

Ejercicios Probabilidad

Hugo Del Castillo Mola

3 de octubre de 2022

Índice general

1. Probabilidad	2
-----------------	---

Capítulo 1

Probabilidad

Ejercicio (Problema 1 Examen Enero 2022). Se tienen $2n$ cartas, marcadas con los valores $1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n, n$. tras barajar las cartas, se van descubriendo una por una y poniendo en fila sobre una mesa. Cuando el valor de la carta que se ha descubierto coincide con el de alguna que ya está sobre la mesa, se retiran ambas cartas. Sea $N_k, k \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ el número de cartas que hay sobre la mesa tras el k -ésimo turno. Se tiene, obviamente, $N_1 = N_{2n-1} = 1$ y $N_{2n} = 0$. Se pide:

(1) Calcular $\mathbb{P}(N_n = n)$

Solución (Problema 1 Examen Enero 2022).

- El número total de cartas es $2n$.
- De cada carta distinta hay otra igual.
- $N_k \equiv$ 'Número de cartas distintas tras el k -ésimo turno'.

Si $\mathbb{P}(N_n = n)$ entonces, en el turno n hay n cartas sobre la mesa \Rightarrow de n cartas ninguna coincide, es decir, la carta n no coincide con ninguna de las anteriores $n - 1$ y $\forall k < n$ cartas anteriores a n no coinciden con $k - 1$ cartas anteriores a k .

$$\mathbb{P}(N_n = n) = \bigcap_{k=1}^n \mathbb{P}(N_k = k)$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_k = k) &= 1 - \frac{\text{casos favorable}}{\text{casos totales}} \\ &= 1 - \frac{k}{2n - k} \\ &= \frac{2n - 2k}{2n - k}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbb{P}(N_n = n) = \bigcap_{k=1}^n \frac{2n - 2k}{2n - k}$$

Y dado que son sucesos independientes, tenemos que

$$\mathbb{P}(N_n = n) = 1 \cdot \frac{2n - 2}{2n - 1} \cdot \frac{2n - 4}{2n - 3} \cdot \dots \cdot \frac{2}{n + 1}$$

es la probabilidad pedida.