Topología

Hugo Del Castillo Mola

3 de octubre de 2022

Índice general

I Topología General **2**

1. Espacios Topológicos Arbitrarios **3**

1.1. Espacios Topológicos 3
1.2. Entornos 8
1.3. Bases 13
1.4. Subespacios 15
1.5. Funciones continuas 16
1.6. Espacio Producto 19
1.7. Espacio Cociente 22
1.8. Espacio Suma 25

2. Propiedades de Separación **27**

Parte I

Topología General

Capítulo 1

Espacios Topológicos Arbitrarios

1.1. Espacios Topológicos

Definición 1.1 (Topología). *Se llama topología sobre un conjunto X a $\forall\tau \subset \mathcal{P}(X)$ que verifique:*

(G1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(G2) $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$

(G3) $\forall \{A_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}$

Observación. *Al par $\big(X, \mathcal{T}\big)$ se denomina espacio topológico y los elementos de X son puntos del espacio topológico.*

Ejemplo. (I) *Sea X un conjunto, entonces $\mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_D$ es una topología y se llama topología discreta.*

(II) *La colección $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ es también una topología y la llamamos topología trivial.*

(III) *Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{T}_d = \{U \subset X : \forall x \in U, \epsilon > 0 : B_\epsilon \subset U\}$ es una topología y la llamamos topología inducida por la métrica d.*

Observación. *Toda métrica induce un espacio topológico pero no todo espacio topológico es inducido por una métrica.*

Definición 1.2 (Espacio Metrizable). *Sea $\big(X, \mathcal{T}\big)$ e.t., decimos que es un espacio matizable si d métrica sobre X tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.*

Definición 1.3 (Conjunto Abierto)**.** *Sea* $\big(x, \mathcal{T}\big)$ *espacio topológico, decimos que* $U \subset X$ *es un conjunto abierto si* $U \in \mathcal{T}$*.*

Observación. *Si* U *es un conjunto abierto, entonces* $X \setminus U$ *es un conjunto cerrado.*

Observación. *Existen conjuntos que son abiertos y cerrados simultáneamente. Y existen conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.*

Ejemplo. *Sea el espacio topológico* $\big(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u\big)$ *entonces* $S = (0, 1])$ *no es ni abierto ni cerrado.*

Ejemplo. *Sea el espacio topológico* $\big(X, \mathcal{T}_d\big)$ *donde* $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ *entonces* $\forall S \subset X$*,* S *es abierto y cerrado simultáneamente.*

Definición 1.4 (Comparación de Topologías)**.** *Sean* $\mathcal{T}$ *y* $\mathcal{T}'$ *dos topologías sobre un conjunto* $X \neq \emptyset$*. Si* $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ *se dice que* $\mathcal{T}'$ *es más fina (más fuerte) que* $\mathcal{T}$*. También podemos decir que* $\mathcal{T}$ *es menos fina que* $\mathcal{T}'$*.*

Notación. *Sea* $\big(X, \mathcal{T}\big)$ *e.t.,* $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} = \{C \subset X : C$ *es cerrado en* $\big(X, \mathcal{T}\big)\}$*.*

Proposición 1.1 (Dualidad conjuntos abiertos y cerrados)**.** *Sea* $\mathcal{F}$ *es la familia de conjuntos cerrados de un espacio topológico* $(X, \mathcal{F})$*.*

(F1) $\emptyset, X$ *son cerrados.*

(F2) $\forall C_1, C_2$ *cerrados* $\Rightarrow C_1 \cup C_2$ *es cerrado.*

(F3) $\forall \{C_j\}_{j \in J}$ *cerrados* $\Rightarrow \bigcap_{j \in J} C_j$ *es cerrado.*

Recíprocamente, si $X \neq \emptyset$*,* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ *y* $\mathcal{F}$ *cumple (i, ii, iii) entonces la colección de los miembros complementarios a* $\mathcal{F}$ *es una topología sobre* X *en donde la familia de cerrados es* $\mathcal{F}$*.*

Observación. *Este resultado muestra la relación entre las nociones de conjuntos abiertos y cerrados. Cualquier resultado sobre conjuntos abiertos en un espacio topológico se convierte en uno sobre cerrados al remplazar* **abierto** *por* **cerrado** *y* $\cup$ *por* $\cap$*.*

Definición 1.5 (Adherencia)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. y $S \subset X$ se llama adherencia de S en $(X, \mathcal{T})$ al conjunto*

$$\overline{S} = \bigcap \{C \subset X : C \text{ es cerrado y } S \subset C\}$$

Observación. *$\overline{S}$ es cerrado, $S \subset \overline{S}$ y $\overline{S}$ es el menor cerrado que contiene a S.*

Lema 1.0.1. *Si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

Demostración. *Como $B \subset \overline{B}$, $A \subset B \Rightarrow A \subset \overline{B}$ y por ser $\overline{B}$ cerrado, se tiene que $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

Proposición 1.2 (Propiedades Adherencia)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. entonces*

(K1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$,

(K2) $\forall S \subset X, S \subset \overline{S}$,

(K3) $\forall S \subset X, \overline{\overline{S}} = S$,

(K4) $\forall A, B \subset X, \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

(K5) $\forall C \subset X$, C es cerrado $\Leftrightarrow C = \overline{C}$.

Demostración. *(iv) Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico. Dado que $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ se tiene que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Por otro lado, $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ y $\overline{B} \subset \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.*

Teorema 1.1. *Sea $X \neq \emptyset$ y $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X) : S \mapsto \varphi(S) \equiv \overline{S}$ tal que φ cumple las 4 propiedades anteriores. Entonces, existe una única topología $\mathcal{F}$ sobre X tal que $\forall S \subset X, \varphi(S)$ es la adherencia de S en $(X, \mathcal{F})$.*

Demostración. *Sea $\mathcal{F} = \{F \subset X : \overline{F} = F\} \subset \mathcal{P}(X)$. Queremos ver que se cumplen las propiedades de Prop.1.1.(i, ii, iii).*

(I) *Por Prop.1.2(i, ii).*

(II) *Por Prop.1.2(iv), sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Entonces, $\overline{F_1 \cup F_2} = \overline{F_1} \cup \overline{F_2} = F_1 \cup F_2 \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.*

(III) *Si $F \subset G$ por Prop.1.2(iv) $\overline{G} = \overline{F} \cup (\overline{G \setminus F}) \Rightarrow \overline{F} \subset \overline{G}$ Ahora, sean $F_j \in \mathcal{F}, \forall j \in J$ Entonces, $\bigcap_{j\in J} F_j \subset F_j, \forall j \in J \Rightarrow \overline{\bigcap_{j\in J} F_j} \subset \overline{F_j}, \forall j \in J$ y por tanto, $\overline{\bigcap_{j\in J} F_j} \subset \bigcap_{j\in J} \overline{F_j} = \bigcap_{j\in J} F_j$ y por Prop.1.2(ii) se tiene que $\overline{\bigcap_{j\in J} F_j} = \bigcap_{j\in J} F_j$, esto es, $\bigcap_{j\in J} F_j \in \mathcal{F}$.*

Por tanto, $\mathcal{F}$ es la familia de cerrados de algún e.t. $(X, \mathcal{T})$. Falta por ver que la adherencia es la operación φ. Dado que $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$ se tiene que $\overline{S} \in \mathcal{F}$ y por Prop.1.2(ii) $S \subset \overline{S}$. Si $C \in \mathcal{F}$ tal que $S \subset C$ entonces $\overline{S} \subset \overline{C} = C \Rightarrow \overline{S}$ es el elemento de $\mathcal{F}$ más pequeño que contiene a S.

Observación. *A la operación anterior se le llama operación de clausura de Kuratowski.*

Definición 1.6 (Interior)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $S \subset X$ se llama interior de S en $(X, \mathcal{T})$ al conjunto*

$$\mathring{S} = \bigcup \{A \subset X \text{ abierto y } A \subset S\}.$$

Observación. *$\mathring{S}$ es abierto de $\mathcal{T}$, $\mathring{S} \subset S$ y es el mayor abierto contenido en S.*

Proposición 1.3 (Propideades interior)**.** *content*

Proposición 1.4. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $S \subset X$. Enotnces:*

(I) *$X \setminus \overline{S} = (X \mathring{\setminus} S)$.*

(II) *$X \setminus \mathring{S} = \overline{X \setminus S}$.*

Observación. *$\overline{S^c} = \mathring{S}^c$.*

Demostración. (I) *$X \setminus \bigcap_{C\in\mathcal{F}:S\subset C} C = \bigcup_{C\in\mathcal{F}:S\subset C} X \setminus C = \bigcup_{G\in\mathcal{T}:G\subset X\setminus S} G = (X \mathring{\setminus} S)$*

(II) *$X \setminus \mathring{S} = X \setminus \bigcup_{G\in\mathcal{T}:G\subset S} G = \bigcap_{G\in\mathcal{T}:G\subset S} (X \setminus G) = \bigcap_{C\in\mathcal{F}:X\setminus S\subset C} C =$*

$\overline{X \setminus S}$

Definición 1.7 (Frontera). *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $S \subset X$. Se llama frontera de S en $(X, \mathcal{T})$ a*

$$Fr(S) = \overline{S} \cap \overline{(X \setminus S)}$$

Observación. $Fr(S)$ *es cerrado*

Observación. $Fr(S) = Fr(X \setminus S)$

Observación. $Fr(S) \not\subset S$

Proposición 1.5. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $S \subset X$. Entonces:*

(I) $\overline{S} = S \cup Fr(S)$

(II) $\mathring{S} = S \setminus Fr(S) = S \setminus \big(Fr(S) \cap S\big)$

(III) $X = \mathring{S} \cup (X \mathring{\setminus} S) \cup Fr(S)$

(IV) $Fr(S) = \overline{S} \setminus \mathring{S}$

Demostración. *(I)*

$$S \cup Fr(S) = S \cup \big(\overline{S} \cap \overline{X \setminus S}\big) =$$

$$= (S \cup \overline{S}) \cap (S \cup \overline{X \setminus S}) = \overline{S}$$

(II)

$$S \setminus Fr(S) = S \setminus (\overline{S} \cap \overline{X \setminus S}) =$$
$$= (S \setminus \overline{S}) \cup (S \setminus \overline{X \setminus S}) = \emptyset \cup (S \cap (X \setminus \overline{X \setminus S})) =$$
$$= (S \cap (X \setminus (X \setminus \mathring{S}))) = (S \cap \mathring{S}) = \mathring{S}$$

(III)

$$X = \mathring{S} \cup (X \setminus \mathring{S}) = \mathring{S} \cup \overline{X \setminus S} =$$
$$= \mathring{S} \cup \big[(X \setminus S) \cup Fr(X \setminus S)\big] =$$
$$= \mathring{S} \cup \big[(X \mathring{\setminus} S) \cup \big(Fr(X \setminus S) \cap (X \setminus S)\big) \cup Fr(X \setminus S)\big] =$$
$$= \mathring{S} \cup (X \mathring{\setminus} S) \cup Fr(X \setminus S) = \mathring{S} \cup (X \mathring{\setminus} S) \cup Fr(S)$$

(IV)
$$Fr(S) = \overline{S} \cap \overline{(X \setminus S)} = \overline{S} \cap (X \setminus \mathring{S})$$

Definición 1.8. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $S \subset X$ se dice que es denso en $(X, \mathcal{T})$ si $\overline{S} = X$*

1.2. Entornos

Definición 1.9. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $x \in X$, $V \subset X$. Se dice que V es un entorno de x en $(X, \mathcal{T})$ si $\exists A \in \mathcal{T} : x \in A \subset V$.*

Definición 1.10. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ es la colección de todos los entornos de x y se llama sistema de entornos de x en $(X, \mathcal{T})$.*

Observación. *Si $(X, \mathcal{T})$ e.t., $x \in X$, $V \subset X$ entonces V es entorno de $x \Leftrightarrow x \in \mathring{V}$.*

Notación. *U^x, V^x entornos de x.*

Proposición 1.6. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $\mathcal{V}(x)$ tiene las siguiente propiedades:*

(N1) $\forall U \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in U$.

(N2) $\forall U, V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{V}(x)$.

(N3) $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $\forall y \in V, U \in \mathcal{V}(y)$.

(N4) $\forall U \in \mathcal{V}(x)$, $\exists V \subset X : U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$.

Demostración. (I) *Trivial, a partir de la definición.*

(II) $x \in \mathring{U}, x \in \mathring{V} \Rightarrow x \in \mathring{U} \cap \mathring{V} \subset U \mathring{\cap} V \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{V}(x)$.

(III) *Sean* $U \in \mathcal{V}(x), V = \mathring{U}$ *como* $x \in \mathring{U} = V \Rightarrow \forall y \in V \in \mathcal{T}$ *y* $V \subset U \Rightarrow U \in \mathcal{V}(y)$.

(IV) $U \in \mathcal{V}(x), U \subset V \Rightarrow x \in \mathring{U} \subset \mathring{V} \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$.

|

Proposición 1.7. *Sea $X \neq \emptyset$, $\forall x \in X : \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{P}(x)$ que cumple (N1, N2, N3, N4) anteriores, entonces $\exists! \mathcal{T}$ sobre $X : \forall x \in X, \mathcal{V}(x)$ es el sistema de entornos de x en $\big(X, \mathcal{T}\big)$.*

Demostración. *Sea $\mathcal{T} = \{G \subset X : \forall x \in G, G \in \mathcal{V}(x)\}$. Vemos que $\mathcal{T}$es una topología:*

(I) *Prop1.6.(N1) $X \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow X \in \mathcal{T}$*

(II) *$\forall G_1, G_2 \in \mathcal{T}, x \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow G_1, G_2 \in \mathcal{V}(x)$, Prop.1.6.(N2) $\Rightarrow$ $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{V}(x)$.*

(III) *$\forall \{G_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{T}, x \in \bigcup_{j\in J} G_j \Rightarrow \exists j_0 \in J : G_{j_0} \in \mathcal{V}(x)$, Prop.1.6.(N4) $\Rightarrow$ $\bigcup_{j\in J} G_j \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \bigcup_{j\in J} G_j \in T$*

$\Rightarrow \mathcal{T}$ es topolgía.
Vemos ahora que S es entorno de $x \Leftrightarrow S \in \mathcal{V}(x)$.

- *$(\Rightarrow)$ S entorno de x en $\big(X, \mathcal{T}\big) \Rightarrow \exists G \in \mathcal{T} : x \in G \subset S \Rightarrow G \in \mathcal{V}(x)$ Prop.1.6.(iv) $\Rightarrow S \in \mathcal{V}(x)$.*
- *$(\Leftarrow)$ $S \in \mathcal{V}(x)$. Sea $U \subset S$ ACABAR*

Falta ver que $\mathcal{T}$ es única.

Definición 1.11 (Base de Entorno)**.** *Sea $x \in X, \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$. Se dice que $\mathcal{B}(x)$ es una base de un entorno de x en $\big(X, \mathcal{T}\big)$ si $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset U$.*

Observación. *De la definición de base queda determinado un entorno como $\mathcal{V}(x) = \{U \subset X : \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset U\}$*

Ejemplo. *$\forall \big(X, \mathcal{T}\big)$ e.t. $\mathcal{V}(x)$ es una base de entornos de x.*

Ejemplo. *Sea $\big(X, \mathcal{T}_{\mathcal{D}}\big), \mathcal{T}_D = \mathcal{P}(x), \forall x \in X$ entonces $\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}$ es base de entornos de x.*

Ejemplo. *Sea $\big(X, \mathcal{T}\big)$ metrizable. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$, d métrica tal que $\forall x \in X, \mathcal{B}(x) = \{B_\epsilon(x) : \epsilon > 0\}$ entonces $\mathcal{B}(x)$ es base de entornos de x.*

Ejemplo. *$\forall \big(X, \mathcal{T}\big)$ e.t., $\mathcal{B}(x) = \{\mathring{U} : U \in \mathcal{V}(x)\}$ es base de entornos de x.*

Ejemplo. *Sea $\big(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u\big) : \forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{B}(x) = \{\big[x - \epsilon, x + \epsilon\big] : \epsilon > 0\}$ entonces $\mathcal{B}(x)$ es base de entornos de x.*

Proposición 1.8 (Propiedades de Bases de Entornos)**.** *Sea $\big(X,\mathcal{T}\big)$ e.t. y $\mathcal{B}(x)$ una base de entornos de x en $\big(X,\mathcal{T}\big)$, $\forall x\in\mathcal{T}$. Entonces:*

(V1) $B\in\mathcal{B}(x)\Rightarrow x\in B.$

(V2) $B_1,B_2\in\mathcal{B}(x)\Rightarrow\exists B_3\in\mathcal{B}(x):B_3\subset B_1\cap B_2.$

(V3) $B_1\in\mathcal{B}(x)\Rightarrow\exists B_2\in\mathcal{B}(x):\forall y\in B_2,\exists B\in\mathcal{B}(y)$ *tal que* $B\subset B_1.$

Demostración. *(V1)* $\mathcal{B}(x)\subset\mathcal{V}(x),B\in\mathcal{B}(x)\Rightarrow x\in B.$

(V2) $B_1,B_2\in\mathcal{B}(x)\Rightarrow B_1\cap B_2\in\mathcal{B}(x)\subset\mathcal{V}(x)\Rightarrow\exists B_3\in\mathcal{B}(x):B_3\subset B_1\cap B_2.$

(V3) $B_1\in\mathcal{B}(x)\subset\mathcal{V}(x)$ *Prop.1.6.(iii)* $\Rightarrow\exists U\in\mathcal{V}(x)$ *tal que* $\forall y\in U,B_1\in\mathcal{B}(y)\Rightarrow\exists B_2\in\mathcal{B}(x):B_2\subset U$ *tal que* $\forall y\in B_2,B_1\in\mathcal{V}(y)\Rightarrow\exists B\in\mathcal{B}(y):B\subset B_1.$

Proposición 1.9. *Sea $X\neq\emptyset,\mathcal{B}:X\mapsto\mathcal{P}(\mathcal{P}(x))$ cumpliendo (i, ii, iii) anteriores, entonces se define una topología en X en la que $\mathcal{B}(x)$ es una base de entornos de $x,\forall x\in X$.*

Demostración. *Sea* $\forall x\in X,$

$$\mathcal{V}(x)=\{U\subset X:\exists B\subset U \text{ para algún } B\in\mathcal{B}(x)\}$$

tal que $\mathcal{B}(x)\subset\mathcal{V}(x)$ tiene las propiedades V1, V2, V3. Veamos que $\mathcal{V}(x)$ tiene las propiedades N1, N2, N3, N4.

(N1) $\forall U\in\mathcal{V}(x),\exists B\subset U:B\in\mathcal{B}(x)\Rightarrow x\in B\subset U\Rightarrow x\in U.$

(N2) $U_1,U_2\in\mathcal{V}(x)\Rightarrow\exists B_1,B_2\in\mathcal{B}(x):B_1\subset U_1,B_2\subset U_2$ *y (V2)* $\Rightarrow\exists B_3\in\mathcal{B}(x):B_3\subset B_1\cap B_2\subset U_1\cap U_2$. *Entonces,* $U_1\cap U_2\in\mathcal{V}(x).$

(N3) $U\in\mathcal{V}(x)\Rightarrow\exists B\subset U:B\in\mathcal{B}(x)$, *(V3)* $\Rightarrow\exists B_0\in\mathcal{B}(x):\forall y\in B_0,\exists B_y\in\mathcal{B}(y):B_y\subset B$. *Entonces* $B\in\mathcal{V}(y),\forall y\in B_0\Rightarrow U\in\mathcal{V}(y),\forall y\in B_0.$

(N4) $U\in\mathcal{V}(x),V\subset X:U\subset V\Rightarrow\exists B\in\mathcal{B}(x):B\subset U\subset V\Rightarrow V\in\mathcal{V}(x).$

Entonces, $\mathcal{V}(x)$ es un sitema de entornos de $x, \forall x \in X$ y $\forall x \in X,\ \mathcal{B}(x)$ es una base de entornos de x en la topología resultante en X.

Definición 1.12 (Bases de Entronos Equivalentes)**.** *Sea $X \neq \emptyset$. Si una topología sobre X está definida por dos bases de entornos, se dice que las bases son equivalentes.*

Proposición 1.10. *Sea $X \neq \emptyset$. Dos bases de entornos de x, $\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)$ de X son equivalentes si y solo si $\forall x \in X, \forall i \in \{1,2\}, \forall B \in \mathcal{B}_i(x), \exists B_j \in \mathcal{B}_i(x) : B_j \subset B_i, \forall j \in \{1,2\}, j \neq i$.*

Proposición 1.11 (Caracterización bases equivalentes)**.** *Sean $\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)$ dos bases de entornos de x en $\big(X, \mathcal{T}\big)$, estas son equivalentes $\Leftrightarrow \forall x \in X, \forall i \in \{1,2\}, \forall B_i \in \mathcal{B}_i(x), \exists B_j \in \mathcal{B}_j(x), j \in \{1,2\}, j \neq i : B_j \subset B_i$.*

Demostración. *($\Rightarrow$)* $\forall i \in \{1,2\}, \forall B_i \in \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists B_j \in \mathcal{B}(x), \forall j \in \{1,2\}, j \neq i$.

($\Leftarrow$)
ACABAR

Definición 1.13. *Sea $\big(X, \mathcal{T}\big)$ e.t. $S \subset X, x \in X$.*

(I) *Se dice que x es un puto interior de S en $\big(X, \mathcal{T}\big)$ si $\exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \subset S$.*

(II) *Se dice que x es un punto adherente de S en $\big(X, \mathcal{T}\big)$ si $\forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset$.*

(III) *Se dice que x es un punto de acumulación si $\forall \mathcal{U}^x$, $\mathcal{U}^x \setminus \{x\} \cap S \neq \emptyset$.*

(IV) *Se dice que x es un punto de frontera si $\forall \mathcal{U}^x$, $\mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset, \mathcal{U}^x \cap (X \setminus S) \neq \emptyset$.*

(V) *Se dice que x es punto aislado si $\exists \mathcal{U}^x$ tal que $\mathcal{U}^x \cap S = \{x\}$.*

Definición 1.14. *El conjunto de puntos de acumulación se llama conjunto derivado y se denota S'.*

Proposición 1.12. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. Entonces,*

(I) $A \subset X$ *es abierto de* $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \subset A$.

(II) $C \subset X$ *es cerrado* $\Leftrightarrow \forall x \notin C, \exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \cap C = \emptyset$.

(III) $S \subset X,\ \mathring{S} = \{x \in X : \exists \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \subset S\}$.

(IV) $S \subset X, \overline{S} = \{x \in X : \forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset\}$.

(V) $S \subset X, Fr(S) = \{x \in X : \forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset, \mathcal{U}^x \cap (X \setminus S) \neq \emptyset\}$.

Demostración. (I) *Es la propiedad V1.*

(II) C *es cerrado* $\Leftrightarrow X \backslash C \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in X \backslash C, \exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \subset X \backslash C \Rightarrow X \backslash C$ *es abierto.*

(III) *Sigue de (iv) aplicando las leyes de De Morgan.*

(IV) $X \backslash \overline{S} = (X \overset{\circ}{\setminus} S) = \{x \in X : \exists \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \subset X \backslash S\}$ *cuyo complementario es* $\overline{S} = \{x \in X : \forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset\}$.

(V) $Fr(S) = \overline{S} \cap \overline{X \setminus S}$

Observación. *En la proposición anterior se pueden usar bases en lugar de sistemas de entornos.*

Corolario 1.1.1. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $S \subset X$ entonces*

(I) $\overline{S} = \{x \in X : x$ *es punto adherente de* $S\}$.

(II) $\mathring{S} = \{x \in X : x$ *es punto interior de* $S\}$.

(III) $Fr(S) = \{x \in X : x$ *es punto frontera de* $S\}$.

Proposición 1.13. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. $E \subset X$. Entonces E es denso en $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, U \cap E \neq \emptyset$.*

Demostración. *(⇒) Suponemos que* E *es denso, es decir,* $\overline{E} = X$*. Entonces,* $\forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$*,* U *es abierto* $\Rightarrow \forall x \in \mathring{U} = U \Rightarrow U$ *es entorno de* x *en* $\big(X, \mathcal{T}\big)$*. Y como* x *es punto adherente de* $E \Rightarrow U \cap F \neq \emptyset$*.*

(⇐) $\forall x \in X, \forall \mathcal{U}^x$ *entorno de* $x \Rightarrow \mathring{\mathcal{U}}^x \subset \mathcal{U}^x \subset X \Rightarrow \mathring{\mathcal{U}}^x \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ *y por la hipótesis* $\mathring{\mathcal{U}}^x \cap E \subset \mathcal{U}^x \cap E \neq \emptyset \Rightarrow x$ *punto adherente de* E*,* $x \in \overline{E} \Rightarrow X \subset \overline{E}$*.*

1.3. Bases

Definición 1.15 (Base)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$*. Se dice que* $\mathcal{B}$ *es base de* $\mathcal{T}$ *si* $\forall A \in \mathcal{T}, \exists \mathcal{B}_A \subset \mathcal{B} : A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_A} B$*. Y se dice que* $\mathcal{T}$ *está engendrada por* $\mathcal{B}$*.*

Observación. $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ *tal que* $\mathcal{T} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}_A} B : \mathcal{B}_A \subset \mathcal{B}\}$*.*

Observación. $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ *es una base de* $X \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{T}, \forall x \in A \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset A$*.*

Ejemplo. *(I)* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u), \mathcal{B} = \{(a, b) : a < b\}$ *es base de* $\mathcal{T}_u$*.*

(II) $(X, \mathcal{T}_u), \mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ *es base de* $\mathcal{T}_u$*.*

(III) $(X, \mathcal{T})$ *metrizble,* $\mathcal{T}_d$ *topología inducida por* d*. Entonces* $\mathcal{B} = \{B : x \in X, \epsilon > 0\}$ *es base de* $\mathcal{T}_d$*.*

Proposición 1.14. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ *entonces,* $\mathcal{B}$ *es base de* $\mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ *es base de entornos de* x *en* $(X, \mathcal{T})$*.*

Observación. *La única diferencia entre bases y bases de entornos es que las bases no tinen por que consister de conjuntos abiertos.*

Demostración. *(⇒) Suponemos que* $\mathcal{B}$ *es base de* X*,* $x \in X$ *y* $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$*. Sea* $U \in \mathcal{B}_x$ *entonces* $U \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T} : x \in U = \mathring{U} \Rightarrow U$ *es un entorno de* x*. Sea* $U \in \mathcal{V}(x)$*, entonces* $x \in \mathring{U} \in \mathcal{T}$ *donde* $\mathcal{T} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} B : \mathcal{B}_U \subset \mathcal{B}\}$*, es decir,* $\mathring{U}$ *es la unión de elementos de* $\mathcal{B}$ *entonces* $\exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset \mathring{U}$*. Por tanto,* $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists B \in \mathcal{B}_x : B \subset U \Rightarrow \mathcal{B}_x$ *es base de entronos de* x*.*

(⇐) Suponesmos que $\mathcal{B}_x$ *es una base de entornos de* x*,* $\forall x \in X$ *y* $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$*. Entonces,* $\forall A \in \mathcal{T}, \forall x \in A, \exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subset A \Rightarrow$

$A = \bigcup\{B_x : x \in A\} \Rightarrow \mathcal{B} \subset A$, *de manera que* $\mathcal{B}$ *es base para* X.

Teorema 1.2. *Sea* $X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. *Entonces,* $\mathcal{B}$ *es base de una topología* $\mathcal{T}$ *en* $X \Leftrightarrow$

(I) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.

(II) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B},\ p \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} : p \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Demostración. (I) ($\Rightarrow$) $\mathcal{T} = \left\{\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \in \mathcal{B}\right\}, X \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists \mathcal{B}_0 \in \mathcal{B} : X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0} B$.

(II) ($\Rightarrow$) *A partir de la definición de base.* ($B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2$).

($\Leftarrow$) *Suponemos que* $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ *donde* $\mathcal{B} = \{K \subset X : K$ *cumple las propiedades (i), (ii)* $\}$. *Sea* $\mathcal{T} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}$. *Entonces,*

(G1) $\emptyset = \bigcup_{B \in \emptyset} B \in \mathcal{T}$ *y* $X \in \mathcal{T}$.

(G2) $\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B\right) \cap \left(\bigcup_{B' \in \mathcal{B}_2} B'\right) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1, B' \in \mathcal{B}_2} B \cap B'$, *por (ii)* $\Rightarrow$ *la intersección de dos elementos de* $\mathcal{B}$ *es una unión de elementos de* $\mathcal{B}$.

(G3) $\{A_j\}_{j \in J} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}_j} B : j \in J\} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$.

Definición 1.16 (Subbase)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.* $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. *Se dice que* $\mathcal{S}$ *es una subbase de* $\mathcal{T}$ *si la familia de todas las interseccióнes finitas de* $\mathcal{S}$ *es una base de* $\mathcal{T}$.

Observación. $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}, \mathcal{B} = \{\bigcap_{S \in \mathcal{S}'} S : \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ *es finito*$\}$ *es base de* $\mathcal{T}$.

Proposición 1.15. *Sea* $X \neq \emptyset, \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. *Entonces,* $\mathcal{S}$ *es una subbase de alguna topolpgía sobre* $X \Leftrightarrow \bigcup_{S \subset \mathcal{S}} S = X$.

Demostración. ($\Rightarrow$) *Sea* $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ *una subbase de* $\mathcal{T} \Rightarrow \{\bigcap_{S \in \mathcal{S}'} S : \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\} = \mathcal{B}$ *es base de* $\mathcal{T} \Rightarrow \forall B \in \mathcal{B}, \exists S_B \in \mathcal{S} : B \subset S_B \Rightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} S_B \subset \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \subset X \Rightarrow \bigcup_{S \in \mathcal{S}} = X$.

($\Leftarrow$) *Sea* $\mathcal{B} = \{\bigcap_{S \in \mathcal{S}'} \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\}$.

(i) $\bigcap_{S\in\mathcal{S}} S = X \Rightarrow \bigcup_{B\in\mathcal{B}} = X$.

(ii) $\left(\bigcap_{S\in\mathcal{S}_1} S\right) \cap \left(\bigcap_{S'\in\mathcal{S}_2} S'\right) \bigcap_{S\in\mathcal{S}_1, S'\in\mathcal{S}_2} (S' \cap S) \subset \mathcal{B}$.

1.4. Subespacios

Definición 1.17 (Subespacio). *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $S \subset X$. Se llama topología relativa a S a*

$$\mathcal{T}|_S = \{A \cap S : A \in \mathcal{T}\}$$

y el par $(S, \mathcal{T}|_S)$ se llama subespacio topológico.

Proposición 1.16 (Propiedades Subespacio). *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $S \subset X$. Entonces,*

(I) $C \subset S, C \in \mathcal{T}|_S \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{T} : A \cap S = C$.

(II) *$C \subset S$, C cerrado en $S, \mathcal{T}|_S \Leftrightarrow \exists F$ cerrado en $(X, \mathcal{T}) : C = F \cap S$.*

(III) *$\forall C \subset S$, $\overline{C}^S = S \cap \overline{C}^X$.*

(IV) *$\forall x \in S, \mathcal{V}^x \subset S$ es un entorno de x en $(S, \mathcal{T}|_S) \Leftrightarrow \exists \mathcal{U}^x$ entorno de x en $(X, \mathcal{T})$ tal que $\mathcal{U}^x \cap S = \mathcal{V}^x$.*

(V) *$\mathcal{B}$ base de $T \Rightarrow \mathcal{B}_S = \{B \cap S : B \in \mathcal{B}\}$ es base de $(S, \mathcal{T}|_S)$.*

Demostración. (I) *Definición de subespacio.*

(II) *Sigue de (i).*

(III) *Sigue de (ii) y la definición de clausura de C como la intersección de todos los conjunto cerrados que contienen E.*

(IV) *Sigue de (i) y la definición de entorno de x como un conjunto que contiene un subconjunto abierto que contiene a x.*

(V) *ACABAR*

Observación. *Sea $S \subset X, C \subset S$ entonces no necesariamente $int(C)_S \neq int(C)_X \cap S$. Por ejemplo, $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u), S = C = \{0\} \times \mathbb{R}$.*

Definición 1.18. *Sea $(\mathcal{P})$ una propiedad de e.t. Se dice que $\mathcal{P}$ es propiedad hereditaria si dado e.t. que cumple $\mathcal{P}$ todos sus subespacios cumplen $\mathcal{P}$.*

1.5. Funciones continuas

Definición 1.19 (Función continua)**.** *Sean $(X,\mathcal{T})$, $(X',\mathcal{T}')$ dos e.t. y $f : X \to X'$ una aplicación. Se dice que $f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ es una aplicación continua en $a \in X$ si $\forall \mathcal{V}^{f(a)}$ entorno de $f(a)$ en $(X',\mathcal{T}')$, $\exists \mathcal{U}^a$ entorno de a en $(X,\mathcal{T}) : f(\mathcal{U}^a) \subset \mathcal{V}^{f(a)}$.*

Observación. *Se dice que f es continua si lo es $\forall a \in X$.*

Teorema 1.3. *Sean $(X,\mathcal{T})$, $(X',\mathcal{T}')$ dos e.t. y $f : X \to X'$ una aplicación. Entonces, son equivalentes:*

(I) $\forall A' \in \mathcal{T}', f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$

(II) $f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *es aplicación continua.*

(III) $\forall C \subset X, f(\overline{C}^X) \subset (\overline{f(C)})^{X'}$.

(IV) $\forall C' \subset X, \overline{f^{-1}(C')}^X \subset f^{-1}(\overline{C'}^{X'})$.

(V) $\forall F'$ *cerrado de* $(X',\mathcal{T}')$, $f^{-1}(F')$ *es cerrado de* $(X,\mathcal{T})$.

Demostración. *($i \Rightarrow ii$) Sea $a \in X$, $\mathcal{V}^{f(a)}$ entorno de $f(a)$ en $(X',\mathcal{T}') \Rightarrow \mathring{\mathcal{V}}^{f(a)}$, $f(a) \in \mathring{\mathcal{V}}^{f(a)}$. Ahora, por (i), tenemos $a \in f^{-1}(\mathring{\mathcal{V}}^{f(a)}) \in \mathcal{T}$. Sea $f^{-1}(\mathcal{V}^{f(a)}) = \mathcal{U}^a$. Entonces, $f(\mathcal{U}^a) = f(f^{-1}(\mathcal{V}^{f(a)})) \subset \mathring{\mathcal{V}}^{f(a)} \subset \mathcal{V}^{f(a)} \Rightarrow f$ es continua.*

($ii \Rightarrow iii$) Sea $C \subset X, a \in \overline{C}^X, \mathcal{V}^{f(a)}$ entorno de $f(a)$ en $(X',\mathcal{T}')$. Entonces, por (ii), $\exists \mathcal{U}^a$ entorno de a en $(X,\mathcal{T})$ tal que $f(\mathcal{U}^a) \subset \mathcal{V}^{f(a)} \Rightarrow \mathcal{U}^a \cap C \neq \emptyset \Rightarrow a \in \mathcal{U}^a \cap C \Rightarrow f(a) \in f(\mathcal{U}^a) \cap f(C) \subset \mathcal{V}^{f(a)} \cap f(C) \Rightarrow f(a) \in \overline{f(C)}^{X'}$.

(iii $\Rightarrow$ iv) $\forall C' \subset X' \Rightarrow f'(C') \subset X'$ y por (iii) $f(\overline{f^{-1}(C')})^X \subset \overline{f(f^{-1}(C'))}^{X'} \subset \overline{C'}^{X'} \Rightarrow \overline{f^{-1}(C')}^X \subset f^{-1}(\overline{C'}^{X'})$.

(iv $\Rightarrow$ v) F' cerrado de $(X',\mathcal{T}') \Rightarrow \overline{f^{-1}(C')}^X \subset f^{-1}(\overline{F'}^{X'}) = f^{-1}(F') \Rightarrow$

$f^{-1}(F')$ *es cerrado en* $(X, \mathcal{T})$.

(v ⇒ i) $A' \in \mathcal{T}' \Rightarrow X' \setminus A'$ *cerrado de* $(X', \mathcal{T}') \Rightarrow f^{-1}(X' \setminus A)$ *cerrado de* $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow X \setminus f^{-1}(X' \setminus A') \in \mathcal{T}$. *Y* $x \notin f^{-1}(X' \setminus A') \Leftrightarrow f(x) \notin X' \setminus A' \Leftrightarrow f(x) \in A' \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A') \Rightarrow X \setminus f^{-1}(X' \setminus A')$.

Observación. $\forall (X, \mathcal{T})$ *e.t. la aplicación* $1_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ *es continua.*

Observación. $\forall (X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t.* $\forall x'_0 \in X'$ *la aplicación constante con* $c_{x'_0} : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *es constante.*

Proposición 1.17. *Sea* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), (X'', \mathcal{T}'')$ *e.t.,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *aplicación continua,* $f' : (X', \mathcal{T}') \to (X'', \mathcal{T}'')$ *aplicación continua. Entonces,* $(f' \circ f) : (X, \mathcal{T}) \to (X'', \mathcal{T}'')$ *es continua.*

Demostración. $\forall A'' \in \mathcal{T}'' \Rightarrow f^{-1}(A'') \in \mathcal{T}' \Rightarrow f^{-1}(f^{-1}(A'')) \in \mathcal{T}$ *y* $(f' \circ f)^{-1}(A'') = f^{-1}(f^{-1}(A''))$.

Proposición 1.18. *Sea* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t.,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$. *Entonces,* $f|_S : (S, \mathcal{T}|_S) \to (X', \mathcal{T}')$ *es aplicación continua.*

Demostración. $\forall A' \in \mathcal{T}', (f|_S)^{-1}(A') = f^{-1}(A') \cap S \in \mathcal{T}|_S$.

Proposición 1.19. *Sea* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t.,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}'), S \subset X$. *Entonces,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (f(X), \mathcal{T}'|_{f(X)})$ *es aplicación continua.*

Demostración. $\forall G' \in \mathcal{T}'|_S \Rightarrow \exists A' \in \mathcal{T}' : G' = A' \cap f(X) \Rightarrow f^{-1}(G') = f^{-1}(A' \cap f(X)) = f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$.

Proposición 1.20. *Sean* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t.,* $f : X \to X'$ *aplicación. Si* F_1, F_2 *son cerrados de* $(X, \mathcal{T})$ *tal que* $X = F_1 \cap F_2$ *y* $f|_{F_i} : (F_i, \mathcal{T}_{F_i}) \to (X', \mathcal{T}')$ *es continua. Entonces,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *es aplicación continua.*

Demostración. *$\forall F'$ cerrado de $(X', \mathcal{T}')$, $f^{-1}(F') = f^{-1}(F') \cap X = f^{-1}(F') \cap (F_1 \cup F_2) = (f^{-1}(F') \cap F_1) \cup (f^{-1}(F') \cap F_2)$ donde $(f^{-1}(F') \cap F_1) = f^{-1}|_{F_1}(F')$ cerrado en F_1 y $(f^{-1}(F') \cap F_2) = f^{-1}|_{F_2}(F')$ cerrado en $F_2 \Rightarrow f^{-1}(F')$ cerrado en $(X, \mathcal{T})$.*

Definición 1.20 (Espacio Homeomorfo)**.** *Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t. $f : X \to X'$ aplicación. Se dice que $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ es homeomorfismo si f es biyectiva y f^{-1} es continua. En este caso, se dice que $(X, \mathcal{T})$ es homeomorfo a $(X', \mathcal{T}')$.*

Observación. *Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : X \to X'$ biyectiva. Entonces, f es homeomorfismo si y solo si $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow f(A) \in \mathcal{T}'$.*

Definición 1.21 (Invariante Topológico)**.** *Sea (P) una propiedad de e.t.. Se dice que (P) es un invariante topológico si para todo e.t. que cumpla (P) todos los e.t. homeomorfos cumplen (P).*

Definición 1.22 (Aplicación Abierta)**.** *Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$. Entonces, f es aplicación abierta si $\forall A \in \mathcal{T}$, $f(A) \in \mathcal{T}'$*

Observación. *Una aplicación es cerrada si $\forall C$ cerrado de $(X, \mathcal{T})$, $f(C)$ cerrado de $(X', \mathcal{T}')$.*

Observación. *No hay ninguna implicación entre aplicación continua, aplicación abiera y aplicación cerrada.*

Proposición 1.21. *Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), f : X \to X'$ aplicaciones biyectivas. Entonces, son equivalentes:*

(I) $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *es homeomorfismo.*

(II) $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *aplicación continua y abierta.*

(III) $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *aplicación continua y cerrada.*

Demostración.

$(i \Rightarrow ii)$ f homeomorfismo $\Rightarrow \exists f^{-1}$ aplicación continua $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, ((f^{-1})^{-1}(A) \in \mathcal{T}'$ donde $((f^{-1})^{-1}(A) = f(A) \Rightarrow f$ aplicación abierta.

(ii ⇒ i) *f abierta y continua* $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, f(A) \in \mathcal{T}'$ *donde* $f(A) = ((f^{-1})^{-1}(A) \Rightarrow$ f^{-1} *aplicación continua.*

(i ⇔ iii) *es análoga.*

1.6. Espacio Producto

Nota. *Queremos construir nuevos espacios topológicos de los ya existentes. Nos gustaria que ocurriera como los subespacios topológicos, si f es una función continua en un espacio topológico, también lo sea en el subespacio.*

Dados X, Y, $X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$. Si consideramos $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ queremos ver que topología debemos usar para que poder trabajar con funciones. Si consideramos la topología $\mathcal{T} \times \mathcal{T}' \subset \mathcal{P}(X \times X!`)$ podemos ver que la unión de conjuntos de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ no pertenece a $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$. Entonces, eligimos la topología producto como la topología genereada por la base $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$,

$$\{W \subset X \times Y : \forall (x,y) \in W, \exists U \times V \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}' : (x,y) \in U \times V \subset W$$

.

Definición 1.23 (Producto Cartesiano)**.** *Sea $\{X_j\}_{j \in J} \neq \emptyset$ familia de conjuntos no vacios. Se llama producto castesiano de $\{X_j\}_{j \in J}$ a*

$$\prod_{j \in J} X_j = \{x : J \to \bigcup_{j \in J} X_j \text{ aplicación } : x_j \in X_j, \forall j \in J\}$$

Observación. $\forall j \in J, p_{j_0} : \prod_{j \in J} X_j \to X_{j_0} : x \mapsto x_{j_0}$ *se llama proyección.*

Observación. *Si $X_j = X, \forall j \in J$ entonces $\prod_{j \in J} X_j = X^J = \{x : J \to X,\ x$ aplicación $\}$.*

Definición 1.24 (Axioma Elección)**.** $\forall \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \neq \emptyset$ *familia de conjuntos no vacios disjuntos dos a dos. Entonces, $\exists A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda : A \cap B_\lambda$ tiene un solo elemento.*

Definición 1.25 (Topología Producto)**.** *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_{j \in J})\}_{j \in J}$ familia de e.t.. Se llama topología producto a la topología sobre $\prod_{j \in J} X_j$ generada por subbase*

$$\mathcal{S} = \{p_j^{-1}(U_j) : U_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J\}$$

Esta topología se denota $\prod_{j\in J}\mathcal{T}_j$

Observación. *El producto de abiertos no es necesseariamente abierto.*

Observación. *La base engendrada por $\mathcal{S}$ es*

$$\mathcal{B}=\Big\{\bigcap_{j\in J}p_j^{-1}(U_j):U_j\in\mathcal{T}_j,F\in\mathcal{P}(J)\Big\}$$

$$=\Big\{\prod_{j\in J}A_j:A_j\in\mathcal{T}_j,\forall j\in J,A_j=X_j:\forall j\in J\setminus F\text{ no es finito }\Big\}.$$

Observación. *Si J es finito, entonces $\mathcal{B}=\big\{\prod_{j\in J}A_j:A_j\in\mathcal{T}_j,\forall j\in J\big\}$.*

Observación. *El producto espacios discretos no es necesseariamente discreto.*

Observación. $\mathcal{B}=\{\prod_{j\in J}B_j:B_j\in\mathcal{T}_j\}$.

Observación. *Si $\mathcal{B}_j$ es base de $(X_j,\mathcal{T}_j)$, entonces $\mathcal{B}=\{\prod_{j\in J}B_j:B_j\in\mathcal{B}_j\}$ es base de $(\prod_{j\in J}X_j,\prod_{j\in J}\mathcal{T}_j)$.*

Proposición 1.22. *Sea $\{(X_j,\mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ familia finita de e.t.. Entonces, $\forall j_0\in J$,*

$$p_{j_0}:(\prod_{j\in J}X_j,\prod_{j\in J}\mathcal{T}_j)\to(X_{j_0},\mathcal{T}_{j_0})$$

es aplicación abierta y continua.

Demostración. $\forall A\in\prod_{j\in J}A_j, A=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}:B_\lambda\in\mathcal{B}$ *donde $\mathcal{B}$ es subbase de $\prod_{j\in J}\mathcal{T}_j$, $B_\lambda=\{\prod_{j\in J}U_{\lambda j}:U_{\lambda j}\in\mathcal{T}_j,U_{\lambda j}=X_j,\forall j\in J\setminus F:F$ finito $\}$. Entonces, $p_{j_0}(A)=p_{j_0}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}p_{j_0}(B_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_{\lambda j}\in\mathcal{T}_j\Rightarrow$ abierto.*

Proposición 1.23. *Sea $\{(X_j,\mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ familia no vacia de e.t.. Entonces, la topología producto es la más débil sobre $\prod_{j\in J}X_j$ que hace continuas a todas las proyecciones.*

Demostración. *Sea $\mathcal{T}$ topología sobre $\prod_{j\in J}X_j$ tal que $p_{j_0}:(\prod_{j\in J}X_j,\mathcal{T})\to(X_{j_0},\mathcal{T}_{j_0})$ es una proyección continua. Entonces, $\forall j_0\in J:U_{j_0}\in\mathcal{T}_{j_0}$ se tiene $p_0^{-1}(U_{j_0})\in\mathcal{T}\Leftrightarrow\mathcal{S}\subset\mathcal{T}$ es subbase de $\prod_{j\in J}\mathcal{T}_j\Rightarrow\prod_{j\in J}\mathcal{T}_j\subset\mathcal{T}$.*

Proposición 1.24 (Propiedad Universal Topología Porducto). *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia* $\neq \emptyset$ *e.t.,* $f : X \to \prod_{j\in J} X_j$ *aplicación. Entonces,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *continua* $\Leftrightarrow$ $(p_j \circ f) : (X, \mathcal{T}) \to (X_j, \mathcal{T}_j)$ *continua.*

Demostración. *(*$\Rightarrow$*) La composición de aplicaciones continuas es continua.*

($\Leftarrow$*)* $\forall j \in J$, $(p_j \circ f)^{-1}(U_j) \in \mathcal{T}, \forall U_j \in \mathcal{T}_j \Rightarrow (p_j \circ f)^{-1}(U_j) = f^{-1}(p_j^{-1}(U_j)) = f^{-1}(S) \in \mathcal{T}, \forall S \in \mathcal{S} = \{p_j^{-1}(U_j) : U_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J\}$. *Entonces,* $(p_j \circ f)^{-1}$ *y* p_j *continuas* $\Rightarrow f$ *continua.*

Proposición 1.25. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia e.t.,* $\sigma : J \to J$ *aplicación biyectiva. Entonces,* $(X_j, \mathcal{T}_j)$ *y* $(X_{\sigma(j)}, \mathcal{T}_{\sigma(j)})$ *son homeomorfos.*

Demostración. *Sea* $\alpha(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \to (\prod_{j\in J} X_{\sigma(j)}, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_{\sigma(j)}) : (x_j)_{j\in J} \mapsto \alpha((x_j)_{j\in J}) = (x_{\sigma(j)})_{j\in J}$, α *es biyectiva.*

(I) $(p_j \circ \alpha) = p_{\sigma(j)}$ *son continuas (Propiedad Universal).*

(II) $(p_j \circ \alpha)^{-1} = p_{\sigma(j)}^{-1}$ *continua* α^{-1} *continua.*

$\Rightarrow$ *homeomorfa.*

Observación. *El producto de homeomorfismos es homeomorfismo.*

Definición 1.26. *Sea* (P) *una propiedad de e.t.. Se dice que* (P) *es multiplicativa si para toda familia e.t. cada una cumpliendo* (P)*, su producto topológico cumple* (P)*.*

Proposición 1.26. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia* $\neq$ *de e.t.,* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $\forall j \in J, f_j : X \to X_j$ *aplicación. Entonces,* $(f_j)_{j\in J} : (X, \mathcal{T}) \to (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) : x \mapsto (f_j)_{j\in J}(x) = (f_j(x))_{j\in J}$ *es continua* $\Leftrightarrow f_j : (X, \mathcal{T}) \to (X_j, \mathcal{T}_j)$ *es continua* $\forall j \in J$.

Demostración. $\forall j_0 \in J, (p_{j_0} \circ (f_j)_{j\in J}) = f_{j_0}$

($\Rightarrow$) composición de aplicaciones continuas es continua.

($\Leftarrow$) por la propiedad universal de la topología producto.

Observación. *El producto de funciones continuas es una función continua.*

Proposición 1.27. *Sean* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$, $\{(X'_j, \mathcal{T}'_j)\}_{j\in J}, \forall j \in J$, $f_j : X_j \to X'_j$ *aplicación continua. Entonces,* $\prod_{j\in J} f_j : (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \to (\prod_{j\in J} X'_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}'_j) : (x_j)_{j\in J} \mapsto (\prod_{j\in J} f_j)((x_j)_{j\in J}) = (f_j(x_j))$ *aplicación continua.*

VER DIBUJO(Revisar abierta o continua)

Demostración. $\forall j_0 \in J, (p'_{j_0} \circ (\prod_{j\in J} f_j)) = (f_{j_0} \circ p_{j_0})$.

($\Rightarrow$) Propiedad Universal de Topología Porducto.

($\Leftarrow$) $\forall G'_{j_0} \in \mathcal{T}'_{j_0}$ *como* $\prod_{j\in J} f_j$ *continua, entonces* $(p_{j_0} \circ (\prod f_j))^{-1}(G_{j_0}) \in \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j$ *es abierto y donde* $(p_{j_0} \circ (\prod f_j))^{-1}(G_{j_0}) = (f_{j_0} \circ p_{j_0})^{-1}(G'_{j_0}) = p_{j_0}^{-1}(f_{j_0}^{-1}(G_{j_0}))$. *Por ser* p_{j_0} *aplicación abierta y suprayectiva* $p_{j_0}(p_{j_0}^{-1}(f_{j_0}^{-1}(G_{j_0}))) = f_{j_0}^{-1}((G'_{j_0})) \in \mathcal{T}_{j_0}$.

1.7. Espacio Cociente

Nota. *La topología cociente es una construcción que formaliza la idea de "pegar". Decimos que* $\mathcal{R}$ *es una relación de equivalencia en un conjunto* X *si es reflexiva, simétrica y transitiva. Una relación* $\mathcal{R}$ *en* X *parte* X *en clases de eqivalencia, denotadas* $[x], \forall x \in X$.

La idea principal es, dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ *queremos describir como se pegan las cosas juntas en* $(X, \mathcal{T})$ *mediante la definición de una relación de equivalencia. Dos puntos* x_1, x_2 *están relacionados si* $x_1 \mathcal{R} x_2$, *se podría decir que* x_1, x_2 *se pegan entre si. Entonces, definimos una topología en el conjunto de clases de equivalencia* $X/\mathcal{R}$ *que conserve la topología en* X *para aquellos puntos que no están relacionados y que "pegueçorrectamente.*

Definición 1.27 (Topología Cociente)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $Y \neq \emptyset, f : X \to$

Y. Se llama topología cociente inducida por f a $\mathcal{T}_f = \{G \subset Y : f^{-1}(G) \in \mathcal{T}\}$. El par $(X, \mathcal{T}_f)$ se llama espacio topológico cociente inducido por f.

Definición 1.28 (Identificación)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : X \to X'$ suprayectiva. Se dice que $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ es identificación si $\mathcal{T}'$ es topología cociente inducida por f.*

Observación. *f es continua.*

Proposición 1.28. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $Y \neq \emptyset$, $f : X \to Y$ aplicación continua. La topología cociente inducida por f es la más fina de las topologías sobre Y que hacen continuas a f.*

Demostración. *Sea $\mathcal{S}$ topología sobre Y tal que $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ es continua. Entonces, $\forall A \in \mathcal{S}, f^{-1}(A) \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{S}, A \in \mathcal{T}_f \Leftrightarrow \mathcal{S} \subset \mathcal{T}_f$.*

Proposición 1.29 (Propiedad Universal Topología Cociente)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $(Z, \mathcal{S})$ e.t., $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ aplicaciones. Entonces, $g : (Y, \mathcal{T}_f) \to (Z, \mathcal{S})$ es continua $\Leftrightarrow$ $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_f)$ es continua.*

Demostración. *($\Rightarrow$) Trivial.*

($\Leftarrow$) $\forall A \in \mathcal{S}, (g \circ f)^{-1}(A) \in \mathcal{T} \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{S}, g^{-1}(A) \in \mathcal{T}_f \Rightarrow g$ continua.

Proposición 1.30. *Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$, e.t., $f : X \to X'$ aplicación. Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ suprayectiva, continua y abierta (resp. cerrada). Entonces, $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ es identificación.*

Demostración. *$\mathcal{T}_f$ es la topología más fina que hace continua a $f \Rightarrow \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}_f$. Sea $\forall A \in \mathcal{T}_f \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ con f abierta $\Rightarrow f(f^{-1}(A)) = A \in \mathcal{T}'$ abierto $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}_f, A \in \mathcal{T}' \Rightarrow \mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}'$. Entonces, $\mathcal{T}_f = \mathcal{T}'$.*

Observación. *Las identificaciones no son necesariamente abierta o cerradas.*

Definición 1.29. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $\mathcal{R}$ *relación de equivalencia en* X*,* $p : X \to X/\mathcal{R}$ *proyección canónica. Se llama e.t. cociente de* $(X, \mathcal{T})$ *respecto a* $\mathcal{R}$ *a* $(X/\mathcal{R}, \mathcal{T}/\mathcal{R})$ *donde* $\mathcal{T}/\mathcal{R}$ *es topología cociente inducida por* p*.*

Proposición 1.31. *Sean* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), (X'', \mathcal{T}'')$ *e.t.,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *identificación,* $f' : (X', \mathcal{T}') \to (X'', \mathcal{T}'')$ *identificación. Entonces,* $(f' \circ f)$ *es identificación.*

REVISAR DEM

Demostración. *Sea* $(f' \circ f) : X \to X''$ *suprayectiva. Entonces,* $A'' \in \mathcal{T}'', (f'$ *identficación* $\Rightarrow \mathcal{T}'' = \mathcal{T}_f) \Leftrightarrow f'^{-1}(A'') \in \mathcal{T}' \Leftrightarrow (\mathcal{T}' = \mathcal{T}_f) f^{-1}(f'^{-1}(A'')) = (f' \circ f)^{-1}(A'') \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T}'' = \mathcal{T}_{(f' \circ f)}$

Proposición 1.32. *Sean* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t.,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *identificación. Entonces,*

(I) $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *es abierta* $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{T}, f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{T}$*.*

(II) $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *cerrada* $\Leftrightarrow \forall C$ *cerrado* $(X, \mathcal{T})$*,* $f^{-1}(f(C))$ *cerrado de* $(X, \mathcal{T})$*.*

Demostración.

(1) ($\Rightarrow$*)* $\forall A \in \mathcal{T} \Rightarrow f(A) \in \mathcal{T}' \Rightarrow f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{T}$*.*

($\Leftarrow$*)* $\forall \in \mathcal{T}, f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{T}, f$ *identificación* $\Rightarrow f(f^{-1}(f(A))) = f(A) \in \mathcal{T}_f = \mathcal{T}' \Rightarrow f$ *aplicación abierta.*

Proposición 1.33. *Sea* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), (X'', \mathcal{T}''), (X''', \mathcal{T}''')$*,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *identificación,* $f' : (X'', \mathcal{T}'') \to (X''', \mathcal{T}''')$ *identificación,* $g : X \to X''$ *aplicación tal que* $\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (f' \circ g)(x_1) = (f' \circ g)(x_2)$*. Entonces,*

(I) $\exists \overline{g} : X' \to X'''$ *aplicación tal que* $(\overline{g} \circ f) = (f' \circ g)$

(II) Si $g : (X, \mathcal{T}) \to (X'', \mathcal{T}'')$ *continua* $\Rightarrow \overline{g}$ *continua.*

REVISAR

Demostración.

(I) $\overline{g} : X' \to X''' : x' \mapsto \overline{g}(x'_0) = f'(g(x)),\ \forall x \in f^{-1}(X') \Rightarrow f(x) = x' \Rightarrow \overline{g}(f(x)) = (f' \circ \overline{g})(x),\ \forall x \in X \Leftrightarrow (\overline{g} \circ f) = (f' \circ g)$.

(II) $(\overline{g} \circ f) = (f' \circ g)$, ($g$ *continua* $\Rightarrow (f' \circ g)$ *continua*). *Entonces, (Propiedad Universal Topología Cociente)* $\Rightarrow \overline{g}$ *continua.*

Proposición 1.34. *Sea* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *e.t.,* $f : X \to X'$ *aplicación suprayectiva,* R_f *relación de equivalencia tal que* $x_1, x_2 \in X, x_1 R_f x_2 \Leftrightarrow$ *(def.)*$f(x_1) = f(x_2)$. *Entonces,* $\exists \alpha : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *homeomorfa tal que* $(\alpha \circ f) = p \Leftrightarrow f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *es identificación.*

Demostración. *(⇒)* $(\alpha \circ f) = p \Rightarrow f = (\alpha^{-1} \circ p) \Rightarrow f$ *identificación.*

(⇐) Sea $\alpha : X \to X'/\mathcal{R}_f : x \mapsto \alpha(x') = [x] : x \in f^{-1}(X')$. *Esta bien definida ya que, si* $x_1, x_2 \in f^{-1}(x) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \mathcal{R}_f \Leftrightarrow [x_1] = [x_2]$. *Sea* $\varphi : X/\mathcal{R}_f \to X'/\mathcal{R}_f : [x] \mapsto \varphi/[x] = f(x)$. *Está bien definida ya que, si* $[x_1] = [x_2] \Leftrightarrow x_1 \mathcal{R} x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. *Entonces,* $(\varphi \circ \alpha = 1_{X'}, \alpha \circ \varphi = 1_{\mathcal{R}_f}) \Rightarrow \alpha$ *inyectiva y* $\alpha^{-1} = \varphi$. *Por tanto,* $\alpha(f(f(x)) = \alpha(x') = [x]p(x), \forall x \in X \Rightarrow \alpha \circ f = p$ *continua* $\Rightarrow \alpha$ *continua.*

1.8. Espacio Suma

Definición 1.30 (Topología Suma)**.** *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$*, familia* $\neq \emptyset$ *de e.t.,*

$$\sum_{j \in J} X_j = \bigcup_{j \in J} X_j \times \{j\}$$

su unión disjunta. Se llama topología suma a

$$\sum_{j \in J} \mathcal{T}_k = \left\{ G \subset \sum_{j \in J} X_k : j_k^{-1}(G) \in \mathcal{T}_k, \forall k \in J \right\}$$

El par $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ *se llama espacio topológico suma.*

Observación. $\forall k_0 \in J$, $j_{k_0} : (X_{k_0}, \mathcal{T}_{k_0}) \to (X_{k_0} \times \{k_0\}, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k/(X_{k_0} \times \{k_0\}) : x \mapsto (x, k_0)$ *es homomorfismo* $j_{k_0}^{-1}(x, k_0) = x = p_1(x, k_0)$

Observación. $\forall c \subset \sum_{k\in J} X_k, j_{k_0}^{-1}(c) = p(C \cap (X_{k_0} \times \{k_0\}))$.

Proposición 1.35. *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ familia $\neq \emptyset$ e.t.. Entonces, la topología suma es la más fina de las topologías sobre $\sum_{k\in J} X_k$ que hacen continua todas las inclusiones.*

Demostración. *Sea $\mathcal{T}$ topología sobre $\sum_{j\in J} X_k$ tal que*

$$\forall k_0 \in J, j_{k_0}(X_{k_0}, \mathcal{T}_{k_0}) \hookrightarrow (\sum_{k\in J} X_k, \mathcal{T})$$

$k_0 \in J, \forall A \in \mathcal{T}, j_0^{-1}(A) \in \mathcal{T}_{k_0} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, A \in \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k \Rightarrow \mathcal{T} \subset \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k$.

Proposición 1.36 (Propiedad Universal Universal Topología Suma)**.** *Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$, $(X, \mathcal{T})$ e.t., $f : (\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k) \to (X, \mathcal{T})$ aplicación continua $\Leftrightarrow \forall k_0 \in J, f \circ j_{k_0} : (X_{k_0}, \mathcal{T}_{k_0}) \to (X, \mathcal{T})$ es continua.*

Demostración. *($\Rightarrow$) Trivial*

($\Leftarrow$) $\forall k_0 \in J, f \circ j_{k_0}$ continua $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, \forall k_0 \in J, (f \circ j_k)^{-1}(A) = j_{k_0}^{-1}(f^{-1}(A)) \in \mathcal{T}_{k_0} \Rightarrow f^{-1}(A) \in \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k \Rightarrow f$ continua.

Definición 1.31. *Sea (P) propiedad de e.t.. Se dice que es aditiva si para toda familia de e.t. cada uno cumpliendo (P), la suma cumple (P).*

Capítulo 2

Propiedades de Separación

Definición 2.1. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Se dice que es* T_0 *si* $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x : y \notin \mathcal{U}^x$ *ó* $\exists \mathcal{U}^y : x \notin \mathcal{U}^y$.

Ejemplo. *Sea* $\mathcal{R}$ *una relación en* X *tal que* $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. *Entonces,* $\mathcal{R}$ *es una relación de equivalencia en* X *y el espacio cociente resultante* $(X/R, \mathcal{T}/R)$ *es* T_0.

Observación. *Los subespacios o espacios productos genereados a partir de espacios* T_0 *son también* T_0*, pero los espacios cocientes no lo son necesariamente.*

Definición 2.2. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Se dice que es* T_1 *si* $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x : y \notin \mathcal{U}^x, \exists \mathcal{U}^y : x \notin \mathcal{U}^y$.

Observación. $(X, \mathcal{T})$ *es* T_1 *si y solo si* $\forall x, y \in X : x \neq y$ *existe un entorno de cada uno que no contiene al otro.*

Observación. $T_1 \Rightarrow T_0$

Observación. $T_0 \not\Rightarrow T_1$*, ej.:* $X = \{a, b\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ *es* T_0*, no* T_1

Proposición 2.1. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. son equivalentes*

(I) $(X, \mathcal{T})$ *es* T_1,

(II) $\forall x \in X, \{x\}$ *es cerrado de* $(X, \mathcal{T})$,

(III) $\forall E \subset X, E = \bigcap_{G \in \mathcal{T} : E \subset G} G$.

Demostración.

($a \Rightarrow b$) *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.* $T_1, x \in X$ *entonces,* $\forall y \neq x, \exists \mathcal{U}^y : \mathcal{U}^y \subset X \setminus \{x\} \Rightarrow X \setminus \{x\} \in \mathcal{T} \Rightarrow \{x\}$ *es cerrado de* $(X, \mathcal{T})$.

(I) $A \subset X \Rightarrow A = \bigcap_{x \in X \setminus A} X \setminus \{x\} \Rightarrow A \subset \bigcap_{G \in \mathcal{T} A \subset G} G \subset \bigcap_{x \in X \setminus E}(X \setminus \{x\}) = A$.

(II) $\forall x, y \in X : x \neq y$, $\{x\} = \bigcap_{G \in \mathcal{T}; \{x\} \subset G} G \Rightarrow \exists \mathcal{G}^x \in \mathcal{T} : y \in \mathcal{G}^x \Rightarrow T_1$.

Definición 2.3. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Se dice que es* T_2 *ó de Hausdorff si* $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x : x \in \mathcal{U}^x, \exists \mathcal{U}^y : y \in \mathcal{U}^y$ *tal que* $\mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y = \emptyset$.

Observación. $T_2 \Rightarrow T_1$.

Proposición 2.2. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Entonces,* $(X, \mathcal{T})$ *es* T_2 *si y solo si* $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ *es cerrado en* $(X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T})$.

Demostración. *Probamos que* $\Delta^c \in \mathcal{T}$.

($\Rightarrow$) $\forall (x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$, $x \neq y \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^y : \mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y = \emptyset \Rightarrow$. *¿*$\mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y$ *entorno de* $(x, y) : \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y \subset (X \times X) \setminus \Delta$*? Si* $\exists (z, z) \in \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y \Rightarrow z \in \mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y = \emptyset$ *es absurdo. Entonces,* $(X \times X) \setminus \Delta \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} \Leftrightarrow \Delta$ *es cerrado de* $(X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$.

($\Leftarrow$) $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow (x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^y : \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y \subset (X \times X) \setminus \Delta \Rightarrow \mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y = \emptyset$. *En caso contrario,* $\exists z \in \mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y \Rightarrow (z, z) \in \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y$ *es absurdo. Entonces,* $(X, \mathcal{T})$ *es* T_2.

Corolario 2.0.1. *Sean* $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ *e.t.,* $(Y, \mathcal{S})$ *es* T_2, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ *aplicación. Entonces,* $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ *es cerrado en* $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{S})$.

Demostración. Y *es* $T_2 \Rightarrow \Delta_Y$ *es cerrado en* $Y \times Y$, f *continua* $\Rightarrow f \times 1_Y : (X, \mathcal{T}) \times (Y, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{S}) \times (Y, \mathcal{S})$ *continua* $\Rightarrow (f \times 1_Y)^{-1}(\Delta_Y) = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = y\}$ *es cerrado.*

Proposición 2.3. *Sean* $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ *e.t.,* $(Y,\mathcal{S})$ *es* T_2*,* $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{S})$ *continua. Entonces,* $E=\{(x_1,x_2)\in X\times X : f(x_1)=f(x_2)\}$ *es cerrado en* $(X\times X,\mathcal{T}\times\mathcal{T})$

Demostración. $\forall(x_1,x_2)\subset(X\times X)\setminus E$, $f(x_1)\neq f(x_2)\Rightarrow\exists\mathcal{V}^{f(x_i)}, i\in\{1,2\}$ *entorno de* x_i*, por ser* Y T_2*. Como* f *es continua* $\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_i)})$ *entorno de* $x_i\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_1)})\times f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_i)})$ *entorono de* (x_1,x_2) *en* $(X\times X,\mathcal{T}\times\mathcal{T})$*. Veamos que* $f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_1)})\times f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_i)})\subset(X\times X)\setminus E$*. Si* $(z_1,z_2)\in E,(z_1,z_2)\in f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_1)})\times f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_2)})\Rightarrow f(z_1)=f(z_2)$ *donde* $f(z_1)\in\mathcal{V}^{f(x_1)}$ *y* $f(z_2)\in\mathcal{V}^{f(x_2)}$ *que es absurdo.*

Proposición 2.4. *Sean* $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ *e.t.,* $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{S})$ *aplicación suparyectiva y abierta. Entonces,* $(Y,\mathcal{S})$ *es* T_2*.*

Demostración. $\forall y_1,y_2\in Y: y_1\neq y_2\Rightarrow$ $(f$ *supra*$)$ $\exists x_i\in X, i\in\{1,2\}: f(x_i)=y_i\Rightarrow(x_1,x_2)\in(X\times X)\setminus E\Rightarrow$ (*hip.*) $\exists\mathcal{U}^{x_i}, i\in\{1,2\}:\mathcal{U}^{x_1}\times\mathcal{U}^{x_2}\subset(X\times X)\setminus E\Rightarrow$ $(f$ *ab.*$)$ $f(\mathcal{U}^{x_i}), i\in\{1,2\}$ *entorno de* y_i*. ¿Son disjuntos? Si* $\exists z\in f(\mathcal{U}^{x_1})\cap f(\mathcal{U}^{x_2})\Rightarrow z=f(t_i): t_i\in\mathcal{U}^{x_i}, i\in\{1,2\}\Rightarrow(t_1,t_2)\in E$ *y* $(t_1,t_2)\in(\mathcal{U}^{x_1}\times\mathcal{U}^{x_2})$ *que es absurdo.*

Proposición 2.5. *Sean* $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ *e.t.,* $(Y,\mathcal{S})$ *es* T_2*,* $f,g:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{S})$ *aplicaciones continuas. Entonces,* $\{x\in X: f(x)=g(x)\}$ *es cerrado en* $(X,\mathcal{T})$*.*

Demostración. *Sea* $f\times g:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{S})\times(Y,\mathcal{S})$ *continua. Entonces,* Y *es* $T_2\Leftrightarrow\Delta_Y$ *es cerrado* $\Rightarrow(f\times g)^{-1}(\Delta_Y)$ *cerrado en* $(X,\mathcal{T})$ *donde* $(f\times g)^{-1}(\Delta_Y)=\{x\in X: f(x)=g(x)\}$*.*

Corolario 2.0.2. *Sean* $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ *e.t.,* $(Y,\mathcal{S})$ *es* T_2*,* $f,g:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{S})$ *aplicación continua. Si* $\exists D$ *denso en* $(X,\mathcal{T})$ *tal que* $f|_D=g|_D\Rightarrow f=g$*.*

Demostración. $f|_D = g|_D \Rightarrow D \subset \{x \in X : f(x) = g(x)\} = \mathcal{C} \Rightarrow \overline{D} \subset \overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$ *donde* $\overline{D} = X \Rightarrow X = \mathcal{C} \Leftrightarrow f = g$.

Observación. T_0, T_1, T_2 *son invariantes topológicos.*

Proposición 2.6. *Todo subespacio de e.t.* T_2 *es* T_2.

Demostración. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ T_2, $E \subset X$. *Entonces,* $\forall x_1, x_2 \in E \subset X$: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists \mathcal{U}^{x_1}, \mathcal{U}^{x_2}$ *entornos de* x_1, x_2 *en* $(X, \mathcal{T})$ *disjuntos* $\Rightarrow \mathcal{U}^{x_1} \cap E, \mathcal{U}^{x_2} \cap E$ *entorno en* $(E, \mathcal{T}|_E)$ *disjuntos.*

Proposición 2.7. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia de e.t.. Entonces,* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *es* $T_2 \Leftrightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$ *es* T_2, $\forall j \in J$.

Demostración. *(⇒)* $\forall j \in J, \forall (a_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} X_j, \{(x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} X_j :$
$x_j = a_j, \forall j \in J \backslash \{0\}\} \subset \prod_{j\in J} X_j$ *es homeomorfo a* $X_{j_0} \times \{(a_j)_{j\in J\backslash 0}\}$ *que es homeomorfoa a* $X_{j_0} \times \prod_{j\in J\backslash\{0\}} \{a_j\}$.

(⇐) Ver despacio

Proposición 2.8. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia de e.t.. Entonces,* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *es* $T_2 \Leftrightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$ *es* T_2, $j \in J$.

Demostración. *(⇒) Sea* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *espacio* T_2. *Entonces,* $\forall j \in J, b_j \in X_j \Rightarrow$ *el subespacio* $\mathcal{S}_j = \{x \in \prod_{j\in J} X_j : x_{j_0} = b_{j_0}, \forall j \neq j_0\}$ *es* T_2 *y es homeomorfo a* X_j *bajo la restricción de* $\mathcal{S}_j$ *a la proyeción* $p_j \Rightarrow X_j$ *es* $T_2, \forall j \in J$.

(⇐) Sea $(X_j, \mathcal{T}_j)$ *e.t.* T_2,
$forall j \in J$. *Entonces,* $\forall x, y \in \prod_{j\in J} X_j : x \neq y \Rightarrow \exists j_0 \in J :$ $x_{j_0} \neq y_{j_0} \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x_{j_0}, \mathcal{U}^y_{j_0}$ *entornos disjuntos de* x_{j_0} *e* y_{j_0} *en* $(X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0}) \Rightarrow$ $p_{j_0^{-1}(\mathcal{U}^x_{j_0})}, p_{j_0^{-1}(\mathcal{U}^y_{j_0})}$ *entornos disjuntos de* x *e* y *en* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \Rightarrow$ $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *es* T_2.

Observación. *El cociente de un e.t.* T_2 *no es necesariamente* T_2.

Definición 2.4 (Espacio Regular). *Sea $(X,\mathcal{T})$ e.t. Diremos que es regular si $\forall C$ cerrado de $(X,\mathcal{T})$, $\forall x \in X : x \notin C, \exists U,V \in \mathcal{T}$ disjuntos tal que $x \in U, C \subset V$. Diremos que es T_3 si es regular y T_0.*

Observación. *Regular y $T_0 \Leftrightarrow$ regular y $T_1 \Leftrightarrow$ regular y T_2.*

Demostración. *($\Rightarrow$) $(X,\mathcal{T})$ regular y $T_0 \Rightarrow \forall x,y \in X : x \neq y$, $\exists \mathcal{U}^x \in \mathcal{T} : y \in \mathcal{U}^x \Rightarrow X \setminus \mathcal{U}^x$ es cerrado $\Rightarrow \exists V_i \in \mathcal{T}, i \in \{1,2\}$ disjuntos tal que $x \in V_1, y \in X \setminus \mathcal{U}^x \subset V_2 \Rightarrow$ es T_2.*

($\Leftarrow$) Trivial.

Observación. *$T_3 \Rightarrow T_2$.*

Observación. *Regular $\not\Rightarrow T_0$.*

Proposición 2.9. *Sea $(X,\mathcal{T})$ e.t.. Entonces, son equivalentes*

(I) $(X,\mathcal{T})$ regular

(II) $\forall x \in X : \forall U \in \mathcal{T} : x \in U, \exists V \in \mathcal{T} : x \in V \subset \overline{V} \subset U$.

(III) $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}$ base de entornos de x cerrados en $(X,\mathcal{T})$.

Demostración.

($i \Rightarrow ii$) $x \in U \in \mathcal{T} \Rightarrow x \notin X \setminus U$ cerrado $\Rightarrow \exists V_i \in \mathcal{T}, i \in \{1,2\} : X \setminus U \subset V_2 \Rightarrow V_1 \subset X \setminus V_2$ cerrado $\Rightarrow \overline{V_1} \subset X \setminus V_2 \Rightarrow x \in V_1 \subset \overline{V_1} X \setminus V_2 \subset U$.

($ii \Rightarrow iii$) $\forall x \in X, \{\overline{V} : V \in \mathcal{T}, x \in V\}$ es base de entornos cerrados $\Rightarrow \forall \mathcal{U}^x, x \in \mathring{\mathcal{U}}^x \Rightarrow \exists V \in \mathcal{T} : x \in V \subset \overline{V} \subset \mathring{\mathcal{U}}^x \subset \mathcal{U}^x$.

($iii \Rightarrow i$) $x \notin C$ cerrado $\Rightarrow x \in X \setminus C \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists V$ entorno cerrado de $x : V \subset X \setminus C \Rightarrow x \in \mathring{V} \in \mathcal{T}$ y $C \subset X \setminus V$ disjuntos.

Observación. *La regularidad (y ser T_3) son invariantes topológicos.*

Proposición 2.10. *Todo subespacio de uno regular (T_3) es regular (T_3).*

Demostración. $(X, \mathcal{T})$ *regular* $E \subset X, \forall C$ *cerrado de* $(E, \mathcal{T}|_E)$, $\forall x \in E$: $x \notin C \Rightarrow \exists F$ *cerrado de* $(X, \mathcal{T})$ *tal que* $C = F \cap E \Rightarrow x \notin F \Rightarrow \exists U, V \in T$ *disjuntos tal que* $x \in U, F \subset V \Rightarrow U \cap E, V \cap E \in \mathcal{T}|_E$ *disjuntos tal que* $x \in U \cap E, C \subset V \cap E$.

Proposición 2.11. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ *familia de e.t.. Entonces* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *es regular* (T_3) $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ *es regular* (T_3).

Demostración. *(⇒) Trivial*

(⇐) $\forall x = (x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} X_j$, $\forall \mathcal{U}^x$ *entorno de* $x \Rightarrow \exists B \subset \mathcal{B}$ *base de* $\prod_{j\in J} \mathcal{T}_j$ *tal que* $x \in B \subset \mathcal{U}^x, B = \bigcap_{k=1}^n p_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$ *donde* $U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}$. *Entonces,* $x \in B \Rightarrow x_{j_k} \in U_{j_k}, \forall k \in \{1, \cdots, n\} \Rightarrow \exists \mathcal{V}^{x_{j_k}}$ *entorno cerrado de* $x_{j_k}, \forall k \in \{1, \cdots, n\}$ *tal que* $\mathcal{V}^{x_{j_k}} \subset U_{j_k} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n p_{j_k}^{-1}(\mathcal{V}^{x_{j_k}}) \subset B \subset \mathcal{U}^x$ *entorno cerrado de* x, *que es la caracterización antrior de regular.*

Proposición 2.12. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ *familia de e.t.. Entonces,* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$ *es regular* $(T_3) \Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ *regular* (T_3).

Demostración. *(⇒)* $\forall j_0 \in J, X_{j_0}$ *es homeomorfo a* $X_{j_0} \times \{j_0\} \subset \sum_{j\in J} X_j$.

(⇐) $\forall x \in \sum_{j\in J} X_j \Rightarrow$ (*por ser unión disjunta*)$\exists! j_0 \in J : x \in X_{j_0} \times \{x_{j_0}\}$ *que es homeomorfo a* X_{j_0}.

Observación. *El coiente e.t.* T_3 *no es necesariamente regular.*

Ejemplo. *pg. 50*

Definición 2.5. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Diremos que* $(X, \mathcal{T})$ *es completamente regular si* $\forall x \in X, \forall C$ *cerrado de* $(X, \mathcal{T})$, $x \notin C, \exists f : (X, \mathcal{T}) \to [0, 1]$ *continua,* $f(x) = 0, f(C) = \{1\}$. *Diremos que es* T_{3a} *si es completamente regular y* T_1

Observación. $(X, \mathcal{T})$ *es completamente regular* $\Leftrightarrow \forall C$ *cerrado,* $\forall x \notin C, \exists g : (X, \mathcal{T}) \to [0, 1]$ *continua tal que* $f(x) = 1, g(C) = \{C\}$.

Observación. *completamente regular ⇒ regular.*

Observación. $T_3 \not\Rightarrow T_{3a}$.

Proposición 2.13. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. metrizable. Entonces, $(X, \mathcal{T})$ es T_{3a}.*

Demostración. *$(X, \mathcal{T})$ es T_2 y $\exists d$ métrica tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Entonces, $\forall C$ cerrado de $\mathcal{T}$, $\forall x \in X : x \notin C \Rightarrow d(x, C) > 0$. Sea $g : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R} : z \mapsto g(z) = \frac{d(z,C)}{d(x,C)} \Rightarrow g$ es continua y*

$$g = \begin{cases} 1, & \textit{si } z = x, \\ \{0\} & \textit{si z = C} \end{cases}$$

la imagen de g es un subconjunto de las semirectas derechas. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to [0, 1] : z \mapsto f(z) = \min\{g(z), 1\}$ entonces,

$$f = \begin{cases} 1, & \textit{si } z = x, \\ \{0\} & \textit{si } z = C \end{cases}$$

$\Rightarrow (X, \mathcal{T})$ es $\mathcal{T}_{3a}$.

Observación. *Ser completamente regular (T_{3a}) es un invariante topológico.*

Proposición 2.14. *Todo subespacio de un espacio completamente regular (T_{3a}) es completamente regular (T_{3a}).*

Demostración. *Sea $(X, \mathcal{T})$ completamente regular, $E \subset X$, $E \neq \emptyset$. Entonces, $\forall C$ cerrado de $(E, \mathcal{T}|_E)$, $\forall x \in E : x \notin C \Rightarrow \exists F \neq \emptyset$ cerrado de $(X, \mathcal{T}) : C = F \cap E \Rightarrow f : (X, \mathcal{T}) \to [0, 1]$ tal que*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{si } x \in X, \\ \{1\} & \textit{si } x = F \end{cases}$$

$\Rightarrow f|_E : (E, \mathcal{T}|_E) \to [0, 1]$ es continua tal que

$$f|_E = \begin{cases} 0, & \textit{si } x \in X, \\ \{1\} & \textit{si } x = C \end{cases}$$

$\Rightarrow$ completamente regular.

Proposición 2.15. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia de e.t.. Entonces,* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$ *es completamente regular* (T_{3a}) *si y solo si* $(X_j, \mathcal{T}_j)$ *es completamente regular* $(T_{3a}), \forall j \in J$.

Demostración. *(⇒) Trivial.*

(⇐) $\forall C$ *cerrado de* $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j)$, $\forall x = (x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} x_j \setminus C \in \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$ *base de* $\prod_{j\in J} \mathcal{T}_j$ *tal que* $x \in B \subset \prod_{j\in J} X_j \setminus C, B = \bigcap_{k=1}^{\infty} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k}), U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}, \forall k \in \{1, \cdots, n\}$. *(hip.)* $\Rightarrow \forall k \in \{1, \cdots, n\}, \exists f_k : (X_{j_k}, \mathcal{T}_{j_k}) \to [0,1]$ *continua* $\Rightarrow f_k(x_{j_k}) = 0, f_k(X_{j_k} \setminus U_{j_k}) = \{1\}$. *Sea* $f : (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \to [0,1]$ *tal que* $\forall z \in \prod_{j\in J} X_j, f(z) := \max\{\}$ *es continua dado que el máximo de funciones continuas es continuo* $\Rightarrow f(x) = 0$ *y si* $\forall z \in C \Rightarrow \in B \Rightarrow_o \in \{1, \cdots, n\} : z_{j_{k_0}} \notin U_{j_{k_0}} \Rightarrow f_{k_0}(z_{j_{k_0}}) = 1 \Rightarrow f(z) = 1 \Rightarrow f(C) = \{1\}$.

Proposición 2.16. *Sea* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$ *familia de e.t.. Entonces,* $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} \mathcal{T}_k)$ *es completamente regular* (T_{3a}) *si y solo si* $(X_j, \mathcal{T}_j)$ *es completamente regular* $(T_{3a}), \forall j \in J$.

Demostración. *pág. 54*

Observación. *El cociente de e.t. es* T_{3a} *no es completamente regular.*

Definición 2.6. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Decimos que es normal si* $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos* $\exists G_i, i \in \{1,2\}$ *abiertos disjuntos tal que* $C_i \subset G_i$. *Decimos que es* T_4 *si es normal y* T_1.

Proposición 2.17. *Todo e.t. metrizable es* T_4.

Demostración. $(X, \mathcal{T})$ *e.t. metrizable* $\Rightarrow \exists d$ *métrica de* $(X, \mathcal{T})$ *tal que* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d \Rightarrow \mathcal{T}$ *es* T_2. *Entonces,* $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos de* $(X, \mathcal{T})$ *se pueden dar dos caos*

- *Si* $C_1 = \emptyset$, *sea* $G_1 = \emptyset, G_2 = X$. *Entonces,* $(X, \mathcal{T})$ *es* T_4.
- *Si* $C_1, C_2 \neq \emptyset \Rightarrow \forall x \in C_1, \exists \epsilon_x > 0 : B_{\epsilon_x}(x) \cap C_2 = \emptyset$ *y* $\forall y \in C_2, \exists \delta_y : B_{\delta_y}(y) \cap C_1 = \emptyset \Rightarrow C_1 \subset \bigcup_{x\in C_1} B_{\epsilon_{\frac{x}{3}}}(x) := G_1 \in \mathcal{T}$ *y*

$C_1 \subset \bigcup_{x \in C_2} B_{\delta_{\frac{y}{3}}}(y) := G_2 \in \mathcal{T}$. *En caso contrario,* $\exists z \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow \exists x_0 \in C_1 : z \in B_{\epsilon_{\frac{x_0}{3}}}(x_0)$ *y* $\exists y_0 \in C_1 : z \in B_{\delta_{\frac{y_0}{3}}}(y_0)$. *Suponemos que* $\delta_{y_0} \leq \epsilon_{x_0}$, *entonces* $d(x_0, y_0) \leq d(x_0, z) + d(z, y_0) <= \frac{\epsilon_{x_0}}{3} + \frac{\delta_{y_0}}{3} \leq \frac{2}{3}\epsilon_{x_0} \Rightarrow y_0 \in B_{\epsilon_{x_0}}, y_0 \in C_2$ *absurdo.*

Proposición 2.18. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Entonces, son equivalentes*

(I) $(X, \mathcal{T})$ *es normal.*

(II) $\forall C$ *cerrado,* $\forall U \in \mathcal{T} : C \subset U, \exists V \in \mathcal{T} : C \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

(III) $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos,* $\exists G_1 \in \mathcal{T} : C_1 \subset G_1 : \overline{G_1} \cap C_2 = \emptyset$.

(IV) $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos* $\exists G_i \in \mathcal{T} : \overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \emptyset$ *y* $C_i \subset G_i, i \in \{1, 2\}$

Demostración.

$(a \Rightarrow b)$ *Sea* $C \subset U \in \mathcal{T} : C$ *y* $X \setminus U$ *son cerrados disjuntos. Entonces,* $(X, \mathcal{T})$ *normal* $\Rightarrow \exists V_i, i \in \{1, 2\}$ *disjuntos tal que* $C \subset V_1$ *y* $X \setminus U \subset V_2$ *disjuntos* $\Rightarrow V_1 \subset X \setminus V_2 \Rightarrow \overline{V_1} \subset X \setminus V_2$ *cerrado* $\Rightarrow C \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset X \setminus V_2 \subset U$.

$(b \Rightarrow c)$ C_1, C_2 *cerrados disjuntos* $\Rightarrow C_1 \subset X \setminus C_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists G_1 \in \mathcal{T} : C_1 \subset G_1 \subset \overline{G_1} \subset X \setminus G_2 \Rightarrow \overline{G_1} \cap C_2 = \emptyset$.

$(c \Rightarrow d)$ $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos* $\Rightarrow \exists G_1 \in \mathcal{T} : C_1 \subset G_1, \overline{G_1} \cap C_2 = \emptyset$ *y* $\exists G_2 \in \mathcal{T} : C_2 \subset G_2 : \overline{G_2} \cap \overline{C_2} = \emptyset$.

$(d \Rightarrow a)$ $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos* $\exists G_1, G_2 \in \mathcal{T} : \overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \emptyset$, $C_1 \subset G_1, C_2 \subset G_2$ *donde* $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \emptyset \Rightarrow G_1 \cap G_2 = \emptyset \Rightarrow$ *normal.*

Lema 2.0.1 (Jones)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Si* $\exists D$ *denso en* $(X, \mathcal{T})$, E *cerrado en* $(X, \mathcal{T})$ *tal que* $(E, \mathcal{T}|_E)$ *es discreto y* $\mathrm{card}(E) \geq 2^{\mathrm{card}(D)}$. *Entonces,* $(X, \mathcal{T})$ *no es normal.*

Demostración. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *normal,* $\forall C \subset E, C$ *y* E *son disjuntos y cerrados en* $(E, \mathcal{T}|_E)$ *y en* $(X, \mathcal{T})$ *que es normal. Entonces,* $\exists U_C, V_C \in \mathcal{T} : C \subset U_C, E \setminus C \subset V_C$. *Ahora, sea* $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(D) : c \mapsto f(c) = U_C \cap D$ *aplicación. Veamos que* f *es inyectiva,* $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{P}(E) : C_1 \neq C_2 \Rightarrow \exists x \in$

$C_1 : x \notin C_2 \Rightarrow C_i \subset U_{C_i}, E \setminus C_i \subset V_{C_i}, i \in \{1,2\} \Rightarrow x \in U_{C_1} \cap V_{C_2} \in \mathcal{T} \Rightarrow$ (D *denso*)$y \in U_{C_1} \cap V_{C_2} \cap D \neq \emptyset \Rightarrow$

$$\begin{cases} y \in U_{C_1} \cap D = f(C_1) \\ y \notin U_{C_2} \cap D = f(C_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(C_1) \neq f(C_2) \Rightarrow \text{card}(E) < \text{card}(\mathcal{P}(E)) \leq \text{card}(\mathcal{P}(D)) = 2^{\text{card}(D)}$$

Proposición 2.19. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. normal* (T_4), $E \subset X$, E *cerrado en* $(X, \mathcal{T})$. *Entonces,* $(E, \mathcal{T}|_E)$ *es normal* (T_4).

Demostración. $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos en* $(E, \mathcal{T}|_E)$. *Entonces,* C_1, C_2 *cerrados disjuntos de* $(X, \mathcal{T})$ *que es normal* $\Rightarrow \exists U_i \in \mathcal{T}$ *disjuntos tal que* $C_i \subset U_i, i \in \{1,2\} \Rightarrow U_i \cap E \in \mathcal{T}|_E$ *disjuntos tal que* $C_i \subset U_i \cap E, i \in \{1,2\}$.

Observación. *El producto de e.t. normales no es necesariamente normal.*

Proposición 2.20. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ *familia de e.t.. Entonces,* $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ *es normal* $(T_4) \Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$ *es normal* (T_4).

Demostración. *(*$\Rightarrow$*)* $\forall j_0 \in J, X_{j_0} \simeq X_{j_0} \times \{j_0\} \subset \sum_{j \in J} X_j$ *es cerrado.*

($\Leftarrow$*)* $\forall C_1, C_2$ *cerrados disjuntos de* $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k) \Rightarrow \forall k \in J, j_k^{-1}(C_1), j_k^{-1}(C_2)$ *cerrados disjuntos de* $(X_k, \mathcal{T}_k)$ *que es normal* $\Rightarrow \forall j \in J, \exists U_{k,1}, U_{k,2} \in \mathcal{T}_k$ *disjuntos tal que* $j_k^{-1}(C_i) \subset U_{k,i} \in \mathcal{T}_k, i \in \{1,2\}$. *Entonces,* $U_1 = \bigcup_{k \in J} U_{k,1} \times \{k\}, \bigcup_{k \in J} U_{k,1} \times \{k\} \in \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k$ *son abiertos disjuntos y* $C_1 \subset U_1, C_2 \subset U_2$.

Proposición 2.21. *Sea* $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ *e.t. tal que* $(X, \mathcal{T})$ *es normal,* $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ *suprayectiva, continua y cerrada. Entonces,* $(Y, \mathcal{S})$ *es normal* (T_4).

Demostración. $\forall C_1, C_2$ *cerrado disjunto* $(Y, \mathcal{T}) \Rightarrow f^{-1}(C_1), f^{-1}(C_2)$ *cerrados disjuntos de* $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow \exists U_i \in \mathcal{T}$ *disjuntos tal que* $f^{-1}(C_i) \subset U_i, i \in \{1,2\} \Rightarrow$ $(f$ *cerrada* $)V_i = Y \setminus f(X \setminus U_i) \in \mathcal{S}, i \in \{1,2\}$

$$\Rightarrow V_1 \cap V_2 = (Y \setminus f(X \setminus U_1)) \cap (Y \setminus f(X \setminus U_2))$$

$$= (Y \setminus (f(X \setminus U_1) \cup f(X \setminus U_2)))$$
$$= Y \setminus f(X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2)$$
$$= Y \setminus f(X \setminus (U_1 \cap U_2))$$
$$Y \setminus f(X) = Y \setminus Y = \emptyset$$

$\Rightarrow$ *disjuntos.*

¿$C_i \subset X \setminus f(X \setminus U_i)$*?* $\forall y \in C_i \Rightarrow f^{-1}(y) \subset f^{-1}(C_i) \subset U_i \Rightarrow X \setminus U_i \subset X \setminus f^{-1}(y) \Rightarrow f(X \setminus U_i) \subset f(X \setminus f^{-1}(y)) \Rightarrow z \in Y \setminus f(X \setminus f^{-1}(y)) \subset Y \setminus f(X \setminus U_i) = V_i \Rightarrow z \notin f(X \setminus f^{-1}(y)) \Rightarrow z = f(x') : x' \in X \setminus f^{-1}(y) \Rightarrow x' \in f^{-1}(y) \Rightarrow f(x') = y \Rightarrow z = y \Rightarrow \forall y \in C_i, y \in V_i$.

Para ver que es T_4*:* $(X, \mathcal{T})$ *es* T_4*,* $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y \Rightarrow$ (T_1) $\{x\}$ *cerrado* $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow$ $(f$ *cerrada* $)$ $f(\{x\})$ *es cerrado en* $(Y, \mathcal{S})$ *y* $f(\{x\}) = \{y\}$.

Lema 2.0.2 (Urysohn)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.. Entonces,* $(X, \mathcal{T})$ *normal* $\Leftrightarrow \forall C_1, C_2$ *cerrado disjunto,* $\exists f : (X, \mathcal{T}) \to [0, 1]$ *continua tal que* $f(C_1) = \{0\}, f(C_2) = \{1\}$.