Topología

Hugo Del Castillo Mola

18 de septiembre de 2022

Índice general

Parte I

Topología General

Capítulo 1

Espacios Topológicos y Funciones Continuas

1.1. Espacios Topológicos

Definición 1.1 (Topología). *Se llama topología sobre un conjunto X a $\forall \tau \subset \mathcal{P}(X)$ que verifique:*

(G1) $\emptyset, X \in \tau$.

(G2) $\forall A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$

(G3) $\forall \{A_j\}_{j \in J} \subset \tau \Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in \tau$

Observación. *Al par $\big(X, \tau\big)$ se denomina espacio topológico y los elementos de X son puntos del espacio topológico.*

Ejemplo. *(I) Sea X un conjunto, entonces $\mathcal{P}(X) = \tau_D$ es una topología y se llama topología discreta.*

(II) La colección $\tau = \{X, \emptyset\}$ es también una topología y la llamamos topología trivial.

(III) Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\tau_d = \{U \subset X : \forall x \in U, \epsilon > 0 : B_\epsilon \subset U\}$ es una topología y la llamamos topología inducida por la métrica d.

Observación. *Toda métrica induce un espacio topológico pero no todo espacio topológico es inducido por una métrica.*

Definición 1.2 (Espacio Metrizable)**.** *Sea (X, τ) e.t., decimos que es un espacio matizable si d métrica sobre X tal que $= \tau_d$.*

Definición 1.3 (Conjunto Abierto)**.** *Sea (x, τ) espacio topológico, decimos que $U \subset X$ es un conjunto abierto si $U \in \tau$.*

Observación. *Si U es un conjunto abierto, entonces $X \setminus U$ es un conjunto cerrado.*

Observación. *Existen conjuntos que son abiertos y cerrados simultáneamente. Y existen conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.*

Ejemplo. *Sea el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_u)$ entonces $S = (0, 1])$ no es ni abierto ni cerrado.*

Ejemplo. *Sea el espacio topológico (X, τ_d) donde $\tau_d = \mathcal{P}(X)$ entonces $\forall S \subset X$, S es abierto y cerrado simultáneamente.*

Definición 1.4 (Comparación de Topologías)**.** *Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías sobre un conjunto $X \neq \emptyset$. Si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ se dice que $\mathcal{T}'$ es más fina (más fuerte) que $\mathcal{T}$. También podemos decir que $\mathcal{T}$ es menos fina que $\mathcal{T}'$.*

Notación. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} = \{C \subset X : C$ es cerrado en $(X, \mathcal{T})\}$.*

Proposición 1.1 (Dualidad conjuntos abiertos y cerrados)**.** *Sea $\mathcal{F}$ es la familia de conjuntos cerrados de un espacio topológico $(X, \mathcal{F})$.*

(F1) $\emptyset, X$ son cerrados.

(F2) $\forall C_1, C_2$ cerrados $\Rightarrow C_1 \cup C_2$ es cerrado.

(F3) $\forall \{C_j\}_{j \in J}$ cerrados $\Rightarrow \bigcap_{j \in J} C_j$ es cerrado.

Recíprocamente, si $X \neq \emptyset$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ y $\mathcal{F}$ cumple (i, ii, iii) entonces la colección de los miembros complementarios a $\mathcal{F}$ es una topología sobre X en donde la familia de cerrados es $\mathcal{F}$.

Observación. *Este resultado muestra la relación entre las nociones de conjuntos abiertos y cerrados. Cualquier resultado sobre conjuntos abiertos en un espacio topológico se convierte en uno sobre cerrados al remplazar* **abierto** *por* **cerrado** *y $\cup$ por $\cap$.*

Definición 1.5 (Adherencia)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. y* $S \subset X$ *se llama adherencia de* S *en* $(X, \mathcal{T})$ *al conjunto*

$$\overline{S} = \bigcap \{C \subset X : C \text{ es cerrado y } S \subset C\}$$

Observación. $\overline{S}$ *es cerrado,* $S \subset \overline{S}$ *y* $\overline{S}$ *es el menor cerrado que contiene a* S.

Lema 1.0.1. *Si* $A \subset B$*, entonces* $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Demostración. *Como* $B \subset \overline{B}$, $A \subset B \Rightarrow A \subset \overline{B}$ *y por ser* $\overline{B}$ *cerrado, se tiene que* $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Proposición 1.2 (Propiedades Adherencia)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. entonces*

(K1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$,

(K2) $\forall S \subset X, S \subset \overline{S}$,

(K3) $\forall S \subset X, \overline{\overline{S}} = S$,

(K4) $\forall A, B \subset X, \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

(K5) $\forall C \subset X$, C *es cerrado* $\Leftrightarrow C = \overline{C}$.

Demostración. *(iv) Sea* $(X, \mathcal{T})$ *espacio topológico. Dado que* $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ *se tiene que* $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$*. Por otro lado,* $A \subset A \cup B$ *y* $B \subset A \cup B$ *entonces* $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ *y* $\overline{B} \subset \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Teorema 1.1. *Sea* $X \neq \emptyset$ *y* $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X) : S \mapsto \varphi(S) \equiv \overline{S}$ *tal que* φ *cumple las 4 propiedades anteriores. Entonces, existe una única topología* $\mathcal{F}$ *sobre* X *tal que* $\forall S \subset X, (S)$ *es la adherencia de* S *en* $(X, \mathcal{F})$.

Demostración. *Sea* $\mathcal{F} = \{F \subset X : \overline{F} = F\} \subset \mathcal{P}(X)$*. Queremos ver que se cumplen las propiedades de Prop.1.1.(i, ii, iii).*

(I) *Por Prop.1.2(i, ii).*

(II) *Por Prop.1.2(iv), sean* $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$*. Entonces,* $\overline{F_1 \cup F_2} = \overline{F_1} \cup \overline{F_2} = F_1 \cup F_2 \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$*.*

(III) *Si* $F \subset G$ *por Prop.1.2(iv)* $\overline{G} = \overline{F} \cup (\overline{G \setminus F}) \Rightarrow \overline{F} \subset \overline{G}$ *Ahora, sean* $F_j \in \mathcal{F}, \forall j \in J$ *Entonces,* $\bigcap_{j\in J} F_j \subset F_j, \forall j \in J \Rightarrow \overline{\bigcap_{j\in J} F_j} \subset \overline{F_j}, \forall j \in J$ *y por tanto,* $\overline{\bigcap_{j\in J} F_j} \subset \bigcap_{j\in J} \overline{F_j} = \bigcap_{j\in J} F_j$ *y por Prop.1.2(ii) se tiene que* $\overline{\bigcap_{j\in J} F_j} = \bigcap_{j\in J} F_j$*, esto es,* $\bigcap_{j\in J} F_j \in \mathcal{F}$*.*

Por tanto, $\mathcal{F}$ *es la familia de cerrados de algún e.t.* $(X, \mathcal{T})$*. Falta por ver que la adherencia es la operación* φ*. Dado que* $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$ *se tiene que* $\overline{S} \in \mathcal{F}$ *y por Prop.1.2(ii)* $S \subset \overline{S}$*. Si* $C \in \mathcal{F}$ *tal que* $S \subset C$ *entonces* $\overline{S} \subset \overline{C} = C \Rightarrow \overline{S}$ *es el elemento de* $\mathcal{F}$ *más pequeño que contiene a* S*.*

Observación. *A la operación anterior se le llama operación de clausura de Kuratowski.*

Definición 1.6 (Interior)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $S \subset X$ *se llama interior de* S *en* $(X, \mathcal{T})$ *al conjunto*

$$\mathring{S} = \bigcup \{G \subset X \text{ abierto y } G \subset E\}$$

Observación. $\mathring{S}$ *es abierto de* $\mathcal{T}$*,* $\mathring{S} \subset S$ *y es el mayor abierto contenido en* S*.*

Proposición 1.3 (Propideades interior)**.** *content*

Proposición 1.4. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $S \subset X$*. Enotnces:*

(I) $X \setminus \overline{S} = (X \mathring{\setminus} S)$*.*

(II) $X \setminus \mathring{S} = \overline{X \setminus S}$*.*

Demostración. (I) $X \setminus \bigcap_{C\in\mathcal{F}:S\subset C} C = \bigcup_{C\in\mathcal{F}:S\subset S} X \setminus C = \bigcup_{G\in\mathcal{T}:G\subset X\setminus S} G = (X \mathring{\setminus} S)$

(II) $X \setminus \mathring{S} = X \setminus \bigcup_{G\in\mathcal{T}:G\subset S} G = \bigcap_{G\in\mathcal{T}:G\subset S} (X \setminus G) = \bigcap_{C\in\mathcal{F}:X\setminus S\subset C} C = \overline{X \setminus S}$

Definición 1.7 (Frontera)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $S \subset X$*. Se llama frontera de* S *en* $(X, \mathcal{T})$ *a*

$$Fr(S) = \overline{S} \cap \overline{(X \setminus S)}$$

Observación. $Fr(S)$ *es cerrado*

Observación. $Fr(S) = Fr(X \setminus S)$

Observación. $Fr(S) \not\subset S$

Proposición 1.5. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $S \subset X$*. Entonces:*

(I) $\overline{S} = S \cup Fr(S)$

(II) $\mathring{S} = S \setminus Fr(S) = S \setminus \big(Fr(S) \cap S\big)$

(III) $X = \mathring{S} \cup (X \overset{\circ}{\setminus} S) \cup Fr(S)$

(IV) $Fr(S) = \overline{S} \setminus \mathring{S}$

Demostración. (I)

$$S \cup Fr(S) = S \cup \big(\overline{S} \cap \overline{X \setminus S}\big) =$$

$$= (S \cup \overline{S}) \cap (S \cup \overline{X \setminus S}) = \overline{S}$$

(II)

$$S \setminus Fr(S) = S \setminus (\overline{S} \cap \overline{X \setminus S}) =$$
$$= (S \setminus \overline{S}) \cup (S \setminus \overline{X \setminus S}) = \emptyset \cup (S \cap (X \setminus \overline{X \setminus S})) =$$
$$= (S \cap (X \setminus (X \setminus \mathring{S}))) = (S \cap \mathring{S}) = \mathring{S}$$

(III)

$$X = \mathring{S} \cup (X \setminus \mathring{S}) = \mathring{S} \cup \overline{X \setminus S} =$$
$$= \mathring{S} \cup \big[(X \setminus S) \cup Fr(X \setminus S)\big] =$$
$$= \mathring{S} \cup \big[(X \overset{\circ}{\setminus} S) \cup \big(Fr(X \setminus S) \cap (X \setminus S)\big) \cup Fr(X \setminus S)\big] =$$
$$= \mathring{S} \cup (X \overset{\circ}{\setminus} S) \cup Fr(X \setminus S) = \mathring{S} \cup (X \overset{\circ}{\setminus} S) \cup Fr(S)$$

(IV)

$$Fr(S) = \overline{S} \cap \overline{(X \setminus S)} = \overline{S} \cap (X \setminus \mathring{S})$$

Definición 1.8. *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *e.t.,* $S \subset X$ *se dice que es denso en* $(X,\mathcal{T})$ *si* $\overline{S} = X$

1.2. Entornos

Definición 1.9. *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *e.t.,* $x \in X$*,* $V \subset X$*. Se dice que* V *es un entorno de* x *en* $(X,\mathcal{T})$ *si* $\exists A \in \mathcal{T} : x \in A \subset V$.

Definición 1.10. *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *e.t.,* $x \in X$*,* $\mathcal{V}(x)$ *es la colección de todos los entornos de* x *y se llama sistema de entornos de* x *en* $(X,\mathcal{T})$.

Observación. *Si* $(X,\mathcal{T})$ *e.t.,* $x \in X$*,* $V \subset X$ *entonces* V *es entorno de* $x \Leftrightarrow x \in \mathring{V}$.

Notación. U^x, V^x *entornos de* x.

Proposición 1.6. *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *e.t.,* $\mathcal{V}(x)$ *tiene las siguiente propiedades:*

(N1) $\forall U \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in U$.

(N2) $\forall U, V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{V}(x)$.

(N3) $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists V \in \mathcal{V}(x)$ *tal que* $\forall y \in V, U \in \mathcal{V}(y)$.

(N4) $\forall U \in \mathcal{V}(x)$, $\exists V \subset X : U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$.

Demostración. *(I) Trivial, a partir de la definición.*

(II) $x \in \mathring{U}, x \in \mathring{V} \Rightarrow x \in \mathring{U} \cap \mathring{V} \subset U \mathring{\cap} V \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{V}(x)$.

(III) Sean $U \in \mathcal{V}(x), V = \mathring{U}$ *como* $x \in \mathring{U} = V \Rightarrow \forall y \in V \in \mathcal{T}$ *y* $V \subset U \Rightarrow U \in \mathcal{V}(y)$.

(IV) $U \in \mathcal{V}(x), U \subset V \Rightarrow x \in \mathring{U} \subset \mathring{V} \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$.

Proposición 1.7. *Sea $X \neq \emptyset$, $\forall x \in X : \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{P}(x)$ que cumple (i, ii, iii, iv) anteriores, entonces $\exists! \mathcal{T}$ sobre $X : \forall x \in X, \mathcal{V}(x)$ es el sistema de entornos de x en $\big(X, \mathcal{T}\big)$.*

Demostración. *Sea $\mathcal{T} = \{G \subset X : \forall x \in G, G \in \mathcal{V}(x)\}$. Vemos que $\mathcal{T}$ es una topología:*

(I) *Prop1.6.(i)* $X \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow X \in \mathcal{T}$

(II) $\forall G_1, G_2 \in \mathcal{T}, x \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow G_1, G_2 \in \mathcal{V}(x)$, *Prop.1.6.(b)* $\Rightarrow$ $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{V}(x)$.

(III) $\forall \{G_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{T}, x \in \bigcup_{j \in J} G_j \Rightarrow \exists j_0 \in J : G_{j_0} \in \mathcal{V}(x)$, *Prop.1.6.(iv)* $\Rightarrow$ $\bigcup_{j \in J} G_j \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \bigcup_{j \in J} G_j \in T$

$\Rightarrow \mathcal{T}$ *es topolgía.*

Vemos ahora que S es entorno de $x \Leftrightarrow S \in \mathcal{V}(x)$.

- $(\Rightarrow)$ S *entorno de* x *en* $\big(X, \mathcal{T}\big) \Rightarrow \exists G \in \mathcal{T} : x \in G \subset S \Rightarrow G \in \mathcal{V}(x)$ *Prop.1.6.(iv)* $\Rightarrow S \in \mathcal{V}(x)$.
- $(\Leftarrow)$ $S \in \mathcal{V}(x)$. *Sea $U \subset S$ ACABAR*

Falta ver que $\mathcal{T}$ es única.

Definición 1.11 (Base de Entorno)**.** *Sea $x \in X, \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$. Se dice que $\mathcal{B}(x)$ es una base de un entorno de x en $\big(X, \mathcal{T}\big)$ si $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset U$.*

Observación. *De la definición de base queda determinado un entorno como $\mathcal{V}(x) = \{U \subset X : \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset U\}$*

Ejemplo. $\forall \big(X, \mathcal{T}\big)$ *e.t. $\mathcal{V}(x)$ es una base de entornos de x.*

Ejemplo. *Sea $\big(X, \mathcal{T}_D\big), \mathcal{T}_D = \mathcal{P}(x), \forall x \in X$ entonces $\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}$ es base de entornos de x.*

Ejemplo. *Sea $\big(X, \mathcal{T}\big)$ metrizable. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$, d métrica tal que $\forall x \in X, \mathcal{B}(x) = \{B_\epsilon(x) : \epsilon > 0\}$ entonces $\mathcal{B}(x)$ es base de entornos de x.*

Ejemplo. $\forall \big(X, \mathcal{T}\big)$ *e.t., $\mathcal{B}(x) = \{\mathring{U} : U \in \mathcal{V}(x)\}$ es base de entornos de x.*

Ejemplo. *Sea $\big(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\sqcap\big) : \forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{B}(x) = \big\{\big[x - \epsilon, x + \epsilon\big] : \epsilon > 0\big\}$ entonces $\mathcal{B}(x)$ es base de entornos de x.*

Proposición 1.8 (Propiedades de Bases)**.** *Sea* $\big(X,\mathcal{T}\big)$ *e.t. y* $\mathcal{B}(x)$ *una base de entornos de* x *en* $\big(X,\mathcal{T}\big)$*,* $\forall x\in\mathcal{T}$*. Entonces:*

(V1) $B\in\mathcal{B}(x)\Rightarrow x\in B$.

(V2) $B_1,B_2\in\mathcal{B}(x)\Rightarrow\exists B_3\in\mathcal{B}(x):B_3\subset B_1\cap B_2$.

(V3) $B_1\in\mathcal{B}(x)\Rightarrow\exists B_2\in\mathcal{B}(x):\forall y\in B_2,\exists B\in\mathcal{B}(y)$ *tal que* $B\subset B_1$.

Demostración. *(V1)* $\mathcal{B}(x)\subset\mathcal{V}(x),B\in\mathcal{B}(x)\Rightarrow x\in B$.

(V2) $B_1,B_2\in\mathcal{B}(x)\Rightarrow B_1\cap B_2\in\mathcal{B}(x)\subset\mathcal{V}(x)\Rightarrow\exists B_3\in\mathcal{B}(x):B_3\subset B_1\cap B_2$.

(V3) $B_1\in\mathcal{B}(x)\subset\mathcal{V}(x)$ *Prop.1.6.(iii)* $\Rightarrow\exists U\in\mathcal{V}(x)$ *tal que* $\forall y\in U,B_1\in\mathcal{B}(y)\Rightarrow\exists B_2\in\mathcal{B}(x):B_2\subset U$ *tal que* $\forall y\in B_2,B_1\in\mathcal{V}(y)\Rightarrow\exists B\in\mathcal{B}(y):B\subset B_1$.

Proposición 1.9. *Sea* $X\neq\emptyset,\mathcal{B}:X\mapsto\mathcal{P}(\mathcal{P}(x))$ *cumpliendo (i, ii, iii) anteriores, entonces se define una topología en* X *en la que* $\mathcal{B}(x)$ *es una base de entornos de* $x,\forall x\in X$*.*

Demostración. *Sea* $\forall x\in X$,

$$\mathcal{V}(x)=\{U\subset X:B\subset U\ \textit{para algún}\ B\in\mathcal{B}(x)\}$$

tal que $\mathcal{B}(x)\subset\mathcal{V}(x)$ *tiene las propiedades V1, V2, V3. Veamos que* $\mathcal{V}(x)$ *tiene las propiedades N1, N2, N3, N4.*

(N1) $\forall U\in\mathcal{V}(x),\exists B\subset U:B\in\mathcal{B}(x)\Rightarrow x\in B\subset U\Rightarrow x\in U$.

(N2) $U_1,U_2\in\mathcal{V}(x)\Rightarrow\exists B_1,B_2\in\mathcal{B}(x):B_1\subset U_1,B_2\subset U_2$ *y (V2)* $\Rightarrow\exists B_3\in\mathcal{B}(x):B_3\subset B_1\cap B_2\subset U_1\cap U_2$. *Entonces,* $U_1\cap U_2\in\mathcal{V}(x)$.

(N3) $U\in\mathcal{V}(x)\Rightarrow\exists B\subset U:B\in\mathcal{B}(x)$, *(V3)* $\Rightarrow\exists B_0\in\mathcal{B}(x):\forall y\in B_0,\exists B_y\in\mathcal{B}(y):B_y\subset B$. *Entonces* $B\in\mathcal{V}(y),\forall y\in B_0\Rightarrow U\in\mathcal{V}(y),\forall y\in B_0$.

(N4) $U\in\mathcal{V}(x),V\subset X:U\subset V\Rightarrow\exists B\in\mathcal{B}(x):B\subset U\subset V\Rightarrow V\in\mathcal{V}(x)$.

Entonces, $\mathcal{V}(x)$ es un sitema de entornos de $x, \forall x \in X$ y $\forall x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ es una base de entornos de x en la topología resultante en X.

Definición 1.12 (Bases Equivalentes)**.** *Sea $X \neq \emptyset$. Si una topología sobre X está definida por dos bases de entornos, se dice las bases son equivalentes.*

Proposición 1.10. *Sea $X \neq \emptyset$. Dos bases de entornos de x, $\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)$ de X son equivalentes si y solo si $\forall x \in X, \forall i \in \{1,2\}, \forall B \in \mathcal{B}_i(x), \exists B_j \in \mathcal{B}_i(x) : B_j \subset B_i, \forall j \in \{1,2\}, j \neq i$.*

Proposición 1.11 (Caracterización bases equivalentes)**.** *Sean $\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)$ dos bases de entornos de x en $\big(X, \mathcal{T}\big)$, estas son equivalentes $\Leftrightarrow \forall x \in X, \forall i \in \{1,2\}, \forall B_i \in \mathcal{B}_i(x), \exists B_j \in \mathcal{B}_j(x), j \in \{1,2\}, j \neq i : B_j \subset B_i$.*

Demostración. *($\Rightarrow$)* $\forall i \in \{1,2\}, \forall B_i \in \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists B_j \in \mathcal{B}(x), \forall j \in \{1,2\}, j \neq i$.

($\Leftarrow$)
ACABAR

Definición 1.13. *Sea $\big(X, \mathcal{T}\big)$ e.t. $S \subset X, x \in X$.*

(I) *Se dice que x es un puto interior de S en $\big(X, \mathcal{T}\big)$ si $\exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \subset S$.*

(II) *Se dice que x es un punto adherente de S en $\big(X, \mathcal{T}\big)$ si $\forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset$.*

(III) *Se dice que x es un punto de acumulación si $\forall \mathcal{U}^x$, $\mathcal{U}^x \setminus \{x\} \cap S \neq \emptyset$.*

(IV) *Se dice que x es un punto de frontera si $\forall \mathcal{U}^x$, $\mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset$.*

(V) *Se dice que x es punto aislado si $\exists \mathcal{U}^x$ tal que $\mathcal{U}^x \cap S = \{x\}$.*

Definición 1.14. *El conjunto de puntos de acumulación se llama conjunto derivado y se denota S'.*

Proposición 1.12. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t. Entonces,*

(I) $A \subset X$ *es abierto de* $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \subset A$.

(II) $C \subset X$ *es cerrado* $\Leftrightarrow \forall x \notin C, \exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \cap C = \emptyset$.

(III) $S \subset X,\ \mathring{S} = \{x \in X : \exists \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \subset S\}$.

(IV) $S \subset X, \overline{S} = \{x \in X : \forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset\}$.

(V) $S \subset X, Fr(S) = \{x \in X : \forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset, \mathcal{U}^x \cap (X \setminus S) \neq \emptyset\}$.

Demostración. (I) *Es la propiedad V1.*

(II) C *es cerrado* $\Leftrightarrow X \backslash C \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in X \backslash C, \exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \subset X \backslash C \Rightarrow X \backslash C$ *es abierto.*

(III) *Sigue de (iv) aplicando las leyes de De Morgan.*

(IV) $X \backslash \overline{S} = (\mathring{X \setminus S}) = \{x \in X : \exists \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \subset X \backslash S\}$ *cuyo complementario es* $\overline{S} = \{x \in X : \forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset\}$.

(V) $Fr(S) = \overline{S} \cap \overline{X \setminus S}$

Observación. *En la proposición anterior se pueden usar bases en lugar de sistemas de entornos.*

Corolario 1.1.1. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.,* $S \subset X$ *entonces*

(I) $\overline{S} = \{x \in X : x$ *es punto adherente de* $S\}$.

(II) $\mathring{S} = \{x \in X : x$ *es punto interior de* $S\}$.

(III) $Fr(S) = \{x \in X : x$ *es punto frontera de* $S\}$.

Proposición 1.13. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.* $E \subset X$. *Entonces* E *es denso en* $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, U \cap E \neq \emptyset$.

Demostración. ($\Rightarrow$) *Suponemos que* E *es denso, es decir,* $\overline{E} = X$. *Entonces,* $\forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$, U *es abierto* $\Rightarrow \forall x \in \mathring{U} = U \Rightarrow U$ *es entorno de* x *en* $(X, \mathcal{T})$. *Y como* x *es punto adherente de* $E \Rightarrow U \cap F \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) $\forall x \in X, \forall \mathcal{U}^x$ entorno de $x \Rightarrow \mathring{\mathcal{U}}^x \subset \mathcal{U}^x \subset X \Rightarrow \mathring{\mathcal{U}}^x \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ y por la hipótesis $\mathring{\mathcal{U}}^x \cap E \subset \mathcal{U}^x \cap E \neq \emptyset \Rightarrow x$ punto adherente de E, $x \in \overline{E} \Rightarrow X \subset \overline{E}$.

1.3. Bases

Definición 1.15 (Base). *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Se dice que $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$ si $\forall A \in \mathcal{T}, \exists \mathcal{B}_A \subset \mathcal{B} : A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_A} B$. Y se dice que $\mathcal{T}$ está engendrada por $\mathcal{B}$.*

Observación. *$\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ tal que $\mathcal{T} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}_A} B : \mathcal{B}_A \subset \mathcal{B}\}$.*

Observación. *$\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ es una base de $X \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{T}, \forall x \in A \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset A$.*

Ejemplo. (I) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u), \mathcal{B} = \{(a, b) : a < b\}$ *es base de* $\mathcal{T}_u$.

(II) $(X, \mathcal{T}_u), \mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ *es base de* $\mathcal{T}_u$.

(III) $(X, \mathcal{T})$ *metrizble,* $\mathcal{T}_d$ *topología inducida por* d. *Entonces* $\mathcal{B} = \{B : x \in X, \epsilon > 0\}$ *es base de* $\mathcal{T}_d$.

Proposición 1.14. *Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ entonces, $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ es base de entornos de x en $(X, \mathcal{T})$.*

Observación. *La única diferencia entre bases y bases de entornos es que las bases no tinen por que consister de conjuntos abiertos.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Suponemos que $\mathcal{B}$ es base de X, $x \in X$ y $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$. Sea $U \in \mathcal{B}_x$ entonces $U \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T} : x \in U = \mathring{U} \Rightarrow U$ es un entorno de x. Sea $U \in \mathcal{V}(x)$, entonces $x \in \mathring{U} \in \mathcal{T}$ donde $\mathcal{T} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} B : \mathcal{B}_U \subset \mathcal{B}\}$, es decir, $\mathring{U}$ es la unión de elementos de $\mathcal{B}$ entonces $\exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset \mathring{U}$. Por tanto, $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists B \in \mathcal{B}_x : B \subset U \Rightarrow \mathcal{B}_x$ es base de entronos de x.

($\Leftarrow$) Suponesmos que $\mathcal{B}_x$ es una base de entornos de x, $\forall x \in X$ y $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$. Entonces, $\forall A \in \mathcal{T}, \forall x \in A, \exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subset A \Rightarrow A = \bigcup\{B_x : x \in A\} \Rightarrow \mathcal{B} \subset A$, de manera que $\mathcal{B}$ es base para X.

Teorema 1.2. *Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces, $\mathcal{B}$ es base de una topología $\mathcal{T}$ en $X \Leftrightarrow$*

(I) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.

(II) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B},\ p \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} : p \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Demostración. *(I) (⇒)* $\mathcal{T} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \in \mathcal{B}\}, X \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists \mathcal{B}_0 \in \mathcal{B} : X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0} B$.

(II) (⇒) A partir de la definición de base. ($B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2$).

(⇐) Suponemos que $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ *donde* $\mathcal{B} = \{K \subset X : K$ *cumple las propiedades (i), (ii)* $\}$. *Sea* $\mathcal{T} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}$. *Entonces,*

(G1) $\emptyset = \bigcup_{B \in \emptyset} B \in \mathcal{T}$ *y* $X \in \mathcal{T}$.

(G2) $\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B\right) \cap \left(\bigcup_{B' \in \mathcal{B}_2} B'\right) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1, B' \in \mathcal{B}_2} B \cap B'$, *por (ii)* $\Rightarrow$ *la intersección de dos elementos de* $\mathcal{B}$ *es una unión de elementos de* $\mathcal{B}$.

(G3) $\{A_j\}_{j \in J} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}_j} B : j \in J\} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$.

Definición 1.16 (Subbase)**.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *e.t.* $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. *Se dice que* $\mathcal{S}$ *es una subbase de* $\mathcal{T}$ *si la familia de todas las interseccióness de* $\mathcal{S}$ *es una base de* $\mathcal{T}$.

Proposición 1.15. *Sea* $X \neq \emptyset, \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. *Entonces,* $\mathcal{S}$ *es una subbase de alguna topolpgía sobre* $X \Leftrightarrow \bigcup_{S \subset \mathcal{S}} S = X$.

Demostración. *(⇒) Sea* $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ *una subbase de* $\mathcal{T} \Rightarrow \{\bigcap_{S \in \mathcal{S}'} S : \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\} = \mathcal{B}$ *es base de* $\mathcal{T} \Rightarrow \forall B \in \mathcal{B}, \exists S_B \in \mathcal{S} : B \subset S_B \Rightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} S_B \subset \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \subset X \Rightarrow \bigcup_{S \in \mathcal{S}} = X$.

(⇐) Sea $\mathcal{B} = \{\bigcap_{S \in \mathcal{S}'} \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\}$.

(i) $\bigcap_{S \in \mathcal{S}} S = X \Rightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{B}} = X$.

(ii) $\left(\bigcap_{S \in \mathcal{S}_1} S\right) \cap \left(\bigcap_{S' \in \mathcal{S}_2} S'\right) \bigcap_{S \in \mathcal{S}_1, S' \in \mathcal{S}_2} (S' \cap S) \subset \mathcal{B}$.

1.4. Subespacios

Definición 1.17 (Subespacio). *Sea $(X,\mathcal{T})$ e.t., $S\subset X$. Se llama topología relativa a S a*

$$\mathcal{T}|_S=\{A\cap S : A\in\mathcal{T}\}$$

y el par $(S,\mathcal{T}|_S)$ se llama subespacio topológico.

Proposición 1.16 (Propiedades Subespacio). *Sea $(X,\mathcal{T})$ e.t., $S\subset X$. Entonces,*

(I) $C\subset S, C\in\mathcal{T}|_S \Leftrightarrow \exists A\in\mathcal{T} : A\cap S=C$.

(II) $C\subset S$, *C cerrado en $S,\mathcal{T}|_S \Leftrightarrow \exists F$ cerrado en $(X,\mathcal{T}) : C=F\cap S$.*

(III) $\forall C\subset S$, $\overline{C}^S=S\cap\overline{C}^X$.

(IV) *$\forall x\in S, \mathcal{V}^x\subset S$ es un entorno de x en $(S,\mathcal{T}|_S)\Leftrightarrow\exists\mathcal{U}^x$ entorno de x en $(X,\mathcal{T})$ tal que $\mathcal{U}^x\cap S=\mathcal{V}^x$.*

(V) *$\mathcal{B}$ base de $T\Rightarrow\mathcal{B}_S=\{B\cap S : B\in\mathcal{B}\}$ es base de $(S,\mathcal{T}|_S)$.*

Demostración. (I) *Definición de subespacio.*

(II) *Sigue de (i).*

(III) *Sigue de (ii) y la definición de clausura de C como la intersección de todos los conjunto cerrados que contienen E.*

(IV) *Sigue de (i) y la definición de entorno de x como un conjunto que contiene un subconjunto abierto que contiene a x.*

(V) *ACABAR*

Observación. *Sea $S\subset X, C\subset S$ entonces no necesariamente $int(C)_S\neq int(C)_X\cap S$. Por ejemplo, $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}_u), S=C=\{0\}\times\mathbb{R}$.*

Definición 1.18. *Sea $(\mathcal{P})$ una propiedad de e.t. Se dice que $\mathcal{P}$ es propiedad hereditaria si dado e.t. que cumple $\mathcal{P}$ todos sus subespacios cumplen $\mathcal{P}$.*

1.5. Funciones continuas

Definición 1.19 (Función continua)**.** *Sean* $(X,\mathcal{T})$, $(X',\mathcal{T}')$ *dos e.t. y* $f: X \to X'$ *una aplicación. Se dice que* $f:(X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *es una aplicación continua en* $a \in X$ *si* $\forall \mathcal{V}^{f(a)}$ *entorno de* $f(a)$ *en* $(X',\mathcal{T}')$, $\exists \mathcal{U}^a$ *entorno de* a *en* $(X,\mathcal{T}) : f(\mathcal{U}^a) \subset \mathcal{V}^{f(a)}$.

Observación. *Se dice que* f *es continua si lo es* $\forall a \in X$.

Teorema 1.3. *Sean* $(X,\mathcal{T})$, $(X',\mathcal{T}')$ *dos e.t. y* $f: X \to X'$ *una aplicación. Entonces, son equivalentes:*

(I) $\forall A' \in \mathcal{T}', f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$

(II) $f:(X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *es aplicación continua.*

(III) $\forall C \subset X, f(\overline{C}^X) \subset (\overline{f(C)})^{X'}$.

(IV) $\forall C' \subset X, \overline{f^{-1}(C')}^X \subset f^{-1}(\overline{C'}^{X'})$.

(V) $\forall F'$ *cerrado de* $(X',\mathcal{T}')$, $f^{-1}(F')$ *es cerrado de* $(X,\mathcal{T})$.

Demostración. *(*$i \Rightarrow ii$*) Sea* $a \in X$, $\mathcal{V}^{f(a)}$ *entorno de* $f(a)$ *en* $(X',\mathcal{T}') \Rightarrow \mathring{\mathcal{V}}^{f(a)}$, $f(a) \in \mathring{\mathcal{V}}^{f(a)}$. *Ahora, por (i), tenemos* $a \in f^{-1}(\mathring{\mathcal{V}}^{f(a)}) \in \mathcal{T}$. *Sea* $f^{-1}(\mathcal{V}^{f(a)}) = \mathcal{U}^a$. *Entonces,* $f(\mathcal{U}^a) = f(f^{-1}(\mathcal{V}^{f(a)})) \subset \mathring{\mathcal{V}}^{f(a)} \subset \mathcal{V}^{f(a)} \Rightarrow f$ *es continua.*

($ii \Rightarrow iii$*) Sea* $C \subset X, a \in \overline{C}^X, \mathcal{V}^{f(a)}$ *entorno de* $f(a)$ *en* $(X',\mathcal{T}')$. *Entonces, por (ii),* $\exists \mathcal{U}^a$ *entorno de* a *en* $(X,\mathcal{T})$ *tal que* $f(\mathcal{U}^a) \subset \mathcal{V}^{f(a)} \Rightarrow \mathcal{U}^a \cap C \neq \emptyset \Rightarrow a \in \mathcal{U}^a \cap C \Rightarrow f(a) \in f(\mathcal{U}^a) \cap f(C) \subset \mathcal{V}^{f(a)} \cap f(C) \Rightarrow f(a) \in \overline{f(C)}^{X'}$.

(iii $\Rightarrow$ *iv)* $\forall C' \subset X' \Rightarrow f'(C') \subset X'$ *y por (iii)* $f(\overline{f^{-1}(C')})^X \subset \overline{f(f^{-1}(C'))}^{X'} \subset \overline{C'}^{X'} \Rightarrow \overline{f^{-1}(C')}^X \subset f^{-1}(\overline{C'}^{X'})$.

(iv $\Rightarrow$ *v)* F' *cerrado de* $(X',\mathcal{T}') \Rightarrow \overline{f^{-1}(C')}^X \subset f^{-1}(\overline{F'}^{X'}) = f^{-1}(F') \Rightarrow f^{-1}(F')$ *es cerrado en* $(X,\mathcal{T})$.

(v $\Rightarrow$ *i)* $A' \in \mathcal{T}' \Rightarrow X' \setminus A'$ *cerrado de* $(X',\mathcal{T}') \Rightarrow f^{-1}(X' \setminus A)$ *cerrado de* $(X,\mathcal{T}) \Leftrightarrow X \setminus f^{-1}(X' \setminus A') \in \mathcal{T}$. *Y* $x \notin f^{-1}(X' \setminus A') \Leftrightarrow f(x) \notin X' \setminus A' \Leftrightarrow f(x) \in A' \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A') \Rightarrow X \setminus f^{-1}(X' \setminus A')$.

Observación. $\forall (X,\mathcal{T})$ *e.t. la aplicación* $1_X : (X,\mathcal{T}) \to (X,\mathcal{T})$ *es continua.*

Observación. $\forall (X,\mathcal{T}),(X',\mathcal{T}')$ *e.t.* $\forall x'_0 \in X'$ *la aplicación constante con* $c_{x'_0} : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *es constante.*

Proposición 1.17. *Sea* $(X,\mathcal{T}),(X',\mathcal{T}'),(X'',\mathcal{T}'')$ *e.t.,* $f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *aplicación continua,* $f' : (X',\mathcal{T}') \to (X'',\mathcal{T}'')$ *aplicación continua. Entonces,* $(f' \circ f) : (X,\mathcal{T}) \to (X'',\mathcal{T}'')$ *es continua.*

Demostración. $\forall A'' \in \mathcal{T}'' \Rightarrow f^{-1}(A'') \in \mathcal{T}' \Rightarrow f^{-1}(f^{-1}(A'')) \in \mathcal{T}$ *y* $(f' \circ f)^{-1}(A'') = f^{-1}(f^{-1}(A''))$.

Proposición 1.18. *Sea* $(X,\mathcal{T}),(X',\mathcal{T}')$ *e.t.,* $f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$*. Entoces,* $f|_S : (S,\mathcal{T}|_S) \to (X',\mathcal{T}')$ *es aplicación continua.*

Demostración. $\forall A' \in \mathcal{T}', (f|_S)^{-1}(A') = f^{-1}(A') \cap S \in \mathcal{T}|_S$.

Proposición 1.19. *Sea* $(X,\mathcal{T}),(X',\mathcal{T}')$ *e.t.,* $f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}'), S \subset X$*. Entonces,* $f : (X,\mathcal{T}) \to (f(x),\mathcal{T}'|_{f(x)})$ *es aplicación continua.*

Demostración. $\forall G' \in \mathcal{T}'|_S \Rightarrow \exists A' \in \mathcal{T}' : G' = A' \cap f(x) \Rightarrow f^{-1}(G') = f^{-1}(A' \cap f(x)) = f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$.

Proposición 1.20. *Sean* $(X,\mathcal{T}),(X',\mathcal{T}')$ *e.t.,* $f : X \to X'$ *aplicación. Si* F_1, F_2 *son cerrados de* $(X,\mathcal{T})$ *tal que* $X = F_1 \cap F_2$ *y* $f|_{F_i} : (F_i, \mathcal{T}_{F_i}) \to (X',\mathcal{T}')$ *es continua. Entonces,* $f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *es aplicación continua.*

Demostración. $\forall F'$ *cerrado de* $(X',\mathcal{T}')$, $f^{-1}(F') = f^{-1}(F') \cap X = f^{-1}(F') \cap (F_1 \cup F_2) = (f^{-1}(F') \cap F_1) \cup (f^{-1}(F') \cap F_2)$ *donde* $(f^{-1}(F') \cap F_1) = f^{-1}|_{F_1}(F')$ *cerrado en* F_1 *y* $(f^{-1}(F') \cap F_2) = f^{-1}|_{F_2}(F')$ *cerrado en* $F_2 \Rightarrow f^{-1}(F')$ *cerrado en* $(X,\mathcal{T})$.

Definición 1.20 (Espacio Homeomorfo)**.** *Sean* $(X,\mathcal{T}),(X',\mathcal{T}')$ *e.t.* $f: X \to X'$ *aplicación. Se dice que* $f:(X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *es homeomorfismo si* f *es biyectiva y* f^{-1} *es continua. En este caso, se dice que* $(X,\mathcal{T})$ *es homeomorfo a* $(X',\mathcal{T}')$.

Definición 1.21 (Invariante Topológico)**.** *Sea* (P) *una propiedad de e.t.. Se dice que* (P) *es un invariante topológico si para todo e.t. que cumpla* (P) *todos los e.t. homeomorfos cumplen* (P).

Definición 1.22. *Sean* $(X,\mathcal{T}),(X',\mathcal{T}')$ *e.t.,* $f:(X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *aplicaciones abiertas. Si* $\forall A \in \mathcal{T}$, $f(A) \in \mathcal{T}'$

Observación. *Una aplicación es cerrada si* $\forall C$ *cerrado de* $(X,\mathcal{T})$, $f(C)$ *cerrado de* $(X',\mathcal{T}')$.

Observación. *No hay ninguna implicación entre aplicación continua, aplicación abiera y aplicación cerrada.*

Proposición 1.21. *Sean* $(X,\mathcal{T}),(X',\mathcal{T}'), f: X \to X'$ *aplicaciones biyectivas. Entonces, son equivalentes:*

(I) $f:(X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *es homeomorfismo.*

(II) $f:(X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *aplicación continua y abierta.*

(III) $f:(X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *aplicación continua y cerrada.*

Demostración.

(i ⇒ ii) f *homeomorfismo* $\Rightarrow \exists f^{-1}$ *aplicación continua* $\Rightarrow \forall A' \in \mathcal{T}, (f^{-1}(A))^{-1} \in \mathcal{T}'$ *donde* $(f^{-1}(A))^{-1} = f(A) \Rightarrow f$ *aplicación abierta.*

(ii ⇒ i) f *abierta y continua* $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, f(A) \in \mathcal{T}'$ *donde* $f(A) = (f^{-1}(A))^{-1} \Rightarrow f^{-1}$ *aplicación continua.*

(i ⇔ iii) *es análoga.*

1.6. Espacio Producto

Definición 1.23 (Producto Cartesiano)**.** *Sea* $\{X_j\}_{j\in J} \neq \emptyset$ *familia de conjuntos no vacios. Se llama producto castesiano de* $\{X_j\}_{j\in J}$ *a*

$$\prod_{j\in J} X_j = \{x : J \to \bigcup_{j\in J} X_j \text{ aplicación } : x_j \in X_j, \forall j \in J\}$$

Observación. $\forall j \in J, p_{j_0} : \prod_{j\in J} X_j \to X_{j_0} : x \mapsto x_{j_0}$ *se llama proyección.*

Observación. *Si* $X_j = X, \forall j \in J$ *entonces* $\prod_{j\in J} X_j = X^J = \{x : J \to X,\ x \text{ aplicación } \}$.

Definición 1.24 (Axioma Elección)**.** $\forall\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \neq \emptyset$ *familia de conjuntos no vacios disjuntos dos a dos. Entonces,* $\exists A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda : A \cap B_\lambda$ *tiene un solo elemento.*

Definición 1.25 (Topología Producto)**.** *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_{j\in J})\}_{j\in J}$ *familia de e.t.. Se llama topología producto a la topología sobre* $\prod_{j\in J} X_j$ *generada por subbase*

$$\mathcal{S} = \{p_j^{-1}(U_j) : U_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J\}$$

Esta topología se denota $\prod_{j\in J} \mathcal{T}_j$

Observación. *El producto de abiertos no es necesesariamente abierto.*

Observación. *La base engendrada por* $\mathcal{S}$ *es*

$$\mathcal{B} = \big\{ \bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(U_j) : U_j \in \mathcal{T}_j, F \in \mathcal{P}(J)\big\}$$

$$= \big\{ \prod_{j\in J} A_j : A_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J, A_j = X_j : \forall j \in J \setminus F \text{ no es finito } \big\}.$$

Observación. *Si* J *es finito, entonces* $\mathcal{B} = \big\{ \prod_{j\in J} A_j : A_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J\big\}$.

Observación. *El producto espacios discretos no es necesesariamente discreto.*

Proposición 1.22. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia finita de e.t.. Entonces,* $\forall j_0 \in J$,

$$p_{j_0} : (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j) \to (X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0})$$

es aplicación abierta y continua.

Demostración. $\forall A \in \prod_{j\in J} A_j, A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} : B_\lambda \in \mathcal{B}$ *donde* $\mathcal{B}$ *es subbase de* $\prod_{j\in J} \mathcal{T}_j$, $B_\lambda = \{\prod_{j\in J} U_{\lambda j} : U_{\lambda j} \in \mathcal{T}_j, U_{\lambda j} = X_j, \forall j \in J \setminus F : F$ *finito* $\}$. *Entonces,* $p_{j_0}(A) = p_{j_0}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} p_{j_0}(B_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_{\lambda j} \in \mathcal{T}_j \Rightarrow$ *abierto.*

Proposición 1.23. *Sea* $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j\in J}$ *familia no vacia de e.t.. Entonces, la topología producto es la más débil sobre* $\prod_{j\in J} X_j$ *que hace continuas a todas las proyecciones.*

Demostración. *Sea* $\mathcal{T}$ *topología sobre* $\prod_{j\in J} X_j$ *tal que* $p_{j_0} : (\prod_{j\in J} X_j, \mathcal{T}) \to (X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0})$ *es una proyección continua. Entonces,* $\forall j_0 \in J : U_{j_0} \in \mathcal{T}_{j_0}$ *se tiene* $p_0^{-1}(U_{j_0}) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ *es subbase de* $\prod_{j\in J} \mathcal{T}_j \Rightarrow \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j \subset \mathcal{T}$.