Ejercicios Geometría Diferencial

Hugo Del Castillo Mola

1 de noviembre de 2022

Índice general

Ejercicio 0.1 (Evaluación Continua)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Demostrar que*

1. *Si $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ es una parametrización y $h : V \subset \mathbb{R}^2 \to U \subset \mathbb{R}^2$ es difeomorfismo, entonces $X \circ h : V \to S$ es parametrización.*
2. *Sea $S' \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Si $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ es parametrización y $\phi : S \to S'$ difeomorfismo, entonces $\phi \circ X : U \to S'$ es parametrización de S'.*
3. *$Y : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ parametrización de $Y(U) \Leftrightarrow Y$ es un difeomorfismo.*

Solución.

1. *Lo vemos usando la definición. Debemos comprobar que*

   a) *$X \circ h$ es diferenciable.*

   X es parametrización $\Rightarrow X$ es diferenciable y h difeomorfismo $\Rightarrow h$ diferenciable. Por tanto, $X \circ h$ es diferenciable ya que la composición de aplicaciones diferenciables es diferenciable.

   b) *$X \circ h$ es homeomorfismo.*

   X parametrización $\Rightarrow X$ homeomorfismo y h difeomorfismo $\Rightarrow h$ homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable. Entoces, $X \circ h$ es homeomorfismo ya que la composición de homeomorfismos es homeomorfismo.

   c) *$d(X \circ h)_p$ es inyectiva.*

   X parametrización $\Rightarrow (dX)_q$ es inyectiva y h difeomorfismo $\Rightarrow (dh)_p$ es inyectiva (*). Como la composición de funciones inyectivas es inyectiva, entonces $d(X \circ h)$ es inyectiva.

Por tanto, $X \circ h$ es parametrización.

2. *Usamos que Y es parametrización $\Leftrightarrow Y$ es difeomorfismo. Como X parametrización $\Rightarrow X$ difeomorfismo, entonces $\phi \circ X$ es difeomorfismo por ser composición de difeomorfismos. Por tanto, $\phi \circ X$ difeomorfismo $\Rightarrow \phi \circ X$ parametrización.*

3. $(\Rightarrow)$ *Si $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ es una parametrización, entonces*

$$Y^{-1} : Y(U) \to \mathbb{R}^2$$

es diferenciable. Además, $\forall p \in Y(U)$, $\forall Z : V \subset \mathbb{R}^2 \to S$ parametrización,

$$Y^{-1} \circ Z : Z^{-1}(W) \to Y^{-1}(W)$$

donde $W = Y(U) \cap Z(V)$, es diferenciable. Por tanto, U y $Y(U)$ son difeomorfos.

$(\Leftarrow)$ *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficies. Si $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ es difeomorfismo, entonces Y es diferenciable, Y es homeomorfismo y $(dY)_p$ (*) es inyectiva. Por tanto, Y es parametrización de S.*

(*) Veamos que $f : X \subset \mathbb{R}^m \to Y \subset \mathbb{R}^m$ difeomorfismo $\Rightarrow (df)_p$ isomorphismo, $p \in X : f(p) \in Y$. Si f difeomorfismo, entonces f tiene inversa f^{-1}. Ahora,

$$(dI_Y)_{f(p)} = d(f \circ f^{-1})_{f(p)} = (df)_p \circ (df^{-1})_{f(p)},$$

$$(dI_X)_p = d(f^{-1} \circ f)_p = (df^{-1})_{f(p)} \circ (df)_p$$

entonces, $(df)_p$ es un isomorfismo.