Analísis Complejo

Hugo Del Castillo Mola

6 de octubre de 2022

Índice general

Parte I

Análisis Complejo

Capítulo 1

Preliminares

1.1. El Plano Complejo

Definición 1.1 (Plano Complejo). *Definimos los números complejos como el conjunto* $\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ *junto con las operaciones suma y producto*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

Observación. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *es un cuerpo conmutativo.*

(I) *La identidad de la suma es* $(0, 0)$ *y la identidad del producto es* $(1, 0)$.

(II) *Se satisfacen la prorpiedad asociativa, la distributiba y la conmutativa.*

(III) *Todo elemento distinto de cero tiene inverso en* $\mathbb{C}$.

Observación. *Consideramos los números reales* $\mathbb{R}$ *como el subconjunto de los números complejos* $\mathbb{C}$ *de la forma* $(a, 0)$. *Dado* $(a, b) \in \mathbb{C}$ *podemos escribir* $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$. *Sea* $i = (0, 1)$ *entonces* $(a, b) = a + ib$. *Notese que* $i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \to 1 \in \mathbb{R}$.

Observación. *La parte real de* $z = a + ib \in \mathbb{C}$ *es* a *y se denota* $\Re(z) = a$. *La parte imaginaria de* z *es* b *y se denota* $\Im(z) = b$.

Definición 1.2 (Módulo). *Sea* $z = a + ib \in \mathbb{C}$, *el módulo de* z *es*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observación. *El módulo de un número complejo es la distancia desde el punto del plano hasta el origen.*

Definición 1.3 (Conjugado). *Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$, el conjugado de z es*

$$\overline{z} = a - ib$$

Observación. *El conjugado de un número complejo es su simétrico respecto al eje de coordenadas.*

Proposición 1.1. *Se verifican las siguientes propiedades:*

(I) $\overline{\overline{z}} = z$ *y* $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

(II) $z + \overline{z} = 2\Re(z)$ *y* $z - \overline{z} = 2\Im(z)$.

(III) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ *y* $\overline{-z} = -\overline{z}$

(IV) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ *y si* $z \neq 0$ *entonces* $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$

(V) $|z|^2 = z\overline{z}$ *y* $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2},\ \forall z \neq 0.$

(VI) $|zw| = |z||w|$, $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$ *si* $(w \neq 0)$ *y* $|z| = |\overline{z}|$

(VII) $|z + w| \leq |z| + |w|$. *Además, si* $\exists t \geq 0 : z = tw$ *se tiene* $|z + w| = |z| + |w|$.

Observación. *El módulo permite definir una distancia en el plano complejo* $d(z, w) = |z - w|$. *De esta forma* $\mathbb{C}$ *y* $\mathbb{R}$ *son topológicamente iguales.*

Definición 1.4 (Representación polar de un número complejo). *Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$, z representa el punto (a, b) en el plano, cuya expresión en coordenadas polares es $(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Y escribimos*

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) := re^{i\theta}$$

donde $r = |z|$ *y* $\theta = \arg(z) = \operatorname{arc\,tg}(\frac{b}{a})$.

Observación. *Si $-\pi < \theta < \pi$ lo llamamos argumento principal y se denota (z). El conjunto de todos los posibles argumentos de z es $\{Arg(z) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.*

Proposición 1.2. (I) $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)} \forall k \in \mathbb{Z}$.

(II) $|e^{i\theta}| = 1, |\overline{e^{i\theta}}| = e^{-i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^{-1}$.

(III) $e^{i(\theta+\sigma)} = e^{i\theta}e^{i\sigma}$.

(IV) $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$ *y* $\arg(\overline{z}) = \arg(z^{-1}) = -\arg(z)$

Proposición 1.3. *Si* $z = re^{i\theta}$ *entonces* $z^n = r^n e^{in\theta} = |z|^n e^{in\arg(z)}$.

Observación. *Una raíz* n*-esima de un número complejo* w *es número* z *que cumple* $z^n = w$*. Si* $w = 0$ *la única raíz es* 0*, si* $w \neq 0$ *entonces por el Teorema Fundamental del Álgebra tenemos que hay* n *raíces distintas.*

Sean $w = |w|e^{i\theta}$ *y* $z = |z|e^{i\alpha}$*, tenemos que*

$$|w|e^{i\theta} = |z|^n e^{in\alpha}$$

y por tanto $|z| = |w|^{\frac{1}{n}}$ *y* $e^{i\theta} = e^{in\alpha}$*, lo cual implica que* $n\alpha = \theta + 2k\pi$ *para* $k \in \mathbb{Z}$*. Los valores de* α *son*

$$\frac{\theta}{n}, \frac{\theta + 2\pi}{n}, \cdots, \frac{\theta + 2\pi(n-1)}{n}$$

Proposición 1.4. *Sea* $w \in \mathbb{C}$ *entonces* w *tiene* n *raíces* n*-simas distintas.*

Observación. *Estas* n *raíces son los vértices de un polígono regular de* n *lados inscritos en la circunferencia de centro* 0 *y radio* $|w|^{\frac{1}{n}}$*.*

1.2. Función Exponencial

Definición 1.5 (Función polinómica)**.** *Sea* $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ *donde* $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$*.*

Observación. *Como* $f(z) = z^k$ *es continua (de* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*) se tiene que* f *es continua de* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$*.*

Definición 1.6 (Función Exponencial)**.** *Definimos la función exponencial como la solución de la ecuación diferencial*

$$f'(z) = f(z)$$

con el valor inicial $f(0) = 1$*. Haciendo*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1} + \cdots$$

se tiene que $a_{n-1} = n a_n$ *y* $a_0 = 1$ *y por inducción* $a_n = \frac{1}{n!}$*.*

La solución se denota

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

que es una serie convergente.

Proposición 1.5 (Propiedades Exponencial)**.** *Se verfican las siguientes propiedades:*

(I) *Si $z \in \mathbb{R}$ entonces e^z coincide con la exponencial real.*

(II) $|e^z| = e^x$ *y* $\arg(e^z) = y$.

(III) $e^{\overline{z}} = \overline{e^{\overline{z}}}$.

(IV) $e^z \neq 0$ *y* $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.

(V) $e^{z+w} = e^z e^w, \forall z, w \in \mathbb{C}$.

(VI) $e^{2k\pi i} = 1, \forall k \in \mathbb{Z}$.

(VII) *es periódica,* $e^z = e^{z+2\pi i}$

(VIII) *es continua, Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos, si* $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0 \Rightarrow e^{z_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{z_0}$.

(IX) *No es inyectiva, exiten infinitos $z \in \mathbb{C}$ tal que $e^x = 1$.*

Observación. *En el plano la exponencial compleja transforma las rectas horizontales de la forma $z = x + ib$ en semirectas de radio e^x y ángulo b. Y rectas verticales de la forma $z = a + iy$ a circunferenciasde radio e^a y ángulo y.*

Definición 1.7 (Funciones Trigonométricas)**.** *Se definene las funciones* sen *y* cos *como*

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Proposición 1.6 (Propiedades cos y sen)**.** (I) *Son funciones continuas.*

(II) *Sobre los números reales coinciden con las correspondientes funciones reales.*

(III) $\cos(z) = \cos(-z)$ *y* $\operatorname{sen}(z) = -\operatorname{sen}(-z), \forall z \in \mathbb{C}$.

(IV) $\cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *y* $\operatorname{sen}(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi$ *para* $k \in \mathbb{Z}$.

(V) $\forall z, w \in \mathbb{C}$, *se tien* $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w)$ *y* $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen}(z)\cos(w) + \operatorname{sen}(w)\cos(z)$.

(VI) *El coseno y el seno son funciones periódicas de periodo* 2π.

(VII) $\cos(z)^2 + \operatorname{sen}(z)^2 = 1, \forall z \in \mathbb{C}$.

Demostración (ii). *Veamos que si* $z \in \mathbb{R}$ *entonces la exponencial compleja coincide con la real*

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\big(\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + \cos(-x) + i\operatorname{sen}(-x)\big) = \cos(x)$$

Demostración. *(iv)* $\cos(z) = 0 \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 0 \Leftrightarrow e^{iz}(e^{iz} + e^{-iz}) = e^{2iz} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = -1 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$. *Si* $y \neq 0$ *entonces* $e^{2iz} = e^{2ix-2y} \Rightarrow |e^{2iz}| \neq -1$.

Definición 1.8 (Función Tangente)**.** *A partir de las funciones seno y coseno se define la tangente,*

$$\tan(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)} = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

Observación. *Todas las funciones trigonométricas son funciones de* e^{iz}.

Observación. *También podemos definir las funciones*

$$\operatorname{senh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \text{ y } \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

1.3. Función Logaritmo

Definición 1.9 (Logaritmo)**.** *La función logaritmo se define como la inverasa de la función exponencial,*

$$\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \log(z) = w$$

donde $\log(z) = w$ *es la raíz de la ecuación* $e^w = z$.

Observación. $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow$ *el* 0 *no tiene logaritmo.*

Observación. *Si* $w = x + iy \neq 0$, $z = e^w = e^{x+iy}$ *tiene soluciones*

$$e^x = |z|,\ e^{iy} = \frac{w}{|w|}$$

donde la primera ecución tiene solución única $x = \log(|z|)$ *y la segunda ecuación tiene inifinitas soluciones módulo* 2π.

Observación. *Distinguiendo la parte real y la parte imaginaria de* w *podemos escribir*

$$z = \log(z) = \log|z| + i\arg(z)$$

dado que $e^{\log(z)} = e^{\log|z|}e^{i\arg(z)} = |z|e^{i\arg(z)} = z$.

Observación. *Para distinguir las soluciones, se llama* **rama** *del logaritmo a la función que reside en* $\{x + iy : y_0 \leq y \leq y : 0 + 2\pi\}$. *Solo definimos la función* $\log(z)$ *cuando se especifica un intervalo de longitud* 2π *donde* $\arg(z)$ *toma valores y se dice elegir una rama específica.*

Observación. *La determinación principal del argumento induce una rama del logaritmo.*

Definición 1.10 (Potencias)**.** *Sea* $a, \alpha \in \mathbb{C}, a, \alpha \neq 0$

$$a^\alpha = e^{\alpha \log(a)}$$

Observación. *Si* $\alpha = 0 \Rightarrow a^0 = 1$.

Observación. *En general,* a^α *tiene infinitos valores. Una excepción es* $\alpha = n \Rightarrow a^n = e^{n\log(a)} = e^{\log(a)} \cdot \dots \cdot e^{\log(a)} = a \cdot \dots \cdot a$.

Proposición 1.7 (Propiedades Potencias)**.** *El logaritmo verifica las siguientes propiedades:*

(I) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

(II) $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta$ *solo si fijamos el valor de* $\log(a)$

(III) $1 = e^{-2k\pi y}(\cos(2k\pi x) + i\,\mathrm{sen}(2k\pi x))$ *donde* $\alpha = x + iy$

Proposición 1.8. (I) *$f(z) = a^z$ es continua en $\mathbb{C}$*

(II) *Sea $\alpha \in \mathbb{C}, f(z) = z^\alpha$ es continua en el dominio de la rama del logaritmo.*

Definición 1.11 (Transformación de Möbius)**.** *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tal que $ad - bc \neq 0$. Entonces, a la función de la forma*

$$S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

se llama transfomación de Möbius.

Observación. *S es continua en $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.*

Proposición 1.9. *La composición de transformaciones de Möbius es transfomación de Möbius.*

Proposición 1.10. *$S : \mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C}\setminus\frac{a}{c}$ es un homeomorfismo (biyectiva, S continua y S^{-1} continua) cuya inversa es*

$$S^{-1} : z \mapsto \frac{dw-b}{a-cw}$$

Observación. $S \circ S^{-1}(z) = S^{-1} \circ S(z) = z$

Observación. *Las transformaciones de Möbuis forman un grupo bajo la operación de composición de aplicaciones.*

Definición 1.12 (Möbius Ampliada)**.** *Sea S la transfomación de Möbius tal que $S(-\frac{d}{c}) = \infty$ y $S(\infty) = \frac{a}{c}$ si $c = 0$ y $S(\infty) = \infty$ si $c = 0$. Entoces, podemos definir $S : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$.*

Observación. *La transfomación de Möbius ampliada también es homeomorfismo.*

Teorema 1.1. *Toda transfomación de Möbius es composición de homotrcias, translaciones, inversiones y giros.*

Teorema 1.2. *Sean* $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*, w_0, w_1, w_2 \in \mathbb{C}^* : z_i \neq z_j, w_i \neq w_j, \forall i \neq j$. *Entonces,* $\exists! T(z)$ *transformación de Möbius tal que* $T(z_i) = w_i, \forall i \in \{0, 1, 2\}$.

Corolario 1.2.1. *Si una transformación de Möbius tiene tres puntos fijos entonces es la identidad.*

Corolario 1.2.2. *Si dos transformaciones de Möbius coinciden en tres puntos entonces son la misma.*

Teorema 1.3. *Las transformaciones de Möbius transforman circunferencias de* $\mathbb{C}^*$ *en circunferencias de* $\mathbb{C}^*$

Capítulo 2

Funciones Holomorfas

2.1. Derivación Compleja

Definición 2.1 (Derivada). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Decimos que f es derivable si existe*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Ejemplo. *(I) f constante $\Rightarrow f'(z_0) = 0$.*

(II) $f(z) = z \Rightarrow f'(z_0) = 1$.

(III) $f(z) = \overline{z} \Rightarrow \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} = \begin{cases} 1, & \textit{si } z - z_0 \in \mathbb{R} \\ -1, & \textit{si } z - z_0 \in i\mathbb{R} \end{cases} \quad \Rightarrow \nexists \lim_{z \to z_0}.$

Observación. *La continuidad de una función compleja es equivalente a la continuidad de la parte real y la parte imaginaria. No pasa lo mismo con derivabilidad.*

Proposición 2.1. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivable en $z_0 \in \Omega$. Entonces, f es continua en $z_0 \in \Omega$.*

Demostración. *Sigue de la reglas de los limites*

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z) + f(z_0) - f(z_0) \\ &= f(z_0) + \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0) \end{aligned}$$

donde $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \xrightarrow{z\to z_0} f'(z_0)$ *y* $(z-z_0) \xrightarrow{z\to z_0} 0 \Rightarrow f(z) \xrightarrow{z\to z_0} f(z_0)$

Proposición 2.2. *Sean* $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *derivables en* $z_0 \in \Omega$*. Entonces,*

(I) *Si* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $(\alpha f \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0)$

(II) $(fg)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)$.

(III) *Si* $g(z_0) \neq 0$ *entonces* $(\frac{f}{g})'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$.

Demostración.

Ejemplo. (I) $f(z) = z^n \Rightarrow f'(z) = nz^{n-1}, \forall z \in \mathbb{C}$.

(II) *Todo polinomio es derivable en* $\mathbb{C}$.

(III) $f(z) = \frac{1}{z}$ *es derivable* $\forall z \neq 0$.

Teorema 2.1 (Regla de la Cadena)**.** *Sean* $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ *abiertos,* $f : \Omega_1 \to \mathbb{C}$, $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ *tal que* f *es derivable en* $f(z_0) \in \Omega_2$ *y* g *es derivable en* $z_0 \in \Omega_1$*. Entonces,* $(f \circ g)$ *es derivable en* $z_0 \in \Omega_1$ *y* $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$.

Demostración. *Sea* $G : \Omega_2 \to \mathbb{C} : G(w) = \begin{cases} \frac{g(w)-g(f(z_0))}{w-f(z_0)}, w \neq f(z_0) \\ g'(f(z_0)), w = f(z_0) \end{cases}$
entonces, G *está bien definida y* $\lim_{w\to f(z_0)} \frac{g(w)-g(f(z_0))}{w-f(z_0)} = g'(z_0) \Rightarrow G$ *es continua en* $f(z_0)$.

Si $z \neq 0$*, entonces*

$$\frac{(g\circ f)(z) - (g\circ f)(z_0)}{z-z_0} =$$

$$= \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z)-f(z_0)} \cdot \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =$$

$$= G(f(z))\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$\lim_{z\to z_0} G(f(z))\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =$$

$$= \lim_{z\to z_0} G(f(z)) \cdot \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =$$
$$= G'(f(z_0))f'(z_0).$$

Observación. *$f : \Omega \to \mathbb{C}$ es derivable $\forall z \in \Omega$. Entonces, f es holomorfa en Ω.*

2.2. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Notación. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*

$$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) = u(x,y) + iv(x,y),$$

donde $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Entonces, la matriz jacobiana de f es

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Nota. *Queremos ver que significa qeu u, v sean diferenciables. Si derivamos f en $z_0 \in \Omega$ respecto de x y y, parte real y parte imaginaria respectivamente, obtenemos dos expresiones de $f'(z_0)$ que dan lugar a las ecuaciones de Cauchy-Riemann.*

Teorema 2.2 (Ecuaciones Cauchy-Riemann)**.** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Entonces $f'(z_0)$ existe $\Leftrightarrow$ f es diferenciable en $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ con*

$$u_x = v_y,\ u_y = -v_x \text{ (Ecuaciones de C-R)},$$

es decir, si $\exists u_x, u_y, v_x, v_y$, son continuas en Ω y satisfacen las ecuaciones, entonces f es analítica en Ω.

Demostración. *($\Rightarrow$) En el límite*

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

sustituimos $z = x + iy_0$

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{u(x,y_0) + iv(x,y_0) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$= \frac{u(x, y_0) + u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i\frac{v(x, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

donde $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \xrightarrow{x\to x_0} f'(z_0)$ *implica*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x, y_0) + u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i\frac{v(x, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

De manera análoga, si $z = x_0 + iy$ *entonces*

$$\lim_{y\to y_0} \frac{u(x_0, y) + u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{(y - y_0)}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Por tanto, $\exists f'(z_0)$ *y tiene el mismo valor independientemente de como* z *se acerque a* z_0

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y}$$

($\Rightarrow$*) A partir del teoremade Taylor*

$$u(x + s, y + t) = u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)t + R(s, t)$$

donde $\frac{R(s,t)}{|h|} \xrightarrow{z\to z_0} 0$*. También*

$$v(x + s, y + t) = v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)t + G(s, t)$$

donde $\frac{G(s,t)}{|h|} \xrightarrow{z\to z_0} 0$*. Entonces,*

$$f(z + h) = f(z) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)t + R(h)$$

$$+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)s+i\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)t+iG(h)$$

$$= f(z)+\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\Big)h+R(h)+iG(h)$$

Entonces,

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\Big)+\frac{R(h)+iG(h)}{h}$$

Por tanto,

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

$\exists f'(z_0)$ *y es continua* $\Rightarrow f(z)$ *es anlítica.*

Corolario 2.2.1. *Sea* $f:\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *holomorfa,* Ω *abierto. Entonces,* $f'(z)=0,\forall z\in\Omega\Rightarrow f$ *es constante.*

Teorema 2.3. *Si* $f(z)$ *es diferenciable, entonces la matriz Jacobian* $J_f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *tiene determinante*

$$\det J_f(z)=|f'(z)|^2.$$

2.3. Función Inversa

Teorema 2.4 (Función Inversa)**.** *Sea* $f:\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *holomorfa,* $z_0\in\Omega$ *y* $f'(z_0)\neq 0$*. Entonces, existe un entorno* $U\subset D:z_0\in U$ *y un entorno de* $V\subset\mathbb{C}:f(z_0)\in V$ *tal que* $f:U\to V$ *es biyectiva y* f^{-1} *es holomorfa con*

$$(f^{-1})'(f(z))=\frac{1}{f'(z)},z\in U.$$

Demostración.

Sea $J_f(x_0,y_0)$ la matriz Jacobiana de f en $z_0=(x_0,y_0)$, por el Teorema 2.3 $\det(J_f(z_0))=|f'(z_0)|^2\neq 0$. Entonces, podemos aplicar el Teorema de la Función Inversa Real ya que $J:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. Solo falta ver que $J_f(z)^{-1}$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$$J_f(x,y)=\begin{pmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{pmatrix}$$

Entonces la matriz Jacobiana invera es

$$(J_f(x,y))^{-1} = \frac{1}{\det(J_f)} \begin{pmatrix} v_y & -u_y \\ -v_x & u_x \end{pmatrix}$$

y la matriz Jacobiana de la función inversa

$$J_{f^{-1}}(x,y) = \begin{pmatrix} t_x & t_y \\ s_x & s_y \end{pmatrix}$$

Entonce,

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{1}{\det(J_f)} v_y = \frac{1}{\det(J_f)} u_x, \\ s_x &= -\frac{1}{\det(J_f)} v_x = \frac{1}{\det(J_f)} u_y, \\ t_y &= \frac{1}{\det(J_f)} v_x, \\ s_y &= \frac{1}{\det(J_f)} v_y \end{aligned}$$

las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen.

Ejemplo. *Sea $w = \log z$ la rama principal del logaritmo. Entonces, w es continua y es la inversa de $z = e^w, -\pi < w < \pi$. Como e^w es holomorfa con $(e^w)' \neq 0$, podemos aplicar el Teorema de la Función Inversa. Por tanto, $\log z$ es holomorfa.*

$$\begin{aligned} z &= e^{\log z} \Rightarrow \\ 1 = e^{\log z} \frac{d}{dz}(\log z) &= z \frac{d}{dz}(\log z) \Rightarrow \\ \frac{d}{dz}(\log z) &= \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

2.4. Funciones Harmónicas

Definición 2.2 (Ecuación de Laplace)**.** *La ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = 0$$

se llama ecuación de Laplace.

Definición 2.3 (Laplaciano)**.** *El operador*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$$

se llama Laplaciano.

Observación. *La ecuación de Laplace se escribe* $\Delta u = 0$.

Definición 2.4 (Función Armónica)**.** *Las funciones que satisfacen la ecuación de Laplace se llaman funciones armónicas. Sea* $u : A \to \mathbb{R}$, $u \in C^2$ *tal que*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Teorema 2.5. *Si* $f = u + iv$ *es holomorfa y* $u, v \in C^2$. *Entonces,* u *y* v *son armónicas.*

Observación. $u = \Re(f), v = \Im(f)$.

Demostración. *content*

Definición 2.5 (Conjugado Armónico)**.** *Sea* $u : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *armónica y* v *armónica tal que* $f = u + iv$ *es holomorfa. Entonces, decimos que* v *es el conjugado armónico.*

Ejemplo. $f(z) = z^2$, $u = x^2 + y^2$, $v = 2xy$.

Teorema 2.6. *Sea* D *un disco abierto o* $D = \mathbb{R}^2$, $u : D \to \mathbb{R}$ *armónica. Entonces, existe* v *armónica conjugada.*

Demostración. *content*

Corolario 2.6.1. *Toda función armónica es localmente la parte real de una función holomorfa.*

2.5. Aplicaciones Conformes

Definición 2.6 (Vector Tangente)**.** *Sea* $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $0 \leq t < 1$ *una curva diferenciable parametrizada con* $z_0 = \gamma(0)$. *Entonces,*

$$\gamma'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} = x'(0) + iy'(0)$$

es el vector tangente a γ *en* z_0.

Definición 2.7 (Ángulo entre dos curvas)**.** *Definimos el ángulo entre dos curvas en* z_0 *como el ángulo entre sus vectores tangentes en* z_0

Teorema 2.7. *Sea* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ *una curva diferenciable parametrizada con* $z_0 = \gamma(0)$ *y sea* $f(z)$ *una función diferenciable en* z_0. *Entonces la tangente de la curva* $f(\gamma(t))$

$$(f \circ \gamma)'(0) = f'(z_0)\gamma'(0).$$

Definición 2.8 (Función Conforme)**.** *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *diferenciable y sean para dos curvas* γ_1, γ_2 *con* $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$. *Entonces, decimos que* f *es conforme en* z_0 *si las curvas* $(f \circ \gamma_1)$, $(f \circ \gamma_2)$ *tienen* $\gamma_1'(f(z_0)) \neq 0$, $\gamma_2'(f(z_0)) \neq 0$ *y el ángulo entre* $(f \circ \gamma_1')(z_0)$ *y* $(f \circ \gamma_2')(z_0)$ *es el mismo que el ángulo entre* $\gamma_1'(z_0)$ *y* $\gamma_2'(z_0)$.

Observación. *Una función conforme* $f : D \to V$ *es una función diferenciable con derivadas parciales continuas que es conforme* $\forall z \in D$ *e inyectiva.*

Teorema 2.8. *Si* $f(z)$ *es diferenciable en* z_0 *y* $f'(z_0) \neq 0$, *entonces* $f(z)$ *es conforme en* z_0.

2.6. Integral de Funciones Complejas sobre Curvas

Definición 2.9 (Integral)**.** *Sea* $h : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *un función compleja de una variable real y sean* u, v *sus partes real e imaginaria respectivamente tal que* $h(t) = u(t) + iv(t)$. *Suponemos que* u, v *son continuas. Entonces,* *llamamos la integral de h a*

$$\int_a^b h(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt,$$

donde las integrales de u y v tienen el sentido usual de cálculo unidimensional.

Definición 2.10. *Sea f continua y definida en un conjunto abierto $A \subset \mathbb{C}$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$una curva diferenciable a trozos tal que $\gamma([a,b]) \subset A$. Entonces,*

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i-1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

es la integral de línea de f a lo largo de γ.

Proposición 2.3. *Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, entonces*

$$\int_\gamma f = \int_\gamma [u(x,y)dx - v(x,y)dy] + i\int_\gamma [u(x,y)dy + v(x,y)dx]$$

Demostración.

$$f(\gamma(t))\gamma'(t) = [u(x(t), y(tb)) + iv(x(t), y(t))] \cdot [x'(t) + iy'(t)]$$

$$= [u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)] + i[v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t)]$$

donde integrado sobre $[a_i, a_{i+1}]$ tenemos la expresión requerida.

Definición 2.11 (Reparametrización)**.** *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva diferenciable a trozos. Una curva diferenciable a trozos $\overline{\gamma}[\overline{a},\overline{b}] \to \mathbb{C}$ se llama reparametrización de γ si $\exists\alpha : [a,b] \to [\overline{a},\overline{b}]$ con $\alpha'(t) > 0, \alpha(a) = \overline{a}$ y $\alpha(b) = \overline{b}$ tal que $\gamma(t) = \overline{\gamma}(\alpha(t))$.*

Proposición 2.4. *Si $\overline{\gamma}$ es una reparametrización de γ, entonces*

$$\int_\gamma f = \int_{\overline{\gamma}} f$$

para $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *donde* $\gamma([a,b]) \subset \Omega$.

Proposición 2.5. *Sean* f, g *funciones continuas,* $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$*,* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ *curvas diferenciables, entonces*

(I) $\int_\gamma (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_\gamma f + c_2 \int_\gamma g$,

(II) $\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f$,

(III) $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_\gamma f + \int_\gamma f$.

Teorema 2.9. *Sea* γ *un curva diferenciable a trozos. Si* $h(z)$ *es una función continua en* γ*, entonces*

$$\Big| \int_\gamma h(z)dz \Big| \leq \int_\gamma |h(z)||dz|.$$

Además, si γ *tiene longitud* L *y* $|h(z)| \leq M$ *en* γ*, entonces*

$$\Big| \int_\gamma h(z)dz \Big| \leq ML.$$

Observación. $\int_\gamma |h(z)||dz| = \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt$.

Demostración. *Sea* $g : [a,b] \to \mathbb{C}$*, entonces*

$$\Re\left(\int_a^b g(t)dt \right) = \int_a^b \Re(g(t))dt$$

dado que $\int_a^b g(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt = u(t) + iv(t)$.

Sea $\int_a^b g(t)dt = re^{i\theta}$*, entonces* $r = \int_a^b e^{-i\theta} g(t)dt$

$$\Rightarrow r = \Re(r) = \int_a^b \Re(e^{-i\theta} g(t))dt$$

como $\Re(e^{-i\theta} g(t)) \leq |e^{-i\theta} g(t)| = |g(t)|,$ *ya que* $|e^{-i\theta}| = 1$*, entonces tene-*

mos que $\int_a^b \Re(e^{-i\theta} g(t))dt \leq \int_a^b |g(t)|dt$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b g(t)dt \right| = r \leq \int_a^b |g(t)|dt.$$

Y usando $|zz'| = |z||z'|$ *tenemos que*

$$|\int_\gamma f| = |\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt = \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt$$

Teorema 2.10 (Fundamental del Cálculo)**.** *Sea* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ *una curva diferenciable a trozos,* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto tal que* $\gamma([0,1]) \subset \Omega$*,* $F : \Omega \to \mathbb{C}$ *función holomorfa con* F' *continua. Entonces,*

$$\int_\gamma F'(z)dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$$

Observación. *Si* $\gamma(0) = \gamma(1)$*, entonces* $\int_\gamma F'(z)dz = 0$

Demostración.

$$\int_\gamma F'(z)dz = \int_0^1 F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^1 (F \circ \gamma)'(t)dt = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$$

Corolario 2.10.1. *Si* γ *es una curva cerrada, entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Teorema 2.11. *Si* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *es abierto convexo, y* $f : \Omega \to \mathbb{C}$*es continua, entonces* f *tiene primitica en* Ω *si y solo si*

$$\int_{\partial T} f(z)dz$$

para $T \subset \Omega$ *triángulo.*

Demostración. *content*

2.7. Teorema de Cauchy

Definición 2.12 (Teorema de Green)**.** *Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto conexo acotado tal que ∂D es una una curva cerrada y simple, Ω abierto tal que $\overline{D} \subset \Omega$ y $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Entonces,*

$$\int_{D^+} PdxQdy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

Teorema 2.12 (Cauchy)**.** *Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto conexo acotado tal que su frontera es una curva simple cerrada, Ω abierto tal que $\overline{D} \subset \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función holomorfa tal que f' es continua. Entonces,*

$$\int_D f(z)dz = 0$$

Demostración. *Sea $f = u + iv$,*

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz$$

$$= \int_\gamma (u + iv)(dx + dy)$$

$$= \int_\gamma (udx - vdy) + i \int_\gamma (udy + vdx)$$

donde aplicando el teorema de Green, tenemos que

$$\int_\gamma f = \iint_A \left[-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] dxdy + i \iint_A \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] dxdy$$

a partir de las ecuaciones de Cauchy-Riemann ambos términos son nulos.

Teorema 2.13 (Fórmula Integral de Cauchy)**.** *Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto, conexo y acotado tal que ∂D es una curva simple cerrada, Ω abierto tal que $\overline{D} \subset \Omega$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ un función holomorfa tal que f' es continua. Entonces,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{w-z} dw, \forall z \in D$$

Demostración. *Sea $z \in D, \epsilon > 0, D_\epsilon = D \setminus \{|w-z| \leq \epsilon\}$. La frontera ∂D^+ es la unión de ∂D y $\{|w-z| = \epsilon\}$ con orientación positiva.*

Dado que $\frac{f(z)}{w-z}$ es holomorfa para $w \in D_\epsilon$, por el teorema de Cauchy tenemos

$$\int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0$$

separando la frontera e invirtiendo la orientación se tiene

$$\Rightarrow \int_{|w-z|=\epsilon} \frac{f(z)}{w-z} dw = \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

si escribimos $w = z + \epsilon e^{i\theta}, dw = i\epsilon e^{i\theta} dw$, obtenemos

$$\int_0^{2\pi} f(z + \epsilon e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{f(w)}{w-z} dw$$

por el teorema del valor medio para la funciones armónicas, la integral de la izquierda coincide con $f(z)$.

Teorema 2.14 (Fórmula Integral de Cauchy para las Derivadas)**.** *Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto, conexo y acotado talque ∂D es unacurva simple cerrada, $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto tal que $\overline{D} \subset \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función holomorfa tal que f' es continua. Entonces,*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \forall z \in D, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. *Sea $z \in D$ entonces $dist(z, \partial D) = r > 0$, f continua en*

$\partial D \Rightarrow \exists M > 0 : |f(w)| < M, \forall w \in \partial D$ *y* $|\frac{1}{w-z}| \leq \frac{1}{r}$

$$|\frac{f(w)}{w-z}| \leq \frac{M}{r}, \forall w \in \partial D$$

y dado que $\frac{d}{dz}(\frac{f(w)}{w-z}) = \frac{f(w)}{w-z}^2$ *entonces, por el teorema de derivación bajo el signo integral tenemos que*

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dz$$

donde usando inducción y el teorema de derivación bajo el signo integral podemos ver que se cumple para las derivadas de orden n.

Corolario 2.14.1. *Sea* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *función holomorfa,* $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ *continua. Entonces* f *es infinitamente derivable.*

Teorema 2.15 (Morera)**.** *Sea* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *función continua y* $\int_{\partial T} f(z)dz = 0, \forall T \subset \Omega$ *triángulo. Entonces,* f *es infinitamente derivable.*

Demostración. *(Teorema fundamental del cálculo)* $\Rightarrow f$ *tiene primitiva, es decir,* $\exists F : f = F', F$ *holomorfa en* D *y* $F' = f$ *continua. Entonces, por el corolario anterior* F *infinitamente derivable* $\Rightarrow F'$ *infinitamente derivable.*

Teorema 2.16 (Goursat)**.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto,* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfa. Entonces,* f' *es continua.*

Demostración. *Esta demostración se basa en el teorema de Morera. Sea* T *un triángulo cerrado en* D*. Subdividimos* T *en cuatro subtriángulos iguales. Como la integral de* $f(z)$ *alrededor de* ∂T *es la suma de las integrales a lo largo de los subtriángulos, hay almenos un subtriángulo* T_1 *tal que*

$$\left| \int_{\partial T_1} f(z)dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial T} f(z)dz \right|$$

Ahora, subdividimos T_1 *en cuatro subtriángulos iguales y repetimos el proceso. De manera inductiva obtenemos una sucesión de triángulos encajados*

$\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$\left|\int_{\partial T_n} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial T_{n-1}} f(z)dz\right| \geq \cdots \geq \frac{1}{4^n}\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right|$$

Dado que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es decreciente y* $\operatorname{diam}(T_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $T_n \xrightarrow{n\to\infty} z_0 \in D$. *Y dado que* $f(z)$ *es diferenciable en* z_0

$$|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)| \leq \epsilon_n . z \in T_n$$

donde $\epsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. *Sea* L *la longitud de* ∂T. *Entonces, la longitud de* T_n *es* $\frac{L}{2^n}$. *Si* $z \in T_n$ *entonces*

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)| \leq \epsilon_n|z-z_0| \leq 2\epsilon_n \frac{L}{2^n}$$

Por el toerema de Cauchy y la estimación de Cauchy

$$\Big|\int_{\partial T_n} f(z)dz\Big| = \Big|\int_{\partial T_n} df(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)\Big| \leq 2\epsilon_n \frac{L}{2^n}\cdot\frac{L}{2^n} = \frac{2L^2\epsilon_n}{4^n}$$

$$\Rightarrow \Big|\int_{\partial T} f(z)dz\Big| \leq 4^n\Big|\int_{\partial T_n} f(z)dz\Big| \leq 2L^2\epsilon_n$$

Como $\epsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, *entonces*

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0$$

Por el Teorema de Morera $f(z)$ *es holomorfa.*

Teorema 2.17 (Cauchy-Goursat)**.** *Sea* $D \subset \mathbb{C}$ *abierto, conexo y acotado tal que* ∂D *es una curva simple cerrada,* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto tal que* $\overline{D} \subset \Omega, f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfa. Entonces,*

$$\int_{\partial D^+} f(z)dz = 0$$

Definición 2.13 (Simplemente Conexo). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo. Entonces, si $\mathbb{C}^* \setminus \Omega$ es conexo, decimos que Ω es simplemente conexo.*

Observación. *$\Omega \subset \mathbb{C}$ conexo es simplemente conexo si $\forall \gamma \in \Omega$ curva cerrada es homotópica.*

Proposición 2.6. *Una curva que se puede transformar en un punto es una curva homótopa.*

Teorema 2.18 (Cauchy Homotópico). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplemente conexo, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y $\gamma \subset \Omega$ curva cerrada simple. Entonces,*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Demostración. *Ω simplemente conexo $\Rightarrow$ γ es homotópica a una curva constante $\lambda(t) = z_0, \forall t \Rightarrow \int_\gamma f = \int_\lambda f = 0$.*

Teorema 2.19 (Desigualdades de Cauchy). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$, $D = \overline{D}(z_0, R) \subset \Omega$, f holomorfa en D. Si $|f(z)| \leq M, \forall z \in \partial D$, entonces*

$$\left|f^{(k)}(z_0)\right| \leq \frac{k!}{R^k}M,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Demostración. *Por el teorema de Cauchy*

$$f_{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}dw$$

$$\Rightarrow |f_{(k)}(z_0)| = \frac{k!}{2\pi}\Big|\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}dw\Big|$$

Ahora,

$$\Big|\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\Big| \leq \frac{M}{R^{k+1}}$$

dado que $|w - z_0| = R, \forall w \in \partial D$. Entonces,

$$|f_{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^{k+1}} \cdot L$$

donde L es la longitud de γ.

Teorema 2.20 (Liouville)**.** *Sea f entera. Si $\exists M > 0 : |f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.*

Demostración. *Por las desigualdades de Cauchy con $k = 1$, $\forall z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow |f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}$ y para z_0, $\frac{M}{R} \xrightarrow{R \to \infty} 0 \Rightarrow |f'(z_0)| = 0 \Rightarrow f'(z_0) = 0 \Rightarrow f$ es constante.*

Teorema 2.21 (Teorema Fundamental del Álgebra)**.** *Sea $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$, $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$. Entonces, $\exists z_0 \in \mathbb{C} : P(z_0) = 0$.*

Demostración. *Sea $p(z_0) \neq 0, \forall z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces, $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ es entera $\Rightarrow f(z)$ no es constante dado que $a_n \neq 0$. Basta ver que, por el teorema de Liouville, que $f(z)$ es acotada.*

Sea $M > 0$, a partir de $P(z)$ por la desigualdad triangular

$$|P(z)| \geq |a_n||z|^n - |a_0| - \cdots - |a_{n-1}||z|^{n-1}$$

Sea $a = |a_0| + \cdots + |a_{n-1}|$. Si $z > 1$ entonces

$$|P(z)| \geq |z|^{n-1}\left(|a_n||z| - \frac{|a_0|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_1|}{|z|^{n-2}} - \cdots - \frac{|a_{n-1}|}{1}\right)$$

$$\geq |z|^{n-1}(|a_n||z| - a)$$

Sea $K = \max\{1, \frac{M+a}{|a_n|}\}$ entonces, si $|z| > K \Rightarrow |P(z)| \geq M$. Por tanto, si $|z| > K \Rightarrow \frac{1}{|P(z)|} < \frac{1}{M}$. Pero si z es tal que $|z| \leq K$, entonces $\frac{1}{P(z)}$ es acotada y en valor absoluto por que es continua, es decir, $\exists L > 0 : \frac{1}{|P(z)|} < \max\{\frac{1}{M}, L\} \Rightarrow |f(z)|$ es acotada en $\mathbb{C}$.