Ecuaciones Diferenciales

Hugo Del Castillo Mola

25 de septiembre de 2022

Índice general

1. Teoremas de Existencia y Continuidad **2**
1.1. Preliminares 2
1.2. Picard 5
1.3. Peano 9
1.4. Banach 13

Capítulo 1

Teoremas de Existencia y Continuidad

1.1. Preliminares

Nota. *El objetivo principal de este capítulo es demostrar los siguientes resultados sobre las soluciones de un PVI*

(I) *Unicidad: Si $f(t,x)$ es Lipschitz continua respecto a x en D. Entonces, el PVI tiene solución única.*

(II) *Existencia: Si $f(t,x)$ es continua en D entonces existe una solución $x(t)$ del PVI en un intervalo $[t_0, t_0 + a]$.*

(III) *Estabilidad: Si $f(t,x)$ es continua respecto a t y es Lipschitz continua respecto a x, entonces la solución del PVI varia continuamente respecto a x_0.*

Definición 1.1 (Espacio Banach)**.** *Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado.*

Definición 1.2 (Operadores?)**.** *content*

Observación. *La convergencia de la norma del supremo equivale a convergencia uniforme en un espacio de Banach.*

Lema 1.0.1 (Lema de Gronwall)**.** *Sea $J \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in J$ y $a, \beta, u \in C(J, \mathbb{R}_+)$. Si*

$$u(t) \leq a(t) + \Big| \int_{t_0}^{t} \beta(s)u(s)ds \Big|, \forall t \in J,$$

Entonces,

$$u(t) \leq a(t) + \Big| \int_{t_0}^{t} a(s)\beta(s)e^{| \int_s^t \beta(\sigma)d\sigma |} ds \Big|, \forall t \in J.$$

Demostración. *Sea $v(t) = \int_{t_0}^{t} \beta(s)u(s)ds$. Entonces,*

$$\dot{v}(t) = \beta(t)u(t)$$

$$\leq \beta(t)a(t) + \beta(t)\Big| \int_{t_0}^{t} B(s)u(s)ds \Big|, \forall t \in J.$$

$$\leq a(t)\beta(t) + \operatorname{sgn}(t - t_0)\beta(t)v(t), \forall t \in J.$$

Ahora, sea $\gamma = \exp\big\{ - \big| \int_{t_0}^{t} \beta(s)ds \big| \big\} = \exp\big\{ - \int_{t_0}^{t} \operatorname{sgn}(t - t_0)\beta(s)ds \big\}$, $\gamma \dot{v} \leq a\beta\gamma - \dot{\gamma}v \Rightarrow \dot{\gamma v} - a\beta\gamma \leq 0$ donde integrando tenemos que

$$\operatorname{sgn}(t - t_0)v(t) \leq \operatorname{sgn}(t - t_0) \int_{t_0}^{t} \frac{a\beta\gamma}{\gamma(t)} ds, \forall t \in J.$$

$$= \Big| \int_{t_0}^{t} \frac{a(s)\beta(s)\gamma(s)}{\gamma(t)} ds \Big|, \forall t \in J.$$

Sustituyendo en la hipótesis inicial, nos queda

$$u(t) \leq a(t) + \operatorname{sgn}(t - t_0)v(t)$$

$$\leq a(t)\Big| \int_{t_0}^{t} a(s)\beta(s) \exp\Big\{ \Big| \int_{s}^{t} \beta(\sigma)dgks \Big| \Big\} ds \Big|, \forall t \in J.$$

Corolario 1.0.1. *Sea $a(t) = a_0(|t - t_0|)$ donde $a_0 \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ es una función monótona crecient tal que*

$$u(t) \leq a(t) + \Big| \int_{t_0}^{t} \beta(s)u(s)ds \Big|, \forall t \in J.$$

Entonces,

$$u(t) \leq a(t)e^{|\int_{t_0}^{t} \beta(\sigma)ds|}, \forall t \in J.$$

Definición 1.3 (Función uniformemente Lipschitz continua)**.** *Sean X, Y espacios métricos y T un espacio topológico. Una función $f : T \times X \to Y$ se llama uniformemente Lipschitz continua respecto a $x \in X$, si $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+$ tal que*

$$|f(t,x) - f(t,x')| \leq \lambda |x - x'|, \forall x, x' \in X, \forall t \in T.$$

Notación. *Conjunto de funciones localmente Lipschitz continuas*

$$C^{0,1-}(T \times X, Y) = \{f : T \times X \to Y | f \in C(T \times X, Y),$$

$$f \text{ Lipschitz continua respecto a } x \in X\}$$

Si $f : X \to Y$, entonces

$$C^{1-}(X,Y) = \{f : X \to Y | f \text{ es Lipschitz continua }\}.$$

Conjunto de funciones continuas con dereivas parciales respecto a $x \in X$

$$C^{0,1}(T \times X, Y) = \{f \in C(T \times X, Y) : D_2 f \in C(T \times X, \mathcal{L}(E,F))\}.$$

Observación. $C^{-1}(X,Y) = C(X,Y)$ *y* $C^{0,1-}(T \times X, Y) \subset C(T \times X, Y)$.

Proposición 1.1. *Sea X, Y espacios métricos, T un e.t. compacto. Supongamos que $K \subset X$ es compacto y $f \in C^{0,1-}(T \times X, Y)$. Entonces, existe un entorno abierto W de K en X tal que $f|_{T \times W}$ es uniformemente Lipschitz continua respecto a $x \in W$.*

Notación. (I) *$J \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto.*

(II) *E es un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$.*

(III) *$D \subset E$ es un abierto.*

(IV) *$f \in C(J \times D, E)$.*

(V) *$(t_0, x_0) \in J \times D$, $a, b \in \mathbb{R} : a, b > 0$ tal que $[t_0 - a, t_0 + a] \subset J$ y*

$\overline{\mathbb{B}}(x_0, b) \subset D;$ y $R = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{\mathbb{B}}(x_0, b)$

Definición 1.4 (Solución ecuación diferencial). *Sea $u : J_u \to D$. Entonces, decimos que u es solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ Si se verifica*

(I) $J_u \subset J : (\mathring{J}_u) \neq \emptyset$.

(II) $u \in C^1(J_u, D)$,

(III) $\dot{u}(t) = f(t, u(t)), \forall t \in J_u$.

Lema 1.0.2 (Forma Integral Solución PVI). *Sea J_u un subintervalo perfecto de J, $u : J_u \to D$. Entonces u es una solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x) \Leftrightarrow u \in C(J_u, D)$ y*

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds, \forall t \in J_u$$

donde $t_0 \in J_u$.

AÑADIR ESPACIO BANACH, EQUICONTINUA, ETC?

1.2. Picard

Teorema 1.1 (de Unicidad). *Sea $J \subset \mathbb{R}; D \subset E$ abierto donde E es un espacio de Banach; $f \in C^{0,1-}(J \times D, E)$; $(t_0, x_0) \in J \times D$; $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ y $R = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{\mathbb{B}}(x_0, b) \subset J \times D$. Entonces, el PVI*

$$\dot{x} = f(t, x),\ x(t_0) = x_0,$$

tiene solución única.

Revisar notación $t \in J$

Demostración. *Sean $u(t), u'(t)$ dos soluciones del PVI en $[t_0, t_1]$. Entonces,*

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds, \forall t \in J,$$

$$u'(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u'(s))ds, \forall t \in J,$$

$$\Rightarrow u(t) - u'(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) - f(s, u'(s))ds, \forall t \in J$$

$$\Rightarrow |u(t) - u'(t)| = |\int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) - f(s, u'(s))ds|, \forall t \in J$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, u(s)) - f(s, u'(s))|ds, \forall t \in J$$

$$\leq \lambda \int_{t_0}^{t} |u(t) - u'(t)|ds, \forall t \in J$$

$\Rightarrow$ *(Teo. Gronwall* $a = 0$*)* $|u(t) - u'(t)| = 0, \ \forall t \in J \Rightarrow u(t) = u'(t), \ \forall t \in J.$

Teorema 1.2 (Picard)**.** *Sean* $J \subset \mathbb{R}$ *abierto,* E *espacio de Banach,* $D \subset E$*. Sea* $f \in C^{0,1-}(J \times D, E)$*,* $(t_0, x_0) \in J \times D$ *y* $a, b, \lambda, M \in \mathbb{R}$ *tal que* $R = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{\mathbb{B}}(x_0, b) \subset J \times D$ *y* $|f(t, x)| \leq M, \forall (t, x) \in R$*,* $\alpha = \text{mín}\left(a, \frac{b}{M}\right)$ *y* $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$*. Entonces el PVI*

$$\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0,$$

tiene solución única $u : I \to \mathbb{B}(x_0, b)$

Nota (Esquema Demostración)**.** *Usando la iteración de picard*

$$u_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_{n-1}(s))ds, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ t \in I.$$

(I) $\{u_n\}_{j \in J}$ *está bien definida,* u_n *tiene derivadas continuas* $\forall n \in N$*,* $|u_n - x_0| \leq b$ *y* $f(t, u_n(t))$ *está bien definida.*

(II) $\{u_n\}_{j \in J}$ *satisface* $|u_n(t) - u_{n-1}(t)| \leq \frac{M}{\lambda} \frac{(h\lambda)^n}{n!}, t \in I.$

(III) $\{u_n\}_{j \in J}$ *converge uniformemente en* I*.*

(IV) u *satisface PVI en* I*.*

Demostración. (I) *Pocedemos por inducción.*

Si $m = 1$ *es trivial comprobar que existe*

$$u_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0) ds, \ t \in I,$$

y tiene derivada continua en I *tal que* $|u_1(t) - x_0| < b, \ t \in I \Rightarrow (t, x_0) \in R_1 = I \times \overline{\mathbb{B}}(x_0, b)$*; y* $f(t, x_0)$ *está definida y es continua en* I*. Además,* $|f(t, x_0)| \leq M, \ t \in I$.

Suponemos que se cumple para $m = n - 1$*, es decir, existe* $u_{n-1}(t)$ *de manera que*

$$u_{n-1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_{n-2}(s)) ds, \ t \in I,$$

y tiene derivada continua en I *tal que* $|u_{n-1}(t) - x_0| < b, \ t \in I \Rightarrow (t, x_0) \in R_1 = I \times \overline{\mathbb{B}}(x_0, b)$*; y* $f(t, u_{n-1})$ *está definida y es continua en* I*. Además,* $|f(t, u_{n-1})| \leq M, \ t \in I$.

Ahora, vemos que se cumple para $m = n$*. Sea*

$$u_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_{n-1}(s)) ds, \ t \in I,$$

Entonces, u_n *existe y tiene derivada continua en* I*. Luego,*

$$\begin{aligned} |u_n(t) - x_0| &= \Big| \int_{t_0}^{t} f(s, u_{n-1}(s)) ds \Big|, \forall t \in I, \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, u_{n-1}(s))| ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} M ds \leq M(t - t_0) \leq Mh \leq b \end{aligned}$$

$\Rightarrow (t, u_n(t)) \in R_1$ *y* $f(t, u_n(t))$ *está bien definida y es continua.*

(II) *Procedemos por inducción.*

Es trivial comprobar que se cumple para $m = 1$. *Suponemos que se cumple para* $m = n-1$

$$|u_{n-1}(t) - u_{n-2}(t)| \leq \frac{M\lambda^{n-1}}{(n-1)!}(t-t_0)^{n-1},\ t \in I,$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
|u_n(t) - u_{n-1}(t)| = \Big| \int_{t_0}^{t} f(s, u_{n-1}(s)) - f(s, u_{n-2}(s))ds \Big|,\ t \in I, \\
\leq \lambda \int_{t_0}^{t} |u_{n-1}(s) - u_{n-2}|ds \\
\leq \lambda \int_{t_0}^{t} \frac{M\lambda^{n-2}}{(n-1)!}(s-t_0)^{n-2}ds \\
\leq \frac{M\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\frac{(s-t_0)^n}{n}\Bigg|_{t_0}^{t} \\
= \frac{M\lambda^{n-1}}{(n)!}(t-t_0)^n \\
= \frac{M}{\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\alpha^n \leq \frac{M}{\alpha}\frac{(\lambda\alpha)^n}{n!}
\end{aligned}$$

(III) *(ii)* $\Rightarrow |u_n(t) - u_{n-1}(t)| \leq \frac{M}{\lambda}\frac{(\lambda\alpha)^n}{n!}$ *Entonces, como la serie*

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{M}{\lambda}\frac{(\lambda\alpha)^n}{n!} = \frac{M}{\lambda}\big(1 + \frac{\lambda\alpha}{1!} + \frac{(\lambda\alpha)^2}{2!} + \cdots\big)$$

converge a

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{M}{\lambda}\frac{(\lambda\alpha)^n}{n!} = \frac{M}{\lambda}(e^{\lambda\alpha} - 1)$$

tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |u_n(t) - u_{n-1}(t)|$$

converge uniformemente $\forall t \in I$ *por el teorema de Weierstrass (M-test).*

Considerando la serie de sumas parciales

$$S_n(x) = x_0 + \sum_{n=1}^{k} |u_i(t) - u_{i-1}(t)| = u_t$$

Entonces, $\{S_n\} = \{u_n\} \xrightarrow{n\to\infty} u$ *uniformemente* $\forall t \in I$. *Además,* u_n *continua* $\forall t \in I \to u(t)$ *continua* $\forall t \in I$.

(IV) *Queremos ver que* u *satisface el PVI.*

Como $|u_n - x_0| \leq b, \ \forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |u - x_0| \leq b$ *y* $u_n \xrightarrow{n\to\infty} u$ *uniformemente* $\forall t \in I$, *y*

$$|f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))| \leq \lambda |u_n(t) - u(t)|$$

Entonces, $\{f(t, u_n(t))\} \xrightarrow{n\to\infty} f(t, u(t))$ *uniformemente* $\forall t \in I$. *Además,* $f(t, u_n(t))$ *continua* $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(t, u(t))$ *continua* $\forall t \in I$.

Por tanto,

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t) = x_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s))ds$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{n\to\infty} f(s, u_n(s))ds$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds, \ \forall t \in I.$$

que satisface la forma integral del PVI.

1.3. Peano

Definición 1.5 (Solución Aproximada de ecuación diferencial)**.** *Sea* $\epsilon > 0$, $u : J_u \to D$. *Entonces, decimos que* u *es solución* ϵ*-aproximada de la ecuación diferencial*

$$\dot{x} = f(t, x)$$

Si se verifica

(I) $J_u \subset J : (\mathring{J}_u) \neq \emptyset$.

(II) $u \in C(J_u, D)$ y u es continuamente diferenciable a trozos.

(III) $\forall I \subset J_u : u$ es continuamente diferenciable se tiene que

$$||\dot{u}(t) - f(t, u(t))|| \leq \epsilon, \forall t \in I.$$

Observación. *Sea $u : J_u \to D$ una solución ϵ-aproximada de $\dot{x} = f(t, x)$. Entonces,*

$$||u(t) - u(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds|| \leq \epsilon|t - t_0|, \ \forall t \in J_u$$

donde $t_0 \in J_u$.

Definición 1.6 (Compacto Relativo)**.** *Un subconjunto de un espacio topológico es compacto relativo si su adherencia es compacto.*

Proposición 1.2 (Caracterización Compacto Relativo)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $K \subset X$. Entonces, K es compacto relativo $\Leftrightarrow K = \overline{K}$.*

Definición 1.7 (Equicontinuidad)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico, $D \subset X$, F espacio de Banach y $\mathcal{F} \subset C(D, F)$. entonces, decimos que $f \in \mathcal{F}$ es equicontinua en $x_0 \in D$ si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in D, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon, \forall f \in \mathcal{F}.$$

Decimos que $\mathcal{F}$ es equicontinuo en D si es equicontinuo $\forall x \in D$.

Teorema 1.3 (Ascoli)**.** *Sea (K, d) espacio métrico compacto, F espacio de Banach y $\mathcal{M} \subset C(K, F)$. Entonces, $\mathcal{M}$ es relativamente compacto $\Leftrightarrow$*

(I) $\mathcal{M}$ es equicontinuo.

(II) $\mathcal{M}(y) = \{f(y) : f \in \mathcal{M}\}$ es relativamente compacto en F, $\forall y \in K$.

Observación. *Para el caso de $\mathbb{R}$: Si F es finito, entonces $\mathcal{M}$ es precompacto $\Leftrightarrow \mathcal{M}$ es equicontinuo y acotado.*

Lema 1.3.1. *Sea* $M = \max|f(R)|$ *y* $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$*. Entonces,* $\forall\epsilon > 0$ *existe una solución* ϵ*-aproximada*

$$u \in C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \overline{\mathbb{B}}(x_0, b)),$$

de $\dot{x} = f(t, x)$ *con* $u(t_0) = x_0$ *y*

$$|u(t) - u(s)| \leq M|t - s|, \forall t, s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Demostración. *f uniformemente continua en* $R \Rightarrow \exists\delta > 0$ *tal que*

$$|f(t, x) - f(\bar{t}, \overline{x})| \leq \epsilon,\ \forall(t, x), (\bar{t}, \overline{x}) \in R$$

con $|t - \bar{t}|$ *y* $|x - \overline{x}| \leq \delta$*.*

Dividimos el intervalo $[t_0 + \alpha, t_0 - \alpha]$ *en subintervalos*

$$t_0 - \alpha = t_{-n} < t_{-n+1} < \cdots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_0 + \alpha,$$

tal que $\max|t_{i-1} - t_i| \leq \min(\delta, \frac{\delta}{M})$.

Desde (t_0, x_0) *construimos una recta con pendiente* $f(t_0, x_0)$ *hacia la derecha de* t_0 *y hasta que corte a* $t = t_1$*. Entonces, esta linea está en la región triangular acotada por por la rectas con pendiente* M *y* $-M$ *desde* (t_0, x_0)*.*

De forma inductiva definimos

$$u(t) = \begin{cases} u(t_i) + (t - t_i)f(t_i, u(t_i)) & \text{si } i \geq 0 \\ u(t_{i+1}) + (t - t_{i+1})f(t_{i+1}, u(t_{i+1})) & \text{si } i \leq -1 \end{cases}$$

donde $t_i \leq t \leq t_{i+1}$*.*

Por tanto,

$$\dot{u}(t) = f(t_i, u(t_i)),\ \forall t \in [t_i, t_{i+1}] \text{ y } \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \cap (-\infty, t_0],$$

$$|u(t) - u(t_i)| \leq \delta,\ \forall t \in [t_i, t_{i+1}] \text{ y } \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \cap (-\infty, t_0].$$

De manera que, por continuidad uniforme tenemos que

$$|\dot{u}(t) - f(t, u(t))| = |f(t_i, u(t_i)) - f(t, u(t))| \leq \epsilon$$

entonces, u es una solución ϵ-aproximada de $\dot{x} = f(t, x)$.

Teorema 1.4 (Peano). *Sea $f \in C(J \times D, E)$. Entonces, el PVI*

$$\dot{x} = f(t, x), \ x(t_0) = x_0$$

tiene alemnos una solución u en $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ con $u([t_0 \alpha, t_0 + \alpha]) \subset \overline{\mathbb{B}}(x_0, b)$.

Demostración. *Por el teorema anterior $\forall n \in \mathbb{N}$ existe una solución $\frac{1}{n}$-aproximada en $\overline{J}_\alpha$ tal que $u_n(\overline{J}_\alpha) \subset \overline{\mathbb{B}}(x_0, b)$ y*

$$|u_n(t) - u_n(s)| \leq M|s - t|, \ \forall s, t \in \overline{J}_\alpha.$$

$\Rightarrow \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C(\overline{J}_\alpha, E)$ *es una familia equicontinua. Además,*

$$|u_n(t)| \leq |u_n(t_0)| + M|t - t_0| \leq |x_0| + b, \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \overline{J}_\alpha$$

$\Rightarrow \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *está acotada en $C(\overline{J}_\alpha, E)$. Por tanto, $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es precompacto.*

Entonces, por el teorema de Ascoli, $\exists \{u_{n_k}\} : u_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} u \in C(\overline{J}_\alpha, E) \Rightarrow u_{n_k} \to u$ uniformrmente.

Sea

$$\Delta_{n_k}(t) = \begin{cases} \dot{u}_{n_k} - f((t, u_{n_k}(s))), & \textit{si } \exists \dot{u}_{n_k} \\ 0, & \textit{otrocaso} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{u}_{n_k} = f(t, u_{n_k}(t)) + \Delta_{n_k}(t)$$

$$\Rightarrow u_{n_k} = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_{n_k}(s)) + \Delta_{n_k}(s) ds$$

donde $|\Delta_{n_k}| \leq \frac{1}{n}$.

Por tanto, $u_{n_k} \to u$ uniformemente $\Rightarrow f(t, u_{n_k}(t)) \to f(t, u(t))$ uniformemente, dado que $f \in C(J \times D, E)$.

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} f(s, u_{n_k}(s))ds \xrightarrow{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds$$

$$\Rightarrow u_{n_k}(t) \xrightarrow{k\to\infty} u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds$$

que satisface la forma integral del PVI.

1.4. Banach

Definición 1.8 (Función Contractiva)**.** *Sea X un espacio métrico y $f : X \to X$. Entonces, se dice que f es una contracción si $\exists \alpha \in (0, 1)$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|, \ \forall x, y \in X.$$

Observación. *Si f es contracción decimos que $x \in X$ es un punto fijo si $f(x) = x$. Además,*

Teorema 1.5 (del Punto Fijo de Banach)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico completo, $f : X \to X$ una aplicación contractiva. Entonces, $\exists ! x^* \in X : f(x^*) = x^*$. Además, $\forall x_0 \in X$, $x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}$. Entonces, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$.*

Demostración. *Sea $|x_1 - x_0| = d$. Entonces,*

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq \alpha |x_n - x_{n-1}| \leq \cdots \leq \alpha^n d$$

donde $\alpha \in (0, 1)$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \alpha^N < \frac{\epsilon}{d}$$

$$\Rightarrow |x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon, \forall n \geq N$$

Entonces, la sucesión (x_n) es de Cauchy y X completo $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Además

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = f(x^*)$$

$\Rightarrow x^*$ *es un punto fijo de* f.

Si x_1^*, x_2^* *son dos puntos fijos, entonces*

$$|f(x_1^*) - f(x_2^*)| = |x_1^* - x_2^*| \geq d|x_1^* - x_2^*| \Rightarrow |x_1^* - x_2^*| = 0.$$

es contradicción

Teorema 1.6. *Sean* $J \subset \mathbb{R}$ *abierto,* E *espacio de Banach,* $D \subset E$. *Sea* $f \in C^{0,1-}(J \times D, E)$, $(t_0, x_0) \in J \times D$ *y* $a, b, \lambda, M \in \mathbb{R}$ *tal que* $R = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{\mathbb{B}}(x_0, b) \subset J \times D$ *y* $|f(t,x)| \leq M, \forall (t,x) \in R$, $\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ *y* $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. *Entonces el PVI*

$$\dot{x} = f(t,x), x(t_0) = x_0,$$

tiene solución única $u : I \to \mathbb{B}(x_0, b)$

Demostración. *Sea* $T : X \to C(J \times D, E)$ *una aplicación*

$$v(t) \mapsto Tv(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))ds,\ \forall t \in I,$$

donde $X = \{v \in C(I,E) : v(t_0) = x_0, ||v - v_0||, v_0(t) = x_0, \forall t \in I\}$.

Dado que, f *es Lipschitz continua respecto a* x

$$\Rightarrow |f(t,x) - f(\bar{t}, \overline{x})| \leq \lambda |x - \overline{x}|,\ \forall (t,x), (\bar{t}, \overline{x}) \in R$$

Sean $v, \overline{v} \in X$, *entonces*

$$\Rightarrow |Tv(t) - T\overline{v}(t)| = |\int_{t_0}^{t} f(s, v(s)) - f(s, \overline{v}(s))ds|$$

$$\leq \lambda \int_{t_0}^{t} |v(s) - \overline{v}(s)|ds$$

$$\leq \lambda \int_{t_0}^{t} \sup_{s\in[t_0,t]} |v(s) - \overline{v}(s)|ds$$

$$\leq \lambda \int_{t_0}^{t} |v(t) - \overline{v}(t)|ds$$

$$= \lambda(t - t_0)||v(t) - \overline{v}(t)||, \ \forall t \in R$$

Observando que

$$|T^2v(t) - T^2\overline{v}(t)| \leq \alpha \int_{t_0}^{t} |Tv(s) - T\overline{v}(s)|ds$$

$$\leq \lambda^2 \int_{t_0}^{t} (t - t_0)||v(t) - \overline{v}(t)||ds$$

$$= \frac{\alpha^2}{2}(t - t_0)^2||v(t) - \overline{v}(t)||, \ \forall t \in R$$

$$\Rightarrow ||Tv(t) - T^2\overline{v}(t)|| \leq \frac{\alpha^2}{2!}(t - t_0)^2||v(t) - \overline{v}(t)||$$

$$\Rightarrow ||T^2v(t) - T^3\overline{v}(t)|| \leq \frac{\alpha^3}{3!}(t - t_0)^3||v(t) - \overline{v}(t)||$$

$$\Rightarrow ||T^nv(t) - T^n\overline{v}(t)|| \leq \frac{\alpha^n}{n!}(t - t_0)^n||v(t) - \overline{v}(t)||$$

Entonces, T es una contracción $\forall v, \overline{v} \in X, \forall t \in I$.

Sea $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en X tal que

$$u_{m+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_m(s))ds, \ \forall m \in \mathbb{N}, \forall t \in I.$$

Entonces, $u_m \xrightarrow{m\to\infty} u$ uniformemente

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds, \ \forall t \in I.$$

que es solución única del PVI.