Apuntes Probabilidad

Hugo Del Castillo Mola

10 de octubre de 2022

Índice general

Capítulo 1

Espacio de Probabilidad

1.1. Experimentos aleatorios

Definición 1.1 (Experimento Determinista). *Experimeto cuyo desarrolo es previsible con certidumbre y sus resultados están perfectamente determinados una vez fijadas las condiciones del mismo.*

Ejemplo. *Averiguar el espacio recorrido por un cuerpo en caída libre en el vacío al cabo de cierto tiempo t, donde se sabe que $x = \frac{1}{2}gt^2$ con g la gravedad de la Tierra.*

Definición 1.2 (Experimento Aleatorio). *Experimento en contexto de incertidumbre. Se caracterizan porque su desarrolo no ese previsible con certidumbre.*

Ejemplo. *Lanzar un dado.*

1.2. Espacio Muestral

Definición 1.3 (Espacio Muestral). *Dado un experimento aleatorio, Ω es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento. Decimos que Ω es el espacio muestral del experimento y los elementos de Ω se llaman sucesos elementales.*

Ejemplo. *Dado el experiemento "Lanzar un dado y obtener un 6", el espacio muestral es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si consideramos "Lanzar un dado y obtener un número par", el espacio muestral sería $\Omega = \{ \text{ par }, \text{ impar } \}$.*

1.2.1. Tipos de Espacios Muestrales

Definición 1.4 (Espacio Muestral Finito)**.** *Sea Ω un espacio muestral. Entonces, decimos que Ω es finito si tiene un número finito de elementos.*

Ejemplo. *Lanzar un dado.*

Definición 1.5 (Espacio Muestral Infinito Numerable)**.** *Sea Ω un espacio muestral. Entonces, decimos que Ω es infinito numerable si tiene un número infinito y numerable de elementos.*

Ejemplo. *Lanzar una moneda hasta obtener cara por primera vez. Aquí debemos considerar que se puede dar el caso en el que no se obtenga nunca cara y tiremos la moneda infinitas veces.*

Definición 1.6 (Espacio Muestral Continuo)**.** *Sea Ω un espacio muestral. Entonces, decimos que Ω es continuo si no hay discontinuidades o cambios abrutos entre los elementos del espacio muestral.*

Ejemplo. *El nivel del agua de un pantano entre los tiempos t_1, t_2. El espacio muestral $\Omega = \{f_t : t \in [t_1, t_2]\}$.*

1.3. Sucesos

Nota. *Sea $\mathcal{A} \subset \Omega$. Decimos que se ha presentado el suceso $A \subset \mathcal{A}$ si el resultado del experiemento ha sido $w \in A$, un suceso elemental contenido en $\mathcal{A}$.*

1.4. Sucesiones de Conjuntos

Definición 1.7 (Sucesión de Conjuntos)**.** *Sea Ω espacio muestral, $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Omega)$ una aplicación. Decimos que f es una sucesión de conjuntos y la repesentamos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.*

1.5. Límites de una sucesión de conjuntos

Definición 1.8 (Límite Inferior)**.** *Sea Ω espacio muestral, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ sucesión de conjuntos. Entoces, el límite inferior de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es el conjunto de puntos de Ω cuyos elementos pertenecen a todos los A_n excepto a lo* *sumo a un número finito de ellso.* $\liminf A_n$.

Definición 1.9 (Límite Superior). *Sea Ω espacio muestral, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ sucesión de conjuntos. Entoces, el límite superior de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es el conjunto de puntos de Ω cuyos elementos pertenecen a infinitos A_n. Y se denota* $\limsup A_n$.

Observación. $A \in \{A_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow A \in \limsup A_n$ *pero* $A \notin \liminf A_n$

Proposición 1.1. *Sea Ω espacio muestral, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una sucesión de conjuntos. Entonces,*

(I) $\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$,

(II) $\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$.

Demostración.

(I) ($\Rightarrow$) *Sea* $w \in \liminf A_n$. *Entonces,* $\exists k \in \mathbb{N} : w \in A_n, \forall n \geq k$. *Por tanto,*

$$w \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

($\Leftarrow$) *Sea* $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$. *Entonces,* $\exists k \in \mathbb{N} : w \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in A_k \cap A_{k+1} \cap \cdots \Rightarrow w$ *pertenece a infinitos A_n salvo a lo sumo a un número finito de ellos.*

(II) ($\Rightarrow$) *Sea* $w \in \limsup A_n$. *Entonces,* $w \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow w \in \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n.$$

($\Leftarrow$) *Sea* $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$. *Entonces,* $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in A_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow w \in \limsup A_n$.

Proposición 1.2. $\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow \liminf A_n \subset \limsup A_n$.

Demostración. *Sea* $w \in \liminf A_n$. *Entonces,* $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : w \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in A_n, \forall n \geq k \Rightarrow w \in \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in \limsup A_n$.

1.5.1. Sucesión de conjuntos convergente

Definición 1.10 (Covergencia)**.** *Sea* Ω *un espacio muestral,* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *una sucesión. Entonces, decimos que* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente si y solo si* $\liminf A_n = \limsup A_n$.

1.5.2. Sucesiones Monótonas

Definición 1.11 (Sucesión Monótona)**.** *Sea* Ω *un espacio muestral,* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *una sucesión. Entonces, decimos que* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona creciente si y solo si* $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$. *Y decimos que* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona decreciente si y solo si* $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$.

Notación.

*(*I*)* $\uparrow A_n$ *sucesión monótona creciente,*

*(*II*)* $\downarrow A_n$ *sucesión monótona creciente.*

Proposición 1.3. *Sea* Ω *un espacio muestral,* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *una sucesión mononota. Entonces,* $\liminf A_n = \limsup A_n$.

Demostración. *(*I*) Sea* $\downarrow A_n$. *Entonces,* $A_{n+1} \subset A_n \Rightarrow$

$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

y

$$\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Por tanto, $\liminf A_n = \limsup A_n$.

(II) *Sea* $\uparrow A_n$. *Entonces,* $A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow$

$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

y

$$\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Por tanto, $\liminf A_n = \limsup A_n$.

1.6. Estructuras con Subconjuntos

1.6.1. Álgebra

Definición 1.12 (Álgebra)**.** *Dado el espacio total* Ω*, una clase* $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *tiene estructura de álgebra si y solo si*

(I) $\Omega, \emptyset \in \mathcal{Q}$,

(II) $\forall A \in \mathcal{Q}, A^c \in \mathcal{Q}$

(III) $\forall A, A' \in \mathcal{Q}, A \cap A' \in \mathcal{Q}$,

Definición 1.13 (σ-Álgebra)**.** *Dado el espacio total* Ω*, una clase* $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *tiene estructura de* σ*-álgebra si y solo si*

(I) $\Omega, \emptyset \in \mathcal{Q}$,

(II) $\forall A \in \mathcal{Q}, A^c \in \mathcal{Q}$

(III) $\forall \{A_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{Q},\ \bigcap_{j \in J} A_j \in \mathcal{Q}$

1.7. Espacio Medibles

Definición 1.14 (Espacio Medible)**.** *Sea* Ω *espacio muestralm* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ σ*-álgebra. Entoces, al par* $(\Omega, \mathcal{A})$ *lo llamamos espacio medible. Los elementos de* $\mathcal{A}$ *se llaman conjuntos medibles.*

1.8. Probabilidad

Definición 1.15 (Medida de Probabilida)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espacio medible,* $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *aplicación. Entonces, se dice que* P *es una medida de probabilidad si cumpe*

*(*I*)* $\forall A \in \Omega, P(A) \geq 0,$

*(*II*)* $P(\Omega) = 1,$

*(*III*)* $\forall \{A_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{A} : A_i \cap A_j = \emptyset, \forall j \neq i \Rightarrow$

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Proposición 1.4 (Propiedades Medida Probabilidad)**.**

*(*I*)* $P(\emptyset),$

*(*II*)* $\forall \{A_j\}_{j \in J}$ *familia finita con elementos disjuntos dos a dos, entonces*

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{k} P(A_k),$$

*(*III*)* $\forall A \in \mathcal{A}, P(A^c) = 1 - P(A),$

*(*IV*)* $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \subset B, P(A) \leq P(B),$

*(*V*)* $\forall A \in \mathcal{A}, P(A) \leq 1,$

*(*VI*)* $\forall A, B \in \mathcal{A}, P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

*(*VII*)* $\forall \{A_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{A}, P\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_j\big) = \sum_{j=1} P(A_j) - \sum_{j_1, j_1 = 1, j_1 < j_2} P(A_{j_1} \cap A_{j_2}) + \cdots + (-1)^{j+1} P\big(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\big)$

*(*VIII*)* $\forall A, B \in \mathcal{A}, P(A \cup B) \leq P(A) + P(B),$

*(*IX*)* $\forall \{A_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{A}$ *finita*

$$P\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$$

(X) $\forall \{A_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{A}$

$$P\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

(XI) $\forall \{A_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{A}$,

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \geq 1 - \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j^c)$$

1.9. Espacio de Probabilidad

Definición 1.16 (Espacio de Probabilidad)**.** *Sea Ω espacio muestra, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ σ-álgebra, P medida de probabilidad. Entonces, a la terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se le llama espacio de probabilidad. Los elementos de $\mathcal{A}$ se llaman sucesos.*

1.10. Continuidad Secuencial de la Probabilidad

Teorema 1.1. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, $\{A_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{A}, \uparrow A_j$. Entonces,*

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Demostración. $A_n \uparrow \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. *Sea A tal que*

$$A = A_1 \cup \left[\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_{j+1} - A_j)\right]$$

entonces, A es unión de conjuntos disjuntos. Aplicado la aditividad finita tenemos que

$$P(A) = P(A_1) + \sum_{j=1}^{\infty} (A_{j+1} - A_j)$$

$$= P(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (P(A_{j+1}) - P(A_j))$$

$$= \lim_{n\to\infty} \big(P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) + P(A_3) - P(A_2) + \cdots + P(A_{n+1}) - P(A_n)\big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Teorema 1.2. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad,* $\{A_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{A}, \downarrow A_j$*. Entonces,*

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Demostración. $A_n \downarrow \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$ *y* $A_n^c \uparrow \Rightarrow$ *(por la proposición anterior)*

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n^c) = \lim_{n\to\infty} P(A_n^c)$$

donde $\lim_{n\to\infty} A_n^c = A^c$.

Ahora,

$$\begin{aligned} P(\lim_{n\to\infty} A_n) &= P(A) = 1 - P(A^c) \\ &= 1 - P(\lim_{n\to\infty} A_n^c) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} \left\{1 - P(A_n)\right\} \\ &= 1 - 1 + \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \end{aligned}$$

1.11. Probabilidad Condicionada

Definición 1.17 (Probabilida Condicionada)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad y se* $A \subset \mathcal{A}$ *un suceso tal que* $P(A) > 0$*. Entonces, decimos que*

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}, P(A) > 0$$

es la probabilidad de B *condiconada por* A*.*

1.11.1. Teorema del producto

Teorema 1.3 (Regla multiplicación)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad,* $A, B\mathcal{A} : P(A), P(B) > 0$*. Entonces,*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \text{ y}$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

1.11.2. Teorema de Probabilidad Total

Teorema 1.4 (Probabilidad Total)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *espacio de probabilidad,* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} : A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$*. Entonces, para* $B \in \mathcal{A}$

$$P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j) \cdot P(A_j)$$

donde $P(A_j) > 0, \forall j \in \{1, 2, \cdots\}$

Demostración.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) \\ &= P\Big(B \cap \Big[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big]\Big) \\ &= P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} (B \cap A_i)\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} B \cap A_i \\ &= P(B|A_i) \cdot P(A_i),\ \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Teorema 1.5 (de Bayes)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *espacio de probabilidad,* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ *tal que* $P(A_i) > 0, \forall i \in \mathbb{N}, B \in \mathcal{A} : P(B) > 0$*. Entonces,*

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i)}, i \in \mathbb{N}.$$

Demostración.

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

usando la independencia de sucesos y el teorema de la probaibilidad total tenemos que

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}, i \in \mathbb{N}.$$

1.12. Independencia de Sucesos

Definición 1.18. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad,* $A, B \in \mathcal{A}$ *con* $P(B) > 0$. *Entonces,* A *y* B *se dicen independientes si y solo si*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Proposición 1.5. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad,* $A, B \in \mathcal{A}$ *tal que* A *y* B *son sucesos independientes. Entoces,*

$$P(A|B) = P(A) \text{ si } P(B) > 0 \text{ y}$$

$$P(B|A) = P(B) \text{ si } P(A) > 0.$$

Proposición 1.6. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad,* $A, B \in \mathcal{A}$ *tal que* A *y* B *son sucesos independientes. Entonces, también lo son* A^c *y* B^c, A *y* B^c, A^c *y* B.

Capítulo 2

Modelo Uniforme

2.1. Regla de Laplace

Proposición 2.1 (Regla de Laplace). *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espacio de probabilidad tal que el conjunto de sucesos elementales es finito, los sucesos elementales son incompatibles dos a dos y equiprobables. Entonces, si $A \in \mathcal{A}$*

$$P(A) = \frac{\text{número de sucesos elementales a favor de A}}{\text{número de sucesos elemenetales de } \Omega}$$

a este resultado lo llamamos Regla de Laplace

Demostración. *Sea $a_1, a_2, \cdots, a_n$ el conjunto de sucesos elementales asociados, entonces*

$$\Omega = a_1 \cup a_2 \cup \cdots \cup a_n,$$

por ser incompatibles dos a dos

$$P(a_1) + P(a_2) + \cdots + P(a_n) = 1$$

y por ser equiprobables, es decir, $P(a_i) = \frac{1}{n}, \forall i \in \{1, \cdots, n\}$. Si $A \in \mathcal{A}$ tal que $A = \bigcup_{j \in J} a_j$ donde $J = \{1, \cdots, k\}, k \leq n$, entonces

$$P(A) = P(a_1) + \cdots + P(a_k) = \frac{k}{n}$$

Así, hemos obtenido la Regla de Laplace.

2.2. Población y Muestra

Nota. *Dentro del muestreo aleatorio se distingue que la selección sea sin remplazamiento o con remplazamiento.*

Definición 2.1 (Selección sin Remplazamiento)**.** *Se seleccionan n elementos de la población, mediante n extracciones sucesivas sin remplazamiento, asignando en cada una de ellas probabilidades iguales a los elementos no seleccionados en las anteriores. En, este caso, n es menor o igual que el tamaño de la población.*

Definición 2.2 (Selección con Remplazamiento)**.** *Se seleccionan n elementos de la población, mediante n extracciones sucesivas con reemplazamiento, asignando en cada una de ellas probabilidades iguales a todos los elementos de la población.*

Nota. *Distinguimos muestras ordenadas y sin ordenar.*

2.3. Muestras Ordenadas

Notación. $(N)_n = N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1), \forall n \leq N.$

Proposición 2.2. *Sea $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \cdots, b_m\}$. Entonces, es posible formar $n \cdot m$ pares tales que (a_i, b_i) donde $a_i \in A, b_j \in B$*

Observación. *El par (a_i, b_j) y el par (b_j, a_i) son iguales.*

Proposición 2.3. *Sea $A_1, A_2, \cdots, A_k$ con $n_1, n_2, \cdots, n_k$ elementos. Entonces el número de ordenaciones de la forma $(x_1, x_2, \cdots, x_k) : x_i \in A_i, i \in \{1, \cdots, k\}$ es $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.*

Corolario 2.0.1. *k selecciones sucesivas con exactamente n_i opciones posibles en el i-ésimo paso, producen $n_1 \cdot \dots \cdot n_k$ resultados diferentes posibles.*

Teorema 2.1. *De una población de N elementos se pueden seleccionar N^n muestras diferentes con remplazamiento de tamaño n y $(N)_n$ muestras diferentes sin reemplazamiento de tamaño n.*

Teorema 2.2. *El número de ordenaciones diferentes de N elementos es*

$$N! = N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Teorema 2.3. *Si se realiza un muestreo aleatorio con remplazamiento de tamaño n de una población con N elementos, la probabilidad de que en la muestra no aparezca ningún elemento dos veces es*

$$p = \frac{(N)_n}{N^n} = \frac{N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1)}{N^n}$$

2.4. Subpoblaciones

Definición 2.3 (Subpoblación). *Una Subpoblación de tamaño n es una muestra de tamaño n extraída de una población de tamaño N, cuyos elementos extraidos no han considerado ningún orden.*

Notación.

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n! \cdot (N-n)!}$$

Teorema 2.4. *De una población de N elementos se pueden seleccionar $\binom{N}{n}$ subpoblaciones diferenetes de tmaño $n \leq N$.*

Demostración. *El número de subpoblaciones posibles de tamaño n de una población N es el número de ordenaciones distintas de n elementos que es $n!$. Además, de una población de N elementos se pueden seleccionar $(N)_n$ muestras diferentes sin remplazamiento de tamaño n. Entonces,*

$$A = \frac{(N)_n}{n!}$$

|

Ejemplo. *Un equipo está compuesto por 7 miembros y un club cuenta con 20 miembros, se podran formar $\binom{20}{7}$ equipos diferentes.*

Teorema 2.5. *De una población de N elementos se pueden seleccionar $\binom{N+n-1}{n}$ subpoblaciones diferentes de tamaño n, mediante un muestreo con remplazamiento.*

2.5. Prticiones

Definición 2.4 (Partición)**.** *Una partición de tamaño r de una población de tamaño N es una división de la población en r grupos ordenados de elementos desordenados donde el grupo i contine n_i elementos $\forall i \in \{1, 2, \cdots, r\}$ y*

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_r = N$$

Teorema 2.6. *El número de particiones diferentes de tamaño r en las cuales se puede divir una población de N elementos es*

$$\frac{N!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_r!}$$

siendo n_i el tamaño del grupo i, $i \in \{1, \cdots, r\}$.

Ejemplo. *Se lanza un dado en 10 ocasiones. El número total de formas en las cuales se pueden obtener 3 unos, ningún dos, 2 treses, ningún cuatro, 3 cincos y 2 seises es*

$$\frac{10!}{3! \cdot 0! \cdot 2! \cdot 0! \cdot 3! \cdot 2!}$$

2.6. Variaciones, Combinaciones y Permutaciones

2.6.1. Variaciones de N elementos tomados de n en n

Definición 2.5 (Variaciones sin repetición)**.** *Las variaciones de N elementos tomados de n en n son los diferentes grupos que se pueden formar a partir de N elementos, tomados de n en n. Cada dos grupos difieren entre sipor* *algún elemento o por el orden.*

$$V_{N,n} = (N)_n = N \cdot (N-1) \cdot (N-n+1)$$

Observación. *Es lo mismo que el número de muestras diferentes de tamaño n seleccionadas mediante un muestreo sin remplazamiento de una poblaciçon de tamaño N.*

2.6.2. Variaciones de N elementos tomados de n en n

Definición 2.6 (Variaciones con repetición). *Las variaciones repetición de N elementos tomados de n en n son los diferentes grupos que se pueden formar a partir de N elementos, tomados de n en n, en los que pueden aparecer elementos repetidos y dos grupos son distintos entre sí, tiene distintos elementos o estan situados en distintos lugares.*

$$RV_{M,n}^{N} = N^n$$

2.6.3. Permutaciones de N elementos

Definición 2.7 (Permutación). *Las Permutaciones de N elementos diferentes son los distintos grupos que pueden formarse entrando en cada uno de llos lo N elementos dados, difiriendo únicamente en el orden de sucesión de sus elementos.*

$$P_N = N! = N \cdot (N-1) \cdots 2 \cdot 1$$

2.6.4. Permutaciones con repetición

Definición 2.8 (Permutaciones con repetición). *Las permutaciones con repetición de r elementos distintos tales que el elemento i aparece n_i veces $\forall i \in \{1, 2, \cdots, r\}$ con $\sum_{i=1}^{r} n_r = N$ es*

$$\frac{N!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_r!}$$

2.6.5. Combinaciones de N elementos tomados de n en n

Definición 2.9 (Combinaciones sin repetición). *Son los diferente grupos que se pueden formar con n elementos en cada uno, donde por lo menos cada uno tiene un elemento distinto. No se tiene en cuenta el órden en la disposición.*

$$C_{N,n} = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n! \cdot (N-n)!}$$

2.6.6. Combinaciones con repetición de N elementos tomados de n en n

Definición 2.10 (Combinaciones con repetición). *Son la distintas disposiciones que se pueden formar tomando n elementos de los N, entre lo cuales puden aparecer elementos repetidos, y dos disposicones serán distintas entre sí, si tienen distintos elementos. No se tiene en cuenta el órden en la disposición.*

$$RC_{N,n} = \binom{N+n-1}{n} = \binom{N+n-1}{N-1} = \frac{((N+n-1))!}{(N-1)!n!}$$

Capítulo 3

Probabilida sobre la recta real

3.1. Probabilidad Sobre La Recta Real

Notación. *Consideramos* $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), P)$ *espacio de probabilidad.*

3.1.1. Función de distribución en $\mathbb{R}$

Definición 3.1 (Función de distribución)**.** *Sea* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*

(I) F *es monótona no decreciente, es decir,* $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$*.*

(II) F *es continua por la derecha,* $\lim_{h \to 0} F(x+h) = F(x)$

(III) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$*,*

(IV) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$*.*

Teorema 3.1. *La función* $F(x) = P\{(-\infty, x]\}$ *es función de distribución en* $\mathbb{R}$*.*

Teorema 3.2. *Sea* F *función de distribución en* $\mathbb{R}$*. Entonces,* F *induce en* $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$*, espacio probabilizable, una probabilidad* P *cuya función de distribución es* F*.*

3.2. Probabilidad sobre $\mathbb{R}^n$