

Ejercicios Geometría Diferencial

Hugo Del Castillo Mola

6 de octubre de 2022

Índice general

1. Curvas	2
-----------	---

Capítulo 1

Curvas

Ejercicio (25). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular \mathcal{C}^∞ . Demuestra que la recta tangente en cada punto $\alpha(s_0)$ es límite de rectas secantes, es decir, el límite de las rectas que pasan por $\alpha(s_1)$ y $\alpha(s_2)$ cuando s_1 y s_2 tienden a s_0 .

Solución (25). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular \mathcal{C}^∞ , $s_0, s_1, s_2 \in I : s_1 < s_0 < s_2$. Entonces,

$$S \equiv \alpha(s_2) - \alpha(s_1)$$

es la recta secante que pasa por s_1 y s_2 . Si $s_i \rightarrow s_0$, $i \in \{1, 2\}$ entonces, $s_1 = s_0 - h_1 \xrightarrow{h_1 \rightarrow 0} s_0$ y $s_2 = s_0 + h_2 \xrightarrow{h_2 \rightarrow 0} s_0$. Consideramos el vector secante unitario

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{\alpha(s_2) - \alpha(s_1)}{\|s_2 - s_1\|} \\ &= \frac{\alpha(s_0 + h_2) - \alpha(s_0 - h_1)}{\|h_2 + h_1\|}\end{aligned}$$

donde tomando límites

$$\begin{aligned}&\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{\alpha(s_0 + h_2) - \alpha(s_0 - h_1)}{\|h_2 + h_1\|} \\ &= \lim_{h_2 \rightarrow 0} \left(\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{\alpha(s_0 + h_2) - \alpha(s_0 - h_1)}{\|h_2 + h_1\|} \right) \\ &= \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{\alpha(s_0 + h_2) - \alpha(s_0)}{\|h_2\|} = \alpha'(s_0)\end{aligned}$$

es el vector tangente unitario en $s_0 \in I$.

Ejercicio (35). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva p.p.a., $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ movimiento rígido y $\beta = M \circ \alpha$ curva. Demostrar

(I) M conserva la orientación $\Rightarrow k_\beta = k_\alpha$, $\tau_\beta = \tau_\alpha$,

(II) M invierte la orientación $\Rightarrow k_\beta = k_\alpha, \tau_\beta = -\tau_\alpha$.

Solución (35). Sea $\beta = (M \circ \alpha)$ donde $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto \phi(t) = At + \vec{v}$ es un movimiento rígido con A matriz ortonormal asociada a la isometría y $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

Sea α p.p.a entonces,

$$\|\beta'\| = \|(M \circ \alpha)'\| = \|A\alpha'\| = \|\alpha'\| = 1$$

β es p.p.a.. Esto se debe a que

$$d_t M = \frac{d}{dt}(At + \vec{v}) = A$$

$$\Rightarrow d_t(M \circ \alpha) = \frac{d}{dt}(A\alpha(t) + \vec{v}) = A\alpha'(t)$$

y dado que A es ortonormal, es decir, $A^t = A^{-1}$

$$\Rightarrow \|Ax\| = \sqrt{Ax \cdot Ax} = \sqrt{x \cdot A^t A} = \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^3$$

$\Rightarrow A$ conserva la norma.

Para la curvatura de β , que es $k_\beta = \|\beta''\|$, tenemos que

$$k_\beta = \|(M \circ \alpha)''\| = \|(A\alpha' + \vec{v})''\| = \|A\alpha''\| = \|\alpha''\| = k_\alpha$$

dado que A es la matriz asociada a la isometría del movimiento rígido M , y conserva la norma. Entonces, $k_\beta = k_\alpha \Rightarrow$ la curvatura es invariante por movimiento rígido.

Y para la torsión de β que es

$$\begin{aligned} \tau_\beta &= (\beta' \times \beta'') \cdot \beta''' = (A\alpha' \times A\alpha'') \cdot A\alpha''' \\ &= \det(A)A(\alpha' \times \alpha'') \cdot A\alpha''' \\ &= \det(A)(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha''' \\ &= \det(A)\tau_\alpha \\ &\quad \pm \det(A)\tau_\alpha \end{aligned}$$

esto se debe a que el producto vectorial bajo transformaciones de matrices obedece $(Ba) \times (Bb) = (\det(B))(B^{-1})^t(a \times b)$, $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$, $a, b \in \mathbb{R}^3$. Luego, A es ortogonal por ser la matriz asociada a una isometría lineal $\Rightarrow (A^t)^{-1} = A$. Y $\det(A) = \pm 1$ por ser A matriz ortogonal.

Por tanto, la torsión de β es

$$\tau_\beta = \begin{cases} \tau_\alpha, & \text{si } A \text{ conserva la orientación} \\ -\tau_\alpha, & \text{si } A \text{ invierte la orientación} \end{cases}$$

Ejercicio (40). Sea α una curva C^∞ con $k(s) > 0$. Demostrar que el plano osculador en $\alpha(s)$ generado por $T(s), N(s)$ es el límite de los planos que pasan por las tripletas $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$ cuando $s_i \rightarrow s$.

Solución (40). Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a., $s_1, s_2, s_3 \in I : \alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$ puntos no alineados y $P(s_1, s_2, s_3)$ el plano generado por $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$. Sea la curva

$$\phi(s) = \alpha(s) \cdot n(s_1, s_2, s_3), s \in I$$

donde n es el vector unitario perpendicular al plano P . Como

$$\alpha(s_i) \in P(s_1, s_2, s_3) \Rightarrow \phi(s_i) = \alpha(s_i) \cdot n(s_1, s_2, s_3) = 0, \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

entonces, por el teorema del Valor Medio

$$\exists c_i \in (s_i, s_{i+1}) : \phi'(c_i) = \alpha'(c_i) \cdot n(s_1, s_2, s_3) = 0, \forall i \in \{1, 2\}$$

Volviendo a aplicar el teorema de Valor Medio

$$\exists t \in (c_1, c_2) : \phi''(t) = \alpha''(t) \cdot n(s_1, s_2, s_3) = 0$$

Por tanto, $n(s_1, s_2, s_3) = \alpha'(c_i) \times \alpha''(t), i \in \{1, 2\}$. Si $s_i \rightarrow s_0$ entonces, $n(s_1, s_2, s_3) \rightarrow \vec{n} = n(s_0, s_0, s_0) = \alpha'(s_0) \times \alpha''(s_0) \Rightarrow \vec{n}$ es normal al plano generado por α' y α'' , es decir, el límite de los planos que pasan por las tripletas $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$ es el plano osculador, generado por T, N .