Ejercicios Geomtería Diferencial

Hugo Del Castillo Mola

25 de septiembre de 2022

Índice general

Capítulo 1

Curvas

Ejercicio (33). *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva p.p.a., $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ movimiento rígido y $\beta = M \circ \alpha$ curva. Demostrar*

(I) *M conserva la orientación $\Rightarrow k_\beta = k_\alpha$, $\tau_\beta = \tau_\alpha$,*

(II) *M invierte la orientación $\Rightarrow k_\beta = -k_\alpha$, $\tau_\beta = \tau_\alpha$.*

Solución. *Sea $\beta = M\alpha$ donde $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Entonces,*

$$k_\beta = ||\beta''|| = ||M\alpha''|| = ||M||||\alpha''|| = ||M||k_\alpha$$

donde

$$||M|| = \begin{cases} 1, & \text{si } M \text{ conserva la orientación} \\ -1, & \text{si } M \text{ invierte la orientación} \end{cases}$$

$$\Rightarrow k_\beta = \begin{cases} k_\alpha, & \text{si } M \text{ conserva la orientación} \\ -k_\alpha, & \text{si } M \text{ invierte la orientación} \end{cases}$$

La torsión de β es

$$\tau_\beta = (\beta' \times \beta'') \cdot \beta''' = (M\alpha' \times M\alpha'') \cdot M\alpha'''$$

$$= (\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha''' = \tau_\alpha$$

Por tanto, la torsión es invariante ante isometrías.