

Ejercicios Topología

Hugo Del Castillo Mola

6 de noviembre de 2022

Índice general

| | |
|------------------------------------|----------|
| 1. Espacios Topológicos | 2 |
| 1.1. Funciones Continuas | 2 |

Capítulo 1

Espacios Topológicos

1.1. Funciones Continuas

Ejercicio 1.1 (27). Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ aplicación. Entonces, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d \Leftrightarrow f$ es continua.

Solución.

(\Rightarrow) $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d \Rightarrow \forall A \subset X, A \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \forall A' \in \mathcal{T}', f^{-1}(A') \in \mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

(\Leftarrow) ejercicio 26

Ejercicio 1.2 (28). Probar que existen aplicaciones abiertas y cerradas simultáneamente, pero que no son continuas.

Solución (28). Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t. tal que $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ topología trivial, $\mathcal{T}' = \mathcal{P}(X')$, $\mathbb{1} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ aplicación identidad. Entonces, $\forall A \in \mathcal{T}, \mathbb{1}(A) \in \mathcal{T}'$ y $\forall C$ cerrado de $(X, \mathcal{T}), \mathbb{1}(C)$ cerrado de (X', \mathcal{T}') . Pero, $\forall A' \in \mathcal{T}' : A' \subset X, f^{-1}(A') \notin \mathcal{T}$.

Ejercicio 1.3 (29). Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ continua, abierta y suprayectiva, \mathcal{B} base de \mathcal{T} . Entonces, $\mathcal{G} = \{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$ es base de \mathcal{T}' .

Solución. $\forall A' \in \mathcal{T}' \xrightarrow{f \text{ .cont.}} f^{-1}(A') \in \mathcal{T} \xrightarrow{\mathcal{B} \text{ base de } \mathcal{T}} \exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} : f^{-1}(A') = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \xrightarrow{f \text{ supra.}} f(f^{-1}(A')) = f(\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} f(B)$ donde $f^{-1}(A') \in \mathcal{T} \xrightarrow{f \text{ ab.}} f(f^{-1}(A')) = A' \in \mathcal{T}' \Rightarrow \mathcal{G}$ base de \mathcal{T}' .

Ejercicio 1.4 (30). Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), (X'', \mathcal{T}'')$ aplicaciones continuas tales que $g \circ f$ es homeomorfismo y g es inyectiva (suprayectiva). Entonces, f y g son homeomorfismos.

Solución. Trivial.

Ejercicio 1.5 (31). Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ espacios topológicos, $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ homeomorfismo y $A \subset X : A \cap A' = \emptyset$. Entonces, $f(A) \cap f(A') = \emptyset$.

Solución. Supongamos que $A \cap A' = \emptyset$ y $f(A) \cap f(A') \neq \emptyset$. Entonces, f homeomorfismo $\Rightarrow f$ inyectiva $\Rightarrow f(A \cap A') = f(A) \cap f(A') \neq \emptyset$ pero $f(A \cap A') = f(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A')$ contradicción.

Ejercicio 1.6 (32). Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ aplicación inyectiva y abierta, y $A \subset X$. Entonces, $f|_A : (A, \mathcal{T}|_A) \rightarrow (f(A), \mathcal{T}'|_{f(A)})$ es inyectiva y abierta.

Solución. Sea $G \in \mathcal{T}|_A \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T} : G = U \cap A \Rightarrow f|_A(G) = f(G) = f(U \cap A) \xrightarrow{f \text{ iny.}} f(U \cap A) = f(U) \cap f(A) \in \mathcal{T}'|_{f(A)}$.

Ejercicio 1.7 (33). Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia no vacía de espacios topológicos, $A_j \subset X_j, \forall i \in J$. Entonces, $\prod_{j \in J} (\mathcal{T}_j|_{A_j}) = (\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)|_{\prod_{j \in J} A_j}$

Solución.

$(\Rightarrow) \forall B \in \mathcal{B}$ base de $\prod_{j \in J} (\mathcal{T}_j|_{A_j}), B = \prod_{j \in J} G_j$ tal que $G_j \in \mathcal{T}_j|_{A_j}, \forall j \in J$ donde $A_j = X_j, \forall j \in J \setminus F$, con F finito de manera que

$$\forall j \in F, \exists U_j \in \mathcal{T}_j : G_j = U_j \cap A_j$$

$$\forall j \in J \setminus F, \exists U_j = X_j : G_j = U_j \cap A_j = X_j \cap A_j = A_j$$

Como $\prod_{j \in J} U_j \in \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j$ (para ver esto escribir la base de $\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j$). Entonces,

$$B = \prod_{j \in J} (U_j \cap A_j) = \left(\prod_{j \in J} U_j \right) \cap \left(\prod_{j \in J} A_j \right) \in \left(\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j \right)|_{\prod_{j \in J} A_j}$$

(\Leftarrow) Sea \mathcal{B}' base de $(\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)|_{\prod_{j \in J} A_j}$, entonces $\forall G \in \mathcal{B}', G = B \cap \prod_{j \in J} A_j, B \in \mathcal{B}$ base de $\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j$, donde $B = \prod_{j \in J} B_j$ tal que

$$B_j = \begin{cases} X_j, & \text{si } j \in J \setminus F \\ B_j, & \text{si } j \in F \end{cases}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}' &= \{x : J \rightarrow \bigcup_{j \in J} X_j : \forall j \in F, x_j \in B_j \cap A_j, B_j \in \mathcal{T}_j \text{ y} \\ &\quad \forall j \in J \setminus F, x_j \in X_j \cap A_j\} \\ &= \{\bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(B'_j) : B'_j \in \mathcal{T}_j|_{A_j}, \forall j \in J\} \\ &= \{\prod_{j \in J} B'_j : B'_j \in \mathcal{T}_j|_{A_j}\} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$G = \prod_{j \in J} B'_j \in \prod_{j \in J} (\mathcal{T}_j|_{A_j}).$$

Ejercicio 1.8 (34). Si X, Y son e.t. y $A \subset X, B \subset Y$, probar que en el espacio $X \times Y$ se verifica

(I) $A \overset{\circ}{\times} B = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$

(II) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

(III) $\text{Fr}(A \times B) = (\overline{A} \times \text{Fr}(B)) \cup (\text{Fr}(A) \times \overline{B})$

Solución. Sea $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ e.t., $A \subset X, A' \subset X'$. Entonces, $(X \times X', \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es e.t..

(I)

(\Rightarrow) $\overset{\circ}{A} \in \mathcal{T}, \overset{\circ}{A}' \in \mathcal{T}'$. Como $\overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{A}' \subset A \times A' \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ es abierto, tenemos que $\overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{A}' \subset A \overset{\circ}{\times} A'$ por ser $A \overset{\circ}{\times} A'$ el mayor abierto de $A \times A'$.

(\Leftarrow) Por la definición de abierto, $A \overset{\circ}{\times} A' = \bigcup \{S \subset X \times X' : S \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}', S \subset A \times A'\}$. Por tanto,

$$A \overset{\circ}{\times} A' = \bigcup_{j \in J} (U_j \times U'_j)$$

donde $U_j \in \mathcal{T}$, $U'_j \in \mathcal{T}'$ y $U_j \subset A$, $U'_j \subset A'$, $\forall j \in J$. Como $U_j \subset \overset{\circ}{A}$ y $U'_j \subset \overset{\circ}{A'}$, $\forall j \in J$, entonces

$$\bigcup_{j \in J} (U_j \times U'_j) \subset \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{A'},$$

es decir, $A \times A' \subset \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{A'}$.

(II)

(\Rightarrow) $A \subset \overline{A}$ y $A' \subset \overline{A'} \Rightarrow A \times A' \subset \overline{A} \times \overline{A'}$. Como $\overline{A \times A'}$ es el menor cerrado que contine a $A \times A'$ entonces, $\overline{A \times A'} \subset \overline{A} \times \overline{A'} \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$?

(\Leftarrow) A partir de la definición de clausura,

$$\overline{A \times A'} = \bigcap \{C \times C' \subset A \times A' : C \times C' \text{ es cerrado en } X \times X', A \times A' \subset C \times C'\}$$

Entonces,

$$\overline{A \times A'} = \bigcap_{j \in J} (G_j \times G'_j)$$

donde G_j cerrado en (X, \mathcal{T}) y G'_j es cerrado en (X', \mathcal{T}') , y $A \subset G_j$ y $A' \subset G'_j$, $\forall j \in J \Rightarrow \overline{A} \subset G_j$ y $\overline{A'} \subset G'_j$, $\forall j \in J$. Por tanto,

$$\overline{A} \times \overline{A'} \subset \bigcap_{j \in J} (G_j \times G'_j) = \overline{A \times A'}$$

(III)

Ejercicio 1.9 (35). Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ familia no vacía de e.t., $A_j \subset X_j$, $\forall j \in J$. Entonces, $\prod_{j \in J} A_j$ es denso en $\prod_{j \in J} X_j$ si y solo si A_j es denso en X_j , $\forall j \in J$.

Solución.

(\Rightarrow) Por ser $\prod_{j \in J} A_j$ denso en $\prod_{j \in J} X_j$, tenemos que

$$\overline{\prod_{j \in J} A_j} = \prod_{j \in J} X_j$$

entonces,

$$X_{j_0} = p_{j_0}(\prod_{j \in J} X_j) = p_{j_0}(\overline{\prod_{j \in J} A_j}) \subset \overline{p_{j_0}(\prod_{j \in J} A_j)} = \overline{A_{j_0}}$$

por tanto, $X_{j_0} = \overline{A_{j_0}} \Rightarrow A_j$ es denso en X_j , $\forall j \in J$.

(\Leftarrow) Sea A_j denso en $X_j, \forall j \in J$. Ahora, $\forall U \in \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j \setminus \{\emptyset\}, \exists B \in \mathcal{B}$ base de $\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j : B \subset U$, entonces

$$B = \prod_{j \in J} U_j : U_j \in \mathcal{T}_j \quad y \quad U_j = X_j, \forall j \in J \setminus F, F \text{ finito}$$

Como A_j es denso en X_j , tenemos que $U_j \cap A_j \neq \emptyset, \forall j \in J$. Por tanto,

$$\emptyset \neq \left(\prod_j U_j \right) \cap \left(\prod_{j \in J} A_j \right) \subset U \cap \left(\prod_{j \in J} A_j \right)$$

Es decir, $\prod_{j \in J} A_j$ es denso en $\prod_{j \in J} X_j$.

Ejercicio 1.10 (36). Seas $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}, \{(X'_j, \mathcal{T}'_j)\}_{j \in J}$ familias no vacías de e.t., (X_j, \mathcal{T}_j) es homeomorfo a $(X'_j, \mathcal{T}'_j), \forall j \in J$. Entonces, $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$ es homeomorfo a $(\prod_{j \in J} X'_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}'_j)$.

Solución. Como $(X_j, \mathcal{T}_j) \simeq (X'_j, \mathcal{T}'_j)$, entonces $\exists f_j : (X_j, \mathcal{T}_j) \rightarrow (X'_j, \mathcal{T}'_j)$ homeomorfismo. Sea

$$f : \left(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j \right) \rightarrow \left(\prod_{j \in J} X'_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}'_j \right)$$

$$f = \prod_{j \in J} f_j = f_1 \times f_2 \times \cdots$$

donde

$$(x_1, x_2, \cdots) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2), \cdots)$$

Entonces, f_j continua $\forall j \in J \Rightarrow f$ continua y f_j^{-1} continua $\forall j \in J \Rightarrow f^{-1}$ continua, ya que

$$\prod_{j \in J} (f_j^{-1}) = \left(\prod_{j \in J} f_j \right)^{-1}$$

Ejercicio 1.11 (37). Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$. Probar que los subconjuntos de un espacio producto finito $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ de la forma $G_1 \times \cdots \times G_n$ donde cada $G_j \in \mathcal{T}_j$ forman una base de $X = \prod_{j \in J} X_j$.

Solución. A partir de la base para un espacio producto arbitrario.

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{j \in J} G_j : G_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J \text{ y } G_j = X_j, \forall j \in J \setminus F, F \text{ finito} \right\}$$

donde J es finito, $J = \{1, \cdots, n\}$. Entonces,

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{j \in J} G_j : G_j \in \mathcal{T}_j \right\}$$

es base de X .

Ejercicio 1.12 (38). En la circunferencia $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, con la topología usual restringida, se identifican los puntos diametralmente opuestos. Probar que el espacio cociente resultante es homeomorfo al obtenido a partir del intervalo $[0, 1]$ identificando los extremos.

Solución. <https://math.stackexchange.com/questions/311196/homeomorphism-between-the-real-projective-line-and-a-circle>

El obtenido a partir del intervalo $[0, 1]$ identificando los extremos es homeomorfo a \mathbb{S}^1 .

Ejercicio 1.13 (46). Sea (X, \mathcal{T}) e.t. T_1 con X finito. Entonces, (X, \mathcal{T}) es discreto.

Nota. Sea X un conjunto y $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$. Entonces, \mathcal{T}_d se llama topología discreta en X y (X, \mathcal{T}_d) el espacio discreto en X .

Solución.