to Y$ *continua tal que*

$$\begin{cases} H_1(x,0) = f_1(x) \\ H_1(x,1) = g_1(x) \end{cases}$$

y $\exists H_1 : Y \times I \to Z$ *continua tal que*

$$\begin{cases} H_2(x,0) = f_2(x) \\ H_2(x,1) = g_2(x) \end{cases}$$

Sea $H : X \times I \to Z : H(x,t) = H_2(H_1(x,t),t)$. Entonces, por ser composición de aplicaciones continuas H también lo es y

$$H(x,0) = H_2(H_1(x,0),0) = H_2(f_1(x),0) = (f_2 \circ f_1)(x),$$

$$H(x,1) = H_2(H_1(x,1),1) = H_2(f_2(x),1) = (g_2 \circ g_1)(x)$$

Proposición 7.3. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t.. Entonces, $(X, \mathcal{T})$ es contractil si $\forall (Y, \mathcal{S})$ e.t., $\forall f, g : (Y, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{T})$ continuas es $f \simeq g$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) X *contractil* $\Rightarrow \exists x_0 \in X : 1_X \simeq c_{x_0}$. *Ahora,* $\forall (Y, \mathcal{S})$ *e.t.,* $\forall f, g : (Y, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{T})$ *continuas, entonces la proposición anterior*

$$\Rightarrow \begin{cases} 1_X \circ f \simeq c_{x_0} \circ f : Y \to X : y \mapsto x_0 \\ 1_X \circ g \simeq c_{x_0} \circ g : Y \to X : y \mapsto x_0 \end{cases}$$

Entonces, $c_{x_0} \circ f = c_{x_0} \circ g$. *Por tanto,* $f \simeq g$.

($\Leftarrow$) *Suponemos que* $f \simeq g, \forall f, g : (Y, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{T})$. *Entonces,* $1_X \simeq c_{x_0} \Rightarrow (X, \mathcal{T})$ *es contractil.*

Definición 7.4 (Equivalencia Homotópica)**.** *Sean* X, Y *e.t.. Se dice que* X *es homotopocamente equivalente a* Y *(ó que* X *es del mismo tipo de homotopía que* Y*) si* $\exists f : X \to Y$ *continua y* $\exists g : Y \to X$ *continua tal que* $g \circ f \simeq 1_X$ *y* $f \circ g \simeq 1_Y$. *En este caso, decimos que* f *es una equivalencia homotópica y* g *es una inversa homotópica suya.*

Observación. *No tienen por que ser suprayectivas, en realidad se está considerando* $g|_{f(X)} \circ f$.

Proposición 7.4. *Dado un conjunto de e.t., la relación de ser homotópicamente equivalentes es relación de equivalencia.*

Demostración.

- *Reflexiva:* $\forall X$ *e.t.,* $1_X : X \to x \Rightarrow X$ *es homotópicamente equivalente a* X.
- *Simétrica:* X *es homotópicamente equivalente a* $Y \Leftrightarrow Y$ *es homotópicamente equivalente a* X.
- *Transitiva: Sea* X *homotópicamente equivalente a* Y *y* Y *homotópicamente equivalente a* Z, *entonces*

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists f_1 : X \to Y \text{ cont. } : g_1 \circ f_1 \simeq 1_X \\ \exists g_1 : Y \to X \text{ cont. } : f_1 \circ g_1 \simeq 1_Y \end{cases}$$

$$\text{y } \Rightarrow \begin{cases} \exists f_2 : Y \to Z \text{ cont. } : g_2 \circ f_2 \simeq 1_Y \\ \exists g_2 : Z \to Y \text{ cont. } : f_2 \circ g_2 \simeq 1_Z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_2 \circ f_1 : X \to Z \text{ continua} \\ g_2 \circ g_1 : X \to Z \text{ continua} \end{cases}$$

Entonces, por la propiedad asociativa

$$\begin{aligned}(g_1 \circ g_2)(f_2 \circ f_1) &= g_1 \circ (g_2 \circ f_2) \circ f_1 \\ &\simeq g_1 \circ 1_Y \circ f_1 \\ &= g_1 \circ f_1 \\ &\simeq 1_X.\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1)(g_1 \circ g_2) &= f_2 \circ (f_1 \circ g_1) \circ g_2 \\ &\simeq f_2 \circ 1_Y \circ g_2 \\ &= f_2 \circ g_2 \\ &\simeq 1_Z.\end{aligned}$$

Observación. *Si X e Y et. homeomorfos, entonces tienen el mismo tipo de homotopía.*

Proposición 7.5. *Sea X e.t.. Entonces, X es contractil $\Leftrightarrow$ tiene el tipo de homotopía de un punto.*

Demostración.

$(\Rightarrow)$ $1_X \simeq c_{x_0} : x_0 \in X$. *Consideramos la inclusión*

$$j : \{x_0\} \to X = (X, \mathcal{T})$$

y la aplicación

$$c'_{x_0} : X \to \{x_0\}.$$

Dado que ambas son continuas, entonces

$$c'_{x_0} \circ j \simeq 1_{\{x_0\}} \quad \text{y} \quad j \circ c'_{x_0} = c_{x_0} \simeq 1_X,$$

Por tanto, X y $\{x_0\}$ son homotópicamente equivalentes.

($\Leftarrow$) $\forall y \in X, \{y\}$ *con la topología trivial. Entonces,* $\{y\}, X$ *son homotópicamente equivalentes*

$$\Leftrightarrow \exists f : X \to \{y\} \text{ cont.} \quad y \quad \exists g : \{y\} \to X \text{ cont. tal que}$$

$$g \circ f \simeq 1_X \quad y\ f \circ g \simeq 1_{\{y\}}.$$

Por tanto, $g \circ f = c_{g(y)} \simeq 1_X \overset{\text{def.}}{\Longrightarrow} X$ *contractil.*

7.2. Retracciones, Producto y Lazos

Definición 7.5 (Retracción)**.** *Sea* X *e.t.,* $A \subset X$ *no vacío. Se dice que* A *es un retracto en* X *si* $\exists r : X \to A$ *continua tal que* $r|_A = 1_A$ *que deja los puntos de* A *fijos. Si occure esto, se dice que* r *es una retracción de* X *en* A.

Definición 7.6 (Retracto por Deformación)**.** *Sea* X *e.t.,* $A \subset X$ *no vacío. Se dice que* A *es un retracto por deformación si* $\exists r : X \to A$ *retracción tal que* $j \circ r \simeq 1_X$ *donde* j *es la inclusión* $j : A \to X$.

Definición 7.7 (Homotopía Relativa)**.** *Sean* X, Y *e.t.,* $A \subset X$ *no vacío,* $f, g : X \to Y$ *aplicación continua. Se dice que* f *es homótopa a* g *relativa a* A *si* $\exists H : X \times I \to Y$ *continua tal que*

$$H(x, 0) = f(x), \forall x \in X,$$

$$H(x, 1) = g(x), \forall x \in X,$$

$$H(a, t) = f(a) = g(a), \forall a \in A, \forall t \in I.$$

Notación. f *homótopa a* g *relativa a* A *se denota* $f \simeq_A g$.

Observación. *La relación de homotopía raltiva a un subespacio es de equivalencia.*

Observación. $f \simeq_A g \Rightarrow f|_A = g|_A$.

Definición 7.8 (Producto)**.** *Sea X e.t., $a, b, c \in X$, f camino en X de origen a y extremo b, g camino en X de origen b y extremo c. Se llama producto de f y g al camino en X,*

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Observación. *Para que exista el producto de dos caminos f y g, es imprescindible que $f(1) = g(0)$.*

Definición 7.9 (Lazo)**.** *Sea X e.t., $x_0 \in X$. Se llama lazo en X de base x_0 a cualquier camino f en X tal que $f(0) = f(1) = x_0$.*

Observación. *Los lazos son un caso particualar de camino, por tanto, también son una clase de equivalencia.*

Definición 7.10 (Lazos Homótopos)**.** *Sea X e.t., $x_0 \in X$. Dos lazos f y g de X con base x_0, se llaman homótopos si $f \simeq_{\{0,1\}} g$.*

Notación. *Si X e.t., $x_0 \in X$, $\pi_1(X, x_0)$ dentoa el conjunto cociente de las clase de homotopía de lazos de base x_0.*

Proposición 7.6. *Sea X e.t., f_1, g_1 caminos en X tal que $f_1 \simeq_{[0,1]} g_1$ y f_2, g_2 caminos en X tal que $f_2 \simeq_{[0,1]} g_2$, y $f_1(1) = f_2(0)$. Entonces, $f_1 * f_2 \simeq_{[0,1]} g_1 * g_2$.*

Observación. *También vale $f_1 * f_2 \simeq g_1 * g_2$.*

Demostración. $\exists H_1 : I \times I \to X$ *continua tal que*

$$H_1(s, 0) = f_1(s), \forall s \in I,$$

$$H_1(s, 1) = g_1(s), \forall s \in I,$$

$$H_1(0, t) = f_1(0) = g_1(0), \forall t \in I,$$

$$H_1(1, t) = f_1(1) = g_1(1), \forall t \in I.$$

$\exists H_2 : I \times I \to X$ *continua tal que*

$$H_2(s, 0) = f_2(s), \forall s \in I,$$

$$H_2(s,1) = g_2(s), \forall s \in I,$$
$$H_2(0,t) = f_2(0) = g_2(0), \forall t \in I,$$
$$H_2(1,t) = f_2(1) = g_2(1), \forall t \in I.$$

Sea $H : I \times I \to X$ definida por

$$H(s,t) = \begin{cases} H_1(2s,t), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \quad t \in I \\ H_2(2s-1,t), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \quad t \in I \end{cases}$$

Esta aplicación está bien definida y es continua ya que $[0, \frac{1}{2}] \times I$ y $[0, \frac{1}{2}] \times I$ son cerrados de I.

$$H(s,0) = \begin{cases} H_1(2s,0), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ H_2(2s-1,0), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f_1(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ f_2(2s-1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= (f_1 * f_2)(s),$$

$$H(s,1) = \begin{cases} H_1(2s,1), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ H_2(2s-1,1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} g_1(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g_2(2s-1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$(g_1 * g_2)(s),$$

$$H(0,t) = H_1(0,t) = f_1(0) = g_1(0) = (f_1 * f_2)(0) = (g_1 * g_2)(0),$$
$$H(1,t) = H_2(1,t) = f_2(1) = g_2(1) = (f_1 * f_2)(1) = (g_1 * g_2)(1),$$

Corolario 7.0.1. *Sea X e.t., $x_0 \in X$, f_1, g_1 lazos en X con base x_0 tal que son homótopos ($[f_1] = [g_1]$), f_2, g_2 lazos en X con base x_0 tal que ($[f_2] = [g_2]$). Entonces, $[f_1 * f_2] = [g_1 * g_2]$*

7.3. Grupo Fundamental

Definición 7.11 (Operación, Producto de Lazos). *Sea X e.t., $x_0 \in X$, $\forall [f], [g] \in \pi(X, x_0)$. Se define $[f] * [g] = [f * g]$.*

Teorema 7.1. *Sea X e.t., $x_0 \in X$, $(\pi_1(X, x_0))$ es un grupo.*

Demostración.

- *Asociatividad:* $\forall [f], [g], [h] \in \pi_1(X, x_0)$ *veamos que*

$$([f] * [g]) * [h] = [f] * ([g] * [h])$$

$\Leftrightarrow \forall f, g, h$ lazos de base x_0 se tiene $(f * g) * h \simeq f * (g * h)$

$$((f * g) * h))(t) = \begin{cases} f(4t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ g(4t-1), & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ h(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$(f * (g * h))(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(4t-2), & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ h(4t-3), & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Sea $H : I \times I \to X$, definida por

$$H(s,t) = \begin{cases} f(\frac{4s}{1+t}), & 0 \leq s \leq \frac{1+t}{4} \\ g(4s-1-t), & \frac{1+t}{4} \leq s \leq \frac{2+t}{4} \\ h(\frac{4s-2-t}{2-t}), & \frac{2+t}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

donde $(s,t) \in I \times I$. Esta aplicación está bien definida y es continua ya que $C_1 = [0, \frac{1+t}{4}] \times I$, $C_2 = [\frac{1+t}{4}, \frac{2+t}{4}] \times I$, $C_3 = [\frac{2+t}{4}, 1] \times I$ son cerrados de I^2 y lo recubren, y $H|_{C_i]}$ es continua para $i \in \{1,2,3\} \Rightarrow$ H es continua. Ahora,

$$H(s,0) = \begin{cases} f(4s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ g(4s-1), & \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ h(2s-1), & \frac{1}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= ((f * g) * h)(s);$$

$$H(s,1) = \begin{cases} f(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(4s-2), & \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ h(4s-3), & \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= (f * (g * h))(s);$$

$$H(0,t) = f(0) = ((f * g) * h)(0) = (f * (g * h))(0);$$

$$H(1,t) = h(1) = ((f * g) * h)(s) = (f * (g * h))(s)$$

Por tanto, son homótopos $\Rightarrow$ son clase de homotopía $\Rightarrow$ son clase de homotopía lazos $\Rightarrow$ es asociativa.

- *Elemento neutro: Sea c el lazo constante de valor x_0, entonces $[c] \in \pi_1(X, x_0)$. $\forall [f] \in \pi_1(X, x_0)$, veamos que $[f] * [c] = [f] = [c] * [f]$*

$$\Leftrightarrow \forall f \text{ lazo con base } x_0, f * c \simeq_{0,1} f \simeq_{0,1} c * f$$

$\forall t \in I, [0,1] = [0, \frac{1-t}{2}] \cup [\frac{1-t}{2}, 1]$, $\lambda = \frac{2s-1+t}{1+t}$. Sea $H : I^2 \to X$ definida por

$$H(s,t) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2} \\ f(\frac{2s-1+t}{1+t}), & \frac{1-t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

La aplicación está bien definida y es continua (prop. anterior). Ahora,

$$H(s,0) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ f(2s-1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= (c * f)(s);$$

$$H(s,1) = f(s);$$

$$H(0,t) = x_0 = (c * f)(0) = f(0);$$

$$H(1,t) = f(1) = (c * f)(1);$$

Por tanto, $f * c \simeq_{\{0,1\}} f$. Análogamente $c * f \simeq_{\{0,1\}} f$.

- *Elemento simétrico: $\forall f$ camino en X, $f' : I \to X$ definifa por $f'(t) = f(1-t)$ camino opuesto. $\forall [f] \in \pi_1(X, x_0)$ veamos que*

$$[f] * [f'] = [c] = [f'] * [f]$$

$$\Leftrightarrow \forall f \text{ lazo con base } x_0, \quad f * f' \simeq_{\{0,1\}} f' * f$$

Entonces, $\forall t \in I, [0,1] = [0, \frac{1-t}{2}] \cup [\frac{1-t}{2}, \frac{1+t}{2}] \cup [\frac{1+t}{2}, 1]$, *definimos una aplicación pero la elegimos en lugar de contruirla como antes ya que no sería continua. Sea* $H : I^2 \to X$ *definida por*

$$H(s,t) = \begin{cases} f(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2} \\ f(1-t), & \frac{1-t}{2} \leq s \leq \frac{1+t}{2} \\ f'(2s-1), & \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Esta aplicación esta bien definida y es continua. Ahora, comprobamos que es homotopía

$$H(s,0) = \begin{cases} f(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ f'(2s-1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= (f * f')(s)$$

$$H(s,1) = f(0) = x_0 = c(s), \quad \forall s \in I$$

$$H(0,t) = f(0) = (f * f')(0) = c(0)$$

$$H(1,t) = f'(1) = (f * f')(1) = c(1)$$

Como $(f')' = f$, *entonces* $f * f' \simeq_{\{0,1\}} c \simeq_{\{0,1\}} f' * f$

Por tanto, $\pi_1(X, x_0)$ *tiene estructura de grupo.*

Definición 7.12 (Grupo Fundamental)**.** *Sea* X *e.t.,* $x_0 \in X$*. Se llama grupo fundametal con base* x_0 *a* $(\pi_1(X, x_0))$.

Observación. *En la demostración anterior usamos caminos en lugar de lazos. Por tanto, tenemos lo siguiente.*

(I) *Si* f, g, h *caminos en* X *e.t. tal que* $f(1) = g(0)$ *y* $g(1) = h(0)$, *entonces*

$$((f * g) * h) \simeq_{\{0,1\}} f * (g * h)(s).$$

(II) *Si* f *es camino en* X *de origen* a *y extremo* b, *entonces*

$$c_a * f \simeq_{\{0,1\}} f * c_b.$$

donde c_a, c_b *son caminos constantes* a, b *respectivamente.*

(III) *Si* f *es camino en* X *de origen* a *y extremo* b, *entonces*

$$f * f' \simeq_{\{0,1\}} c_a, \quad f * f' \simeq_{\{0,1\}} c_b$$

Observación. *Solo se conserva la estructura de grupo al cambiar de base si X es conexo por caminos.*

Observación. *Sea X e.t., $x, y \in X$, h camino en X tal que $h(0) = X$, $h(1) = y$ entonces, $\forall f$ lazo en X con base x, $(h' * f) * h$ es lazo en x con base y.*

Si f, g son lazos en X con base x tal que $f \simeq_{\{0,1\}} g$ y F es homotpía de f en g relativa a $\{0, 1\}$ entonces, sea $H : I \times I \to x$ aplicación definida por

$$H(s,t) = \begin{cases} h'(4s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ F(4s-1,t), & \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ h(2s-1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Esta aplicación esta bien definida y C_i son cerrados de I^2 y lo recubren, entonces $H|_{C_i}$ continua $\Rightarrow H$ continua.

$$H(s,0) = h' * (f * h)$$
$$H(s,1) = (h' * f) * h$$

Por tanto, H es homotpía de $(h' * f) * h$ en $(h' * g) * h$. Veamos el resultado por caminos

$$h'(0) = ((h' * f) * h)(0) = ((h' * g) * h)(0)$$
$$h'(1) = ((h' * f) * h)(1) = ((h' * g) * h)(1)$$

Proposición 7.7. *Sea X e.t. conexo por caminos, entoces $\forall x, y \in X$, $\pi_1(X, x), \pi_1(X, y)$ son isomorfos.*

Demostración. *$\exists \varphi : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y) \Rightarrow \exists h$ camino en X de x a y. Entonces, definimos φ como $[f] \mapsto \varphi_h([f]) = [(h' * f) * h]$.*

Vemos primero que φ es homeomorfismo. $\forall [f_1], [f_2] \in \pi_1(X, x)$ se tiene que

$$\varphi([f_1] * [f_2]) = \varphi([f_1 * f_2])$$
$$= [(h' * (f_1 * f_2)) * h]$$

donde $(h' * (f_1 * f_2)) * h \simeq_{\{0,1\}} (h' * f_1) * (f_2 * h)$. Por tanto,

$$[(h' * (f_1 * f_2)) * h] = [(h' * f_1) * (f_2 * h)]$$

donde $f_1 \simeq_{\{0,1\}} f_1 * c_x$ y $f_2 \simeq_{\{0,1\}} c_x * f_2$. Por tanto,

$$[(h' * f_1) * (f_2 * h)] = [(h' * f_1) * (h * h') * (f_2 * h)]$$

donde $c_x \simeq_{\{0,1\}} h * h'$. Por tanto,

$$[(h' * f_1) * (h * h') * (f_2 * h)] = [((h' * f_1) * h) * ((h' * h) * h)]$$

$$= [(h' * f_1) * h] * [(h' * f_2) * h]$$

$$= \varphi([f_1]) * \varphi([f_2])$$

Vemos ahora que φ es isomorfismo. Como $\exists h'$ camino en X que conecta x con y, entonces $\exists \alpha : \pi_1(X, y) \to \pi_1(X, x)$ definida por $[g] \mapsto \alpha([g]) = [(h * g) * h']$ que es homeomorfismo ya que es la misma aplicación que φ pero cambiando el orden. Entonces,

$$(\alpha \circ \varphi) = \alpha(\varphi([f])) = \alpha([(h' * f) * h])$$

$$= [h * (h' * f) * h']$$

$$= [(h * h') * f * (h * h')]$$

$$= [c_x * f * c_x]$$

ya que $h * h' \simeq_{\{0,1\}} c_x$. Entonces,

$$\alpha \circ \varphi = 1_{\pi_1(X,x)} \text{ y } \varphi \circ \alpha = 1_{\pi_1}(X, y)$$

Definición 7.13 (Grupo Fundamental)**.** *Sea X e.t. conexo por caminos. Se llama grupo fundamental de X al grupo $\pi_1(X, x), \forall x \in X$.*

Notación. *El grupo fundamental se denota $\pi_1(X)$.*

Observación. *Sea X, Y e.t. , $x_0 \in X, \varphi : X \to Y$ aplicación continua. Si f es lazo en X con base x_0, $\varphi \circ f$ es lazo en Y con base $\varphi(x_0)$.*

Si g es lazo en X tal que $f \simeq_{\{0,1\}} g$ y H es homotopía de f en g relativa a $\{0, 1\}$, entonces $\varphi \circ f \simeq_{\{0,1\}} \varphi \circ g$ y $\varphi \circ H$ es homtopía de $\varphi \circ f$ en $\varphi \circ g$ en $\{0, 1\}$. Por tanto, $\exists \varphi_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ aplicación.

Proposición 7.8. *Sean X, Y e.t., $x_0 \in X$, $\varphi : X \to Y$ aplicación continua. Entonces, φ induce un homeomorfismo $\varphi_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0)) : \varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$.*

Demostración. *Si f, g lazos en X con base x_0*

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$((\varphi \circ f) * (\varphi \circ g))(t), \quad \forall t \in I$$

donde $\varphi \circ f$ y $\varphi \circ g$ son lazos de base x_0. Entonces,

$$\varphi \circ (f * g) = (\varphi \circ f) * (\varphi \circ g).$$

Esta última implicación se debe a que $\forall [f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$,

$$\varphi_*([f] * [g]) = \varphi_*([f * g])$$

$$= [\varphi \circ (f * g)] = [(\varphi \circ f) * (\varphi \circ g)]$$
$$= [\varphi \circ f] * [\varphi \circ g] = \varphi_*([f]) * \varphi_*([g])$$

Proposición 7.9 (Propiedades Varias)**.**

(I) *Si X e.t., $\forall x_0 \in X$ si $\varphi = 1_X$ entonces, $\varphi_* = 1_{\pi_1(X,x_0)}$.*

(II) *Si X, Y, Z e.t., $\varphi : X \to Y$ aplicación continua, $\alpha : Y \to Z$ aplicación continua. Entonces, $(\alpha \circ \varphi)_* = \alpha_* \circ \varphi_*$.*

(III) *Si X, Y e.t., $x_0 \in X$, $\varphi : X \to Y$ aplicación continua tal que $\varphi \simeq_{\{x_0\}} \alpha$. Entonces, $\alpha_* = \varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$.*

(IV) *Si X e.t., A retracto suyo ($r : X \to A$ retracción y $j : A \to X$ inclusión). Entonces, r_* es epimorfismo y j_* es homeomorfismo.*

Demostración. (I) $\varphi = 1_X, \forall [f] \in \pi_1(X, x_0)$, $\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f] = [f] \Rightarrow \varphi_* = 1_{\pi_1(X,x_0)}$.

(II) $\forall [f] \in \pi_1(X, x_0), x_0 \in X$,

$$(\alpha \circ \varphi)_*([f]) = [(\alpha \circ \varphi) \circ f]$$

$$= [\alpha \circ (\varphi \circ f)] = \alpha([\varphi \circ f])$$
$$= \alpha_*(\varphi_*([f])) = (\alpha_* \circ \varphi_*)([f])$$

$$\Rightarrow (\alpha \circ \varphi)_* = \alpha_* \circ \varphi_*$$

(III) $\varphi \simeq_{\{x_0\}}, x_0 \in X \Leftrightarrow \exists H : X \times I \to Y$ continua tal que

$$H(x,0) = \varphi(x)$$

$$H(x,1) = \alpha(x)$$

$$H(x_0,t) = \varphi(x_0) = \alpha(x_0), \forall t \in I$$

$\forall f$ lazo de X con base x_0. Sea $F : I \times I \to Y : F(s,t) \equiv H(f(s),t)$, F es continua ya que $F = H \circ (f * 1_I)$ es composición de funciones continuas, y es homotopía ya que

$$F(s,0) = H(f(s),0) = \varphi(f(s))$$

$$F(s,1) = H(f(s),1) = \alpha(f(s))$$

$$F(0,t) = H(f(0),t) = H(x_0,t) = \varphi(x_0) = \alpha(x_0)$$

$$F(1,t) = H(f(1),t) = H(x_0,t) = \varphi(x_0) = \alpha(x_0)$$

$$\Rightarrow \varphi \circ f \simeq_{\{0,1\}} \varphi \circ f$$

$$\Rightarrow \varphi_*([f]) = \varphi_*([f])$$

$$\Rightarrow \varphi_* = \alpha_*$$

(IV) r retracción $\Rightarrow r|_A = 1_A \Leftrightarrow r \circ j = 1_A$,

$$(\textit{por 1}) \Rightarrow (r \circ j)_* = r_* \circ j_*$$

$$(\textit{por 2}) \Rightarrow (r \circ j)_* = 1_{\pi_1}(A,a), \forall a \in A$$

es isomorfismo $\Rightarrow j_*$ monomorfismo y r_* epimorfismo.

Corolario 7.1.1. *Sea X, Y e.t. y $\varphi : X \to Y$ homomorfismo. Entonces, $\varphi_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,\varphi(x_0))$ es isomorfismo.*

Demostración. $\varphi^{-1} \circ \varphi = 1_X$, $\varphi \circ \varphi^{-1} = 1_Y$

$$\Rightarrow (\varphi^{-1} \circ \varphi)_* = (\varphi^{-1})_* \circ \varphi_* = 1_{\pi_1(X,x_0)}$$

$$(\varphi \circ \varphi^{-1})_* = \varphi_* \circ \varphi_*^{-1} = 1_{\pi_1(Y,\varphi(x_0))}$$

$\Rightarrow \varphi_*$ *es isomorfismo y* $(\varphi_*)^{-1} = (\varphi^{-1})_*$.

Corolario 7.1.2. *Si* X, Y *e.t. conexo por caminos y homeomorfos, entonces los grupos fundamentales* $\pi_1(X), \pi_1(Y)$ *son isomorfos.*

Lema 7.1.1. *Sean* X, X' *e.t.,* $\psi_1, \psi_2 : X \to X'$*, aplicaciones continuas* $\psi_1 \simeq \psi_2$*,* $x \in X$*. Entonces,*

$$\psi_{1*} = \varphi_h \circ \psi_{2*}$$

tal que φ_h *es isomorfismo inducido por un camino* h *en* X' *que conecta* $\psi_1(x)$ *con* $\psi_2(x)$

$$\varphi_h([g])][h * (g * h')]$$

Demostración. $\psi_1 \simeq \psi_2 \Rightarrow \exists H : X \times I \to X'$ *continua tal que*

$$H(z, 0) = \psi_1(z), \forall z \in Z,$$

$$H(z, 1) = \psi_2(z), \forall z \in Z,$$

entonces $h : I \to X' : h(t) \equiv H(x, t)$ *es continua tal que*

$$h(0) = H(x, 0) = \psi_1(x),$$

$$h(1) = H(x, 1) = \psi_2(x)$$

Por tanto,

$$\psi_{1*} : \pi_1(X, x) \to \pi(X', \psi_1(x)),$$
$$[f] \mapsto \psi_{1*}([f]) = [\psi_1 \circ f],$$
$$\psi_{2*} : \pi_1(X, x) \to \pi(X', \psi_2(x)),$$
$$[f] \mapsto \psi_{2*}([f]) = [\psi_2 \circ f],$$
$$\varphi_h : \pi_1(X', \psi_2(x)) \to \pi_1(X', \psi_1),$$
$$[g] \mapsto \varphi_n([g]) = [h * (g * h')],$$

Entonces,

$$\psi_{1*}([f]) = [\psi_1 \circ f],$$
$$(\varphi_h \circ \psi_{2*})([f]) = \varphi_h([\psi_2 \circ f]) = [h * (\psi_2 \circ f) * h']$$

Construimos una homotopía tal que $\psi_1 \circ f \simeq_{\{0,1\}} h * ((\psi_2 \circ f) * h')$. *Sea* $F : I \times I \to X'$

$$F(s,t) = \begin{cases} h(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2} \\ H(f(\frac{4s+2s-2}{3s+1})), & \frac{1-t}{2} \leq s \leq \frac{3+t}{4} \\ h'(4s-3), & \frac{3+t}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

que cumple lo que queríamos.

Proposición 7.10. *Sea* X, Y *e.t.,* $\varphi : X \to Y$ *equivalencia homotópica. Entonces,* $\forall x \in X, \varphi_* : \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y, \varphi(x))$ *es isomorfismo.*

Demostración. *Equivalencia homotópica* $\Rightarrow \exists \psi : Y \to X$ *aplicaciones continua tal que* $\psi \circ \varphi \simeq 1_X, \varphi \circ \psi \simeq 1_Y$. *Por tanto,* $\exists h$ *camino en* X *conectando* $(\psi \circ \varphi)(x)$ *con* x *tal que*

$$(\psi \circ \varphi)_* = \varphi_h \circ (1_X)_*$$

Y $\exists k$ *camino en* Y*, conectando* $(\psi \circ \varphi)(\varphi(x))$ *con* $\varphi(x)$ *tal que*

$$(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_k \circ (1_Y)_*$$

donde $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$ *y* $\varphi_* \circ 1_{\pi_1(Y, \varphi(x))} = \varphi_*$. *Por tanto,* φ_* *inyectiva y suprayectiva* $\Rightarrow \varphi_*$ *isomorfismo.*

Corolario 7.1.3. *Sea* X, Y *e.t. c.p.c y homotópicamente equivalentes. Entonces,* $\pi_1(X), \pi_1(Y)$ *son isomorfos.*

Observación. *También valdría* X *c.p.c homotópicamente equivalente a* Y.

Proposición 7.11. *Sean* X, Y *e.t.,* $a \in X$*,* $b \in Y$. *Entonces,* $\pi_1(X \times Y, (a,b))$ *es isomorfo a* $\pi_1(X,a) \times \pi_1(X,b)$

Demostración. *Las aplicaciones* $p_1 : X \times Y \to X$*,* $p_2 : X \times Y \to Y$ *son continuas, entonces*

$$\begin{cases} p_{1*} : \pi_1(X \times Y, (a,b)) \to \pi_1(X,a) \\ p_{2*} : \pi_2(X \times Y, (a,b)) \to \pi_2(Y,b) \end{cases}$$

son homorofismos. Por tanto,

$$(p_{1*}, p_{2*}) : \pi_1(X \times Y, (a, b)) \to \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$$

homeomorfismos.

- *F es inyectiva:* $[f], [g] \in \pi_1(X \times Y, (a, b))$

  $$F([f]) = F([g]) \Leftrightarrow p_{i*}([f]) = p_{i*}([g]), i \in \{1, 2\}$$

  donde $p_{i*}([f]) = [p_i \circ f], p_{i*}([g]) = [p_i \circ g]$ *y* $p_i \circ f \simeq_{\{0,1\}} p_i \circ g$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists H_1 : I \times I \to X \text{ cont.} \\ \exists H_2 : I \times I \to Y \text{ cont.} \end{cases}$$

  $$H_i(s, 0) = (p_i \circ f)(s)$$
  $$H_i(s, 1) = (p_i \circ g)(s)$$
  $$H_1(0, t) = a = (p_1 \circ f)(0) = (p_1 \circ g)(0),$$
  $$H_1(1, t) = a = (p_1 \circ f)(1) = (p_1 \circ g)(1),$$
  $$H_2(0, t) = b = (p_2 \circ f)(0) = (p_2 \circ g)(0),$$
  $$H_2(1, t) = b = (p_2 \circ f)(1) = (p_2 \circ g)(1),$$

  Sea $H : I \times I \to X \times Y$, $H \equiv (H_1, H_2)$ *es continua. Veamos que verifica las condiciones.*

  $$H(s, 0) = ((p_1 \circ f)(s), (p_2 \circ f)(s)) = f(s),$$
  $$H(s, 1) = ((p_1 \circ g)(s), (p_2 \circ g)(s)) = f(s),$$
  $$H(0, t) = (H_1(0, t), H_2(0, t)) = (a, b) = f(0) = g(0),$$
  $$H(1, t) = (H_1(1, t), H_2(1, t)) = (a, b) = f(1) = g(1),$$

  Por tanto, $f \simeq_{\{0,1\}} g \Rightarrow [f] = [g]$.

- *F suprayectiva:* $\forall([f_1], [f_2]) \in \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$. *Sea* $f : I \to X \times Y$ *camino definido por*

  $$f(t) = \begin{cases} (f_1(2t), b), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ (a, f_2(2t - 1)), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

entonces f *es continua y* $f(0) = (a,b), f(1) = (a,b)$. $\Rightarrow f$ *lazo es* $X \times Y$ *con base (a, b).*

$$(p_1 \circ f)(t) = \begin{cases} f_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ a, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$= (f_1 * c_a)(t)$$

entonces, $p_1 \circ f = f_{1y} * c_a \simeq_{\{0,1\}} f_1$. *También,*

$$(p_2 \circ f)(t) = \begin{cases} b, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_2(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$= (c_b * f_2)(t)$$

entonces, $p_2 \circ f = c_b * f_2 \simeq_{\{0,1\}} f_2$. *Por tanto,*

$$F([f]) = (p_{1*}([f]), p_{2*}([f]))$$

$$= ([p_1 \circ f], [p_2 \circ f])$$
$$= ([f_1], [f_2])$$

Observación. *Sea* $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : ||z|| = 1\}$

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$$

$$x \mapsto \varphi(x) = \cos(2\pi x) + i \operatorname{sen}(2\pi x)$$

entonces, φ *es homeomorfismo de grupos de* $(\mathbb{R}, +)$ *en* $(\mathbb{S}^1, \cdot)$, *ya que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

Además, φ *es continua y es abierta. Por tanto,*

$$\varphi|_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \to \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$$

es homeomorfismo, entonces

$$\Rightarrow h \equiv (\varphi_{|(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})})^{-1} : \mathbb{S} \setminus \{-1\} \to (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

es homeomorfismo.

Lema 7.1.2. *Sea f camino en $\mathbb{S}^1$ de origen 1. Entonces, existe un único camino $\hat{f}$ en $\mathbb{R}$ de origen 0 tal que $\varphi \circ \hat{f} = f$.*

Demostración.

- *Existencia: Sea $f : I \to \mathbb{S}^1$. Como I es compacto y metrizable, entonces f es uniformemente continua $\Rightarrow \exists \epsilon > 0$ tal que*

$$\forall t, t' \in I : |t - t'| < \epsilon \Rightarrow d(f(t), f(t')) < 1$$

De manera que si

$$f(t) \neq f(t') \Leftrightarrow \frac{f(t)}{f(t')} \neq -1$$

Por tanto, $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \epsilon, I = \bigcup_{i=0}^{n-1} \left[\frac{n-(i+1)}{n}, \frac{n-i}{n}\right]$. Entonces,

$$\forall t \in I, \Big|\frac{n-(i+1)}{n} - \frac{n-i}{n}\Big| = \frac{1}{n}|t| \leq \frac{1}{n} < \epsilon$$

$$\Rightarrow \frac{f(\frac{n-i}{n}t)}{f(\frac{n-(i+1)}{n}t)} \neq -1, \forall \in \{0, \cdots, n-1\}$$

$$\Rightarrow h(\frac{f(\frac{n-i}{n}t)}{f(\frac{n-(i+1)}{n}t)}) \in \Big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big)$$

Sea $\hat{f} : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$\hat{f}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} h(\frac{f(\frac{n-i}{n}t)}{f(\frac{n-(i+1)}{n}t)}).$$

Esta función es continua entonces, es un camino con origen

$$\hat{f}(0) = h\Big(\frac{f(0)}{f(0)}\Big) + \cdots + h\Big(\frac{f(0)}{f(0)}\Big) = nh(1) = 0$$

ya que $\varphi(0) = 1 \Rightarrow h(1) = 0$. *Ahora,*

$$(\varphi \circ \hat{f}) = \frac{f(\frac{n}{n}t)}{f(\frac{n-1}{n}t)} \frac{f(\frac{n-1}{n}t)}{f(\frac{n-2}{n}t)} \cdots \frac{f(\frac{1}{n}t)}{f(0)}$$

$$= \frac{f(t)}{1} = f(t) \Rightarrow \varphi \circ \overline{f} = f.$$

- *Unicidad: Si* $\exists \hat{g} : I \to \mathbb{R}$ *continua tal que* $\hat{g} = 0, \varphi \circ \hat{g} = f$. *Sea* $F : I \to \mathbb{R}$ *tal que* $F(t) = \hat{f}(t) - g(t), \forall t \in I$. *Entonces,*

  $$\varphi(F(t)) = \frac{(\varphi \circ \hat{f})(t)}{(\varphi \circ \hat{f})(t)} = \frac{f(t)}{f(t)} = 1$$

  esto se debe a que si

  $$\varphi(x) = \cos(2\pi x) + i \operatorname{sen}(2\pi x) = 1$$

  $$\Rightarrow 2\pi x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

  $$\Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$$

  Por tanto, $\{F(t) : t \in I\} \subset \mathbb{Z}$ *es* $F(I)$ *que es conexo. Entonces,* $F(I)$ *es un punto y* $F(0) = \hat{f}(0) - \hat{g}(0) = 0$

  $$\Rightarrow F(I) = 0 \Leftrightarrow F = c_0 \Rightarrow \hat{g} = \hat{f}.$$

Lema 7.1.3. *Sean* f, g *lazos en* $\mathbb{S}^1$ *con base* 1 *y* H *homotopía de* f *en* g *relativa a* $\{0, 1\}$. *Entonces,* $\exists! \hat{H}$ *homotopía de* $\hat{f}$ *en* $\hat{g}$ *relativa a* $\{0, 1\}$ *tal que* $\varphi \circ \overline{H} = H$.

Demostración.

- *Existencia: Sea* $H : I \times I \to \mathbb{S}^1$ *continua, entonces como* $I \times I$ *es compacto y metrizable se tiene que* H *es uniformemente continua. Por tanto,*

  $$\exists \epsilon > 0 : \forall (s,t) \in I \times I : ||(s,t) - (s',t')|| < \epsilon$$
  $$\Rightarrow d(H(s,t), H(s',t')) < 1$$

  donde

  $$H(s,t) \neq -H(s',t') \Leftrightarrow \frac{H(s,t)}{H(s',t')} \neq -1.$$

Entonces,

$$\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \epsilon, \forall (s,t) \in I \times I, \forall i \in \{0, \cdots, n-1\} :$$

$$||\frac{n-(i+1)}{n}(s,t) - \frac{n-i}{n}(s,t)|| = \frac{1}{n}||(s,t)|| \leq \frac{1}{n} < \epsilon$$

$$\Rightarrow \frac{H(\frac{n-i}{n})(s,t)}{H(\frac{n-(i+1)}{n})(s,t)} \neq -1$$

$$\Rightarrow h\left(\frac{H(\frac{n-i}{n})(s,t)}{H(\frac{n-(i+1)}{n})(s,t)}\right) \in \Big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big)$$

Sea $\overline{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\overline{H}(s,t) = \sum_{i=0}^{n-1} h(\frac{H(\frac{n-i}{n})(s,t)}{H(\frac{n-(i+1)}{n})(s,t)})$$

esta aplicación es continua. Ahora,

$$(\varphi \circ \overline{H})(s,t) = \frac{H(\frac{n}{n})(s,t)}{H(\frac{n-1)}{n})(s,t)} \cdot \frac{H(\frac{n-1}{n})(s,t)}{H(\frac{n-2}{n})(s,t)} \cdots \frac{H(\frac{1}{n})(s,t)}{H(0,0)}$$

$$= \frac{H(s,t)}{H(0,0)} = H(s,t)$$

ya que $H(0,0) = f(0) = 1$.

Vemos que es Homotopía de $\hat{f}$ *en* $\hat{g}$ *relativa* $\{0,1\}$.

(I)

$$\overline{H}(0,t) = h\left(\frac{H(\frac{n}{n}(0,t))}{H(\frac{n-1}{n}(0,t))}\right) + \cdots + h\left(\frac{H(\frac{1}{n}(0,t))}{H(0,0)}\right)$$

como $H(0,t) = f(0) = g(0), \forall t \in I$. *Entonces,*

$$\overline{H}(0,t) = h\left(\frac{f(0)}{f(0)}\right) + \cdots + h\left(\frac{f(0)}{f(0)}\right)$$

$$= h(1) + \cdots + h(1) = 0$$

$$= \hat{f}(0) = \hat{g}(0)$$

(II)

$$\varphi(\overline{H}(s,0)-\hat{f}(s))=\frac{(\varphi\circ\overline{H})(s,0)}{(\varphi\circ\overline{H})(s)}=\frac{H(s,0)}{f(s)}=\frac{f(s)}{f(s)}=1$$

$$\Rightarrow \{\overline{H}(s,0)-\overline{f}(s): s\in I\}\subset\mathbb{Z} \text{ conexo}$$

Por tanto, es un punto y

$$\overline{H}(0,0)-\hat{f}(0)=0\Rightarrow \overline{H}(s,0)-\hat{f}=0,\forall s\in I$$

$$\overline{H}(s,0)=\hat{f}(s).$$

(III)

$$\forall s\in I,\quad \varphi(\overline{H}(s,1)-\hat{g}(s))=\frac{(\varphi\circ\overline{H})(s,1)}{(\varphi\circ\overline{H})(s)}=\frac{H(s,1)}{g(s)}=\frac{g(s)}{g(s)}=1$$

$$\Rightarrow \{\overline{H}(s,1)-\hat{g}: s\in I\}\subset\mathbb{Z}$$

donde $\overline{H},\hat{g}$ *son funciones contunuas y* I *es conexo* $\Rightarrow$ *el conjunto es conexo y por tanto, contiene un solo punto.*

$$\overline{H}(0,1)-\hat{g}(0)=0\Rightarrow \overline{H}(s,1)-\hat{g}=0,\quad \forall s\in I$$

$$\Leftrightarrow H(s,1)=\hat{g}(s)$$

(IV)

$$\forall t\in I,\varphi(\overline{H}(1,t)-\hat{f}(t))=\frac{(\varphi\circ\overline{H})(0,t)}{(\varphi\circ\overline{H})(1)}=\frac{H(1,t)}{f(1)}=\frac{f(1)}{f(1)}=1$$

$$\Rightarrow \{\overline{H}(1,t)-\hat{f}(1): t\in I\}\subset\mathbb{Z}$$

es conexo, entonces contiene es un solo punto.

$$\overline{H}(1,0)-\hat{f}=0\Rightarrow \overline{H}(1,t)-\hat{f}(1)=0,\quad \forall t\in I$$

$$\Leftrightarrow \overline{H}(1,t)=\hat{f}(1),\quad \forall t\in I.$$

(v)

$$\forall t \in I, \varphi(\overline{H}(1,t) - \hat{g}(1)) = \frac{(\varphi \circ \overline{H})(1,t)}{(\varphi \circ \overline{H})(1)} = \frac{H(1,t)}{g(1)} = \frac{g(1)}{g(1)} = 1$$

$$\Rightarrow \{\overline{H}(1,t) - \hat{g}(1) : t \in I\} \subset \mathbb{Z}$$

es conexo, entonces contiene un solo punto.

$$\overline{H}(1,1) - \hat{g}(1) = 0 \Rightarrow \overline{H}(1,t) - \hat{g}(1) = 0, \quad \forall t \in I$$

$$\overline{H}(1,t) = \hat{g}(1), \forall t \in I.$$

- *Unicidad: Suponemos que* $\exists \hat{K} : I^2 \to \mathbb{R}$ *homotopía de* $\hat{f}$ *a* $\hat{g}$ *relativa a* $\{0,1\}$ *tal que* $\varphi \circ \hat{K} = H$. *Sea* $F = \hat{H} - \hat{K} : I^2 \to \mathbb{R}$ *continua*

$$(\varphi \circ F)(s,t) = \frac{(\varphi \circ \overline{H})(s,t)}{(\varphi \circ \hat{K})(s,t)} = \frac{H(s,t)}{H(s,t)} = 1$$

$$\Rightarrow \{F(s,t) : (s,t) \in I^2\} \subset \mathbb{Z}$$

es conexo, entonces contiene un solo punto.

$$F(0,0) = \overline{H}(0,0) - \hat{K}(0,0) = \hat{f}(0) - \hat{g}(0) = 0$$

$$\Rightarrow F(s,t) = 0, \quad \forall (s,t) \in I^2$$
$$\Leftrightarrow \hat{K} = \overline{H}.$$

Observación. *Si* f_1, f_2 *lazos en* $\mathbb{S}^1$ *con base* 1 *tal que* $f_1 \simeq_{\{0,1\}} f_2$, *entonces* $\exists \hat{f}_i$ *camino en* $\mathbb{R}$ *de origen* 0 *tal que* $\varphi \circ \hat{f}_i = f_i$. *Ahora, por el Lema 2 se tiene que*

$$\hat{f}_1 \simeq_{0,1} f_2 \Rightarrow \hat{f}_1 = \hat{f}_2$$
$$\Rightarrow (\varphi \circ \hat{f}_1)(1) = f_1(1) = 1$$
$$\Rightarrow \hat{f}_1 \in \mathbb{Z}$$

Sea $\alpha : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \mathbb{Z} : [f] \mapsto \alpha([f]) \equiv \hat{f}(1)$. *Es una aplicación independiente de la base. ¿Es isomorfismo de grupos?*

Teorema 7.2. *El grupo fundamental de la circunferencia es isomorfismo al grupo aditivo* $\mathbb{Z}$.

Demostración.

- *φ es homeomorfismo : $\forall f, g$ lazos en $\mathbb{S}^1$ con base 1 entonces, por el lema 1, $\exists! \hat{f}, \hat{g}$ caminos en $\mathbb{R}$ de origen 0 tal que $\varphi \circ \hat{f} = f$ y $\varphi \circ \hat{g} = g$ donde $\hat{f}(1) = a \in \mathbb{Z}$ y $\hat{g}(1) \equiv b \in \mathbb{Z}$. Sea $\overline{K} : I \to \mathbb{R} : \hat{K}(t) = a + \hat{g}(t)$, entonces $\hat{K}$ es un camino en $\mathbb{R}$ de origen a. Por tanto, $\exists \hat{f} * \hat{K}$ camino en $\mathbb{R}$ de origen 0. Ahora,*

$$(\varphi \circ \hat{K})(t) = \varphi(a) \cdot (\varphi \circ \hat{g})(t)$$

$$= (\varphi \circ \hat{f})(1) \cdot (\varphi \circ \hat{g})(t)$$
$$= f(1) \cdot g(t) = 1 \cdot g(t)$$
$$\Rightarrow \varphi \circ \hat{K} = g$$

  Entonces, tenemos que

$$(\varphi \circ (\hat{f} \cdot \hat{K}))(t) = ((\varphi \circ \hat{f}) * (\varphi \circ \hat{K}))(t) = (f * g)(t)$$

$$\Rightarrow \varphi \circ (\hat{f} * \hat{K}) = f * g$$
$$\xRightarrow{\text{Lem. 1}} f \hat{*} g = \hat{f} * \hat{K}$$

$$\Rightarrow \varphi([f] * [g]) = \varphi([f * g]) = f \hat{\circ} g(1) = (\hat{f} * \hat{K})(1)$$
$$= \hat{K}(1) = a + \hat{g}(1) = \hat{f}(1) + \hat{g}(1)$$
$$= \varphi([f]) + \varphi([g])$$

  Entonces, φ es un homeomorfismo entre grupos.

- *α es monomorfismo: Si $\varphi([f]) = 0 \Leftrightarrow \hat{f}(1) = 0 \Rightarrow \hat{f}$ lazo en $\mathbb{R}$ con base 0. Ahora, como $\mathbb{R}$ es contractil*

$$\Rightarrow \hat{f} \simeq_{\{0,1\}} \hat{c}_0 : I \to \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \varphi \circ \hat{f} = f \simeq_{\{0,1\}} \varphi \circ \hat{c}_0 = c_1 : I \to \mathbb{S}^1$$
$$\Rightarrow [f] = [c_1]$$

- φ *es suprayectiva:* $\forall m \in \mathbb{Z}, \hat{f} : I \to \mathbb{R} : \hat{f}(t) = mt \Rightarrow \hat{f}$ *camino en* $\mathbb{R}$ *de origen* 0. *Luego,* $\varphi \circ \hat{f} \equiv f : I \to \mathbb{S}^1$ *es continua, entonces*

$$\begin{cases} f(0) = \varphi(0) = 1 \\ f(1) = \varphi(m) \end{cases}$$

Por tanto, f *es lazo en* $\mathbb{S}^1$ *con base* $1 \Rightarrow \varphi([f]) = \hat{f}(1) = m$.

Corolario 7.2.1. *La circunferencia no es retracto del disco.*

Demostración. *Considerando el disco y la* $\mathbb{S}^1$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Si $\exists r : D \to \mathbb{S}^1$ *retracción, entonces* $r_* : \pi_1(D) \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$ *donde* $\pi_1(D) = 0$ *y* $\pi_1(\mathbb{S}^1) = I$ *que es absurdo.*

Teorema 7.3 (Del Punto Fijo Bromer en 2 dimensiones)**.** *Toda aplicación continua del disco cerrado en si mismo tiene algún punto fijo.*

Definición 7.14 (Simplemente Conexo)**.** *Sea* X *e.t.. Se dice que es simplemente conexo si es conexo por caminos y su grupo fundamental es trivial.*

Proposición 7.12. *Si* X, Y *e.t. homotópicamente equivalentes tal que* X *es simplemente conexo entonces* Y *es simplemente conexo.*

Demostración. *Sea* X *c.p.c.. Como* X *es homotópicamente equivalente a* Y*, se tiene que* Y *es c.p.c.. Y* $\pi_1(X) \simeq 0 \xRightarrow{\text{homo. equiv.}} \pi_1(Y) \simeq 0$.

Corolario 7.3.1. *El ser simplemente conexo es invariante topológico.*

Demostración. *Esto se debe a que la propiedad de equivalencia homotópica es más fuerte que la de invariancia.*

Proposición 7.13. *Todo e.t. contractil es simplemente conexo.*

Demostración. X *contractil,* $\forall x, y \in X \Rightarrow 1_X \simeq c_x$ *y* $1_X \simeq c_y \Rightarrow H$ *homotopía de* c_x *en* c_y*, entonces* $\exists h : I \to X$ *continua definida por*

$$h(t) = H(x, t).$$

De manaera que

$$h(0) = H(x, 0) = c_x(x) = x$$
$$h(1) = H(y, 1) = c_y(x) = x$$

Entonces, X *es c.p.c y* X *tiene homotopía de un solo punto* $\Rightarrow \pi_1(X) \simeq 0$.

Proposición 7.14. *Si* X, Y *e.t.. Entonces,* $X \times Y$ *simplemente conexo* $\Leftrightarrow X, Y$ *simplemente conexo.*

Demostración. $X \times Y$ *c.p.c.* $\Leftrightarrow X, Y$ *c.p.c. y* $\pi_1(X \times U, (a, b)) \simeq \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, y)$.

$(\Rightarrow)$ *Ejercico*

$(\Leftarrow)$ *Ejercicio*

Observación. *El ser simplemente conexo no es propiedad hereditaria.*
Ejemplo. $\mathbb{R}^2$ *es contractil* $\Rightarrow \mathbb{R}^2$ *es simplemente conexo pero* $\mathbb{S}^1$ *no lo es.*
Observación. *El ser simplemente conexo no se conserva por *.*
Ejemplo. I *es contractil* $\Rightarrow I$ *es simplemente conexo pero* $\mathbb{S}^1$ *no lo es.*
Ejemplo. *esp*