Analísis Complejo

Hugo Del Castillo Mola

13 de diciembre de 2022

Índice general

Parte I

Análisis Complejo

Capítulo 1

Preliminares

1.1. El Plano Complejo

Definición 1.1 (Plano Complejo). *Definimos los números complejos como el conjunto* $\mathbb{C} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ *junto con las operaciones suma y producto*

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, bc + ad)$$

Observación. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *es un cuerpo conmutativo.*

(I) *La identidad de la suma es* $(0,0)$ *y la identidad del producto es* $(1,0)$.

(II) *Se satisfacen la prorpiedad asociativa, la distributiba y la conmutativa.*

(III) *Todo elemento distinto de cero tiene inverso en* $\mathbb{C}$.

Observación. *Consideramos los números reales* $\mathbb{R}$ *como el subconjunto de los números complejos* $\mathbb{C}$ *de la forma* $(a,0)$. *Dado* $(a,b) \in \mathbb{C}$ *podemos escribir* $(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$. *Sea* $i = (0,1)$ *entonces* $(a,b) = a + ib$. *Notese que* $i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) \to 1 \in \mathbb{R}$.

Observación. *La parte real de* $z = a + ib \in \mathbb{C}$ *es* a *y se denota* $\Re(z) = a$. *La parte imaginaria de* z *es* b *y se denota* $\Im(z) = b$.

Definición 1.2 (Módulo). *Sea* $z = a + ib \in \mathbb{C}$, *el módulo de* z *es*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observación. *El módulo de un número complejo es la distancia desde el punto del plano hasta el origen.*

Definición 1.3 (Conjugado)**.** *Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$, el conjugado de z es*

$$\overline{z} = a - ib$$

Observación. *El conjugado de un número complejo es su simétrico respecto al eje de coordenadas.*

Proposición 1.1. *Se verifican las siguientes propiedades:*

(I) $\overline{\overline{z}} = z$ *y* $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

(II) $z + \overline{z} = 2\Re(z)$ *y* $z - \overline{z} = 2\Im(z)$.

(III) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ *y* $\overline{-z} = -\overline{z}$

(IV) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ *y si* $z \neq 0$ *entonces* $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$

(V) $|z|^2 = z\overline{z}$ *y* $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, $\forall z \neq 0$.

(VI) $|zw| = |z||w|$, $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$ *si* $(w \neq 0)$ *y* $|z| = |\overline{z}|$

(VII) $|z + w| \leq |z| + |w|$. *Además, si* $\exists t \geq 0 : z = tw$ *se tiene* $|z + w| = |z| + |w|$.

Observación. *El módulo permite definir una distancia en el plano complejo* $d(z, w) = |z - w|$. *De esta forma* $\mathbb{C}$ *y* $\mathbb{R}$ *son topológicamente iguales.*

Definición 1.4 (Representación polar de un número complejo)**.** *Sea* $z = a + ib \in \mathbb{C}$, z *representa el punto* (a, b) *en el plano, cuya expresión en coordenadas polares es* $(r\cos\theta, r\sin\theta)$. *Y escribimos*

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) := re^{i\theta}$$

donde $r = |z|$ *y* $\theta = \arg(z) = \operatorname{arc\,tg}(\frac{b}{a})$.

Observación. *Si* $-\pi < \theta < \pi$ *lo llamamos argumento principal y se denota* $\operatorname{Arg}(z)$. *El conjunto de todos los posibles argumentos de* z *es* $\{Arg(z) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Proposición 1.2. (I) $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)} \forall k \in \mathbb{Z}$.

(II) $|e^{i\theta}| = 1, |\overline{e^{i\theta}}| = e^{-i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^{-1}$.

(III) $e^{i(\theta+\sigma)} = e^{i\theta}e^{i\sigma}$.

(IV) $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$ y $\arg(\overline{z}) = \arg(z^{-1}) = -\arg(z)$

Proposición 1.3. *Si $z = re^{i\theta}$ entonces $z^n = r^n e^{in\theta} = |z|^n e^{in\arg(z)}$.*

Observación. *Una raíz n-esima de un número complejo w es número z que cumple $z^n = w$. Si $w = 0$ la única raíz es 0, si $w \neq 0$ entonces por el Teorema Fundamental del Álgebra tenemos que hay n raíces distintas.*

Sean $w = |w|e^{i\theta}$ y $z = |z|e^{i\alpha}$, tenemos que

$$|w|e^{i\theta} = |z|^n e^{in\alpha}$$

y por tanto $|z| = |w|^{\frac{1}{n}}$ y $e^{i\theta} = e^{in\alpha}$, lo cual implica que $n\alpha = \theta + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$. Los valores de α son

$$\frac{\theta}{n}, \frac{\theta + 2\pi}{n}, \cdots, \frac{\theta + 2\pi(n-1)}{n}$$

Proposición 1.4. *Sea $w \in \mathbb{C}$ entonces w tiene n raíces n-simas distintas.*

Observación. *Estas n raíces son los vértices de un polígono regular de n lados inscritos en la circunferencia de centro 0 y radio $|w|^{\frac{1}{n}}$.*

1.2. Función Exponencial

Definición 1.5 (Función polinómica). *Sea $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ donde $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$.*

Observación. *Como $f(z) = z^k$ es continua (de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) se tiene que f es continua de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.*

Definición 1.6 (Función Exponencial). *Definimos la función exponencial como la solución de la ecuación diferencial*

$$f'(z) = f(z)$$

con el valor inicial $f(0) = 1$. Haciendo

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1} + \cdots$$

se tiene que $a_{n-1} = na_n$ *y* $a_0 = 1$ *y por inducción* $a_n = \frac{1}{n!}$.
La solución se denota

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

que es una serie convergente.

Proposición 1.5 (Propiedades Exponencial)**.** *Se verfican las siguientes propiedades:*

(I) *Si* $z \in \mathbb{R}$ *entonces* e^z *coincide con la exponencial real.*

(II) $|e^z| = e^x$ *y* $\arg(e^z) = y$.

(III) $e^{\overline{z}} = \overline{e^{\overline{z}}}$.

(IV) $e^z \neq 0$ *y* $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.

(V) $e^{z+w} = e^z e^w, \forall z, w \in \mathbb{C}$.

(VI) $e^{2k\pi i} = 1, \forall k \in \mathbb{Z}$.

(VII) *es periódica,* $e^z = e^{z+2\pi i}$

(VIII) *es continua, Sea* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números complejos, si* $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0 \Rightarrow e^{z_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{z_0}$.

(IX) *No es inyectiva, exiten infinitos* $z \in \mathbb{C}$ *tal que* $e^x = 1$.

Observación. *En el plano la exponencial compleja transforma las rectas horizontales de la forma* $z = x + ib$ *en semirectas de radio* e^x *y ángulo* b*. Y rectas verticales de la forma* $z = a + iy$ *a circunferenciasde radio* e^a *y ángulo* y.

Definición 1.7 (Funciones Trigonométricas)**.** *Se definene las funciones* sen *y* cos *como*

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Proposición 1.6 (Propiedades cos y sen)**.** (I) *Son funciones continuas.*

(II) *Sobre los números reales coinciden con las correspondientes funciones reales.*

(III) $\cos(z) = \cos(-z)$ *y* $\operatorname{sen}(z) = -\operatorname{sen}(-z), \forall z \in \mathbb{C}$.

(IV) $\cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *y* $\operatorname{sen}(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi$ *para* $k \in \mathbb{Z}$.

(V) $\forall z, w \in \mathbb{C}$, *se tien* $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w)$ *y* $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen}(z)\cos(w) + \operatorname{sen}(w)\cos(z)$.

(VI) *El coseno y el seno son funciones periódicas de periodo* 2π.

(VII) $\cos(z)^2 + \operatorname{sen}(z)^2 = 1, \forall z \in \mathbb{C}$.

Demostración (ii). *Veamos que si* $z \in \mathbb{R}$ *entonces la exponencial compleja coincide con la real*

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\big(\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + \cos(-x) + i\operatorname{sen}(-x)\big) = \cos(x)$$

Demostración. *(iv)* $\cos(z) = 0 \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 0 \Leftrightarrow e^{iz}(e^{iz} + e^{-iz}) = e^{2iz} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = -1 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$. *Si* $y \neq 0$ *entonces* $e^{2iz} = e^{2ix-2y} \Rightarrow |e^{2iz}| \neq -1$.

Definición 1.8 (Función Tangente)**.** *A partir de las funciones seno y coseno se define la tangente,*

$$\tan(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)} = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

Observación. *Todas las funciones trigonométricas son funciones de* e^{iz}.

Observación. *También podemos definir las funciones*

$$\operatorname{senh}(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \text{ y } \cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

1.3. Función Logaritmo

Definición 1.9 (Logaritmo)**.** *La función logaritmo se define como la inverasa de la función exponencial,*

$$\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \log(z) = w$$

donde $\log(z) = w$ *es la raíz de la ecuación* $e^w = z$.

Observación. $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow$ *el* 0 *no tiene logaritmo.*

Observación. *Si* $w = x + iy \neq 0$, $z = e^w = e^{x+iy}$ *tiene soluciones*

$$e^x = |z|, \; e^{iy} = \frac{w}{|w|}$$

donde la primera ecución tiene solución única $x = \log(|z|)$ *y la segunda ecuación tiene inifinitas soluciones módulo* 2π.

Observación. *Distinguiendo la parte real y la parte imaginaria de* w *podemos escribir*

$$z = \log(z) = \log|z| + i\arg(z)$$

dado que $e^{\log(z)} = e^{\log|z|}e^{i\arg(z)} = |z|e^{i\arg(z)} = z$.

Observación. *La rama principal del logaritmo es*

$$\operatorname{Log} z = \log|z| + i\operatorname{Arg}(z), \quad z \neq 0$$

De esta manera, $\operatorname{Log}(z)$ *es la inversa de* e^w *con valores en* $-\pi < \Im w \leq \pi$.

Observación. *Determinada la rama principal del logaritmo se tiene que*

$$\log(z) = \operatorname{Log}(z) + i\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

para cualquier otra rama.

Definición 1.10 (Potencias)**.** *Sea* $a, \alpha \in \mathbb{C}, a, \alpha \neq 0$

$$a^\alpha = e^{\alpha\log(a)}$$

Observación. *Si* $\alpha = 0 \Rightarrow a^0 = 1$.

Observación. *En general,* a^α *tiene infinitos valores. Una excepción es* $\alpha = n \Rightarrow a^n = e^{n\log(a)} = e^{\log(a)} \cdot \cdots \cdot e^{\log(a)} = a \cdot \cdots \cdot a$.

Proposición 1.7 (Propiedades Potencias)**.** *El logaritmo verifica las siguientes propiedades:*

(I) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

(II) $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta$ *solo si fijamos el valor de* $\log(a)$

(III) $1 = e^{-2k\pi y}(\cos(2k\pi x) + i\operatorname{sen}(2k\pi x))$ *donde* $\alpha = x + iy$

Proposición 1.8. *(I) $f(z) = a^z$ es continua en $\mathbb{C}$*

(II) Sea $\alpha \in \mathbb{C}, f(z) = z^\alpha$ es continua en el dominio de la rama del logaritmo.

1.4. Transformación de Möbius

Definición 1.11 (Transformación de Möbius)**.** *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tal que $ad - bc \neq 0$. Entonces, a la función de la forma*

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

se llama transfomación de Möbius.

Observación. *S es continua en $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.*

Proposición 1.9. *La composición de transformaciones de Möbius es transfomación de Möbius.*

Proposición 1.10. *$S : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \frac{a}{c}$ es un homeomorfismo (biyectiva, S continua y S^{-1} continua) cuya inversa es*

$$S^{-1} : z \mapsto \frac{dw - b}{a - cw}$$

Observación. $S \circ S^{-1}(z) = S^{-1} \circ S(z) = z$

Observación. *Las transformaciones de Möbuis forman un grupo bajo la operación de composición de aplicaciones.*

Definición 1.12 (Möbius Ampliada)**.** *Sea S la transfomación de Möbius tal que $S(-\frac{d}{c}) = \infty$ y $S(\infty) = \frac{a}{c}$ si $c = 0$ y $S(\infty) = \infty$ si $c = 0$. Entoces, podemos definir $S : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$.*

Observación. *La transfomación de Möbius ampliada también es homeomorfismo.*

Teorema 1.1. *Toda transfomación de Möbius es composición de homotrcias, translaciones, inversiones y giros.*

Teorema 1.2. *Sean* $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*, w_0, w_1, w_2 \in \mathbb{C}^* : z_i \neq z_j, w_i \neq w_j, \forall i \neq j$. *Entonces,* $\exists! T(z)$ *transformación de Möbius tal que* $T(z_i) = w_i, \forall i \in \{0, 1, 2\}$.

Corolario 1.2.1. *Si una transformación de Möbius tiene tres puntos fijos entonces es la identidad.*

Corolario 1.2.2. *Si dos transformaciones de Möbius coinciden en tres puntos entonces son la misma.*

Teorema 1.3. *Las transformaciones de Möbius transforman circunferencias de* $\mathbb{C}^*$*en circunferencias de* $\mathbb{C}^*$

Capítulo 2

Funciones Holomorfas

2.1. Derivación Compleja

Definición 2.1 (Derivada). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Decimos que f es derivable si existe*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Ejemplo. *(I) f constante $\Rightarrow f'(z_0) = 0$.*

(II) $f(z) = z \Rightarrow f'(z_0) = 1$.

(III) $f(z) = \overline{z} \Rightarrow \frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0} = \frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0} = \begin{cases} 1, & \text{si } z - z_0 \in \mathbb{R} \\ -1, & \text{si } z - z_0 \in i\mathbb{R} \end{cases} \quad \Rightarrow \nexists \lim_{z \to z_0}$.

Observación. *La continuidad de una función compleja es equivalente a la continuidad de la parte real y la parte imaginaria. No pasa lo mismo con derivabilidad.*

Proposición 2.1. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivable en $z_0 \in \Omega$. Entonces, f es continua en $z_0 \in \Omega$.*

Demostración. *Sigue de la reglas de los limites*

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z) + f(z_0) - f(z_0) \\ &= f(z_0) + \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0) \end{aligned}$$

donde $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \xrightarrow{z\to z_0} f'(z_0)$ y $(z-z_0) \xrightarrow{z\to z_0} 0 \Rightarrow f(z) \xrightarrow{z\to z_0} f(z_0)$

Proposición 2.2. *Sean $f,g:\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ derivables en $z_0\in\Omega$. Entonces,*

(I) *Si $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $(\alpha f\beta g)'(z_0)=\alpha f'(z_0)+\beta g'(z_0)$*

(II) *$(fg)'(z_0)=f(z_0)g'(z_0)+f'(z_0)g(z_0)$.*

(III) *Si $g(z_0)\neq 0$ entonces $(\frac{f}{g})'(z_0)=\frac{f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$.*

Demostración.

Ejemplo. (I) $f(z)=z^n \Rightarrow f'(z)=nz^{n-1},\forall z\in\mathbb{C}$.

(II) *Todo polinomio es derivable en $\mathbb{C}$.*

(III) *$f(z)=\frac{1}{z}$ es derivable $\forall z\neq 0$.*

Teorema 2.1 (Regla de la Cadena)**.** *Sean $\Omega_1,\Omega_2\subset\mathbb{C}$ abiertos, $f:\Omega_1\to\mathbb{C}$, $g:\Omega_2\to\mathbb{C}$ tal que f es derivable en $f(z_0)\in\Omega_2$ y g es derivable en $z_0\in\Omega_1$. Entonces, $(f\circ g)$ es derivable en $z_0\in\Omega_1$ y $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))f'(z_0)$.*

Demostración. *Sea $G:\Omega_2\to\mathbb{C}:G(w)=\begin{cases}\frac{g(w)-g(f(z_0))}{w-f(z_0)}, w\neq f(z_0)\\ g'(f(z_0)), w=f(z_0)\end{cases}$ entonces, G está bien definida y $\lim_{w\to f(z_0)}\frac{g(w)-g(f(z_0))}{w-f(z_0)}=g'(z_0)\Rightarrow G$ es continua en $f(z_0)$.*

Si $z\neq 0$, entonces

$$\frac{(g\circ f)(z)-(g\circ f)(z_0)}{z-z_0}=$$

$$=\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{f(z)-f(z_0)}\cdot\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=$$

$$=G(f(z))\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$\lim_{z\to z_0} G(f(z))\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=$$

$$= \lim_{z\to z_0} G(f(z)) \cdot \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =$$
$$= G'(f(z_0))f'(z_0).$$

Observación. *$f:\Omega\to\mathbb{C}$ es derivable $\forall z\in\Omega$. Entonces, f es holomorfa en Ω.*

2.2. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Notación. *Sea $f:\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$*

$$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) = u(x,y) + iv(x,y),$$

donde $u,v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. Entonces, la matriz jacobiana de f es

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Nota. *Queremos ver que significa qeu u,v sean diferenciables. Si derivamos f en $z_0\in\Omega$ respecto de x y y, parte real y parte imaginaria respectivamente, obtenemos dos expresiones de $f'(z_0)$ que dan lugar a las ecuaciones de Cauchy-Riemann.*

Teorema 2.2 (Ecuaciones Cauchy-Riemann)**.** *Sea $f:\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Entonces $f'(z_0)$ existe $\Leftrightarrow$ f es diferenciable en $z_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ con*

$$u_x = v_y,\ u_y = -v_x \text{ (Ecuaciones de C-R)},$$

es decir, si $\exists u_x, u_y, v_x, v_y$, son continuas en Ω y satisfacen las ecuaciones, entonces f es analítica en Ω.

Demostración. *($\Rightarrow$) En el límite*

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

sustituimos $z = x+iy_0$

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{u(x,y_0)+iv(x,y_0)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$= \frac{u(x, y_0) + u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i\frac{v(x, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

donde $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \xrightarrow{x \to x_0} f'(z_0)$ *implica*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) + u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i\frac{v(x, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

De manera análoga, si $z = x_0 + iy$ *entonces*

$$\lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0, y) + u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{(y - y_0)}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Por tanto, $\exists f'(z_0)$ *y tiene el mismo valor independientemente de como* z *se acerque a* z_0

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y}$$

(⇒) A partir del teoremade Taylor

$$u(x + s, y + t) = u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)t + R(s, t)$$

donde $\frac{R(s,t)}{|h|} \xrightarrow{z \to z_0} 0$. *También*

$$v(x + s, y + t) = v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)t + G(s, t)$$

donde $\frac{G(s,t)}{|h|} \xrightarrow{z \to z_0} 0$. *Entonces,*

$$f(z + h) = f(z) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)t + R(h)$$

$$+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)s + i\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)t + iG(h)$$

$$= f(z) + \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\Big)h + R(h) + iG(h)$$

Entonces,

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\Big) + \frac{R(h)+iG(h)}{h}$$

Por tanto,

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

$\exists f'(z_0)$ *y es continua* $\Rightarrow f(z)$ *es anlítica.*

Corolario 2.2.1. *Sea* $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorfa,* Ω *abierto. Entonces,* $f'(z) = 0, \forall z \in \Omega \Rightarrow f$ *es constante.*

Teorema 2.3. *Si* $f(z)$ *es diferenciable, entonces la matriz Jacobian* $J_f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tiene determinante*

$$\det J_f(z) = |f'(z)|^2.$$

2.3. Función Inversa

Teorema 2.4 (Función Inversa)**.** *Sea* $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorfa,* $z_0 \in \Omega$ *y* $f'(z_0) \neq 0$*. Entonces, existe un entorno* $U \subset D : z_0 \in U$ *y un entorno de* $V \subset \mathbb{C} : f(z_0) \in V$ *tal que* $f : U \to V$ *es biyectiva y* f^{-1} *es holomorfa con*

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}, z \in U.$$

Demostración.

Sea $J_f(x_0, y_0)$ la matriz Jacobiana de f en $z_0 = (x_0, y_0)$, por el Teorema 2.3 $\det(J_f(z_0)) = |f'(z_0)|^2 \neq 0$. Entonces, podemos aplicar el Teorema de la Función Inversa Real ya que $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Solo falta ver que $J_f(z)^{-1}$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz Jacobiana invera es

$$(J_f(x,y))^{-1} = \frac{1}{\det(J_f)} \begin{pmatrix} v_y & -u_y \\ -v_x & u_x \end{pmatrix}$$

y la matriz Jacobiana de la función inversa

$$J_{f^{-1}}(x,y) = \begin{pmatrix} t_x & t_y \\ s_x & s_y \end{pmatrix}$$

Entonce,

$$t_x = \frac{1}{\det(J_f)} v_y = \frac{1}{\det(J_f)} u_x,$$

$$s_x = -\frac{1}{\det(J_f)} v_x = \frac{1}{\det(J_f)} u_y,$$

$$t_y = \frac{1}{\det(J_f)} v_x,$$

$$s_y = \frac{1}{\det(J_f)} v_y$$

las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen.

Ejemplo. *Sea $w = \log z$ la rama principal del logaritmo. Entonces, w es continua y es la inversa de $z = e^w, -\pi < w < \pi$. Como e^w es holomorfa con $(e^w)' \neq 0$, podemos aplicar el Teorema de la Función Inversa. Por tanto, $\log z$ es holomorfa.*

$$z = e^{\log z} \Rightarrow$$

$$1 = e^{\log z} \frac{d}{dz}(\log z) = z \frac{d}{dz}(\log z) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{z}.$$

2.4. Funciones Harmónicas

Definición 2.2 (Ecuación de Laplace). *La ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = 0$$

se llama ecuación de Laplace.

Definición 2.3 (Laplaciano). *El operador*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$$

se llama Laplaciano.

Observación. *La ecuación de Laplace se escribe* $\Delta u = 0$.

Definición 2.4 (Función Armónica). *Las funciones que satisfacen la ecuación de Laplace se llaman funciones armónicas. Sea* $u : A \to \mathbb{R}$, $u \in C^2$ *tal que*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Teorema 2.5. *Si* $f = u + iv$ *es holomorfa y* $u, v \in C^2$. *Entonces,* u *y* v *son armónicas.*

Observación. $u = \Re(f), v = \Im(f)$.

Demostración. *content*

Definición 2.5 (Conjugado Armónico). *Sea* $u : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *armónica y* v *armónica tal que* $f = u + iv$ *es holomorfa. Entonces, decimos que* v *es el conjugado armónico.*

Ejemplo. $f(z) = z^2$, $u = x^2 + y^2$, $v = 2xy$.

Teorema 2.6. *Sea* D *un disco abierto o* $D = \mathbb{R}^2$, $u : D \to \mathbb{R}$ *armónica. Entonces, existe* v *armónica conjugada.*

Demostración. *content*

Corolario 2.6.1. *Toda función armónica es localmente la parte real de una función holomorfa.*

2.5. Aplicaciones Conformes

Definición 2.6 (Vector Tangente). *Sea $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $0 \leq t < 1$ una curva diferenciable parametrizada con $z_0 = \gamma(0)$. Entonces,*

$$\gamma'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} = x'(0) + iy'(0)$$

es el vector tangente a γ en z_0.

Definición 2.7 (Ángulo entre dos curvas). *Definimos el ángulo entre dos curvas en z_0 como el ángulo entre sus vectores tangentes en z_0*

Teorema 2.7. *Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva diferenciable parametrizada con $z_0 = \gamma(0)$ y sea $f(z)$ una función diferenciable en z_0. Entonces la tangente de la curva $f(\gamma(t))$*

$$(f \circ \gamma)'(0) = f'(z_0)\gamma'(0).$$

Definición 2.8 (Función Conforme). *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciable y sean para dos curvas γ_1, γ_2 con $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$. Entonces, decimos que f es conforme en z_0 si las curvas $(f \circ \gamma_1)$, $(f \circ \gamma_2)$ tienen $\gamma_1'(f(z_0)) \neq 0$, $\gamma_2'(f(z_0)) \neq 0$ y el ángulo entre $(f \circ \gamma_1')(z_0)$ y $(f \circ \gamma_2')(z_0)$ es el mismo que el ángulo entre $\gamma_1'(z_0)$ y $\gamma_2'(z_0)$.*

Observación. *Una función conforme $f : D \to V$ es una función diferenciable con derivadas parciales continuas que es conforme $\forall z \in D$ e inyectiva.*

Teorema 2.8. *Si $f(z)$ es diferenciable en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$, entonces $f(z)$ es conforme en z_0.*

2.6. Integral de Funciones Complejas sobre Curvas

Definición 2.9 (Integral). *Sea $h : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un función compleja de una variable real y sean u, v sus partes real e imaginaria respectivamente tal que $h(t) = u(t) + iv(t)$. Suponemos que u, v son continuas. Entonces,* *llamamos la integral de h a*

$$\int_a^b h(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt,$$

donde las integrales de u y v tienen el sentido usual de cálculo unidimensional.

Definición 2.10. *Sea f continua y definida en un conjunto abierto $A \subset \mathbb{C}$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$una curva diferenciable a trozos tal que $\gamma([a,b]) \subset A$. Entonces,*

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i-1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

es la integral de línea de f a lo largo de γ.

Proposición 2.3. *Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, entonces*

$$\int_\gamma f = \int_\gamma [u(x,y)dx - v(x,y)dy] + i\int_\gamma [u(x,y)dy + v(x,y)dx]$$

Demostración.

$$f(\gamma(t))\gamma'(t) = [u(x(t),y(tb)) + iv(x(t),y(t))] \cdot [x'(t) + iy'(t)]$$

$$= [u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)] + i[v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t)]$$

donde integrado sobre $[a_i, a_{i+1}]$ tenemos la expresión requerida.

Definición 2.11 (Reparametrización). *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva diferenciable a trozos. Una curva diferenciable a trozos $\overline{\gamma}[\overline{a},\overline{b}] \to \mathbb{C}$ se llama reparametrización de γ si $\exists\alpha : [a,b] \to [\overline{a},\overline{b}]$ con $\alpha'(t) > 0, \alpha(a) = \overline{a}$ y $\alpha(b) = \overline{b}$ tal que $\gamma(t) = \overline{\gamma}(\alpha(t))$.*

Proposición 2.4. *Si $\overline{\gamma}$ es una reparametrización de γ, entonces*

$$\int_\gamma f = \int_{\overline{\gamma}} f$$

para $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donde $\gamma([a,b]) \subset \Omega$.

Proposición 2.5. *Sean f, g funciones continuas, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ curvas diferenciables, entonces*

(I) $\int_\gamma (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_\gamma f + c_2 \int_\gamma g$,

(II) $\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f$,

(III) $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_\gamma f + \int_\gamma f$.

Teorema 2.9. *Sea γ un curva diferenciable a trozos. Si $h(z)$ es una función continua en γ, entonces*

$$\Big| \int_\gamma h(z)dz \Big| \leq \int_\gamma |h(z)||dz|.$$

Además, si γ tiene longitud L y $|h(z)| \leq M$ en γ, entonces

$$\Big| \int_\gamma h(z)dz \Big| \leq ML.$$

Observación. $\int_\gamma |h(z)||dz| = \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt$.

Demostración. *Sea $g : [a,b] \to \mathbb{C}$, entonces*

$$\Re\left(\int_a^b g(t)dt \right) = \int_a^b \Re(g(t))dt$$

dado que $\int_a^b g(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt = u(t) + iv(t)$.

Sea $\int_a^b g(t)dt = re^{i\theta}$, entonces $r = \int_a^b e^{-i\theta} g(t)dt$

$$\Rightarrow r = \Re(r) = \int_a^b \Re(e^{-i\theta} g(t))dt$$

como $\Re(e^{-i\theta}g(t)) \leq |e^{-i\theta}g(t)| = |g(t)|,$ ya que $|e^{-i\theta}| = 1$, entonces tene-

mos que $\int_a^b \Re(e^{-i\theta}g(t))dt \leq \int_a^b |g(t)|dt$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b g(t)dt\right| = r \leq \int_a^b |g(t)|dt.$$

Y usando $|zz'| = |z||z'|$ *tenemos que*

$$|\int_\gamma f| = |\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt = \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt$$

Teorema 2.10 (Fundamental del Cálculo)**.** *Sea* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ *una curva diferenciable a trozos,* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto tal que* $\gamma([0,1]) \subset \Omega$*,* $F : \Omega \to \mathbb{C}$ *función holomorfa con* F' *continua. Entonces,*

$$\int_\gamma F'(z)dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$$

Observación. *Si* $\gamma(0) = \gamma(1)$*, entonces* $\int_\gamma F'(z)dz = 0$

Demostración.

$$\int_\gamma F'(z)dz = \int_0^1 F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^1 (F \circ \gamma)'(t)dt = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$$

Corolario 2.10.1. *Si* γ *es una curva cerrada, entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Teorema 2.11. *Si* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *es abierto convexo, y* $f : \Omega \to \mathbb{C}$*es continua, entonces* f *tiene primitica en* Ω *si y solo si*

$$\int_{\partial T} f(z)dz$$

para $T \subset \Omega$ *triángulo.*

Demostración. *content*

2.7. Teorema de Cauchy

Definición 2.12 (Teorema de Green). *Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto conexo acotado tal que ∂D es una una curva cerrada y simple, Ω abierto tal que $\overline{D} \subset \Omega$ y $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Entonces,*

$$\int_{D^+} P dx Q dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx dy$$

Teorema 2.12 (Cauchy). *Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto conexo acotado tal que su frontera es una curva simple cerrada, Ω abierto tal que $\overline{D} \subset \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función holomorfa tal que f' es continua. Entonces,*

$$\int_D f(z) dz = 0$$

Demostración. *Sea $f = u + iv$,*

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z) dz$$

$$= \int_\gamma (u + iv)(dx + dy)$$

$$= \int_\gamma (udx - vdy) + i \int_\gamma (udy + vdx)$$

donde aplicando el teorema de Green, tenemos que

$$\int_\gamma f = \iint_A \left[- \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx dy + i \iint_A \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy$$

a partir de las ecuaciones de Cauchy-Riemann ambos términos son nulos.

Teorema 2.13 (Fórmula Integral de Cauchy). *Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto, conexo y acotado tal que ∂D es una curva simple cerrada, Ω abierto tal que $\overline{D} \subset \Omega$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ un función holomorfa tal que f' es continua. Entonces,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{w-z} dw, \forall z \in D$$

Demostración. *Sea $z \in D, \epsilon > 0, D_\epsilon = D \setminus \{|w-z| \leq \epsilon\}$. La frontera ∂D^+ es la unión de ∂D y $\{|w-z| = \epsilon\}$ con orientación positiva.*

Dado que $\frac{f(z)}{w-z}$ es holomorfa para $w \in D_\epsilon$, por el teorema de Cauchy tenemos

$$\int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0$$

separando la frontera e invirtiendo la orientación se tiene

$$\Rightarrow \int_{|w-z|=\epsilon} \frac{f(z)}{w-z} dw = \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

si escribimos $w = z + \epsilon e^{i\theta}, dw = i\epsilon e^{i\theta} dw$, obtenemos

$$\int_0^{2\pi} f(z + \epsilon e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{f(w)}{w-z} dw$$

por el teorema del valor medio para la funciones armónicas, la integral de la izquierda coincide con $f(z)$.

Teorema 2.14 (Fórmula Integral de Cauchy para las Derivadas). *Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto, conexo y acotado talque ∂D es unacurva simple cerrada, $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto tal que $\overline{D} \subset \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función holomorfa tal que f' es continua. Entonces,*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \forall z \in D, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. *Sea $z \in D$ entonces $dist(z, \partial D) = r > 0$, f continua en*

$\partial D \Rightarrow \exists M > 0 : |f(w)| < M, \forall w \in \partial D$ *y* $|\frac{1}{w-z}| \leq \frac{1}{r}$

$$|\frac{f(w)}{w-z}| \leq \frac{M}{r}, \forall w \in \partial D$$

y dado que $\frac{d}{dz}(\frac{f(w)}{w-z}) = \frac{f(w)}{w-z}^2$ *entonces, por el teorema de derivación bajo el signo integral tenemos que*

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dz$$

donde usando inducción y el teorema de derivación bajo el signo integral podemos ver que se cumple para las derivadas de orden n.

Corolario 2.14.1. *Sea* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *función holomorfa,* $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ *continua. Entonces* f *es infinitamente derivable.*

Teorema 2.15 (Morera)**.** *Sea* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *función continua y* $\int_{\partial T} f(z)dz = 0, \forall T \subset \Omega$ *triángulo. Entonces,* f *es infinitamente derivable.*

Demostración. *(Teorema fundamental del cálculo)* $\Rightarrow$ f *tiene primitiva, es decir,* $\exists F : f = F', F$ *holomorfa en* D *y* $F' = f$ *continua. Entonces, por el corolario anterior* F *infinitamente derivable* $\Rightarrow$ F' *infinitamente derivable.*

Teorema 2.16 (Goursat)**.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto,* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfa. Entonces,* f' *es continua.*

Demostración. *Esta demostración se basa en el teorema de Morera. Sea* T *un triángulo cerrado en* D*. Subdividimos* T *en cuatro subtriángulos iguales. Como la integral de* $f(z)$ *alrededor de* ∂T *es la suma de las integrales a lo largo de los subtriángulos, hay almenos un subtriángulo* T_1 *tal que*

$$\left| \int_{\partial T_1} f(z)dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial T} f(z)dz \right|$$

Ahora, subdividimos T_1 *en cuatro subtriángulos iguales y repetimos el proceso. De manera inductiva obtenemos una sucesión de triángulos encajados*

$\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$\Big|\int_{\partial T_n} f(z)dz\Big| \geq \frac{1}{4}\Big|\int_{\partial T_{n-1}} f(z)dz\Big| \geq \cdots \geq \frac{1}{4^n}\Big|\int_{\partial T} f(z)dz\Big|$$

Dado que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es decreciente y* $\operatorname{diam}(T_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $T_n \xrightarrow{n\to\infty} z_0 \in D$. *Y dado que* $f(z)$ *es diferenciable en* z_0

$$|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)| \leq \epsilon_n.z \in T_n$$

donde $\epsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. *Sea* L *la longitud de* ∂T. *Entonces, la longitud de* T_n *es* $\frac{L}{2^n}$. *Si* $z \in T_n$ *entonces*

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)| \leq \epsilon_n|z-z_0| \leq 2\epsilon_n\frac{L}{2^n}$$

Por el toerema de Cauchy y la estimación de Cauchy

$$\Big|\int_{\partial T_n} f(z)dz\Big| = \Big|\int_{\partial T_n} df(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)\Big| \leq 2\epsilon_n\frac{L}{2^n}\cdot\frac{L}{2^n} = \frac{2L^2\epsilon_n}{4^n}$$

$$\Rightarrow \Big|\int_{\partial T} f(z)dz\Big| \leq 4^n\Big|\int_{\partial T_n} f(z)dz\Big| \leq 2L^2\epsilon_n$$

Como $\epsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, *entonces*

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0$$

Por el Teorema de Morera $f(z)$ *es holomorfa.*

Teorema 2.17 (Cauchy-Goursat). *Sea* $D \subset \mathbb{C}$ *abierto, conexo y acotado tal que* ∂D *es una curva simple cerrada,* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto tal que* $\overline{D} \subset \Omega, f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfa. Entonces,*

$$\int_{\partial D^+} f(z)dz = 0$$

Definición 2.13 (Simplemente Conexo)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo. Entonces, si $\mathbb{C}^* \setminus \Omega$ es conexo, decimos que Ω es simplemente conexo.*

Observación. *$\Omega \subset \mathbb{C}$ conexo es simplemente conexo si $\forall \gamma \in \Omega$ curva cerrada es homotópica.*

Proposición 2.6. *Una curva que se puede transformar en un punto es una curva homótopa.*

Teorema 2.18 (Cauchy Homotópico)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplemente conexo, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y $\gamma \subset \Omega$ curva cerrada simple. Entonces,*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Demostración. *Ω simplemente conexo $\Rightarrow$ γ es homotópica a una curva constante $\lambda(t) = z_0, \forall t \Rightarrow \int_\gamma f = \int_\lambda f = 0$.*

Teorema 2.19 (Desigualdades de Cauchy)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$, $D = \overline{D}(z_0, R) \subset \Omega$, f holomorfa en D. Si $|f(z)| \leq M, \forall z \in \partial D$, entonces*

$$\left|f^{(k)}(z_0)\right| \leq \frac{k!}{R^k} M,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Demostración. *Por el teorema de Cauchy*

$$f_{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw$$

$$\Rightarrow |f_{(k)}(z_0)| = \frac{k!}{2\pi} \Big| \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw \Big|$$

Ahora,

$$\Big| \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} \Big| \leq \frac{M}{R^{k+1}}$$

dado que $|w - z_0| = R, \forall w \in \partial D$. Entonces,

$$|f_{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^{k+1}} \cdot L$$

donde L es la longitud de γ.

Teorema 2.20 (Liouville). *Sea f entera. Si $\exists M > 0 : |f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.*

Demostración. *Por las desigualdades de Cauchy con $k = 1$, $\forall z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow |f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}$ y para z_0, $\frac{M}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \Rightarrow |f'(z_0)| = 0 \Rightarrow f'(z_0) = 0 \Rightarrow f$ es constante.*

Teorema 2.21 (Teorema Fundamental del Álgebra). *Sea $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$, $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$. Entonces, $\exists z_0 \in \mathbb{C} : P(z_0) = 0$.*

Demostración. *Sea $p(z_0) \neq 0, \forall z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces, $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ es entera $\Rightarrow f(z)$ no es constante dado que $a_n \neq 0$. Basta ver que, por el teorema de Liouville, que $f(z)$ es acotada.*

Sea $M > 0$, a partir de $P(z)$ por la desigualdad triangular

$$|P(z)| \geq |a_n||z|^n - |a_0| - \cdots - |a_{n-1}||z|^{n-1}$$

Sea $a = |a_0| + \cdots + |a_{n-1}|$. Si $z > 1$ entonces

$$|P(z)| \geq |z|^{n-1}\left(|a_n||z| - \frac{|a_0|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_1|}{|z|^{n-2}} - \cdots - \frac{|a_{n-1}|}{1}\right)$$

$$\geq |z|^{n-1}(|a_n||z| - a)$$

Sea $K = \max\{1, \frac{M+a}{|a_n|}\}$ entonces, si $|z| > K \Rightarrow |P(z)| \geq M$. Por tanto, si $|z| > K \Rightarrow \frac{1}{|P(z)|} < \frac{1}{M}$. Pero si z es tal que $|z| \leq K$, entonces $\frac{1}{P(z)}$ es acotada y en valor absoluto por que es continua, es decir, $\exists L > 0 : \frac{1}{|P(z)|} < \max\{\frac{1}{M}, L\} \Rightarrow |f(z)|$ es acotada en $\mathbb{C}$.

Capítulo 3

Representación Analítica de las funciones holomorfas

Nota. *Si f holomorfa se puede representar localmente como una serie de potencias convergente, en particular, una serie de Taylor.*

3.1. Sucesiones y Series

Definición 3.1 (Sucesión Convergente)**.** *Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de numeros complejos. Entonces, si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : |z_n - z_0| < \epsilon, \forall n \geq N,$$

decimos que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a z_0 y lo denotamos $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z_0$.

Definición 3.2 (Serie Convergente)**.** *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números complejos. Entonces, si la sucesión de sumas parciales*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

converge a S, decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a S y lo denotamos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

¿AÑADIR TEST CONVERGENCE?

Proposición 3.1. *Sea* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números complejos. Entonces,*

$$z_n \xrightarrow{n\to\infty} z_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Re(z_n) \xrightarrow{n\to\infty} \Re(z_0) \\ \Im(z_n) \xrightarrow{n\to\infty} \Im(z_0) \end{cases}$$

Definición 3.3 (Convergencia absoluta)**.** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie. Entonces, si* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge, decimos que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente.*

Observación. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

Proposición 3.2 (Producto de Series)**.** *Sean* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *series con* $a_n, b_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$*. Si*

$$c_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n-k} a_k$$

entonces,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\big) \cdot \big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\big)$$

Proposición 3.3. *Sean* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *series con* $a_n, b_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ *abosolutamente convergentes. Entonces,* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *es absolutamente convergente.*

Definición 3.4 (Convergencia Puntual)**.** *Sea* $f, f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ *funciones,* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesión de funciones tal que* $f_n(z) \xrightarrow{n\to\infty} f(z), \forall z \in \Omega$*. Entonces,* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} f$*.*

Observación. $\sum f_n(z) \xrightarrow{n\to\infty} f(z), \forall z \in \Omega \Rightarrow \sum f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$*.*

Definición 3.5 (Convergencia Uniforme)**.** *Sea* $f, f_n : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *funciones,* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesión de funciones. Entonces, si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : |f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \forall n \geq N, \forall z \in \Omega$$

entonces decimos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge converge uniformemente y lo denotamos* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} f$ *uniformemente.*

Observación. $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *no depende de* $z \in \Omega$

Proposición 3.4. *Sea* $f, f_n : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *funciones,* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesión de funciones tal que* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} f$ *uniformemente en* Ω*. Entonces,*

$$f_n \text{ continua } \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f \text{ continua}$$

Observación. f *no es continua* $\Rightarrow \{f_n\}$ *no converge uniformemente.*

Teorema 3.1 (Weierstrass)**.** *Sea* $f_n : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *tal que* $\exists M_n : |f_n(z)| \leq M_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \Omega$*. Si* $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *converge, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente en* Ω

Observación. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente en* $\Omega \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ *converge unifomemente en* Ω *(convergencia absoluta de* $\sum f_n$*).*

Teorema 3.2. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto,* $f, f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ *funciones,* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesión de funciones tal que* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} f$ *uniformemente en* Ω *y* f_n *holomorfa* $\forall n \in \mathbb{N}$*. Entonces,* f *es holomnorfa.*

Demostración. f_n *holomorfa* $\xRightarrow{T.Cauchy} \int_{\partial T} f_n(z)dz = 0$ *y*

$$\int_{\partial T} f_n(z)dz \xrightarrow{n\to\infty} \int_{\partial T} f(z)dz$$

$\Rightarrow \int_{\partial T} f(z)dz = 0 \Rightarrow f$ *holomorfa.*

Corolario 3.2.1. *Si* $\{f_n\} \xrightarrow{n\to\infty} f$ *uniformemente en* K *compacto* $\forall K \subset \Omega$*, también se cumple el teorema anterior.*

3.2. Series de Potencias

Definición 3.6 (Serie de Potencias)**.** *Sean* $a_1, a_2, \cdots$ *tal que* $a_i \in \mathbb{C}, \forall i,$

$z_0 \in \mathbb{C}$. *Entonces,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

es una seríe de potencias.

Observación. *Sea* $w = z - z_0$ *entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_{z0})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ *es la traslación de la serie.*

Teorema 3.3. *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. *Entonces,* $\exists ! R \geq 0$ *tal que*

(I) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *converge absolutamente en* $D(0, R)$,

(II) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *no converge si* $|z| > R$,

(III) $R > 0 \Rightarrow \forall r \in (0, R), \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *converge uniformemente en* $\overline{D}(0, R)$.

Además, $R^{-1} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$

Demostración. *content*

Notación.

- R *es el radio de convergencia,*
- $D(0, R)$ *es el disco de convergencia.*

Proposición 3.5 (Criterio del Cociente)**.** *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *una serie de potencias. Si*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

existe, entonces es igual a R, *el radio de convergencia.*

Ejemplo.

(I) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *tiene* $R = 1$ *ya que* $a_n = 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = 1$.

(II) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *tiene* $R = +\infty$ *ya que* $a_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = n + 1 \xrightarrow{n \to \infty} \infty$.

(III) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n n!$ *tiene radio de convergencia* $R = 0$ *ya que* $|\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

3.3. Funciones Analíticas

Teorema 3.4 (Derivada de Serie de Potencias). *Sea $f : D(a, R) \to \mathbb{C}$ tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

con R radio de convergencia. Entonces, f es analítica y

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$$

tiene el mismo radio de convergencia y los coeficientes vienen dados por

$$a_n = \sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Demostración. *Supongamos que $a = 0$. Sea $g : D(0, R) \to \mathbb{C}$ tal que*

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Queremos ver que $g(z) = f'(z), \forall z \in D(0, R)$. Sea $z_0 \in D(0, R)$ y $r > 0$ tal que $D(z_0, 2r) \subset D(0, R)$. Si $z \in D(z_0, r)$ entonces

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^n - z_0^n)$$

$$= a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z_0^{n-1})$$

donde $z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots z_0^{n-1})$. Entonces, tomado límites

$$f'(z) = a_1 + \lim_{z \to z_0} \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z_0^{n-1})$$

$$= a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z_0^{n-1} + z_0^{n-2} z_0 + \cdots + z_0^{n-1})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} = g(z_0)$$

dado que la serie converge uniformemente por ser función continua.

Observación. $f^{(n)}(z) = n! a_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)(z-z_0)^{k-n}$

Observación. *Las funciones holomorfas son analíticas.*

Teorema 3.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, $z_0 \in \Omega$ y $D(z_0, R) \subset \mathbb{C}$. Entonces,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

converge en $D(z_0, r)$ con $r \geq R$ y

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, R)$$

Demostración. *Sea $D = D(z_0, R)$. Por la fórmula integral de Cauchy*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Queremos usar la serie geométrica para expandir el integrando como una serie de potencias en $z - z_0$. Como $z \in D$ y $w \in \partial D$, entonces

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| < 1$$

donde

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}}$$

$$= \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n$$

por tanto,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \left[\frac{f(w)}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z - z_0}{w - z_0})^n \right] dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\right]dw$$

Ahora, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$$

converge uniformemente en D *y* $\frac{f(w)}{w-z_0}$ *es continua en* $\partial D \Rightarrow$ *está acotada, entonces la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

converge uniformemente en ∂D *tal que*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} = \frac{f(w)}{w-z}$$

Por tanto,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(z-z_0)^n\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right]$$

Corolario 3.5.1. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}, f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfa. Entonces,* $\forall z_0 \in \Omega$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, R)$$

donde $R = \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$

Ejemplo. *hacer ejemplos* e^z *y* $\log(1+z)$

3.4. Ceros de Funciones Analíticas

Proposición 3.6. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto,* $z_0 \in \Omega$*,* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *analítica. Si* $f^{(n)}(z_0) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}^+$*, entonces* $\exists r > 0 : f(z) = 0, \forall z \in D(z_0, r)$*.*

Proposición 3.7. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto,* $z_0 \in \Omega$*,* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *analítica tal que* f *no es idéticamente nula. Entonces,* $\exists n \in \mathbb{Z}^+ : f^{(n)}(z_0) \neq 0$*.*

(I) *Si* $n = 0$*, entonces* $f(z_0) \neq 0$*.*

(II) *Si* $n > 0$*, entonces* $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x) = 0$ *pero* $f^{(n)}(x) \neq 0$*. En este caso decimos que* f *tiene un cero de orden* n *en* z_0*.*

Corolario 3.5.2. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto,* $z_0 \in \Omega$*,* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *analítica. Si* $f(z_0) = 0$ *y* $\exists n \in \mathbb{Z}^+ : f^{(n)}(z_0) \neq 0$*, entonces* $\exists \varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ *anlítica en* $D(z_0, r)$ *tal que* $\varphi(z_0) \neq 0$ *y*

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z), \forall z \in D(z_0, r)$$

y también $\exists r' > 0 : f(z) = 0$ *solo para* z_0 *en* $D(z_0, r')$

Corolario 3.5.3. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$*,* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *analítica,* $z_0 \in \Omega$*. Si* $\exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *sucesión de puntos distintos en* Ω *tal que* $z_n \xrightarrow{n \to \infty} z_0$ *y* $f(z_k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$*, entonces* $f(z) = 0, \forall z \in D(z_0, r)$ *con* r *de manera que* $D \subset \Omega$*.*

Proposición 3.8. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto conexo. Sea* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfa. Si* $\exists z_0 \in \Omega : f^{(n)}(z_0) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$*, entonces* $f(z) = 0, \forall z \in \Omega$*.*

Observación. *Si* Ω *no es conexo* $\Omega = U \cup V$ *para* U, V *abiertos, entonces* f *puede tomar valor* $f = 0$ *en* U *y* $f = 75$ *en* V*.*

Demostración. *Sea* $G = \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0, \forall n \geq 0\}$*. Entonces,* $z_0 \in G \Rightarrow G \neq \emptyset$*. Luego,* $\forall z \in G, \exists r > 0 : D(z, r) \subset \Omega$ *tal que*

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(w - z)^n = 0, \quad \forall w \in D(z, r)$$

entonces, $D(z,r) \subset G \Rightarrow G$ abierto. Ahora,

$$G = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0\}$$

la intersección de cerrados es cerrado $\Rightarrow G$ es cerrado. Por tanto, G abierto y cerrado no vacío $\Rightarrow G = \Omega$.

Observación. *G cerrado en Ω, cerrado relativo.*

Corolario 3.5.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que f no es idénticamente nula. Supongamos $f(a) = 0$, entonces $\exists m \in \mathbb{N}$ y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $g(a) \neq 0$ y $f(z) = (z-a)^m g(z)$.*

Demostración. *content*

Teorema 3.6 (Principio de Identidad)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo. Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfas. Si $A \subset \Omega : A' \cap \Omega \neq \emptyset$ y $f(z) = g(z), \forall z \in A$, entonces $f(z) = g(z), \forall z \in \Omega$.*

Demostración. *Suponemos que $g = 0$. sea $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega : z_i \neq z_j, \forall i \neq j$ y $z_n \xrightarrow{n \to \infty} z_0 \in \Omega$. Entonces, $f(z_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(z_0) = 0$. Sea m el orden del cero z_0. Si desarrollamos f en z_0*

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^m \cdot h(z)$$

donde h es holomorfa y $h(z_0) = a_m \neq 0$. Entonces, $\exists r > 0 : h(z) \neq 0, \forall z \in D(z_0, r)$. Por tanto,

$$f(z_n) = (z_n - z_0)^m h(z_n) \neq 0$$

es una contradicción.

Teorema 3.7 (de La Aplicación Abierta)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa no constante. Entonces, $f(G)$ es abierto $\forall G \subset \Omega$.*

Demostración. *Basta ver que $f(\Omega)$ es abierto. Por el Principio de Identidad, los ceros de f' son aislados. Entonces,*

$$\Omega = (\Omega \setminus \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \cup D_1 \cup D_2 \cdots$$

donde $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son los ceros de f' y D_n son los discos centrados en $z_n.Portanto,$f'(z) $\neq 0, \forall z \in \Omega \setminus \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xRightarrow{T.F.I} f(\{\Omega \setminus \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\})$ es abierto. Como $f(D_n)$ es abierto $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $f(\Omega)$ es abierto.

Teorema 3.8 (Principio del Módulo Máximo)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa. Si $\exists a \in \Omega : |f(a)| \geq |f(z)|, \forall z \in \Omega$, entonces f constante.*

Demostración. *Si f no es constante, entonces $f(\Omega)$ es abierto, pero $f(a) \notin f(\mathring{\Omega})$, es una contradicción.*

Capítulo 4

Singularidades Aisladas

4.1. Series de Laurent

Teorema 4.1. *Sea* $0 \leq r_1 < r_2$*,* $z_0 \in \mathbb{C}$*. Consideramos la región* $A = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ *donde puede ser* $r_1 = 0$ *o/y* $r_2 = \infty$*. Sea* f *analítica en* A*. Entonces,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

donde ambas series convergen absolutamente en A *y uniformemente en* $B_{\rho_1,\rho_2} = \left\{z : \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\right\}$ *donde* $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$*. Esta serie se llama serie de Laurent alrededor de* z_0 *en la corona circular* A*.*

Si γ *es un círculo alrededor de* z_0 *con radio* r*, donde* $r_1 < r < r_2$*, entonces los coeficientes vienen dados por*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad n = \{0, 1, \cdots\}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w)(w - z_0)^{n-1} dw, \quad n = \{1, 2, \cdots\}$$

Observación. *Si escribimos* $b_n = a_{-n}$*, entonces la fórmula cubre ambos casos*

Observación. *La serie de Laurent es única.*

Demostración. *content*

4.2. Singularidades Aisladas

Definición 4.1 (Singularidades Aisaladas)**.** *Caso de la serie de Laurent con* $r_1 = 0$. *En este caso,* f *es analítica en* $D(z_0, r_2) \setminus \{z_0\} = \{z : 0 < |z - z_0| < r_2\}$. *Decimos que* z_0 *es singularidad aislada. Podemos expandir la serie de Laurent de la siguient forma:*

$$f(z) = \cdots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

donde $0 < |z - z_0| < r_2$.

Definición 4.2. *Si* f *es analítica en* $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}, R > 0$, *entonces* z_0 *es una singularidad aislada.*

(I) $\forall j \in J \setminus F, b_j = 0, F$ *finito, entonces* z_0 *es un polo de* f. *Sea* $j_0 = \text{máx}\{j \in J : b_j \neq 0\}$. *Entonces* z_0 *es un polo de orden* j_0.

(II) $\forall j \in J, b_j \neq 0$, *entonces* z_0 *es una singularidad esencial.*

(III) $\forall j \in J, b_j = 0$, *entonces* z_0 *es una singularidad evitable.*

Observación. f *tiene un polo en* z_0 *si y solo si la serie de Laurent en* $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ *es de la forma*

$$\frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

la parte de los $b's$ *se llama parte principal.*

Observación. *Si* f *tiene una singularidad evitable, entonces la serie de Laurent es de la forma*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

que es una serie convergente. f *tiene una singularidad evitable en* z_0 *si y solo* f *se puede definir en* z_0 *tal que* f *es analítica en* z_0.

Proposición 4.1. *Sea* f *analítica en* A, z_0 *singularidad aislada.*

(I) z_0 *tiene una singularidad evitable si y solo si se da una de las siguentes condiciones*

a) f *es acotada en* $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

b) $\exists \lim_{z\to z_0} f(z)$.

c) $\exists \lim_{z\to z_0} (z-z_0)\cdot f(z) = 0$

(II) z_0 *es un polo simple* $\Leftrightarrow \exists \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\cdot f(z) \neq 0$

(III) z_0 *es un polo de orden* $\leq k \Leftrightarrow$ *se cumple una de las siguientes*

a) $\exists M > 0, k \geq 1 : |f(z)| \leq \frac{M}{|z-z_0|^k}$ *en* $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

b) $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{k+1}\cdot f(z) = 0$.

c) $\exists \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)$.

(IV) z_0 *es un polo de orden* $k \geq 1 \Leftrightarrow \exists \phi : U \to \mathbb{C}$ *donde* $U \setminus (z_0) \subset A, \phi(z_0) \neq 0$ *y*

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^k}, \quad \forall z \in U, z \neq z_0$$

Demostración. *content*

Teorema 4.2 (de Picard). *Sea f con singularidad esencial en z_0 y U entorno de z_0 tal que $z_0 \notin U$. Entonces, $\forall w \in \mathbb{C}$, execepto quizás un punto, $f(z) = w$ tiene infinitas soluciones en z en U.*

Teorema 4.3 (Casorati-Weierstrass). *Sea f con singularidad esencial en z_0 y $w \in \mathbb{C}$. Entonces, $\exists \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tal que $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z_0$ y $f(z_n) \xrightarrow{n\to\infty} w$.*

4.3. Cálculo de Residuos

Nota. *Si f tiene una singularidad aislada en z_0, entonces f admite desarrollo de Laurent en un entrono $U \setminus \{z_0\}$ de z_0*

$$f(z) = \cdots + \frac{b_2}{(z-z_0)}^2 + \frac{b_1}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

donde $b_1 = \operatorname{Res}(f, z_0)$ es el residuo de f en z_0

Proposición 4.2. *Sea f con singularidad aislada en z_0 y sea $k \geq 0$ el menor entero tal que $\exists \lim_{n\to\infty}(z-z_0)f(z)$. Entonces, $f(z)$ tiene un polo de orden k en z_0. Sea $\phi(z) = (z-z_0)f(z)$, entonces ϕ se puede definir unicamente en z_0 tal que ϕ es analítica en z_0 y*

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{\phi^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

Teorema 4.4 (de los Residuos)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplemente conexo, $\{z_1, \cdots, z_N\} \subset \Omega$, $f : \Omega \setminus \{z_1, \cdots, z_N\} \to \mathbb{C}$ holomorfa, $\{z_1, \cdots, z_N\}$ singularidades. Entonces,*

$$\int_{\gamma^+} f(z)dz = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k)$$

Definición 4.3 (Residuos en el Infinito)**.** *Sea $F(z) = f(\frac{1}{z})$. Entonces, decimos que*

(I) *f tiene un polo de orden k en ∞ si F tiene un polo de orden k en 0,*

(II) *f tiene un zero de orden k en ∞ si F tiene un zero de orden k en 0,*

(III) $\mathrm{Res}(f, \infty) = -\mathrm{Res}(\frac{1}{z^2}F(z), 0)$.

Proposición 4.3. *Si a es un polo de orden m de f, entonces*

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$$

donde $g(z) = (z-a)^m f(z)$

Capítulo 5

Miscelanea

5.1. Principio Del Argumento

Nota (Integral Logarítmica). *Sea f holomorfa en Ω, γ una curva en Ω tal que $f(z) \neq 0$ en γ, entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma dlog(f(z))$$

es la integral logarítmica de $f(z)$ a lo largo de γ y mide el cambio de $\log(z)$ a lo largo de la curva γ.

Nota (Derivada Logarítmica). *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) \neq 0$ en Ω. Entonces, $\log(f(z)) : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa en Ω y*

$$\log(f(x))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Proposición 5.1. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) \neq 0$ en Ω. Entonces, los ceros de f son singularidades aisladas de la derivada logarítmica. En particular, los ceros de f son polos de la derivada logarítmica.*

Demostración. *Suponemos que a es un cero de orden m de f. Entonces,*

$$f(z) = (z-a)^m g(z)$$

donde g es holomorfa y $g(a) \neq 0$. Ahora,

$$f'(z) = m(z-a)^{m-a}g(z) + (z-a)^m g'(z)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \quad \forall z \neq a.$$

Por tanto, a es un polo simple de la derivada logarítmica y

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = m.$$

Definición 5.1 (Meromorfa)**.** *Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es meromorfa si es holomorfa salvo en los polos.*

Observación. *Si f tiene infinitos polos en Ω acotado, entonces estos se acumulan en la frontera. En este caso, se puede elegir $\Omega' \subset \Omega$ tal que el número de polos en Ω' es finito.*

Proposición 5.2. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f \neq 0$ en Ω y $a \in \Omega$ un polo de orden m de f. Entonces, a es un polo de la derivada logarítmica de f y es de orden $-m$.*

Demostración. *Sea f con un polo en a, entonces*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)}$$

en un entorno de a en Ω, donde g es holomorfa en un entorno de a y $g(a) \neq 0$. Ahora,

$$f'(z) = \frac{-m(z-a)^{-m-1}g(z) + (z-a)^{-m}g(z)}{(z-a)^{-m}g(z)}$$

$$= -\frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Por tanto, a es polo simple de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ y $\mathrm{Res}(\frac{f'}{f}, a)$.

Teorema 5.1. *Sea Ω simplemente conexo, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ melomorfa, $\gamma \subset \Omega$ curva cerrada simple que no pasa por ningún cero y ningún polo de f. Entonces,*

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(Z_f - P_f)$$

donde Z_f es el número de ceros de f dentro de γ y P_f es el número de polos de f dentro de γ, contadas con su multiplicidad.

Nota (Interpretación del Principio el Argumento)**.** *VER QUE*

$$2\pi(Z_f - P_f) = \Delta_\gamma \arg(f)$$

5.2. Teorema de Rouché

Teorema 5.2 (Rouche)**.** *Sea Ω abierto simplemente conexo, f, g holomorfas salvo en Ω salvo en los ceros y los polos, γ curva cerrada en Ω que no pasa por ningún cero o polo de f, g. Si*

$$|g(z)| < |f(z)|, \quad \forall z \in \gamma,$$

entonces se tiene que

(I) $\Delta \arg(f) = \Delta \arg(g)$,

(II) $Z_f - P_f = Z_g - P_g$.

Demostración. *content*

5.3. Propiedades Funciones Armónicas

Proposición 5.3. *Sea D un disco abierto, $u(x, y)$ un función armónica en D. Entonces, $\exists v(x, y)$ función en D tal que $u + iv$ es analítica en D.*

Teorema 5.3 (Principio del Máximo)**.** *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ abierto conexo, $u : D \to \mathbb{R}$ armónica en D. Si $\exists z_0 \in D : u(z) \leq u(z_0)$, $\forall z \in D$, entonces u es constante.*

Demostración. *content*

Teorema 5.4 (Principio del Mínimo)**.** *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ abierto, conexo y acotado, $u : D \to \mathbb{R}$ armónica tal que u se puede extender con continuidad a* *la* ∂D. *Si* $\exists m, M : m \leq u(z) \leq M, \forall z \in \partial D$, *entonces*

$$m \leq u(z) \leq M, \quad \forall z \in D$$