Cálculo Diferencial

Hugo Del Castillo Mola

29 de agosto de 2022

Índice general

Capítulo 1

El espacio $\mathbb{R}^n$

Notación. *(I) Se denota $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales.*

(II) Fijado $n \in \mathbb{N}$, denotamos $\mathbb{R}^n$ al producto cartesiano de $\mathbb{R}$ por si mismo n veces.

(III) El espacio $\mathbb{R}^n$ satisface los axiomas de espacio vectorial.

Sean $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$ vectores en $\mathbb{R}^n$

Definición 1.1 (Producto Escalar Euclideo)**.**

$$\langle x,y \rangle = x \cdot y = x_1 y_1 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Proposición 1.1. *El producto escalar satisface:*

(I) $\langle x,x \rangle \geq 0$

(II) $\langle x,x \rangle = 0 \ \Leftrightarrow x = 0$

(III) $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$

(IV) $\langle x + y,z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$

(V) $\langle \lambda x,y \rangle = \lambda \langle x,y \rangle$

Definición 1.2 (Norma Euclidea)**.**

$$||x|| = \sqrt{\langle x,x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

Proposición 1.2. *La norma verifica:*

(I) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(II) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$

(III) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Observación. $|||x|| - ||y||| \leq ||x|| + ||y||$

Definición 1.3 (Distancia Euclidea).

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

Proposición 1.3. *La distancia verifica:*

(I) $d(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(II) $d(x, y) = d(y, x)$

(III) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Definición 1.4 (Ángulo entre dos vectores).

$$\cos\theta(x, y) = \frac{\langle x,y \rangle}{||x|| \cdot ||y||}$$

Teorema 1.1 (Desigualdad de Cauchy).

$$|\langle x,y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

Proposición 1.4.

$$|\langle x,y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y|| \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : y = tx$$

Capítulo 2

Topología en $\mathbb{R}^n$

2.1. Conjuntos en $\mathbb{R}^n$

Definición 2.1 (Bola abierta). *Sean* $a \in \mathbb{R}^n,\ r > 0$ *denotamos bola abierta de centro* a *y radio* r *al conjunto*

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x-a|| < r\}$$

Definición 2.2 (Bola cerrada). *Sean* $a \in \mathbb{R}^n,\ r > 0$ *denotamos bola cerrada de centro* a *y radio* r *al conjunto*

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x-a|| \leq r\}$$

Definición 2.3 (Interior de un conjunto). *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$, *denotamos el interior de* A *como el conjunto*

$$\mathring{A} = \{a \in A,\ r > 0 : B(a,r) \subset A\}$$

Observación. $\mathring{A} \subset A,\ A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B} \subset B.$

Ejemplo. *(*I*)* $A = [0,\infty) \subset \mathbb{R}$, 0 *no es un punto interior de* A, $\mathring{A} = (0,\infty)$.

*(*II*)* $A = [0,1) \cup \{2\}, \mathring{A} = (0,1)$

*(*III*)* $A = \mathbb{Z}, \mathring{A} = \emptyset$

*(*IV*)* $A = \mathbb{Q}, \mathring{A} = \emptyset$, *cualquier intervalo contiene números irracionales.*

*(*V*)* $A = \{(x,y) : x > 0, y \geq 0\},\ \mathring{A} = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$.

*(*VI*)* $A = \{(x,y) : y > 0\},\ \mathring{A} = A$.

Definición 2.4 (Conjunto abierto). $A \subset \mathbb{R}^n$ *es un conjunto abierto si* $\mathring{A} = A \iff \forall a \in A,\ \exists r > 0 :\ B(a,r) \subset A$.

Proposición 2.1. *Toda bola abierta $B(a, r)$ es un conjunto abierto.*

Proposición 2.2. *Propiedades de conjuntos abiertos*

(I) $A \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathring{A}$ *es abierto.*

(II) *La unión arbitraria de abiertos es abierto.*

(III) *La intersección finita de abiertos es abierto.*

Observación. *La intersecciòm infinita de abiertos no es abierto.*

Ejemplo. *Sean $A_k = (0, 1 + \frac{1}{k})$ con $k = 1, 2, 3, ...$ tenemos que, $A_1 = (0, 2), A_2 = (0, 1 + \frac{1}{2}), ...$ (Aquí va un dibujo), $\cap_{k=1}^{\infty} A_k = (0, 1] \Rightarrow$ no es abierto.*

Ejemplo. *Sea $A = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, \frac{1}{2}, ...\}$, se tiene que $A = (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$. Por tanto, la unión de abiertos es abierto.*

Demostración. *(i) Suponemos que $A \subset \mathbb{R}^n$.*
Queremos ver que $\forall x \in \mathring{A}, \exists r > 0 : B(x, r) \subset \mathring{A}$. Sea $x \in \mathring{A}$, por la definición de interior de un conjunto tenemos que $\exists r > 0 : B(x, r) \subset A$. Toda bola abierta es un conjunto abierto $\Rightarrow B(x, r) = B(\mathring{x}, r) \subset \mathring{A}$. Por tanto, $\mathring{A}$ es un conjunto abierto.

Demostración. *(ii) Suponemos que A_i es abierto $\forall i \in \{0, 1, 2, ...\}$.*
Queremos ver que $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ es abierto. Sea $x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ tenemos que $\exists i_0 : x \in A_{i_0}$. Luego, A_{i_0} abierto $\Rightarrow \exists r > 0 : B(x, r) \subset A_{i_0}$. Como $A_{i_0} \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$, tenemos que $\forall x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i, \exists r > 0 : B(x, r) \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$. Por tanto, la unión arbitraria de abiertos es abierto.

Demostración. *(iii) Suponemos que A_i es abierto $\forall i \in \{0, 1, ..., n\}$. Queremos ver que $\bigcap_{i=0}^{n} A_i$ es abierto. Sea $x \in \bigcap_{i=0}^{n} A_i \Rightarrow x \in A_i$,*
$\forall i \in \{0, 1, ..., n\}$. Como todo conjunto A_i es abierto tenemos que,
$\forall i \in \{0, 1, ..., n\}, \exists r > 0 : B(x, r) \subset A_i$. Sea $r = \min\{r_0, r_1, ..., r_n\}$, entonces $B(x, r) \subset \bigcap_{i=0}^{n} A_i$. Por tanto, la intersección finita de abiertos es abierto.

Observación. *La intersección infinita de abiertos no es necesariamente abierto.*

Definición 2.5 (Adherencia)**.** *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, denotamos la adherencia de A como el conjunto $\overline{A} := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$.*

Ejemplo. (I) *$A = \{\frac{1}{n}, n = 1, 2, ...\} \subset \mathbb{R}$ entonces, $\overline{A} = A \cup \{0\}$.*

(II) *$A = \mathbb{Z}$ (insertar dibujo) entonces, $A = \overline{A}$.*

(III) *$A = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ entonces, $\overline{A} = \mathbb{R}$.*

(IV) *$A = \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ entonces, $\overline{A} = \mathbb{R}$*

Definición 2.6 (Frontera). *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, denotamos la frontera de A como el conjunto $\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$.*

Proposición 2.3. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \partial A \Leftrightarrow \forall r > 0$, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x,r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \emptyset$.*

Ejemplo. *(I) $A = \{(x,y); y > 0\}, \mathring{A} = A, \overline{A} = \{(x,y); y \geq 0\}, \partial A\{(x,y) : x \in \mathbb{R}$.*

(II) $A = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 < 1, z \geq 0\}, \mathring{A} = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 < 1, z > 0\}, \overline{A} = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}, \partial A = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = 0\}$

(III) $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} [0,1] \times [\frac{1}{2k-1}, \frac{1}{2k}], \mathring{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (0,1) \times (\frac{1}{2k-1}, \frac{1}{2k}), \overline{A} = A \cup \{(x,0) : 0 \leq x \leq 1\}, \partial A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \partial A_k \cup \{(x,0) : 0 \leq x \leq 1\}$

Proposición 2.4 (Conjunto cerrado). *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, A es cerrado $\Leftrightarrow \overline{A} = A$.*

Observación. *Hay conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.*

Demostración. ($\Rightarrow$) *Suponemos que A es cerrado. Queremos ver que $A = \overline{A}$. Sabemos que A cerrado $\Rightarrow \forall \{x_k\} \subset A : \{x_k\} \to a \Rightarrow a \in A$. Por la caract. de adherencia tenemos que $\{x_k\} \subset A : \{x_k\} \to a \Rightarrow a \in \overline{A}$ Por tanto, $\overline{A} \subset A$ y por la def. de adherencia $A \subset \overline{A} \Rightarrow A = \overline{A}$*

($\Leftarrow$) *Suponemos que $A = \overline{A}$. Queremos ver que A es cerrado. Sea $a \in \overline{A}$, por la caracterización de adherencia, $\exists \{x_k\} \subset A : \{x_k\} \to a$. Como $A = \overline{A}$ tenemos que $a \in A$. Entonces, por la caracterización de cerrado, $\forall \{x_k\} \subset A$, $\{x_k\} \to a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a \in A \Rightarrow A$ es cerrado.*

Proposición 2.5. *Propiedades conjuntos cerrados*

(I) A es cerrado $\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus A$ es abierto.

(II) A es cerrado $\Leftrightarrow \partial A \subset A$.

(III) La unión finita de cerrados es cerrado.

(IV) La intersección arbitraria de cerrados es cerrado.

Ejemplo. *Aquí hay un ejemplo.*

Demostración. *(i)* ($\Rightarrow$) *Suponemos que A es cerrado. Queremos ver que $\forall x \in (\mathbb{R}^n \setminus A), \exists r > 0 : B(x,r) \subset A$. Dado que A es cerrado $\Rightarrow A = \overline{A}$ y por la definición de adeherencia si $x \in A$, $(A = \overline{A})$ entonces $\forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Sea $x \in (\mathbb{R}^n \setminus A)$ por tanto, $\exists r > 0 : B(x,r) \cap A = \emptyset$. Como $B(x,r) \cap A \Rightarrow B(x,r) \subset (\mathbb{R}^n \setminus A)$, tenemos que $\forall x \in (\mathbb{R}^n \setminus A), \exists r > 0$ tal que $B(x,r) \subset (\mathbb{R}^n \setminus A)$ y $(\mathbb{R}^n \setminus A) = (\mathbb{R}^n \mathring{\setminus} A)$ por lo que concluimos que $(\mathbb{R}^n \setminus A)$ es abierto.*

($\Leftarrow$) *Suponemos que* $(\mathbb{R}^n \setminus A)$ *es abierto. Queremos llegar a* $\forall x \in A, \forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. $(\mathbb{R}^n \setminus A)$ *abierto* $\Rightarrow (\mathbb{R}^n \setminus A) = (\mathbb{R}^n \overset{\circ}{\setminus} A)$. *Si* $x \in (\mathbb{R}^n \setminus A)$, *entonces* $\exists r > 0 : B(x,r) \subset (\mathbb{R}^n \setminus A)$. *Sea* $x \in A$, *entonces* $\forall r > 0 : B(x,r) \subset A$ *, es decir,* $\forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.
Por lo que $A = \overline{A}$ *y concluimos que* A *es cerrado.*

Demostración. *(ii)* ($\Rightarrow$) *Suponemos que* A *es cerrado. Queremos ver que* $\partial A \subset A$. A *cerrado* $\Rightarrow A = \overline{A}$ *entonces, por la definición de frontera,* $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = A \setminus \mathring{A}$. *Por tanto,* $\partial A \subset A$.

($\Leftarrow$) *Suponemos que* $\partial A \subset A$. *Queremos ver que* A *es cerrado. Sabemos que* $A \subset \overline{A}$. *Por la definición de frontera tenemos que*
$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} \Rightarrow \partial A \cup \mathring{A} = \overline{A}$. *Sea* $x \in \overline{A}$ *entonces,* $x \in \partial A$ *ó* $x \in \mathring{A}$. *Si* $x \in \partial A$, *como* $\partial A \subset A$ *entonces,* $x \in A$. *Si* $x \in \mathring{A}$ *como* $\mathring{A} \subset A$ *entonces,* $x \in A$. *Por tanto,* $A \subset \overline{A}$ *y* $\overline{A} \subset A \Rightarrow A = \overline{A}$ *por lo que* A *es cerrado.*

Demostración. *(iii) Suponemos que* A_i *es cerrado* $\forall i \in \{1, ..., k\}$. *Queremos ver que* $\cup_{i=0}^{k} A_i$ *es cerrado. Como* $(\mathbb{R}^n \setminus A_i)$ *es abierto* $\forall i \in \{1, .., k\}$, *si* $x \in (\mathbb{R}^n \setminus \cup_{i=1}^{k} A_i) = \cap_{i=1}^{k} (\mathbb{R}^n \setminus A_i)$, *dado que la intersección finita de abiertos es abierto, tenemos que la unión finita de cerrados es cerrado.*

Demostración. *(iv) Suponemos que* A_i *es cerrado* $\forall i \in \{1, 2, ...\}$. *Queremos ver que* $\cap_{i=0}^{\infty} A_i$ *es cerrado. Como* $(\mathbb{R}^n \setminus A_i)$ *es abierto* $\forall i \in \{1, 2, ...\}$, *si* $x \in (\mathbb{R}^n \setminus \cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \cup_{i=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n \setminus A_i)$, *dado que la unión arbitraria de abiertos es abierto, tenemos que la intersección arbitraria de cerrados es cerrado.*

Definición 2.7 (Puntos de acumulación)**.** *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$, *llamamos conjuto de puntos de acumulación al conjunto*

$$A' = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0, B(x,r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset.\}$$

Observación. $A' \subset \overline{A}$.

Proposición 2.6. *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0$, $B(x,r) \cap A$ *es un conjunto infinito.*

Definición 2.8 (Punto aislado)**.** *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in A$ *es aislado* $\Leftrightarrow$, $\exists r > 0 :$ $B(a,r) \cap A = \{a\}$.

Ejemplo. *Aquí hay un ejemplo*

Proposición 2.7. *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{A} = A' \cup \{puntos\ aislados\}$.

Ejemplo. *Aquí hay un ejemplo.*

2.2. Sucesiones en $\mathbb{R}^n$

Definición 2.9 (Sucesión convergente). *Sea* $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *una sucesión:*

(I) $\{x_k\}$ *es Cauchy si* $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}:\ ||x_k - x_m|| < \epsilon,\ \forall k, m \geq N.$

(II) $\{x_k\} \to a$ *si* $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}:\ ||x_k - a|| < \epsilon,\ \forall k \geq N.$

Observación. $x, y \in \mathbb{R}^n, ||x-y||_\infty \leq ||x-y|| \leq \sqrt{n}||x-y||_\infty$

Proposición 2.8. *Sean* $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n,\ a \in \mathbb{R}^n$

(I) $\{x_k\}$ *es Cauchy* $\Leftrightarrow$ $\{x_k^i\}$ *es Cauchy para* $1 \leq i \leq n.$

(II) $\{x_k\} \to a \ \Leftrightarrow\ \{x_k^i\} \to a^i$ *para* $1 \leq i \leq n.$

Demostración. *(i)* $(\Rightarrow)$ *Suponemos que* $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *es Cauchy. Queremos ver que* $\{x_k^i\}$ *es Cauchy* $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. *Sabemos que* $\{x_k\}$ *Cauchy* $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : ||x_k - x_m|| < \epsilon, \forall k, m \geq N$. *Como* $||x_k - x_m|| \geq ||x_k - x_m||_\infty$ *y* $||x_k - x_m||_\infty = \sup\{\{x_k^i - x_m^i\}_{i=0}^n\}$, *tenemos que* $\epsilon > ||x_k - x_m|| \geq ||x_k - x_m||_\infty \geq |x_k^i - x_m^i|, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. *Por tanto,* $\{x_k^i\}$ *es Cauchy* $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$.

$(\Leftarrow)$ *Suponemos* $\{x_k^i\}$ *es Cauchy* $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. *Queremos ver que* $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *es Cauchy. Sabemos que* $\{x_k^i\}$ *Cauchy* $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N_i \in \mathbb{N} : |x_k^i - x_m^i| < \epsilon, \forall k, m \geq N_i$. *Sea* $N = \max\{N_1, ..., N_n\}$ *tenemos que* $k, m \geq N \Rightarrow |x_k^i - x_m^i| < \epsilon, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. *Como* $||x_k - x_m|| \leq \sqrt{n}||x_k - x_m||_\infty$ *y* $||x_k - x_m||_\infty = \sup\{\{x_k^i - x_m^i\}_{i=0}^n\}$ *entonces* $||x_k - x_m|| \leq \sqrt{n}||x_k - x_m||_\infty \leq \sqrt{n}|x_k^i - x_m^i| < \epsilon\sqrt{n}, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, *por lo que concluimos que* $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *es Cauchy.*

Demostración. *(ii)* $(\Rightarrow)$ *Suponemos que* $\{x_k\} \to a$. *Queremos ver que* $\{x_k^i\} \to a^i, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. *Sabemos que* $\{x_k\} \to a \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : ||x_k - a|| < \epsilon, \forall k \geq N$. *Como* $||x_k - a|| \geq ||x_k - a||_\infty$ *y* $||x_k - a||_\infty = \sup\{\{x_k^i - a^i\}_{i=0}^n\}$, *tenemos que* $\epsilon > ||x_k - a|| \geq ||x_k - a||_\infty \geq |x_k^i - a^i|, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. *Por tanto,* $\{x_k^i\} \to a^i, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$.

$(\Leftarrow)$ *Suponemos* $\{x_k^i\} \to a^i, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. *Queremos ver que* $\{x_k\} \to a$. *Sabemos que* $\{x_k^i\} \to a^i \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N_i \in \mathbb{N} : |x_k^i - a^i| < \epsilon, \forall k \geq N_i$. *Sea* $N = \max\{N_1, ..., N_n\}$ *tenemos que* $k \geq N \Rightarrow |x_k^i - a^i| < \epsilon, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. *Como* $||x_k - a|| \leq \sqrt{n}||x_k - a||_\infty$ *y* $||x_k - a||_\infty = \sup\{\{x_k^i - a^i\}_{i=0}^n\}$ *entonces* $||x_k - a|| \leq \sqrt{n}||x_k - a||_\infty \leq \sqrt{n}|x_k^i - a^i| < \epsilon\sqrt{n}, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, *por lo que concluimos que* $\{x_k\} \to a$.

Observación. $\{x_k\} \to a \ \Rightarrow\ \{x_k\}$ *es Cauchy.*

Definición 2.10 (Espacio Completo)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico. (X, d) es completo si toda sucesión de Cauchy converge a punto en el espacio.*

Teorema 2.1. *Sea $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n, \{x_k\}$ es Cauchy $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^n : \ \{x_k\} \to a$.*

Proposición 2.9. *Caracrterización por sucesiones:*

(I) *(Adherencia) $a \in \overline{A} \ \Leftrightarrow \ \exists \{x_k\} \subset A : \{x_k\} \to a$.*

(II) *(Acumulación) $a \in A' \ \Leftrightarrow \ \exists \{x_k\} \subset A \setminus \{a\} : \{x_k\} \to a$.*

Demostración. *(i) ($\Rightarrow$) Suponemos que $a \in \overline{A}$. Queremos ver que $\exists \{x_k\} \subset A : \{x_k\} \to a \in \mathbb{R}^n$. Sabemos que $a \in \overline{A} \Rightarrow \forall r > 0, B(a, r) \cap A \neq \emptyset$. Sea $r = \frac{1}{k}$, tenemos que $\exists \{x_k\} \subset B(a, \frac{1}{k}) \cap A$. Entonces, $\exists \{x_k\} \subset A : ||x_k - a|| < \frac{1}{k} \Rightarrow \exists \{x_k\} \subset A : \{x_k\} \to a \in \mathbb{R}^n$*

($\Leftarrow$) *Suponemos que $\exists \{x_k\} \subset A : \{x_k\} \to a \in \mathbb{R}^n$. Queremos ver que $a \in \overline{A}$. Sabemos que $\{x_k\} \to a \Rightarrow \forall \epsilon, \exists N \in \mathbb{N} : ||x_k - a|| < \epsilon, \forall k \geq N$. Sea $\epsilon = r$ tenemos que, $\forall r > 0, \exists N \in \mathbb{N} : ||x_k - a|| < r, \forall k \geq N$. Entonces, $\forall r > 0, \exists N \in \mathbb{N} : x_k \subset B(a, r), \forall k \geq N$. Como $x_k \subset B(a, r), \forall k \geq N$ y $B(a, r) \subset A$, tenemos que $\forall r > 0, B(a, r) \cap A \neq \emptyset$. Por tanto, $a \in \overline{A}$.*

Demostración. *(ii) Análogo a 1.*

Proposición 2.10. *(Conjunto cerrado, caracterización por sucesiones) $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado $\Leftrightarrow \forall \{x_k\} \subset A, \ \{x_k\} \to a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a \in A$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) *Suponemos que A es cerrado. Queremos ver que $\forall \{x_k\} \subset A, \{x_k\} \to a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a \in A$. Sabemos que A cerrado $\Rightarrow A = \overline{A}$. Sea $\{x_k\} \subset A : \{x_k\} \ \to a \in \mathbb{R}^n$, por la caracterización de adherencia tenemos que $a \in \overline{A}$ y por la definición de cerrado tenemos que $A = \overline{A} \Rightarrow a \in A$. Por tanto, $\forall \{x_k\} \subset A, \ \{x_k\} \to a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a \in A$.*

($\Leftarrow$) *Suponemos que $\forall \{x_k\} \subset A, \{x_k\} \to a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a \in A$. Queremos ver que A es cerrado. Sabemos, por la definicón de adherencia, que $A \subset \overline{A}$. Veamos que $\overline{A} \subset A$. Sea $a \in \overline{A}$ entonces, $\exists \{x_k\} \subset A : \{x_k\} \to a$ y por la hipótesis inicial tenemos que $a \in A$. Por tanto, $A \subset \overline{A}$ y $\overline{A} \subset A \Rightarrow A = \overline{A} \Rightarrow A$ es cerrado.*

2.3. Subsucesiones en $\mathbb{R}^n$

Definición 2.11 (Subsucesión). *Sea* $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *con* $k_j < k_{j+1},\ 1 \leq j \leq n,\ \{x_{k_j}\}$ *es una subsucesión.*

Observación. $\{x_k\} \to a \ \Rightarrow\ \{x_{k_j}\} \to\ a$

Definición 2.12 (Conjunto acotado). $A \subset \mathbb{R}^n$ *es acotado si* $\exists r > 0 :\ A \subset B(0, r)$.

Definición 2.13 (Teorema de Bolzano). $A \subset \mathbb{R}^n$ *infinito y acotado* $\Rightarrow\ A' \neq \emptyset$

2.4. Compacidad

Definición 2.14 (Conjunto compacto). $A \subset \mathbb{R}^n$ *es compacto si* $\forall \{x_k\} \subset A,\ \exists a \in A : \{x_{k_j}\} \to a$.

Teorema 2.2 (Teorema de Heine-Borel). $A \subset \mathbb{R}^n$ *compacto* $\Leftrightarrow$ A *cerrado y acotado.*

Demostración. ($\Rightarrow$) *Primero, suponemos que* A *es compacto y* A *no es acotado. Queremos ver que* A *no es compacto.* A *compacto* $\Rightarrow \forall \{x_k\} \subset A, \exists a \in A : \{x_{k_j}\} \to a$. *Pero* A *no acotado* $\Rightarrow \exists \{x_k\} \subset A : \{x_k\} \to \infty \Rightarrow \{x_{k_j}\} \to \infty$. *Lo que contradice que* A *sea compacto. Por tanto,* A *es acotado.*

Segundo, suponemos que A *es compacto. Queremos ver que* A *es cerrado.* A *compacto* $\Rightarrow \forall \{x_k\} \subset A, \exists a \in A : \{x_{k_j}\} \to a$. *Entonces, sea* $\{x_k\} \subset A : \{x_k\} \to x$ *por ser* A *compacto, tenemos que* $\exists \{x_{k_j}\} \to a \in A$ *y por la unicidad del límite* $a = x$. *Entonces, por la caracterización de cerrado,* $\forall \{x_k\} \subset A, \{x_k\} \to a \Rightarrow a \in A$, *tenemos que* A *es cerrado.*

($\Leftarrow$) *Suponemos que* A *es cerrado y acotado. Queremos ver que* A *es compacto. Sea* $\{x_k\} \subset A, B = \{x_1, x_2, ...\} \subset A$, A *acotado* $\Rightarrow B$ *acotado.* B *es finito o infinito. Si* B *es finito,* $\exists k_1 < ... < k_n : x_{k_1} = ... = x_{k_n} = a \in A \Rightarrow \{x_{k_j}\} \to a \in A \Rightarrow A$ *es compacto. Si* B *es infinito, por el teorema de Bolzano,* $\exists x \in B'$. *Sea* $r_1 = 1$ *tenemos que* $B(x, 1) \cap B$ *infinito* $\Rightarrow \exists k_1 : x_{k_1} \in B(x, 1)$. *Sea* $r_2 = \frac{1}{2}$ *tenemos que* $B(x, \frac{1}{2}) \cap B$ *infinito* $\Rightarrow \exists k_2 : x_{k_2} \in B(x, \frac{1}{2})$ *(...) Por tanto,* $\forall r_j = \frac{1}{j}, \exists x_{k_j} \in B(x, \frac{1}{j}) : ||x_{k_j} - x|| < r_j \Rightarrow \{x_{k_j}\} \to x$ *entonces, por ser* A *cerrado, tenemos que* $x \in A$. *Concluimos que* A *es compacto.*

Definición 2.15 (Sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$). *La sucesión* $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *es acotada si* $\exists r > 0 :\ ||x_k|| \leq r,\ \forall k \in \{1, ..., n\}$.

Teorema 2.3 (Teorema de Bolzano, caracterización por sucesiones). *Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. *Suponemos que $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$: $\{x_k\}$ es acotada. Queremos ver que $\exists\{x_{k_j}\} \to x$. Sabemos que $\{x_k\}$ acotada $\Rightarrow \exists R > 0 : ||x_k|| < R, \forall k$. Entonces $x_k \in \overline{B}(0, R), \forall k$. Como $\overline{B}(0, R)$ es cerrado y acotado, tenemos que $\overline{B}(0, R)$ es compacto. Por tanto, $\exists\{x_{k_j}\} \to x$.*

Teorema 2.4 (de los conuntos encajados). *Sea $A_k \subset \mathbb{R}^n,\ A_k \neq \emptyset$:*

(I) A_k es compacto $\forall k \in \{1, ..., n\}$.

(II) $A_{k+1} \subset A_k, \forall k \in \{1, ..., n\}$

$$\Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} A_k \neq \emptyset$$

Demostración. *Suponemos que A_k compacto, $A_{k+1} \subset A_k \forall k \in \{1, ..., n\}$. Queremos ver que $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \neq \emptyset$. Sea $x_k \in A_k$ como $A_{k+1} \subset A_k \forall k \in \{1, ..., n\}$ tenemos que $\{x_k\} \subset A_1$. Entonces, A_k compacto $\Rightarrow \exists\{x_{k_j}\} \subset A_1 : \{x_{k_j}\} \to x \in A_1$. Sea j_0 tal que $k_{j_0} \geq m$ tenemos que $\forall j \geq j_0, k_j \geq K_{j_0} \geq m \Rightarrow A_{k_j} \subset A_m$. Entonces, $\{x_{k_{j_{0+i}}}\} \subset A_m : \{x_{k_{j_{0+i}}}\} \to x$ y por ser A cerrado , $x \in A_m \Rightarrow \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \neq \emptyset$.*

2.5. Conexión

Definición 2.16 (Conjuntos no conexos). *$A \subset \mathbb{R}^n$ no conexo si $\exists U, V$ abiertos con $U, V \neq \emptyset$ tal que*

(I) $A \cap U \neq \emptyset$

(II) $A \cap V \neq \emptyset$

(III) $A \subset U \cup V$

(IV) $U \cap V = \emptyset$

Proposición 2.11. *$A \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow A$ es un intervalo.*

Definición 2.17. *$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n,\ \gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$. γ continua $:=$ $\gamma_1, ..., \gamma_n$ continuas.*

Definición 2.18 (Camino)**.** *Sea $A \subset \mathbb{R}^n, x, y \in A$. Un camino en A que conecta x con y es una aplicación $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ continua tal que $\gamma[0,1] \subset A$ y $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.*

Definición 2.19 (Conexión por caminos)**.** *Sea $A \subset \mathbb{R}^n, A$ es conexo por caminos (c.p.c) si $\forall x, y \in A$, existe un camino en a que conecta x con y.*

Ejemplo. *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n, \varphi(t) = (1-t)x + ty$ donde $\varphi(0) = x, \varphi(1) = y$.*

Definición 2.20 (Convexo)**.** *Sea $A \subset \mathbb{R}^n, A$ es convexo si $\forall x, y \in A$, *segmento $[xy] \subset A$. *segemento: $\forall t \in [0,1],\ ((1-t)x + ty) \in A$.*

Proposición 2.12. *(Propiedades conexo y c.p.c) A convexo $\Rightarrow$ A conexo por caminos.*

Teorema 2.5. *$A \subset \mathbb{R}^n$ c.p.c $\Rightarrow$ A conexo.*

Teorema 2.6. *$A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, A conexo $\Leftrightarrow$ A c.p.c*

Proposición 2.13. *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $x, y, z \in A$. Si se puede conectar x con y en A por un camino y se puede conectar y con z en A por un camino entonces se puede conectar x con z en A por un camino.*

Capítulo 3

Geometría de funciones de varias variables

Notación.

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Definición 3.1 (Conjuntos de nivel)**.** *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$. *Llamamos conjunto de nivel al conjunto*

$$N_c = \{x \in A : f(x) = c\}$$

3.1. Límites y continuidad

Definición 3.2 (Límite de una función en $\mathbb{R}^n$)**.** *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in \overline{A}, b \in \mathbb{R}^m$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \ x \in A, \ 0 < ||x - a|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - b|| < \epsilon$$

Definición 3.3 (Continuidad de una función en $\mathbb{R}^n$)**.** *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \ a \in A$.

$$f \text{ continua en } a \in A \equiv \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

f *es continua en* A *si* f *es continua en* $a, \ \forall a \in A$.

Observación. *En la definición de límite* f *no necesita estar definida en* a.

Observación. *El límite si existe es único.*

Proposición 3.1. *(Límite y continuidad, caracterización por sucesiones) Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \ b \in \mathbb{R}^m$*:*

(I) $\lim_{x\to a} f(x) = b$ $(a \in \overline{A}) \Leftrightarrow \forall \{x_k\} \subset A \setminus \{a\} : \{x_k\} \to a \Rightarrow \{f(x_k)\} \to b$.

(II) f *es continua en* $a \Leftrightarrow \forall \{x_k\} \subset A : \{x_k\} \to a \Rightarrow \{f(x_k)\} \to f(a)$

Demostración. *(i)* $(\Rightarrow)$ *Suponemos que* $\lim_{x\to a} f(x) = b$. *Sea* $\{x_k\} \subset A \setminus \{a\}$ *, queremos ver que* $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = b$. *Sabemos que* $\lim_{x\to a} f(x) = b \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$: *si* $x \in A, ||x-a|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - b|| < \epsilon$. *Como* $\{x_k\} \to a$ *entonces,* $\exists N \in \mathbb{N} : \ ||x_k - a|| < \delta, \forall k \geq N \Rightarrow ||f(x_k) - b|| < \epsilon$. *Por tanto, tenemos que* $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = b$.

$(\Leftarrow)$ *Suponemos que* $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$ *y* $\forall \{x_k\} \subset A \setminus \{a\} : \ \{x_k\} \to a \Rightarrow \{f(x_k)\} \to b$. *Sabemos que* $\nexists \lim_{x\to a} f(x) \Rightarrow \exists \{x_k\} : 0 < ||x_k - a|| < \frac{1}{k} \Rightarrow ||f(x_k) - b|| \geq \epsilon$. *Lo que contradice que* $\forall \{x_k\} \subset A \setminus \{a\} : \ \{x_k\} \to a \Rightarrow \{f(x_k)\} \to b$.

Demostración. *(ii)* $(\Rightarrow)$ *Suponemos que* f *es continua en* a. *Sabemos que* f *continua en* $a \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. *Por la proposición anterior, tenemos que* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Rightarrow \forall \{x_k\} \subset A : \{x_k\} \to a$ *entonces* $\{f(x_k)\} \to f(a)$.

$(\Leftarrow)$ *Suponemos que* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Rightarrow \forall \{x_k\} \subset A : \{x_k\} \to a \Rightarrow \{f(x_k)\} \to f(a)$. *Por la proposición anterior, tenemos que* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. *Por tanto,* f *es continua en* a.

Proposición 3.2. *(Propiedades de funciones, límites y continuidad)*
Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \ b \in \mathbb{R}^m. \ f = (f_1, ..., f_m), \ b = (b_1, ..., b_m)$:

(I) $\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \ \lim_{x\to a} f_i(x) = b_i$

(II) f *continua en* $a \in A \Leftrightarrow \ f_i$ *continua en* $a, \forall i \in \{1, ..., m\}$

Proposición 3.3. *(Propiedades algebraicas límites de funciones)*
Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \ g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ a \in \overline{A}, \ b, b' \in \mathbb{R}^m$ *tal que* $\lim_{x\to a} f(x) = b, \lim_{x\to a} g(x) = b'$:

(I) $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = b + b'$

(II) $\lim_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda b$

(III) $m = 1; \lim_{x\to a} f(x)g(x) = bb'$

(IV) $m = 1; \ b \neq 0, \ \lim_{x\to a} f(x)/g(x) = b/b'$

Proposición 3.4. *(Propiedades algebraicas continuidad de funciones)*
Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ f, g *continuas en* a

(I) $f+g,\ \lambda f$ *continuas en* $a, (\lambda \in \mathbb{R}$

(II) $m=1;\ fg$ *continuas en* a

(III) $m=1;\ \forall x \in A,\ g(x) \neq 0 \Rightarrow\ f(x)/g(x)$ *continua en* a.

Proposición 3.5. *(Continuidad composición de funciones)*
Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *continuas en* a.
Si $a \in A$, f *continua en* a *y* g *continua en* $f(a)\ \Rightarrow\ g \circ f$ *continua en* a.

Corolario 3.0.1. *Sean* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *continuas. Entonces,* $g \circ f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *es continua.*

Proposición 3.6 (Criterios de no existencia de límite)**.** *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(I) *Si* $\exists\{x_k, y_k\} \to (0,0)$ *tal que* $\nexists \lim_{k\to\infty}\{f(x_k, y_k)\} \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(II) *Si* $\exists\{x_k, y_k\} \to (0,0)$ *y* $\exists\{x'_k, y'_k\} \to (0,0)$ *tal que* $\{f(x_k, y_k)\} \to \alpha$ *y* $\{f(x'_k, y'_k)\} \to \alpha'$. *Entonces* $\alpha \neq \alpha' \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Proposición 3.7 (Criterios de no existencia de límite)**.** *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(I) *Si* $\exists\gamma \to (0,0)$ *tal que* f *no tiene límite a lo largo de* γ, *entonces* $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(II) *Si* $\exists\gamma, \gamma' \to (0,0)$ *tal que* f *tiene límite distinto a lo largo de* γ, γ', *entonces* $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Teorema 3.1 (Teorema del Sandwich)**.** *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Supongamos que* $||f(x)|| \leq g(x), \forall x \in A$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. *Entonces,* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Definición 3.4 (Condiciones de Lipschits y Hölder)**.** *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

(I) f *es Lipschitz si* $\exists c > 0 : ||f(x) - f(y)|| \leq c||x-y||, \forall x, y \in A$.

(II) f *es Hölder si* $\exists c > 0 : ||f(x) - f(y)|| \leq c||x-y||^{\alpha}, 0 < \alpha < 1, \forall x, y \in A$.

Observación. f *Lipschitz/Hölder en* $A\ \Rightarrow\ f$ *continua en* A.

3.2. Continuidad, compacidad y conexión

Proposición 3.8 (Imagen de conjuntos compactos y conexos). *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *continua.*

(I) A *compacto* $\Rightarrow$ $f(A)$ *compacto.*

(II) A *conexo/c.p.c* $\Rightarrow$ $f(A)$ *conexo/c.p.c.*

Demostración. *(i)*

Suponemos que A *es compacto y* f *es continua en* A. *Queremos ver que* $f(A)$ *es compacto. Sea* $\{x_k\} \subset A : \{f(x_k)\} \subset f(A)$. *Sabemos que* A *compacto* $\Rightarrow \exists\{x_{k_j}\} : \{x_{k_j}\} \to a \in A$. *Entonces, por ser* f *continua en* A, *tenemos que* $\{f(x_k)\} \to f(a) \in f(A)$. *Por tanto,* $f(A)$ *es compacto.*

Demostración. *(ii) Suponemos que* A *es c.p.c y* f *es continua en* A. *Queremos ver que* $f(A)$ *es c.p.c. Sea* $x, y \in A : f(x), f(y) \in f(A)$. *Sabemos que* A *c.p.c* $\Rightarrow \exists\gamma : [0,1] \to A$ *continua tal que* $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. *Entonces,* $(f \circ \gamma) : [0,1] \to f(A)$ *continua tal que* $(f \circ \gamma)(0) = f(x)$ *y* $(f \circ \gamma)(1) = f(y)$. *Por tanto,* $f(A)$ *es c.p.c.*

Teorema 3.2 (de Weierstrass). *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *continua,* A *compacto* $\Rightarrow \exists a, b \in A : f(a) \leq f(x) \leq f(b), \forall x \in A$. *Donde* a *es mínimo global/absoluto de* f *en* A *y* b *es máximo global/absoluto de* f *en* A.

Demostración. *Suponemos que* f *es continua en* A *y* A *es compacto. Queremos ver que* $\exists a, b \in A$ *tal que* $f(a) \leq f(x) \leq f(b), \forall x \in A$. *Sabemos que* f *es continua en* A *y* A *compacto* $\Rightarrow f(A)$ *compacto* $\Rightarrow f(A)$ *cerrado y acotado. Por ser* $f(A)$ *acotado tenemos que* $\exists \sup f(A), \inf f(A)$ *Y por ser* A *cerrado, tenemos que* $\sup f(A), \inf f(A) \in f(A)$. *Por tanto,* $\exists a, b \in A$ *tal que* $f(a) \leq f(x) \leq f(b), \forall x \in A$.

Teorema 3.3 (de Bolzano). *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *continua y* A *conexo. Si* $\exists a, b \in A : f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in A : f(c) = 0$.

Demostración. *Suponemos que* f *es continua en* A *y* A *es conexo. Sea* $a, b \in A : f(a)f(b) < 0$, *queremos ver que* $\exists c \in A : f(c) = 0$. *Sabemos que* f *continua en* A *y* A *conexo* $\Rightarrow f(A)$ *es conexo,* $f(A)$ *es un intervalo. Entonce, si* $f(a) < 0 < f(b)$ *tenemos que* $I = (f(a), f(b)) \subset f(A)$ *y* $0 \in f(A) \Rightarrow \exists c \in A : f(c) = 0$.

Teorema 3.4 (de Borsuk). *Sea $f : A \subset \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ continua. Entonces, $\exists a \in \mathbb{S}^2 : f(a) = f(-a)$.*

3.3. Continuidad uniforme

Definición 3.5 (Continuidad uniforme de una función en $\mathbb{R}^n$). *$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, f$ es u.c. en A si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x, y \in A, ||x - y|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| < \epsilon$*

Observación. *Que las componenetes de f sean u.c en A es condición necesaria y suficiente para que f sea u.c.*

Observación. *$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, f$ u.c. $\Rightarrow f$ continua.*

Observación. *Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es Lipschitz en A entonces f es u.c. en A.*

Proposición 3.9. *(Continuidad uniforme, caracterización por sucesiones)*
Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ u.c. en $A \iff \forall \{x_k\}, \{y_k\} \subset A : ||x_k - y_k|| \to 0 \Rightarrow ||f(x_k) - f(y_k)|| \to 0$.

Demostración. ($\Rightarrow$) *Suponemos que f es u.c. en A. Sea $\{x_k\}, \{y_k\} \subset A, ||x_k - y_k|| \to 0$, queremos ver que $||f(x_k) - f(y_k)|| \to 0$. Sea $\epsilon > 0, \exists \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N} : ||x_k - y_k|| < \delta, \forall k \geq N \Rightarrow ||f(x_k) - f(y_k)|| \to 0$.*

($\Leftarrow$) *Suponemos que f no es u.c. en A. Entonces, $\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0 : x, y \in A, ||x - y|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| \geq \epsilon$. Sea $\delta = \frac{1}{k}, \exists \{x_k\}, \{y_k\} \subset A : ||x_k - y_k|| < \delta$ y $||f(x_k) - f(y_k)|| \geq \epsilon$. Llegamos a una contradicción, por tanto, f es u.c. en A.*

Proposición 3.10. *(Criterio de no continuidad uniforme)*
Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, son equivalentes:

(I) f no es u.c. en A.

(II) $\exists \{x_k\}, \{y_k\} \subset A : ||x_k - y_k|| \to 0$ pero $||f(x_k) - f(y_k)|| \nrightarrow 0$.

(III) $\exists \epsilon > 0, \exists \{x_k\}, \{y_k\} \subset A : ||x_k - y_k|| \to 0$ pero $||f(x_k) - f(y_k)|| \geq \epsilon, \forall k \in \{1, ..., n\}$.

Teorema 3.5 (de Heine). *Toda función continua en un conjunto compacto es uniformemente continua.*

Observación. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \equiv \forall M > 0, \exists R > 0 : ||x|| > R \Rightarrow ||f(x)|| > M$.*

Observación. *Para justificar la existencia de máximo y mínimo en un conjunto que no es compacto basta ver que $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua y $lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists a \in A : f(a) \leq f(x), \forall x \in A$.*

Capítulo 4

Diferenciabilidad

4.1. Derivadas Parciales

Definición 4.1 (Derivada parcial). *Sea* $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; a \in G,\ a = (a_1, ..., a_n)$. *Llamamos derivadas parciales de* f *en* a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a)}{x_i - a_i}$$

Definición 4.2 (Aplicaciones diferenciables, representación matrcial). *Se dice que* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es diferenciable en* $a \in A$ *si* $\exists T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T_a(h)}{||h||} = 0$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T_a(x-a)}{||x-a||} = 0$$

Proposición 4.1 (Existencia de derivada parciales). *Sea* $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R};\ a \in G$. *Si* f *es diferenciable en* a, *entonces existen las derivadas parciales* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a),\ \forall i \in \{1, ..., n\}$ *y* $T_a(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(h_i),\ h = (h_1, ..., h_n)$.

Observación. f *diferenciable* $\Rightarrow\ Df(a) = T_a$ *está determinada de forma única.*

Definición 4.3 (Vector gradiente). *Sea* $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R};\ a \in G$ *con* f *diferenciable en* a. *Llamamos vector gradiente de* f *en* a *al vector*

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

Corolario 4.0.1. *Sea* $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $a \in G$ *con* $a = (x_0, y_0)$. *Si* $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)$, *entonces* f *es diferenciable en* a $\Leftrightarrow$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h_1, y_0 + h_2) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

Definición 4.4 (Diferenciabilidad en un conjunto)**.** *Sea* $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f$ *es diferenciable en* G *si* f *es diferenciable en* a, $\forall a \in G$.

Definición 4.5. *Sea* $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a = (x_0.y_0)$. *Si* f *es diferenciable en* a, *entonces llamamos plano tangente a la superficie* $z = f(x_0, y_0)$ *que pasa por* (x_o, y_0, z_0)

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - y_0)$$

Definición 4.6. *Sea* $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $a \in G$. f *diferenciable en* a $\Rightarrow$ $\exists T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *lineal, tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - T(h)}{||h||} = 0$$

Proposición 4.2. *Sea* $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $a \in G, f = (f_1, ..., f_m)$ *t.q.* $f_i : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, ..., m\}$.
f *es diferenciable en* a $\Leftrightarrow$ $f_1, ..., f_m$ *son diferenciables en* a. *En este caso* T *es unicamente determinada y* $T = (T_1, ..., T_m)$; $T_i = Df_i$. *Generalmente, denotamos* $t_a = Df(a)$ *y la llamamos aplicación lineal diferenciable de* f *en* a, *donde* $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, Df(a) = (Df_1(a), ..., Df_m(a))$.

Notación. *Diferencial :=*

$$Df(a)(h) = \begin{pmatrix} Df_1(a)(h) \\ \vdots \\ Df_m(a)(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a)(h_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a)(h_i) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{(a)} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Matriz Jacobiana :=

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Donde las filas son el vector gradiente $\nabla f_i(a)$ y las columnas son los vectores $Df(a)(ei)$.

Teorema 4.1. *Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m;\ a \in G$. Si f es diferenciable en $a \Rightarrow \exists r > 0, c > 0 : ||f(x) - f(a)|| \leq C||x - a||, \forall x \in B(a,r) \Rightarrow\ f$ es continua en a.*

Corolario 4.1.1 (Condición necesaria)**.** *f diferenciable en $a \Rightarrow\ f$ continua en a, existen $D_v f(a), \forall v \in \mathbb{R}^n$ y se cumple $Df(a)v = Dvf(a)$.*

Proposición 4.3. *(Propiedades aritméticas de diferenciabilidad)*
Sea $f, g : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m;\ f, g$ diferenciable en $a \in G$

(I) *$f + g,\ \lambda f$ son diferenciables en a,*

$$D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$$

$$D(\lambda f)(a) = \lambda Df(a)$$

En particular,

$$J_{f+g}(a) = J_f(a) + J_g(a)$$
$$J_{\lambda f}(a) = \lambda J_f(a)$$

(II) *Si $m = 1,\ fg$ es diferenciable en a y*

$$D(fg)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a)$$

En particular,

$$\nabla(fg)(a) = g(a)\nabla f(a) + f(a)\nabla g(a)$$

(III) *$m = 1,\ g(x) \neq 0,\ \forall x \in G;\ f/g$ es diferenciable en a y*

$$D(f/g)(a) = (g(a)Df(a) + f(a)Dg(a))(g^2(a))$$

En particular,

$$\nabla(f/g)(a) = (g(a)\nabla f(a) + f(a)\nabla g(a))/(g^2(a))$$

Teorema 4.2 (Condiciones suficientes de diferenciabilidad)**.** *Sea* $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ a \in G,\ f = (f_1, ..., f_m)$. *Si* $\exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \forall i \in \{1, ..., m\},\ \forall j \in \{1, ..., m\}$ *en* $B(a, r)$ *y tal que son continuas en* a. *Entonces,* f *es diferenciable en* a.

Corolario 4.2.1. *Sea* $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ f = (f_1, ..., f_m)$. *si todas las derivadas parciales de* f *son continuas en* G*, entonces* f *es diferenciable en* G.

Definición 4.7. *Sea* $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *S e dice que* f *es de clase 1 en* G *escrito* $f \in \mathbb{C}^1(G)$
si $\exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \forall i \in \{1, ..., m\},\ \forall j \in \{1, ..., m\}$ *en* G *y son continuas.*

Teorema 4.3 (Regla de la cadena)**.** *Sea* $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* $g : H \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *y* $a \in G$. *Si* f *es diferenciable en* a *y* g *es diferenciable en* $f(a)$ *entonces,* $g \circ f$ *es difereniable en* $f(a)$ *y* $D(g \circ f)(a) = D(g(f(a))Df(a)$ *ó* $J_{(g\circ f)}(a) = J_g(f(a))J_f(a)$.

Ejemplo. *(I) Sean* $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$D(g \circ f)(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial (g\circ f)}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial (g\circ f)}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(a)) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial y_m}(f(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

donde

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a)) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

(II) Sean $f : G \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se tiene que*

$$(g \circ f)'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(f(a)) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(f(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_n'(a) \end{pmatrix}$$

es decir,

$$(g \circ f)'(a) = \langle \nabla g(f(a)), f'(a) \rangle$$

4.2. Derivadas direccionales

Definición 4.8 (Vector unitario)**.** *Se llama dirección a un vector* $\frac{w}{||w||}$ *unitario tal que* $w \in \mathbb{R}^{\ltimes}$.

Definición 4.9 (Derivada direccional). *Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in G$ y $v \in \mathbb{R}^{\ltimes}$ dirección. Si existe*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

se llama derivada direccional de f respecto de v.

Observación. *Si $v = (0,..,0,1,0,...,0) = e_j$, la derivada direccional de f respecto a e_j en a es*

$$D_v f(a) = \frac{f(a+te_j)-f(a)}{t} = \frac{f(a_1,...,a_{j-1},a_j+t,a_{j+1},...,a_n)-f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Proposición 4.4. *Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in G$ con f diferenciable en a entonces, $\forall v \in \mathbb{R}^n,\ \exists D_v f(a) : D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v\rangle$*

Demostración. *Sea $a \in G$ abierto entonces, $\exists r > 0 : B(a,r) \subset G$ y $a+tv \in G, \forall t \in (-r,r)$. Sean $g(t) = f(a+tv), \varphi(t) = a+tv$ donde $a+tv = (a_1+tv_1,\cdots,a_n+tv_n)$. Entoces, $\varphi'(t) = (v_1,...,v_n) = v$. Dado que φ es diferenciable en 0 y f es diferenciable en $\varphi(0)$ se tiene que g_v es diferenciable en 0 tal que $g_v'(0) = \langle \nabla f(a), \varphi'(0)\rangle = \langle \nabla f(a), v\rangle = D_v f(a)$.*

Observación. $-D_v f(a) = D_{-v} f(a)$.

Proposición 4.5 (Máximo y mínimo derivada direccional). *Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in G$ con f diferenciable en a entonces,*

$$\max_{||v||=1} D_v f(a) = ||\nabla f(a)||$$

$$\min_{||v||=1} D_v f(a) = -||\nabla f(a)||$$

si $\nabla f(a) \neq 0$, $\max_{||v||=1} D_v f(a)$ se alcanza cuando $v = \frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}$ y $\min_{||v||=1} D_v f(a)$ se alcanza cuando $v = -\frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}$.

Proposición 4.6. *Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en G, si $\exists \gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ diferenciable tal que $f(\gamma(t)) = c \in \mathbb{R}$ entonces, $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$.*

Corolario 4.3.1. *Si $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ entonces, ∇f es ortogonal a las curvas de nivel. Si $f : G \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ entonces, ∇f es ortogonal a las superficies de nivel.*

Observación. *En $\mathbb{R}^2$ la ecuación de la recta r perpendicular a $n = (a,b)$ en el punto (x_0,y_0) es*

$$a(x-x_0)+b(y-y_0) = 0.$$

En $\mathbb{R}^3$ la ecuación de la recta π perpendicular al plano en el punto (x_0,y_0,z_0) es

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0.$$

Definición 4.10 (Recta y plano tangente). *La ecuación de la recta tangente a la curva* $f(x, y) = c$ *en* (x_0, y_0) *es*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

La ecuación del plano tangente a la curva $f(x, y, z) = c$ *en* (x_0, y_0, z_0) *es*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$

Observación. $z = g(x, y) \Leftrightarrow g(x, y) - z = 0; f(x, y, z) = g(x, y) - z$

Teorema 4.4 (del valor medio). *Sea* $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciable,* G *abierto y convexo entonces,*

$$\forall a, b \in G,\ \exists \xi \in (a, b) : f(b) - f(a) = \langle \nabla f(\xi),\, b - a\rangle$$

Demostración. *Sea* $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $\varphi(t) = (1 - t)a + tb$ *y sea* $\gamma(t) = f(\varphi(t))$*. Entonces,*

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= D_1 f(\varphi(t)) D_1\varphi(t) + D_2 f(\varphi(t)) D_2\varphi(t) \\ &= \langle \nabla f(\varphi(t)), b - a\rangle\end{aligned}$$

Donde por el teorema del valor medio se tiene que,

$$\gamma'(t)|1 - 0| = \gamma(1) - \gamma(0) = f(b) - f(a)$$

Por tanto,

$$f(b) - f(a) = \langle \nabla f(\xi),\, b - a\rangle$$

Observación. *Sea* $v = \frac{b-a}{||b-a||}$ *con* $a \neq b$*, tenemos que* $f(b) - f(a) = \langle \nabla f(\xi),\, \frac{b-a}{||b-a||}\rangle ||b - a||$*, entonces*

$$f(b) - f(a) = D_v f(\xi)||b - a||$$

Observación. *Para* $n = 1$*, si* $f(b) = f(a)$ *con* $a < b$ *por el Teorema de Rolle tenemos que,* $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$*, entonces* $\langle \nabla f(\xi),\, b - a\rangle = 0$ *para* $\xi \in (a, b)$ *pero no se tiene* $\nabla f(\xi) = 0$ *necesariamente.*

Corolario 4.4.1. *Sea* $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciable ,* G *abierto y convexo. Si* $\nabla f(x) = 0, \forall x \in G$*, entonces f es constante en G.*

Demostración. *Sean* $a, b \in G$*, por el teorema del valor medio* $f(b) - f(a) = \langle \nabla f(\xi), b - a\rangle$*, como* $\nabla f(x) = 0, \forall x \in G$ *entonces,* $\langle \nabla f(\xi), b - a\rangle = 0$ *y por tanto,* f *es constante.*

Observación. *El corolario también es cierto si* G *es conexo en lugar de convexo.*

Teorema 4.5. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con f derivable y $|f'(x)| \leq M, \forall x \in I$ entonces*

$$|f(b) - f(a)| = |f'(\xi)||b - a| \leq M|b - a|$$

Proposición 4.7. *Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, f = f_1, ..., f_m$ diferenciable y G abierto y convexo. Si*

$$|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)| \leq M,\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,\ \forall x \in G \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ||f(b) - f(a)|| \leq M\sqrt{nm}||b - a||$$

En particular, f es Lipschitz en G.

Demostración. *Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, f = f_1, ..., f_m$ diferenciable y G abierto y convexo. Por el teorema del valor medio se tiene que $f_i : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f_i(b) - f_i(a) = \langle \nabla f_i(\xi_i), b - a\rangle$ para $\xi_i \in (a, b)$. Si $|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)| \leq M$ entonces, $|f_i(b) - f_i(a)| = |\langle \nabla f_i(\xi_i), b - a\rangle| \leq ||\nabla f_i(\xi_i)||||b - a||$ y como $\nabla f_i(\xi_i) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n})$ se tiene que $||\nabla f_i(\xi_i)||^2 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \leq nM^2$ entonces, $|f_i(b) - f_i(a)| = ||\nabla f_i(\xi_i)||||b - a|| \leq \sqrt{n}M||b - a||$. Luego, $||f(b) - f(a)||^2 = \sum_{i=1}^m (f_i(b) - f_i(a))^2 \leq mnM^2||b - a||^2$, por tanto $||f(b) - f(a)|| \leq M\sqrt{nm}||b - a||$.*

4.3. Derivadas de orden superior

Definición 4.11 (Derivada parcial de orden k)**.** *Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Llamamos derivada parcial de orden k a*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}$$

Definición 4.12 (Clase C^k)**.** *Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, G abierto, $f = (f_1, ..., f_m)$. Se dice que f es de clase k en G, denotado $f \in C^k(G) :=$ todas las derivadas de orden k de f_i existen y son continuas en G.*

Observación. *(I) $f \in C^k(G) \Leftrightarrow f_i \in C^k(G), \forall i \in \{1, 2, ...\}$.*

(II) $f \in C^k(G), m \leq k \Rightarrow f \in C^m(G), \forall m \leq k$.

(III) $f \in C^k(G), m \leq k \Rightarrow$ todas las derivadas parciales son $C^{k-m}(G)$.

Teorema 4.6 (de Clairaut-Schwarz)**.** *Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Si $f \in C^2(G)$*

entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},\ \forall i, j \in \{1, 2, ...\}$$

Capítulo 5

Fórmula de Taylor. Extremos relativos

5.1. Fórmula de Taylor

Definición 5.1 (Polinómio de Taylor). *Llamamos polinomio de Taylor de f de orden k en a*

$$P_{a,k,f}(x) = f(a)+\sum_{i=1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i-a_i)+\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)(x_i-a_i)(x_j-a_j)+\cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{k!}\sum_{i_1,..,i_k=1}^{k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k},...\partial x_{i_1}}(a)(x_{i_1}-a_{i_1})\cdots(x_{i_k}-a_{i_k})$$

Teorema 5.1 (de Taylor). *Sea $f: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; f \in C^{k+1}(G); a, x \in G$ con G abierto y conexo. Entonces $\exists \xi \in (a,x) : f(x) = P_{a,k,f}(x) + E(x)$ donde*

$$E_k(x) = \frac{1}{(k+1)!}\sum_{i_1,..,i_{k+1}=1}^{k+1} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_k},...\partial x_{i_1}}(\xi)(x_{i_1}-a_{i_1})\cdots(x_{i_k}-a_{i_k})$$

Demostración.

Consecuencia.

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_k},...\partial x_{i_1}} \leq M_k \in G \Rightarrow |E_k(x)| \leq \frac{M_{k+1}}{(k+1)!}\sum_{i_1,..,i_{k+1}=1}^{k+1} |x_{i_1}-a_{i_1}|\cdots|x_{i_k}-a_{i_k}|$$

$$E_k(x)| \leq \frac{M_{k+1}}{(k+1)!}||x-a||_1^{k+1} \to 0, k \to \infty \Rightarrow f(x) = \lim_{k\to\infty} P_k(x)$$

5.2. Extremos relativos

Definición 5.2 (Extremos locales o relativos). *Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*

(I) *a es máximo local de f si $\exists r > 0 : B(a,r) \subset G$ y $f(x) \leq f(a), \forall x \in B(a,r)$.*

(II) *a es mínimo local de f si $\exists r > 0 : B(a,r) \subset G$ y $f(x) \geq f(a), \forall x \in B(a,r)$.*

(III) *a es extremo local si es máximo o mínimo.*

(IV) *a a es punto crítico de f si $\nabla f(a) = 0$.*

(V) *a es un punto desilla de f si es un punto crítico y no es un extremo local.*

Proposición 5.1. *Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in G, f$ diferenciable en a y a es extremo local de f $\Rightarrow$ a es un punto crítico de f.*

Demostración.

Observación. *Los candidatos a extremos locales se encuentran entre los puntos críticos.*

Definición 5.3 (Matriz hessiana). *Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in \mathring{G}$ se denomina matriz hessiana de f en a, a la matriz de las derivadas parciales de segundo orden*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} f_{x_1,x_1}(a) + ... + f_{x_1,x_n}(a) \\ \vdots \\ f_{x_n,x_1}(a) + ... + f_{x_n,x_n}(a) \end{pmatrix}$$

y se denomina hessiano de f en a al determinante de esta matriz.

Observación. **Nota: Si la función f es de clase C^2 la matriz hessiana es simétrica.*

Definición 5.4. *Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in G, h \in \mathbb{R}^n$ Se considera la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana,*

$$Q_a f(h) = h^t H_f(a) h = (h_1, ..., h_n)\ H_f(a) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Su expresión desarrollada se suele escribir

$$Q_a f(a) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)(h_i)(h_j)$$

Lema 5.1.1. *Sea Q una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$.*

(I) *Q es definida positiva $\Leftrightarrow \exists m > 0 : Q(h) \geq m||h||^2, \forall h \in \mathbb{R}^n$*

(II) *Q es definida negativa $\Leftrightarrow \exists m > 0 : Q(h) \leq -m||h||^2, \forall h \in \mathbb{R}^n$*

Observación. *Se dice Q indefinida si $\exists h, h' \in \mathbb{R}^n$ tal que $Q(h) > 0, Q(h') < 0$.*

Observación. *Toda forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ es continua en $\mathbb{R}^n$ (es un polinomio de grado 2).*

Proposición 5.2 (Criterios formas cuadráticas). *Dada una matriz $A = (a_{ij})$ real, simétrica, se sabe que $\exists\{v_1, ..., v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ respecto de la cual la forma cuadrática $Q_A(h)$ se puede diagonalizar. Sean $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ se diferencian los siguientes casos:*

(I) *Todo autovalor cumple $\lambda_i > 0$ (resp. < 0). Entonces Q_A es definida positiva (resp. negativa), es decir, $Q_A(x) > 0$ (resp. < 0) $\forall x \in \mathbb{R}^n$.*

(II) *Si algunos λ_i son positivos y otros negativos. Entonces Q_A es indefinida, es decir, $\exists x, y \in \mathbb{R}^n : Q_A(x) < 0 < Q_A(y)$.*

(III) *Todo autovalor cumple $\lambda_i \geq 0$ (resp. ≤ 0). Entonces Q_A es semidefinida positiva (resp. negativa), es decir, $Q_A(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0) $\forall x \in \mathbb{R}^n$.*

En álgebra lineal se demuestra el siguiente criterio sobre el signo de los determinantes:

$$A_k = det(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}, (k = 1, 2, ..., n)$$

(I) *Si $A_k > 0$ para $k = 1, ..., n$, entonces Q_A es definida positiva.*

(II) *Si $(-1)^k A_k > 0$ para $k = 1, ..., n$, entonces Q_A es definida negativa.*

Ejemplo (Caso práctico de uso criterios). *La matriz de la forma cuadrática $Q_a(h)$ es la matriz simétrica (matriz hessiana)*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} f_{x_1,x_1}(a) + ... + f_{x_1,x_n}(a) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ f_{x_n,x_1}(a) + ... + f_{x_n,x_n}(a) \end{pmatrix}$$

a la que se le pueden aplicar los criterios anteriores. En el caso $n = 2$, si $\alpha = f_{x_1,x_1}(a), \beta = f_{x_1,x_2}(a) = f_{x_2,x_1}(a), \gamma = f_{x_2,x_2}(a)$ con λ_1, λ_2 autovalores.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Dado que la traza y el determinante son invariantes,

$$\alpha\gamma - \beta^2 = \lambda_1\lambda_2$$

$$\alpha + \gamma = \lambda_1 + \lambda_2$$

(I) *Si $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ entonces por el criterio de Sylvester:*

a) *Si $\alpha > 0$, tenemos que $Q_a(h)$ es definida positiva.*

b) *Si $\alpha < 0$ tenemos que $Q_a(h)$ es definida neagativa.*

(II) *Si $\alpha\gamma - \beta^2 < 0$ entonces $Q_a(h)$ es indefinida.*

(III) *Si $\alpha\gamma - \beta^2 = 0$ ($\Leftrightarrow \alpha\gamma = \beta^2$) tenemos que $\lambda_1 = 0$ ó $\lambda_2 = 0$. Supongamos que $\lambda_2 = 0$ entonces $\alpha + \gamma = \lambda_1$.*

a) *Si $\alpha, \gamma \geq 0$, tenemos que $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 = 0$. Por tanto $Q_a(h)$ es semi definida positiva.*

b) *Si $\alpha, \gamma \geq 0$, tenemos que $\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 = 0$. Por tanto $Q_a(h)$ es semi definida negativa.*

Ejemplo (Aplicación a extremos locales)**.** *Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2(G), a$ punto crítico de f ($\nabla f(a) = 0$). Por el teorema de Taylor tenemos que*

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(X_i - a_i) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\xi)(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

Sea $x = a + h$,

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\xi) h_i h_j$$

Por tanto, para $||h||$ suficientemente pequeño,

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2!} Q_\xi(h)$$

Proposición 5.3. *Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2(G), a \in G$. Si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : ||x - a|| < \delta$ entonces,*

$$|Q_x(h) - Q_a(h)| \leq \epsilon ||h||^2$$

Teorema 5.2. *Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2(G)$. Si $a \in G$ es un punto crítico, es decir, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \forall i \in \{1, ..., n\}$ se tiene:*

(I) *Q_a definida positiva $\Rightarrow a$ es mínimo local de f (Condición suficiente de mínimo local).*

(II) *Q_a definida negativa $\Rightarrow a$ es máximo local de f (Condición suficiente de máximo local).*

(III) *a mínimo local $\Rightarrow Q_a$ semidefinida postiva. (Condición necesaria de mínimo local).*

(IV) *a máximo local $\Rightarrow Q_a$ semidefinida negativa. (Condición necesaria de máximo local).*

(V) *Q_a indefinida $\Rightarrow a$ punto de silla de f.*

Capítulo 6

Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange.

6.1. Extremos condicionados

Definición 6.1 (Extremo condicionado). *Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, G$ abierto, $M \subset G, x = (x_1, ..., x_n) \in M$. Entonces, $a \in M$ es un máximo (resp. mínimo) local condicionado si $\exists r > 0 : B(a,r) \subset G$ tal que $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$), $\forall x \in B(a,r)$.*

Observación. *Un extemo condicionado es un extremo de una función sobre un subconjunto de su dominio, este subconjunto se denomina variedad diferenciable. En la práctica se busca un máximo o mínimo que pertenezca a cierto conjunto.*

Definición 6.2 (Extremos absolutos). *Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in A$.*

(I) *a es un mínimo absoluto de f si $f(a) \leq f(x), \forall x \in A$.*

(II) *a es un máximo absoluto de f si $f(a) \geq f(x), \forall x \in A$.*

(III) *a es un extremo absoluto si a es un mínimo o un máximo absoluto.*

Observación. *Sea $M \subset \mathbb{R}^n$, los extremos absolutos de $f|_M$ (que existen si f rs continua y M es compacto) pueden calcularse considerando por separado la reesticción de f al interior de M y a ∂M.*

Observación. *Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donde con $M \subset G$. Supongamos que f es continua, si M es compacto $\Rightarrow \exists$ máximo y mínimo absoluto en M. Entonces tenemos que $a \in \mathring{M}$ o $a \in \partial M$. Si $a \in \mathring{M}$ y a es extremo absoluto (máximo o mínimo) entonces, a es extremo local y por tanto, a es un punto crítico de f. Si $a \in \partial M$ usamos el método de los multiplicadores de Lagrange.*

6.2. Multiplicadores de Lagrange

Proposición 6.1 (Idea Multiplicador de Lagrange). *Sea* $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^1, A = \{g = 0\}$ *(conjunto de nivel en* 0*). Si* $a \in A$ *es un extremo local condicionado de* $f|_A$ *y* $\nabla g(a) \neq 0$*. Entonces,*

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \ \nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$$

Teorema 6.1 (Multiplicador de Lagrange). *Sean* $g_1, ..., g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *con* $g_1, ..., g_n \in C^1$ *y* $A = \{g_1 = 0, ..., g_m = 0\}$*. Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *la función a maximizar/minimizar, si* $a \in A$ *es un extremo local de* $f|_A$ *y* $\{\nabla g_1(a), ..., \nabla g_m(a)\}$ *linealmente independientes. Entonces,*

$$\exists \lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R} : \nabla f(a) = \lambda_1 \nabla g_1 + ... + \lambda_m \nabla g_m$$

Demostración.

Capítulo 7

Función inversa y Función implícita

7.1. Función inversa

Teorema 7.1 (Función inversa). *Sea $F : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, G$ abierto, $a \in G$. Si*

(I) *F es diferenciable y continua en A.*

(II) *$\det(F'(a)) \neq 0 \quad (\det(J_F(a)) \neq 0)$*

Entonces $\exists U, V : \quad a \in V \subset G, F(a) \in U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $F|_U : U \to V$ es biyectiva con inversa $F^{-1} : V \to U$ que verifica

$$DF^{-1}(F(x)) = (DF(x))^{-1}$$

Si F es de clase $C^k(G)$, entonces F^{-1} es de clase $C^k(V)$.

Demostración.

Observación. *Solo podemos garantizar la existencia de la función inversa en un entorno de a.*

Observación. *El teorema es falso si se asume diferenciabilidad de F en lugar de $F \in C^k$ (es necesaria la continuidad.*

Observación. *Puede ocurrir que F tenga inversa local en a y no ser diferenciable.*

7.2. Función implícita

Teorema 7.2 (Función implícita). *Sea $F : G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, G$ abierto y $(a, b) \in G$ donde se verifica*

(I) *$F(a, b) = 0$*

(II) $F \in C^k(G)$, *diferencible y continua, en un entorno de* (a,b)

(III) $\det(D_{n+i}F_j(a,b))_{i,j=1}^m$, *es decir,* $\det(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)) \neq 0$

Entonces, $\exists U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m, a \in U, b \in V$ *tal que* $U \times V \subset G$ *y* $\forall x \in U, \exists! y = \gamma(x) \in V$ *que verifica* $F(x, \gamma(x)) = 0$ *donde* $\gamma : U \to V$ *es de clase* $C^k(U)$ *(función implícita) y* $\gamma(a) = b$.

Demostración.

Observación. *La importancia de este teorema radica en la posibilidad de calcular la diferencial en un punto* a *de una función sin conocerla explícitamente.*

Observación. *(Cálculo de derivadas y diferenciables en funciones implícitas)*

(I) *(Cálculo de derivadas parciales) Supuestas las condiciones del teorema 7.2, para* $F : G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *de la forma*

$$F_i(x,y) = F_i(x_1, x_2, ..., x_n, y_!, y_2, ..., y_m), i = 1, 2, ..., m$$

se tiene que,

$$F_i(x, y(x)) =$$

$$= F_i(x_1, x_2, ..., x_n, y_1(x_1, x_2, ..., x_n), y_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., y_m(x_1, x_2, ..., x_n))$$

$$i = 1, 2, ..., m$$

Derivando dichas relaciones respecto de x_j *para* $j = 1, 2, ..., n$ *se obtiene*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} + \frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + ... + \frac{\partial F_i}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_j} = 0, i = 1, 2, ...m$$

Sustituyendo en el punto (a,b) se convierte en un sitema de m ecuaciones lineales en las incógnitas $\frac{\partial y_1}{\partial x_j}, ..., \frac{\partial y_m}{\partial x_j}$. *La matriz de coeficientes es* $(\frac{\partial(F_!, ..., F_m)}{\partial(y_1, ..., y_m)}(a,b))$ *que tiene determinante distinto de* 0. *Resolviendo el sitema se obtienen las derivadas parciales respecto de la variable* x_j.

(II) *(Cálculo de diferenciales) La matriz de la aplicación lineal diferencial también se puede obtener calculando formalmente la diferencial de* F *y despejando*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial F_i}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F_i}{\partial y_1}dy_1 ... + \frac{\partial F_i}{\partial y_m}dy_m = 0, i = 1, 2, ...m$$

donde particularizando en el punto (a,b) *obtenemos un sistema de ecuaciones lineales en las variables* $dy_1, ..., dy_m$. *Resolviendo obtendríamos*

$$dy_i = A_{i1}dx_1 + ... + A_{in}dx_n, i = 1, ..., m$$

donde $A_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$.

Observación. *(Casos particulares)*

(I) $(n = m = 1)$ Sea $F : G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable con continuidad en el punto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ verificando que $F(a,b) = 0$, y $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Entonces $\exists I \subset \mathbb{R}, a \in I : \forall x \in I, \exists y = y(x) : F(x, y(x)) = 0$ siendo $y(x)$ derivable. Además,

$$y'(a) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)}.$$

(II) $(n, m = 1)$ Sea $F : G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $F(x_1, ..., x_n, y) = F(x, y)$ es una función que verifica $F(a,b) = 0$, es diferenciable con continuidad en un entorno del punto (a,b) y $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Entonces $\exists y = y(x_1, ..., x_n) = y(x)$ definida en un entorno de a, diferenciable en a con $F(x, y(x)) = 0$. Además,

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}(a) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(a,b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)}.$$

**El caso más importante corresponde a expresiones del tipo $F(x,y,z)$ que representan superficies definidas de forma implícita.*

(III) $(n = 2, m = 1)$

(IV) $(n = 1, m = 2)$