Analísis Complejo

Hugo Del Castillo Mola

8 de septiembre de 2022

Índice general

Parte I

Análisis Complejo

Capítulo 1

Preliminares

1.1. El Plano Complejo

Definición 1.1 (Plano Complejo). *Definimos los números complejos como el conjunto* $\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ *junto con las operaciones suma y producto*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

Observación. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *es un cuerpo conmutativo.*

(I) La identidad de la suma es $(0, 0)$ *y la identidad del producto es* $(1, 0)$.

(II) Se satisfacen la prorpiedad asociativa, la distributiba y la conmutativa.

(III) Todo elemento distinto de cero tiene inverso en $\mathbb{C}$.

Observación. *Consideramos los números reales* $\mathbb{R}$ *como el subconjunto de los números complejos* $\mathbb{C}$ *de la forma* $(a, 0)$. *Dado* $(a, b) \in \mathbb{C}$ *podemos escribir* $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$. *Sea* $i = (0, 1)$ *entonces* $(a, b) = a + ib$. *Notese que* $i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \to 1 \in \mathbb{R}$.

Observación. *La parte real de* $z = a + ib \in \mathbb{C}$ *es* a *y se denota* $\Re(z) = a$. *La parte imaginaria de* z *es* b *y se denota* $\Im(z) = b$.

Definición 1.2 (Módulo). *Sea* $z = a + ib \in \mathbb{C}$, *el módulo de* z *es*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observación. *El módulo de un número complejo es la distancia desde el punto del plano hasta el origen.*

Definición 1.3 (Conjugado). *Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$, el conjugado de z es*

$$\overline{z} = a - ib$$

Observación. *El conjugado de un número complejo es su simétrico respecto al eje de coordenadas.*

Proposición 1.1. *Se verifican las siguientes propiedades:*

(I) $\overline{\overline{z}} = z$ y $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

(II) $z + \overline{z} = 2\Re(z)$ y $z - \overline{z} = 2\Im(z)$.

(III) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ y $\overline{-z} = -\overline{z}$

(IV) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ y si $z \neq 0$ entonces $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$

(V) $|z|^2 = z\overline{z}$ y $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}, \ \forall z \neq 0.$

(VI) $|zw| = |z||w|$, $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$ si $(w \neq 0)$ y $|z| = |\overline{z}|$

(VII) $|z + w| \leq |z| + |w|$. Además, si $\exists t \geq 0 : z = tw$ se tiene $|z + w| = |z| + |w|$.

Observación. *El módulo permite definir una distancia en el plano complejo $d(z, w) = |z - w|$. De esta forma $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}$ son topológicamente iguales.*

Definición 1.4 (Representación polar de un número complejo). *Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$, z representa el punto (a, b) en el plano, cuya expresión en coordenadas polares es $(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Y escribimos*

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) := re^{i\theta}$$

donde $r = |z|$ y $\theta = \arg(z) = \operatorname{arc\,tg}(\frac{b}{a})$.

Observación. *Si $-\pi < \theta < \pi$ lo llamamos argumento principal y se denota (z). El conjunto de todos los posibles argumentos de z es $\{Arg(z) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.*

Proposición 1.2. (I) $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)} \forall k \in \mathbb{Z}$.

(II) $|e^{i\theta}| = 1, |\overline{e^{i\theta}}| = e^{-i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^{-1}$.

(III) $e^{i(\theta+\sigma)} = e^{i\theta}e^{i\sigma}$.

(IV) $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$ *y* $\arg(\overline{z}) = \arg(z^{-1}) = -\arg(z)$

Proposición 1.3. *Si* $z = re^{i\theta}$ *entonces* $z^n = r^n e^{in\theta} = |z|^n e^{in\arg(z)}$.

Observación. *Una raíz n-esima de un número complejo w es número z que cumple $z^n = w$. Si $w = 0$ la única raíz es 0, si $w \neq 0$ entonces por el Teorema Fundamental del Álgebra tenemos que hay n raíces distintas.*

Sean $w = |w|e^{i\theta}$ y $z = |z|e^{i\alpha}$, tenemos que

$$|w|e^{i\theta} = |z|^n e^{in\alpha}$$

y por tanto $|z| = |w|^{\frac{1}{n}}$ y $e^{i\theta} = e^{in\alpha}$, lo cual implica que $n\alpha = \theta + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$. Los valores de α son

$$\frac{\theta}{n}, \frac{\theta + 2\pi}{n}, \cdots, \frac{\theta + 2\pi(n-1)}{n}$$

Proposición 1.4. *Sea $w \in \mathbb{C}$ entonces w tiene n raíces n-simas distintas.*

Observación. *Estas n raíces son los vértices de un polígono regular de n lados inscritos en la circunferencia de centro 0 y radio $|w|^{\frac{1}{n}}$.*

1.2. Función Exponencial

Definición 1.5 (Función polinómica)**.** *Sea $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ donde $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$.*

Observación. *Como $f(z) = z^k$ es continua (de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) se tiene que f es continua de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.*

Definición 1.6 (Función Exponencial)**.** *Definimos la función exponencial como la solución de la ecuación diferencial*

$$f'(z) = f(z)$$

con el valor inicial $f(0) = 1$. Haciendo

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1} + \cdots$$

se tiene que $a_{n-1} = n a_n$ y $a_0 = 1$ y por inducción $a_n = \frac{1}{n!}$.

La solución se denota

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

que es una serie convergente.

Proposición 1.5 (Propiedades Exponencial). *Se verfican las siguientes propiedades:*

(I) *Si* $z \in \mathbb{R}$ *entonces* e^z *coincide con la exponencial real.*

(II) $|e^z| = e^x$ *y* $\arg(e^z) = y$.

(III) $e^{\overline{z}} = \overline{e^{\overline{z}}}$.

(IV) $e^z \neq 0$ *y* $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.

(V) $e^{z+w} = e^z e^w, \forall z, w \in \mathbb{C}$.

(VI) $e^{2k\pi i} = 1, \forall k \in \mathbb{Z}$.

(VII) *es periódica,* $e^z = e^{z+2\pi i}$

(VIII) *es continua, Sea* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números complejos, si* $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0 \Rightarrow e^{z_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{z_0}$.

(IX) *No es inyectiva, exiten infinitos* $z \in \mathbb{C}$ *tal que* $e^x = 1$.

Observación. *En el plano la exponencial compleja transforma las rectas horizontales de la forma* $z = x + ib$ *en semirectas de radio* e^x *y ángulo* b. *Y rectas verticales de la forma* $z = a + iy$ *a circunferenciasde radio* e^a *y ángulo* y.

Definición 1.7 (Funciones Trigonométricas). *Se definene las funciones* sen *y* cos *como*

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Proposición 1.6 (Propiedades cos y sen). (I) *Son funciones continuas.*

(II) *Sobre los números reales coinciden con las correspondientes funciones reales.*

(III) $\cos(z) = \cos(-z)$ *y* $\operatorname{sen}(z) = -\operatorname{sen}(-z), \forall z \in \mathbb{C}$.

(IV) $\cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *y* $\operatorname{sen}(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi$ *para* $k \in \mathbb{Z}$.

(V) $\forall z, w \in \mathbb{C}$, *se tien* $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w)$ *y* $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen}(z)\cos(w) + \operatorname{sen}(w)\cos(z)$.

(VI) *El coseno y el seno son funciones periódicas de periodo* 2π.

(VII) $\cos(z)^2 + \operatorname{sen}(z)^2 = 1, \forall z \in \mathbb{C}$.

Demostración (ii). *Veamos que si* $z \in \mathbb{R}$ *entonces la exponencial compleja coincide con la real*

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\big(\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + \cos(-x) + i\operatorname{sen}(-x)\big) = \cos(x)$$

Demostración. *(iv)* $\cos(z) = 0 \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 0 \Leftrightarrow e^{iz}(e^{iz} + e^{-iz}) = e^{2iz} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = -1 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$. *Si* $y \neq 0$ *entonces* $e^{2iz} = e^{2ix-2y} \Rightarrow |e^{2iz}| \neq -1$.

Definición 1.8 (Función Tangente)**.** *A partir de las funciones seno y coseno se define la tangente,*

$$\tan(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)} = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

Observación. *Todas las funciones trigonométricas son funciones de* e^{iz}.

Observación. *También podemos definir las funciones*

$$\operatorname{senh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \text{ y } \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$