Geomtería Diferencial

Hugo Del Castillo Mola

8 de enero de 2023

Índice general

Parte I

Curvas

Capítulo 1

Estudio Local

1.1. Curvas Parametrizadas

Definición 1.1 (Curva)**.** *Una curva en* $\mathbb{R}^3$ *es una función diferenciarle* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Definición 1.2 (Vector tangente)**.** *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva en* $\mathbb{R}^3$ *con* $\alpha = (\alpha_1, \alpha^2, \alpha^3)$. *Entonces,* $\forall t \in I$

$$\alpha'(t) = \Big(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t)\Big).$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}$$

Observación. *El vector tangente también se llama vector velocidad*

Definición 1.3 (Reparametrización)**.** *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva,* $h : J \to I$ *una función diferenciable. Entonces, la función* $\beta : J \to \mathbb{R}^3$

$$\beta(t) = \alpha(h(t))$$

es una reparametrización de α *por* h.

Ejemplo. *Sea* $\alpha(t) = \big(t, t\sqrt{t}, 1-t\big)$ *en* $I = (0, 4)$, $h(s) = s^2$ *en* $J = (0, 2)$. *Entonces, la curva reparametrizada es* $\beta(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(s^2) = (s, s^3, 1 - s^2)$.

Lema 1.0.1. *Si β es una reparametrización de α por h, entonces*

$$\beta'(t) = h'(t) \cdot \alpha'(h(t))$$

1.2. Curvas Regulares

Definición 1.4 (Curva Regular)**.** *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada. Entonces, si $\alpha'(t) \neq 0.\forall t \in I$ decimos que es regular.*

Definición 1.5 (Longitud de Arco)**.** *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3, t_0 \in I$. Definimos la función longitud de arco desde t_0 como $s : I \to \mathbb{R}$ donde*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(u)||du.$$

Definición 1.6 (Curva Parametriza por Longitud de Arco)**.** *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable. Entonces, si $||\alpha'(t)|| = 1, \forall t \in I$ decimos que la curva está parametrizada por longitud de arco.*

Teorema 1.1. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Entonces, $\exists \beta : J \to \mathbb{R}^3$ tal que $||\beta'(s)|| = 1, \forall s \in J$, es decir, β tiene velocidad unitaria.*

Observación. *Una reparametrización $\alpha(h)$ preserva la orientación si $h' \geq 0$ y la invierte si $h' \leq 0$.*

Observación. *Por definición, una curva regular parametrizada por arco siempre conserva la orientación.*

1.3. Producto Vectorial

Definición 1.7 (Producto Vectorial)**.** *Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$. El producto vectorial de u, v es*

$$u \times v = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

Proposición 1.1 (Propiedades Producto vectorial)**.** *Sean* $u, v \in \mathbb{R}^3$. *Entonces,*

(I) $u \times v = -v \times u$.

(II) $u \times v$ *es lineal respecto de* u *y* v*, es decir, para* $w \in \mathbb{R}^3$ *y* $a, b \in \mathbb{R}, (au + bw) \times v = au \times v + bw \times v$.

(III) $u \times v = 0 \Leftrightarrow u, v$ *son linealmente dependientes.*

(IV) $(u \times v) \cdot u = 0, (u \times v) \cdot v = 0$.

1.4. Movimineto Rígido

Definición 1.8 (Traslación)**.** *Sea* $v \in \mathbb{R}^3$, $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *aplicación definida por*

$$A(p) = p + v, \quad p \in \mathbb{R}^3$$

se llama traslación.

Definición 1.9 (Transformación Ortogonal)**.** *Sea* $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *una aplicación lineal tal que*

$$\rho u \cdot \rho v = u \cdot v, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3$$

Entonces, la aplicación se llama transformación ortogonal.

Definición 1.10 (Movimineto Rígido)**.** *Un movimiento rígido es la composición de una traslación con una transformación ortogonal con determinante positivo.*

Proposición 1.2. *Sea* $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un movimiento rígido entonces*

(I) *El ángulo de un vector y el ángulo entre dos vectores es invariante por isometrías.*

(II) *El producto vectorial de dos vectores es invatiante por ismetrías.*

(III) *La longitud de arco, la curvatura y la torsión de una curva parametri-*

zada son invariantes por movimientos rígidos.

1.5. Fórmulas de Frenet

Definición 1.11 (Curvatura)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a., $s \in I$. Entonces, $||\alpha''(s)|| = k(s)$ se llama curvatura de α en s.*

Observación. *$k(s)$ describe el cambio en la dirección de la curva en un instante.*

Proposición 1.3. *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a.. Entonces, $\alpha''(s) \perp \alpha'(s), \forall s \in I$.*

Demostración. $||\alpha'(s)|| = 1, \forall s \in I \Rightarrow \alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = 1 \Rightarrow 2\alpha''(s) \cdot \alpha'(s) = 0 \Rightarrow \alpha''(s) \perp \alpha'(s), \forall s \in I$.

Proposición 1.4. *La curvatura se mantiene invariante ante un cambio de orientación.*

Demostración. $\beta(-s) = \alpha(s) \Rightarrow \beta'(s) = -\alpha'(s) \Rightarrow \beta''(-s) = \alpha''(s) = k(s)$.

Definición 1.12 (Vector Tangente Unitario)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a.. Entonces,*

$$T(s) = \alpha'(s)$$

se llama vector tangente unitario a α en s.

Observación. $k(s) = ||T'(s)||$.

Nota. *Observamos que $\forall s \in I : k(s) > 0,\ k(s) = ||\alpha''(s)|| \Rightarrow \alpha''(s) = k(s)N(s)$ donde $N(s)$ es un vector unitario en la dirección de $\alpha''(s)$. Además, $\alpha''(s) \perp \alpha'(s) \Rightarrow N(s)$ es normal a $\alpha(s)$.*

Definición 1.13 (Vector Normal)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva regular* *p.p.a.. Entonces,*

$$N(s) = \frac{T'(s)}{k(s)}$$

se llama vector normal a α en s.

Observación. *El vector normal N es perpendicular al vector tangente unitario T y normal a la curva α en s. Esto es, $\alpha'(s) \cdot \alpha''(s) = T(s) \cdot k(s)N(s) = 0$*

Definición 1.14 (Plano Oscilador)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Entonces, $T(s), N(s)$ determinan un plano en $\mathbb{R}^3$ y lo llamamos plano oscilador.*

Observación. *También se llama Referencia móvil de Frenet para curvas planas.*

Definición 1.15 (Vector Binormal)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a.. Entonces, $B(s) = T(s) \times N(s)$ es el vector normal al plano oscilador en s y se dice vector binormal en s.*

Observación. *$||B'(s)||$ mide la tasa de cambio del plano oscilador, es deicr, la rapidez con la que la curva se aleja del plano oscilador en s.*

Nota. *$B' = T' \times N' + T \times N' = T \times N' \Rightarrow B'$ es normal a T y B' es paralelo a N. Entonces, escribimos $B' = \tau N$ para alguna función τ.*

Definición 1.16 (Torsión)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. tal que $\alpha''(s) \neq 0, s \in I$. Entonces, decimos que*

$$\tau(s) = \frac{B'(s)}{N(s)}$$

es la torsión de α en s.

Observación. *Si cambia la orientación entonces el signo del vector binormal cambia dado que $B = T \times N$. Por tanto, $B'(s)$ y la torsión se mantienen invariantes.*

Definición 1.17 (Tiedro de Frenet)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. tal que $k > 0$. Entonces, para cada valor $s \in I$, $\exists T(s), N(s), B(s)$ vectores unitarios mutuamente ortogonales y los llamamos el tiedro de Frenet en α. Estos vectores vienen dados de la siguiente forma*

$$T(s) = \alpha'(s) \text{ vector tangente },$$

$$k(s) = ||T'(s)|| \text{ curvatura },$$

$$N(s) = \frac{1}{k(s)} T'(s) \text{ vector normal },$$

$$B = T \times N \text{ vector binormal },$$

$$\tau(s) = \frac{B'(s)}{N(s)} \text{ torsión}$$

donde $T \cdot T = N \cdot N = B \cdot B = 1$ y cualquier otro producto escalar es 0.

DIBUJO

Definición 1.18 (Fórmulas de Frenet). *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva regualar p.p.a con $k > 0$ y torsión τ. Entonces,*

$$T' = kN,$$

$$N' = -kT + \tau B,$$

$$B' = -\tau N,$$

Proposición 1.5. *$\tau = 0$ si y solo si α es una curva en el plano.*

Demostración. *($\Rightarrow$) Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva plana p.p.a.. Entonces, $\exists p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^3$ tal que $(\alpha(s) - p) \cdot q = 0, \forall s \in I$. Derivando,*

$$\alpha'(s) \cdot q = \alpha''(s) \cdot q = 0, \ \forall s \in I.$$

Por tanto, q es ortogonal a T y $N \Rightarrow B = \frac{q}{||q||} \Rightarrow B' = 0 \Rightarrow \tau = 0$.

($\Leftarrow$) Sea $\tau = 0 \Rightarrow B' = 0 \Rightarrow B' \mid\mid B$. Queremos ver que α es ortogonal a B en 0. Sea

$$f(s) = (\alpha(s) - \alpha(0)) \cdot B, \forall s \in I.$$

Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \alpha' \cdot B = T \cdot B = 0$$

donde $f(0) = 0 \Rightarrow (\alpha(s) - \alpha(0)) \cdot B = 0, \ s \in I$. Por tanto, α permanece en el plano ortogonal a B.

Proposición 1.6. *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. con curvatura constante $k > 0$ y $\tau = 0$. Entonces α es parte de un circulo de radio $\frac{1}{k}$.*

Demostración. *$\tau = 0 \Rightarrow \alpha$ es una curva en plano. Sea $\gamma = \alpha + \frac{1}{k}N$ entonces,*

$$\gamma' = \alpha' + \frac{1}{k_\alpha}N'_\alpha = T_\alpha - \frac{1}{k_\alpha}k_\alpha T_\alpha = 0.$$

Como $T_\gamma = 0 \Rightarrow k_\gamma = 0 \Rightarrow \gamma$ es una recta horizontal. Sea $\gamma = c \in \mathbb{R}$

$$\gamma(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k_\alpha(s)}N(s) = c, \ \forall s \in I$$

$$\Rightarrow d(c, \alpha(s)) = ||c - \alpha(s)|| = ||\frac{1}{k}N(s)|| = \frac{1}{k}.$$

Luego, α es una curva que en todo punto se mantiene a distancia $\frac{1}{k}$ de un punto fijo c, el centro de la circunferencia.

1.6. Curvas Arbitrarias

Proposición 1.7. *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular con $k > 0$ y $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ su reparametrización por arco tal que $\beta(t) = \alpha(s(t))$ donde $s(t)$ es la longitud de arco. Entonces,*

$$T' = kvN$$

$$N' = -kvT + \tau vB$$

$$B' = -\tau vN$$

Demostración. $\frac{dT(s(t))}{dt} = T'(s(t)) \cdot s'(t) = k(s(t))N(s(t))v(t) = k(s)N(s)v.$

Proposición 1.8. *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular con $k > 0$ y $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ su reparametrización por arco tal que $\beta(t) = \alpha(s(t))$ donde $s(t)$ es la longitud de arco. Entonces,*

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'(s)\frac{ds}{dt} = vT(s),$$

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \frac{dv}{dt}T + vT' = v'T(s) + kv^2N$$

son la velocidad y aceleración de α en $s(t)$.

DIBUJO

Teorema 1.2. *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Entonces,*

$$T = \frac{\alpha'}{||\alpha'||},\ k = \frac{||\alpha' \times \alpha''||}{||\alpha'||^3},$$

$$N = B \times T,\ B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{||\alpha' \times \alpha''||},$$

$$\tau = (\alpha' \times \alpha'') \cdot \frac{\alpha'''}{||\alpha' \times \alpha'''||^2}.$$

Definición 1.19 (Hélice Cilíndrica)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular tal que $T(t) \cdot u = \cos(\varphi), \forall t \in I$. Entonces, α es una hélice cilíndrica.*

Teorema 1.3. *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva regula con $k > 0$. Entonces, α es una hélice cilíndrica si y solo si $\frac{\tau}{k}$ es constante.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva regular p.p.a con $k > 0$. Entonces, si α es una hélice cilíndrica $T(t) \cdot u = \cos(\varphi),\ \forall t \in I \Rightarrow$

$$0 = (T \cdot u)' = T' \cdot u = kN \cdot u$$

donde $k > 0 \Rightarrow N \cdot u = 0$. Por tanto, $\forall t \in I$, u está en el plano determinado por $T(t)$ y $B(t)$. Es decir,

$$u = \cos(\varphi)T + \operatorname{sen}(\varphi)B.$$

Usando las fórmulas de Frenet

$$0 = (k\cos(\varphi) + \tau\operatorname{sen}(\varphi))N$$

$$\Rightarrow \frac{\tau}{k} = \frac{\cos(\varphi)}{sin(\varphi)}.$$

(⇐) Si $\frac{\tau(t)}{k(t)} = \cos(\varphi), \forall t \in I$. *Entonces, eligiendo* $\cot(\varphi) = \frac{\tau}{k}$, *si*

$$U = \cos(\varphi)T + \operatorname{sen}(\varphi)B$$

tenemos que

$$U' = (k\cos(\varphi) - \tau\operatorname{sen}(\varphi))N = 0$$

determina un vector unitario u *tal que* $T \cdot u = \cos(\varphi) \Rightarrow \alpha$ *es una hélice cilíndrica.*

Teorema 1.4 (Fundamental de la Teoría Local de Curvas)**.** *Sean* $k, \tau : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funciones diferenciables con* $k(s) > 0, \tau(s)$. *Entonces,* $\exists \alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *curva tal que* s *es la longitud de arco,* $k(s)$ *es la curvatura, y* $\tau(s)$ *es la torsión de* α.

Además, cualquier otra curva $\overline{\alpha}$ *difiere de* α *por un movimiento rígido, es decir,* $\exists \gamma : I \to \mathbb{R}$ *aplicación lineal ortogonal con* $\det \gamma > 0$ *y* $c \in \mathbb{R}^3$: $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha} \circ \gamma) + c$.

Demostración. *content*

Capítulo 2

Estudio Global

Parte II

Superficies

Capítulo 3

Plano Tangente y Diferenciabilidad

3.1. Definición de Superficie

Definición 3.1 (Superficies)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$. Entonces, decimos que S es una superficie si $\forall p \in S, \exists V \subset \mathbb{R}^3$ entorno de p en S y $\exists X : U \to V \cap S$ aplicación con $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto tal que*

(I) *X es diferenciable,*

(II) *$X : U \to V$ es homeomorfismo,*

(III) *$(dX)_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva $\forall q \in U$.*

Observación. *En $I)$ si $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ entonces, $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ tienen derivadas parciales continuas en U.*

Observación. *En $II)$ dado que X es continua por $I)$ solo faltaría ver que X tiene inversa $X^{-1} : V \cap S \to U$ continua.*

Observación. *$(dX)_q$ inyectiva $\forall q \in U \Leftrightarrow \frac{\partial X}{\partial u}(q), \frac{\partial X}{\partial v}(q)$ l.i.*

Notación.

- *X se llama parametrización de S.*
- *u, v se llaman coordenadas locales de S.*
- *Las curvas obtenidas al fijar una de las variables, $X(u_0, v), X(u, v_0)$ se llaman curvas coordenadas.*

- *La imagén de X se llama entorno coordenado.*

Definición 3.2 (Valor Regular)**.** *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, $a \in \mathbb{R}$. Entonces, decimos que a es un valor regular de f si $\forall p \in U : f(p) = a, (df)_p \neq 0$.*

Teorema 3.1 (de la Función Implícita)**.** *Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $p = (x_0, y_0, z_0) \in U, a \in \mathbb{R}$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $f(p) = a$ y $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$, entonces $\exists U^{(x_0,y_0)} \subset \mathbb{R}^2, V^{z_0} \subset \mathbb{R}, g : U \to V$ tal que $U \times V \subset U, g(x_0, y_0) = z_0$ y*

$$\{p \in U \times V | f(p) = a\} = \big\{(x, y, g(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y \in U)\big\},$$

es decir, $f(x, y, z) = a$ se puede resolver para z cerca de p.

Proposición 3.1 (Gráfica es Superficie)**.** *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces, la gráfica de f es una superficie regular.*

Demostración. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ aplicación diferenciable, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$ su gráfica, $X : U \to S : X(u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$ parametrización con $X(U) = S$. Entonces, X es diferenciable dado que f es diferenciable, X_u, X_v son linealmente independientes y x^{-1} es continua. Por tanto, S es una superficie.*

Proposición 3.2 (Imagen Inversa de Valor Regular)**.** *Sea $f : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ función diferenciable, $a \in f(U) \subset \mathbb{R}$ un valor regular de f. Entonces, $S = f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset \Rightarrow S$ es superficie.*

Demostración. *Sea $p \in f^{-1}(\{a\})$. Entonces, a valor regular $\Rightarrow \exists i \in \{x, y, z\} : f_i(p) \neq 0$. Supongamos que $f_z(p) \neq 0$ y sea $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (x, y, f(x, y, z))$. Entonces,*

$$(dF)_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det((dF)_p) = f_z(p) \neq 0$. Por tanto, podemos aplicar el Teorema de la

Función Inversa. Entonces, $\exists V$ entorno de p y W entorno de $f(p)$ tal que $F : V \to W$ es invertible y $F^{-1} : W \to V$ es diferenciable. Por tanto, las funciones coordenada de F^{-1}

$$x = u, \quad y = v, \quad z = g(u, v, t), \qquad (u, v, t) \in W$$

son diferenciables. En particular, $z = g(u, v, a) = h(x, y)$ es una función diferenciable definida en la proyección de V al plano XY. Como

$$F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, t) : t = a\}$$

tenemos que $f^{-1}(a) \cap V$ es la gráfica de $h \Rightarrow$ es un entorno coordenado de $p \Rightarrow \forall p \in f^{-1}(a)$ se puede cubrir con un entorno coordenado $\Rightarrow f^{-1}(a)$ es una superficie regular.

Ejemplo. *El elipsoide*

$$S = \left\{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$$

es una superficie regular ya que

$$S = f^{-1}(0)$$

donde

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

es una función diferenciable y 0 es valor regular de f.

Proposición 3.3. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $p \in S$, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ aplicación con $p \in X(U) \subset S$ tal que X es diferenciable y $(dX)_q$ es inyectiva $\forall q \in U$. Entonces, si X es inyectiva, X^{-1} es continua.*

Demostración. *Similar a la siguiente prop*

3.2. Cambio de Parámetros

Definición 3.3 (Difeomorfismo)**.** *Un difeomorfismo es un homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable, es decir, una función biyectiva continua diferenciable con inversa continua diferenciable.*

Observación. *Un homeomorfismo es una aplicación biyectiva continua con inversa continua. Como f diferenciable $\Rightarrow f$ continua, para ver que f es difeomorfismo solo es necesario f biyectiva diferenciable con f^{-1} diferenciable.*

Proposición 3.4. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $X : U \to S$ parametrización tal que $p \in X(U)$. Sea $p_0 \in U : X(p_0) = p$. Entonces, $\exists V$ entorno de p_0 y $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ proyección ortogonal tal que $W = (\pi \circ X)(V) \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $\pi \circ X : V \to W$ es un difeomorfismo.*

Demostración. *Sea $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Entonces,*

$$(dX)_{p_0} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}_{(p_0)}$$

Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto \pi(x,y,z) = (x,y)$, entonces $\pi \circ X : U \to \mathbb{R}^2$ es diferenciable y

$$d(\pi \circ X)_{p_0} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}_{(p_0)}$$

donde $\det(d(\pi \circ X)_{p_0}) \neq 0 \Rightarrow$ por el teorema de la función inversa, $\exists V \subset U$ entorno de p_0 en U y V_1 entorno de $\pi \circ X(p_0)$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $\pi \circ X$ es biyectiva y diferenciable con $(\pi \circ X)^{-1}$ diferenciable $\Rightarrow$ difeomorfismo, tal que $d(\pi \circ X)^{-1}_{p_0} = d(\pi \circ X^{-1})_{p_0}$.

Observación. *Un difeomorfismo es un homeomorfismo diferenciable con inverasa diferenciable.*

Observación. *$Y = X \circ (\pi \circ X)^{-1} : W \to S$ es parametrización del abierto $\pi^{-1}(W) \cap U \cap S$ como grafo sobre alguno de los planos coordenados.*

Proposición 3.5. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superfice, $p \in S$. Entonces, $\exists V$ entorno de p en S tal que V es la gráfica de una función diferenciable definida en uno de los planos coordenados.*

Demostración. *Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ parametrización de S en p tal que*

$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v), (u,v) \in U.$$

Dado que X_u, X_v son linealmente independientes $\Rightarrow \det((dX)_q) \neq 0$ donde

$q = X^{-1}(p)$, *suponemos que*

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}_q \neq 0$$

Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto \pi(x, y, z) = (x, y)$, *entonces* $\pi \circ X : U \to \mathbb{R}^2$ *y* $\det(d(\pi \circ X)_q) \neq 0$. *Entonces, podemos aplicar el teorema de la función inversa* $\Rightarrow \exists V_1$ *entorno de* q, V_2 *entorno de* $(\pi \circ X)(q)$ *tal que* $(\pi \circ X)|_{V_1} : V_1 \to V_2$ *difeomorfismo con inversa* $(\pi \circ X)^{-1} : V_2 \to V_1$.

Además, como X *es homemorfismo,* $X(V_1) = V$ *es entorno de* p *en* S. *Ahora, sea* $z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$. *Entonces,* V *es la gráfica de la función* f.

Proposición 3.6 (Cambio de Parámetros). *Sea* $S \subset \mathbb{R}^3$ *superfice,* $p \in S$, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$, $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \to S$ *dos parametrizaciones de* S *tal que* $p \in X(U) \cap Y(V) = W$. *Entonces,* $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \to X^{-1}(W)$ *es un difeomorfismo. Se dice que* h *es un cambio de parámetros.*

Observación. *Si* X, Y *vienen dados por*

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U$$

$$Y(\xi, \omega) = (x(\xi, \omega), y(\xi, \omega), z(\xi, \omega)), \quad (\xi, \omega) \in V$$

entonces h *viene dado por*

$$u = u(\xi, \omega), v = v(\xi, \omega), \quad (\xi, \omega) \in Y^{-1}(W)$$

Además, h *se puede invertir tal que* h^{-1} *viene dado por*

$$\xi = \xi(u, v), \omega = \omega(u, v), \quad (u, v) \in X^{-1}(W)$$

Demostración. *Sea* $S \subset \mathbb{R}^3$ *superficie,* $p \in S$,

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S, \quad Y : V \subset \mathbb{R}^3 \to S$$

parametrizaciones de S *tal que* $p \in X(U) \cap Y(V) = W$ *y*

$$h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \to X^{-1}(W)$$

cambio de parámetros. Entonces, X *parametrización* $\Rightarrow$ X *diferenciable y* X_u, X_v *son l.i.* $\Rightarrow \det((dX)_p) \neq 0, \forall p \in U$. *Entonces, por el teorema de la* *función inversa X es difeomorfismo. De la misma manera, Y es difeomorfismo. Por tanto, $h = X^{-1} \circ Y$ también lo es.*

Observación. *X, Y son difeomorfismos $\Rightarrow h$ es difeomorfismo.*

Definición 3.4 (Caracterización Superficie)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Entonces, $\forall p \in S, \exists V \subset S : p \in V$ entorno, $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $X : U \to V$ difeomorfismo.*

Observación. *Una superfice regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es difeomorfica a $\mathbb{R}^2$*

3.3. Funciones Diferenciables

Nota. *La idea es reducir la difereciabilidad de una superficiea a diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$.*

Definición 3.5 (Función Diferenciable en $\mathbb{R}$)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $f : V \subset S \to \mathbb{R}$ función. Entonces, f es diferenciable en $p \in V$ si $\exists X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ parametrización con $p \in x(U) \subset V$ tal que $f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $q = X^{-1}(p)$.*

Observación. *f es diferenciable en V si f es diferenciable $\forall p \in V$.*

Observación. *La diferenciabilidad no depende de la elección de parametrización. Si $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \to S$ es otra parametrización con $p \in Y(V)$ y $h = X^{-1} \circ Y$ entonces $f \circ Y = f \circ X \circ h$ también es diferenciable.*

Definición 3.6 (Función Diferenciable en $\mathbb{R}^k$)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $f : S \to \mathbb{R}^k$. Si $f_j : S \to \mathbb{R}$ es diferenciable $\forall j \in \{1, \cdots, k\}$ con $f(p) = (f_1(p), \cdots, f_k(p))$, entonces f es diferenciable.*

Definición 3.7 (Función Diferenciable entre Superficies)**.** *Sea $S_1 \subset \mathbb{R}^3$, $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ superficies,*

$$\varphi : V_1 \subset S_1 \to S_2$$

una aplicación continua. Dadas

$$X_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to S_1, \quad X_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to S_2$$

con $p \in X_1(U)$ y $\varphi(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$ tal que

$$X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 : U_1 \to U_2$$

es diferenciable en $q = X_1^{-1}(p)$, entonces, φ es diferenciable en $p \in V_1$.

Proposición 3.7 (Composición de Funciones Diferenciables)**.** *Sea $S_1, S_2, S_3 \subset \mathbb{R}^3$ superficies, $f : S_1 \to S_2, g : S_2 \to S_3$ diferenciables. Entonces, $f \circ g$ es diferenciable.*

Demostración. *content*

3.4. Plano Tangente

Definición 3.8 (Vector Tangente)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $p \in S$. Decimos que $v \in \mathbb{R}^3$ es un vector tangente a S en p si $\exists \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S, \epsilon > 0$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$*

Notación. *El conjunto de vectores tangentes a S en p se llama Plano Tangente en p y se representa T_pS.*

Proposición 3.8 (Caracterización Plano Tangente)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfice, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ parametrización, $q \in U$. Entonces,*

$$T_{X(q)}(S) = (dX)_q(\mathbb{R}^2)$$

Demostración.

($\Rightarrow$) *Sea $w \in T_{X(q)}(S)$. Entonces, para $\epsilon > 0$, $\exists \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to X(U) \subset S$ diferenciable tal que $\alpha(0) = X(q)$ y $\alpha'(0) = w$. Entonces, $\beta = X^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ es diferenciable. Por tanto, para $X \circ \beta = \alpha$, la definición de diferencial $\Rightarrow (dX)_q(\beta'(0)) = \alpha'(0) = w \Rightarrow w \in (dX)_q$.*

($\Leftarrow$) *Sea $w = (dX)_q(v), v \in \mathbb{R}^2$, donde $v \in \mathbb{R}^2$ es la pendiente de $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ tal que $\gamma(t) = vt + q, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Entonces, por definición de diferencial, $w = \alpha'(0)$ para $\alpha = X \circ \gamma \Rightarrow w \in T_q(S)$*

Observación. *El plano tangente a S en p $T_pS = (dX)_{X^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2)$ no depende de la elección de X parametrización. Pero si que determina una base $\{\frac{\partial X}{\partial u}(q), \frac{\partial X}{\partial v}(q)\}$ que genera $T_{X(q)}S$.*

Ejemplo. *Sea* $S \subset \mathbb{R}^3$ *superficie,* $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ *parametrización de* S, $T_p(S)$ *plano tangente en* p *generado por* X, $w \in T_p(S)$ *vector tangente. Entonces, las coordenadas de* w *en la base asociada a* X *se determina de la siguiente manera.*

El vector tangente $w = \alpha'(0)$ *donde* $\alpha = X \circ \beta$ *donde* $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ *es una curva diferenciable dada por* $\beta(t) = (X^{-1} \circ \alpha)(t) = (u(t), v(t))$ *con* $\beta(0) = q = X^{-1}(p)$*. Entonces,*

$$\alpha'(0) = \frac{d}{dt}(X \circ \beta)(0) = \frac{d}{dt}X(u(t), v(t))(0)$$
$$= X_u(q)u'(0) + X_v(q)v'(0) = w$$

Por tanto en la base $\{X_u(q), X_v(q)\}$, w *tiene coordenadas* $(u'(0), v'(0))$.

Observación. *Sea* $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ *superficies,* $\varphi : V \subset S_1 \to S_2$ *aplicación diferenciable.* $\forall p \in V, \exists w \in T_p(S_1)$ *tal que* $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to V$ *curva diferenciable con* $\alpha'(0) = w, \alpha(0) = p$*. Entonces,* $\beta = \varphi \circ \alpha$ *curva con* $\beta(0) = \varphi(p) \Rightarrow \beta'(0) \in T_{\varphi(p)}(S_2)$.

Además, $\beta'(0)$ *no depende de la elección de* α*. La apliación* $(d\varphi)_p : T_p(S_1) \to T_{\varphi(p)}(S_2)$ *definida por* $(d\varphi)_p(w) = \beta'(0)$ *es lineal.*

3.5. Diferencial de una Aplicación Diferenciable

Definición 3.9 (Diferencial)**.** *Sea* $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una aplicación diferenciable. Sea* $w \in \mathbb{R}^n$ *y* $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ *curva diferenciable tal que* $\alpha(0) = p$ *y* $\alpha'(0) = w$*. Entonces, la curva* $\beta = F \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^m$ *es diferenciable y* $(dF)_p(w) = (F \circ \alpha)'(0) = \beta'(0)$ *es la diferencial de* F *en* p*, donde* $(dF)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es aplicación lineal.*

Observación. *Forma para tangente*

Proposición 3.9. *La aplicación* $(df)_p : T_pS \to \mathbb{R}^m$ *está bien definida, es decir,* $(df)_p(v)$ *no depende de* α*. Además, es una aplicación lineal.*

Demostración. *Sea* $S \subset \mathbb{R}^3$ *superficie,* $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ *parametrización con* $p \in X(U)$*. Entonces,* $T_pS = (dX)_q(\mathbb{R}^2)$ *con* $q = X^{-1}(p) \Rightarrow (dX)_q : \mathbb{R}^2 \to T_pS$ *es un isomorfismo lineal (definición).*

Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, $\alpha(-\epsilon, \epsilon) \subset X(U)$. Ahora, la curva $X^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ es tal que $(X^{-1} \circ \alpha)(0) = q$. Como $X \circ (X^{-1} \circ \alpha) = \alpha$ derivando en $t = 0$ tenemos que

$$(dX)_q\big[(X^{-1} \circ \alpha)'(0)\big] = \alpha'(0) = w,$$

es decir,

$$(X^{-1} \circ \alpha)'(0) = (dX)_q^{-1}(w).$$

Por la regla de la cadena,

$$(f \circ \alpha)'(0) = \frac{d}{dy}(f \circ X) \circ (X^{-1} \circ \alpha)$$

$$= d(f \circ X)_q((X^{-1} \circ \alpha)'(0)) = d(f \circ X)_q \circ (dX)_q^{-1}(w)$$

Por tanto,

$$(df)_p = d(f \circ X)_q \circ (dX)_q^{-1}$$

Teorema 3.2 (Regla de la Cadena). *Sean $S_1, S_2, S_3 \subset \mathbb{R}^3$ superficies, $f : S_1 \to S_2, g : S_2 \to S_3$ aplicaiones diferenciables. Entonces, dado $p \in S_1$ tenemos que*

$$d(g \circ f)_p = (dg)_{f(p)} \circ (df)_p$$

Demostración. *Si $v \in T_pS_1$, elegimos*

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S_1$$

tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Entonces,

$$f \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S_2$$

tal que $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$ y $(f \circ \alpha)'(0) = (df)_p(v)$. Por tanto,

$$d(g \circ f)_p(v) = [(g \circ f) \circ \alpha]'(0)$$

$$= [g \circ (f \circ \alpha)'](0)$$

$$= (dg)_{f(p)}((df)_p(v)).$$

Teorema 3.3 (de la Función Inversa)**.** *Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ difereciable, $p \in U$ tal que $(dF)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es isomorfismo. Entonces, $\exists V \subset U : p \in V$ entorno y $\exists W \subset \mathbb{R}^n : F(p) \in W$ entorno tal que $F : V \to W$ tiene inversa difereciable $F^{-1} : W \to V$. $F|_V$ es difeomorfismo.*

Observación. *Un isomorfismo es una función biyectiva.*

Proposición 3.10. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Entonces,*

(I) $f : S \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, S conexo y $(df)_p = 0, \forall p \in S \Rightarrow f$ es constante.

(II) $f : S \to \mathbb{R}$ diferenciable y $p \in S$ es un extremo local de $f \Rightarrow p$ es un punto crítico de f.

Demostración.

(I) Sea $a \in f(S)$. Entonces, $A = \{p \in S : f(p) = a\} \neq \emptyset, A \subset S$ cerrado. Veamos que A es abierto. Si $p \in A$, $X : U \to S$ parametrización tal que $p \in X(U)$ con U conexo, entonces $\forall q \in U, d(f \circ X)_q = (dX)_{X(p)} \circ (dX)_q = 0$. Entonces, $f \circ X$ es constante en $U \Rightarrow f = (f \circ X) \circ X^{-1}$ es constante en $X(U)$. Como $\forall p \in A, f(p) = a \Rightarrow p \in X(U) \subset A \Rightarrow A$ es abierto. Luego, S conexo $\Rightarrow A = S$, es decir, f es constante.

(II) Sea $p \in S$ extremo local de f. Si $v \in T_pS$ y $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, entonces $(f \circ \alpha)$ tiene un extremo local en $t = 0 \Rightarrow (df)_p(v) = (f \circ \alpha)'(0) = 0 \Rightarrow p$ es punto crítico de f.

Teorema 3.4 (de la Función Implícita para Superficies)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $f : S \to \mathbb{R}$ diferenciable, $p \in S$, $a \in \mathbb{R}$. Si $f(p) = a$ y $(df)_p \neq 0$ (p no es punto crítico de f). Entoces, $\exists V \subset S$ entorno de p en S y $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ curva regular inyectiva homeomorfa a su imagen con $\epsilon > 0$ tal que*

$$\alpha(0) = p \quad \text{y} \quad f^{-1}(\{a\}) \cap V = \alpha(-\epsilon, \epsilon)$$

Por tanto, si $a \in f(S)$ entonces $f^{-1}(\{a\})$ es una curva simple.

Demostración. *Sea* $U \subset \mathbb{R}^2 : (0,0) \in U$, $X : U \to S$ *parametrización con* $X(0,0) = p$. *Definimos*

$$g : U \to \mathbb{R}$$

tal que $g = f \circ X$, *entonces*

$$g(0,0) = f(X(0,0)) = f(p) = a$$

y, por la regla de la cadena,

$$(df)_{(0,0)} = (df)_p \circ (dX)_{(0,0)}.$$

Dado que $(dX)_{(0,0)}$ *es inyectiva y* $(df)_p \neq 0$, *tenemos que*

$$(dg)_{(0,0)} \neq 0,$$

es decir, $(g_u, g_v)(0,0) \neq (0,0)$. *Supongamos que* $g_v(0,0) \neq 0$. *Por el toerema de la aplicación implícita,* $\exists \epsilon, \delta > 0$ *y*

$$h : (-\epsilon, \epsilon) \to (-\delta, \delta)$$

tal que $(-\epsilon, \epsilon) \times (-\delta, \delta) \subset U$ *y* $h(0) = 0$ *ACABAR*

Nota.

Definición 3.10 (Superficies Transversales). *Sea* $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ *superficies,* $p \in S_1 \cap S_2$ *es un punto de intersección. Si*

$$T_p(S_1) = T_p(S_2),$$

entonces S_1 *y* S_2 *son tangentes en* p. *En el caso contrario, si*

$$T_p(S_1) \neq T_p(S_2),$$

entonces S_1 *y* S_2 *se cortan transversalmente en* p *y, de forma local, la intersección es la traza de la curva.*

Observación. S_1 *y* S_2 *son transversales si lo son* $\forall p \in S_1 \cap S_2$.

Proposición 3.11. *Sea* $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ *superficies que se cortan transversal-*

mente en p. Entonces, $\exists V \subset \mathbb{R}^3$ entorno de p, $I \subset \mathbb{R}$ abierto, $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ homeomorfa a $\alpha(I)$ tal que $\alpha(I) = V \cap S_1 \cap S_2$.

Demostración. *Sea $O \subset \mathbb{R}^3$ entorno de p y $g : O \to \mathbb{R}$ tal que 0 es un valor regular y $S_2 \cap O = g^{-1}(\{0\})$. Definimos*

$$f : S_1 \cap O \to \mathbb{R}$$

por $f = g|_{S_1 \cap O}$ diferenciable tal que $p \in f(S_1 \cap O)$. Ademaś, $f(p) = g(p) = 0$ y $(df)_p = (dg)_{p|_{T_pS_1}}$. Si p fuera punto crítico de f, tendríamos que $T_pS_1 \subset \ker(dg)_p = T_pS_2$. Pero esto es imposible ya que S_1 y S_2 se cortan transversalmente. Aplicando el teorema de la función implícita tenemos el resultado.

Teorema 3.5. *La intersección transversal de dos superficies es vacía o es un curva simple.*

Teorema 3.6 (Función Inversa)**.** *Sean $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$, $f : S_1 \to S_2$ aplicación difereciable, $p \in S_1$. Si $(df)_p : T_p(S_1) \to T_{f(p)}(S_2)$ es un isomorfismo lineal, entonces $\exists V_1$ entorno de p en S_1 y $\exists V_2$ entorno de $f(p)$ en S_2 tal que $f(V_1) = V_2$ y $f|_{V_1} : V_1 \to V_2$ es un difeomorfismo.*

Demostración. *Sea*

$$X_i : U_i \to S_i, \quad i \in \{1, 2\}$$

parametrizaciones tal que $p \in X_1(U_1), f(p) \in X_2(U_2)$ y $f(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$. Sea $q_i \in U_i, i \in \{1, 2\}$ tal que $X_1(q_1) = p$ y $X_2(q_2) = f(p)$. La aplicación

$$X_2^{-1} \circ f \circ X_1 : U_1 \to U_2$$

es diferenciable y

$$d(X_2^{-1} \circ f \circ X_1)_{q_1} = (dX_2)_{q_2}^{-1} \circ (df)_p \circ (dX_1)_{q_1}$$

es un isomorfismo lineal por ser composición de isomorfismos. Ahora, podemos aplicar el teorema de la función inversa. Entonces, $\exists W_i \subset U_i$ entornos de $q_i, i \in \{1, 2\}$ tal que

$$(X_2^{-1} \circ f \circ X_1)(W_1) = W_2$$

y tal que

$$X_2^{-1} \circ f \circ X_1 : W_1 \to W_2$$

es un difeomorfismo. Para $V_i = X_i(W_i) \subset S_i, i \in \{1, 2\}$*, tenemos que* $V_1 \subset S_1$ *es un entorno de* p *y* $V_2 \subset S_2$ *es un entorno de* $f(p)$*. Además,* $f(V_1) = V_2$ *y*

$$f|_{V_1} = X_2 \circ (X_2^{-1} \circ f \circ X_1) \circ X_1^{-1} : V_1 \to V_2$$

es un difeomorfismo, ya que es composición de difeomorfismos.

Proposición 3.12. *Sean* $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ *superficies,* $\phi : S_1 \to S_2$ *difeomorfismo,* $p \in S_1$*. Entonces,* $(d\phi)_p : T_p(S_1) \to T_{f(p)(S_2)}$ *es isomorfismo lineal y* $(d\phi)_p^{-1} = (d\phi^{-1})_p$*.*

Demostración. *Sea* $w \in T_{\phi(p)}S_2$ *y* $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to S_2$ *tal que* $\beta(0) = \phi(p), \beta'(0) = w$*. Entonces,* $\alpha = \phi^{-1} \circ \beta : (-\epsilon, \epsilon) \to S_1$ *diferenciable tal que* $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = w$ *y* $(d\phi)_p(\alpha(0)) = (\phi \circ \alpha)'(0) = \beta'(0) = w$*.*

ACABAR

Capítulo 4

Orientabilidad

4.1. Campos

Definición 4.1 (Campo). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Un espacio vectorial diferenciable en S es una aplicación diferenciable $V : S \to \mathbb{R}^3$.*

- *Si $V(p) \in T_p(S), \forall p \in S$, decimos que V es un campo tangente a S.*
- *Si $V(p) \perp T_p(S), \forall p \in S$, decimos que V es un campo normal a S.*

Además, si $|V(p)| = 1, \forall p \in S$, decimos que V es el campo unitario.

Observación. *$\forall p \in S$, hay dos vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$ perpendiculares al plano tangente $T_p(S)$.*

Nota. *Sea $X : U \to S$ una parametrización con $p \in S$. Determinamos la orientación asociada a $\{X_u, X_v\}$. Si p pertence a un entorno coordenado de otra parametrización $\overline{X}(\overline{u}, \overline{v})$, la nueva base $\{\overline{X}_{\overline{u}}, \overline{X}_{\overline{v}}\}$ se expresa en términos de la primera*

$$\overline{X}_{\overline{u}} = X_u \frac{\partial u}{\partial \overline{u}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \overline{u}},$$
$$\overline{X}_{\overline{v}} = X_u \frac{\partial u}{\partial \overline{v}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \overline{v}},$$

donde $u = (\overline{u}, \overline{v})$ y $v = (\overline{u}, \overline{v})$. Por tanto, las bases $\{X_u, X_v\}$ y $\{\overline{X}_{\overline{u}}, \overline{X}_{\overline{v}}\}$ determinan la misma orientación de $T_p(S)$ si y solo si el Jacobiano del cambio de coordenadas

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\overline{u}, \overline{v})}$$

es positivo.

Nota (Interpretación Geométrica Orientabilidad). *Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ superficie. Entonces, eligiendo $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ en $p \in S$ determinamis un vector normal unitario $\forall q \in X(U)$,*

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q)$$

de manera que $N : X(U) \to \mathbb{R}^3$ es diferenciable. Tomando otro sistema local de coordenadas $\overline{X}(\overline{u}, \overline{v})$ en p tenemos que

$$\overline{X}_{\overline{u}} \times \overline{X}_{\overline{v}} = (X_u \times X_v)\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})},$$

donde $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}$ es el jacobiano del cambio de coordenadas. Por tanto, N conservará o invertirá el signo dependiendo de si el jacobiano es positivo o negativo.

Proposición 4.1. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $X : U \to \mathbb{R}^3$ parametrización de S. Entonces, $\exists N : V = X(U) \to \mathbb{R}^3$ campo normal unitario.*

Demostración. *content*

Lema 4.0.1. *Sea S una superficie conexa y N_1, N_2 dos campos normales unitarios en S. Entonces, $N_1 = N_2$ o $N_1 = -N_2$.*

Demostración. *content*

Definición 4.2 (Supercicies Orientable). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Decimos que S es orientable si admite un campo normal unitario global $N : S \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Decimos que N es una orientación de S. Cada superficie S tiene dos orientaciones. Fijada N decimos que S está orientada.*

Observación. *el campo vectorial unitario global N se conoce como aplicación de Gauss.*

Ejemplo (Plano). *Por la Prop. 4.1. los planos son orientables. Sea*

$$P = \{p \in \mathbb{R}^3 : (p - p_0) \cdot a = 0\}$$

el plano que pasa por p_0 con vector normal unitario a. Si $p \in P$, entonces

$$T_p(P) = \{v \in \mathbb{R}^3 : v \cdot a = 0\}.$$

Por tanto, $N : P \to \mathbb{R}^3$ definida por $N(p) = a, \forall p \in P$ es un campo normal unitario en P.

Ejemplo (Esfera). *Hacemos uso de la Prop. 4.1. Sea* $\mathbb{S}^2(r)$ *la esfera de radio* r *centrada en* p_0. *Si* $p \in \mathbb{S}^2(r)$ *el plano tangente correspondiente es el complemento ortogonal del vector* $p - p_0$, *es decir,*

$$T_p(\mathbb{S}^2(r)) = \{v \in \mathbb{R}^3 : (p - p_0) \cdot v = 0\}.$$

Entonces, la aplicación $N : \mathbb{S}^2(r) \to \mathbb{R}^3$ *definida por*

$$N(p) = \frac{1}{r}(p - p_0), \quad \forall p \in \mathbb{S}^2(r)$$

es el campo normal unitario definido en la esfera.

Ejemplo (Grafo). *Hacemos uso de la Prop. 4.1. Sea* S *una superficie que es el grafo de una función diferenciable* $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *donde* U *es abierto. Sabemos que* $X : U \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $X(u,v) = (u, v, f(u,v))$ *es parametrización que cubre* S *totalmente. Entonces,* $N = N^X \circ X^{-1} : S \to \mathbb{R}^3$ *con*

$$N^X = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}(-f_u, -f_v, 1),$$

campo normal unitario en S.

Ejemplo (Imagen Inversa). *Sea* $O \subset \mathbb{R}^3$ *abierto,* $f : O \to \mathbb{R}$ *diferenciable,* $a \in \mathbb{R}$ *valor regular de* f *y* $S = f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$ *superficie. Entonces,* $\forall p \in S$,

$$T_p(S) = \ker(df)_p = \{v \in \mathbb{R}^3 : (\nabla f)_p \cdot v = 0\}.$$

Por tanto, $\nabla f|_S = (f_x, f_y, f_z)$ *es un campo normal en* S. *Como* a *es valor regular,* $\nabla f(p) \neq 0, \forall p \in S$. *Entonces, la aplicación* $N : S \to \mathbb{R}^3$ *definida por*

$$N = \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f|_S = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}(f_x, f_y, f_z),$$

es el campo normal unitario en S.

Ejemplo (Cilindro). *Sea* $O = \mathbb{R}^3$ *y* $f(x,y,z) = x^2 + y^2$. *Entonces,* $S = f^{-1}(\{r^2\}), r > 0$ *es un cilindro de radio* r *con eje principal el eje* z. *Por tanto,* $N(x,y,z) = \frac{1}{r}(x, y, 0)$ *es un campo normal unitario en el cilindro.*

Proposición 4.2. *Sea* $S \subset \mathbb{R}^3$ *superficie. Entonces,* S *es orientable* $\Leftrightarrow \exists N : S \to \mathbb{R}^3$ *en* S.

Demostración. *content*

Ejemplo (Superficie no orientable)**.** *content*

Proposición 4.3. *Sea* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = a\}$ *superficie con* $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *diferenciable y* a *valor regular de* f*. Entonces,* S *es orientable.*

Demostración. *Ejemplo imagen inversa.*

Teorema 4.1. S *es una superficie orientable* $\Leftrightarrow \exists\{X_i : U_i \to S\}_{i\in J}$ *familia de parametrizaciones que cubren* S *tal que* $X_j \circ X_i$ *tiene jacobiano positivo* $\forall j, i \in J, \forall p \in S$.

Lema 4.1.1. $X_i^{-1} \circ X_j$ *tiene jacibiano positivo* $\Leftrightarrow N^{X_j}, N^{X_i}$ *inducen la misma orientación en la intersección* $N^{X_i} \circ X_i^{-1}|_W = N^{X_j} \circ X_j^{-1}|_W$ *con* $W = X_i(U_i) \cap X_j(U_j)$.

Demostración. *content*

Capítulo 5

Primera Forma Fundamental

5.1. Primera Forma Fundamental

Proposición 5.1. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Entonces, el producto interior natural de $\mathbb{R}^3$ induce en cada plano tangente $T_p(S)$ un producto interior $\langle , \rangle_p$, cuya forma quadrática es $I_p : T_p(S) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$I_p(w) = \langle w,w \rangle_p = |w|^w \geq 0.$$

Definición 5.1. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Decimos que la primera forma fundamental de S es la restricción del producto escalar de $\mathbb{R}^3$ a cada plano tangente $T_p(S)$. Es decir, la forma quadrática I_p en $T_p(S)$ es la primera forma fundamental de S en p.*

Observación. *La primera forma fundamental nos permite tomar medidas sobre la superficie sin referirnos al espacio $\mathbb{R}^3$.*

Nota (Expresión de la Primera Forma Fundamental)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superfice, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ parametrización. Entonces, $\exists\{X_u, X_v\}$ base de X en $p \in S$. Como el vector tangete $w \in T_p(S)$ es tangete a la curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ con $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ y $p = \alpha(0) = X(u_0, v_0)$ tenemos que*

$$I_p(\alpha'(0)) = \langle \alpha'(0),\alpha'(0) \rangle_p$$

$$= \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle_p$$

$$= \langle X_u,X_u \rangle_p (u')^2 + 2\langle X_u,X_v \rangle_p u'v' + \langle X_v,X_v \rangle_p (v')^2$$

$$= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2$$

donde $t = 0$ y

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle_p,$$
$$F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle_p,$$
$$G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle_p$$

Ejemplo. *Un sistema de coordenadas para un plano $P \subset \mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y que contiene los vectores ortonormales $w_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $w_2 = (b_1, b_2, b_3)$ viene dado por*

$$X(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

Para calcular la primera forma fundamental en un punto arbitrario de P observamos que $X_u = w_1, X_v = w_2$. Dado que w_1 y w_2 son vectores unitarios ortogonales, la funciones E, F, G son constantes y vienen dadas por

$$E = 1, \quad F = 1, \quad G = 1.$$

Ejemplo. *El cilindro sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ admite como parametrización $X : U \to \mathbb{R}^3$ definida por*

$$X(u, v) = (\cos(u), \operatorname{sen}(u), v),$$
$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in (0, 2\pi), v \in (-\infty, +\infty)\}.$$

Para calcular la primera forma fundamental, calculamos las derivadas paraciales

$$X_u = (-\operatorname{sen}(u), \cos(v), 0), \quad X_v = (0, 0, 1),$$

entonces,

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

5.2. Isometrías

Nota. *Queremos ver que significa que dos superfices tengan la misma primera forma fundamental. Localmente el plano y el cilindro se comportan de la misma forma aunque son dos superficies distintas pero los coeficientes de sus primeras formas fundamentales son los mismos. Las superficies isométricas cumplen esta propiedad.*

Definición 5.2 (Superficies Isométricas). *Un difeomorfismo $\varphi : S \to S'$ es un isometría si $\forall p \in S, \forall w_1, w_2 \in T_p(S)$ se tiene que*

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}$$

Las superficies S y S' se dice que son isométricas.

Observación. *Si $\forall p \in S, (d\varphi)_p : T_p(S) \to T_p(S')$ conserva el producto escalar, entonces φ es una isometría.*

Definición 5.3. *Sea $\varphi : V \to \overline{S}$ aplicación donde V es un entorno de p en $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Entonces, φ es una isometría local si $\exists \overline{V}$ entorno de $\varphi(p)$ en $\overline{S}$ tal que $\varphi : V \to \overline{V}$ es una isometría.*

- *Si $\forall p \in S$, existe una isometría local en $\overline{S}$ entonces, decimos que S es localmente isométrica a $\overline{S}$.*
- *Decimos que S y $\overline{S}$ son isométricas si S es localmente isométrica a $\overline{S}$ y $\overline{S}$ es localmente isométrica a S.*

Observación. *Si $\varphi : S \to \overline{S}$ es difeomorfismo y isometría local $\forall p \in S$, entonces φ es isometría global.*

Ejemplo. *Consideramos el cilindro del ejemplo anterior. Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to C$ definida por*

$$\varphi(u, v) = (\cos(u), \operatorname{sen}(u), v).$$

De esta manera φ es difeomorfismo local e isometría local ya que es φ diferenciable, biyectiva, $(d\varphi)_q$ es isomorfismo $\forall q \in V$ entonor de p en S, φ^{-1} es diferenciable y $\langle (d\varphi)_p(w), (dX)_p(w) \rangle_p = ||w||^2$.

Proposición 5.2. *Sea $f : S \to S'$ difeomorfismo local. Entonces, f es isometría local $\Leftrightarrow$ f preserva longitudes de curvas.*

Demostración. *content*

Proposición 5.3. *Sea $\phi : S \to \overline{S}$ una isometría entre superficies, $X : U \to S$ parametrización de S. Entonces, $\overline{X} = \phi \circ X$ es una parametrización de $\phi(X(U)) \subset \overline{S}$ y*

$$E = \overline{E}, \quad F = \overline{F}, \quad G = \overline{G}.$$

Demostración. *content*

Corolario 5.0.1. *Una propiedad local P de una superficie en términos de E, F, G es invariante por isometrías. Si $\phi : S \to S'$ es isometría, S satisface P si y solo si S' satisface P.*

Proposición 5.4. *Sean $X : U \to S$ y $X' : U \to S'$ parametrizaciones tal que $\forall (u,v) \in U$,*

$$E(u,v) = E'(u,v), \quad F(u,v) = F'(u,v), \quad G(u,v) = G'(u,v),$$

Entonces, $\varphi = X' \circ X^{-1} : X(U) \to S'$ es isometría local.

Demostración. *content*

5.3. Area de una Superficie

Definición 5.4. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $X : U \to S$ parametrización. Llamamos área de $R = X(Q)$ una región acotada de S a*

$$\begin{aligned} A(R) &= \iint_Q ||X_u \times X_v|| du\ dv \\ &= \iint_Q \sqrt{EG - F^2}\ du\ dv \end{aligned}$$

Observación. *El área no depende de la parametrización que escojamos.*

Demostración. *content*

5.4. Aplicaciones Conformes

Definición 5.5. *Sean $\alpha : I \to S, \beta : J \to S$ curvas diferenciables en S que se cortan en $p = \alpha(0) = \beta(0)$. Decimos que se cortan con ángulo θ donde*

$$\cos(\theta) = \frac{\alpha'(0) \cdot \beta'(0)}{||\alpha'(0)|| \cdot ||\beta'(0)||}.$$

Definición 5.6. *Sea $\varphi : S \to S'$ diferenciable. Decimos que φ preserva ángulos en $p \in S$ si $\forall v, w \in T_p(S)$, el ángulo entre v y w es el mismo que el ángulo entre $(d\varphi)_p(v)$ y $(d\varphi)_p(w)$. Decimos que φ preserva ángulos si φ preserva ángulos $\forall p \in S$.*

Proposición 5.5. *Las isometrías locales preservan ángulos.*

Demostración. *content*

Proposición 5.6. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplicación lineal. Son equivalentes,*

(I) *f preserva ángulos*

$$\frac{f(u) \cdot f(v)}{||f(u)||||f(v)||} = \frac{u \cdot v}{||u||||v||}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2.$$

(II) $\exists \lambda > 0 : f(v) \cdot f(w) = \lambda^2 (v \cdot w), \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^2.$

(III) $\exists \lambda > 0 : ||f(v)|| = \lambda ||v||, \quad \forall v \in \mathbb{R}^2.$

(IV) *Dada base ortonormal $\{u_1, u_2\}, \exists \lambda > 0 : ||f(u_i)|| = \lambda ||u_i||$ y $(f(u_1) \cdot f(u_2)) = 0$.*

Demostración. *content*

Definición 5.7. *Un difeomorfismo $\varphi : S \to \overline{S}$ es una aplicación conforme si $\forall p \in S, \forall v_1, v_2 \in T_p(S)$*

$$(d\varphi)_p(v_1) \cdot (d\varphi)_p(v_2) = \lambda^2(p) \langle v_1, v_2 \rangle_p,$$

donde $\lambda^2 > 0$ es una aplicación diferenciable en S. Se dice que las superficies S y $\overline{S}$ son conformes

Proposición 5.7. *Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ y $\overline{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \overline{S}$ parametrizaciones tal que*

$$E = \lambda^2 \overline{E}, \quad F = \lambda^2 \overline{F}, \quad G = \lambda^2 \overline{G}$$

donde λ^2 es función diferenciable en U. Entonces, $\phi = \overline{X} \circ X^{-1} : X(U) \to \overline{S}$

es localmente conforme.

Teorema 5.1. *Dos superficies regulares son localmente conformes.*

Nota. *El campo vectorial unitario*

$$N : S \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$$

es aplicación diferenciable y

$$(dN)_p : T_p(S) \to T_p(S)$$

dado que $T_p(S)$ es paralelo a $T_{N(p)}(\mathbb{S}^2)$. Ahora, la segunda forma fundamental

$$II(p)(v, w) = -\langle (dN)_p(v), w \rangle$$

donde $v, w \in T_p(S)$, es simétrica. Por tanto, $(dN)_p$ es una aplicación auto-adjunta, es decir,

$$\langle (dN)_p(w), v \rangle = \langle v, (dN)_p(w) \rangle, \quad \forall v, w \in T_p(S).$$

Un resultado básico de aplicaciones auto-adjuntas es el teorema espectral. Este nos permite establecer que dada una base $\{v_1, v_2\}$ ortonormal de $T_p(S)$ se tiene que

$$(dN)_p(v_i) = \lambda_i v_i$$

A partir de este resultado se demuestra el teorema de Euler.

Capítulo 6

Curvatura

6.1. Resumen Orientación

Nota. *Dada una parametrización $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ de una superficie regular S en un punto $p \in S$, podemos elegir un vector normal unitario en cada punto de $X(U)$*

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q), \quad q \in X(U).$$

Entonces, tenemos una aplicación diferencial $N : X(U) \to \mathbb{R}^3$ que asocia a cada $q \in X(U)$un vector normal unitaro. En general, si $V \subset S$ es un abierto de S y $N : V \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferencial que asocia $\forall q \in V$ un vector normal unitario en q, entonces decimos que N es un campo normal unitaro diferenciale en V.

Observación. *No todas las superficies admiten un campo normal unitario diferenciable. Por ejemplo, la band de Mobius.*

Definición 6.1. *Decimos que S superficie es orientable si admite un campo normal unitario diferenciable en todo S. A este campo lo llamamos orientación de S.*

Observación. *Toda superficie cubierta por un solo sistema de coordenadas es trivialmente orientable. Por ejemplo, la superficies representadas por grafos de funciones diferenciables.*

Proposición 6.1. *Una orientación N en S induce una orientación en el espacio tangenete $T_p(S)$. Sea $p \in S$. Definimos $\{v, w\} \subset T_p(S)$ como base* *positiva si $(v \times w) \cdot N > 0$. Entonces, el conjunto de todas las bases positivas de $T_p(S)$ es una orientación para $T_p(S)$.*

Notación. *Una superficie S orientable tiene orientación N, donde N es un campo normal unitario diferenciable.*

6.2. Segunda Forma Fundamental

Definición 6.2 (Aplicación de Gauss)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con orientación N. La aplicación $N : S \to \mathbb{R}^3$ toma valores en la esfera unidad*

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

La aplicación $N : S \to \mathbb{S}^2$ se llama aplicación de Gauss de S.

Observación. *La aplicación de Gauss es diferenciable tal que $(dN)_p : T_p(S) \to T_{N(p)}(\mathbb{S}^2) = T_p(S)$ es una aplicación lineal.*

Proposición 6.2. *La diferencial $(dN)_p : T_p(S) \to T_p(S)$ de la aplicación de Gauss es una aplicación lineal auto-adjunta, es decir,*

$$\langle (dN)_p(v), w \rangle = \langle w, (dN)_p(v) \rangle, \quad \forall v, w \in T_p(S)$$

Demostración. *content*

Definición 6.3 (Segunda Forma Fundamental)**.** *La forma bilineal $II_p : T_p(S) \times T_p(S) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$II_p(v, w) = -\langle (dN)_p(v), w \rangle, \quad v, w \in T_p(S)$$

se llama segunda forma fundamental de S en p.

Proposición 6.3. *La segunda fomra fundamental es simétrica, es decir,*

$$II_p(v, w) = II_p(w, v), \quad \forall v, w \in T_p(S)$$

Demostración. *content*

6.3. Meusnier

Definición 6.4 (Sección Normal). *La sección normal en $p \in S$ por $v \in T_p(S)$ es el plano formado por v y $N(p)$ en p.*

Definición 6.5 (Curvatura Normal). *Sea P la sección normal en $p \in S$ por $v \in T_p(S)$, α la curva forma por la intersección de P y S. Entonces, la curvatura de α se llama curvatura normal y se denota k_n.*

Proposición 6.4. *Sea P la sección normal en $p \in S$ por $v \in T_p(S)$. Entonces,*

$$k_n = \langle \alpha''(0), N(p) \rangle = II_p(v, v)$$

es la curvatura normal.

Demostración. *content*

Teorema 6.1 (Meusnier). *Sea P la sección normal en p por $v \in T_p(S)$ y sea P_θ el plano que contiene v y forma un ángulo θ con P. Entonces, La curva c_θ forma por la intersección de S y P_θ tiene curvatura k_θ y viene dada por*

$$k_\theta \cdot \cos(\theta) = k_n$$

donde k_n es la curvatura normal.

Demostración. *content*

Proposición 6.5. *Todas las curvas en S que tienen la misma tangente en p tienen la misma curvatura normal.*

6.4. Euler

Teorema 6.2 (Euler). *Las curvaturas normales k_n tienen un mínimo k_1 en una dirección e_1 y un máximo k_2 en una dirección perpendicular e_2. Sea $v \in T_p(S)$ dirección formando un ángulo θ con e_1. Entonces,*

$$k_n = k_1 \cos^2(\theta) + k_2 \operatorname{sen}^2(\theta)$$

Definición 6.6 (Curvaturas Principales). *La curvatura normal máxima k_1 y la curvatura normal mínima se llaman curvaturas principales en p.*

Definición 6.7 (Direcciones Principales). *Las direcciones e_1 y e_2 se llaman direcciones principales en p.*

6.5. Coordenadas Locales

Nota (Coordenadas Locales). *Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ parametrización de S en $p \in S$ compatible con una orientación $N : S \to \mathbb{R}^3$ entonces,*

$$N^X(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u, v)$$

Sea $\alpha(t) = (X \circ \beta)(t) = X(u(t), v(t))$ con $\alpha(0) = p$. Entonces,

$$\alpha' = X_u u' + X_v v'$$

y podemos expresar

$$(dN)_p(\alpha') = (N \circ X \circ \beta)' = (N^X \circ \beta) = N_u u' + N_v v'.$$

Ahora, como $N_u, N_v \in T_p(S)$ tenemos que

$$N_u = a_{11} X_u + a_{21} X_v$$

$$N_v = a_{12} X_u + a_{22} X_v$$

Por tanto, la matriz de $(dN)_p(\alpha')$ en la base $\{X_u, X_v\}$ es

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Por otro lado, la segunda forma fundamental en la base $\{X_u, X_v\}$ es

$$II_p(\alpha', \alpha') = -\langle (dN)_p(\alpha'), \alpha' \rangle$$

$$= \langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle$$
$$= e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2$$

donde e, f, g *son los coefiecientes de la segunda forma fundamental dados por*

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle,$$
$$f = \langle N, X_{uv} \rangle,$$
$$g = \langle N, X_{vv} \rangle.$$

Resoloviendo el sistema obtenemos los coeficientes a_{ij} *y expresamos la curvatura en función de estos*

$$K = \det((dN)_p(\alpha')) = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

6.6. Puntos Curvatura

Nota. *Considerando la aplicación* dN_p *en la base* $\{e_1, e_2\}$ *donde* e_1 *y* e_2 *son la direcciones principales tenemos que*

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Definición 6.8. *Un punto* $p \in S$ *superficie se llama*

(I) *Elíptico si* $K(p) > 0$*,*

(II) *Hiperbólico si* $K(p) < 0$*,*

(III) *Parabólico si* $K(p) = 0$ *con* $dN_p \neq 0$*,*

(IV) *Plano si* $K(p) = 0$*.*

Observación (Putno Elíptico)**.** *Si* $p \in S$ *es elíptico*

$$(eg - f^2) > 0,$$

entonces $K(p) > 0$ *y ambas* $k_1, k_2 > 0$ *o* $k_1, k_2 < 0$*. Por tanto, toda curva* $\alpha(t_0) \subset S$ *tal que* $\exists s_0 \in I : \alpha(s_0) = p$ *tiene sus vectores normales apuntando hacia el mismo lado del plano tangente.*

Observación (Punto Hiperbólico). *Si $p \in S$ es hiperbólico*

$$(eg - f^2) < 0,$$

entonces $K(p) < 0$ y $k_1 < 0, k_2 > 0$ ó $k_1 > 0, k_2 < 0$. Por tanto, hay curvas en p cuyos vectores normales apuntan hacia ambos lados del plano tangente.

Observación (Punto Parabólico). *Si $p \in S$ es parabólico*

$$(eg - f^2) = 0, \quad eg = f^2 \neq 0,$$

entonces $K(p) = 0$ y $k_1 \neq 0$ o $k_2 \emptyset 0$.

Observación (Punto Plano). *Si $p \in S$ es plano*

$$(eg - f^2) = 0, \quad eg = f = 0$$

entonces $k_1 = 0$ y $k_2 = 0$.

Definición 6.9 (Punto Umbílico). *Si $p \in S$, $k_1 = k_2$, entonces p se llama punto umbílico.*

Observación. *Los puntos planos, es decir, $p \in S$ tal que $k_1 = k_2 = 0$ son puntos umbílicos.*

Proposición 6.6. *Si todos los puntos de una superficie conexa S son umbílicos, entonces S está contenida en una esfera o en un plano.*

Demostración. *content*

6.7. Curvas Asintóticas

Definición 6.10 (Dirección Asintótica). *Sea P la sección normal en $p \in S$ por $v \in T_p(S)$. Si $k_n = 0$, entonces v es una dirección asintótica.*

Definición 6.11 (Curva Asintótica). *Sea α curva en S tal que $\alpha'(t)$ es dirección asintótica $\forall t \in I$. Entonces, α es una curva asintótica.*

Observación. *$\forall \alpha(t) = X(u(t), v(t))$, entonces α es curva asintótica si y solo si $II_p(\alpha'(t)) = 0, \forall t \in I$.*

Lema 6.2.1. *Sea $p \in S$ elíptico, entonces no hay direcciones asintóricas.*

Lema 6.2.2. *Sea $p \in S$ hiperbólico, entonces hay exactamente 2 direcciones asintóticas.*

Observación. *En cada punto parabólico hay exactamente 1 dirección asintótica.*

Observación. *Si $p \in S$ no es umbílico, cada valor de $II_p(v)$ se alcanza en exactamente 2 direcciones distintas.*

Observación. *Si $\alpha : I \to S$ es una recta, entonces es línea asintótica y también es sección normal.*

Proposición 6.7. *Una curva α dada por $\alpha(t) = (X \circ \beta)(t) = (X(u(t), v(t))$ es curva asintótica si y solo si*

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0, \quad t \in I.$$

Esta ecuación se llama ecuación diferencial de las curvas asitóticas.

Lema 6.2.3. *Las curvas coordenadas de una parametrización X en punto hiperbólico $(eg - f^2 < 0)$ son curvas asíntoticas si y solo si*

$$e = g = 0$$

6.8. Líneas de Curvatura

Definición 6.12 (Linea de Curvatura)**.** *Sea α una curva en S tal que $\alpha'(t)$ es una dirección principal $\forall t \in I$. Entonces, α es una línea de curvatura.*

Observación. *La curva α es línea de curvatura si y solo si $(dN)_p(\alpha'(t)) = \lambda(t)\alpha'(t)$.*

Proposición 6.8. *Una curva α dada por una parametrización X es una línea de curvatura si y solo si*

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0.$$

Esta ecuación se llama ecuación diferencial de las líneas de curvatura.

Lema 6.2.4. *Las líneas coordenadas en un entorno de un punto no umbílico son líneas de curvatura si y solo si $F = f = 0$.*

6.9. Ecuaciones de Compatibilidad

Do Carmon Sección 4.3 -¿Formulario

Notación (Símbolos de Christoffel)**.**

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle X_{vv}, X_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_v \end{cases}$$

6.10. Teorema Egregium

Teorema 6.3. *(Egregium) La curvatura de una superficie es invariante invariante por isometrías locales.*

Demostración. *La curvatura se puede expresar en términos de E, F, G. Por tanto, por el teorema de isometrías se tiene que dos superficies isométricas tienen*

$$E = \overline{E}, \quad F = \overline{F}, \quad G = \overline{G}$$

Entonces, tienen la misma curvatura.

Observación. *Entre el plano y un cilindro existe una isometría local. La curvatura del plano es 0. Por tanto, el cilindro tiene curvatura 0.*

Ejemplo. *Sea $Z \subset \mathbb{R}^3$ un cilindro*

$$Z = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = a^2\}$$

Entonces, una isometría local es $f : \mathbb{R}^2 \to Z$ definida por

$$f(s, t) = (a \cos(\frac{s}{a}), a \operatorname{sen}(\frac{s}{a}), t).$$

Vemos que f es isometría. Sea $p \in \mathbb{R}^2$ y $w_1, w_2 \in T_p(\mathbb{R}^2)$. Entonces,

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \langle (df)_p(w_1), (df)_p(w_2) \rangle$$

dado que

$$(df)_p(w) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(s) & \cos(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

??

Teorema 6.4 (Bonnet). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie y $X, \overline{X} : U \to \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones de S con*

$$E = \overline{E}, \quad F = \overline{F}, \quad G = \overline{G},$$

$$e = \overline{e}, \quad f = \overline{f}, \quad g = \overline{g}.$$

Entonces, existe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ movimiento rígido tal que $\phi \circ X = \overline{X}$.

6.11. Curvatura Superficies Compactas

Definición 6.13 (Punto límite). *Sea $A \subset \mathbb{R}^3$. Deciomos que $p \in \mathbb{R}^3$ es un punto límite de A si $\forall U^p$ entorno de p en $\mathbb{R}^3$, $A \cap setminus U^p \setminus \{p\} \neq \emptyset$.*

Definición 6.14 (Conjunto Cerrado). *A es cerrado si contiene todos sus puntos límite.*

Definición 6.15 (Conjunto Acontado). *A es acotado si está contenido en alguna bola.*

Definición 6.16 (Superfice Compacta). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superfices. Si S es cerrado y acotado, entonces S es compacto.*

Proposición 6.9. *No hay superficies compactas con curvatura negativa en todos sus puntos.*

Demostración.

Proposición 6.10. *Toda superficie compacta S tiene un punto de curvatura positivo.*

Proposición 6.11. *Sea S superficie compacta. Sea S_r una esfera de radio r y B_r una bola compacta de radio r que contiene a S_r. Sea $p \in S \cap S_r$ y $S \subset B_r$. Entonces, S tiene curvatura positiva en p.*

6.12. Definición no rigurosa de Curvatura

Notación. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $p \in S$ la definición no rigurosa de la curvatura en p es*

$$K(p) = \lim_{A \to p} \frac{\text{área } N(A)}{\text{área } A}$$

donde A es un entorno de p y N es el campo norma inducido por una parametrización $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$.

Capítulo 7

Geodésicas

7.1. Geodésicas

Observación (Idea Geodésicas). *Una geodésica generaliza rectas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.*

Observación (Rectas). *Una recta r en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ tiene las siguientes propiedades*

(I) $\forall p, q \in r$, r *es la curvar de menor longitud entre p y q.*

(II) *Si $\alpha(t) = p + t\vec{v}$ p.p.a entonces $\alpha''(t) = 0, \forall t$.*

(III) *Los vectores tangentes a $\alpha'(t)$ son todos paralelos.*

Observación (Propiedades Geodésicas). *Sea γ geodésica en S entonces*

(I) *γ minimiza la longitud localmente. Es decir, $\forall p \in \gamma, \exists U$ entorno de p tal que $\forall q \in \gamma \cap U$ se tiene que γ es la curva de longitud mínima que une p y q.*

(II) *γ p.p.a será geodésica si la proyección de $\gamma''(t)$ sobre $T_{\gamma(t)}(S)$ es $\vec{0}$.*

(III) *$\gamma'(t)$ se percibe desde S como transporte paralelo de vectores.*

Definición 7.1 (Geodésica). *Una curva regular $\alpha : I \to S$ es una geodésica si*

$$\alpha''(t) \perp T_{\alpha(t)}(S), \quad \forall t \in I$$

Lema 7.0.1. *Sea α geodésica, entonces $||\alpha'(t)||$ es constante.*

Demostración. *Sea α geodésica, entonces*

$$\frac{d}{dt}||\alpha'(t)||^2 = \frac{d}{dt}\langle\alpha'(t),\alpha'(t)\rangle$$
$$= \langle\alpha''(t),\alpha'(t)\rangle = 0$$

Observación. *Es decir, el parámetro t de una geodésica $\alpha(t)$ es proporcional al parámetro s longitud de arco $\Rightarrow \exists c \neq 0 : t = c - s$.*

Demostración. *Sea α geodésica, entonces*

$$s = \int_0^t ||\alpha'(t)||dt = \int_0^t c\ dt = c \cdot t, \quad \forall t \in I.$$

Observación. *Si α es geodésica, entonces $||\alpha'(t)|| = c, \forall t \in I$. Sea $\beta(s)$ la p.p.a de α, entonces $\alpha(t) = \beta(c \cdot s)$.*

Definición 7.2 (Curvatura Geodésica). *Sea $: I \to S$ p.p.a., $N : S \to \mathbb{R}^3$ campo vectorial unitario a S. Entonces,*

$$\alpha''(s) = k_n(s)N_{\alpha(s)} + k_g(s)N(\alpha(s)) \times \alpha'(s)$$

donde k_n es la cuvatura normal y $k_g(s)$ es la curvatura geodésica de α en s.

Observación. *Si $||\alpha'(s)|| = 1$, entonces $\alpha''(s) \perp \alpha'(s)$.*

Definición 7.3 (Curvatura Geodésica de curva regular). *Si α es una curva regular, entonces su curvatura geodésica es la de su reparametrización por arco.*

Observación. *Si α es p.p.a., entonces α es geodésica $\Leftrightarrow k_g(s) = 0 \forall s$.*

Ejemplo (Plano). *Sea $P = \{x : \langle x - p,a\rangle = 0\}$, $\alpha : I \to P$ geodésica p.p.a.. Entonces,*

$$\langle\alpha(t) - p,a\rangle = 0$$

donde derivando tenemos que

$$\langle\alpha''(t),a\rangle = 0$$

como $a \neq 0$, entonces $\alpha''(t) = 0, \forall t \in I$. Por tanto,

$$\alpha(t) = p + t \cdot \vec{v},$$

es decir, la geodésica es parametrización afín de una recta.

Ejemplo (Esfera)**.** *Los círculos máximos p.p.a son geodésicas. Sea* $\alpha : I \to \mathbb{S}^2$ *geodésica p.p.a.. Entonces,* $||\alpha'(t)|| = 1$ *y derivando* $||\alpha'(t)||^2 = 1$

$$\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle = 0$$

$$\langle \alpha''(t), \alpha(t) \rangle + \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle = 0$$
$$\langle \alpha''(t), \alpha(t) \rangle + ||\alpha'(t)||^2 = 0$$
$$\Rightarrow \langle \alpha''(t), \alpha(t) \rangle = -1$$

Por tanto, si α *es geodésica, entonces* $\alpha''(t) = -\alpha(t)$*. Luego,*

$$\alpha(t) = (a_1 \operatorname{sen}(t) + a_2 \cos(t), b_1 \operatorname{sen}(t) + b_2 \cos(t), c_1 \operatorname{sen}(t) + c_2 \cos(t)), \quad t \in (0, 2\pi).$$

Si $\alpha(0) = p$*,* $\alpha'(0) = v$*,* $||\alpha(t)|| = 1$*,* $||\alpha'(t)|| = 1$ *entonces*

$$\alpha(t) = p \cos(t) + v \operatorname{sen}(t)$$

que es parametrización de círculo máximo.

Ejemplo (Cilindro)**.** *Sea* $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$*,* $\alpha : I \to C$ *geodésica p.p.a. con*

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [0, 1].$$

Como $\alpha(t) \in C$*, entonces* $x^2(t) + y^2(t) = 1$ *y derivando dos veces tenemos*

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$$

$$2x'(t)x'(t) + 2x(t)x''(t) + 2y'(t)y'(t) + 2y(t)y''(t) = 0$$

Ahora, $||\alpha'(t)|| = 1$ *entonces,*

$$||(x'(t), y'(t), z'(t))|| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = 1$$

$$\Rightarrow x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = 1$$

Por tanto, si sustituimos en la ecuación anterior tenemos

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 + x(t)x''(t) + y(t)y''(t) = 0$$

$$1 - z'(t)^2 + x(t)x''(t) + y(t)y''(t) = 0$$

Dado que $\alpha''(t) \perp \alpha'(t)$*, tenemos que* $\alpha''(t) || \alpha(t)$*, entonces*

$$(x'', y'') = \lambda(t)(x, y).$$

Luego,

$$\lambda(t) = -1 + z'(t)^2$$

Resolviendo el sistema asociado

$$\begin{cases} z''(t) = 0 \\ x''(t) = (-1 + z'(t)^2)x(t) \\ y''(t) = (-1 + z'(t)^2)y(t) \end{cases}$$

con $z(t) = tb, \alpha(0) = (1, 0, 0), \alpha'(0) = (0, a, b), a^2 + b^2 = 1$ *obtenemos*

$$\alpha(t) = (\cos(at), \operatorname{sen}(at), bt)$$

que es una hélice o una recta si $a = 0$.

Ejemplo (Geodésicas en coordenadas locales). *Sea* $X : U \to X(U) \subset S$ *parametrización se* S *y* $\alpha : I \to S$ *curva p.p.a con* $\alpha(0) \in X(U)$. *Sea*

$$\beta(t) = X^{-1}(\alpha(t)) = (u(t), v(t))$$

entonces,

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u + v'(t)X_v$$

donde derivando de nuevo tenemos

$$\alpha''(t) = u'(t)X_u + u'(t)[X_{uu}u'(t) + X_{uv}v'(t)]$$

$$+v''(t)X_v + v'(t)[X_{vu}u'(t) + X_{vv}v'(t)]$$

donde

$$X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN^X$$
$$X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN^X$$
$$X_{uu} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN^X$$

y como $\alpha''(t) \perp T_{\alpha(t)}(S)$ *tenemos*

$$\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 = 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 = 0 \end{cases}$$

nos permite encontrar geodésicas en coordenadas locales.

Notación (Símbolos de Christoffel)**.**

$$\begin{cases}\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle X_{uu}, X_u\rangle = \frac{1}{2}E_u\\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle X_{uu}, X_v\rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle X_{uv}, X_u\rangle = \frac{1}{2}E_v\\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle X_{uv}, X_v\rangle = \frac{1}{2}G_u\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle X_{vv}, X_u\rangle = F_v - \frac{1}{2}G_u\\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle X_{vv}, X_v\rangle = \frac{1}{2}G_v\end{cases}$$

Ejemplo (Geodésicas de Superficie de Revolución)**.** *Sea la parametrización*

$$X(u,v) = (f(v)\cos(u), f(v)\operatorname{sen}(u), g(v)), \quad f(v) \neq 0$$

se tiene que

$$E = f(v)^2, \quad F = 0, \quad G = f'(v)^2 + g'(v)^2$$

Primero obtenemos los símbolos de Christoffel derivando los coeficientes de la primera forma fundamental

$$E_u = 0, \quad E_v = 2ff'$$

$$F_u 0, \quad F_v = 0,$$

$$G_u = 0, \quad G_v = 2(f'f'' + g'g'')$$

Las dos primeras ecuaciones dan

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}$$

Las dos segundas dan

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{ff'}{f^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = 0$$

Y Las dos últimas dan

$$\Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{f'f'' + g'g''}{f'^2 + g'^2}.$$

Con estos valores, el sistema de ecuaciones diferenciales resultante es

$$\begin{cases}u'' + \frac{2ff'}{f^2}u'v' = 0\\ v'' - \frac{ff'}{(f')^2+(g')^2}(u')^2 + \frac{f'f''+g'g''}{f'^2+g'^2}(v')^2 = 0\end{cases}$$

(I) *Vemos que* $u = \text{cte.}$ *y* $v = v(s)$ *son geodésicas. La primera ecuación se satisface si* $u = \text{cte.}$. *En este caso,* $u' = 0$ *y* $u'' = 0$

$$0 + \frac{2ff'}{f^2} \cdot 0 \cdot v' = 0$$

y la segunda ecuación resulta

$$v'' + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}(v')^2 = 0$$

Por tanto,

$$v'' = -\frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}(v')^2$$

(II) *Vemos que paralelos* $v = \text{cte.}$, $u = u(s)$ *son geodésicas. La primera de las ecuaciones es*

$$u'' + \frac{2ff'}{f^2}u' \cdot 0 = 0$$

$$u'' = 0$$

y la segunda es

$$\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}(u')^2 = 0$$

Por tanto, para que el paralelo $v = \text{cte.}$, $u = u(s)$ *sea geodésica se debe tener que* $u' \neq 0$. *Como* $f'^2 + g'^2 \neq 0$ *y* $f \neq 0$, *entonces* $f' = 0$.

(III) *La primera ecuación se puede escribir como*

$$(f^2u')' = f^2u'' + 2ff'u'v' = 0.$$

Por tanto,

$$f^2u' = \text{cte.} = c$$

Por otro lado, el ángulo θ *de una geodésica con un paralelo que la interseca es*

$$\cos(\theta) = \frac{|\langle X_u, X_u u' + X_v v'\rangle|}{|X - u|} = |fu'|$$

donde $f = r$, *entonces*

$$r\cos(\theta) = \text{cte.} = |c|$$

Proposición 7.1 (Invariancia Geodésica Por Isometrías). *El sistema de ecuciones diferenciales de las geodésicas solo depende de los Símbolos de Christoffel, es decir, solo depende de los coeficientes E, F, G de la primera forma fundamental. Por tanto, si $f : S \to S'$ es una isometría local y $\alpha : I \to S$ es geodésica entonces $(f \circ \alpha) : I \to S'$ es geodésica.*

Ejemplo. *Sea P un plano y C un cilindro. Como P y C son isométricos, $\exists f$ isometría local y por tanto cualquier geodésica en Pes geodésica en C por la invariancia de las geodésica por isometrías.*

Proposición 7.2. *$\forall p \in S$, $\forall v \in T_p(S)$, $\exists! \alpha_{p,v} : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ geodésica con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.*

7.2. Aplicación Exponencial

Definición 7.4. *La aplicación exponencial en un entorno de $p \in S$ es*

$$\exp_\phi : B_{\epsilon_0} \to S$$

$$v \mapsto \alpha_{p,v}$$

Proposición 7.3. *(I) La exponencial es continua y diferenciable.*

(II) Es un difeomorfismo en 0.

(III) La imagen del rango $\{\lambda v\}_{\lambda \in [0,1]}$ es una geodésica.

(IV) La imagen de las circinferencias concentricas son ortogonales a las geodésicas radiales.

(V) Tomando coordenadas polares se tiene

$$X(r, \theta) = \exp_p(r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta)), \quad r \in (0, \epsilon_0), \theta \in (0, 2\pi)$$

satisfa

$$E = 1, \quad F = 0, \quad \lim_{r \to 0} G = 0, \quad \lim_{r \to 0} \sqrt{G} = 1,$$

(VI) La curvatura geodésica en las coordenas polares de $\exp_p(r,\theta)$ *es*

$$K \circ X = -\frac{\sqrt{G}_{rr}}{\sqrt{G}}$$

(VII) Las ecuaciones en estas coordenadas locales son

$$\begin{cases} r'' = \frac{1}{2} G_r (\theta')^2 \\ \theta'' = -\frac{G_r}{G}\theta' r' - \frac{1}{2}\frac{G_\theta}{G}(\theta')^2 \end{cases}$$