

# Topología

Hugo Del Castillo Mola

20 de octubre de 2022

# Índice general

<b>I</b>	<b>Topología General</b>	<b>2</b>
<b>1.</b>	<b>Espacios Topológicos Arbitrarios</b>	<b>3</b>
1.1.	Espacios Topológicos . . . . .	3
1.2.	Entornos . . . . .	8
1.3.	Bases . . . . .	13
1.4.	Subespacios . . . . .	15
1.5.	Funciones continuas . . . . .	16
1.6.	Espacio Producto . . . . .	19
1.7.	Espacio Cociente . . . . .	22
1.8.	Espacio Suma . . . . .	25
<b>2.</b>	<b>Propiedades de Separación</b>	<b>27</b>
2.1.	Espacio Regular . . . . .	31
2.2.	Espacio Completamente Regular . . . . .	32
2.3.	Espacios Normales . . . . .	34
<b>3.</b>	<b>Propiedades Numerabilidad</b>	<b>42</b>
3.1.	Axiomas Numerabilidad . . . . .	42
3.2.	Separable . . . . .	46
3.3.	Lindelöf . . . . .	48
<b>4.</b>	<b>Espacios Compactos</b>	<b>53</b>

# **Parte I**

## **Topología General**

# Capítulo 1

## Espacios Topológicos Arbitrarios

### 1.1. Espacios Topológicos

**Definición 1.1** (Topología). Se llama topología sobre un conjunto  $X$  a  $\forall \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  que verifique:

(G1)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ .

(G2)  $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$

(G3)  $\forall \{A_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$

**Observación.** Al par  $(X, \mathcal{T})$  se denomina espacio topológico y los elementos de  $X$  son puntos del espacio topológico.

**Ejemplo.** (I) Sea  $X$  un conjunto, entonces  $\mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_D$  es una topología y se llama topología discreta.

(II) La colección  $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$  es también una topología y la llamamos topología trivial.

(III) Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $\mathcal{T}_d = \{U \subset X : \forall x \in U, \epsilon > 0 : B_\epsilon \subset U\}$  es una topología y la llamamos topología inducida por la métrica  $d$ .

**Observación.** Toda métrica induce un espacio topológico pero no todo espacio topológico es inducido por una métrica.

**Definición 1.2** (Espacio Metrizable). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t., decimos que es un espacio metrizable si  $\exists$  métrica sobre  $X$  tal que  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ .

**Definición 1.3** (Conjunto Abierto). Sea  $(X, \mathcal{T})$  espacio topológico, decimos que  $U \subset X$  es un conjunto abierto si  $U \in \mathcal{T}$ .

**Observación.** Si  $U$  es un conjunto abierto, entonces  $X \setminus U$  es un conjunto cerrado.

**Observación.** Existen conjuntos que son abiertos y cerrados simultáneamente. Y existen conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.

**Ejemplo.** Sea el espacio topológico  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  entonces  $S = (0, 1]$  no es ni abierto ni cerrado.

**Ejemplo.** Sea el espacio topológico  $(X, \mathcal{T}_d)$  donde  $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$  entonces  $\forall S \subset X$ ,  $S$  es abierto y cerrado simultáneamente.

**Definición 1.4** (Comparación de Topologías). Sean  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}'$  dos topologías sobre un conjunto  $X \neq \emptyset$ . Si  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$  se dice que  $\mathcal{T}'$  es más fina (más fuerte) que  $\mathcal{T}$ . También podemos decir que  $\mathcal{T}$  es menos fina que  $\mathcal{T}'$ .

**Notación.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} = \{C \subset X : C \text{ es cerrado en } (X, \mathcal{T})\}$ .

**Proposición 1.1** (Dualidad conjuntos abiertos y cerrados). Sea  $\mathcal{F}$  es la familia de conjuntos cerrados de un espacio topológico  $(X, \mathcal{F})$ .

(F1)  $\emptyset, X$  son cerrados.

(F2)  $\forall C_1, C_2$  cerrados  $\Rightarrow C_1 \cup C_2$  es cerrado.

(F3)  $\forall \{C_j\}_{j \in J}$  cerrados  $\Rightarrow \bigcap_{j \in J} C_j$  es cerrado.

Recíprocamente, si  $X \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$  y  $\mathcal{F}$  cumple (i, ii, iii) entonces la colección de los miembros complementarios a  $\mathcal{F}$  es una topología sobre  $X$  en donde la familia de cerrados es  $\mathcal{F}$ .

**Observación.** Este resultado muestra la relación entre las nociones de conjuntos abiertos y cerrados. Cualquier resultado sobre conjuntos abiertos en un espacio topológico se convierte en uno sobre cerrados al remplazar **abierto** por **cerrado** y  $\cup$  por  $\cap$ .

**Definición 1.5** (Adherencia). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t. y  $S \subset X$  se llama adherencia de  $S$  en  $(X, \mathcal{T})$  al conjunto

$$\bar{S} = \bigcap \{C \subset X : C \text{ es cerrado y } S \subset C\}$$

**Observación.**  $\bar{S}$  es cerrado,  $S \subset \bar{S}$  y  $\bar{S}$  es el menor cerrado que contiene a  $S$ .

**Lema 1.0.1.** Si  $A \subset B$ , entonces  $\bar{A} \subset \bar{B}$ .

**Demostración.** Como  $B \subset \bar{B}$ ,  $A \subset B \Rightarrow A \subset \bar{B}$  y por ser  $\bar{B}$  cerrado, se tiene que  $\bar{A} \subset \bar{B}$ .

**Proposición 1.2** (Propiedades Adherencia). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t. entonces

- (K1)  $\bar{\emptyset} = \emptyset$ ,
- (K2)  $\forall S \subset X, S \subset \bar{S}$ ,
- (K3)  $\forall S \subset X, \bar{\bar{S}} = S$ ,
- (K4)  $\forall A, B \subset X, \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ,
- (K5)  $\forall C \subset X, C \text{ es cerrado} \Leftrightarrow C = \bar{C}$ .

**Demostración.** (iv) Sea  $(X, \mathcal{T})$  espacio topológico. Dado que  $A \cup B \subset \overline{A \cup B}$  se tiene que  $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ . Por otro lado,  $A \subset A \cup B$  y  $B \subset A \cup B$  entonces  $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$  y  $\bar{B} \subset \overline{A \cup B} \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$ .

**Teorema 1.1.** Sea  $X \neq \emptyset$  y  $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X) : S \mapsto \varphi(S) \equiv \bar{S}$  tal que  $\varphi$  cumple las 4 propiedades anteriores. Entonces, existe una única topología  $\mathcal{F}$  sobre  $X$  tal que  $\forall S \subset X, \varphi(S)$  es la adherencia de  $S$  en  $(X, \mathcal{F})$ .

**Demostración.** Sea  $\mathcal{F} = \{F \subset X : \bar{F} = F\} \subset \mathcal{P}(X)$ . Queremos ver que se cumplen las propiedades de Prop.1.1.(i, ii, iii).

(I) Por Prop.1.2(i, ii).

(II) Por Prop.1.2(iv), sean  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ . Entonces,  $\overline{F_1 \cup F_2} = \overline{F_1} \cup \overline{F_2} = F_1 \cup F_2 \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$ .

(III) Si  $F \subset G$  por Prop.1.2(iv)  $\overline{G} = \overline{F} \cup (\overline{G \setminus F}) \Rightarrow \overline{F} \subset \overline{G}$  Ahora, sean  $F_j \in \mathcal{F}, \forall j \in J$  Entonces,  $\bigcap_{j \in J} F_j \subset F_j, \forall j \in J \Rightarrow \overline{\bigcap_{j \in J} F_j} \subset \overline{F_j}, \forall j \in J$  y por tanto,  $\overline{\bigcap_{j \in J} F_j} \subset \bigcap_{j \in J} \overline{F_j} = \bigcap_{j \in J} F_j$  y por Prop.1.2(ii) se tiene que  $\overline{\bigcap_{j \in J} F_j} = \bigcap_{j \in J} F_j$ , esto es,  $\bigcap_{j \in J} F_j \in \mathcal{F}$ .

Por tanto,  $\mathcal{F}$  es la familia de cerrados de algún e.t.  $(X, \mathcal{T})$ . Falta por ver que la adherencia es la operación  $\varphi$ . Dado que  $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$  se tiene que  $\overline{S} \in \mathcal{F}$  y por Prop.1.2(ii)  $S \subset \overline{S}$ . Si  $C \in \mathcal{F}$  tal que  $S \subset C$  entonces  $\overline{S} \subset \overline{C} = C \Rightarrow \overline{S}$  es el elemento de  $\mathcal{F}$  más pequeño que contiene a  $S$ .

**Observación.** A la operación anterior se le llama operación de clausura de Kuratowski.

**Definición 1.6** (Interior). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  $S \subset X$  se llama interior de  $S$  en  $(X, \mathcal{T})$  al conjunto

$$\overset{\circ}{S} = \bigcup \{A \subset X \text{ abierto y } A \subset S\}.$$

**Observación.**  $\overset{\circ}{S}$  es abierto de  $\mathcal{T}$ ,  $\overset{\circ}{S} \subset S$  y es el mayor abierto contenido en  $S$ .

**Proposición 1.3** (Propiedades interior). content

**Proposición 1.4.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  $S \subset X$ . Entonces:

$$(I) X \setminus \overline{S} = (X \setminus S)^\circ.$$

$$(II) X \setminus \overset{\circ}{S} = \overline{X \setminus S}.$$

**Observación.**  $\overline{S^c} = \overset{\circ}{S}^c$ .

**Demostración.** (I)  $X \setminus \bigcap_{C \in \mathcal{F}: S \subset C} C = \bigcup_{C \in \mathcal{F}: S \subset C} X \setminus C = \bigcup_{G \in \mathcal{T}: G \subset X \setminus S} G = (X \setminus S)^\circ$

$$(II) X \setminus \overset{\circ}{S} = X \setminus \bigcup_{G \in \mathcal{T}: G \subset S} G = \bigcap_{G \in \mathcal{T}: G \subset S} (X \setminus G) = \bigcap_{C \in \mathcal{F}: X \setminus S \subset C} C =$$

$$\overline{X \setminus S}$$

**Definición 1.7** (Frontera). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  $S \subset X$ . Se llama frontera de  $S$  en  $(X, \mathcal{T})$  a

$$Fr(S) = \overline{S} \cap \overline{(X \setminus S)}$$

**Observación.**  $Fr(S)$  es cerrado

**Observación.**  $Fr(S) = Fr(X \setminus S)$

**Observación.**  $Fr(S) \not\subset S$

**Proposición 1.5.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  $S \subset X$ . Entonces:

$$(I) \quad \overline{S} = S \cup Fr(S)$$

$$(II) \quad \overset{\circ}{S} = S \setminus Fr(S) = S \setminus (Fr(S) \cap S)$$

$$(III) \quad X = \overset{\circ}{S} \cup (X \setminus \overset{\circ}{S}) \cup Fr(S)$$

$$(IV) \quad Fr(S) = \overline{S} \setminus \overset{\circ}{S}$$

**Demostración.** (I)

$$\begin{aligned} S \cup Fr(S) &= S \cup (\overline{S} \cap \overline{X \setminus S}) = \\ &= (S \cup \overline{S}) \cap (S \cup \overline{X \setminus S}) = \overline{S} \end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned} S \setminus Fr(S) &= S \setminus (\overline{S} \cap \overline{X \setminus S}) = \\ &= (S \setminus \overline{S}) \cup (S \setminus \overline{X \setminus S}) = \emptyset \cup (S \cap (X \setminus \overline{X \setminus S})) = \\ &= (S \cap (X \setminus (X \setminus \overset{\circ}{S}))) = (S \cap \overset{\circ}{S}) = \overset{\circ}{S} \end{aligned}$$

(III)

$$\begin{aligned} X &= \overset{\circ}{S} \cup (X \setminus \overset{\circ}{S}) = \overset{\circ}{S} \cup \overline{X \setminus \overset{\circ}{S}} = \\ &= \overset{\circ}{S} \cup [(X \setminus S) \cup Fr(X \setminus S)] = \\ &= \overset{\circ}{S} \cup [(X \setminus S) \cup (Fr(X \setminus S) \cap (X \setminus S)) \cup Fr(X \setminus S)] = \\ &= \overset{\circ}{S} \cup (X \setminus S) \cup Fr(X \setminus S) = \overset{\circ}{S} \cup (X \setminus \overset{\circ}{S}) \cup Fr(S) \end{aligned}$$



(IV)

$$Fr(S) = \bar{S} \cap \overline{(X \setminus S)} = \bar{S} \cap (X \setminus \overset{\circ}{S})$$

**Definición 1.8.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  $S \subset X$  se dice que es denso en  $(X, \mathcal{T})$  si  $\bar{S} = X$

## 1.2. Entornos

**Definición 1.9.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  $x \in X$ ,  $V \subset X$ . Se dice que  $V$  es un entorno de  $x$  en  $(X, \mathcal{T})$  si  $\exists A \in \mathcal{T} : x \in A \subset V$ .

**Definición 1.10.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  $x \in X$ ,  $\mathcal{V}(x)$  es la colección de todos los entornos de  $x$  y se llama sistema de entornos de  $x$  en  $(X, \mathcal{T})$ .

**Observación.** Si  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  $x \in X$ ,  $V \subset X$  entonces  $V$  es entorno de  $x \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{V}$ .

**Notación.**  $U^x, V^x$  entornos de  $x$ .

**Proposición 1.6.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  $\mathcal{V}(x)$  tiene las siguiente propiedades:

- (N1)  $\forall U \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in U$ .
- (N2)  $\forall U, V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{V}(x)$ .
- (N3)  $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists V \in \mathcal{V}(x)$  tal que  $\forall y \in V, U \in \mathcal{V}(y)$ .
- (N4)  $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists V \subset X : U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$ .

**Demostración.** (I) Trivial, a partir de la definición.

$$(II) \ x \in \overset{\circ}{U}, x \in \overset{\circ}{V} \Rightarrow x \in \overset{\circ}{U} \cap \overset{\circ}{V} \subset \overset{\circ}{U \cap V} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{V}(x).$$

(III) Sean  $U \in \mathcal{V}(x), V = \overset{\circ}{U}$  como  $x \in \overset{\circ}{U} = V \Rightarrow \forall y \in V \in \mathcal{T}$  y  $V \subset U \Rightarrow U \in \mathcal{V}(y)$ .

$$(IV) \ U \in \mathcal{V}(x), U \subset V \Rightarrow x \in \overset{\circ}{U} \subset \overset{\circ}{V} \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x).$$

**Proposición 1.7.** Sea  $X \neq \emptyset$ ,  $\forall x \in X : \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{P}(x)$  que cumple (N1, N2, N3, N4) anteriores, entonces  $\exists! \mathcal{T}$  sobre  $X : \forall x \in X, \mathcal{V}(x)$  es el sistema de entornos de  $x$  en  $(X, \mathcal{T})$ .

**Demostración.** Sea  $\mathcal{T} = \{G \subset X : \forall x \in G, G \in \mathcal{V}(x)\}$ . Vemos que  $\mathcal{T}$  es una topología:

(I) Prop.1.6.(N1)  $X \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow X \in \mathcal{T}$

(II)  $\forall G_1, G_2 \in \mathcal{T}, x \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow G_1, G_2 \in \mathcal{V}(x), \text{ Prop.1.6.(N2)} \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{V}(x)$ .

(III)  $\forall \{G_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{T}, x \in \bigcup_{j \in J} G_j \Rightarrow \exists j_0 \in J : G_{j_0} \in \mathcal{V}(x), \text{ Prop.1.6.(N4)} \Rightarrow \bigcup_{j \in J} G_j \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \bigcup_{j \in J} G_j \in \mathcal{T}$

$\Rightarrow \mathcal{T}$  es topología.

Vemos ahora que  $S$  es entorno de  $x \Leftrightarrow S \in \mathcal{V}(x)$ .

- $(\Rightarrow) S \text{ entorno de } x \text{ en } (X, \mathcal{T}) \Rightarrow \exists G \in \mathcal{T} : x \in G \subset S \Rightarrow G \in \mathcal{V}(x) \text{ Prop.1.6.(iv)} \Rightarrow S \in \mathcal{V}(x)$ .
- $(\Leftarrow) S \in \mathcal{V}(x)$ . Sea  $U \subset S$  ACABAR

Falta ver que  $\mathcal{T}$  es única.

**Definición 1.11** (Base de Entorno). Sea  $x \in X, \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ . Se dice que  $\mathcal{B}(x)$  es una base de un entorno de  $x$  en  $(X, \mathcal{T})$  si  $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset U$ .

**Observación.** De la definición de base queda determinado un entorno como  $\mathcal{V}(x) = \{U \subset X : \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset U\}$

**Ejemplo.**  $\forall (X, \mathcal{T})$  e.t.  $\mathcal{V}(x)$  es una base de entornos de  $x$ .

**Ejemplo.** Sea  $(X, \mathcal{T}_D), \mathcal{T}_D = \mathcal{P}(x), \forall x \in X$  entonces  $\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}$  es base de entornos de  $x$ .

**Ejemplo.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  metrizable.  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ ,  $d$  métrica tal que  $\forall x \in X, \mathcal{B}(x) = \{B_\epsilon(x) : \epsilon > 0\}$  entonces  $\mathcal{B}(x)$  es base de entornos de  $x$ .

**Ejemplo.**  $\forall (X, \mathcal{T})$  e.t.,  $\mathcal{B}(x) = \{\dot{U} : U \in \mathcal{V}(x)\}$  es base de entornos de  $x$ .

**Ejemplo.** Sea  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) : \forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{B}(x) = \{[x - \epsilon, x + \epsilon] : \epsilon > 0\}$  entonces  $\mathcal{B}(x)$  es base de entornos de  $x$ .

**Proposición 1.8** (Propiedades de Bases de Entornos). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t. y  $\mathcal{B}(x)$  una base de entornos de  $x$  en  $(X, \mathcal{T})$ ,  $\forall x \in \mathcal{T}$ . Entonces:

(V1)  $B \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow x \in B$ .

(V2)  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}(x) : B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

(V3)  $B_1 \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow \exists B_2 \in \mathcal{B}(x) : \forall y \in B_2, \exists B \in \mathcal{B}(y)$  tal que  $B \subset B_1$ .

**Demostración.** (V1)  $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x), B \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow x \in B$ .

(V2)  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}(x) : B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

(V3)  $B_1 \in \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$  Prop.1.6.(iii)  $\Rightarrow \exists U \in \mathcal{V}(x)$  tal que  $\forall y \in U, B_1 \in \mathcal{B}(y) \Rightarrow \exists B_2 \in \mathcal{B}(x) : B_2 \subset U$  tal que  $\forall y \in B_2, B_1 \in \mathcal{V}(y) \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}(y) : B \subset B_1$ .

**Proposición 1.9.** Sea  $X \neq \emptyset, \mathcal{B} : X \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$  cumpliendo (i, ii, iii) anteriores, entonces se define una topología en  $X$  en la que  $\mathcal{B}(x)$  es una base de entornos de  $x, \forall x \in X$ .

**Demostración.** Sea  $\forall x \in X$ ,

$$\mathcal{V}(x) = \{U \subset X : \exists B \subset U \text{ para algún } B \in \mathcal{B}(x)\}$$

tal que  $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$  tiene las propiedades V1, V2, V3. Veamos que  $\mathcal{V}(x)$  tiene las propiedades N1, N2, N3, N4.

(N1)  $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists B \subset U : B \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow x \in B \subset U \Rightarrow x \in U$ .

(N2)  $U_1, U_2 \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x) : B_1 \subset U_1, B_2 \subset U_2$  y (V2)  $\Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}(x) : B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$ . Entonces,  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}(x)$ .

(N3)  $U \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists B \subset U : B \in \mathcal{B}(x)$ , (V3)  $\Rightarrow \exists B_0 \in \mathcal{B}(x) : \forall y \in B_0, \exists B_y \in \mathcal{B}(y) : B_y \subset B$ . Entonces  $B \in \mathcal{V}(y), \forall y \in B_0 \Rightarrow U \in \mathcal{V}(y), \forall y \in B_0$ .

(N4)  $U \in \mathcal{V}(x), V \subset X : U \subset V \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$ .

Entonces,  $\mathcal{V}(x)$  es un sistema de entornos de  $x$ ,  $\forall x \in X$  y  $\forall x \in X$ ,  $\mathcal{B}(x)$  es una base de entornos de  $x$  en la topología resultante en  $X$ .

**Definición 1.12** (Bases de Entornos Equivalentes). Sea  $X \neq \emptyset$ . Si una topología sobre  $X$  está definida por dos bases de entornos, se dice que las bases son equivalentes.

**Proposición 1.10.** Sea  $X \neq \emptyset$ . Dos bases de entornos de  $x$ ,  $\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)$  de  $X$  son equivalentes si y solo si  $\forall x \in X, \forall i \in \{1, 2\}, \forall B \in \mathcal{B}_i(x), \exists B_j \in \mathcal{B}_j(x) : B_j \subset B, \forall j \in \{1, 2\}, j \neq i$ .

**Proposición 1.11** (Caracterización bases equivalentes). Sean  $\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)$  dos bases de entornos de  $x$  en  $(X, \mathcal{T})$ , estas son equivalentes  $\Leftrightarrow \forall x \in X, \forall i \in \{1, 2\}, \forall B_i \in \mathcal{B}_i(x), \exists B_j \in \mathcal{B}_j(x), j \in \{1, 2\}, j \neq i : B_j \subset B_i$ .

**Demostración.**  $(\Rightarrow) \forall i \in \{1, 2\}, \forall B_i \in \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists B_j \in \mathcal{B}(x), \forall j \in \{1, 2\}, j \neq i$ .

$(\Leftarrow)$   
ACABAR

**Definición 1.13.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.  $S \subset X, x \in X$ .

- (I) Se dice que  $x$  es un punto interior de  $S$  en  $(X, \mathcal{T})$  si  $\exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \subset S$ .
- (II) Se dice que  $x$  es un punto adherente de  $S$  en  $(X, \mathcal{T})$  si  $\forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset$ .
- (III) Se dice que  $x$  es un punto de acumulación si  $\forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \setminus \{x\} \cap S \neq \emptyset$ .
- (IV) Se dice que  $x$  es un punto de frontera si  $\forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset, \mathcal{U}^x \cap (X \setminus S) \neq \emptyset$ .
- (V) Se dice que  $x$  es punto aislado si  $\exists \mathcal{U}^x$  tal que  $\mathcal{U}^x \cap S = \{x\}$ .

**Definición 1.14.** El conjunto de puntos de acumulación se llama conjunto derivado y se denota  $S'$ .

**Proposición 1.12.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t. Entonces,

- (I)  $A \subset X$  es abierto de  $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \subset A$ .
- (II)  $C \subset X$  es cerrado  $\Leftrightarrow \forall x \notin C, \exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \cap C = \emptyset$ .
- (III)  $S \subset X, \overset{\circ}{S} = \{x \in X : \exists \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \subset S\}$ .
- (IV)  $S \subset X, \overline{S} = \{x \in X : \forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset\}$ .
- (V)  $S \subset X, Fr(S) = \{x \in X : \forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset, \mathcal{U}^x \cap (X \setminus S) \neq \emptyset\}$ .

**Demostración.** (I) Es la propiedad V1.

(II)  $C$  es cerrado  $\Leftrightarrow X \setminus C \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in X \setminus C, \exists \mathcal{U}^x : \mathcal{U}^x \subset X \setminus C \Rightarrow X \setminus C$  es abierto.

(III) Sigue de (iv) aplicando las leyes de De Morgan.

(IV)  $X \setminus \overline{S} = (X \setminus S)^\circ = \{x \in X : \exists \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \subset X \setminus S\}$  cuyo complementario es  $\overline{S} = \{x \in X : \forall \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^x \cap S \neq \emptyset\}$ .

(V)  $Fr(S) = \overline{S} \cap \overline{X \setminus S}$

**Observación.** En la proposición anterior se pueden usar bases en lugar de sistemas de entornos.

**Corolario 1.1.1.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  $S \subset X$  entonces

- (I)  $\overline{S} = \{x \in X : x \text{ es punto adherente de } S\}$ .
- (II)  $\overset{\circ}{S} = \{x \in X : x \text{ es punto interior de } S\}$ .
- (III)  $Fr(S) = \{x \in X : x \text{ es punto frontera de } S\}$ .

**Proposición 1.13.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.  $E \subset X$ . Entonces  $E$  es denso en  $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, U \cap E \neq \emptyset$ .

**Demostración.**  $(\Rightarrow)$  Suponemos que  $E$  es denso, es decir,  $\overline{E} = X$ . Entonces,  $\forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ ,  $U$  es abierto  $\Rightarrow \forall x \in \overset{\circ}{U} = U \Rightarrow U$  es entorno de  $x$  en  $(X, \mathcal{T})$ . Y como  $x$  es punto adherente de  $E \Rightarrow U \cap E \neq \emptyset$ .

$(\Leftarrow)$   $\forall x \in X, \forall \mathcal{U}^x$  entorno de  $x \Rightarrow \mathcal{U}^x \subset \mathcal{U}^x \subset X \Rightarrow \mathcal{U}^x \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$  y por la hipótesis  $\mathcal{U}^x \cap E \subset \mathcal{U}^x \cap E \neq \emptyset \Rightarrow x$  punto adherente de  $E$ ,  $x \in \overline{E} \Rightarrow X \subset \overline{E}$ .

### 1.3. Bases

**Definición 1.15** (Base). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ . Se dice que  $\mathcal{B}$  es base de  $\mathcal{T}$  si  $\forall A \in \mathcal{T}, \exists \mathcal{B}_A \subset \mathcal{B} : A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_A} B$ . Y se dice que  $\mathcal{T}$  está engendrada por  $\mathcal{B}$ .

**Observación.**  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$  tal que  $\mathcal{T} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}_A} B : \mathcal{B}_A \subset \mathcal{B}\}$ .

**Observación.**  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$  es una base de  $X \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{T}, \forall x \in A \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset A$ .

**Ejemplo.** (I)  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u), \mathcal{B} = \{(a, b) : a < b\}$  es base de  $\mathcal{T}_u$ .

(II)  $(X, \mathcal{T}_u), \mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$  es base de  $\mathcal{T}_u$ .

(III)  $(X, \mathcal{T})$  metrizable,  $\mathcal{T}_d$  topología inducida por  $d$ . Entonces  $\mathcal{B} = \{B_\epsilon(x) : x \in X, \epsilon > 0\}$  es base de  $\mathcal{T}_d$ .

**Proposición 1.14.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$  entonces,  $\mathcal{B}$  es base de  $\mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$  es base de entornos de  $x$  en  $(X, \mathcal{T})$ .

**Observación.** La única diferencia entre bases y bases de entornos es que las bases no tienen por que consistir de conjuntos abiertos.

**Demostración.**  $(\Rightarrow)$  Suponemos que  $\mathcal{B}$  es base de  $X$ ,  $x \in X$  y  $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ . Sea  $U \in \mathcal{B}_x$  entonces  $U \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T} : x \in U = \overset{\circ}{U} \Rightarrow U$  es un entorno de  $x$ . Sea  $U \in \mathcal{V}(x)$ , entonces  $x \in \overset{\circ}{U} \in \mathcal{T}$  donde  $\mathcal{T} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} B : \mathcal{B}_U \subset \mathcal{B}\}$ , es decir,  $\overset{\circ}{U}$  es la unión de elementos de  $\mathcal{B}$  entonces  $\exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset \overset{\circ}{U}$ . Por tanto,  $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists B \in \mathcal{B}_x : B \subset U \Rightarrow \mathcal{B}_x$  es base de entornos de  $x$ .

$(\Leftarrow)$  Suponemos que  $\mathcal{B}_x$  es una base de entornos de  $x$ ,  $\forall x \in X$  y  $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$ . Entonces,  $\forall A \in \mathcal{T}, \forall x \in A, \exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subset A \Rightarrow$

$$A = \bigcup \{B_x : x \in A\} \Rightarrow \mathcal{B} \text{ es base para } X.$$

**Teorema 1.2.** Sea  $X \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ . Entonces,  $\mathcal{B}$  es base de una topología  $\mathcal{T}$  en  $X \Leftrightarrow$

$$(I) \quad X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

$$(II) \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, p \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} : p \in B_3 \subset B_1 \cap B_2.$$

**Demostración.** (I)  $(\Rightarrow) \mathcal{T} = \{ \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \in \mathcal{B} \}, X \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists \mathcal{B}_0 \in \mathcal{B} : X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0} B.$

(II)  $(\Rightarrow)$  A partir de la definición de base.  $(B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2).$

$(\Leftarrow)$  Suponemos que  $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$  donde  $\mathcal{B} = \{K \subset X : K \text{ cumple las propiedades (i), (ii)}\}$ . Sea  $\mathcal{T} = \{ \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \}$ . Entonces,

$$(G1) \quad \emptyset = \bigcup_{B \in \emptyset} B \in \mathcal{T} \text{ y } X \in \mathcal{T}.$$

$$(G2) \quad \left( \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B \right) \cap \left( \bigcup_{B' \in \mathcal{B}_2} B' \right) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1, B' \in \mathcal{B}_2} B \cap B', \text{ por (ii)} \Rightarrow \text{la intersección de dos elementos de } \mathcal{B} \text{ es una unión de elementos de } \mathcal{B}.$$

$$(G3) \quad \{A_j\}_{j \in J} = \{ \bigcup_{B \in \mathcal{B}_j} B : j \in J \} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}.$$

**Definición 1.16** (Subbase). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.  $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ . Se dice que  $\mathcal{S}$  es una subbase de  $\mathcal{T}$  si la familia de todas las intersecciones finitas de  $\mathcal{S}$  es una base de  $\mathcal{T}$ .

**Observación.**  $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}, \mathcal{B} = \{ \bigcap_{S \in \mathcal{S}'} S : \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \text{ es finito} \}$  es base de  $\mathcal{T}$ .

**Proposición 1.15.** Sea  $X \neq \emptyset, \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ . Entonces,  $\mathcal{S}$  es una subbase de alguna topología sobre  $X \Leftrightarrow \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$ .

**Demostración.**  $(\Rightarrow)$  Sea  $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$  una subbase de  $\mathcal{T} \Rightarrow \{ \bigcap_{S \in \mathcal{S}'} S : \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \} = \mathcal{B}$  es base de  $\mathcal{T} \Rightarrow \forall B \in \mathcal{B}, \exists S_B \in \mathcal{S} : B \subset S_B \Rightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} S_B \subset \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \subset X \Rightarrow \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X.$

$(\Leftarrow)$  Sea  $\mathcal{B} = \{ \bigcap_{S \in \mathcal{S}'} S' : \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \}$ .

- (i)  $\bigcap_{S \in \mathcal{S}} S = X \Rightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X.$
- (ii)  $(\bigcap_{S \in \mathcal{S}_1} S) \cap (\bigcap_{S' \in \mathcal{S}_2} S') \cap \bigcap_{S \in \mathcal{S}_1, S' \in \mathcal{S}_2} (S' \cap S) \subset \mathcal{B}.$

## 1.4. Subespacios

**Definición 1.17** (Subespacio). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  $S \subset X$ . Se llama *topología relativa a  $S$*  a

$$\mathcal{T}|_S = \{A \cap S : A \in \mathcal{T}\}$$

y el par  $(S, \mathcal{T}|_S)$  se llama *subespacio topológico*.

**Proposición 1.16** (Propiedades Subespacio). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  $S \subset X$ . Entonces,

- (I)  $C \subset S, C \in \mathcal{T}|_S \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{T} : A \cap S = C.$
- (II)  $C \subset S, C$  cerrado en  $(S, \mathcal{T}|_S) \Leftrightarrow \exists F$  cerrado en  $(X, \mathcal{T}) : C = F \cap S.$
- (III)  $\forall C \subset S, \overline{C}^S = S \cap \overline{C}^X.$
- (IV)  $\forall x \in S, \mathcal{V}^x \subset S$  es un entorno de  $x$  en  $(S, \mathcal{T}|_S) \Leftrightarrow \exists \mathcal{U}^x$  entorno de  $x$  en  $(X, \mathcal{T})$  tal que  $\mathcal{U}^x \cap S = \mathcal{V}^x.$
- (V)  $\mathcal{B}$  base de  $\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{B}_S = \{B \cap S : B \in \mathcal{B}\}$  es base de  $(S, \mathcal{T}|_S).$

**Demostración.** (I) Definición de subespacio.

(II) Sigue de (i).

(III) Sigue de (ii) y la definición de clausura de  $C$  como la intersección de todos los conjunto cerrados que contienen  $E$ .

(IV) Sigue de (i) y la definición de entorno de  $x$  como un conjunto que contiene un subconjunto abierto que contiene a  $x$ .

(V) ACABAR

**Observación.** Sea  $S \subset X, C \subset S$  entonces no necesariamente  $\text{int}(C)_S \neq \text{int}(C)_X \cap S$ . Por ejemplo,  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u), S = C = \{0\} \times \mathbb{R}.$



**Definición 1.18.** Sea  $(\mathcal{P})$  una propiedad de e.t. Se dice que  $\mathcal{P}$  es propiedad hereditaria si dado e.t. que cumple  $\mathcal{P}$  todos sus subespacios cumplen  $\mathcal{P}$ .

## 1.5. Funciones continuas

**Definición 1.19** (Función continua). Sean  $(X, \mathcal{T})$ ,  $(X', \mathcal{T}')$  dos e.t. y  $f : X \rightarrow X'$  una aplicación. Se dice que  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  es una aplicación continua en  $a \in X$  si  $\forall \mathcal{V}^{f(a)}$  entorno de  $f(a)$  en  $(X', \mathcal{T}')$ ,  $\exists \mathcal{U}^a$  entorno de  $a$  en  $(X, \mathcal{T}) : f(\mathcal{U}^a) \subset \mathcal{V}^{f(a)}$ .

**Observación.** Se dice que  $f$  es continua si lo es  $\forall a \in X$ .

**Teorema 1.3.** Sean  $(X, \mathcal{T})$ ,  $(X', \mathcal{T}')$  dos e.t. y  $f : X \rightarrow X'$  una aplicación. Entonces, son equivalentes:

- (I)  $\forall A' \in \mathcal{T}', f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$
- (II)  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  es aplicación continua.
- (III)  $\forall C \subset X, f(\overline{C}^X) \subset \overline{(f(C))}^{X'}$ .
- (IV)  $\forall C' \subset X, \overline{f^{-1}(C')}^X \subset f^{-1}(\overline{C'}^{X'})$ .
- (V)  $\forall F'$  cerrado de  $(X', \mathcal{T}')$ ,  $f^{-1}(F')$  es cerrado de  $(X, \mathcal{T})$ .

**Demostración.**  $(i \Rightarrow ii)$  Sea  $a \in X$ ,  $\mathcal{V}^{f(a)}$  entorno de  $f(a)$  en  $(X', \mathcal{T}')$   $\Rightarrow \mathcal{V}^{\circ f(a)}, f(a) \in \mathcal{V}^{\circ f(a)}$ . Ahora, por (i), tenemos  $a \in f^{-1}(\mathcal{V}^{\circ f(a)}) \in \mathcal{T}$ . Sea  $f^{-1}(\mathcal{V}^{\circ f(a)}) = \mathcal{U}^a$ . Entonces,  $f(\mathcal{U}^a) = f(f^{-1}(\mathcal{V}^{\circ f(a)})) \subset \mathcal{V}^{\circ f(a)} \subset \mathcal{V}^{f(a)} \Rightarrow f$  es continua.

$(iii \Rightarrow ii)$  Sea  $C \subset X, a \in \overline{C}^X, \mathcal{V}^{f(a)}$  entorno de  $f(a)$  en  $(X', \mathcal{T}')$ . Entonces, por (ii),  $\exists \mathcal{U}^a$  entorno de  $a$  en  $(X, \mathcal{T})$  tal que  $f(\mathcal{U}^a) \subset \mathcal{V}^{f(a)} \Rightarrow \mathcal{U}^a \cap C \neq \emptyset \Rightarrow a \in \mathcal{U}^a \cap C \Rightarrow f(a) \in f(\mathcal{U}^a) \cap f(C) \subset \mathcal{V}^{f(a)} \cap f(C) \Rightarrow f(a) \in \overline{f(C)}^{X'}$ .

$(iii \Rightarrow iv)$   $\forall C' \subset X' \Rightarrow f'(C') \subset X'$  y por (iii)  $f(\overline{f^{-1}(C')})^X \subset \overline{f(f^{-1}(C'))}^{X'} \subset \overline{C'}^{X'} \Rightarrow \overline{f^{-1}(C')}^X \subset f^{-1}(\overline{C'}^{X'})$ .

$(iv \Rightarrow v)$   $F'$  cerrado de  $(X', \mathcal{T}')$   $\Rightarrow \overline{f^{-1}(C')}^X \subset f^{-1}(\overline{F'}^{X'}) = f^{-1}(F') \Rightarrow$

$f^{-1}(F')$  es cerrado en  $(X, \mathcal{T})$ .

$(v \Rightarrow i) A' \in \mathcal{T}' \Rightarrow X' \setminus A'$  cerrado de  $(X', \mathcal{T}') \Rightarrow f^{-1}(X' \setminus A)$  cerrado de  $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow X \setminus f^{-1}(X' \setminus A') \in \mathcal{T}$ .  $\forall x \notin f^{-1}(X' \setminus A') \Leftrightarrow f(x) \notin X' \setminus A' \Leftrightarrow f(x) \in A' \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A') \Rightarrow X \setminus f^{-1}(X' \setminus A')$ .

**Observación.**  $\forall (X, \mathcal{T})$  e.t. la aplicación  $1_X : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$  es continua.

**Observación.**  $\forall (X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$  e.t.  $\forall x'_0 \in X'$  la aplicación constante con  $c_{x'_0} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  es constante.

**Proposición 1.17.** Sea  $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), (X'', \mathcal{T}'')$  e.t.,  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  aplicación continua,  $f' : (X', \mathcal{T}') \rightarrow (X'', \mathcal{T}'')$  aplicación continua. Entonces,  $(f' \circ f) : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X'', \mathcal{T}'')$  es continua.

**Demostración.**  $\forall A'' \in \mathcal{T}'' \Rightarrow f^{-1}(A'') \in \mathcal{T}' \Rightarrow f^{-1}(f^{-1}(A'')) \in \mathcal{T}$  y  $(f' \circ f)^{-1}(A'') = f^{-1}(f^{-1}(A''))$ .

**Proposición 1.18.** Sea  $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$  e.t.,  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  continua. Entonces,  $f|_S : (S, \mathcal{T}|_S) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  es aplicación continua.

**Demostración.**  $\forall A' \in \mathcal{T}', (f|_S)^{-1}(A') = f^{-1}(A') \cap S \in \mathcal{T}|_S$ .

**Proposición 1.19.** Sea  $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$  e.t.,  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  continua,  $S \subset X$ . Entonces,  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (f(X), \mathcal{T}'|_{f(X)})$  es aplicación continua.

**Demostración.**  $\forall G' \in \mathcal{T}'|_S \Rightarrow \exists A' \in \mathcal{T}' : G' = A' \cap f(X) \Rightarrow f^{-1}(G') = f^{-1}(A' \cap f(X)) = f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$ .

**Proposición 1.20.** Sean  $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$  e.t.,  $f : X \rightarrow X'$  aplicación. Si  $F_1, F_2$  son cerrados de  $(X, \mathcal{T})$  tal que  $X = F_1 \cap F_2$  y  $f|_{F_i} : (F_i, \mathcal{T}_{F_i}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  es continua. Entonces,  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  es aplicación continua.

**Demostración.**  $\forall F'$  cerrado de  $(X', \mathcal{T}')$ ,  $f^{-1}(F') = f^{-1}(F') \cap X = f^{-1}(F') \cap (F_1 \cup F_2) = (f^{-1}(F') \cap F_1) \cup (f^{-1}(F') \cap F_2)$  donde  $(f^{-1}(F') \cap F_1) = f^{-1}|_{F_1}(F')$  cerrado en  $F_1$  y  $(f^{-1}(F') \cap F_2) = f^{-1}|_{F_2}(F')$  cerrado en  $F_2 \Rightarrow f^{-1}(F')$  cerrado en  $(X, \mathcal{T})$ .

**Definición 1.20** (Espacio Homeomorfo). Sean  $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$  e.t.  $f : X \rightarrow X'$  aplicación. Se dice que  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  es homeomorfismo si  $f$  es biyectiva y  $f^{-1}$  es continua. En este caso, se dice que  $(X, \mathcal{T})$  es homeomorfo a  $(X', \mathcal{T}')$ .

**Observación.** Sean  $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$  e.t.,  $f : X \rightarrow X'$  biyectiva. Entonces,  $f$  es homeomorfismo si y solo si  $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow f(A) \in \mathcal{T}'$ .

**Definición 1.21** (Invariante Topológico). Sea  $(P)$  una propiedad de e.t.. Se dice que  $(P)$  es un invariante topológico si para todo e.t. que cumpla  $(P)$  todos los e.t. homeomorfos cumplen  $(P)$ .

**Definición 1.22** (Aplicación Abierta). Sean  $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$  e.t.,  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ . Entonces,  $f$  es aplicación abierta si  $\forall A \in \mathcal{T}, f(A) \in \mathcal{T}'$ .

**Observación.** Una aplicación es cerrada si  $\forall C$  cerrado de  $(X, \mathcal{T})$ ,  $f(C)$  cerrado de  $(X', \mathcal{T}')$ .

**Observación.** No hay ninguna implicación entre aplicación continua, aplicación abierta y aplicación cerrada.

**Proposición 1.21.** Sean  $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), f : X \rightarrow X'$  aplicaciones biyectivas. Entonces, son equivalentes:

- (I)  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  es homeomorfismo.
- (II)  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  aplicación continua y abierta.
- (III)  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  aplicación continua y cerrada.

**Demostración.**

$(i \Rightarrow ii)$   $f$  homeomorfismo  $\Rightarrow \exists f^{-1}$  aplicación continua  $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, ((f^{-1})^{-1}(A) \in \mathcal{T}'$  donde  $((f^{-1})^{-1}(A) = f(A) \Rightarrow f$  aplicación abierta.

(ii  $\Rightarrow$  i)  $f$  abierta y continua  $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, f(A) \in \mathcal{T}'$  donde  $f(A) = ((f^{-1})^{-1}(A) \Rightarrow f^{-1}$  aplicación continua.

(i  $\Leftrightarrow$  iii) es análoga.

## 1.6. Espacio Producto

**Nota.** Queremos construir nuevos espacios topológicos de los ya existentes. Nos gustaria que ocurriera como los subespacios topológicos, si  $f$  es una función continua en un espacio topológico, también lo sea en el subespacio.

Dados  $X, Y, X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ . Si consideramos  $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$  queremos ver que topología debemos usar para que poder trabajar con funciones. Si consideramos la topología  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}' \subset \mathcal{P}(X \times X')$  podemos ver que la unión de conjuntos de  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$  no pertenece a  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ . Entonces, eligimos la topología producto como la topología genereada por la base  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ ,

$$\{W \subset X \times Y : \forall (x, y) \in W, \exists U \times V \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}' : (x, y) \in U \times V \subset W\}$$

**Definición 1.23** (Producto Cartesiano). Sea  $\{X_j\}_{j \in J} \neq \emptyset$  familia de conjuntos no vacios. Se llama producto castesiano de  $\{X_j\}_{j \in J}$  a

$$\prod_{j \in J} X_j = \{x : J \rightarrow \bigcup_{j \in J} X_j \text{ aplicación} : x_j \in X_j, \forall j \in J\}$$

**Observación.**  $\forall j \in J, p_{j_0} : \prod_{j \in J} X_j \rightarrow X_{j_0} : x \mapsto x_{j_0}$  se llama proyección.

**Observación.** Si  $X_j = X, \forall j \in J$  entonces  $\prod_{j \in J} X_j = X^J = \{x : J \rightarrow X, x \text{ aplicación}\}$ .

**Definición 1.24** (Axioma Elección).  $\forall \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \neq \emptyset$  familia de conjuntos no vacios disjuntos dos a dos. Entonces,  $\exists A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda : A \cap B_\lambda$  tiene un solo elemento.

**Definición 1.25** (Topología Producto). Sea  $\{(X_j, \mathcal{T}_{j \in J})\}_{j \in J}$  familia de e.t.. Se llama topología producto a la topología sobre  $\prod_{j \in J} X_j$  generada por subbase

$$\mathcal{S} = \{p_j^{-1}(U_j) : U_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J\}$$

Esta topología se denota  $\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j$

**Observación.**  $S_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta \in \mathcal{T}_\beta\} \Rightarrow S = \bigcup_{\beta \in J} S_\beta$  es subbase de la topología producto.

**Observación.** Podemos escribir  $B = \pi_{\beta_1}^{-1}(U_{\beta_1}) \cap \dots \cap \pi_{\beta_n}^{-1}(U_{\beta_n})$

**Observación.** El producto de abiertos no es necesariamente abierto.

**Observación.** La base engendrada por  $S$  es

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \left\{ \bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(U_j) : U_j \in \mathcal{T}_j, F \in \mathcal{P}(J) \right\} \\ &= \left\{ \prod_{j \in J} A_j : A_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J, A_j = X_j : \forall j \in J \setminus F \text{ no es finito} \right\}. \end{aligned}$$

**Observación.** Si  $J$  es finito, entonces  $\mathcal{B} = \left\{ \prod_{j \in J} A_j : A_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J \right\}$ .

**Observación.** El producto espacios discretos no es necesariamente discreto.

**Observación.**  $\mathcal{B} = \left\{ \prod_{j \in J} B_j : B_j \in \mathcal{T}_j \right\}$ .

**Observación.** Si  $\mathcal{B}_j$  es base de  $(X_j, \mathcal{T}_j)$ , entonces  $\mathcal{B} = \left\{ \prod_{j \in J} B_j : B_j \in \mathcal{B}_j \right\}$  es base de  $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$ .

**Proposición 1.22.** Sea  $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$  familia finita de e.t.. Entonces,  $\forall j_0 \in J$ ,

$$p_{j_0} : \left( \prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j \right) \rightarrow (X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0})$$

es aplicación abierta y continua.

**Demostración.**  $\forall A \in \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j, A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda : B_\lambda \in \mathcal{B}$  donde  $\mathcal{B}$  es subbase de  $\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j$ ,  $B_\lambda = \left\{ \prod_{j \in J} U_{\lambda j} : U_{\lambda j} \in \mathcal{T}_j, U_{\lambda j} = X_j, \forall j \in J \setminus F : F \text{ finito} \right\}$ . Entonces,  $p_{j_0}(A) = p_{j_0}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} p_{j_0}(B_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_{\lambda j_0} \in \mathcal{T}_{j_0} \Rightarrow$  abierto.

**Proposición 1.23.** Sea  $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$  familia no vacía de e.t.. Entonces, la topología producto es la más débil sobre  $\prod_{j \in J} X_j$  que hace continuas a todas las proyecciones.

**Demostración.** Sea  $\mathcal{T}$  topología sobre  $\prod_{j \in J} X_j$  tal que  $p_{j_0} : (\prod_{j \in J} X_j, \mathcal{T}) \rightarrow (X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0})$  es una proyección continua. Entonces,  $\forall j_0 \in J : U_{j_0} \in \mathcal{T}_{j_0}$  se tiene  $p_0^{-1}(U_{j_0}) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{S} \subset \mathcal{T}$  es subbase de  $\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j \Rightarrow \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j \subset \mathcal{T}$ .

**Proposición 1.24** (Propiedad Universal Topología Producto). Sea  $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$  familia  $\neq \emptyset$  e.t.,  $f : X \rightarrow \prod_{j \in J} X_j$  aplicación. Entonces,  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$  continua  $\Leftrightarrow (p_j \circ f) : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$  continua.

**Demostración.**  $(\Rightarrow)$  La composición de aplicaciones continuas es continua.

$(\Leftarrow)$   $\forall j \in J, (p_j \circ f)^{-1}(U_j) \in \mathcal{T}, \forall U_j \in \mathcal{T}_j \Rightarrow (p_j \circ f)^{-1}(U_j) = f^{-1}(p_j^{-1}(U_j)) = f^{-1}(S) \in \mathcal{T}, \forall S \in \mathcal{S} = \{p_j^{-1}(U_j) : U_j \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J\}$ . Entonces,  $(p_j \circ f)^{-1}$  y  $p_j$  continuas  $\Rightarrow f$  continua.

**Proposición 1.25.** Sea  $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$  familia e.t.,  $\sigma : J \rightarrow J$  aplicación biyectiva. Entonces,  $(X_j, \mathcal{T}_j)$  y  $(X_{\sigma(j)}, \mathcal{T}_{\sigma(j)})$  son homeomorfos.

**Demostración.** Sea  $\alpha(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j) \rightarrow (\prod_{j \in J} X_{\sigma(j)}, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_{\sigma(j)}) : (x_j)_{j \in J} \mapsto \alpha((x_j)_{j \in J}) = (x_{\sigma(j)})_{j \in J}$ ,  $\alpha$  es biyectiva.

(I)  $(p_j \circ \alpha) = p_{\sigma(j)}$  son continuas (Propiedad Universal).

(II)  $(p_j \circ \alpha)^{-1} = p_{\sigma(j)}^{-1}$  continua  $\alpha^{-1}$  continua.

$\Rightarrow$  homeomorfa.

**Observación.** El producto de homeomorfismos es homeomorfismo.

**Definición 1.26.** Sea  $(P)$  una propiedad de e.t.. Se dice que  $(P)$  es multiplicativa si para toda familia e.t. cada una cumpliendo  $(P)$ , su producto topológico cumple  $(P)$ .

**Proposición 1.26.** Sea  $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$  familia  $\neq$  de e.t.,  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  $\forall j \in J, f_j : X \rightarrow X_j$  aplicación. Entonces,  $(f_j)_{j \in J} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j) : x \mapsto (f_j)_{j \in J}(x) = (f_j(x))_{j \in J}$  es continua  $\Leftrightarrow f_j : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$  es con-

tinua  $\forall j \in J$ .

**Demostración.**  $\forall j_0 \in J, (p_{j_0} \circ (f_j)_{j \in J}) = f_{j_0}$

$(\Rightarrow)$  composición de aplicaciones continuas es continua.

$(\Leftarrow)$  por la propiedad universal de la topología producto.

**Observación.** El producto de funciones continuas es una función continua.

**Proposición 1.27.** Sean  $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}, \{(X'_j, \mathcal{T}'_j)\}_{j \in J}, \forall j \in J, f_j : X_j \rightarrow X'_j$  aplicación continua. Entonces,  $\prod_{j \in J} f_j : (\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j) \rightarrow (\prod_{j \in J} X'_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}'_j) : (x_j)_{j \in J} \mapsto (\prod_{j \in J} f_j)((x_j)_{j \in J}) = (f_j(x_j))$  aplicación continua.

VER DIBUJO(Revisar abierta o continua)

**Demostración.**  $\forall j_0 \in J, (p'_{j_0} \circ (\prod_{j \in J} f_j)) = (f_{j_0} \circ p_{j_0})$ .

$(\Rightarrow)$  Propiedad Universal de Topología Porducto.

$(\Leftarrow)$   $\forall G'_{j_0} \in \mathcal{T}'_{j_0}$  como  $\prod_{j \in J} f_j$  continua, entonces  $(p_{j_0} \circ (\prod f_j))^{-1}(G'_{j_0}) \in \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j$  es abierto y donde  $(p_{j_0} \circ (\prod f_j))^{-1}(G'_{j_0}) = (f_{j_0} \circ p_{j_0})^{-1}(G'_{j_0}) = p_{j_0}^{-1}(f_{j_0}^{-1}(G'_{j_0}))$ . Por ser  $p_{j_0}$  aplicación abierta y suprayectiva  $p_{j_0}(p_{j_0}^{-1}(f_{j_0}^{-1}(G'_{j_0}))) = f_{j_0}^{-1}(G'_{j_0}) \in \mathcal{T}_{j_0}$ .

## 1.7. Espacio Cociente

**Nota.** La topología cociente es una construcción que formaliza la idea de "pegar". Decimos que  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia en un conjunto  $X$  si es reflexiva, simétrica y transitiva. Una relación  $\mathcal{R}$  en  $X$  parte  $X$  en clases de equivalencia, denotadas  $[x], \forall x \in X$ .

La idea principal es, dado un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  queremos describir como se pegan las cosas juntas en  $(X, \mathcal{T})$  mediante la definición de una relación de equivalencia. Dos puntos  $x_1, x_2$  están relacionados si  $x_1 \mathcal{R} x_2$ , se podría decir que  $x_1, x_2$  se pegan entre si. Entonces, definimos una topología en el conjunto de clases de equivalencia  $X/\mathcal{R}$  que conserve la topología en  $X$  para aquellos puntos que no están relacionados y que "peguecorrectamente".

**Definición 1.27** (Topología Cociente). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  $Y \neq \emptyset$ ,  $f : X \rightarrow Y$ . Se llama topología cociente inducida por  $f$  a  $\mathcal{T}_f = \{G \subset Y : f^{-1}(G) \in \mathcal{T}\}$ . El par  $(X, \mathcal{T}_f)$  se llama espacio topológico cociente inducido por  $f$ .

**Definición 1.28** (Identificación). Sea  $(X, \mathcal{T})$ ,  $(X', \mathcal{T}')$  e.t.,  $f : X \rightarrow X'$  suprayectiva. Se dice que  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  es identificación si  $\mathcal{T}'$  es topología cociente inducida por  $f$ .

**Observación.**  $f$  es continua.

**Proposición 1.28.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  $Y \neq \emptyset$ ,  $f : X \rightarrow Y$  aplicación continua. La topología cociente inducida por  $f$  es la más fina de las topologías sobre  $Y$  que hacen continuas a  $f$ .

**Demostración.** Sea  $\mathcal{S}$  topología sobre  $Y$  tal que  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$  es continua. Entonces,  $\forall A \in \mathcal{S}, f^{-1}(A) \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{S}, A \in \mathcal{T}_f \Leftrightarrow \mathcal{S} \subset \mathcal{T}_f$ .

**Proposición 1.29** (Propiedad Universal Topología Cociente). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  $(Z, \mathcal{S})$  e.t.,  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  aplicaciones. Entonces,  $g : (Y, \mathcal{T}_f) \rightarrow (Z, \mathcal{S})$  es continua  $\Leftrightarrow f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_f)$  es continua.

**Demostración.**  $(\Rightarrow)$  Trivial.

$(\Leftarrow) \forall A \in \mathcal{S}, (g \circ f)^{-1}(A) \in \mathcal{T} \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{S}, g^{-1}(A) \in \mathcal{T}_f \Rightarrow g$  continua.

**Proposición 1.30.** Sea  $(X, \mathcal{T})$ ,  $(X', \mathcal{T}')$ , e.t.,  $f : X \rightarrow X'$  aplicación. Si  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  suprayectiva, continua y abierta (resp. cerrada). Entonces,  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  es identificación.

**Demostración.**  $\mathcal{T}_f$  es la topología más fina que hace continua a  $f \Rightarrow \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}_f$ . Sea  $\forall A \in \mathcal{T}_f \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$  con  $f$  abierta  $\Rightarrow f(f^{-1}(A)) = A \in \mathcal{T}'$  abierto  $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}_f, A \in \mathcal{T}' \Rightarrow \mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}'$ . Entonces,  $\mathcal{T}_f = \mathcal{T}'$ .

**Observación.** Las identificaciones no son necesariamente abierta o cerradas.



**Definición 1.29.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  $\mathcal{R}$  relación de equivalencia en  $X$ ,  $p : X \rightarrow X/\mathcal{R}$  proyección canónica. Se llama e.t. cociente de  $(X, \mathcal{T})$  respecto a  $\mathcal{R}$  a  $(X/\mathcal{R}, \mathcal{T}/\mathcal{R})$  donde  $\mathcal{T}/\mathcal{R}$  es topología cociente inducida por  $p$ .

**Proposición 1.31.** Sean  $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), (X'', \mathcal{T}'')$  e.t.,  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  identificación,  $f' : (X', \mathcal{T}') \rightarrow (X'', \mathcal{T}'')$  identificación. Entonces,  $(f' \circ f)$  es identificación.

REVISAR DEM

**Demostración.** Sea  $(f' \circ f) : X \rightarrow X''$  suprayectiva. Entonces,  $A'' \in \mathcal{T}''$ ,  $(f' \text{ identificación} \Rightarrow \mathcal{T}'' = \mathcal{T}_{f'}) \Leftrightarrow f'^{-1}(A'') \in \mathcal{T}' \Leftrightarrow (\mathcal{T}' = \mathcal{T}_f)f^{-1}(f'^{-1}(A'')) = (f' \circ f)^{-1}(A'') \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T}'' = \mathcal{T}_{(f' \circ f)}$

**Proposición 1.32.** Sean  $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$  e.t.,  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  identificación. Entonces,

- (I)  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  es abierta  $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{T}, f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{T}$ .
- (II)  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  cerrada  $\Leftrightarrow \forall C$  cerrado  $(X, \mathcal{T})$ ,  $f^{-1}(f(C))$  cerrado de  $(X, \mathcal{T})$ .

**Demostración.**

- (I)  $(\Rightarrow) \forall A \in \mathcal{T} \Rightarrow f(A) \in \mathcal{T}' \Rightarrow f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{T}$ .
- $(\Leftarrow) \forall A \in \mathcal{T}, f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{T}, f \text{ identificación} \Rightarrow f(f^{-1}(f(A))) = f(A) \in \mathcal{T}_f = \mathcal{T}' \Rightarrow f \text{ aplicación abierta.}$

**Proposición 1.33.** Sea  $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}'), (X'', \mathcal{T}''), (X''', \mathcal{T}''')$ ,  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  identificación,  $f' : (X', \mathcal{T}') \rightarrow (X'', \mathcal{T}'')$  identificación,  $g : X \rightarrow X''$  aplicación tal que  $\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (f' \circ g)(x_1) = (f' \circ g)(x_2)$ . Entonces,

- (I)  $\exists \bar{g} : X' \rightarrow X'''$  aplicación tal que  $(\bar{g} \circ f) = (f' \circ g)$
- (II) Si  $g : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X'', \mathcal{T}'')$  continua  $\Rightarrow \bar{g}$  continua.

REVISAR

### Demostración.

- (I)  $\bar{g} : X' \rightarrow X''' : x' \mapsto \bar{g}(x'_0) = f'(g(x))$ ,  $\forall x \in f^{-1}(X') \Rightarrow f(x) = x' \Rightarrow \bar{g}(f(x)) = (f' \circ \bar{g})(x)$ ,  $\forall x \in X \Leftrightarrow (\bar{g} \circ f) = (f' \circ g)$ .
- (II)  $(\bar{g} \circ f) = (f' \circ g)$ ,  $(g \text{ continua} \Rightarrow (f' \circ g) \text{ continua})$ . Entonces,  $(\text{Propiedad Universal Topología Cociente}) \Rightarrow \bar{g} \text{ continua}$ .

**Proposición 1.34.** Sea  $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$  e.t.,  $f : X \rightarrow X'$  aplicación suprayectiva,  $R_f$  relación de equivalencia tal que  $x_1, x_2 \in X, x_1 R_f x_2 \Leftrightarrow ( \text{ def. } ) f(x_1) = f(x_2)$ . Entonces,  $\exists \alpha : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  homeomorfa tal que  $(\alpha \circ f) = p \Leftrightarrow f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  es identificación.

**Demostración.**  $(\Rightarrow) (\alpha \circ f) = p \Rightarrow f = (\alpha^{-1} \circ p) \Rightarrow f \text{ identificación}$ .

$(\Leftarrow)$  Sea  $\alpha : X \rightarrow X'/\mathcal{R}_f : x \mapsto \alpha(x') = [x] : x \in f^{-1}(X')$ . Esta bien definida ya que, si  $x_1, x_2 \in f^{-1}(x) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 R_f x_2 \Leftrightarrow [x_1] = [x_2]$ . Sea  $\varphi : X/\mathcal{R}_f \rightarrow X'/\mathcal{R}_f : [x] \mapsto \varphi/[x] = f(x)$ . Está bien definida ya que, si  $[x_1] = [x_2] \Leftrightarrow x_1 R_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ . Entonces,  $(\varphi \circ \alpha = 1_{X'}, \alpha \circ \varphi = 1_{\mathcal{R}_f}) \Rightarrow \alpha \text{ inyectiva y } \alpha^{-1} = \varphi$ . Por tanto,  $\alpha(f(f(x))) = \alpha(x') = [x]p(x), \forall x \in X \Rightarrow \alpha \circ f = p \text{ continua} \Rightarrow \alpha \text{ continua}$ .

## 1.8. Espacio Suma

**Definición 1.30** (Topología Suma). Sea  $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$ , familia  $\neq \emptyset$  de e.t.,

$$\sum_{j \in J} X_j = \bigcup_{j \in J} X_j \times \{j\}$$

su unión disjunta. Se llama topología suma a

$$\sum_{j \in J} \mathcal{T}_k = \left\{ G \subset \sum_{j \in J} X_k : j_k^{-1}(G) \in \mathcal{T}_k, \forall k \in J \right\}$$

El par  $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$  se llama espacio topológico suma.

**Observación.**  $\forall k_0 \in J, j_{k_0} : (X_{k_0}, \mathcal{T}_{k_0}) \rightarrow (X_{k_0} \times \{k_0\}, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k / (X_{k_0} \times \{k_0\})) : x \mapsto (x, k_0)$  es homomorfismo  $j_{k_0}^{-1}(x, k_0) = x = p_1(x, k_0)$

**Observación.**  $\forall c \in \sum_{k \in J} X_k, j_{k_0}^{-1}(c) = p(C \cap (X_{k_0} \times \{k_0\}))$ .

**Proposición 1.35.** Sea  $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$  familia  $\neq \emptyset$  e.t.. Entonces, la topología suma es la más fina de las topologías sobre  $\sum_{k \in J} X_k$  que hacen continua todas las inclusiones.

**Demostración.** Sea  $\mathcal{T}$  topología sobre  $\sum_{j \in J} X_k$  tal que

$$\forall k_0 \in J, j_{k_0}(X_{k_0}, \mathcal{T}_{k_0}) \hookrightarrow \left(\sum_{k \in J} X_k, \mathcal{T}\right)$$

$$k_0 \in J, \forall A \in \mathcal{T}, j_{k_0}^{-1}(A) \in \mathcal{T}_{k_0} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, A \in \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k \Rightarrow \mathcal{T} \subset \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k.$$

**Proposición 1.36** (Propiedad Universal Topología Suma). Sea  $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}, (X, \mathcal{T})$  e.t.,  $f : (\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k) \rightarrow (X, \mathcal{T})$  aplicación continua  $\Leftrightarrow \forall k_0 \in J, f \circ j_{k_0} : (X_{k_0}, \mathcal{T}_{k_0}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$  es continua.

**Demostración.**  $(\Rightarrow)$  Trivial

$$(\Leftarrow) \forall k_0 \in J, f \circ j_{k_0} \text{ continua} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, \forall k_0 \in J, (f \circ j_{k_0})^{-1}(A) = j_{k_0}^{-1}(f^{-1}(A)) \in \mathcal{T}_{k_0} \Rightarrow f^{-1}(A) \in \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k \Rightarrow f \text{ continua}.$$

**Definición 1.31.** Sea  $(P)$  propiedad de e.t.. Se dice que es aditiva si para toda familia de e.t. cada uno cumpliendo  $(P)$ , la suma cumple  $(P)$ .

## Capítulo 2

### Propiedades de Separación

**Definición 2.1.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.. Se dice que es  $T_0$  si  $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x : y \notin \mathcal{U}^x$  ó  $\exists \mathcal{U}^y : x \notin \mathcal{U}^y$ .

**Ejemplo.** Sea  $\mathcal{R}$  una relación en  $X$  tal que  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ . Entonces,  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia en  $X$  y el espacio cociente resultante  $(X/R, \mathcal{T}/R)$  es  $T_0$ .

**Observación.** Los subespacios o espacios productos generados a partir de espacios  $T_0$  son también  $T_0$ , pero los espacios cocientes no lo son necesariamente.

**Definición 2.2.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.. Se dice que es  $T_1$  si  $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x : y \notin \mathcal{U}^x, \exists \mathcal{U}^y : x \notin \mathcal{U}^y$ .

**Observación.**  $(X, \mathcal{T})$  es  $T_1$  si y solo si  $\forall x, y \in X : x \neq y$  existe un entorno de cada uno que no contiene al otro.

**Observación.**  $T_1 \Rightarrow T_0$

**Observación.**  $T_0 \not\Rightarrow T_1$ , ej.:  $X = \{a, b\}$ ,  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$  es  $T_0$ , no  $T_1$

**Proposición 2.1.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t. son equivalentes

- (I)  $(X, \mathcal{T})$  es  $T_1$ ,
- (II)  $\forall x \in X, \{x\}$  es cerrado de  $(X, \mathcal{T})$ ,
- (III)  $\forall E \subset X, E = \bigcap_{G \in \mathcal{T} : E \subset G} G$ .

**Demostración.**

(a  $\Rightarrow$  b) Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.  $T_1$ ,  $x \in X$  entonces,  $\forall y \neq x, \exists \mathcal{U}^y : \mathcal{U}^y \subset X \setminus \{x\} \Rightarrow X \setminus \{x\} \in \mathcal{T} \Rightarrow \{x\}$  es cerrado de  $(X, \mathcal{T})$ .

(I)  $A \subset X \Rightarrow A = \bigcap_{x \in X \setminus A} X \setminus \{x\} \Rightarrow A \subset \bigcap_{G \in \mathcal{T}, A \subset G} G \subset \bigcap_{x \in X \setminus A} (X \setminus \{x\}) = A$ .

(II)  $\forall x, y \in X : x \neq y, \{x\} = \bigcap_{G \in \mathcal{T}, \{x\} \subset G} G \Rightarrow \exists \mathcal{G}^x \in \mathcal{T} : y \in \mathcal{G}^x \Rightarrow T_1$ .

**Definición 2.3.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.. Se dice que es  $T_2$  ó de Hausdorff si  $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x : x \in \mathcal{U}^x, \exists \mathcal{U}^y : y \in \mathcal{U}^y$  tal que  $\mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y = \emptyset$ .

**Observación.**  $T_2 \Rightarrow T_1$ .

**Proposición 2.2.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.. Entonces,  $(X, \mathcal{T})$  es  $T_2$  si y solo si  $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$  es cerrado en  $(X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T})$ .

**Demostración.** Probamos que  $\Delta^c \in \mathcal{T}$ .

( $\Rightarrow$ )  $\forall (x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta, x \neq y \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^y : \mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y = \emptyset \Rightarrow \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y$  entorno de  $(x, y) : \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y \subset (X \times X) \setminus \Delta$ ? Si  $\exists (z, z) \in \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y \Rightarrow z \in \mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y = \emptyset$  es absurdo. Entonces,  $(X \times X) \setminus \Delta \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} \Leftrightarrow \Delta$  es cerrado de  $(X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$ .

( $\Leftarrow$ )  $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow (x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x, \mathcal{U}^y : \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y \subset (X \times X) \setminus \Delta \Rightarrow \mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y = \emptyset$ . En caso contrario,  $\exists z \in \mathcal{U}^x \cap \mathcal{U}^y \Rightarrow (z, z) \in \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^y$  es absurdo. Entonces,  $(X, \mathcal{T})$  es  $T_2$ .

**Corolario 2.0.1.** Sean  $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$  e.t.,  $(Y, \mathcal{S})$  es  $T_2$ ,  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$  aplicación. Entonces,  $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$  es cerrado en  $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{S})$ .

**Demostración.**  $Y$  es  $T_2 \Rightarrow \Delta_Y$  es cerrado en  $Y \times Y$ ,  $f$  continua  $\Rightarrow f \times 1_Y : (X, \mathcal{T}) \times (Y, \mathcal{S}) \rightarrow (Y, \mathcal{S}) \times (Y, \mathcal{S})$  continua  $\Rightarrow (f \times 1_Y)^{-1}(\Delta_Y) = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = y\}$  es cerrado.

**Proposición 2.3.** Sean  $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$  e.t.,  $(Y, \mathcal{S})$  es  $T_2$ ,  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$  continua. Entonces,  $E = \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$  es cerrado en  $(X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$

**Demostración.**  $\forall (x_1, x_2) \in (X \times X) \setminus E, f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow \exists \mathcal{V}^{f(x_i)}, i \in \{1, 2\}$  entorno de  $x_i$ , por ser  $Y$   $T_2$ . Como  $f$  es continua  $\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_i)})$  entorno de  $x_i \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_1)}) \times f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_2)})$  entorno de  $(x_1, x_2)$  en  $(X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$ . Veamos que  $f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_1)}) \times f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_2)}) \subset (X \times X) \setminus E$ . Si  $(z_1, z_2) \in E, (z_1, z_2) \in f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_1)}) \times f^{-1}(\mathcal{V}^{f(x_2)}) \Rightarrow f(z_1) = f(z_2)$  donde  $f(z_1) \in \mathcal{V}^{f(x_1)}$  y  $f(z_2) \in \mathcal{V}^{f(x_2)}$  que es absurdo.

**Proposición 2.4.** Sean  $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$  e.t.,  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$  aplicación superyectiva y abierta. Si  $(X, \mathcal{T})$  es  $T_2$  entonces,  $(Y, \mathcal{S})$  es  $T_2$ .

**Demostración.**  $\forall y_1, y_2 \in Y : y_1 \neq y_2 \Rightarrow (f \text{ supra}) \exists x_i \in X, i \in \{1, 2\} : f(x_i) = y_i \Rightarrow (x_1, x_2) \in (X \times X) \setminus E \Rightarrow (\text{hip.}) \exists \mathcal{U}^{x_i}, i \in \{1, 2\} : \mathcal{U}^{x_1} \times \mathcal{U}^{x_2} \subset (X \times X) \setminus E \Rightarrow (f \text{ ab.}) f(\mathcal{U}^{x_i}), i \in \{1, 2\}$  entorno de  $y_i$ . ¿Son disjuntos? Si  $\exists z \in f(\mathcal{U}^{x_1}) \cap f(\mathcal{U}^{x_2}) \Rightarrow z = f(t_i) : t_i \in \mathcal{U}^{x_i}, i \in \{1, 2\} \Rightarrow (t_1, t_2) \in E$  y  $(t_1, t_2) \in (\mathcal{U}^{x_1} \times \mathcal{U}^{x_2})$  que es absurdo.

**Proposición 2.5.** Sean  $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$  e.t.,  $(Y, \mathcal{S})$  es  $T_2$ ,  $f, g : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$  aplicaciones continuas. Entonces,  $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$  es cerrado en  $(X, \mathcal{T})$ .

**Demostración.** Sea  $f \times g : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S}) \times (Y, \mathcal{S})$  continua. Entonces,  $Y$  es  $T_2 \Leftrightarrow \Delta_Y$  es cerrado  $\Rightarrow (f \times g)^{-1}(\Delta_Y)$  cerrado en  $(X, \mathcal{T})$  donde  $(f \times g)^{-1}(\Delta_Y) = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ .

**Corolario 2.0.2.** Sean  $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$  e.t.,  $(Y, \mathcal{S})$  es  $T_2$ ,  $f, g : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$  aplicación continua. Si  $\exists D$  denso en  $(X, \mathcal{T})$  tal que  $f|_D = g|_D \Rightarrow f = g$ .

**Demostración.**  $f|_D = g|_D \Rightarrow D \subset \{x \in X : f(x) = g(x)\} = \mathcal{C} \Rightarrow \overline{D} \subset \overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$  donde  $\overline{D} = X \Rightarrow X = \mathcal{C} \Leftrightarrow f = g$ .

**Observación.**  $T_0, T_1, T_2$  son invariantes topológicos.

**Proposición 2.6.** Todo subespacio de e.t.  $T_2$  es  $T_2$ .

**Demostración.** Sea  $(X, \mathcal{T})$   $T_2$ ,  $E \subset X$ . Entonces,  $\forall x_1, x_2 \in E \subset X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists \mathcal{U}^{x_1}, \mathcal{U}^{x_2}$  entornos de  $x_1, x_2$  en  $(X, \mathcal{T})$  disjuntos  $\Rightarrow \mathcal{U}^{x_1} \cap E, \mathcal{U}^{x_2} \cap E$  entorno en  $(E, \mathcal{T}|_E)$  disjuntos.

**Proposición 2.7.** Sea  $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$  familia de e.t.. Entonces,  $(\sum_{j \in J} X_j, \sum_{j \in J} \mathcal{T}_j)$  es  $T_2 \Leftrightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$  es  $T_2, \forall j \in J$ .

**Demostración.**  $(\Rightarrow) \forall j \in J, \forall (a_j)_{j \in J} \in \sum_{j \in J} X_j, \{(x_j)_{j \in J} \in \sum_{j \in J} X_j : x_j = a_j, \forall j \in J \setminus \{0\}\} \subset \sum_{j \in J} X_j$  es homeomorfo a  $X_{j_0} \times \{(a_j)_{j \in J \setminus \{0\}}\}$  que es homeomorfo a  $X_{j_0} \times \sum_{j \in J \setminus \{0\}} \{a_j\}$ .

$(\Leftarrow) \forall x, y \in \sum_{j \in J} X_j : x \neq y$ , entonces se dan dos posibilidades. Si  $\exists j_1, j_2 \in J : x \in X_{j_1} \times \{j_1\}, y \in X_{j_2} \times \{j_2\}$ , entonces  $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$  es  $T_2$ . Y si  $\exists! j_0 \in J : x, y \in X_{j_0} \times \{j_0\}$  homeomorfo a  $X_{j_0}$  que es  $T_2 \Rightarrow p_1(x), p_1(y) \in X_{j_0} \Rightarrow \exists \mathcal{U}^x : p_1(x) \in \mathcal{U}^x, \exists \mathcal{U}^y : p_1(y) \in \mathcal{U}^y$  abiertos de  $\sum_{j \in J} \mathcal{T}_j \Rightarrow \mathcal{U}^x \times \{j_0\}, \mathcal{U}^y \times \{j_0\}$  en  $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k) \Rightarrow$  es  $T_2$ .

**Proposición 2.8.** Sea  $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$  familia de e.t.. Entonces,  $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$  es  $T_2 \Leftrightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$  es  $T_2, j \in J$ .

**Demostración.**  $(\Rightarrow)$  Sea  $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$  espacio  $T_2$ . Entonces,  $\forall j \in J, b_j \in X_j \Rightarrow$  el subespacio  $\mathcal{S}_j = \{x \in \prod_{j \in J} X_j : x_{j_0} = b_{j_0}, \forall j \neq j_0\}$  es  $T_2$  y es homeomorfo a  $X_j$  bajo la restricción de  $\mathcal{S}_j$  a la proyección  $p_j \Rightarrow X_j$  es  $T_2, \forall j \in J$ .

$(\Leftarrow)$  Sea  $(X_j, \mathcal{T}_j)$  e.t.  $T_2, \forall j \in J$ . Entonces,  $\forall x, y \in \prod_{j \in J} X_j : x \neq y \Rightarrow \exists j_0 \in J : x_{j_0} \neq y_{j_0} \Rightarrow \exists \mathcal{U}_{j_0}^x, \mathcal{U}_{j_0}^y$  entornos disjuntos de  $x_{j_0}$  e  $y_{j_0}$  en  $(X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0}) \Rightarrow p_{j_0}^{-1}(\mathcal{U}_{j_0}^x), p_{j_0}^{-1}(\mathcal{U}_{j_0}^y)$  entornos disjuntos de  $x$  e  $y$  en

$$(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j) \Rightarrow (\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j) \text{ es } T_2.$$

**Observación.** El cociente de un e.t.  $T_2$  no es necesariamente  $T_2$ .

## 2.1. Espacio Regular

**Definición 2.4** (Espacio Regular). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t. Diremos que es regular si  $\forall C$  cerrado de  $(X, \mathcal{T})$ ,  $\forall x \in X : x \notin C, \exists U, V \in \mathcal{T}$  disjuntos tal que  $x \in U, C \subset V$ . Diremos que es  $T_3$  si es regular y  $T_0$ .

**Observación.** Regular y  $T_0 \Leftrightarrow$  regular y  $T_1 \Leftrightarrow$  regular y  $T_2$ .

**Demostración.**  $(\Rightarrow)$   $(X, \mathcal{T})$  regular y  $T_0 \Rightarrow \forall x, y \in X : x \neq y, \exists \mathcal{U}^x \in \mathcal{T} : y \in \mathcal{U}^x \Rightarrow X \setminus \mathcal{U}^x$  es cerrado  $\Rightarrow \exists V_i \in \mathcal{T}, i \in \{1, 2\}$  disjuntos tal que  $x \in V_1, y \in X \setminus \mathcal{U}^x \subset V_2 \Rightarrow$  es  $T_2$ .

$(\Leftarrow)$  Trivial.

**Observación.**  $T_3 \Rightarrow T_2$ .

**Observación.** Regular  $\not\Rightarrow T_0$ .

**Proposición 2.9.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.. Entonces, son equivalentes

- (i)  $(X, \mathcal{T})$  regular
- (ii)  $\forall x \in X : \forall U \in \mathcal{T} : x \in U, \exists V \in \mathcal{T} : x \in V \subset \bar{V} \subset U$ .
- (iii)  $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}$  base de entornos de  $x$  cerrados en  $(X, \mathcal{T})$ .

**Demostración.**

$(i \Rightarrow ii)$   $x \in U \in \mathcal{T} \Rightarrow x \notin X \setminus U$  cerrado  $\Rightarrow \exists V_i \in \mathcal{T}, i \in \{1, 2\} : X \setminus U \subset V_2 \Rightarrow V_1 \subset X \setminus V_2$  cerrado  $\Rightarrow \bar{V}_1 \subset X \setminus V_2 \Rightarrow x \in V_1 \subset \bar{V}_1 \subset X \setminus V_2 \subset U$ .

$(ii \Rightarrow iii)$   $\forall x \in X, \{\bar{V} : V \in \mathcal{T}, x \in V\}$  es base de entornos cerrados  $\Rightarrow \forall \mathcal{U}^x, x \in \mathcal{U}^x \Rightarrow \exists V \in \mathcal{T} : x \in V \subset \bar{V} \subset \mathcal{U}^x \subset U^x$ .

$(iii \Rightarrow i)$   $x \notin C$  cerrado  $\Rightarrow x \in X \setminus C \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists V$  entorno cerrado de  $x : V \subset X \setminus C \Rightarrow x \in \overset{\circ}{V} \in \mathcal{T}$  y  $C \subset X \setminus V$  disjuntos.

**Observación.** La regularidad ( y ser  $T_3$ ) son invariantes topológicos.



**Proposición 2.10.** *Todo subespacio de uno regular  $(T_3)$  es regular  $(T_3)$ .*

**Demostración.**  $(X, \mathcal{T})$  regular  $E \subset X, \forall C$  cerrado de  $(E, \mathcal{T}|_E), \forall x \in E : x \notin C \Rightarrow \exists F$  cerrado de  $(X, \mathcal{T})$  tal que  $C = F \cap E \Rightarrow x \notin F \Rightarrow \exists U, V \in \mathcal{T}$  disjuntos tal que  $x \in U, F \subset V \Rightarrow U \cap E, V \cap E \in \mathcal{T}|_E$  disjuntos tal que  $x \in U \cap E, C \subset V \cap E$ .

**Proposición 2.11.** *Sea  $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$  familia de e.t.. Entonces  $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$  es regular  $(T_3) \Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$  es regular  $(T_3)$ .*

**Demostración.**  $(\Rightarrow)$  Trivial

$(\Leftarrow)$   $\forall x = (x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j, \forall \mathcal{U}^x$  entorno de  $x \Rightarrow \exists B \subset \mathcal{B}$  base de  $\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j$  tal que  $x \in B \subset \mathcal{U}^x, B = \bigcap_{k=1}^n p_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$  donde  $U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}$ . Entonces,  $x \in B \Rightarrow x_{j_k} \in U_{j_k}, \forall k \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \exists \mathcal{V}^{x_{j_k}}$  entorno cerrado de  $x_{j_k}, \forall k \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\mathcal{V}^{x_{j_k}} \subset U_{j_k} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n p_{j_k}^{-1}(\mathcal{V}^{x_{j_k}}) \subset B \subset \mathcal{U}^x$  entorno cerrado de  $x$ , que es la caracterización anterior de regular.

**Proposición 2.12.** *Sea  $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$  familia de e.t.. Entonces,  $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$  es regular  $(T_3) \Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$  regular  $(T_3)$ .*

**Demostración.**  $(\Rightarrow)$   $\forall j_0 \in J, X_{j_0}$  es homeomorfo a  $X_{j_0} \times \{j_0\} \subset \sum_{j \in J} X_j$ .

$(\Leftarrow)$   $\forall x \in \sum_{j \in J} X_j \Rightarrow$  ( por ser unión disjunta )  $\exists ! j_0 \in J : x \in X_{j_0} \times \{x_{j_0}\}$  que es homeomorfo a  $X_{j_0}$ .

**Observación.** El coiente e.t.  $T_3$  no es necesariamente regular.

**Ejemplo.** pg. 50

## 2.2. Espacio Completamente Regular

**Definición 2.5** (Completamente Regular). *Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.. Diremos que  $(X, \mathcal{T})$  es completamente regular si  $\forall x \in X, \forall C$  cerrado de  $(X, \mathcal{T}), x \notin$*

$C, \exists f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow [0, 1]$  continua,  $f(x) = 0, f(C) = \{1\}$ . Diremos que es  $T_{3a}$  si es completamente regular y  $T_1$

**Observación.**  $(X, \mathcal{T})$  es completamente regular  $\Leftrightarrow \forall C$  cerrado,  $\forall x \notin C, \exists g : (X, \mathcal{T}) \rightarrow [0, 1]$  continua tal que  $f(x) = 1, g(C) = \{0\}$ .

**Observación.** completamente regular  $\Rightarrow$  regular.

**Observación.**  $T_3 \not\Rightarrow T_{3a}$ .

**Proposición 2.13.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t. metrizable. Entonces,  $(X, \mathcal{T})$  es  $T_{3a}$ .

**Demostración.**  $(X, \mathcal{T})$  es  $T_2$  y  $\exists d$  métrica tal que  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ . Entonces,  $\forall C$  cerrado de  $\mathcal{T}, \forall x \in X : x \notin C \Rightarrow d(x, C) > 0$ . Sea  $g : (X, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R} : z \mapsto g(z) = \frac{d(z, C)}{d(x, C)} \Rightarrow g$  es continua y

$$g = \begin{cases} 1, & \text{si } z = x, \\ \{0\} & \text{si } z = C \end{cases}$$

la imagen de  $g$  es un subconjunto de las semirectas derechas. Sea  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow [0, 1] : z \mapsto f(z) = \min\{g(z), 1\}$  entonces,

$$f = \begin{cases} 1, & \text{si } z = x, \\ \{0\} & \text{si } z = C \end{cases}$$

$\Rightarrow (X, \mathcal{T})$  es  $T_{3a}$ .

**Observación.** Ser completamente regular ( $T_{3a}$ ) es un invariante topológico.

**Proposición 2.14.** Todo subespacio de un espacio completamente regular ( $T_{3a}$ ) es completamente regular ( $T_{3a}$ ).

**Demostración.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  completamente regular,  $E \subset X, E \neq \emptyset$ . Entonces,  $\forall C$  cerrado de  $(E, \mathcal{T}|_E), \forall x \in E : x \notin C \Rightarrow \exists F \neq \emptyset$  cerrado de  $(X, \mathcal{T}) : C = F \cap E \Rightarrow f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow [0, 1]$  tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in X, \\ \{1\} & \text{si } x = F \end{cases}$$

$\Rightarrow f|_E : (E, \mathcal{T}|_E) \rightarrow [0, 1]$  es continua tal que

$$f|_E = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in X, \\ \{1\} & \text{si } x = C \end{cases}$$

$\Rightarrow$  completamente regular.

**Proposición 2.15.** Sea  $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$  familia de e.t.. Entonces,  $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$  es completamente regular  $(T_{3a})$  si y solo si  $(X_j, \mathcal{T}_j)$  es completamente regular  $(T_{3a})$ ,  $\forall j \in J$ .

**Demostración.**  $(\Rightarrow)$  Trivial.

$(\Leftarrow)$   $\forall C$  cerrado de  $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$ ,  $\forall x = (x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j \setminus C \in \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$  base de  $\prod_{j \in J} \mathcal{T}_j$  tal que  $x \in B \subset \prod_{j \in J} X_j \setminus C$ ,  $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$ ,  $U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}$ ,  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ . (hip.)  $\Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\exists f_k : (X_{j_k}, \mathcal{T}_{j_k}) \rightarrow [0, 1]$  continua  $\Rightarrow f_k(x_{j_k}) = 0$ ,  $f_k(X_{j_k} \setminus U_{j_k}) = \{1\}$ . Sea  $f : (\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j) \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\forall z \in \prod_{j \in J} X_j$ ,  $f(z) := \max \{ \}$  es continua dado que el máximo de funciones continuas es continuo  $\Rightarrow f(x) = 0$  y si  $\forall z \in C \Rightarrow z \in B \Rightarrow z \in \{1, \dots, n\} : z_{j_{k_0}} \notin U_{j_{k_0}} \Rightarrow f_{k_0}(z_{j_{k_0}}) = 1 \Rightarrow f(z) = 1 \Rightarrow f(C) = \{1\}$ .

**Proposición 2.16.** Sea  $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$  familia de e.t.. Entonces,  $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$  es completamente regular  $(T_{3a})$  si y solo si  $(X_j, \mathcal{T}_j)$  es completamente regular  $(T_{3a})$ ,  $\forall j \in J$ .

**Demostración.** pág. 54

**Observación.** El cociente de e.t. es  $T_{3a}$  no es completamente regular.

## 2.3. Espacios Normales

**Definición 2.6 (Normal).** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.. Decimos que es normal si  $\forall C_1, C_2$  cerrados disjuntos  $\exists G_i, i \in \{1, 2\}$  abiertos disjuntos tal que  $C_i \subset G_i$ . Deci-

mos que es  $T_4$  si es normal y  $T_1$ .

**Proposición 2.17.** *Todo e.t. metrizable es  $T_4$ .*

**Demostración.**  $(X, \mathcal{T})$  e.t. metrizable  $\Rightarrow \exists d$  métrica de  $(X, \mathcal{T})$  tal que  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d \Rightarrow \mathcal{T}$  es  $T_2$ . Entonces,  $\forall C_1, C_2$  cerrados disjuntos de  $(X, \mathcal{T})$  se pueden dar dos casos

- Si  $C_1 = \emptyset$ , sea  $G_1 = \emptyset, G_2 = X$ . Entonces,  $(X, \mathcal{T})$  es  $T_4$ .
- Si  $C_1, C_2 \neq \emptyset \Rightarrow \forall x \in C_1, \exists \epsilon_x > 0 : B_{\epsilon_x}(x) \cap C_2 = \emptyset$  y  $\forall y \in C_2, \exists \delta_y : B_{\delta_y}(y) \cap C_1 = \emptyset \Rightarrow C_1 \subset \bigcup_{x \in C_1} B_{\epsilon_{\frac{x}{3}}}(x) := G_1 \in \mathcal{T}$  y  $C_1 \subset \bigcup_{x \in C_2} B_{\delta_{\frac{y}{3}}}(y) := G_2 \in \mathcal{T}$ . En caso contrario,  $\exists z \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow \exists x_0 \in C_1 : z \in B_{\epsilon_{\frac{x_0}{3}}}(x_0)$  y  $\exists y_0 \in C_1 : z \in B_{\delta_{\frac{y_0}{3}}}(y_0)$ . Suponemos que  $\delta_{y_0} \leq \epsilon_{x_0}$ , entonces  $d(x_0, y_0) \leq d(x_0, z) + d(z, y_0) < \frac{\epsilon_{x_0}}{3} + \frac{\delta_{y_0}}{3} \leq \frac{2}{3}\epsilon_{x_0} \Rightarrow y_0 \in B_{\epsilon_{x_0}}, y_0 \in C_2$  absurdo.

**Proposición 2.18.** *Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.. Entonces, son equivalentes*

- (I)  $(X, \mathcal{T})$  es normal.
- (II)  $\forall C$  cerrado,  $\forall U \in \mathcal{T} : C \subset U, \exists V \in \mathcal{T} : C \subset V \subset \overline{V} \subset U$ .
- (III)  $\forall C_1, C_2$  cerrados disjuntos,  $\exists G_1 \in \mathcal{T} : C_1 \subset G_1 : \overline{G_1} \cap C_2 = \emptyset$ .
- (IV)  $\forall C_1, C_2$  cerrados disjuntos  $\exists G_i \in \mathcal{T} : \overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \emptyset$  y  $C_i \subset G_i, i \in \{1, 2\}$

**Demostración.**

- (a  $\Rightarrow$  b) Sea  $C \subset U \in \mathcal{T} : C$  y  $X \setminus U$  son cerrados disjuntos. Entonces,  $(X, \mathcal{T})$  normal  $\Rightarrow \exists V_i, i \in \{1, 2\}$  disjuntos tal que  $C \subset V_1$  y  $X \setminus U \subset V_2$  disjuntos  $\Rightarrow V_1 \subset X \setminus V_2 \Rightarrow \overline{V_1} \subset X \setminus V_2$  cerrado  $\Rightarrow C \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset X \setminus V_2 \subset U$ .
- (b  $\Rightarrow$  c)  $C_1, C_2$  cerrados disjuntos  $\Rightarrow C_1 \subset X \setminus C_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists G_1 \in \mathcal{T} : C_1 \subset G_1 \subset \overline{G_1} \subset X \setminus C_2 \Rightarrow \overline{G_1} \cap C_2 = \emptyset$ .
- (c  $\Rightarrow$  d)  $\forall C_1, C_2$  cerrados disjuntos  $\Rightarrow \exists G_1 \in \mathcal{T} : C_1 \subset G_1, \overline{G_1} \cap C_2 = \emptyset$  y  $\exists G_2 \in \mathcal{T} : C_2 \subset G_2 : \overline{G_2} \cap \overline{G_1} = \emptyset$ .

( $d \Rightarrow a$ )  $\forall C_1, C_2$  cerrados disjuntos  $\exists G_1, G_2 \in \mathcal{T} : \overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \emptyset, C_1 \subset G_1, C_2 \subset G_2$  donde  $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \emptyset \Rightarrow G_1 \cap G_2 = \emptyset \Rightarrow$  normal.

**Lema 2.0.1** (Jones). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.. Si  $\exists D$  denso en  $(X, \mathcal{T})$ ,  $E$  cerrado en  $(X, \mathcal{T})$  tal que  $(E, \mathcal{T}|_E)$  es discreto y  $\text{card}(E) \geq 2^{\text{card}(D)}$ . Entonces,  $(X, \mathcal{T})$  no es normal.

**Demostración.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  normal,  $\forall C \subset E, C$  y  $E$  son disjuntos y cerrados en  $(E, \mathcal{T}|_E)$  y en  $(X, \mathcal{T})$  que es normal. Entonces,  $\exists U_C, V_C \in \mathcal{T} : C \subset U_C, E \setminus C \subset V_C$ . Ahora, sea  $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(D) : c \mapsto f(c) = U_C \cap D$  aplicación. Veamos que  $f$  es inyectiva,  $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{P}(E) : C_1 \neq C_2 \Rightarrow \exists x \in C_1 : x \notin C_2 \Rightarrow C_i \subset U_{C_i}, E \setminus C_i \subset V_{C_i}, i \in \{1, 2\} \Rightarrow x \in U_{C_1} \cap V_{C_2} \in \mathcal{T} \Rightarrow (D \text{ denso}) y \in U_{C_1} \cap V_{C_2} \cap D \neq \emptyset \Rightarrow$

$$\begin{cases} y \in U_{C_1} \cap D = f(C_1) \\ y \notin U_{C_2} \cap D = f(C_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(C_1) \neq f(C_2) \Rightarrow \text{card}(E) < \text{card}(\mathcal{P}(E)) \leq \text{card}(\mathcal{P}(D)) = 2^{\text{card}(D)}$$

**Proposición 2.19.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t. normal  $(T_4)$ ,  $E \subset X$ ,  $E$  cerrado en  $(X, \mathcal{T})$ . Entonces,  $(E, \mathcal{T}|_E)$  es normal  $(T_4)$ .

**Demostración.**  $\forall C_1, C_2$  cerrados disjuntos en  $(E, \mathcal{T}|_E)$ . Entonces,  $C_1, C_2$  cerrados disjuntos de  $(X, \mathcal{T})$  que es normal  $\Rightarrow \exists U_i \in \mathcal{T}$  disjuntos tal que  $C_i \subset U_i, i \in \{1, 2\} \Rightarrow U_i \cap E \in \mathcal{T}|_E$  disjuntos tal que  $C_i \subset U_i \cap E, i \in \{1, 2\}$ .

**Observación.** El producto de e.t. normales no es necesariamente normal.

**Proposición 2.20.** Sea  $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$  familia de e.t.. Entonces,  $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$  es normal  $(T_4) \Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$  es normal  $(T_4)$ .

**Demostración.**  $(\Rightarrow) \forall j_0 \in J, X_{j_0} \simeq X_{j_0} \times \{j_0\} \subset \sum_{j \in J} X_j$  es cerrado.

$(\Leftarrow) \forall C_1, C_2$  cerrados disjuntos de  $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k) \Rightarrow \forall k \in J, j_k^{-1}(C_1), j_k^{-1}(C_2)$  cerrados disjuntos de  $(X_k, \mathcal{T}_k)$  que es normal  $\Rightarrow \forall j \in J, \exists U_{k,1}, U_{k,2} \in \mathcal{T}_k$  disjuntos tal que  $j_k^{-1}(C_i) \subset U_{k,i} \in \mathcal{T}_k, i \in \{1, 2\}$ . Entonces,  $U_1 = \bigcup_{k \in J} U_{k,1} \times \{k\}, \bigcup_{k \in J} U_{k,1} \times \{k\} \in \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k$  son abiertos dis-

juntos y  $C_1 \subset U_1, C_2 \subset U_2$ .

**Proposición 2.21.** Sea  $(X, \mathcal{T})$ ,  $(Y, \mathcal{S})$  e.t. tal que  $(X, \mathcal{T})$  es normal,  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$  suprayectiva, continua y cerrada. Entonces,  $(Y, \mathcal{S})$  es normal ( $T_4$ ).

**Demostración.**  $\forall C_1, C_2$  cerrado disjunto  $(Y, \mathcal{T}) \Rightarrow f^{-1}(C_1), f^{-1}(C_2)$  cerrados disjuntos de  $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow \exists U_i \in \mathcal{T}$  disjuntos tal que  $f^{-1}(C_i) \subset U_i, i \in \{1, 2\} \Rightarrow (f \text{ cerrada}) V_i = Y \setminus f(X \setminus U_i) \in \mathcal{S}, i \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_1 \cap V_2 &= (Y \setminus f(X \setminus U_1)) \cap (Y \setminus f(X \setminus U_2)) \\ &= (Y \setminus (f(X \setminus U_1) \cup f(X \setminus U_2))) \\ &= Y \setminus f(X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2) \\ &= Y \setminus f(X \setminus (U_1 \cap U_2)) \\ &= Y \setminus f(X) = Y \setminus Y = \emptyset \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  disjuntos.

$\dot{C} C_i \subset X \setminus f(X \setminus U_i)? \forall y \in C_i \Rightarrow f^{-1}(y) \subset f^{-1}(C_i) \subset U_i \Rightarrow X \setminus U_i \subset X \setminus f^{-1}(y) \Rightarrow f(X \setminus U_i) \subset f(X \setminus f^{-1}(y)) \Rightarrow z \in Y \setminus f(X \setminus f^{-1}(y)) \subset Y \setminus f(X \setminus U_i) = V_i \Rightarrow z \notin f(X \setminus f^{-1}(y)) \Rightarrow z = f(x') : x' \in X \setminus f^{-1}(y) \Rightarrow x' \in f^{-1}(y) \Rightarrow f(x') = y \Rightarrow z = y \Rightarrow \forall y \in C_i, y \in V_i.$

Para ver que es  $T_4$ :  $(X, \mathcal{T})$  es  $T_4$ ,  $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y \Rightarrow (T_1) \{x\}$  cerrado  $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow (f \text{ cerrada}) f(\{x\})$  es cerrado en  $(Y, \mathcal{S})$  y  $f(\{x\}) = \{y\}$ .

**Lema 2.0.2 (Urysohn).** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.. Entonces,  $(X, \mathcal{T})$  normal  $\Leftrightarrow \forall C_1, C_2$  cerrado disjunto,  $\exists f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow [0, 1]$  continua tal que  $f(C_1) = \{0\}, f(C_2) = \{1\}$ .

**Demostración.**  $(\Rightarrow)$  Sea

$$J = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} J_n, J_n = \left\{ \frac{k}{2^n} : k \in \{0, 1, \dots, 2^n\} \right\}$$

Entonces,  $\forall r \in J, \exists M_r \subset X$  tal que

- a)  $M_0 = C_1, M_1 = X \setminus C_2$
- b)  $\forall r, r' \in J, r < r' \Rightarrow \overline{M_r} \subset \overset{\circ}{M}_{r'}$

Hacemos la demostración por inducción.

Sea  $n = 0 \Rightarrow J_0 = \{0, 1\} \Rightarrow M_0 = C_1, M_1 = X \setminus C_2 \Rightarrow \overline{M_0} = \overline{C_1} = C_1 \subset X \setminus C_2 = M_1 = \overset{\circ}{M}_1$ .

Suponemos que es cierto para  $m = p$ . Veamos que se cumple para  $m = p + 1$ .

Si  $m = p + 1$ , entonces  $\forall r \in J, r = \frac{k}{2^{p+1}}$ . Distinguimos  $k$  par e impar.

- Si  $k$  par, entonces  $k = 2k', k' \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow r = \frac{2k'}{2^{p+1}} = \frac{k'}{2^p} \in J_p \Rightarrow \exists U_r$  tal que cumple (a) y (b).
- Si  $k$  es impar  $\Rightarrow s = \frac{k-1}{2^{p+1}}, t = \frac{k+1}{2^{p+1}} \in J_p \Rightarrow \exists M_s, M_t$  tal que cumplen (a) y (b) dado que  $s < t, \overline{M_s} \subset \overset{\circ}{M}_t$  y como  $(X, \mathcal{T})$  es normal  $\Rightarrow \exists M_r \in \mathcal{T} : \overline{M_s} \subset M_r \subset \overline{M_r} \subset \overset{\circ}{M}_t$ .

Sea  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tal que

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \in J : x \in \overline{M_r}\}, & \text{si } x \notin C_2 (\Leftrightarrow x \in M_1) \\ 1, & \text{si } x \in C_2 \end{cases}$$

entonces,  $f(C_2) = \{1\}$  por definición. Y  $\forall x \in C_1 = M_0 = \overline{M_0}$  cerrado  $\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f(C_1) = \{0\}$

Veamos que  $f$  es continua

- Si  $0 < f(x) < 1$ ,  $J$  denso en  $[0, 1] \Rightarrow \forall z \in [0, 1], \forall \delta > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^{m_0}} < \delta \Rightarrow \frac{k_0}{2^{m_0}} \in (z - \delta, z + \delta)$ . Entonces,  $\exists t, s \in J : f(x_0) - \epsilon < t < f(x_0) < s < f(x_0) + \epsilon$ .
  - Si  $t < f(x_0) \Rightarrow x_0 \notin \overline{M_t}$  (si  $x_0 \in \overline{M_t} \Rightarrow \forall j \in J : t < j, x_0 \in \overset{\circ}{M}_j \subset \overline{M_j} \rightarrow f(x_0) \leq t$ ).

- Si  $t(x_0) < s \Rightarrow x_0 \in \overset{\circ}{M}_s$  ( $f(x_0) = \inf\{r \in J : x_0 \in \overline{M}_r\} < s \Rightarrow \exists j \in J : j < s, x_0 \in \overline{M}_j \subset \overset{\circ}{M}_s$ )

$\Rightarrow x \in (X \setminus \overline{M}_t \cap \overset{\circ}{M}_s) \in \mathcal{T}$  donde  $X \setminus \overline{M}_t = V^{x_0}$ .

$x \in V^{x_0} \Rightarrow$

- Si  $x \notin \overline{M}_t \Rightarrow f(x) \geq t$  ( Si no ,  $f(x) < t, f(x) = \inf\{r \in J : x \in \overline{M}_r\} \Rightarrow \exists j \in J : j < t, x \in \overline{M}_j \subset \overset{\circ}{M}_t \subset \overline{M}_t$  absurdo )
- Si  $x \in \overset{\circ}{M}_s \subset \overline{M}_s \Rightarrow f(x) \leq s$

Entonces,  $f(V^{x_0}) \subset [t, s] \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$

- Si  $f(x_0) = 1, \forall \epsilon > 0, \exists t \in J : f(x_0) - \epsilon = 1 - \epsilon < t < f(x_0) = 1$ . Entonces,  $t < f(x_0) \rightarrow x_0 \notin \overline{M}_t \Rightarrow x_0 \in X \setminus \overline{M}_t = V^{x_0}$ . Por tanto,  $\forall x \in V^{x_0} \Rightarrow x \notin \overline{M}_t \Rightarrow f(x) \geq t$ . Por tanto,  $f(V^{x_0}) \subset [t, 1] \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) = (1 - \epsilon, 1)$ .
- Si  $f(x_0) = 0$ , entonces  $\forall \epsilon > 0, \exists s \in J : 0 = f(x_0) < s < f(x_0) + \epsilon = \epsilon$  donde  $f(x_0) < s \Rightarrow x_0 \in \overset{\circ}{M}_s = V^{x_0} \in \mathcal{T}$ . Por tanto,  $\forall x \in V^{x_0}, x \in \overset{\circ}{M}_s \subset \overline{M}_s \Rightarrow f(x) \leq s \Rightarrow f(V^{x_0}) \subset [0, s] \subset [0, \epsilon] = [f(x_0), f(x_0) + \epsilon)$ .

$(\Leftarrow) \forall C_1, C_2$  cerrados disjuntos.

- Si  $C_1 = \emptyset$ . Tomamos  $M_1 = \emptyset, M_2 = X$ ,
- Si  $C_1, C_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow [0, 1]$  continua tal que  $f(C_1) = \{0\}, f(C_2) = \{1\} \Rightarrow f^{-1}([0, \frac{1}{2})), f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) \in \mathcal{T}$  disjuntos, donde  $C_1 \subset f^{-1}([0, \frac{1}{2})), C_2 \subset f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) \in \mathcal{T}$ .

**Corolario 2.0.3.**  $T_4$  es más fuerte que  $T_{3a}, T_4 \Rightarrow T_{3a}$ .

**Observación.** Metrizable  $\Rightarrow T_4, T_{3a}, T_3, T_2, T_1, T_0$ .

**Observación.**  $T_3 \not\Rightarrow T_4, T_{3a}$  es multiplicativa y  $T_4$  no.

**Teorema 2.1** (de Extension de Tietze). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.. Entonces,  $(X, \mathcal{T})$  es normal  $\Leftrightarrow \forall C \neq \emptyset$  cerrado,  $\forall f : (C, \mathcal{T}|_C) \rightarrow [-1, 1]$  aplicación continua,  $\exists F : (X, \mathcal{T}) \rightarrow [-1, 1]$  continua tal que  $F|_C = f$ .

**Observación.** Cualquier aplicación continua de  $C$  a  $[a, b]$  puede extenderse a una aplicación continua de  $X$  a  $[a, b]$ .



**Demostración.** ( $\Rightarrow$ ) Supongamos  $C$  cerrado de  $(X, \mathcal{T})$ ,  $f : A \rightarrow [-1, 1]$ .  
Sea

$$A_1 = \left\{ x \in C : f(x) \geq \frac{1}{3} \right\}, \quad B_1 = \left\{ x \in C : f(x) \leq -\frac{1}{3} \right\}$$

Entonces,  $A_1$  y  $B_1$  son cerrados disjuntos en  $(X, \mathcal{T})$  que es normal.  
Por el Lema de Uryshon  $\Rightarrow \exists f_1 : X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$  tal que  $f_1(A_1) = \frac{1}{3}$ ,  
 $f_1(B_1) = -\frac{1}{3}$ . Por tanto,  $\forall x \in C, |f(x) - f_1(x)| \leq \frac{2}{3}$ .

De la misma forma, sea  $g_1 = f - f_1|_C : (C, \mathcal{T}|_C) \rightarrow [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$  continua  
y

$$A_2 = \left\{ x \in C : f(x) \geq \frac{2}{9} \right\}, \quad B_2 = \left\{ x \in C : f(x) \leq -\frac{2}{9} \right\}$$

Por el Lema de Uryshon  $\Rightarrow \exists f_2 : (X, \mathcal{T}) \rightarrow [-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}]$  tal que  $f_2(A_2) = \frac{2}{9}$   
y  $f_2(B_2) = -\frac{2}{9}$ . Evidentemente,  $\forall x \in C |g_1(x) - f_2(x)| \leq (\frac{2}{3})^2$ .

Continuando el proceso,  $\exists \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, f_n : (X, \mathcal{T}) \rightarrow [-1, 1]$  funciones  
continuas en  $C$  tal que  $\forall x \in X, |f_n(x)| \leq (\frac{2}{3})^n$ . Entonces,

$$\left| f - \sum_{k=1}^n f_k \right| \leq \left( \frac{2}{3} \right)^n$$

Por el criterio de Weierstrass  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente  $\Rightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F$   
 $F \Rightarrow F$  continua  $\Rightarrow F|_C = f$ .

( $\Leftarrow$ )  $\forall C_1, C_2$  cerrados disjuntos, entonces  $C_1 \cup C_2$  es cerrado en  $(X, \mathcal{T})$  y  
la función  $f : C_1 \cup C_2 \rightarrow [-1, 1]$  definida por  $f(C_1) = \{-1\}$ ,  $f(C_2) = \{1\}$   
es continua en  $C_1 \cup C_2$ . Entonces, la extensión de  $f$  a todo  $X$  será  
la función de Uryshon para  $C_1$  y  $C_2 \Rightarrow (X, \mathcal{T})$  es normal.

**Proposición 2.22** (Variantes del Teorema de Tietze). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  
 $\forall s > 0$ . Entonces, son equivalentes

(I)  $(X, \mathcal{T})$  es normal

(II)  $\forall C \neq \emptyset$  cerrado,  $\forall f : (C, \mathcal{T}|_C) \rightarrow (-s, s)$  continua,  $\exists \bar{f} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (-s, s)$   
tal que  $\bar{f}|_C = f$ .

(III)  $\forall C \neq \emptyset$  cerrado,  $\forall g : (C, \mathcal{T}|_C) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  continua,  $\exists \hat{g} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $\hat{g}|_C = g$ .

**Demostración.**  $[i) \Rightarrow ii)]$  Dado que  $(-s, s)$  es abierto y  $(-s, s) \subset [-s, s]$ , el teorema de Tietze  $\Rightarrow \exists F : (X, \mathcal{T}) \rightarrow [-s, s]$  continua tal que  $F|_C = f$ .

- Si  $F(X) \subset (-s, s)$  hemos terminado.
- Si  $F(X) \not\subset (-s, s)$  ( $\Leftrightarrow F^{-1}(\{s, -s\}) = C_1 \neq \emptyset, C_1$  disjuntos). Entonces, por el Lema de Uryshon  $\Rightarrow \exists h : (X, \mathcal{T}) \rightarrow [0, 1]$  continua tal que  $h(C_1) = \{0\}, h(C) = \{1\}$ . Sea  $\hat{f} = F(x) \cdot h(x), \forall x \in X$ . Entonces,  $\hat{f}$  es continua y  $\hat{f}(x) \subset (-s, s) \Rightarrow \hat{f}|_C = f$

$[ii) \Rightarrow iii)]$  Sea  $g : (C, \mathcal{T}|_C) \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\exists h : \mathbb{R} \rightarrow (-s, s) \simeq f = h \circ g : (C, \mathcal{T}|_C) \rightarrow (-s, s)$  continua. Por  $ii) \Rightarrow \exists \hat{f} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (-s, s)$  continua tal que  $\hat{f}|_C = f$ . Sea  $\hat{g} = h^{-1} \circ \hat{f} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$  continua  $\Rightarrow \hat{g}|_C = h^{-1} \circ f = h \circ (h^{-1} \circ g) = g$ . Y como  $\mathbb{R} \simeq (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ , tenemos el resultado requerido.

$[iii) \Rightarrow i)]$   $\forall C_1, C_2$  cerrados disjuntos

- Si  $C_1 = \emptyset$ , hemos terminado.
- Si  $C_1, C_2 \neq \emptyset \Rightarrow C_1 \cup C_2 \neq \emptyset$  cerrado de  $(X, \mathcal{T})$ . Sea  $g : (C_1 \cup C_2, \mathcal{T}|_{C_1 \cup C_2}) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(C_1) = \{-1\}, g(C_2) = \{1\}$ , entonces  $g$  es continua y por la hipótesis se puede extender, es decir  $\exists \hat{g} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $\hat{g}|_{C_1 \cup C_2} = g \Rightarrow \hat{g}^{-1}((\leftarrow, 0)), \hat{g}^{-1}((0, \rightarrow)) \in \mathcal{T}$  donde  $C_1 \subset \hat{g}^{-1}((\leftarrow, 0)), C_2 \subset \hat{g}^{-1}((0, \rightarrow))$  abiertos disjuntos  $\Rightarrow (X, \mathcal{T})$  es normal.

# Capítulo 3

## Propiedades Numerabilidad

### 3.1. Axiomas Numerabilidad

**Definición 3.1** (Numerable). Sea  $X$  conjunto,  $X$  es numerable si  $\text{card}(X) \leq \aleph_0 = \text{card}(\mathbb{N})$ .

**Definición 3.2** (Primer Axioma de Numerabilidad). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.. Se dice que verifica el primer axioma de numerabilidad si  $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}(x)$  base de entornos de  $x$  en  $(X, \mathcal{T})$  numerable.

**Ejemplo.**  $\forall X$  conjunto,  $(X, \mathcal{T}_D), \mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}, \forall x \in X$  es finito  $\Rightarrow$  numerable  $\Rightarrow$  1º axioma.

**Ejemplo.**  $\forall X$  conjunto  $(X, \mathcal{T}), \mathcal{V}(x) = \{x\} = \mathcal{B}(x), \forall x \in X$ .

**Ejemplo.** Si  $(X, \mathcal{T})$  metrizable,  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d, \forall x \in X, \mathcal{B}(x) = \{B_{\frac{1}{n}}^x : n \in \mathbb{N}\}$ .

**Definición 3.3** (Segundo Axioma). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.. Se dice que verifica el segundo axioma de numerabilidad si  $\exists \mathcal{B}$  base de  $\mathcal{T}$ , numerable.

**Ejemplo.**  $\forall X$  conjunto,  $(X, \mathcal{T}), \mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ .

**Ejemplo.** Si  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u), \mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}\}$

**Observación.** 2º axioma  $\Rightarrow$  1º axioma.

**Observación.** 1º axioma  $\nRightarrow$  2º axioma.

Sea  $X$  conjunto tal que  $\text{card}(X) > \aleph_0 \Rightarrow (X, \mathcal{T}_d)$  es 1º axioma pero no segundo. Dado que  $\forall x \in X, \{x\} \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \forall \mathcal{B}$  base de  $\mathcal{T}_d, \forall x \in X, \exists B_x \subset \mathcal{B} : B_x \subset \{x\} \Rightarrow \aleph_0 < \text{card}(X) = \text{card}(\{B_x : x \in X\}) \leq \text{card}((\mathcal{B}))$ .

**Proposición 3.1.** El 1º y 2º axioma de numerabilidad son propiedades hereditarias.

**Demostración.**

- (I)  $(X, \mathcal{T})$  1º axioma,  $E \subset X$ .  $\forall x \in E \Rightarrow \exists \mathcal{B}(x) = \{B_n^x : n \in \mathbb{N}\}$  base de entornos de  $x$  en  $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow \mathcal{B}(x) = \{B_n^x \cap E : n \in \mathbb{N}\}$  es base de entornos de  $x$  en  $(E, \mathcal{T}|_E)$ .
- (II)  $(X, \mathcal{T})$  2º axioma,  $E \subset X \Rightarrow \exists \mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$  base de  $\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{B}' = \{B_n \cap E : n \in \mathbb{N}\}$  es base de  $\mathcal{T}|_E$ .

**Proposición 3.2.** Sean  $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$  e.t.  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  aplicación suprayectiva, abierta y continua, Si  $(X, \mathcal{T})$  es 1º axioma (2º axioma), también lo es  $(X', \mathcal{T}')$ .

**Demostración.** [a]  $\forall x' \in X' \xrightarrow{f \text{ supra}} \exists x \in X : f(x) = x'$ . Por hipótesis  $\exists \mathcal{B}(x) = \{B_n^x : n \in \mathbb{N}\}$  es base de entornos de  $x$  numerable  $\Rightarrow \mathcal{B}'(x) = \{f(B_n^x) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{V}(x)$  es numerable. Veamos que es base de entornos de  $x'$ .  $\forall V^{x'}$  entorno de  $x'$  en  $(X', \mathcal{T}')$   $\xrightarrow{f \text{ cont.}} f^{-1}(V^{x'})$  entorno de  $x \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : B_{n_0}^x \subset f^{-1}(V^{x'}) \Rightarrow f(B_{n_0}^x) \subset f(f^{-1}(V^{x'})) = V^{x'}$  donde  $f(B_{n_0}^x) \in \mathcal{B}(x)$ .

[b] Por hipótesis,  $\exists \mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$  base de  $\mathcal{T} \xrightarrow{f \text{ ab.}} \mathcal{B}' = \{f(B_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}'$ . Entonces,  $\forall A' \in \mathcal{T}' \setminus \{\emptyset\}, \forall x' \in A' \xrightarrow{f \text{ cont y supra}} x \in f^{-1}(x') \subset f^{-1}(A') \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : B_{n_0} \subset f^{-1}(A') \Rightarrow f(x) = x' \in f(B_{n_0}) \subset f(f^{-1}(A')) = A'$ .

**Corolario 3.0.1.** 1º, 2º axioma son invariantes topológicos.

**Proposición 3.3.** Sea  $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$  familia no vacía de e.t.. Entonces,  $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$  1º axioma (2º axioma)  $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$  es 1º axioma (2º axioma) y  $K = \{j \in J : \mathcal{T}_j \text{ no es trivial}\}$  es no numerable.

**Demostración.**  $a) \Rightarrow$  Sea  $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$   $1^{\circ}$  axioma. Entonces,  $\forall j \in J, p_{j_0} : (\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j) \rightarrow (X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0})$  es suprayectiva, continua y abierta  $\Rightarrow (X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0})$  es  $1^{\circ}$  axioma. Por hipótesis,  $\forall a = (a_j)_{j \in J}, \exists \mathcal{B}(a) = \{B_n^a : n \in \mathbb{N}\}$  numerable  $\Rightarrow \forall j \in J, H_n = \{p_j(B_n^a) : n \in \mathbb{N}\}$  es base de entornos de  $a_j$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, \{j \in J : p_j(B_n^a) \neq X_j\}$  dado que  $\prod U_j \subset B_n^a : U_j \in \mathcal{T}_j$  y  $U_j = X_j, \forall j \in J \setminus F : F$  finito  $\Rightarrow \forall j \in J \setminus F, p_j(B_n^a) = X_j$ . Entonces,  $H_n$  es finito  $\Rightarrow H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$  es numerable. Falta ver que  $K$  es numerable, veamos que  $K \subset H$ .  $\forall j \in J \Rightarrow \mathcal{T}_j \neq \{\emptyset, X_j\} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : p_j(B_{n_0}^a) \neq X_j \Rightarrow j \in H_{n_0} \subset H$ .

$b) \Rightarrow$   $\forall j_0 \in J, p_{j_0} : (\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j) \rightarrow (X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0})$  suprayectiva, continua y abierta  $\Rightarrow (X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0})$  es  $2^{\circ}$  axioma. Y  $2^{\circ}$  axioma  $\Rightarrow 1^{\circ}$  axioma  $\Rightarrow K$  numerable.

$a) \Leftarrow$  Sea  $K$  numerable.  $\forall a = (a_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j$ , por hipótesis,  $\forall j \in J, \exists \mathcal{B}(a_j) = \{B_n^{a_j} : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{X_j\}$  base numerable de  $a_j$ . Sea  $\mathcal{B}(a) = \{\prod_{j \in J} A_j = X_j, i, j \in J \setminus F : F$  finito y  $A_j \in \mathcal{B}(a_j), j \in F\}$  es base de entornos de  $a$ . Luego  $\text{card}(\mathcal{B}(a)) = \text{card}(\mathcal{P}_F(K)) \Rightarrow$  numerable.

$b) \Leftarrow$   $\forall j \in J, \exists \mathcal{B}_j = \{B_n : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{X_j\}$ . Sea  $\mathcal{B} = \{\prod_{j \in J} A_j : A_j = X_j, \forall j \in J \setminus F, F$  finito,  $A_j \in \mathcal{B}_j, j \in F\} \Rightarrow \text{card}(\mathcal{B}) = \text{card}(\mathcal{P}_F(K)) \Rightarrow$  numerable.

**Proposición 3.4.** Sea  $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$  familia no vacía de e.t.. Entonces,  $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$   $1^{\circ}$  axioma  $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$  es  $1^{\circ}$  axioma

**Demostración.**

$(\Rightarrow) \forall j_0 \in J, X_{j_0} \simeq X_{j_0} \times \{j_0\} \subset \sum_{j=0} X_j$  ACABAR

$(\Leftarrow) \forall x \in \sum_{j \in J} X_j \Rightarrow \exists ! j_0 \in J : x \in X_{j_0} \times \{j_0\} \simeq X_{j_0}$ . Por hipótesis,  $\exists \mathcal{B}$  base entornos de  $p_1(x)$  en  $(X_{j_0}, \mathcal{T}_{j_0}) \Rightarrow \exists$  base de entornos de  $x$  en  $X_{j_0} \times \{j_0\}$  y en  $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ .

**Proposición 3.5.** Sea  $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$  familia no vacía de e.t.. Entonces,  $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$   $2^{\circ}$  axioma  $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$  es  $1^{\circ}$  axioma y  $\mathcal{T}$  es numerable.

**Demostración.**

( $\Rightarrow$ )  $\forall j_0 \in J, X_{j_0} \simeq X_{j_0} \times \{j_0\} \subset \sum_{j \in J} X_j, \exists \mathcal{B}$  base numerable de  $\sum_{j \in J} \mathcal{T}_j \Rightarrow \forall j \in J, \exists B_k \in \mathcal{B} : B_k \subset X_k \times \{k\}$  disjuntos dos dos  $\Rightarrow \text{card}\{B_k : k \in J\} \leq \text{card}(\mathcal{B}) \leq \mathcal{X}_0$  por ser subfamilia. Y por ser disjuntos  $\Rightarrow \forall k, k' \in \mathcal{T} : k \neq k', B_k \cap B_{k'} = \emptyset \Rightarrow \text{card } J \leq \text{card}\{B_k : k \in J\} \leq \text{card } \mathcal{X}_0$ .

( $\Leftarrow$ )  $\forall k \in J, \exists \mathcal{B}_k$  base numerable de  $\mathcal{T}_k \Rightarrow \{B \times \{k\} : B \in \mathcal{B}_k\}$  base de entornos de  $\mathcal{T}_k \Rightarrow \mathcal{B} = \bigcup_{k \in J} \{B \times \{k\} : B \in \mathcal{B}_k\}$  es numerable y es base de  $\sum_{j \in J} \mathcal{T}_j$ .

**Observación.** Si  $(X, \mathcal{T})$  e.t. 1º axioma entonces,  $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}(x) = \{B_n^x : n \in \mathbb{N}\} : B_{n+1}^x \subset B_n^x, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Dem:  $\forall x \in X, \exists \{V_n^x : n \in \mathbb{N}\}$  base de entornos numerable.

$$B_1^x = V_1^x$$

$$B_2^x = V_1^x \cap V_2^x$$

$$B_3^x = V_1^x \cap V_2^x \cap V_3^x$$

$$B_n^x = \bigcap_{k=1}^n V_k^x$$

entonces  $B_n^x \subset V_n^x$  y  $B_{n+1}^x \subset B_n^x$

**Definición 3.4** (Sucesión Convergente). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ . Entonces,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x \in X \Leftrightarrow \forall \mathcal{U}^x$  entorno de  $x$  in  $(X, \mathcal{T}), \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in \mathcal{U}^x, \forall n \geq n_0$ .

**Proposición 3.6.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t. 1º axioma. Entonces,

- (I)  $M \subset X, x \in X \Rightarrow x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ .
- (II)  $M \subset X, x \in X \Rightarrow x \in M' \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M \setminus \{x\} : \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ .
- (III)  $M \subset X, M$  cerrado en  $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M \Rightarrow \lim(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ .
- (IV)  $(X', \mathcal{T}')$  e.t.,  $f : X \rightarrow X', x \in X, f$  continua en  $x \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset$

$$M : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x \Rightarrow (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow f(x).$$

**Demostración.** (I)

(II)

$(\Rightarrow)$   $x \in \overline{M}$  y  $\exists \mathcal{B}(x) = \{B_n^x : n \in \mathbb{N}\} : B_{n+1}^x \subset B_n^x$ . Entonces,  
 $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in B_n^x \cap M \neq \emptyset \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x$ .

$(\Leftarrow)$   $\forall \mathcal{U}^x, \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in \mathcal{U}^x$  donde  $x_n \in M, \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in M \cap \mathcal{U}^x \neq \emptyset$ .

(III)

$(\Rightarrow)$   $x \in M' \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, B_n^x \setminus \{x\} \cap M \neq \emptyset \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M \setminus \{x\}$ .

$(\Leftarrow)$  Análogo.

(IV)  $M$  cerrado  $\Leftrightarrow \overline{M} = M \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M \Rightarrow \lim(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M$ .

(V)

$(\Rightarrow)$   $f$  cont en  $x$  y  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x \Rightarrow \forall V^{f(x)}, \exists U^x : f(U^x) \subset V^{f(x)} \Rightarrow$   
 $\exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in U^x, \forall n \geq n_0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : f(x_n) \in f(U^x) \subset V^{f(x)}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow f(x)$ .

$(\Leftarrow)$  Si  $f$  no es continua, entonces  $\exists V^{f(x)} : \forall U^x, f(U^x) \not\subset V^{f(x)} \Rightarrow$   
 $\forall n \in \mathbb{N}, f(B_n^x) \not\subset V^{f(x)} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in B_n^x : f(x_n) \notin V^{f(x)}$ .  
 Ahora,  $B_{n+1}^x \subset B_n^x, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x$  y  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \not\rightarrow f(x)$ .

## 3.2. Separable

**Definición 3.5** (Separable). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.. Se dice que es separable si  $\exists D$  denso numerable en  $(X, \mathcal{T})$ .

**Proposición 3.7.** Todo  $2^{\mathcal{Q}}$  axioma es separable.

**Demostración.**  $\exists \mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$  base numerable de  $\mathcal{T}$ . Podemos suponer que  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ . Entonces,  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in B_n$  de manera que  $\{x_n : n \in$

$\mathbb{N}\} = D$  es numerable. Además,  $\forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : B_{n_0} \in \mathcal{B} : x_{n_0} \in B_{n_0} \subset U$  y  $U \cap D \neq \emptyset \Rightarrow D$  es denso.

**Observación.** La separación no es hereditaria.

**Demostración.** content

**Proposición 3.8.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t. separable,  $G \in \setminus \{\emptyset\}$ . Entonces,  $(G, \mathcal{T}|_G)$  es seprable.

**Demostración.**  $\exists D$  denso numera en  $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow G \cap D \neq \emptyset$ . Como  $D$  es numerable  $\Rightarrow G$  numerable. Ahora,  $\forall U \in \mathcal{T}|_G \setminus \{\emptyset\} \Rightarrow U \subset G \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\} \Rightarrow U \cap D \neq \emptyset$  donde  $U \cap D = U \cap (D \cap G) \Rightarrow G \cap D$  denso en  $(G, \mathcal{T}|_G)$ .

**Proposición 3.9.** Sea  $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$  e.t.,  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  supra-  
yectiva y continua. Si  $(X, \mathcal{T})$  es separable, entonces también lo es  $(X', \mathcal{T}')$ .

**Demostración.**  $\exists D$  denso numerable en  $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow \overline{D} = X \Rightarrow f(\overline{D}) \subset \overline{f(D)}$  donde  $f(\overline{D}) = f(X) \Rightarrow f(X) \subset \overline{f(D)} \Rightarrow f(X) = \overline{f(D)} \Rightarrow f(D)$  denso y numerable.

**Proposición 3.10.** Sean  $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$  familia no vacía de e.t.  $T_2$  y  $\text{card } X_j \geq 2, \forall j \in J$ . Entonces,  $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j)$  es separable  $\forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$  es separable y  $\text{card } J \leq 2^{\aleph_0}$ .

**Demostración.**

$(\Rightarrow) \forall j \in J, p_j$  continua y suprayectiva  $\Rightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$  separable  $\forall j \in J$ .  
Luego,  $\forall j \in J, \exists U_j, V_j \in \mathcal{T}_j \setminus \{\emptyset\} : U_j \cap V_j = \emptyset$  de manera que  $p_j^{-1}(U_j) \in \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j$  no vacío y  $\exists D$  denso en  $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j) \Rightarrow D \cap p_j^{-1}(U_j) = D \cap D_j \neq \emptyset$ . Sea

$$F : J \rightarrow \mathcal{P}(D) : j \mapsto D_j.$$

Veamos que  $F$  es inyectiva.  $\forall j, j' \in J : j \neq j', p_j^{-1}(U_j) \cap p_{j'}^{-1}(V_j) \neq \emptyset$  por ser  $p_j$  aplicación abierta. Entonces,  $D \cap p_j^{-1}(U_j) \cap (p_{j'})^{-1}(V_j) \neq \emptyset$ .



( $\Leftarrow$ ) Sea

$$D = \{P_{J_1, \dots, J_k}^{n_1, \dots, n_k}, k \in \mathbb{N}, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N},$$

$J_1, \dots, J_k$  segmento de extremos racionales disjuntos contenido en  $[0, 1]\}$

Entonces,  $D \subset \prod_{j \in J} X_j$  y  $D$  es numerable. Por tanto,  $\forall U \in \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j \setminus \{\emptyset\}$ ,  $\exists B \in \mathcal{B} : B \subset U$  tal que  $B = \bigcap_{i=1}^m p_{j_i}^{-1}(U_{j_i})$  donde  $U_{j_i} \in \mathcal{T}_{j_i} \setminus \{\emptyset\}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ . Por tanto,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $D_{j_i} \cap U_{j_i} = d_{j_i n_i} \neq \emptyset$ ,  $j_1, \dots, j_m \in [0, 1]$ . Entonces,  $P_{J_1, \dots, J_k}^{n_1, \dots, n_k}$  in  $D$  y  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $p_{j_i}(P_{J_1, \dots, J_k}^{n_1, \dots, n_k}) = d_{j_i n_i} \in U_{j_i} \Rightarrow P_{J_1, \dots, J_k}^{n_1, \dots, n_k} \in D, B \Rightarrow D \cap B \neq \emptyset \Rightarrow D \cap U \neq \emptyset$ .

**Proposición 3.11.** Sea  $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$  familia no vacía de e.t.. Entonces,  $(\sum_{j \in J} X_j, \sum_{j \in J} \mathcal{T}_j)$  separable  $\Leftrightarrow \forall j \in J, (X_j, \mathcal{T}_j)$  es separable y  $J$  es numerable.

**Demostración.**

( $\Rightarrow$ ) Por hipótesis,  $D$  denso numerable en  $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k) \Rightarrow \forall k \in J, (X_k \times \{k\}) \cap D \neq \emptyset$ . Sea  $z_k \in (X_k \times \{k\}) \cap D$ , entonces  $\{z_k : k \in J\} \subset D$  es conjunto de puntos distintos. Podemos usar una aplicación inyectiva de  $\{z_k : k \in J\}$  a  $J$  para ver que  $\text{card } J \leq \text{card } D \leq \mathcal{X}_0$ .

( $\Leftarrow$ )  $\forall k \in J, \exists D_k$  denso numerable en  $(X_k, \mathcal{T}_k)$ . Sea  $D = \bigcup_{k \in J} mb D_k \times \{k\}$  es numerable por ser unión de conjuntos numerables y es subespacio del espacio suma  $\Rightarrow$  es denso en  $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ .

### 3.3. Lindelöf

**Definición 3.6** (Recubrimiento). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.,  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ . Se dice que  $\mathcal{U}$  es un recubrimiento de  $X$  si  $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X$ . Si  $\forall U \in \mathcal{U}, U \in \mathcal{T}$ , entonces  $\mathcal{U}$  es un recubrimiento abierto.

**Definición 3.7** (Subrecubrimiento). Sea  $(X, \mathcal{T}), \mathcal{U}$  recubrimiento de  $X$ ,  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ . Se dice que  $\mathcal{V}$  es un subrecubrimiento si  $\mathcal{V}$  también es un recubrimiento de  $X$ .

**Observación.** Puede ser que  $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ .

**Definición 3.8** (Lindelöf). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t. es Lindelöf si  $\forall \mathcal{U}$  recubrimiento abierto de  $X$ ,  $\exists \mathcal{V}$  subrecubrimiento numerable de  $\mathcal{U}$ .

**Proposición 3.12.** Todo e.t.  $2^{\text{do}}$  axioma es de Lindelöf.

**Demostración.** Sea  $(X, \mathcal{T})$   $2^{\text{do}}$  axioma  $\Rightarrow \exists \mathcal{B}$  base numerable de  $\mathcal{T}$ . Entonces,  $\forall \mathcal{U}$  recubrimiento abierto de  $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}, \forall x \in U, \exists B_U^x \in \mathcal{B} : x \in B_U^x \subset U$ . Sea  $\mathcal{C} = \{B_U^x : x \in U \in \mathcal{U}\} \subset \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$  numerable y  $\mathcal{C}$  recubre a  $X$  pero no es subrecubrimiento. Luego,  $\forall B \in \mathcal{C}, \exists U_B \in \mathcal{U} : B \subset U_B \Rightarrow \mathcal{V} = \{U_B : B \in \mathcal{C}\} \subset \mathcal{U}$  es numerable y recubre a  $X \Rightarrow \mathcal{V}$  es subrecubrimiento de  $\mathcal{U} \Rightarrow$  es  $(X, \mathcal{T})$  es Lindelöf.

**Observación.** Lindelöf no es hereditaria.

**Ejemplo.** VER EJEMPLO

**Proposición 3.13.** Todo subespacio cerrado de un e.t. Lindelöf es Lindelöf.

**Demostración.** Sea  $(X, \mathcal{T})$ , Lindelöf,  $E$  cerrado no vacío de  $(X, \mathcal{T})$ . Entonces,  $\forall \mathcal{U}$  recubrimiento abierto de  $(E, \mathcal{T}|_E)$ ,  $\mathcal{U} = \{U_j : j \in J\} \Rightarrow \forall j \in J, \exists V_j \in \mathcal{T} : U_j = V_j \cap E$ . Luego,  $\mathcal{U}' = \{V_j : j \in J\} \cup \{X \setminus E\}$  es recubrimiento abierto de  $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow \exists \mathcal{V}' = \{V_{j_n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{X \setminus E\}$  es subrecubrimiento de  $\mathcal{U}' \Rightarrow \mathcal{V} = \{U_{j_n} : n \in \mathbb{N}\}$  es subrecubrimiento de  $\mathcal{U}$ .

**Proposición 3.14.** Sea  $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$  e.t.,  $(X, \mathcal{T})$  Lindelöf,  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  aplicación continua suprayectiva. Entonces,  $(X', \mathcal{T}')$  es Lindelöf.

**Demostración.**  $\forall \mathcal{U}' = \{U'_j : j \in J\}$  recubrimiento abierto de  $(X', \mathcal{T}')$ . Entonces,  $\mathcal{U} = \{f^{-1}(U'_{j_n}) : n \in \mathbb{N}\}$  es recubrimiento abierto de  $(X, \mathcal{T})$ . Por ser  $(X, \mathcal{T})$  Lindelöf  $\Rightarrow \exists \mathcal{V} = \{f^{-1}(U'_{j_n}) : n \in \mathbb{N}\}$  subrecubrimiento numerable de  $\mathcal{U} \xrightarrow{f \text{ supra.}} \mathcal{V}' = \{U'_{j_n} : n \in \mathbb{N}\}$  subrecubrimiento numerable de  $\mathcal{U}'$ .

**Observación.** El producto de dos e.t. de Lindelöf no es Lindelöf.

**Ejemplo.** VER EJEMPLO

**Proposición 3.15.** Sea  $\{(X_j, \mathcal{T}_j)\}_{j \in J}$  familia no vacía de e.t.. Entonces,  $(\sum_{j \in J} X_j, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$  es Lindelöf  $\Leftrightarrow (X_j, \mathcal{T}_j)$  es Lindelöf  $\forall j \in J$  y  $J$  es numerable.

**Demostración.**

$(\Rightarrow)$   $\forall k \in J, X_k \simeq X_k \times \{k\} \subset \sum_{j \in J} X_j$  y dado que Lindelöf se conserva por aplicaciones continuas  $\Rightarrow$  Lindelöf es invariante, tenemos que  $(X_k, \mathcal{T}_k)$  es Lindelöf,  $\forall k \in J$ . Como  $\{X_k \times \{k\} : k \in J\}$  es recubrimiento de  $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$  por conjuntos disjuntos dos a dos  $\Rightarrow J$  numerable. REVISAR.

$(\Leftarrow)$  Sea  $\mathcal{U}$  recubrimiento abierto de  $(\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$ . Entonces,  $\forall k \in J, \{U \cap (X_k \times \{k\}) : U \in \mathcal{U}\} = \mathcal{U}_k$  recubrimiento abierto de  $X_k \times \{k\} \simeq (X_k, \mathcal{T}_k)$ . Por tanto  $\forall k \in J, \exists \mathcal{V}_k$  subrecubrimiento numerable de  $\mathcal{U}_k$ . Sea  $\mathcal{V} = \bigcup_{k \in J} \{U : U \cap (X_k \times \{k\}) \in \mathcal{V}_k\} \subset \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{V}$  es subrecubrimiento numerable de  $\mathcal{U} \Rightarrow (\sum_{k \in J} X_k, \sum_{k \in J} \mathcal{T}_k)$  es Lindelöf.

**Proposición 3.16.** Todo e.t. Lindelöf y regular es normal.

**Demostración.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t. Lindelöf y regular. Entonces,  $\forall C_1, C_2$  cerrados de  $(X, \mathcal{T})$

- Si  $C_1 = \emptyset$ , entonces  $U_1 = \emptyset, U_2 = X$ .
- Si  $C_1, C_2 \neq \emptyset$ , entonces

$$\begin{cases} \forall x \in C_1, \exists V^x \in \mathcal{T} : \overline{V^x} \cap C_2 = \emptyset \Rightarrow C_1 \subset \bigcup_{x \in C_1} V^x \\ \forall y \in C_2, \exists U^y \in \mathcal{T} : \overline{U^y} \cap C_1 = \emptyset \Rightarrow C_2 \subset \bigcup_{y \in C_2} U^y \end{cases}$$

Dado que todo espacio cerrado de un e.t. Lindelöf es Lindelöf, entonces

$$\begin{cases} \exists \{V^{x_n} : n \in \mathbb{N}\} : C_1 \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V^{x_n} \text{ subfamilia numerable} \\ \exists \{U^{y_n} : n \in \mathbb{N}\} : C_2 \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U^{y_n} \text{ subfamilia numerable} \end{cases}$$

Ahora, sean

$$\begin{aligned} A_1 &= V^{x_1}, & B_1 &= U^{y_1} \setminus \overline{A_1} \\ A_2 &= V^{x_2} \setminus \overline{B_1}, & B_2 &= U^{y_2} \setminus \overline{A_1 \cup A_2} \end{aligned}$$

$$A_3 = V^{x_3} \setminus \overline{B_1 \cup B_2}, \quad B_3 = U^{y_3} \setminus \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$$

...

son recubrimientos abiertos de  $T$ . Sean

$$G_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}, \quad G_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{T}.$$

Veamos que  $C_i \subset G_i, \forall i \in \mathbb{N}$  y  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ .

$\boxed{C_1 \subset G_1}$   $\forall z \in C_1 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : z \in V^{x_n}$ . Como  $z \in C_1$ , entonces  $z \notin \overline{U^{y_m}}, \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow U^{y_m} \subset B_m \Rightarrow z \notin \overline{U^{y_m}} \subset \overline{B_m}, \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow z \in A_n \subset G_1$ .

Veamos que  $G_1$  y  $G_2$  son disjuntos.

$\boxed{G_1 \cap G_2 = \emptyset}$  Si  $\exists z \in G_1 \cap G_2$ , entonces

$$\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N} : z \in A_{n_0} \Rightarrow z \notin B_n, \forall n < n_0 \\ \exists m_0 \in \mathbb{N} : z \in B_{m_0} \Rightarrow z \notin A_m, \forall m \leq m_0 \end{cases}$$

pero  $z \in A_{n_0} \Rightarrow n_0 > m_0$  y  $z \in B_{m_0} \Rightarrow m_0 \geq n_0$  es absurdo.

**Teorema 3.1.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t. metrizable. Entonces, son equivalentes

- (I)  $(X, \mathcal{T})$  es  $2^{\mathfrak{c}}$  axioma,
- (II)  $(X, \mathcal{T})$  es Lindelöf,
- (III)  $(X, \mathcal{T})$  es separable.

**Demostración.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  tal que  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ .

$\boxed{b \Rightarrow a}$  Como  $(X, \mathcal{T})$  Lindelöf, entonces  $\forall \mathcal{U}$  recubrimiento abierto de  $\mathcal{U}$ ,  $\exists \mathcal{V}$  subrecubrimiento numerable de  $\mathcal{U}$ . Por tanto,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{U}_n = \{B_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X\}$$

es un recubrimiento abierto de  $(X, \mathcal{T})$ . Luego,  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n : \mathcal{V}_n$

es subrecubrimiento numerable de  $\mathcal{U}_n$ . Entonces,  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n \equiv \mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ .

Veamos que  $\mathcal{B}$  es base de  $\mathcal{T}$ .  $\forall W \in \mathcal{T}, \forall x \in W \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : B_{\frac{1}{m}}(x) \subset W$  entonces,  $\mathcal{V}_{2m}$  es recubrimiento abierto de  $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow \exists y \in X : x \in B_{\frac{1}{2m}}(y) \in \mathcal{V}_{2m}$ .

Ahora,  $x \in B_{\frac{1}{2m}}(y) \subset B_{\frac{1}{m}}(x) \subset W$ . Entonces,  $\mathcal{B}$  es base de  $\mathcal{T}$ . Para ver esto,  $\forall z \in B_{\frac{1}{2m}}(x), d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) \leq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m} \Rightarrow B_{\frac{1}{2m}}(y) \subset B_{\frac{1}{m}}(x) \Rightarrow \mathcal{B}$  es base de  $\mathcal{T}$ .

$c \Rightarrow a$   $(X, \mathcal{T})$  separable  $\Rightarrow \exists D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$  numerable y denso en  $(X, \mathcal{T})$ . Sea  $\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{m}}(d_n) : n, m \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}$  es colección de abiertos numerable  $\Rightarrow \mathcal{B}$  es numerable.

Veamos que  $\mathcal{B}$  es base de  $\mathcal{T}$ .

$$\forall W \in \mathcal{T}, \forall x \in W \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : B_{\frac{1}{m}}(x) \subset W.$$

Por ser  $D$  denso y  $B_{\frac{1}{2m}}(x)$  abierto. Entonces,

$$\forall z \in B_{\frac{1}{2m}}(d_n), d(z, x) \leq d(z, d_n) + d(d_n, x) \leq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m}$$

entonces,  $B_{\frac{1}{2m}}(y) \subset B_{\frac{1}{m}}(x) \Rightarrow \mathcal{B}$  es base de  $\mathcal{T}$ .

## Capítulo 4

### Espacios Compactos

**Definición 4.1** (Compacto). Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.. Se dice que  $(X, \mathcal{T})$  es compacto si  $\forall \mathcal{U}$  recubrimiento abierto de  $(X, \mathcal{T})$ ,  $\exists \mathcal{V}$  sub recubrimiento finito suyo.

**Observación.** Compacto  $\Rightarrow$  Lindelöf.

**Observación.** Lindelöf  $\nRightarrow$  Compacto.

**Ejemplo.**  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  es de Lindelöf pero no es compacto.

**Observación.** La compacidad se conserva por aplicaciones continuas (imagen directa).

**Proposición 4.1.** Sea  $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$  e.t.,  $(X, \mathcal{T})$  compacto,  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  suprayectiva y continua. Entonces,  $(X', \mathcal{T}')$  es compacto.

**Demostración.**  $\forall \mathcal{U}' = \{U'_j : j \in J\} \xrightarrow{f \text{ cont.}} \mathcal{U} = \{f^{-1}(U'_j)\}$  es recubrimiento abierto de  $(X, \mathcal{T})$ . Entonces,  $\mathcal{V} = \{f^{-1}(U'_{j_1}), \dots, f^{-1}(U'_{j_n})\} \xrightarrow{f \text{ supra.}} \mathcal{V}' = \{U'_{j_1}, \dots, U'_{j_n}\}$  es subrecubrimiento finito de  $\mathcal{U}$ .

**Corolario 4.0.1.** La compacidad es invariante topológico.

**Proposición 4.2.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t. compacto,  $E \neq \emptyset \subset X$  cerrado de  $(X, \mathcal{T})$ . Entonces,  $(E, \mathcal{T}|_E)$  es compacto.

**Demostración.**  $\forall \mathcal{U} = \{U_j : j \in J\}$  recubrimiento abierto de  $(E, \mathcal{T}|_E) \Rightarrow \forall j \in J, \exists V_j \in \mathcal{T} : U_j = V_j \cap E \Rightarrow \mathcal{U}' = \{V_j : j \in J\} \cup \{X \setminus E\}$  recubrimiento abierto de  $(X, \mathcal{T}) \xrightarrow{\text{hip.}} \exists \mathcal{V}' = \{V_{j_1}, \dots, V_{j_n}\} \cup \{X \setminus E\}$  subrecubrimiento finito de  $\mathcal{U}' \Rightarrow \mathcal{V} = \{U_{j_1}, \dots, U_{j_n}\}$  subrecubrimiento finito de  $\mathcal{U}$ .

**Proposición 4.3.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t.. Entonces,  $(X, \mathcal{T})$  es compacto  $\Leftrightarrow \forall \mathcal{C} = \{C_j\}_{j \in J}$  familia de cerrados de  $(X, \mathcal{T})$  con la propiedad de intersección finita (todas las intersecciones de subfamilias de  $\mathcal{C}$  son no vacías), se tiene que  $\bigcap_{j \in J} C_j \neq \emptyset$ .

**Demostración.**

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $\exists \mathcal{C} = \{C_j\}_{j \in J}$  familia de cerrados con la p.i.f, tal que  $\bigcap_{j \in J} C_j = \emptyset$ . Entonces,

$$\{X \setminus C_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{T}$$

es recubrimiento abierto de  $(X, \mathcal{T})$  y no tiene subrecubrimiento finito. Por tanto,  $(X, \mathcal{T})$  no es compacto.

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $(X, \mathcal{T})$  no es compacto. Entonces,  $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$  recubrimiento abierto de  $(X, \mathcal{T})$  tal que  $\nexists$  subrecubrimiento finito. Luego,  $\{X \setminus U_j : j \in J\}$  es familia de cerrados con la p.i.f tal que  $\bigcap_{j \in J} (X \setminus U_j) = \emptyset$ , es una contradicción.

**Proposición 4.4.** Sea  $(X, \mathcal{T})$   $T_2$ ,  $E \subset X : (E, \mathcal{T}|_E)$  es compacto. Entonces,  $E$  es cerrado de  $(X, \mathcal{T})$ .