

Geomtería Diferencial

Hugo Del Castillo Mola

23 de septiembre de 2023

Índice general

I	Curvas	3
1.	Estudio Local	4
1.1.	Curvas Parametrizadas	4
1.2.	Curvas Regulares	5
1.3.	Producto Vectorial	6
1.4.	Producto Vectorial	6
1.5.	Movimineto Rígido	7
1.6.	Fórmulas de Frenet	8
1.7.	Curvas Arbitrarias	11
2.	Estudio Global	14
II	Superficies	15
3.	Plano Tangente y Diferenciabilidad	16
3.1.	Definición de Superficie	16
3.2.	Cambio de Parámetros	18
3.3.	Funciones Diferenciables	21
3.4.	Plano Tangente	22
3.5.	Diferencial de una Aplicación Diferenciable	23
4.	Orientabilidad	29
4.1.	Campos	29
5.	Primera Forma Fundamental	33
5.1.	Primera Forma Fundamental	33
5.2.	Isometrías	34
5.3.	Area de una Superficie	36
5.4.	Aplicaciones Conformes	36

6. Curvatura	39
6.1. Resumen Orientación	39
6.2. Segunda Forma Fundamental	40
6.3. Meusnier	41
6.4. Euler	41
6.5. Coordenadas Locales	42
6.6. Puntos Curvatura	43
6.7. Curvas Asintóticas	44
6.8. Líneas de Curvatura	45
6.9. Ecuaciones de Compatibilidad	46
6.10. Teorema Egregium	46
6.11. Curvatura Superficies Compactas	47
6.12. Definición no rigurosa de Curvatura	48
7. Geodésicas	49
7.1. Geodésicas	49
7.2. Aplicación Exponencial	55

Parte I

Curvas

Capítulo 1

Estudio Local

1.1. Curvas Parametrizadas

Definición 1.1 (Curva). Una curva en \mathbb{R}^3 es una función diferenciable $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Definición 1.2 (Vector tangente). Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva en \mathbb{R}^3 con $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Entonces, $\forall t \in I$

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, \frac{d\alpha_3(t)}{dt} \right). \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}\end{aligned}$$

Observación (Velocidad). El vector tangente también se llama vector velocidad. Y su velocidad en t es $\|\alpha'(t)\|$.

Definición 1.3 (Reparametrización). Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva, $h : J \rightarrow I$ una función diferenciable. Entonces, la función $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\beta(t) = \alpha(h(t))$$

es una reparametrización de α por h .

Ejemplo. Sea $\alpha(t) = (t, t\sqrt{t}, 1-t)$ en $I = (0, 4)$, $h(s) = s^2$ en $J = (0, 2)$. Entonces, la curva reparametrizada es $\beta(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(s^2) = (s, s^3, 1-s^2)$.

Lema 1.0.1. Si β es una reparametrización de α por h , entonces

$$\beta'(t) = h'(t) \cdot \alpha'(h(t))$$

Teorema 1.1 (Valor Medio). Sea α una curva diferenciable p.p.a, entonces $\exists c \in (0, 1)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

es decir, la tangente en c es paralela a la secante que pasa por $(0, \alpha(0))$ y $(1, \alpha(1))$.

1.2. Curvas Regulares

Definición 1.4 (Curva Regular). Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada. Entonces, si $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$ decimos que es regular.

Definición 1.5 (Punto singular). Sea α una curva diferenciable. Si $\exists p$ tal que $\alpha'(p) = 0$, entonces decimos que p es un punto singular.

Definición 1.6 (Longitud de Arco). Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3, t_0 \in I$. Definimos la función longitud de arco desde t_0 como $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ donde

$$L_a^b(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du.$$

Definición 1.7 (Curva Parametrizada por Longitud de Arco). Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable. Entonces, si $\|\alpha'(t)\| = 1, \forall t \in I$ decimos que la curva está parametrizada por longitud de arco.

Teorema 1.2. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular. Entonces, $\exists \beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\|\beta'(s)\| = 1, \forall s \in J$, es decir, β tiene velocidad unitaria.

Observación. Una reparametrización $\alpha(h)$ preserva la orientación si $h' \geq 0$ y la invierte si $h' \leq 0$.

Observación. Por definición, una curva regular parametrizada por arco siempre conserva la orientación.

1.3. Producto Vectorial

Definición 1.8 (Producto Escalar). Sea $v, w \in \mathbb{R}^n$ entonces, su producto escalar es

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=0}^n v_i w_i$$

1.4. Producto Vectorial

Definición 1.9 (Producto Vectorial). Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$. El producto vectorial de u, v es

$$u \times v = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

Proposición 1.1 (Propiedades Producto vectorial). Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$. Entonces,

- (I) $u \times v = -v \times u$.
- (II) $u \times v$ es lineal respecto de u y v , es decir, para $w \in \mathbb{R}^3$ y $a, b \in \mathbb{R}$, $(au + bw) \times v = au \times v + bw \times v$.
- (III) $u \times v = 0 \Leftrightarrow u, v$ son linealmente dependientes.
- (IV) $(u \times v) \cdot u = 0, (u \times v) \cdot v = 0$.

Proposición 1.2 (Vector en base ortonormal). Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormal en \mathbb{R}^n . Si $v \in \mathbb{R}^n$ es combinación lineal de $\{e_1, \dots, e_n\}$ tal que

$$v = \sum_{i=0}^n x_i \cdot e_i$$

donde $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces podemos escribir

$$x_i = v \cdot e_i$$

en términos de la base.

1.5. Movimineto Rígido

Definición 1.10 (Traslación). Sea $v \in \mathbb{R}^3$, $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ aplicación definida por

$$A(p) = p + v, \quad p \in \mathbb{R}^3$$

se llama traslación.

Definición 1.11 (Transformación Ortogonal). Sea $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que

$$\rho u \cdot \rho v = u \cdot v, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3$$

Entonces, la aplicación se llama transformación ortogonal.

Definición 1.12 (Movimineto Rígido). Un movimiento rígido es la composición de una traslación con una transformación ortogonal con determinante positivo.

Observación. Las traslaciones, rotaciones y reflexiones son movimientos rígidos y se pueden expresar en términos de la definición anterior. Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un movimiento rígido (traslación/ rotación/ reflexión) entonces

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \vec{p}$$

donde $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ es transformación ortogonal y $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$.

Proposición 1.3. Sea $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un movimiento rígido entonces

- (I) El ángulo entre dos vectores es invariante por isometrías.
- (II) El producto vectorial de dos vectores es invariante por isometrías.
- (III) La longitud de arco, la curvatura y la torsión de una curva parametrizada son invariantes por movimientos rígidos.

Observación. Es útil para demostrar que las reparametrizaciones por arco conservan la longitud de arco

1.6. Fórmulas de Frenet

Definición 1.13 (Curvatura). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a., $s \in I$. Entonces, $\|\alpha''(s)\| = k(s)$ se llama curvatura de α en s .

Observación. $k(s)$ describe el cambio en la dirección de la curva en un instante.

Proposición 1.4. Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a.. Entonces, $\alpha''(s) \perp \alpha'(s), \forall s \in I$.

Demostración. $\|\alpha'(s)\| = 1, \forall s \in I \Rightarrow \alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = 1 \Rightarrow 2\alpha''(s) \cdot \alpha'(s) = 0 \Rightarrow \alpha''(s) \perp \alpha'(s), \forall s \in I$.

Proposición 1.5. La curvatura se mantiene invariante ante un cambio de orientación.

Demostración. $\beta(-s) = \alpha(s) \Rightarrow \beta'(s) = -\alpha'(s) \Rightarrow \beta''(-s) = \alpha''(s) = k(s)$.

Definición 1.14 (Vector Tangente Unitario). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a.. Entonces,

$$T(s) = \alpha'(s)$$

se llama vector tangente unitario a α en s .

Observación. $k(s) = \|T'(s)\|$.

Nota. Observamos que $\forall s \in I : k(s) > 0, k(s) = \|\alpha''(s)\| \Rightarrow \alpha''(s) = k(s)N(s)$ donde $N(s)$ es un vector unitario en la dirección de $\alpha''(s)$. Además, $\alpha''(s) \perp \alpha'(s) \Rightarrow N(s)$ es normal a $\alpha(s)$.

Definición 1.15 (Vector Normal). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva regular p.p.a.. Entonces,

$$N(s) = \frac{T'(s)}{k(s)}$$

se llama vector normal a α en s .

Observación. El vector normal N es perpendicular al vector tangente unitario T y normal a la curva α en s . Esto es, $\alpha'(s) \cdot \alpha''(s) = T(s) \cdot k(s)N(s) = 0$

Definición 1.16 (Plano Oscilador). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Entonces, $T(s), N(s)$ determinan un plano en \mathbb{R}^3 y lo llamamos plano oscilador.

Observación. También se llama Referencia móvil de Frenet para curvas planas.

Definición 1.17 (Vector Binormal). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a.. Entonces, $B(s) = T(s) \times N(s)$ es el vector normal al plano oscilador en s y se dice vector binormal en s .

Observación. $\|B'(s)\|$ mide la tasa de cambio del plano oscilador, es decir, la rapidez con la que la curva se aleja del plano oscilador en s .

Nota. $B' = T' \times N' + T \times N' = T \times N' \Rightarrow B'$ es normal a T y B' es paralelo a N . Entonces, escribimos $B' = \tau N$ para alguna función τ .

Definición 1.18 (Torsión). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. tal que $\alpha''(s) \neq 0, s \in I$. Entonces, decimos que

$$\tau(s) = \frac{B'(s)}{N(s)}$$

es la torsión de α en s .

Observación. Si cambia la orientación entonces el signo del vector binormal cambia dado que $B = T \times N$. Por tanto, $B'(s)$ y la torsión se mantienen invariantes.

Definición 1.19 (Tiedro de Frenet). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. tal que $k > 0$. Entonces, para cada valor $s \in I$, $\exists T(s), N(s), B(s)$ vectores unitarios mutuamente ortogonales y los llamamos el tiedro de Frenet en α . Estos vectores vienen dados de la siguiente forma

$$T(s) = \alpha'(s) \text{ vector tangente ,}$$

$$k(s) = \|T'(s)\| \text{ curvatura ,}$$

$$N(s) = \frac{1}{k(s)}T'(s) \text{ vector normal ,}$$

$$B = T \times N \text{ vector binormal ,}$$

$$\tau(s) = \frac{B'(s)}{N(s)} \text{ torsión}$$

donde $T \cdot T = N \cdot N = B \cdot B = 1$ y cualquier otro producto escalar es 0.

DIBUJO

Definición 1.20 (Fórmulas de Frenet). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva regular p.p.a con $k > 0$ y torsión τ . Entonces,

$$T' = kN,$$

$$N' = -kT + \tau B,$$

$$B' = -\tau N,$$

Proposición 1.6. $\tau = 0$ si y solo si α es una curva en el plano.

Demostración. (\Rightarrow) Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva plana p.p.a.. Entonces, $\exists p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^3$ tal que $(\alpha(s) - p) \cdot q = 0, \forall s \in I$. Derivando,

$$\alpha'(s) \cdot q = \alpha''(s) \cdot q = 0, \forall s \in I.$$

Por tanto, q es ortogonal a T y $N \Rightarrow B = \frac{q}{\|q\|} \Rightarrow B' = 0 \Rightarrow \tau = 0$.

(\Leftarrow) Sea $\tau = 0 \Rightarrow B' = 0 \Rightarrow B' \parallel B$. Queremos ver que α es ortogonal a B en 0. Sea

$$f(s) = (\alpha(s) - \alpha(0)) \cdot B, \forall s \in I.$$

Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \alpha' \cdot B = T \cdot B = 0$$

donde $f(0) = 0 \Rightarrow (\alpha(s) - \alpha(0)) \cdot B = 0, s \in I$. Por tanto, α permanece en el plano ortogonal a B .

Proposición 1.7. Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. con curvatura constante $k > 0$ y $\tau = 0$. Entonces α es parte de un círculo de radio $\frac{1}{k}$.

Demostración. $\tau = 0 \Rightarrow \alpha$ es una curva en plano. Sea $\gamma = \alpha + \frac{1}{k}N$ entonces,

$$\gamma' = \alpha' + \frac{1}{k_\alpha}N'_\alpha = T_\alpha - \frac{1}{k_\alpha}k_\alpha T_\alpha = 0.$$

Como $T_\gamma = 0 \Rightarrow k_\gamma = 0 \Rightarrow \gamma$ es una recta horizontal. Sea $\gamma = c \in \mathbb{R}$

$$\gamma(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k_\alpha(s)}N(s) = c, \forall s \in I$$

$$\Rightarrow d(c, \alpha(s)) = \|c - \alpha(s)\| = \left\| \frac{1}{k}N(s) \right\| = \frac{1}{k}.$$

Luego, α es una curva que en todo punto se mantiene a distancia $\frac{1}{k}$ de un punto fijo c , el centro de la circunferencia.

1.7. Curvas Arbitrarias

Proposición 1.8. Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular con $k > 0$ y $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ su reparametrización por arco tal que $\beta(t) = \alpha(s(t))$ donde $s(t)$ es la longitud de arco. Entonces,

$$T' = kvN$$

$$N' = -kvT + \tau vB$$

$$B' = -\tau vN$$

Demostración. $\frac{dT(s(t))}{dt} = T'(s(t)) \cdot s'(t) = k(s(t))N(s(t))v(t) = k(s)N(s)v.$

Proposición 1.9. Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular con $k > 0$ y $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ su reparametrización por arco tal que $\beta(t) = \alpha(s(t))$ donde $s(t)$ es la longitud de arco. Entonces,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'(s) \frac{ds}{dt} = vT(s),$$

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \frac{dv}{dt}T + vT' = v'T(s) + kv^2N$$

son la velocidad y aceleración de α en $s(t)$.

DIBUJO

Teorema 1.3. Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular. Entonces,

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \quad k = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3},$$

$$N = B \times T, \quad B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|},$$

$$\tau = (\alpha' \times \alpha'') \cdot \frac{\alpha'''}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}.$$

Definición 1.21 (Hélice Cilíndrica). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular tal que $T(t) \cdot u = \cos(\varphi), \forall t \in I$. Entonces, α es una hélice cilíndrica.

Teorema 1.4. Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva regular con $k > 0$. Entonces, α es una hélice cilíndrica si y solo si $\frac{\tau}{k}$ es constante.

Demostración.

(\Rightarrow) Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva regular p.p.a con $k > 0$. Entonces, si α es una hélice cilíndrica $T(t) \cdot u = \cos(\varphi), \forall t \in I \Rightarrow$

$$0 = (T \cdot u)' = T' \cdot u = kN \cdot u$$

donde $k > 0 \Rightarrow N \cdot u = 0$. Por tanto, $\forall t \in I$, u está en el plano determinado por $T(t)$ y $B(t)$. Es decir,

$$u = \cos(\varphi)T + \sin(\varphi)B.$$

Usando las fórmulas de Frenet

$$0 = (k \cos(\varphi) + \tau \sin(\varphi))N$$

$$\Rightarrow \frac{\tau}{k} = \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}.$$

(\Leftarrow) Si $\frac{\tau(t)}{k(t)} = \cos(\varphi), \forall t \in I$. Entonces, eligiendo $\cot(\varphi) = \frac{\tau}{k}$, si

$$U = \cos(\varphi)T + \sin(\varphi)B$$

tenemos que

$$U' = (k \cos(\varphi) - \tau \sin(\varphi))N = 0$$

determina un vector unitario u tal que $T \cdot u = \cos(\varphi) \Rightarrow \alpha$ es una hélice cilíndrica.

Teorema 1.5 (Fundamental de la Teoría Local de Curvas). Sean $k, \tau : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables con $k(s) > 0, \tau(s)$. Entonces, $\exists \alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva tal que s es la longitud de arco, $k(s)$ es la curvatura, y $\tau(s)$ es la torsión de α .

Además, cualquier otra curva $\bar{\alpha}$ difiere de α por un movimiento rígido, es decir, $\exists \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ aplicación lineal ortogonal con $\det \gamma > 0$ y $c \in \mathbb{R}^3$: $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha} \circ \gamma) + c$.

Demostración. *content*

Capítulo 2

Estudio Global

Parte II

Superficies

Capítulo 3

Plano Tangente y Diferenciabilidad

3.1. Definición de Superficie

Definición 3.1 (Superficies). Sea $S \subset \mathbb{R}^3$. Entonces, decimos que S es una superficie si $\forall p \in S, \exists V \subset \mathbb{R}^3$ entorno de p en S y $\exists X : U \rightarrow V \cap S$ aplicación con $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto tal que

- (I) X es diferenciable,
- (II) $X : U \rightarrow V$ es homeomorfismo,
- (III) $(dX)_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva $\forall q \in U$.

Observación. En I) si $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ entonces, $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ tienen derivadas parciales continuas en U .

Observación. En II) dado que X es continua por I) solo faltaría ver que X tiene inversa $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ continua.

Observación. $(dX)_q$ inyectiva $\forall q \in U \Leftrightarrow \frac{\partial X}{\partial u}(q), \frac{\partial X}{\partial v}(q)$ l.i.

Notación.

- X se llama parametrización de S .
- u, v se llaman coordenadas locales de S .
- Las curvas obtenidas al fijar una de las variables, $X(u_0, v), X(u, v_0)$ se llaman curvas coordenadas.

- La imagen de X se llama entorno coordenado.

Definición 3.2 (Valor Regular). Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, $a \in \mathbb{R}$. Entonces, decimos que a es un valor regular de f si $\forall p \in U : f(p) = a, (df)_p \neq 0$.

Teorema 3.1 (de la Función Implícita). Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $p = (x_0, y_0, z_0) \in U, a \in \mathbb{R}$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $f(p) = a$ y $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$, entonces $\exists U^{(x_0, y_0)} \subset \mathbb{R}^2, V^{z_0} \subset \mathbb{R}, g : U \rightarrow V$ tal que $U \times V \subset U, g(x_0, y_0) = z_0$ y

$$\{p \in U \times V \mid f(p) = a\} = \{(x, y, g(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U\},$$

es decir, $f(x, y, z) = a$ se puede resolver para z cerca de p .

Proposición 3.1 (Gráfica es Superficie). Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces, la gráfica de f es una superficie regular.

Demostración. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ aplicación diferenciable, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$ su gráfica, $X : U \rightarrow S : X(u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$ parametrización con $X(U) = S$. Entonces, X es diferenciable dado que f es diferenciable, X_u, X_v son linealmente independientes y x^{-1} es continua. Por tanto, S es una superficie.

Proposición 3.2 (Imagen Inversa de Valor Regular). Sea $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ función diferenciable, $a \in f(U) \subset \mathbb{R}$ un valor regular de f . Entonces, $S = f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset \Rightarrow S$ es superficie.

Demostración. Sea $p \in f^{-1}(\{a\})$. Entonces, a valor regular $\Rightarrow \exists i \in \{x, y, z\} : f_i(p) \neq 0$. Supongamos que $f_z(p) \neq 0$ y sea $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (x, y, f(x, y, z))$. Entonces,

$$(dF)_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det((dF)_p) = f_z(p) \neq 0$. Por tanto, podemos aplicar el Teorema de la

Función Inversa. Entonces, $\exists V$ entorno de p y W entorno de $f(p)$ tal que $F : V \rightarrow W$ es invertible y $F^{-1} : W \rightarrow V$ es diferenciable. Por tanto, las funciones coordenada de F^{-1}

$$x = u, \quad y = v, \quad z = g(u, v, t), \quad (u, v, t) \in W$$

son diferenciables. En particular, $z = g(u, v, a) = h(x, y)$ es una función diferenciable definida en la proyección de V al plano XY . Como

$$F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, t) : t = a\}$$

tenemos que $f^{-1}(a) \cap V$ es la gráfica de $h \Rightarrow$ es un entorno coordinado de $p \Rightarrow \forall p \in f^{-1}(a)$ se puede cubrir con un entorno coordinado $\Rightarrow f^{-1}(a)$ es una superficie regular.

Ejemplo. El elipsoide

$$S = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

es una superficie regular ya que

$$S = f^{-1}(0)$$

donde

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

es una función diferenciable y 0 es valor regular de f .

Proposición 3.3. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $p \in S$, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ aplicación con $p \in X(U) \subset S$ tal que X es diferenciable y $(dX)_q$ es inyectiva $\forall q \in U$. Entonces, si X es inyectiva, X^{-1} es continua.

Demostración. Similar a la siguiente prop

3.2. Cambio de Parámetros

Definición 3.3 (Difeomorfismo). Un difeomorfismo es un homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable, es decir, una función biyectiva continua diferenciable con inversa continua diferenciable.

Observación. Un homeomorfismo es una aplicación biyectiva continua con inversa continua. Como f diferenciable $\Rightarrow f$ continua, para ver que f es difeomorfismo solo es necesario f biyectiva diferenciable con f^{-1} diferenciable.

Proposición 3.4. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $X : U \rightarrow S$ parametrización tal que $p \in X(U)$. Sea $p_0 \in U : X(p_0) = p$. Entonces, $\exists V$ entorno de p_0 y $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ proyección ortogonal tal que $W = (\pi \circ X)(V) \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $\pi \circ X : V \rightarrow W$ es un difeomorfismo.

Demostración. Sea $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Entonces,

$$(dX)_{p_0} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}_{(p_0)}$$

Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto \pi(x, y, z) = (x, y)$, entonces $\pi \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ es diferenciable y

$$d(\pi \circ X)_{p_0} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}_{(p_0)}$$

donde $\det(d(\pi \circ X)_{p_0}) \neq 0 \Rightarrow$ por el teorema de la función inversa, $\exists V \subset U$ entorno de p_0 en U y V_1 entorno de $\pi \circ X(p_0)$ en \mathbb{R}^2 tal que $\pi \circ X$ es biyectiva y diferenciable con $(\pi \circ X)^{-1}$ diferenciable \Rightarrow difeomorfismo, tal que $d(\pi \circ X)_{p_0}^{-1} = d(\pi \circ X^{-1})_{p_0}$.

Observación. Un difeomorfismo es un homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable.

Observación. $Y = X \circ (\pi \circ X)^{-1} : W \rightarrow S$ es parametrización del abierto $\pi^{-1}(W) \cap U \cap S$ como grafo sobre alguno de los planos coordenados.

Proposición 3.5. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superfice, $p \in S$. Entonces, $\exists V$ entorno de p en S tal que V es la gráfica de una función diferenciable definida en uno de los planos coordenados.

Demostración. Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ parametrización de S en p tal que

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v), (u, v) \in U.$$

Dado que X_u, X_v son linealmente independientes $\Rightarrow \det((dX)_q) \neq 0$ donde

$q = X^{-1}(p)$, suponemos que

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}_q \neq 0$$

Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto \pi(x, y, z) = (x, y)$, entonces $\pi \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\det(d(\pi \circ X)_q) \neq 0$. Entonces, podemos aplicar el teorema de la función inversa $\Rightarrow \exists V_1$ entorno de q , V_2 entorno de $(\pi \circ X)(q)$ tal que $(\pi \circ X)|_{V_1} : V_1 \rightarrow V_2$ difeomorfismo con inversa $(\pi \circ X)^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$.

Además, como X es homomorfismo, $X(V_1) = V$ es entorno de p en S . Ahora, sea $z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$. Entonces, V es la gráfica de la función f .

Proposición 3.6 (Cambio de Parámetros). Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $p \in S$, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ dos parametrizaciones de S tal que $p \in X(U) \cap Y(V) = W$. Entonces, $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$ es un difeomorfismo. Se dice que h es un cambio de parámetros.

Observación. Si X, Y vienen dados por

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U$$

$$Y(\xi, \omega) = (x(\xi, \omega), y(\xi, \omega), z(\xi, \omega)), \quad (\xi, \omega) \in V$$

entonces h viene dado por

$$u = u(\xi, \omega), v = v(\xi, \omega), \quad (\xi, \omega) \in Y^{-1}(W)$$

Además, h se puede invertir tal que h^{-1} viene dado por

$$\xi = \xi(u, v), \omega = \omega(u, v), \quad (u, v) \in X^{-1}(W)$$

Demostración. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $p \in S$,

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S, \quad Y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

parametrizaciones de S tal que $p \in X(U) \cap Y(V) = W$ y

$$h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$$

cambio de parámetros. Entonces, X parametrización $\Rightarrow X$ diferenciable y X_u, X_v son l.i. $\Rightarrow \det((dX)_p) \neq 0, \forall p \in U$. Entonces, por el teorema de la

función inversa X es difeomorfismo. De la misma manera, Y es difeomorfismo. Por tanto, $h = X^{-1} \circ Y$ también lo es.

Observación. X, Y son difeomorfismos $\Rightarrow h$ es difeomorfismo.

Definición 3.4 (Caracterización Superficie). Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Entonces, $\forall p \in S, \exists V \subset S : p \in V$ entorno, $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $X : U \rightarrow V$ difeomorfismo.

Observación. Una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es difeomorfa a \mathbb{R}^2

3.3. Funciones Diferenciables

Nota. La idea es reducir la diferenciabilidad de una superficie a diferenciabilidad en \mathbb{R}^2 .

Definición 3.5 (Función Diferenciable en \mathbb{R}). Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ función. Entonces, f es diferenciable en $p \in V$ si $\exists X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ parametrización con $p \in X(U) \subset V$ tal que $f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $q = X^{-1}(p)$.

Observación. f es diferenciable en V si f es diferenciable $\forall p \in V$.

Observación. La diferenciabilidad no depende de la elección de parametrización. Si $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ es otra parametrización con $p \in Y(V)$ y $h = X^{-1} \circ Y$ entonces $f \circ Y = f \circ X \circ h$ también es diferenciable.

Definición 3.6 (Función Diferenciable en \mathbb{R}^k). Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $f : S \rightarrow \mathbb{R}^k$. Si $f_j : S \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable $\forall j \in \{1, \dots, k\}$ con $f(p) = (f_1(p), \dots, f_k(p))$, entonces f es diferenciable.

Definición 3.7 (Función Diferenciable entre Superficies). Sea $S_1 \subset \mathbb{R}^3$, $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ superficies,

$$\varphi : V_1 \subset S_1 \rightarrow S_2$$

una aplicación continua. Dadas

$$X_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1, \quad X_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$$

con $p \in X_1(U)$ y $\varphi(X_1(U)) \subset X_2(U)$ tal que

$$X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

es diferenciable en $q = X_1^{-1}(p)$, entonces, φ es diferenciable en $p \in V_1$.

Proposición 3.7 (Composición de Funciones Diferenciables). Sea $S_1, S_2, S_3 \subset \mathbb{R}^3$ superficies, $f : S_1 \rightarrow S_2, g : S_2 \rightarrow S_3$ diferenciables. Entonces, $f \circ g$ es diferenciable.

Demostración. *content*

3.4. Plano Tangente

Definición 3.8 (Vector Tangente). Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $p \in S$. Decimos que $v \in \mathbb{R}^3$ es un vector tangente a S en p si $\exists \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S, \epsilon > 0$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$

Notación. El conjunto de vectores tangentes a S en p se llama Plano Tangente en p y se representa $T_p S$.

Proposición 3.8 (Caracterización Plano Tangente). Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ parametrización, $q \in U$. Entonces,

$$T_{X(q)}(S) = (dX)_q(\mathbb{R}^2)$$

Demostración.

(\Rightarrow) Sea $w \in T_{X(q)}(S)$. Entonces, para $\epsilon > 0$, $\exists \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow X(U) \subset S$ diferenciable tal que $\alpha(0) = X(q)$ y $\alpha'(0) = w$. Entonces, $\beta = X^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ es diferenciable. Por tanto, para $X \circ \beta = \alpha$, la definición de diferencial $\Rightarrow (dX)_q(\beta'(0)) = \alpha'(0) = w \Rightarrow w \in (dX)_q$.

(\Leftarrow) Sea $w = (dX)_q(v), v \in \mathbb{R}^2$, donde $v \in \mathbb{R}^2$ es la pendiente de $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ tal que $\gamma(t) = vt + q, t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Entonces, por definición de diferencial, $w = \alpha'(0)$ para $\alpha = X \circ \gamma \Rightarrow w \in T_q(S)$

Observación. El plano tangente a S en p $T_p S = (dX)_{X^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2)$ no depende de la elección de X parametrización. Pero si que determina una base $\{\frac{\partial X}{\partial u}(q), \frac{\partial X}{\partial v}(q)\}$ que genera $T_{X(q)} S$.

Ejemplo. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ parametrización de S , $T_p(S)$ plano tangente en p generado por X , $w \in T_p(S)$ vector tangente. Entonces, las coordenadas de w en la base asociada a X se determina de la siguiente manera.

El vector tangente $w = \alpha'(0)$ donde $\alpha = X \circ \beta$ donde $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ es una curva diferenciable dada por $\beta(t) = (X^{-1} \circ \alpha)(t) = (u(t), v(t))$ con $\beta(0) = q = X^{-1}(p)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\alpha'(0) &= \frac{d}{dt}(X \circ \beta)(0) = \frac{d}{dt}X(u(t), v(t))(0) \\ &= X_u(q)u'(0) + X_v(q)v'(0) = w\end{aligned}$$

Por tanto en la base $\{X_u(q), X_v(q)\}$, w tiene coordenadas $(u'(0), v'(0))$.

Observación. Sea $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ superficies, $\varphi : V \subset S_1 \rightarrow S_2$ aplicación diferenciable. $\forall p \in V, \exists w \in T_p(S_1)$ tal que $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V$ curva diferenciable con $\alpha'(0) = w, \alpha(0) = p$. Entonces, $\beta = \varphi \circ \alpha$ curva con $\beta(0) = \varphi(p) \Rightarrow \beta'(0) \in T_{\varphi(p)}(S_2)$.

Además, $\beta'(0)$ no depende de la elección de α . La aplicación $(d\varphi)_p : T_p(S_1) \rightarrow T_{\varphi(p)}(S_2)$ definida por $(d\varphi)_p(w) = \beta'(0)$ es lineal.

3.5. Diferencial de una Aplicación Diferenciable

Definición 3.9 (Diferencial). Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable. Sea $w \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ curva diferenciable tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$. Entonces, la curva $\beta = F \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable y $(dF)_p(w) = (F \circ \alpha)'(0) = \beta'(0)$ es la diferencial de F en p , donde $(dF)_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es aplicación lineal.

Observación. Forma para tangente

Proposición 3.9. La aplicación $(df)_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}^m$ está bien definida, es decir, $(df)_p(v)$ no depende de α . Además, es una aplicación lineal.

Demostración. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ parametrización con $p \in X(U)$. Entonces, $T_p S = (dX)_q(\mathbb{R}^2)$ con $q = X^{-1}(p) \Rightarrow (dX)_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p S$ es un isomorfismo lineal (definición).

Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, $\alpha(-\epsilon, \epsilon) \subset X(U)$. Ahora, la curva $X^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ es tal que $(X^{-1} \circ \alpha)(0) = q$. Como $X \circ (X^{-1} \circ \alpha) = \alpha$ derivando en $t = 0$ tenemos que

$$(dX)_q[(X^{-1} \circ \alpha)'(0)] = \alpha'(0) = w,$$

es decir,

$$(X^{-1} \circ \alpha)'(0) = (dX)_q^{-1}(w).$$

Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} (f \circ \alpha)'(0) &= \frac{d}{dy}(f \circ X) \circ (X^{-1} \circ \alpha) \\ &= d(f \circ X)_q((X^{-1} \circ \alpha)'(0)) = d(f \circ X)_q \circ (dX)_q^{-1}(w) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$(df)_p = d(f \circ X)_q \circ (dX)_q^{-1}$$

Teorema 3.2 (Regla de la Cadena). Sean $S_1, S_2, S_3 \subset \mathbb{R}^3$ superficies, $f : S_1 \rightarrow S_2, g : S_2 \rightarrow S_3$ aplicaciones diferenciables. Entonces, dado $p \in S_1$ tenemos que

$$d(g \circ f)_p = (dg)_{f(p)} \circ (df)_p$$

Demostración. Si $v \in T_p S_1$, elegimos

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_1$$

tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Entonces,

$$f \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_2$$

tal que $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$ y $(f \circ \alpha)'(0) = (df)_p(v)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} d(g \circ f)_p(v) &= [(g \circ f) \circ \alpha]'(0) \\ &= [g \circ (f \circ \alpha)]'(0) \\ &= (dg)_{f(p)}((df)_p(v)). \end{aligned}$$

Teorema 3.3 (de la Función Inversa). Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable, $p \in U$ tal que $(dF)_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es isomorfismo. Entonces, $\exists V \subset U : p \in V$ entorno y $\exists W \subset \mathbb{R}^n : F(p) \in W$ entorno tal que $F : V \rightarrow W$ tiene inversa diferenciable $F^{-1} : W \rightarrow V$. $F|_V$ es difeomorfismo.

Observación. Un isomorfismo es una función biyectiva.

Proposición 3.10. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Entonces,

- (I) $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable, S conexo y $(df)_p = 0, \forall p \in S \Rightarrow f$ es constante.
- (II) $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y $p \in S$ es un extremo local de $f \Rightarrow p$ es un punto crítico de f .

Demostración.

- (I) Sea $a \in f(S)$. Entonces, $A = \{p \in S : f(p) = a\} \neq \emptyset, A \subset S$ cerrado. Veamos que A es abierto. Si $p \in A$, $X : U \rightarrow S$ parametrización tal que $p \in X(U)$ con U conexo, entonces $\forall q \in U, d(f \circ X)_q = (dX)_{X(p)} \circ (dX)_q = 0$. Entonces, $f \circ X$ es constante en $U \Rightarrow f = (f \circ X) \circ X^{-1}$ es constante en $X(U)$. Como $\forall p \in A, f(p) = a \Rightarrow p \in X(U) \subset A \Rightarrow A$ es abierto. Luego, S conexo $\Rightarrow A = S$, es decir, f es constante.
- (II) Sea $p \in S$ extremo local de f . Si $v \in T_p S$ y $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, entonces $(f \circ \alpha)$ tiene un extremo local en $t = 0 \Rightarrow (df)_p(v) = (f \circ \alpha)'(0) = 0 \Rightarrow p$ es punto crítico de f .

Teorema 3.4 (de la Función Implícita para Superficies). Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, $p \in S$, $a \in \mathbb{R}$. Si $f(p) = a$ y $(df)_p \neq 0$ (p no es punto crítico de f). Entonces, $\exists V \subset S$ entorno de p en S y $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva regular inyectiva homeomorfa a su imagen con $\epsilon > 0$ tal que

$$\alpha(0) = p \quad \text{y} \quad f^{-1}(\{a\}) \cap V = \alpha(-\epsilon, \epsilon)$$

Por tanto, si $a \in f(S)$ entonces $f^{-1}(\{a\})$ es una curva simple.

Demostración. Sea $U \subset \mathbb{R}^2 : (0,0) \in U$, $X : U \rightarrow S$ parametrización con $X(0,0) = p$. Definimos

$$g : U \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que $g = f \circ X$, entonces

$$g(0,0) = f(X(0,0)) = f(p) = a$$

y, por la regla de la cadena,

$$(df)_{(0,0)} = (df)_p \circ (dX)_{(0,0)}.$$

Dado que $(dX)_{(0,0)}$ es inyectiva y $(df)_p \neq 0$, tenemos que

$$(dg)_{(0,0)} \neq 0,$$

es decir, $(g_u, g_v)(0,0) \neq (0,0)$. Supongamos que $g_v(0,0) \neq 0$. Por el teorema de la aplicación implícita, $\exists \epsilon, \delta > 0$ y

$$h : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow (-\delta, \delta)$$

tal que $(-\epsilon, \epsilon) \times (-\delta, \delta) \subset U$ y $h(0) = 0$ ACABAR

Nota.

Definición 3.10 (Superficies Transversales). Sea $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ superficies, $p \in S_1 \cap S_2$ es un punto de intersección. Si

$$T_p(S_1) = T_p(S_2),$$

entonces S_1 y S_2 son tangentes en p . En el caso contrario, si

$$T_p(S_1) \neq T_p(S_2),$$

entonces S_1 y S_2 se cortan transversalmente en p y, de forma local, la intersección es la traza de la curva.

Observación. S_1 y S_2 son transversales si lo son $\forall p \in S_1 \cap S_2$.

Proposición 3.11. Sea $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ superficies que se cortan transversal-

mente en p . Entonces, $\exists V \subset \mathbb{R}^3$ entorno de p , $I \subset \mathbb{R}$ abierto, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ homeomorfa a $\alpha(I)$ tal que $\alpha(I) = V \cap S_1 \cap S_2$.

Demostración. Sea $O \subset \mathbb{R}^3$ entorno de p y $g : O \rightarrow \mathbb{R}$ tal que 0 es un valor regular y $S_2 \cap O = g^{-1}(\{0\})$. Definimos

$$f : S_1 \cap O \rightarrow \mathbb{R}$$

por $f = g|_{S_1 \cap O}$ diferenciable tal que $p \in f(S_1 \cap O)$. Además, $f(p) = g(p) = 0$ y $(df)_p = (dg)_p|_{T_p S_1}$. Si p fuera punto crítico de f , tendríamos que $T_p S_1 \subset \ker(dg)_p = T_p S_2$. Pero esto es imposible ya que S_1 y S_2 se cortan transversalmente. Aplicando el teorema de la función implícita tenemos el resultado.

Teorema 3.5. La intersección transversal de dos superficies es vacía o es un curva simple.

Teorema 3.6 (Función Inversa). Sean $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$, $f : S_1 \rightarrow S_2$ aplicación diferenciable, $p \in S_1$. Si $(df)_p : T_p(S_1) \rightarrow T_{f(p)}(S_2)$ es un isomorfismo lineal, entonces $\exists V_1$ entorno de p en S_1 y $\exists V_2$ entorno de $f(p)$ en S_2 tal que $f(V_1) = V_2$ y $f|_{V_1} : V_1 \rightarrow V_2$ es un difeomorfismo.

Demostración. Sea

$$X_i : U_i \rightarrow S_i, \quad i \in \{1, 2\}$$

parametrizaciones tal que $p \in X_1(U_1)$, $f(p) \in X_2(U_2)$ y $f(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$. Sea $q_i \in U_i, i \in \{1, 2\}$ tal que $X_1(q_1) = p$ y $X_2(q_2) = f(p)$. La aplicación

$$X_2^{-1} \circ f \circ X_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

es diferenciable y

$$d(X_2^{-1} \circ f \circ X_1)_{q_1} = (dX_2)_{q_2}^{-1} \circ (df)_p \circ (dX_1)_{q_1}$$

es un isomorfismo lineal por ser composición de isomorfismos. Ahora, podemos aplicar el teorema de la función inversa. Entonces, $\exists W_i \subset U_i$ entornos de $q_i, i \in \{1, 2\}$ tal que

$$(X_2^{-1} \circ f \circ X_1)(W_1) = W_2$$

y tal que

$$X_2^{-1} \circ f \circ X_1 : W_1 \rightarrow W_2$$

es un difeomorfismo. Para $V_i = X_i(W_i) \subset S_i, i \in \{1, 2\}$, tenemos que $V_1 \subset S_1$ es un entorno de p y $V_2 \subset S_2$ es un entorno de $f(p)$. Además, $f(V_1) = V_2$ y

$$f|_{V_1} = X_2 \circ (X_2^{-1} \circ f \circ X_1) \circ X_1^{-1} : V_1 \rightarrow V_2$$

es un difeomorfismo, ya que es composición de difeomorfismos.

Proposición 3.12. Sean $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ superficies, $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ difeomorfismo, $p \in S_1$. Entonces, $(d\phi)_p : T_p(S_1) \rightarrow T_{f(p)}(S_2)$ es isomorfismo lineal y $(d\phi)_p^{-1} = (d\phi^{-1})_p$.

Demostración. Sea $w \in T_{\phi(p)}S_2$ y $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_2$ tal que $\beta(0) = \phi(p), \beta'(0) = w$. Entonces, $\alpha = \phi^{-1} \circ \beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_1$ diferenciable tal que $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = w$ y $(d\phi)_p(\alpha'(0)) = (\phi \circ \alpha)'(0) = \beta'(0) = w$.

ACABAR

Capítulo 4

Orientabilidad

4.1. Campos

Definición 4.1 (Campo). Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Un espacio vectorial diferenciable en S es una aplicación diferenciable $V : S \rightarrow \mathbb{R}^3$.

- Si $V(p) \in T_p(S), \forall p \in S$, decimos que V es un campo tangente a S .
- Si $V(p) \perp T_p(S), \forall p \in S$, decimos que V es un campo normal a S .

Además, si $|V(p)| = 1, \forall p \in S$, decimos que V es el campo unitario.

Observación. $\forall p \in S$, hay dos vectores unitarios de \mathbb{R}^3 perpendiculares al plano tangente $T_p(S)$.

Nota. Sea $X : U \rightarrow S$ una parametrización con $p \in S$. Determinamos la orientación asociada a $\{X_u, X_v\}$. Si p pertenece a un entorno coordenado de otra parametrización $\bar{X}(\bar{u}, \bar{v})$, la nueva base $\{\bar{X}_{\bar{u}}, \bar{X}_{\bar{v}}\}$ se expresa en términos de la primera

$$\begin{aligned}\bar{X}_{\bar{u}} &= X_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \\ \bar{X}_{\bar{v}} &= X_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}},\end{aligned}$$

donde $u = (u, v)$ y $v = (\bar{u}, \bar{v})$. Por tanto, las bases $\{X_u, X_v\}$ y $\{\bar{X}_{\bar{u}}, \bar{X}_{\bar{v}}\}$ determinan la misma orientación de $T_p(S)$ si y solo si el Jacobiano del cambio de coordenadas

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$$

es positivo.

Nota (Interpretación Geométrica Orientabilidad). Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ superficie. Entonces, eligiendo $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ en $p \in S$ determinamos un vector normal unitario $\forall q \in X(U)$,

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q)$$

de manera que $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ es diferenciable. Tomando otro sistema local de coordenadas $\bar{X}(\bar{u}, \bar{v})$ en p tenemos que

$$\bar{X}_{\bar{u}} \times \bar{X}_{\bar{v}} = (X_u \times X_v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})},$$

donde $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$ es el jacobiano del cambio de coordenadas. Por tanto, N conservará o invertirá el signo dependiendo de si el jacobiano es positivo o negativo.

Proposición 4.1. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización de S . Entonces, $\exists N : V = X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo normal unitario.

Demostración. content

Lema 4.0.1. Sea S una superficie conexa y N_1, N_2 dos campos normales unitarios en S . Entonces, $N_1 = N_2$ o $N_1 = -N_2$.

Demostración. content

Definición 4.2 (Superficies Orientable). Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Decimos que S es orientable si admite un campo normal unitario global $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Decimos que N es una orientación de S . Cada superficie S tiene dos orientaciones. Fijada N decimos que S está orientada.

Observación. el campo vectorial unitario global N se conoce como aplicación de Gauss.

Ejemplo (Plano). Por la Prop. 4.1. los planos son orientables. Sea

$$P = \{p \in \mathbb{R}^3 : (p - p_0) \cdot a = 0\}$$

el plano que pasa por p_0 con vector normal unitario a . Si $p \in P$, entonces

$$T_p(P) = \{v \in \mathbb{R}^3 : v \cdot a = 0\}.$$

Por tanto, $N : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $N(p) = a, \forall p \in P$ es un campo normal unitario en P .

Ejemplo (Esfera). Hacemos uso de la Prop. 4.1. Sea $\mathbb{S}^2(r)$ la esfera de radio r centrada en p_0 . Si $p \in \mathbb{S}^2(r)$ el plano tangente correspondiente es el complemento ortogonal del vector $p - p_0$, es decir,

$$T_p(\mathbb{S}^2(r)) = \{v \in \mathbb{R}^3 : (p - p_0) \cdot v = 0\}.$$

Entonces, la aplicación $N : \mathbb{S}^2(r) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$N(p) = \frac{1}{r}(p - p_0), \quad \forall p \in \mathbb{S}^2(r)$$

es el campo normal unitario definido en la esfera.

Ejemplo (Grafo). Hacemos uso de la Prop. 4.1. Sea S una superficie que es el grafo de una función diferenciable $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donde U es abierto. Sabemos que $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ es parametrización que cubre S totalmente. Entonces, $N = N^X \circ X^{-1} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ con

$$N^X = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}(-f_u, -f_v, 1),$$

campo normal unitario en S .

Ejemplo (Imagen Inversa). Sea $O \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, $a \in \mathbb{R}$ valor regular de f y $S = f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$ superficie. Entonces, $\forall p \in S$,

$$T_p(S) = \ker(df)_p = \{v \in \mathbb{R}^3 : (\nabla f)_p \cdot v = 0\}.$$

Por tanto, $\nabla f|_S = (f_x, f_y, f_z)$ es un campo normal en S . Como a es valor regular, $\nabla f(p) \neq 0, \forall p \in S$. Entonces, la aplicación $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$N = \frac{1}{|\nabla f|} \nabla f|_S = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}(f_x, f_y, f_z),$$

es el campo normal unitario en S .

Ejemplo (Cilindro). Sea $O = \mathbb{R}^3$ y $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Entonces, $S = f^{-1}(\{r^2\}), r > 0$ es un cilindro de radio r con eje principal el eje z . Por tanto, $N(x, y, z) = \frac{1}{r}(x, y, 0)$ es un campo normal unitario en el cilindro.

Proposición 4.2. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Entonces, S es orientable $\Leftrightarrow \exists N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ en S .

Demostración. *content*

Ejemplo (Superficie no orientable). *content*

Proposición 4.3. Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = a\}$ superficie con $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y a valor regular de f . Entonces, S es orientable.

Demostración. *Ejemplo imagen inversa.*

Teorema 4.1. S es una superficie orientable $\Leftrightarrow \exists \{X_i : U_i \rightarrow S\}_{i \in J}$ familia de parametrizaciones que cubren S tal que $X_j \circ X_i$ tiene jacobiano positivo $\forall j, i \in J, \forall p \in S$.

Lema 4.1.1. $X_i^{-1} \circ X_j$ tiene jacobiano positivo $\Leftrightarrow N^{X_j}, N^{X_i}$ inducen la misma orientación en la intersección $N^{X_i} \circ X_i^{-1}|_W = N^{X_j} \circ X_j^{-1}|_W$ con $W = X_i(U_i) \cap X_j(U_j)$.

Demostración. *content*

Capítulo 5

Primera Forma Fundamental

5.1. Primera Forma Fundamental

Proposición 5.1. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Entonces, el producto interior natural de \mathbb{R}^3 induce en cada plano tangente $T_p(S)$ un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, cuya forma cuadrática es $I_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^w \geq 0.$$

Definición 5.1. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Decimos que la primera forma fundamental de S es la restricción del producto escalar de \mathbb{R}^3 a cada plano tangente $T_p(S)$. Es decir, la forma cuadrática I_p en $T_p(S)$ es la primera forma fundamental de S en p .

Observación. La primera forma fundamental nos permite tomar medidas sobre la superficie sin referirnos al espacio \mathbb{R}^3 .

Nota (Expresión de la Primera Forma Fundamental). Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ parametrización. Entonces, $\exists \{X_u, X_v\}$ base de X en $p \in S$. Como el vector tangente $w \in T_p(S)$ es tangente a la curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ con $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ y $p = \alpha(0) = X(u_0, v_0)$ tenemos que

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle_p \\ &= \langle X_u, X_u \rangle_p (u')^2 + 2 \langle X_u, X_v \rangle_p u' v' + \langle X_v, X_v \rangle_p (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2 \end{aligned}$$

donde $t = 0$ y

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle_p,$$

$$F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle_p,$$

$$G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle_p$$

Ejemplo. Un sistema de coordenadas para un plano $P \subset \mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y que contiene los vectores ortonormales $w_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $w_2 = (b_1, b_2, b_3)$ viene dado por

$$X(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

Para calcular la primera forma fundamental en un punto arbitrario de P observamos que $X_u = w_1$, $X_v = w_2$. Dado que w_1 y w_2 son vectores unitarios ortogonales, la funciones E, F, G son constantes y vienen dadas por

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Ejemplo. El cilindro sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ admite como parametrización $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$X(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v),$$

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in (0, 2\pi), v \in (-\infty, +\infty)\}.$$

Para calcular la primera forma fundamental, calculamos las derivadas parciales

$$X_u = (-\sin(u), \cos(u), 0), \quad X_v = (0, 0, 1),$$

entonces,

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

5.2. Isometrías

Nota. Queremos ver que significa que dos superficies tengan la misma primera forma fundamental. Localmente el plano y el cilindro se comportan de la misma forma aunque son dos superficies distintas pero los coeficientes de sus primeras formas fundamentales son los mismos. Las superficies isométricas cumplen esta propiedad.

Definición 5.2 (Superficies Isométricas). Un difeomorfismo $\varphi : S \rightarrow S'$ es un isometría si $\forall p \in S, \forall w_1, w_2 \in T_p(S)$ se tiene que

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}$$

Las superficies S y S' se dice que son isométricas.

Observación. Si $\forall p \in S, (d\varphi)_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S')$ conserva el producto escalar, entonces φ es una isometría.

Definición 5.3. Sea $\varphi : V \rightarrow \bar{S}$ aplicación donde V es un entorno de p en $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Entonces, φ es una isometría local si $\exists \bar{V}$ entorno de $\varphi(p)$ en \bar{S} tal que $\varphi : V \rightarrow \bar{V}$ es una isometría.

- Si $\forall p \in S$, existe una isometría local en \bar{S} entonces, decimos que S es localmente isométrica a \bar{S} .
- Decimos que S y \bar{S} son isométricas si S es localmente isométrica a \bar{S} y \bar{S} es localmente isométrica a S .

Observación. Si $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ es difeomorfismo y isometría local $\forall p \in S$, entonces φ es isometría global.

Ejemplo. Consideramos el cilindro del ejemplo anterior. Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow C$ definida por

$$\varphi(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v).$$

De esta manera φ es difeomorfismo local e isometría local ya que es φ diferenciable, biyectiva, $(d\varphi)_q$ es isomorfismo $\forall q \in V$ entorno de p en S , φ^{-1} es diferenciable y $\langle (d\varphi)_p(w), (d\varphi)_p(w) \rangle_p = \|w\|^2$.

Proposición 5.2. Sea $f : S \rightarrow S'$ difeomorfismo local. Entonces, f es isometría local $\Leftrightarrow f$ preserva longitudes de curvas.

Demostración. content

Proposición 5.3. Sea $\phi : S \rightarrow \bar{S}$ una isometría entre superficies, $X : U \rightarrow S$ parametrización de S . Entonces, $\bar{X} = \phi \circ X$ es una parametrización de $\phi(X(U)) \subset \bar{S}$ y

$$E = \bar{E}, \quad F = \bar{F}, \quad G = \bar{G}.$$

Demostración. content

Corolario 5.0.1. Una propiedad local P de una superficie en términos de E, F, G es invariante por isometrías. Si $\phi : S \rightarrow S'$ es isometría, S satisface P si y solo si S' satisface P .

Proposición 5.4. Sean $X : U \rightarrow S$ y $X' : U \rightarrow S'$ parametrizaciones tal que $\forall (u, v) \in U$,

$$E(u, v) = E'(u, v), \quad F(u, v) = F'(u, v), \quad G(u, v) = G'(u, v),$$

Entonces, $\varphi = X' \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow S'$ es isometría local.

Demostración. *content*

5.3. Area de una Superficie

Definición 5.4. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $X : U \rightarrow S$ parametrización. Llamamos área de $R = X(Q)$ una región acotada de S a

$$\begin{aligned} A(R) &= \iint_Q \|X_u \times X_v\| du dv \\ &= \iint_Q \sqrt{EG - F^2} du dv \end{aligned}$$

Observación. El área no depende de la parametrización que escojamos.

Demostración. *content*

5.4. Aplicaciones Conformes

Definición 5.5. Sean $\alpha : I \rightarrow S, \beta : J \rightarrow S$ curvas diferenciables en S que se cortan en $p = \alpha(0) = \beta(0)$. Decimos que se cortan con ángulo θ donde

$$\cos(\theta) = \frac{\alpha'(0) \cdot \beta'(0)}{\|\alpha'(0)\| \cdot \|\beta'(0)\|}.$$

Definición 5.6. Sea $\varphi : S \rightarrow S'$ diferenciable. Decimos que φ preserva ángulos en $p \in S$ si $\forall v, w \in T_p(S)$, el ángulo entre v y w es el mismo que el ángulo entre $(d\varphi)_p(v)$ y $(d\varphi)_p(w)$. Decimos que φ preserva ángulos si φ preserva ángulos $\forall p \in S$.

Proposición 5.5. Las isometrías locales preservan ángulos.

Demostración. content

Proposición 5.6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplicación lineal. Son equivalentes,

(I) f preserva ángulos

$$\frac{f(u) \cdot f(v)}{\|f(u)\| \|f(v)\|} = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2.$$

(II) $\exists \lambda > 0 : f(v) \cdot f(w) = \lambda^2(v \cdot w), \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^2.$

(III) $\exists \lambda > 0 : \|f(v)\| = \lambda \|v\|, \quad \forall v \in \mathbb{R}^2.$

(IV) Dada base ortonormal $\{u_1, u_2\}$, $\exists \lambda > 0 : \|f(u_i)\| = \lambda \|u_i\|$ y $(f(u_1) \cdot f(u_2)) = 0$.

Demostración. content

Definición 5.7. Un difeomorfismo $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ es una aplicación conforme si $\forall p \in S, \forall v_1, v_2 \in T_p(S)$

$$(d\varphi)_p(v_1) \cdot (d\varphi)_p(v_2) = \lambda^2(p) \langle v_1, v_2 \rangle_p,$$

donde $\lambda^2 > 0$ es una aplicación diferenciable en S . Se dice que las superficies S y \bar{S} son conformes

Proposición 5.7. Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ y $\bar{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \bar{S}$ parametrizaciones tal que

$$E = \lambda^2 \bar{E}, \quad F = \lambda^2 \bar{F}, \quad G = \lambda^2 \bar{G}$$

donde λ^2 es función diferenciable en U . Entonces, $\phi = \bar{X} \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \bar{S}$

es localmente conforme.

Teorema 5.1. *Dos superficies regulares son localmente conformes.*

Nota. *El campo vectorial unitario*

$$N : S \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$$

es aplicación diferenciable y

$$(dN)_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$$

dado que $T_p(S)$ es paralelo a $T_{N(p)}(\mathbb{S}^2)$. Ahora, la segunda forma fundamental

$$II(p)(v, w) = -\langle (dN)_p(v), w \rangle$$

donde $v, w \in T_p(S)$, es simétrica. Por tanto, $(dN)_p$ es una aplicación auto-adjunta, es decir,

$$\langle (dN)_p(w), v \rangle = \langle v, (dN)_p(w) \rangle, \quad \forall v, w \in T_p(S).$$

Un resultado básico de aplicaciones auto-adjuntas es el teorema espectral. Este nos permite establecer que dada una base $\{v_1, v_2\}$ ortonormal de $T_p(S)$ se tiene que

$$(dN)_p(v_i) = \lambda_i v_i$$

A partir de este resultado se demuestra el teorema de Euler.

Capítulo 6

Curvatura

6.1. Resumen Orientación

Nota. Dada una parametrización $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de una superficie regular S en un punto $p \in S$, podemos elegir un vector normal unitario en cada punto de $X(U)$

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q), \quad q \in X(U).$$

Entonces, tenemos una aplicación diferencial $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ que asocia a cada $q \in X(U)$ un vector normal unitario. En general, si $V \subset S$ es un abierto de S y $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferencial que asocia $\forall q \in V$ un vector normal unitario en q , entonces decimos que N es un campo normal unitario diferenciable en V .

Observación. No todas las superficies admiten un campo normal unitario diferenciable. Por ejemplo, la band de Mobius.

Definición 6.1. Decimos que S superficie es orientable si admite un campo normal unitario diferenciable en todo S . A este campo lo llamamos orientación de S .

Observación. Toda superficie cubierta por un solo sistema de coordenadas es trivialmente orientable. Por ejemplo, la superficies representadas por grafos de funciones diferenciables.

Proposición 6.1. Una orientación N en S induce una orientación en el espacio tangente $T_p(S)$. Sea $p \in S$. Definimos $\{v, w\} \subset T_p(S)$ como base

positiva si $(v \times w) \cdot N > 0$. Entonces, el conjunto de todas las bases positivas de $T_p(S)$ es una orientación para $T_p(S)$.

Notación. Una superficie S orientable tiene orientación N , donde N es un campo normal unitario diferenciable.

6.2. Segunda Forma Fundamental

Definición 6.2 (Aplicación de Gauss). Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con orientación N . La aplicación $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma valores en la esfera unidad

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

La aplicación $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ se llama aplicación de Gauss de S .

Observación. La aplicación de Gauss es diferenciable tal que $(dN)_p : T_p(S) \rightarrow T_{N(p)}(\mathbb{S}^2) = T_p(S)$ es una aplicación lineal.

Proposición 6.2. La diferencial $(dN)_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ de la aplicación de Gauss es una aplicación lineal auto-adjunta, es decir,

$$\langle (dN)_p(v), w \rangle = \langle w, (dN)_p(v) \rangle, \quad \forall v, w \in T_p(S)$$

Demostración. content

Definición 6.3 (Segunda Forma Fundamental). La forma bilineal $II_p : T_p(S) \times T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$II_p(v, w) = -\langle (dN)_p(v), w \rangle, \quad v, w \in T_p(S)$$

se llama segunda forma fundamental de S en p .

Proposición 6.3. La segunda forma fundamental es simétrica, es decir,

$$II_p(v, w) = II_p(w, v), \quad \forall v, w \in T_p(S)$$

Demostración. *content*

6.3. Meusnier

Definición 6.4 (Sección Normal). *La sección normal en $p \in S$ por $v \in T_p(S)$ es el plano formado por v y $N(p)$ en p .*

Definición 6.5 (Curvatura Normal). *Sea P la sección normal en $p \in S$ por $v \in T_p(S)$, α la curva forma por la intersección de P y S . Entonces, la curvatura de α se llama curvatura normal y se denota k_n .*

Proposición 6.4. *Sea P la sección normal en $p \in S$ por $v \in T_p(S)$. Entonces,*

$$k_n = \langle \alpha''(0), N(p) \rangle = II_p(v, v)$$

es la curvatura normal.

Demostración. *content*

Teorema 6.1 (Meusnier). *Sea P la sección normal en p por $v \in T_p(S)$ y sea P_θ el plano que contiene v y forma un ángulo θ con P . Entonces, La curva c_θ forma por la intersección de S y P_θ tiene curvatura k_θ y viene dada por*

$$k_\theta \cdot \cos(\theta) = k_n$$

donde k_n es la curvatura normal.

Demostración. *content*

Proposición 6.5. *Todas las curvas en S que tienen la misma tangente en p tienen la misma curvatura normal.*

6.4. Euler

Teorema 6.2 (Euler). *Las curvaturas normales k_n tienen un mínimo k_1 en una dirección e_1 y un máximo k_2 en una dirección perpendicular e_2 . Sea $v \in T_p(S)$ dirección formando un ángulo θ con e_1 . Entonces,*

$$k_n = k_1 \cos^2(\theta) + k_2 \sin^2(\theta)$$

Definición 6.6 (Curvaturas Principales). *La curvatura normal máxima k_1 y la curvatura normal mínima se llaman curvaturas principales en p .*

Definición 6.7 (Direcciones Principales). *Las direcciones e_1 y e_2 se llaman direcciones principales en p .*

6.5. Coordenadas Locales

Nota (Coordenadas Locales). *Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ parametrización de S en $p \in S$ compatible con una orientación $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ entonces,*

$$N^X(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u, v)$$

Sea $\alpha(t) = (X \circ \beta)(t) = X(u(t), v(t))$ con $\alpha(0) = p$. Entonces,

$$\alpha' = X_u u' + X_v v'$$

y podemos expresar

$$(dN)_p(\alpha') = (N \circ X \circ \beta)' = (N^X \circ \beta)' = N_u u' + N_v v'.$$

Ahora, como $N_u, N_v \in T_p(S)$ tenemos que

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v$$

$$N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v$$

Por tanto, la matriz de $(dN)_p(\alpha')$ en la base $\{X_u, X_v\}$ es

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Por otro lado, la segunda forma fundamental en la base $\{X_u, X_v\}$ es

$$II_p(\alpha', \alpha') = -\langle (dN)_p(\alpha'), \alpha' \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\
&= e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2
\end{aligned}$$

donde e, f, g son los coeficientes de la segunda forma fundamental dados por

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle,$$

$$f = \langle N, X_{uv} \rangle,$$

$$g = \langle N, X_{vv} \rangle.$$

Resolviendo el sistema obtenemos los coeficientes a_{ij} y expresamos la curvatura en función de estos

$$K = \det((dN)_p(\alpha')) = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

6.6. Puntos Curvatura

Nota. Considerando la aplicación dN_p en la base $\{e_1, e_2\}$ donde e_1 y e_2 son la direcciones principales tenemos que

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Definición 6.8. Un punto $p \in S$ superficie se llama

- (I) Elíptico si $K(p) > 0$,
- (II) Hiperbólico si $K(p) < 0$,
- (III) Parabólico si $K(p) = 0$ con $dN_p \neq 0$,
- (IV) Plano si $K(p) = 0$.

Observación (Punto Elíptico). Si $p \in S$ es elíptico

$$(eg - f^2) > 0,$$

entonces $K(p) > 0$ y ambas $k_1, k_2 > 0$ o $k_1, k_2 < 0$. Por tanto, toda curva $\alpha(t_0) \subset S$ tal que $\exists s_0 \in I : \alpha(s_0) = p$ tiene sus vectores normales apuntando hacia el mismo lado del plano tangente.

Observación (Punto Hiperbólico). Si $p \in S$ es hiperbólico

$$(eg - f^2) < 0,$$

entonces $K(p) < 0$ y $k_1 < 0, k_2 > 0$ ó $k_1 > 0, k_2 < 0$. Por tanto, hay curvas en p cuyos vectores normales apuntan hacia ambos lados del plano tangente.

Observación (Punto Parabólico). Si $p \in S$ es parabólico

$$(eg - f^2) = 0, \quad eg = f^2 \neq 0,$$

entonces $K(p) = 0$ y $k_1 \neq 0$ o $k_2 \neq 0$.

Observación (Punto Plano). Si $p \in S$ es plano

$$(eg - f^2) = 0, \quad eg = f = 0$$

entonces $k_1 = 0$ y $k_2 = 0$.

Definición 6.9 (Punto Umbílico). Si $p \in S$, $k_1 = k_2$, entonces p se llama punto umbílico.

Observación. Los puntos planos, es decir, $p \in S$ tal que $k_1 = k_2 = 0$ son puntos umbílicos.

Proposición 6.6. Si todos los puntos de una superficie conexa S son umbílicos, entonces S está contenida en una esfera o en un plano.

Demostración. content

6.7. Curvas Asintóticas

Definición 6.10 (Dirección Asintótica). Sea P la sección normal en $p \in S$ por $v \in T_p(S)$. Si $k_n = 0$, entonces v es una dirección asintótica.

Definición 6.11 (Curva Asintótica). Sea α curva en S tal que $\alpha'(t)$ es dirección asintótica $\forall t \in I$. Entonces, α es una curva asintótica.

Observación. $\forall \alpha(t) = X(u(t), v(t))$, entonces α es curva asintótica si y solo si $II_p(\alpha'(t)) = 0, \forall t \in I$.

Lema 6.2.1. Sea $p \in S$ elíptico, entonces no hay direcciones asintóticas.

Lema 6.2.2. Sea $p \in S$ hiperbólico, entonces hay exactamente 2 direcciones asintóticas.

Observación. En cada punto parabólico hay exactamente 1 dirección asintótica.

Observación. Si $p \in S$ no es umbílico, cada valor de $II_p(v)$ se alcanza en exactamente 2 direcciones distintas.

Observación. Si $\alpha : I \rightarrow S$ es una recta, entonces es línea asintótica y también es sección normal.

Proposición 6.7. Una curva α dada por $\alpha(t) = (X \circ \beta)(t) = (X(u(t), v(t)))$ es curva asintótica si y solo si

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0, \quad t \in I.$$

Esta ecuación se llama ecuación diferencial de las curvas asintóticas.

Lema 6.2.3. Las curvas coordenadas de una parametrización X en punto hiperbólico ($eg - f^2 < 0$) son curvas asintóticas si y solo si

$$e = g = 0$$

6.8. Líneas de Curvatura

Definición 6.12 (Línea de Curvatura). Sea α una curva en S tal que $\alpha'(t)$ es una dirección principal $\forall t \in I$. Entonces, α es una línea de curvatura.

Observación. La curva α es línea de curvatura si y solo si $(dN)_p(\alpha'(t)) = \lambda(t)\alpha'(t)$.

Proposición 6.8. Una curva α dada por una parametrización X es una línea de curvatura si y solo si

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0.$$

Esta ecuación se llama ecuación diferencial de las líneas de curvatura.

Lema 6.2.4. *Las líneas coordenadas en un entorno de un punto no umbílico son líneas de curvatura si y solo si $F = f = 0$.*

6.9. Ecuaciones de Compatibilidad

Do Carmon Sección 4.3 -¿Formulario

Notación (Símbolos de Christoffel).

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle X_{vv}, X_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_v \end{cases}$$

6.10. Teorema Egregium

Teorema 6.3. (Egregium) *La curvatura de una superficie es invariante invariante por isometrías locales.*

Demostración. *La curvatura se puede expresar en términos de E, F, G . Por tanto, por el teorema de isometrías se tiene que dos superficies isométricas tienen*

$$E = \bar{E}, \quad F = \bar{F}, \quad G = \bar{G}$$

Entonces, tienen la misma curvatura.

Observación. *Entre el plano y un cilindro existe una isometría local. La curvatura del plano es 0. Por tanto, el cilindro tiene curvatura 0.*

Ejemplo. Sea $Z \subset \mathbb{R}^3$ un cilindro

$$Z = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = a^2\}$$

Entonces, una isometría local es $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow Z$ definida por

$$f(s, t) = (a \cos(\frac{s}{a}), a \sin(\frac{s}{a}), t).$$

Vemos que f es isometría. Sea $p \in \mathbb{R}^2$ y $w_1, w_2 \in T_p(\mathbb{R}^2)$. Entonces,

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \langle (df)_p(w_1), (df)_p(w_2) \rangle$$

dado que

$$(df)_p(w) = \begin{pmatrix} -\sin(s) & \cos(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

??

Teorema 6.4 (Bonnet). Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie y $X, \bar{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones de S con

$$E = \bar{E}, \quad F = \bar{F}, \quad G = \bar{G},$$

$$e = \bar{e}, \quad f = \bar{f}, \quad g = \bar{g}.$$

Entonces, existe $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ movimiento rígido tal que $\phi \circ X = \bar{X}$.

6.11. Curvatura Superficies Compactas

Definición 6.13 (Punto límite). Sea $A \subset \mathbb{R}^3$. Decimos que $p \in \mathbb{R}^3$ es un punto límite de A si $\forall U^p$ entorno de p en \mathbb{R}^3 , $A \cap \text{setminus} U^p \setminus \{p\} \neq \emptyset$.

Definición 6.14 (Conjunto Cerrado). A es cerrado si contiene todos sus puntos límite.

Definición 6.15 (Conjunto Acotado). A es acotado si está contenido en alguna bola.

Definición 6.16 (Superficie Compacta). Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficies. Si S es cerrado y acotado, entonces S es compacto.

Proposición 6.9. No hay superficies compactas con curvatura negativa en todos sus puntos.

Demostración.

Proposición 6.10. *Toda superficie compacta S tiene un punto de curvatura positivo.*

Proposición 6.11. *Sea S superficie compacta. Sea S_r una esfera de radio r y B_r una bola compacta de radio r que contiene a S_r . Sea $p \in S \cap S_r$ y $S \subset B_r$. Entonces, S tiene curvatura positiva en p .*

6.12. Definición no rigurosa de Curvatura

Notación. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $p \in S$ la definición no rigurosa de la curvatura en p es

$$K(p) = \lim_{A \rightarrow p} \frac{\text{área } N(A)}{\text{área } A}$$

donde A es un entorno de p y N es el campo norma inducido por una parametrización $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$.

Capítulo 7

Geodésicas

7.1. Geodésicas

Observación (Idea Geodésicas). Una geodésica generaliza rectas en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .

Observación (Rectas). Una recta r en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 tiene las siguientes propiedades

- (I) $\forall p, q \in r$, r es la curva de menor longitud entre p y q .
- (II) Si $\alpha(t) = p + t\vec{v}$ p.p.a entonces $\alpha''(t) = 0, \forall t$.
- (III) Los vectores tangentes a $\alpha'(t)$ son todos paralelos.

Observación (Propiedades Geodésicas). Sea γ geodésica en S entonces

- (I) γ minimiza la longitud localmente. Es decir, $\forall p \in \gamma, \exists U$ entorno de p tal que $\forall q \in \gamma \cap U$ se tiene que γ es la curva de longitud mínima que une p y q .
- (II) γ p.p.a será geodésica si la proyección de $\gamma''(t)$ sobre $T_{\gamma(t)}(S)$ es $\vec{0}$.
- (III) $\gamma'(t)$ se percibe desde S como transporte paralelo de vectores.

Definición 7.1 (Geodésica). Una curva regular $\alpha : I \rightarrow S$ es una geodésica si

$$\alpha''(t) \perp T_{\alpha(t)}(S), \quad \forall t \in I$$

Lema 7.0.1. Sea α geodésica, entonces $\|\alpha'(t)\|$ es constante.

Demostración. Sea α geodésica, entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \|\alpha'(t)\|^2 &= \frac{d}{dt} \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle \\ &= \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0\end{aligned}$$

Observación. Es decir, el parámetro t de una geodésica $\alpha(t)$ es proporcional al parámetro s longitud de arco $\Rightarrow \exists c \neq 0 : t = c \cdot s$.

Demostración. Sea α geodésica, entonces

$$s = \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^t c dt = c \cdot t, \quad \forall t \in I.$$

Observación. Si α es geodésica, entonces $\|\alpha'(t)\| = c, \forall t \in I$. Sea $\beta(s)$ la p.p.a de α , entonces $\alpha(t) = \beta(c \cdot s)$.

Definición 7.2 (Curvatura Geodésica). Sea $\alpha : I \rightarrow S$ p.p.a., $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo vectorial unitario a S . Entonces,

$$\alpha''(s) = k_n(s)N_{\alpha(s)} + k_g(s)N(\alpha(s)) \times \alpha'(s)$$

donde k_n es la curvatura normal y $k_g(s)$ es la curvatura geodésica de α en s .

Observación. Si $\|\alpha'(s)\| = 1$, entonces $\alpha''(s) \perp \alpha'(s)$.

Definición 7.3 (Curvatura Geodésica de curva regular). Si α es una curva regular, entonces su curvatura geodésica es la de su reparametrización por arco.

Observación. Si α es p.p.a., entonces α es geodésica $\Leftrightarrow k_g(s) = 0 \forall s$.

Ejemplo (Plano). Sea $P = \{x : \langle x - p, a \rangle = 0\}$, $\alpha : I \rightarrow P$ geodésica p.p.a.. Entonces,

$$\langle \alpha(t) - p, a \rangle = 0$$

donde derivando tenemos que

$$\langle \alpha''(t), a \rangle = 0$$

como $a \neq 0$, entonces $\alpha''(t) = 0, \forall t \in I$. Por tanto,

$$\alpha(t) = p + t \cdot \vec{v},$$

es decir, la geodésica es parametrización afín de una recta.

Ejemplo (Esfera). Los círculos máximos p.p.a son geodésicas. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ geodésica p.p.a.. Entonces, $\|\alpha'(t)\| = 1$ y derivando $\|\alpha'(t)\|^2 = 1$

$$\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle = 0$$

$$\langle \alpha''(t), \alpha(t) \rangle + \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle = 0$$

$$\langle \alpha''(t), \alpha(t) \rangle + \|\alpha'(t)\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \langle \alpha''(t), \alpha(t) \rangle = -1$$

Por tanto, si α es geodésica, entonces $\alpha''(t) = -\alpha(t)$. Luego,

$$\alpha(t) = (a_1 \sin(t) + a_2 \cos(t), b_1 \sin(t) + b_2 \cos(t), c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)), \quad t \in (0, 2\pi).$$

Si $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$, $\|\alpha(t)\| = 1$, $\|\alpha'(t)\| = 1$ entonces

$$\alpha(t) = p \cos(t) + v \sin(t)$$

que es parametrización de círculo máximo.

Ejemplo (Cilindro). Sea $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$, $\alpha : I \rightarrow C$ geodésica p.p.a. con

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [0, 1].$$

Como $\alpha(t) \in C$, entonces $x^2(t) + y^2(t) = 1$ y derivando dos veces tenemos

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$$

$$2x'(t)x'(t) + 2x(t)x''(t) + 2y'(t)y'(t) + 2y(t)y''(t) = 0$$

Ahora, $\|\alpha'(t)\| = 1$ entonces,

$$\|(x'(t), y'(t), z'(t))\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = 1$$

$$\Rightarrow x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = 1$$

Por tanto, si sustituimos en la ecuación anterior tenemos

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 + x(t)x''(t) + y(t)y''(t) = 0$$

$$1 - z'(t)^2 + x(t)x''(t) + y(t)y''(t) = 0$$

Dado que $\alpha''(t) \perp \alpha'(t)$, tenemos que $\alpha''(t) \parallel \alpha(t)$, entonces

$$(x'', y'') = \lambda(t)(x, y).$$

Luego,

$$\lambda(t) = -1 + z'(t)^2$$

Resolviendo el sistema asociado

$$\begin{cases} z''(t) = 0 \\ x''(t) = (-1 + z'(t)^2)x(t) \\ y''(t) = (-1 + z'(t)^2)y(t) \end{cases}$$

con $z(t) = tb$, $\alpha(0) = (1, 0, 0)$, $\alpha'(0) = (0, a, b)$, $a^2 + b^2 = 1$ obtenemos

$$\alpha(t) = (\cos(at), \sin(at), bt)$$

que es una hélice o una recta si $a = 0$.

Proposición 7.1 (Geodésicas en coordenadas locales). Sea $X : U \rightarrow X(U) \subset S$ parametrización se S y $\alpha : I \rightarrow S$ curva p.p.a con $\alpha(0) \in X(U)$. Sea

$$\beta(t) = X^{-1}(\alpha(t)) = (u(t), v(t))$$

entonces,

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u + v'(t)X_v$$

donde derivando de nuevo tenemos

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= u'(t)X_u + u'(t)[X_{uu}u'(t) + X_{uv}v'(t)] \\ &\quad + v''(t)X_v + v'(t)[X_{vu}u'(t) + X_{vv}v'(t)] \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + e N^X \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + f N^X \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + g N^X \end{aligned}$$

y como $\alpha''(t) \perp T_{\alpha(t)}(S)$ tenemos

$$\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 = 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 = 0 \end{cases}$$

nos permite encontrar geodésicas en coordenadas locales.

Notación (Símbolos de Christoffel).

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle X_{vv}, X_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_v \end{cases}$$

Ejemplo (Geodésicas de Superficie de Revolución). Sea la parametrización

$$X(u, v) = (f(v) \cos(u), f(v) \sin(u), g(v)), \quad f(v) \neq 0$$

se tiene que

$$E = f(v)^2, \quad F = 0, \quad G = f'(v)^2 + g'(v)^2$$

Primero obtenemos los símbolos de Christoffel derivando los coeficientes de la primera forma fundamental

$$E_u = 0, \quad E_v = 2ff'$$

$$F_u = 0, \quad F_v = 0,$$

$$G_u = 0, \quad G_v = 2(f'f'' + g'g'')$$

Las dos primeras ecuaciones dan

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}$$

Las dos segundas dan

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{ff'}{f^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = 0$$

Y Las dos últimas dan

$$\Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{f'f'' + g'g''}{f'^2 + g'^2}.$$

Con estos valores, el sistema de ecuaciones diferenciales resultante es

$$\begin{cases} u'' + \frac{2ff'}{f^2} u'v' = 0 \\ v'' - \frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2} (u')^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{f'^2 + g'^2} (v')^2 = 0 \end{cases}$$

(I) Vemos que $u = \text{cte.}$ y $v = v(s)$ son geodésicas. La primera ecuación se satisface si $u = \text{cte.}$. En este caso, $u' = 0$ y $u'' = 0$

$$0 + \frac{2ff'}{f^2} \cdot 0 \cdot v' = 0$$

y la segunda ecuación resulta

$$v'' + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2} (v')^2 = 0$$

Por tanto,

$$v'' = -\frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2} (v')^2$$

(II) Vemos que paralelos $v = \text{cte.}$, $u = u(s)$ son geodésicas. La primera de las ecuaciones es

$$u'' + \frac{2ff'}{f^2} u' \cdot 0 = 0$$

$$u'' = 0$$

y la segunda es

$$\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2} (u')^2 = 0$$

Por tanto, para que el paralelo $v = \text{cte.}$, $u = u(s)$ sea geodésica se debe tener que $u' \neq 0$. Como $f'^2 + g'^2 \neq 0$ y $f \neq 0$, entonces $f' = 0$.

(III) La primera ecuación se puede escribir como

$$(f^2 u')' = f^2 u'' + 2ff' u' v' = 0.$$

Por tanto,

$$f^2 u' = \text{cte.} = c$$

Por otro lado, el ángulo θ de una geodésica con un paralelo que la interseca es

$$\cos(\theta) = \frac{|\langle X_u, X_u u' + X_v v' \rangle|}{|X - u|} = |f u'|$$

donde $f = r$, entonces

$$r \cos(\theta) = \text{cte.} = |c|$$

Proposición 7.2 (Invariancia Geodésica Por Isometrías). *El sistema de ecuaciones diferenciales de las geodésicas solo depende de los Símbolos de Christoffel, es decir, solo depende de los coeficientes E, F, G de la primera forma fundamental. Por tanto, si $f : S \rightarrow S'$ es una isometría local y $\alpha : I \rightarrow S$ es geodésica entonces $(f \circ \alpha) : I \rightarrow S'$ es geodésica.*

Ejemplo. Sea P un plano y C un cilindro. Como P y C son isométricos, $\exists f$ isometría local y por tanto cualquier geodésica en P es geodésica en C por la invariancia de las geodésicas por isometrías.

Proposición 7.3. $\forall p \in S, \forall v \in T_p(S), \exists! \alpha_{p,v} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ geodésica con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.

7.2. Aplicación Exponencial

Definición 7.4. La aplicación exponencial en un entorno de $p \in S$ es

$$\exp_p : B_{\epsilon_0} \rightarrow S$$

$$v \mapsto \alpha_{p,v}$$

Proposición 7.4. (I) La exponencial es continua y diferenciable.

(II) Es un difeomorfismo en 0.

(III) La imagen del rango $\{\lambda v\}_{\lambda \in [0,1]}$ es una geodésica.

(IV) La imagen de las circunferencias concéntricas son ortogonales a las geodésicas radiales.

(V) Tomando coordenadas polares se tiene

$$X(r, \theta) = \exp_p(r \cos(\theta), r \sin(\theta)), \quad r \in (0, \epsilon_0), \theta \in (0, 2\pi)$$

satisfa

$$E = 1, \quad F = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} G = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{G} = 1,$$

(VI) *La curvatura geodésica en las coordenadas polares de $\exp_p(r, \theta)$ es*

$$K \circ X = -\frac{\sqrt{G_{rr}}}{\sqrt{G}}$$

(VII) *Las ecuaciones en estas coordenadas locales son*

$$\begin{cases} r'' = \frac{1}{2} G_r (\theta')^2 \\ \theta'' = -\frac{G_r}{G} \theta' r' - \frac{1}{2} \frac{G_{\theta}}{G} (\theta')^2 \end{cases}$$