

# Apuntes Probabilidad

Hugo Del Castillo Mola

10 de febrero de 2023

# Índice general

<b>1. Espacio de Probabilidad</b>	<b>5</b>
1.1. Experimentos aleatorios . . . . .	5
1.2. Espacio Muestral . . . . .	5
1.2.1. Tipos de Espacios Muestrales . . . . .	6
1.3. Sucesos . . . . .	6
1.4. Sucesiones de Conjuntos . . . . .	6
1.5. Límites de una sucesión de conjuntos . . . . .	6
1.5.1. Sucesión de conjuntos convergente . . . . .	8
1.5.2. Sucesiones Monótonas . . . . .	8
1.6. Estructuras con Subconjuntos . . . . .	9
1.6.1. Álgebra . . . . .	9
1.7. Espacio Medibles . . . . .	9
1.8. Probabilidad . . . . .	10
1.9. Espacio de Probabilidad . . . . .	12
1.10. Continuidad Secuencial de la Probabilidad . . . . .	12
1.11. Probabilidad Condicionada . . . . .	14
1.11.1. Teorema del producto . . . . .	14
1.11.2. Teorema de Probabilidad Total . . . . .	14
1.12. Independencia de Sucesos . . . . .	15
<b>2. Modelo Uniforme</b>	<b>17</b>
2.1. Regla de Laplace . . . . .	17
2.2. Población y Muestra . . . . .	18
2.3. Muestras Ordenadas . . . . .	18
2.4. Subpoblaciones . . . . .	19
2.5. Particiones . . . . .	20
2.6. Variaciones, Combinaciones y Permutaciones . . . . .	20
2.6.1. Variaciones de $N$ elementos tomados de $n$ en $n$ . . . . .	20
2.6.2. Variaciones de $N$ elementos tomados de $n$ en $n$ . . . . .	21
2.6.3. Permutaciones de $N$ elementos . . . . .	21
2.6.4. Permutaciones con repetición . . . . .	21

2.6.5.	Combinaciones de $N$ elementos tomados de $n$ en $n$ . . . .	21
2.6.6.	Combinaciones con repetición de $N$ elementos tomados de $n$ en $n$ . . . . .	22
<b>3.</b>	<b>Probabilidad sobre la recta real</b>	<b>23</b>
3.1.	Probabilidad Sobre La Recta Real . . . . .	23
3.1.1.	Función de distribución en $\mathbb{R}$ . . . . .	23
3.2.	Probabilidad sobre $\mathbb{R}^n$ . . . . .	23
<b>4.</b>	<b>Variable Aleatoria Unidimensional</b>	<b>25</b>
4.1.	Variable Aleatoria Real . . . . .	25
4.2.	Función Indicador . . . . .	25
4.3.	Ley de Probabilidad de Una Variable Aleatoria . . . . .	25
4.4.	Función de Masa . . . . .	26
4.5.	Variable Aleatoria Discreta . . . . .	26
4.6.	Función de Densidad sobre $\mathbb{R}$ . . . . .	27
4.7.	Variable Aleatoria Continua . . . . .	27
4.8.	Transformaciones Medibles . . . . .	28
4.8.1.	Caso discreto . . . . .	28
4.8.2.	Caso Continuo . . . . .	28
<b>5.</b>	<b>Esperanza Matemática</b>	<b>30</b>
5.1.	Esperanza de una Variable Aleatoria Simple . . . . .	30
5.2.	Esperanza De Una Variable Aleatoria No Negativa . . . . .	31
5.3.	Esperanza De Una Variable Aleatoria Real . . . . .	32
5.4.	Teorema De Caracterización De La Esperanza . . . . .	33
5.4.1.	Esperanza De Una Variable Aleatoria Elemental . . . . .	33
5.4.2.	Esperanza De Una Variable Aleatoria Discreta . . . . .	33
5.4.3.	Esperanza De Una Variable Aleatoria Continua . . . . .	34
5.5.	Momentos . . . . .	34
5.5.1.	Momentos respecto al origen . . . . .	34
5.5.2.	Momentos respecto a la media . . . . .	34
5.5.3.	Momentos Absolutos respecto al origen . . . . .	35
5.6.	Teorema de Markov . . . . .	35
5.7.	Acotación de Tchebychev . . . . .	36
<b>6.</b>	<b>Función Característica</b>	<b>38</b>
6.1.	Función generatriz . . . . .	38
6.2.	Función Generatriz de Momentos . . . . .	39
6.2.1.	Función Generatriz de Momentos Discreta . . . . .	39
6.2.2.	Función Generatriz de Momentos Continua . . . . .	39

6.2.3. Propiedades Función Generatriz De Momentos . . . . .	39
6.3. Función Característica . . . . .	40
6.3.1. Propiedades Función Característica . . . . .	40
6.4. Problema de los Momentos . . . . .	40
6.5. Teorema de Inversión . . . . .	41
<b>7. Distribuciones Unidimensionales</b>	<b>42</b>
7.1. Distribución Degenerada . . . . .	42
7.2. Distribución Uniforme Discreta . . . . .	43
7.3. Distribución de Bernoulli . . . . .	44
7.4. Distribución Binomial . . . . .	45
7.5. Distribución de Poisson . . . . .	46
7.6. Distribución Hipergeométrica . . . . .	47
7.7. Distribución Geométrica . . . . .	48
7.8. Distribución Binomial Negativa . . . . .	49
7.9. Distribución Uniforme . . . . .	50
7.10. Distribución Normal . . . . .	51
7.11. Distribución Gamma . . . . .	52
7.12. Distribución Exponencial . . . . .	54
<b>8. Vectores Aleatorios</b>	<b>56</b>
8.1. Función Distribución en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	56
8.2. Ley de Probabilidad de un Vector Aleatorio . . . . .	57
8.3. Función de Distribución Inducida por Variable Aleatoria Unidi- mensional . . . . .	57
8.4. Función de Masa en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	57
8.5. Variable Aleatoria Bidimensional Discreta . . . . .	58
8.6. Función De Densidad en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	59
8.7. Variable Aleatoria Bidimensional Continua . . . . .	60
8.8. Distribuciones Marginales . . . . .	60
8.9. Distribuciones Condicionadas . . . . .	61
8.10. Independencia . . . . .	62
8.11. Transformaciones . . . . .	63
8.11.1. Suma Variables Aleatorias . . . . .	64
8.11.2. Producto Variables Aleatorias . . . . .	64
8.11.3. Cociente Variables Aleatorias . . . . .	65
8.12. Esperanza . . . . .	66
8.13. Momentos . . . . .	66
8.14. Propiedades Esperanza . . . . .	67
8.15. Propiedades Varianza . . . . .	67
8.16. Función Característica . . . . .	68

8.17. Coeficiente Correlación . . . . .	68
8.18. Regresión . . . . .	68

# Capítulo 1

## Espacio de Probabilidad

### 1.1. Experimentos aleatorios

**Definición 1.1** (Experimento Determinista). *Experimento cuyo desarrollo es previsible con certidumbre y sus resultados están perfectamente determinados una vez fijadas las condiciones del mismo.*

**Ejemplo.** *Averiguar el espacio recorrido por un cuerpo en caída libre en el vacío al cabo de cierto tiempo  $t$ , donde se sabe que  $x = \frac{1}{2}gt^2$  con  $g$  la gravedad de la Tierra.*

**Definición 1.2** (Experimento Aleatorio). *Experimento en contexto de incertidumbre. Se caracterizan porque su desarrollo no es previsible con certidumbre.*

**Ejemplo.** *Lanzar un dado.*

### 1.2. Espacio Muestral

**Definición 1.3** (Espacio Muestral). *Dado un experimento aleatorio,  $\Omega$  es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento. Decimos que  $\Omega$  es el espacio muestral del experimento y los elementos de  $\Omega$  se llaman sucesos elementales.*

**Ejemplo.** *Dado el experimento "Lanzar un dado y obtener un 6", el espacio muestral es  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Si consideramos "Lanzar un dado y obtener un número par", el espacio muestral sería  $\Omega = \{ \text{par}, \text{impar} \}$ .*

### 1.2.1. Tipos de Espacios Muestrales

**Definición 1.4** (Espacio Muestral Finito). Sea  $\Omega$  un espacio muestral. Entonces, decimos que  $\Omega$  es finito si tiene un número finito de elementos.

**Ejemplo.** Lanzar un dado.

**Definición 1.5** (Espacio Muestral Infinito Numerable). Sea  $\Omega$  un espacio muestral. Entonces, decimos que  $\Omega$  es infinito numerable si tiene un número infinito y numerable de elementos.

**Ejemplo.** Lanzar una moneda hasta obtener cara por primera vez. Aquí debemos considerar que se puede dar el caso en el que no se obtenga nunca cara y tiremos la moneda infinitas veces.

**Definición 1.6** (Espacio Muestral Continuo). Sea  $\Omega$  un espacio muestral. Entonces, decimos que  $\Omega$  es continuo si no hay discontinuidades o cambios abruptos entre los elementos del espacio muestral.

**Ejemplo.** El nivel del agua de un pantano entre los tiempos  $t_1, t_2$ . El espacio muestral  $\Omega = \{f_t : t \in [t_1, t_2]\}$ .

### 1.3. Sucesos

**Nota.** Sea  $A \subset \Omega$ . Decimos que se ha presentado el suceso  $A \subset \mathcal{A}$  si el resultado del experimento ha sido  $w \in A$ , un suceso elemental contenido en  $\mathcal{A}$ .

### 1.4. Sucesiones de Conjuntos

**Definición 1.7** (Sucesión de Conjuntos). Sea  $\Omega$  espacio muestral,  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$  una aplicación. Decimos que  $f$  es una sucesión de conjuntos y la representamos  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ .

### 1.5. Límites de una sucesión de conjuntos

**Definición 1.8** (Límite Inferior). Sea  $\Omega$  espacio muestral,  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  sucesión de conjuntos. Entonces, el límite inferior de  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es el conjunto de puntos de  $\Omega$  cuyos elementos pertenecen a todos los  $A_n$  excepto a lo

sumo a un número finito de ellos.  $\liminf A_n$ .

**Definición 1.9** (Límite Superior). Sea  $\Omega$  espacio muestral,  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  sucesión de conjuntos. Entonces, el límite superior de  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es el conjunto de puntos de  $\Omega$  cuyos elementos pertenecen a infinitos  $A_n$ . Y se denota  $\limsup A_n$ .

**Observación.**  $A \in \{A_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow A \in \limsup A_n$  pero  $A \notin \liminf A_n$

**Proposición 1.1.** Sea  $\Omega$  espacio muestral,  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  una sucesión de conjuntos. Entonces,

$$(I) \liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n,$$

$$(II) \limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n.$$

**Demostración.**

(I)  $(\Rightarrow)$  Sea  $w \in \liminf A_n$ . Entonces,  $\exists k \in \mathbb{N} : w \in A_n, \forall n \geq k$ . Por tanto,

$$w \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

$(\Leftarrow)$  Sea  $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$ . Entonces,  $\exists k \in \mathbb{N} : w \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in A_k \cap A_{k+1} \cap \dots \Rightarrow w$  pertenece a infinitos  $A_n$  salvo a lo sumo a un número finito de ellos.

(II)  $(\Rightarrow)$  Sea  $w \in \limsup A_n$ . Entonces,  $w \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow w \in \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n.$$

$(\Leftarrow)$  Sea  $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$ . Entonces,  $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in A_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow w \in \limsup A_n$ .

**Proposición 1.2.**  $\forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow \liminf A_n \subset \limsup A_n$ .



**Demostración.** Sea  $w \in \liminf A_n$ . Entonces,  $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : w \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in A_n, \forall n \geq k \Rightarrow w \in \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in \limsup A_n$ .

### 1.5.1. Sucesión de conjuntos convergente

**Definición 1.10** (Covergencia). Sea  $\Omega$  un espacio muestral,  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  una sucesión. Entonces, decimos que  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente si y solo si  $\liminf A_n = \limsup A_n$ .

### 1.5.2. Sucesiones Monótonas

**Definición 1.11** (Sucesión Monótona). Sea  $\Omega$  un espacio muestral,  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  una sucesión. Entonces, decimos que  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es monótona creciente si y solo si  $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$ . Y decimos que  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es monótona decreciente si y solo si  $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$ .

**Notación.**

- (I)  $\uparrow A_n$  sucesión monótona creciente,
- (II)  $\downarrow A_n$  sucesión monótona decreciente.

**Proposición 1.3.** Sea  $\Omega$  un espacio muestral,  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  una sucesión monótona. Entonces,  $\liminf A_n = \limsup A_n$ .

**Demostración.**

(I) Sea  $\downarrow A_n$ . Entonces,  $A_{n+1} \subset A_n \Rightarrow$

$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

y

$$\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Por tanto,  $\liminf A_n = \limsup A_n$ .

(II) Sea  $\uparrow A_n$ . Entonces,  $A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow$

$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

y

$$\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Por tanto,  $\liminf A_n = \limsup A_n$ .

## 1.6. Estructuras con Subconjuntos

### 1.6.1. Álgebra

**Definición 1.12** (Álgebra). Dado el espacio total  $\Omega$ , una clase  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  tiene estructura de álgebra si y solo si

- (I)  $\Omega, \emptyset \in \mathcal{Q}$ ,
- (II)  $\forall A \in \mathcal{Q}, A^c \in \mathcal{Q}$
- (III)  $\forall A, A' \in \mathcal{Q}, A \cap A' \in \mathcal{Q}$ ,

**Definición 1.13** ( $\sigma$ -Álgebra). Dado el espacio total  $\Omega$ , una clase  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  tiene estructura de  $\sigma$ -álgebra si y solo si

- (I)  $\Omega, \emptyset \in \mathcal{Q}$ ,
- (II)  $\forall A \in \mathcal{Q}, A^c \in \mathcal{Q}$
- (III)  $\forall \{A_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{Q}, \bigcap_{j \in J} A_j \in \mathcal{Q}$

## 1.7. Espacio Medibles

**Definición 1.14** (Espacio Medible). Sea  $\Omega$  espacio muestral y  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$   $\sigma$ -álgebra. Entonces, al par  $(\Omega, \mathcal{A})$  lo llamamos espacio medible. Los elementos de  $\mathcal{A}$  se llaman conjuntos medibles.

## 1.8. Probabilidad

**Definición 1.15** (Medida de Probabilidad). Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible,  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  aplicación. Entonces, se dice que  $P$  es una medida de probabilidad si cumple

- (I)  $\forall A \in \mathcal{A}, P(A) \geq 0$ ,
- (II)  $P(\Omega) = 1$ ,
- (III)  $\forall \{A_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{A} : A_i \cap A_j = \emptyset, \forall j \neq i \Rightarrow$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

**Proposición 1.4** (Propiedades Medida Probabilidad).

- (I)  $P(\emptyset) = 0$ ,
- (II) (Aditividad finita)  $\forall \{A_j\}_{j \in J}$  familia finita con elementos disjuntos dos a dos, entonces

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k),$$

- (III)  $\forall A \in \mathcal{A}, P(A^c) = 1 - P(A)$ ,
- (IV)  $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \subset B, P(A) \leq P(B)$ ,
- (V)  $\forall A \in \mathcal{A}, P(A) \leq 1$ ,
- (VI)  $\forall A, B \in \mathcal{A}, P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
- (VII)  $\forall \{A_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{A}$ ,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j) - \sum_{j_1, j_2=1, j_1 < j_2} P(A_{j_1} \cap A_{j_2}) + \cdots + (-1)^{j+1} P\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right)$$

- (VIII)  $\forall A, B \in \mathcal{A}, P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ ,

(IX)  $\forall \{A_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{A}$  finita

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{j=1}^n P(A_j)$$

(X)  $\forall \{A_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{A}$

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

(XI)  $\forall \{A_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{A}$ ,

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) \geq 1 - \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j^c)$$

**Demostración.** (I) Consideramos la sucesión  $\{A, \emptyset, \emptyset, \dots\}$  con  $A \in \mathcal{A}$ .  
Entonces,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A = A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots = A$ . Por tanto,

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

$$\Rightarrow P(A) + \sum_{n=2}^{\infty} P(A_n) = P(A)$$

entonces,  $P(\emptyset) = 0$ .

(II) Se toma la sucesión  $\{A_1, \dots, A_n, \emptyset, \dots\}$  donde  $A_j \in \mathcal{A}, \forall j \in J$  disjuntos dos a dos. Como  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=1}^n A_j$ , entonces

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j)$$

(III)  $P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1 \Leftrightarrow P(A) + P(A^c) = 1 \Leftrightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$ .

(IV) Podemos escribir  $B = A \cup (B \setminus A)$ . Entonces,

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$$

donde  $P(B \setminus A) > 0$ ,

$$\Rightarrow P(B) \geq P(A)$$

(V) Sea  $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ , entonces  $A \subset \Omega$ . Por tanto,  $P(A) \geq P(\Omega) = 1$ .

(VI)

(VII)

(VIII)

(IX)

(X)

(XI)

(XII)

## 1.9. Espacio de Probabilidad

**Definición 1.16** (Espacio de Probabilidad). Sea  $\Omega$  espacio muestra,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$   $\sigma$ -álgebra,  $P$  medida de probabilidad. Entonces, a la terna  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  se le llama espacio de probabilidad. Los elementos de  $\mathcal{A}$  se llaman sucesos.

## 1.10. Continuidad Secuencial de la Probabilidad

**Teorema 1.1.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad,  $\{A_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{A}$ ,  $\uparrow A_j$ . Entonces,

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

**Demostración.**  $A_n \uparrow \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Sea  $A$  tal que

$$A = A_1 \cup \left[ \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_{j+1} - A_j) \right]$$

entonces,  $A$  es unión de conjuntos disjuntos. Aplicado la aditividad finita tenemos que

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) + \sum_{j=1}^{\infty} (P(A_{j+1}) - P(A_j)) \\ &= P(A_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (P(A_{j+1}) - P(A_j)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) + P(A_3) - P(A_2) + \cdots + P(A_{n+1}) - P(A_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n). \end{aligned}$$

**Teorema 1.2.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad,  $\{A_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{A}, \downarrow A_j$ . Entonces,

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

**Demostración.**  $A_n \downarrow \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$  y  $A_n^c \uparrow \Rightarrow$  (por la proposición anterior)

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^c) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n^c)$$

donde  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^c = A^c$ .

Ahora,

$$\begin{aligned} P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) &= P(A) = 1 - P(A^c) \\ &= 1 - P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^c) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n^c) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \{1 - P(A_n)\} \end{aligned}$$

$$= 1 - 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

## 1.11. Probabilidad Condicionada

**Definición 1.17** (Probabilidad Condicionada). Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad y se  $A \in \mathcal{A}$  un suceso tal que  $P(A) > 0$ . Entonces, decimos que

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) > 0$$

es la probabilidad de  $B$  condicionada por  $A$ .

### 1.11.1. Teorema del producto

**Teorema 1.3** (Regla multiplicación). Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad,  $A, B \in \mathcal{A} : P(A), P(B) > 0$ . Entonces,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \text{ y}$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

### 1.11.2. Teorema de Probabilidad Total

**Teorema 1.4** (Probabilidad Total). Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  espacio de probabilidad,  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} : A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$ . Entonces, para  $B \in \mathcal{A}$

$$P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j) \cdot P(A_j)$$

donde  $P(A_j) > 0, \forall j \in \{1, 2, \dots\}$

**Demostración.**

$$P(B) = P(B \cap \Omega)$$

$$= P\left(B \cap \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right]\right)$$

$$\begin{aligned}
&= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (B \cap A_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_i) \\
&= P(B|A_i) \cdot P(A_i), \quad \forall i \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

**Teorema 1.5** (de Bayes). Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  espacio de probabilidad,  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  tal que  $P(A_i) > 0, \forall i \in \mathbb{N}, B \in \mathcal{A} : P(B) > 0$ . Entonces,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i)}, i \in \mathbb{N}.$$

**Demostración.**

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

usando la independencia de sucesos y el teorema de la probabilidad total tenemos que

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}, i \in \mathbb{N}.$$

## 1.12. Independencia de Sucesos

**Definición 1.18.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad,  $A, B \in \mathcal{A}$  con  $P(B) > 0$ . Entonces,  $A$  y  $B$  se dicen independientes si y solo si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

**Proposición 1.5.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad,  $A, B \in \mathcal{A}$  tal que  $A$  y  $B$  son sucesos independientes. Entonces,

$$P(A|B) = P(A) \text{ si } P(B) > 0 \text{ y}$$

$$P(B|A) = P(B) \text{ si } P(A) > 0.$$



**Proposición 1.6.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad,  $A, B \in \mathcal{A}$  tal que  $A$  y  $B$  son sucesos independientes. Entonces, también lo son  $A^c$  y  $B^c$ ,  $A$  y  $B^c$ ,  $A^c$  y  $B$ .

## Capítulo 2

# Modelo Uniforme

### 2.1. Regla de Laplace

**Proposición 2.1** (Regla de Laplace). Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  espacio de probabilidad tal que el conjunto de sucesos elementales es finito, los sucesos elementales son incompatibles dos a dos y equiprobables. Entonces, si  $A \in \mathcal{A}$

$$P(A) = \frac{\text{número de sucesos elementales a favor de } A}{\text{número de sucesos elementales de } \Omega}$$

a este resultado lo llamamos Regla de Laplace

**Demostración.** Sea  $a_1, a_2, \dots, a_n$  el conjunto de sucesos elementales asociados, entonces

$$\Omega = a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n,$$

por ser incompatibles dos a dos

$$P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_n) = 1$$

y por ser equiprobables, es decir,  $P(a_i) = \frac{1}{n}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ . Si  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $A = \bigcup_{j \in J} a_j$  donde  $J = \{1, \dots, k\}, k \leq n$ , entonces

$$P(A) = P(a_1) + \dots + P(a_k) = \frac{k}{n}$$

Así, hemos obtenido la Regla de Laplace.

## 2.2. Población y Muestra

**Nota.** Dentro del muestreo aleatorio se distingue que la selección sea sin remplazamiento o con remplazamiento.

**Definición 2.1** (Selección sin Remplazamiento). Se seleccionan  $n$  elementos de la población, mediante  $n$  extracciones sucesivas sin remplazamiento, asignando en cada una de ellas probabilidades iguales a los elementos no seleccionados en las anteriores. En, este caso,  $n$  es menor o igual que el tamaño de la población.

**Definición 2.2** (Selección con Remplazamiento). Se seleccionan  $n$  elementos de la población, mediante  $n$  extracciones sucesivas con reemplazamiento, asignando en cada una de ellas probabilidades iguales a todos los elementos de la población.

**Nota.** Distinguimos muestras ordenadas y sin ordenar.

## 2.3. Muestras Ordenadas

**Notación.**  $(N)_n = N \cdot (N - 1) \cdot \dots \cdot (N - n + 1), \forall n \leq N$ .

**Proposición 2.2.** Sea  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  y  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ . Entonces, es posible formar  $n \cdot m$  pares tales que  $(a_i, b_i)$  donde  $a_i \in A, b_i \in B$

**Observación.** El par  $(a_i, b_j)$  y el par  $(b_j, a_i)$  son iguales.

**Proposición 2.3.** Sea  $A_1, A_2, \dots, A_k$  con  $n_1, n_2, \dots, n_k$  elementos. Entonces el número de ordenaciones de la forma  $(x_1, x_2, \dots, x_k) : x_i \in A_i, i \in \{1, \dots, k\}$  es  $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ .

**Corolario 2.0.1.**  $k$  selecciones sucesivas con exactamente  $n_i$  opciones posibles en el  $i$ -ésimo paso, producen  $n_1 \cdot \dots \cdot n_k$  resultados diferentes posibles.

**Teorema 2.1.** De una población de  $N$  elementos se pueden seleccionar  $N^n$  muestras diferentes con remplazamiento de tamaño  $n$  y  $(N)_n$  muestras diferentes sin remplazamiento de tamaño  $n$ .

**Teorema 2.2.** El número de ordenaciones diferentes de  $N$  elementos es

$$N! = N \cdot (N - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

**Teorema 2.3.** Si se realiza un muestreo aleatorio con remplazamiento de tamaño  $n$  de una población con  $N$  elementos, la probabilidad de que en la muestra no aparezca ningún elemento dos veces es

$$p = \frac{(N)_n}{N^n} = \frac{N \cdot (N - 1) \cdot \dots \cdot (N - n + 1)}{N^n}$$

## 2.4. Subpoblaciones

**Definición 2.3** (Subpoblación). Una Subpoblación de tamaño  $n$  es una muestra de tamaño  $n$  extraída de una población de tamaño  $N$ , cuyos elementos extraídos no han considerado ningún orden.

**Notación.**

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n! \cdot (N - n)!}$$

**Teorema 2.4.** De una población de  $N$  elementos se pueden seleccionar  $\binom{N}{n}$  subpoblaciones diferentes de tamaño  $n \leq N$ .

**Demostración.** El número de subpoblaciones posibles de tamaño  $n$  de una población  $N$  es el número de ordenaciones distintas de  $n$  elementos que es  $n!$ . Además, de una población de  $N$  elementos se pueden seleccionar  $(N)_n$  muestras diferentes sin remplazamiento de tamaño  $n$ . Entonces,

$$A = \frac{(N)_n}{n!}$$

**Ejemplo.** Un equipo está compuesto por 7 miembros y un club cuenta con 20 miembros, se podrán formar  $\binom{20}{7}$  equipos diferentes.

**Teorema 2.5.** De una población de  $N$  elementos se pueden seleccionar  $\binom{N+n-1}{n}$  subpoblaciones diferentes de tamaño  $n$ , mediante un muestreo con remplazamiento.

## 2.5. Particiones

**Definición 2.4** (Partición). Una partición de tamaño  $r$  de una población de tamaño  $N$  es una división de la población en  $r$  grupos ordenados de elementos desordenados donde el grupo  $i$  contine  $n_i$  elementos  $\forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$  y

$$n_1 + n_2 + \dots + n_r = N$$

**Teorema 2.6.** El número de particiones diferentes de tamaño  $r$  en las cuales se puede dividir una población de  $N$  elementos es

$$\frac{N!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

siendo  $n_i$  el tamaño del grupo  $i$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$ .

**Ejemplo.** Se lanza un dado en 10 ocasiones. El número total de formas en las cuales se pueden obtener 3 unos, ningún dos, 2 treses, ningún cuatro, 3 cincos y 2 seises es

$$\frac{10!}{3! \cdot 0! \cdot 2! \cdot 0! \cdot 3! \cdot 2!}$$

## 2.6. Variaciones, Combinaciones y Permutaciones

### 2.6.1. Variaciones de $N$ elementos tomados de $n$ en $n$

**Definición 2.5** (Variaciones sin repetición). Las variaciones de  $N$  elementos tomados de  $n$  en  $n$  son los diferentes grupos que se pueden formar a partir de  $N$  elementos, tomados de  $n$  en  $n$ . Cada dos grupos difieren entre sí por

algún elemento o por el orden.

$$V_{N,n} = (N)_n = N \cdot (N - 1) \cdot (N - n + 1)$$

**Observación.** Es lo mismo que el número de muestras diferentes de tamaño  $n$  seleccionadas mediante un muestreo sin remplazamiento de una población de tamaño  $N$ .

### 2.6.2. Variaciones de $N$ elementos tomados de $n$ en $n$

**Definición 2.6** (Variaciones con repetición). Las variaciones repetición de  $N$  elementos tomados de  $n$  en  $n$  son los diferentes grupos que se pueden formar a partir de  $N$  elementos, tomados de  $n$  en  $n$ , en los que pueden aparecer elementos repetidos y dos grupos son distintos entre sí, tiene distintos elementos o están situados en distintos lugares.

$$RV_{M,n}^N = N^n$$

### 2.6.3. Permutaciones de $N$ elementos

**Definición 2.7** (Permutación). Las Permutaciones de  $N$  elementos diferentes son los distintos grupos que pueden formarse entrando en cada uno de los  $N$  elementos dados, difiriendo únicamente en el orden de sucesión de sus elementos.

$$P_N = N! = N \cdot (N - 1) \cdots 2 \cdot 1$$

### 2.6.4. Permutaciones con repetición

**Definición 2.8** (Permutaciones con repetición). Las permutaciones con repetición de  $r$  elementos distintos tales que el elemento  $i$  aparece  $n_i$  veces  $\forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$  con  $\sum_{i=1}^r n_i = N$  es

$$\frac{N!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_r!}$$

### 2.6.5. Combinaciones de $N$ elementos tomados de $n$ en $n$

**Definición 2.9** (Combinaciones sin repetición). *Son los diferentes grupos que se pueden formar con  $n$  elementos en cada uno, donde por lo menos cada uno tiene un elemento distinto. No se tiene en cuenta el orden en la disposición.*

$$C_{N,n} = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n! \cdot (N - n)!}$$

### 2.6.6. Combinaciones con repetición de $N$ elementos tomados de $n$ en $n$

**Definición 2.10** (Combinaciones con repetición). *Son las distintas disposiciones que se pueden formar tomando  $n$  elementos de los  $N$ , entre los cuales pueden aparecer elementos repetidos, y dos disposiciones serán distintas entre sí, si tienen distintos elementos. No se tiene en cuenta el orden en la disposición.*

$$RC_{N,n} = \binom{N + n - 1}{n} = \binom{N + n - 1}{N - 1} = \frac{((N + n - 1))!}{(N - 1)!n!}$$

# Capítulo 3

## Probabilida sobre la recta real

### 3.1. Probabilidad Sobre La Recta Real

**Notación.** Consideramos  $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), P)$  espacio de probabilidad.

#### 3.1.1. Función de distribución en $\mathbb{R}$

**Definición 3.1** (Función de distribución). Sea  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- (I)  $F$  es monótona no decreciente, es decir,  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$ .
- (II)  $F$  es continua por la derecha,  $\lim_{h \rightarrow 0} F(x + h) = F(x)$
- (III)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ,
- (IV)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ .

**Teorema 3.1.** La función  $F(x) = P\{(-\infty, x]\}$  es función de distribución en  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 3.2.** Sea  $F$  función de distribución en  $\mathbb{R}$ . Entonces,  $F$  induce en  $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ , espacio probabilizable, una probabilidad  $P$  cuya función de distribución es  $F$ .

### 3.2. Probabilidad sobre $\mathbb{R}^n$



**Definición 3.2** (Función de Distribución). *Una función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es de distribución en  $\mathbb{R}^n$  si y solo si*

$$(I) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n : a \leq b \Rightarrow F((a, b]) \geq 0.$$

(II)  *$F$  continua por la derecha en cada variable, es decir, si  $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \downarrow : \{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow x$  con  $x^k \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{N}$ , entonces*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(x^k) = F(x)$$

(III)  $\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, \dots, x_n) = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$  y  $F(+\infty, \dots, +\infty) = \lim_{x_1, \dots, x_n \rightarrow +\infty} F(x_1, \dots, x_n) = 1$ .

# Capítulo 4

## Variable Aleatoria Unidimensional

### 4.1. Variable Aleatoria Real

**Definición 4.1** (Variable aleatoria). Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad y sea  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  un espacio probabilizable. Una aplicación  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una variable aleatoria  $\Leftrightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}$ .

**Proposición 4.1.**  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es v.a si  $X^{-1}(-\infty, a] \in \mathcal{A}, \forall a \in \mathbb{R}$ .

### 4.2. Función Indicador

**Definición 4.2** (Función Indicador). Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio probabilizable.  $\forall A \in \mathcal{A}$

$$I_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \in A \\ 0 & \text{si } w \notin A \end{cases}$$

es la función indicador.

**Observación.** La función indicador es variable aleatoria.

**Observación.**  $I_{A \cap B} = I_A \cdot I_B$ ,  $I_A + I_{A^c} = 1$  y  $I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_{A \cap B}$ .

### 4.3. Ley de Probabilidad de Una Variable Aleatoria

**Proposición 4.2.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad,  $X$  una variable aleatoria real con  $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ . Entonces,  $X$  induce una medida de probabilidad  $P_X$  sobre  $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$  tal que  $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, P_X)$  es un espacio de probabilidad, donde  $P_X$  viene definida por

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(A), \forall B \in \mathbb{B}, \quad \text{donde } X(A) = B.$$

## 4.4. Función de Masa

**Definición 4.3.** Sea  $X$  una v.a. sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  espacio de probabilidad y  $P_X$  la probabilidad inducida por  $X$  sobre  $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ . Llamamos función de masa de  $X$  a la aplicación

$$p_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

definida por

$$\forall x \in \mathbb{R}, p_X(x) = P_X\{x\} = P\{X^{-1}(x)\} = P\{w \in \Omega : X(w) = x\}.$$

**Proposición 4.3.** Sea  $X$  v.a. con función de masa  $p_X$  y sea  $D_X = \{x \in \mathbb{R} : p_X(x) > 0\}$ . Entonces,  $D_X$  es numerable.

## 4.5. Variable Aleatoria Discreta

**Definición 4.4** (Variable Aleatoria Discreta). Sea  $X$  v.a. sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  con función de masa  $p_x$  y

$$D_X = \{x \in \mathbb{R} : p_X(x) > 0\}.$$

Si  $D_X \neq \emptyset$  y  $\sum_{x \in D_X} p_X(x) = 1$ , entonces la variable aleatoria  $X$  se dice que es discreta y  $D_X$  se le llama soporte de  $X$ .

**Proposición 4.4.** Dado  $D \subset \mathbb{R}$  numerable y  $p : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  tal que

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin D \\ > 0 & \text{si } x \in D \end{cases}$$

con  $\sum_{x \in D} p(x) = 1$ . Entonces, se determina una ley de probabilidad  $P_X$  sobre

$X$  tal que

$$P_X(B) = \begin{cases} \sum_{x \in B \cap D} p(x), & \forall B \in \mathbb{R} \setminus (B \cap D) \neq \emptyset \\ 0, & \text{si } B \cap D = \emptyset \end{cases}$$

## 4.6. Función de Densidad sobre $\mathbb{R}$

**Definición 4.5.** Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se llama función de densidad sobre  $\mathbb{R}$  si cumple

- (I)  $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- (II)  $f$  admite a lo más un número finito de discontinuidades sobre cada intervalo finito de  $\mathbb{R}$ , es decir,  $f$  es integrable Riemann.
- (III)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

## 4.7. Variable Aleatoria Continua

**Definición 4.6** (Variable Aleatoria Continua). Sea  $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B})$  se dice continua si su función de distribución  $F_X$  puede ser representada  $\forall x \in \mathbb{R}$  por

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$$

donde  $f_X$  es una función de densidad sobre  $\mathbb{R}$ . A esta función se le llama función de densidad de la variable aleatoria continua  $X$ , y al conjunto

$$C_X = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}$$

se le llama soporte de la variable aleatoria.

**Teorema 4.1.** Sea  $X$  v.a. continua con función de densidad  $f_X$  y función de distribución  $F_X$ . Entonces se verifica

- (I)  $F_X$  es continua,
- (II) Si  $f_X$  es continua en  $x \Rightarrow F_X$  derivable en  $X$  y

$$F'_X(x) = f_X(x)$$

(III)  $D_X = \{x \in \mathbb{R} : p_X(x) > 0\} = \emptyset$

(IV) Para cualquier  $I \subset \mathbb{R}$  con extremos  $a, b$ ,  $P\{X \in I\} = \int_a^b f(t)dt$ .

## 4.8. Transformaciones Medibles

### 4.8.1. Caso discreto

**Teorema 4.2.** Sea  $X$  v.a. discreta con soporte  $D_X$  y función de masa  $p_X$ . Sea  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  medible,  $Y = \varphi(X)$  v.a. transformada. Entonces,  $Y$  es una v.a. discreta con soporte  $D_Y = \varphi(D_X)$  y función de masa

$$p_Y(y) = \begin{cases} \sum_{x \in \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = y\} \cap D_X} p_X(x), & \text{si } y \in D_Y \\ 0, & \text{si } y \notin D_Y \end{cases}$$

### 4.8.2. Caso Continuo

**Teorema 4.3.** Sea  $X$  v.a. continua con soporte  $C_X$  y función de densidad  $f_X$ . Sea  $Y = \varphi(X)$  v.a. transformada. Si  $\varphi(C_X)$  es un conjunto discreto entonces  $Y$  es v.a. discreta con soporte  $D_Y \subset \varphi(C_X)$  y función de masa

$$p_Y(y) = \begin{cases} \int_{\{x : \varphi(x) = y\}} f_X(x) dx, & \text{si } y \in \varphi(C_X) \\ 0, & \text{si } y \notin \varphi(C_X) \end{cases}$$

**Teorema 4.4.** Sea  $X$  v.a. continua con soporte  $C_X$  y densidad  $f_X$ . Suponemos que  $C_X \subset \mathbb{R}$  es un intervalo. Sea  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua, estrictamente creciente o decreciente sobre  $C_X$  tal que  $\varphi^{-1}$  sobre  $\varphi(C_X)$  admite una derivada continua. Entonces,  $Y$  es una v.a. continua con soporte  $C_Y = \varphi(C_X)$  y función de densidad

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(\varphi^{-1}(y)) \cdot |(\varphi)^{-1'}(y)|, & y \in C_Y \\ 0, & y \notin C_Y \end{cases}$$

**Teorema 4.5.** Sea  $X$  v.a. continua con soporte  $C_X$  y función de densidad  $f_x$ . Sea  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivable  $\forall x \in C_X$  tal que  $\varphi'$  es continua y  $\varphi'(x) \neq 0$  salvo un número finito de puntos. Suponemos que  $\forall y \in \mathbb{R}$  se cumple una de las siguientes afirmaciones

(I)  $\exists x_1(y), \dots, x_{m(y)}(y) \in C_X$  tal que

$$\varphi(x_k(y)) = y \quad y \quad \varphi'(x_k(y)) \neq 0$$

(II) Si  $m(y) = 0$ . Entonces,  $\varphi(X) = Y$  es v.a. continua con función de densidad

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m(y)} f_X(x_k(y)) \cdot |\varphi'(x_k(y))|^{-1}, & \text{si } m(y) > 0 \\ 0, & \text{si } m(y) = 0 \end{cases}$$

# Capítulo 5

## Esperanza Matemática

### 5.1. Esperanza de una Variable Aleatoria Simple

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad y  $A_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$  tal que  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$  y  $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ . Consideramos  $X = \sum_{i=1}^n x_i I_{A_i}$  una variable aleatoria simple definida en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  con  $x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Definición 5.1** (Esperanza Variable Aleatoria Simple). *Llamamos esperanza de  $X$  v.a. simple al número*

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i P(A_i) = \int_{\Omega} X dP(\omega)$$

**Proposición 5.1** (Propiedades).

(I) Si  $X \geq 0$ , entonces  $E[X] \geq 0$ ,

(II)  $\forall X, Y$  v.a. simples,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y],$$

(III)  $X \geq Y \Rightarrow E[X] \geq E[Y]$ ,

(IV)  $E[I_A] = P(A), \forall A \in \mathcal{A}$ ,

(V)  $E[|X + Y|] \leq E[|X|] + E[|Y|]$ ,

(VI)  $|E[X]| \leq E[|X|]$ ,

$$(VII) E[X \cdot I_A] = \int_A X dP(\omega)$$

$$(VIII) E[X I_{A_1 \cap A_2}] = \int_{A_1} X dP(\omega) + \int_{A_2} X dP(\omega), \quad \forall A_1, A_2 \in \mathcal{A} : A_1 \cap A_2 = \emptyset,$$

**Demostración.** *content*

## 5.2. Esperanza De Una Variable Aleatoria No Negativa

**Proposición 5.2.** Sea  $X \geq 0$  una v.a., entonces  $\exists \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no decreciente tal que  $X_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ , entonces  $\{E[X_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$  será creciente y por tanto con límite (finito o no).

**Definición 5.2.** Llamaremos esperanza de  $X$  v.a. no negativa a

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP = \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} X_n dP(\omega)$$

**Proposición 5.3.** Sean  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dos sucesiones de v.a. simples no negativas tales que  $X_n \leq X, Y_n \leq Y$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = X$ . Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[Y_n]$ .

**Proposición 5.4** (Propiedades). (I)  $E[X] \geq 0$ .

(II) Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias no negativas y sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Entonces,

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y].$$

(III)  $X \geq Y \Rightarrow E[X] \geq E[Y]$ , en donde  $X$  e  $Y$  son variables aleatorias no negativas.

(IV)  $X$  v.a. no negativa y  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , entonces

$$\int_{A_1 \cap A_2} X dP(\omega) = \int_{A_1} X dP(\omega) + \int_{A_2} X dP(\omega).$$



**Demostración.** *content*

**Definición 5.3** (Variable Aleatoria Integrable). *Una variable aleatoria no negativa  $X$  es integrable  $\Leftrightarrow X$  tiene esperanza finita, es decir,  $E[X] < +\infty$ .*

## 5.3. Esperanza De Una Variable Aleatoria Real

**Definición 5.4** (Esperanza De Una Variable Real). *Sea  $X$  v.a real tal que  $X = X^+ - X^-$ , llamaremos esperanza matemática de  $X$  a*

$$E[X] = E[X^+] - E[X^-]$$

*siempre que  $E[X^+]$  o  $E[X^-]$  sean menores que  $\infty$ .*

**Definición 5.5.** *Diremos que  $X$  variable aleatoria real es integrable  $\Leftrightarrow E[X^+]$  o  $E[X^-]$  son integrables y  $E[X] < \infty$ .*

**Proposición 5.5** (Propiedades de la variables Aleatorias Reales). *Sean  $X, Y$  v.a. integrables tal que  $A \cap B = \emptyset$ . Entonces,*

(I)  $X, X + Y, |X|, aX$  con  $a \in \mathbb{R}$  son integrables.

(II) Si  $a \in \mathbb{R}$  entonces

$$\int aX + bY dP(\omega) = a \int X dP(\omega) + b \int Y dP(\omega).$$

(III)  $X \geq Y \Rightarrow \int X dP(\omega) \geq \int Y dP(\omega)$ .

(IV)  $\left| \int X dP(\omega) \right| \leq \int |X| dP(\omega)$ .

(V)  $X \geq 0$  y  $\int X dP(\omega) = 0 \Rightarrow P\{X \neq 0\} = 0$ .

(VI)  $\int_{A \cup B} X dP(\omega) = \int_A X dP(\omega) + \int_B X dP(\omega)$

$$(VII) \ P\{X \neq Y\} = 0 \Rightarrow \int X dP(\omega) = \int Y dP(\omega)$$

**Demostración.** *content*

## 5.4. Teorema De Caracterización De La Esperanza

**Teorema 5.1.** *La esperanza matemática de una v.a. se caracteriza a partir de su probabilidad inducida*

$$E[X] = \int_{\Omega} X dP(\Omega) = \int_{\mathbb{R}} \xi(x) dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \xi(x) dF_X(x)$$

donde  $\xi$  es la función identidad en  $\mathbb{R}$ .

**Demostración.** *content*

### 5.4.1. Esperanza De Una Variable Aleatoria Elemental

**Definición 5.6.** *Sea  $X \geq 0$  tal que  $X = \sum_{j=1}^{\infty} x_j X_{A_j}$  donde  $A_j$  forman una partición numerable de  $\Omega$  y  $x_j > 0$ . Definimos la esperanza de  $X$  como*

$$E[X] = \sum_{j=1}^{\infty} x_j P(A_j).$$

### 5.4.2. Esperanza De Una Variable Aleatoria Discreta

**Proposición 5.6.** *Sea  $X$  v.a. discreta con soporte  $D_X$  y función de masa  $p_X$ . Sabemos que  $D_X$  es un conjunto numerable. Entonces,  $P(A_j) = P_X(X = x_j) = p_X(x_j)$  con*

$$\begin{aligned} \sum_{x \in D_X} p_X(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} p_X(x_j) = 1 \\ \Rightarrow E[X] &= \sum_{x \in D_X} x_j P_X(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j p_X(x_j) \end{aligned}$$

supuesta la convergencia absoluta de la serie, es decir,  $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| p_X(x_j) < \infty$ .

### 5.4.3. Esperanza De Una Variable Aleatoria Continua

**Definición 5.7** (Esperanza De Una Variable Aleatoria Continua). Sea  $X$  v.a. continua tal que

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

es su función de distribución donde  $f_x$  es su función de densidad. Entonces,

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} \xi(x) f_X(x) dx$$

siendo  $\xi(x)$  la función medible identidad en  $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ .

**Teorema 5.2.** Sea  $X$  una v.a. tal que  $\exists E[X]$ ,  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aplicación medible tal que  $\varphi(X) = Y$ . Si  $\exists E[\varphi(Y)]$  esta se puede expresar a través de la probabilidad inducida por  $X$  y se cumple que

$$E[Y] = \int_{\Omega} Y dP = \int_{\mathbb{R}} \varphi dP_X$$

## 5.5. Momentos

### 5.5.1. Momentos respecto al origen

**Definición 5.8** (Momento de orden  $k$  de  $X$  respecto al origen). Se llama momento de orden  $k$  de la v.a.  $X$  respecto al origen, a la esperanza de  $g(X) = X^k$ . Lo representaremos por  $\alpha_k$ , es decir,

$$\alpha_k = E[X^k] = \int_{\mathbb{R}} x^k dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} x^k dF_X(x)$$

siendo  $P_X$  la distribución de  $X$  y  $F_X$  la función de distribución de la v.a.  $X$ .

### 5.5.2. Momentos respecto a la media

**Definición 5.9** (Momento de orden  $k$  de  $X$  respecto al media). Se llama momento de orden  $k$  de la v.a.  $X$  respecto al media, a la esperanza de  $g(X) = (X - \alpha_1)^k$ . Lo representaremos por  $\mu_k$ , es decir,

$$\mu_k = E[(X - \alpha_1)^k]$$

En particular,  $\mu_2$  recibe el nombre de varianza.

### 5.5.3. Momentos Absolutos respecto al origen

**Definición 5.10** (Momento absoluto respecto al origen). Se llama momento absoluto de orden  $k$  de la v.a.  $X$  a la esperanza de  $g(X) = |X|^k$ . Lo representamos por  $\beta_k$ , es decir,

$$\beta_k = E[|X|^k]$$

**Proposición 5.7.** Dada  $X$  v.a. tal que  $\exists \alpha_k$ . Entonces,  $\exists \alpha_n, \forall n \leq k$ .

**Demostración.** content

## 5.6. Teorema de Markov

**Teorema 5.3.** Sea  $X$  v.a.,  $g(X)$  función medible tal que  $g(X) \geq 0$ . Entonces,

$$P\{g(X) > k\} \leq \frac{E[g(X)]}{k}, \quad \forall k > 0$$

supuesto que  $\exists E[X]$ .

**Demostración.** Sea  $A = \{x : g(x) > k\}$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X)] &= \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_X(x) \\ &= \int_A g(x) dF_X + \int_{A^*} g(x) dF_X(x) \\ &\geq \int_A g(x) dF_X(x) \geq \int_A k dF_X(x) \geq k \mathbb{P}\{g(X) > k\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\{g(X) > k\} \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{k}.$$

## 5.7. Acotación de Tchebychev

**Proposición 5.8.** Sea  $X$  v.a.,  $g$  función medible no negativa tal que  $\exists E[(g(X))^k]$ , entonces

$$P\{g(X) > t\} \leq \frac{E[(g(X))^k]}{t^k}$$

CORREGIR + AÑADIR TEOREMA CHEVYCHEB

**Demostración.** Sea  $A = \{x : g(x) > t\}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X)^k] &= \int_{\mathbb{R}} (g(x))^k dF(x) \\ &= \int_A g(x)^k dF(x) + \int_{A^c} g(x)^k dF(x) \\ &\geq \int_{A^c} (g(x))^k dF(x) \geq \int_{A^c} t^k dF(x) \\ &= t^k \mathbb{P}\{X \in A^c\} \end{aligned}$$

entonces,

$$\mathbb{E}[g(X)^k] \geq t^k \mathbb{P}\{g(X) > t\}$$

Por tanto,

$$\mathbb{P}\{g(X) > t\} \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)^k]}{t^k}$$

**Teorema 5.4.** Sea  $X$  v.a.. Si  $\exists V(X)$ , entonces para  $t > 0$  tenemos

$$\mathbb{P}\{|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\} \leq \frac{V(X)}{t^2}$$

**Demostración.** Sea  $g(X) = [X - \mathbb{E}[X]]^2$ . Entonces,  $\mathbb{P}\{g(X) \geq 0\} = 1$  y

$\mathbb{E}[g(X)] = V(X)$ . *Aplicado la desigualdad de Markov tenemos*

$$\mathbb{P}\{|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\} = \mathbb{P}\{g(X) \geq t^2\} \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{t^2} = \frac{V(X)}{t^2}.$$

# Capítulo 6

## Función Característica

### 6.1. Función generatriz

**Definición 6.1** (Función Generatriz Discreta). Sea  $X$  v.a. discreta con función de masa  $p_X$  y soporte  $D_X$ . Entonces, la función generatriz de  $X$  es

$$G(s) = E[s^X] = \sum_{i=1}^{\infty} s^{x_i} p_i$$

siempre que  $\sum_{i=1}^{\infty} |s^{x_i}| p_i < \infty$ .

**Definición 6.2** (Función Generatriz Continua). Sea  $X$  v.a. continua con función de densidad  $f$ . Entonces, la función generatriz de  $X$  es

$$G(s) = E[s^X] = \int_{-\infty}^{+\infty} s^x f(x) dx$$

siempre que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |s^x| f(x) dx < \infty$ .

**Proposición 6.1** (Propiedades Función Generatriz). La derivada de orden  $n$  de la función generatriz es

$$G^{(n)}(s) = \sum_{x=n}^{\infty} \binom{x}{n} n! f(x) s^{x-n}$$

que cumple lo siguiente

- (I)  $G(0) = P(X = 0) = f(0),$
- (II)  $\frac{1}{n!}G^{(n)}(0) = P(X = n) = f(n),$
- (III)  $E(X) = G'(1),$
- (IV)  $G^{(n)}(1) = E[X(X-1)\cdots(X-n+1)]$

## 6.2. Función Generatriz de Momentos

**Definición 6.3** (Función Generatriz de Momentos). *Llamaremos función generatriz de momentos respecto al origen de la variable aleatoria  $X$  con función de distribución  $F_X$  a*

$$M(\theta) = E[e^{\theta X}] = \int_{\mathbb{R}} e^{\theta x} dF_X(x)$$

### 6.2.1. Función Generatriz de Momentos Discreta

**Definición 6.4** (Función Generatriz de Momentos Discreta). *Sea  $X$  v.a. discreta con función de masa  $p_X$ . Llamamos función generatriz de momentos a la función*

$$M(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{\theta x_i} p_i$$

*siempre que  $\sum_{i=0}^{\infty} |e^{\theta x_i}| p_i < \infty$ .*

### 6.2.2. Función Generatriz de Momentos Continua

**Definición 6.5** (Función Generatriz de Momentos Continua). *Sea  $X$  v.a. continua con función de densidad  $f$ . Llamamos función generatriz de momentos a la función*

$$M(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\theta x} f(x) dx$$

*siempre que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{\theta x}| f(x) dx$ .*

### 6.2.3. Propiedades Función Generatriz De Momentos



**Proposición 6.2.** A partir del desarrollo de Taylor de  $M(\theta)$  en  $\theta = 0$  se tiene

$$M(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{E(X^j)}{j!} \theta^j$$

donde  $M^{(j)}(0) = E(X^j)$ .

## 6.3. Función Característica

**Definición 6.6** (Función Característica). Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  espacio de probabilidad,  $X$  v.a. con función de distribución  $F_X$ . Se llama función característica de  $X$  a

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= E[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_X(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) dF_X(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin(tx) dF_X(x) \end{aligned}$$

### 6.3.1. Propiedades Función Característica

**Proposición 6.3.** Sea  $X$  v.a. con función de distribución  $F_X$ . Entonces, la función característica satisface

- (I)  $\varphi$  existe  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,
- (II)  $\varphi(0) = 1$ ,
- (III)  $|\varphi(t)| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$ ,
- (IV)  $\varphi(t)$  es uniformemente continua,
- (V) Si  $Y = aX + b$ , entonces  $\varphi_Y(t) = e^{itb} \cdot \varphi_X(at)$ .

**Demostración.** *content*

## 6.4. Problema de los Momentos

**Teorema 6.1.** *Supuesto que los momentos de la variable aleatoria  $X$  existen*

$$\alpha_n = \int_{\mathbb{R}} x^n dF(x)$$

*Entonces,*

$$(I) \exists \varphi^{(n)}(0) = i^n \alpha_n$$

$$(II) \exists \varphi^{(n)}(t) = i^n \int_{\mathbb{R}} e^{itx} x^n dF(x)$$

**Demostración.** *content*

**Teorema 6.2.**

$$(I) \text{ Si } \exists \varphi^{(2n)}(t) \text{ entonces } \exists \alpha_{2n} = \frac{\varphi^{(2n)}(0)}{i^{2n}}$$

$$(II) \text{ Si } \exists \varphi^{(2n-1)}(t) \text{ entonces } \exists \alpha_{2n-2} = \frac{\varphi^{(2n-2)}(0)}{i^{2n-2}}$$

## 6.5. Teorema de Inversión

**Teorema 6.3** (de Inversión). *Sea  $X$  v.a. con función de distribución  $F_X$  y  $\varphi(t)$  su función característica, entonces*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

# Capítulo 7

## Distribuciones Unidimensionales

### 7.1. Distribución Degenerada

**Definición 7.1.** Una v.a.  $X$  se dice que tiene una distribución degenera en un punto  $h$  si su función de masa es

$$p_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = h \\ 0 & \text{si } x \neq h \end{cases}$$

#### Proposición 7.1.

- *Función Distribución*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < h \\ 1 & \text{si } x \geq h \end{cases}$$

- *Momentos respecto al origen*

$$\alpha_k = \mathbb{E}[X^k] = h^k$$

- *Momentos respecto a la media*

$$\mu_k = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \alpha_1^{k-j} \alpha_j = 0$$

- *Función característica*

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = e^{it h} \cdot \mathbb{P}X = h = e^{it h}$$

## 7.2. Distribución Uniforme Discreta

**Definición 7.2.** Una v.a.  $X$  se dice que tiene una distribución uniforme discreta si su función de masa es

$$p_X(x) = \frac{1}{n}, \quad \text{si } x \in D_X = \{x_1, \dots, x_n\}$$

### Proposición 7.2.

- *Función Distribución*

$$F_X(x) = \sum_{k \leq x} p_X(k) = \sum_{k \leq x} \frac{1}{n} = \frac{i}{n}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < \min\{x_1, \dots, x_n\} \\ \frac{i}{n} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 1 & \text{si } x \leq \max\{x_1, \dots, x_n\} \end{cases}$$

- *Momentos respecto al origen*

$$\alpha_k = \mathbb{E}[X^k] = \sum_{i=1}^n x_i^k \cdot p_X(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k, \quad k \in \{1, 2, \dots\}$$

- *Momentos respecto a la media*

$$V(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mathbb{E}[X])^2$$

- *Función característica*

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{i=1}^n e^{itx_i} \cdot \frac{1}{n}$$

- *Función generatriz de momentos*

$$M_X(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta X}] = \sum_{i=1}^n e^{\theta x_i \frac{1}{n}}$$

## 7.3. Distribución de Bernoulli

**Definición 7.3.** Una v.a.  $X$  se dice que tiene distribución de Bernoulli si tiene función de masa

$$P_X(x) = \mathbb{P}\{X = x\} = p^x \cdot q^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}$$

### Proposición 7.3.

- *Función Distribución*

$$F_X(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\} = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ q, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ p + q = 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- *Momentos respecto al origen*

$$\alpha_k = \mathbb{E}[X^k] = (0)^k p_X(0) + 1^k p_X(1) = p$$

- *Momentos respecto a la media*

$$\begin{aligned} \mu_k &= \mathbb{E}[(X - \alpha_1)^k] = (0 - p)^k \cdot q + (1 - p)^k \cdot p \\ &= q(-p)^k + q^k p \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = \mu_2 = pq(p + q) = pq$$

- *Función característica*

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itx}] = e^{it0}q + e^{it1}p = q + e^{it}p$$

- *Función generatriz de momentos*

$$M_X(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta X}] = e^{\theta \cdot 0}q + e^{\theta \cdot 1}p = q + e^{\theta}p$$

## 7.4. Distribución Binomial

**Definición 7.4.** Una v.a.  $X$  se dice que sigue una distribución binomial si su función de masa es

$$p_X(x) = \mathbb{P}\{X = x\} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x \in \{0, 1, \dots, n\}$$

Es claro que es una variable aleatoria discreta. Esta distribución consiste en hacer una serie de experimentos independientes y considerar el número de éxitos, dada la probabilidad de éxito  $p$ .

**Observación.**  $X \equiv \text{Ber}(p) \Leftrightarrow X \equiv \text{Bi}(1, p)$ .

### Proposición 7.4.

- *Función Distribución (no es muy manejable)*

$$F_X(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\} = \sum_{i \leq x} p_X(i) = \sum_{i \leq x} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

- *Momentos respecto al origen*

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=0}^n \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=0}^n p = n \cdot p$$

- *Momentos respecto a la media*

$$V(X) = V(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=0}^n V(X_i) = \sum_{i=1}^n pq = npq$$

- *Función característica*

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[e^{it(X_1 + \dots + X_n)}] \\ &= \mathbb{E}[e^{itX_1}] \cdot \dots \cdot \mathbb{E}[e^{itX_n}] \\ &= (p \cdot e^{it} + q)^n \end{aligned}$$

- *Función generatriz de momentos*

$$M_X(\theta) = (pe^\theta + q)^n$$

- *Función generatriz de probabilidad*

$$G(s) = M \log(s) = (ps + q)^n$$

**Teorema 7.1.** *La suma de variable Binomiales es Binomial. Si  $X_1 \equiv B(n_1, p)$  y  $X_2 \equiv B(n_2, p)$ , entonces  $X_1 + X_2 \equiv B(n_1 + n_2, p)$*

**Demostración.** *content*

## 7.5. Distribución de Poisson

La distribución de Poisson de parámetro  $\lambda$  se obtiene como límite de la binomial de parámetros  $(n, p)$ . Sea  $\lambda = np$ .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_X(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \binom{n}{x} p^n q^{n-x} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \binom{n}{x} \left( \frac{\lambda}{n} \right)^x \left( 1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{n-x} \right] \\ &= \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} \end{aligned}$$

**Definición 7.5.** *Una v.a.  $X$  sigue una distribución Poisson de parámetro  $\lambda$  si su función de masa es*

$$p_X(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x \in \{0, 1, \dots\}$$

### Proposición 7.5.

- *Función Distribución*

$$F_X(x) = \sum_{r \leq x} p_X(r) = \sum_{r \leq x} \frac{e^{-\lambda} \lambda^r}{r!}$$

- *Momentos respecto al origen*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$e^{-\lambda} \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda$$

- *Momentos respecto a la media*

$$\mathbb{E}[X^2] = \lambda + \lambda^2$$

$$V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = 0$$

- *Función característica*

$$\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

- *Función generatriz de momentos*

$$M_X(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta X}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{\theta x} e^{\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^{\theta} \lambda)^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{e^{\theta} \lambda} = e^{\lambda(e^{\theta}-1)}$$

**Teorema 7.2.** *La suma de variable aleatorias Poisson independientes, es una variable aleatoria Poisson cuyo parámetro es la suma de los parámetros.*

**Demostración.** *content*

## 7.6. Distribución Hipergeométrica

Supongamos que una caja contiene  $N$  piezas, de las cuales  $D$  son defectuosas y  $N - D$  aceptables. Consideramos el experimento de extraer  $n$  piezas simultáneamente. Este procedimiento es equivalente a un muestreo sin remplazamiento de  $n$  piezas.

**Definición 7.6.** *Una v.a  $X$  sigue una distribución hipergeométrica si su función de masa es*

$$\mathbb{P}\{X = x\} = \frac{\binom{D}{x} \binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$



**Proposición 7.6.**

- *Momentos respecto al origen*

$$\alpha = \frac{\sum_{x=0}^n x \binom{D}{x} \binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

- *Momentos respecto a la media*

$$V(X) = npq \frac{N-n}{N-1}$$

**7.7. Distribución Geométrica**

Sea un experimento aleatorio y  $A$  un suceso del experimento  $P(A) = p$ . Queremos ver el número de pruebas necesarias para que aparezca  $A$ .

**Definición 7.7.** Una v.a.  $X$  sigue una distribución geométrica si su función de masa es

$$p_X(x) = \mathbb{P}\{X = x\} = (1-p)^{x-1}p, \quad x \in \{1, 2, \dots\}$$

**Proposición 7.7.**

- *Función Distribución*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ 1 - q^x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- *Momentos respecto al origen*

$$\alpha_1 = \mathbb{E}[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot q^{x-1} \cdot p = p \sum_{x=1}^{\infty} x q^{x-1}$$

- *Momentos respecto a la media*

$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$

■ *Función característica*

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{x=1}^{\infty} e^{itx} q^{x-1} p = p e^{it} \frac{1}{1 - e^{it} q}$$

■ *Función generatriz de momento*

$$M(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta X}] = \sum_{x=1}^{\infty} e^{\theta x} q^{x-1} p = \frac{p e^{\theta}}{1 - p e^{\theta}}$$

## 7.8. Distribución Binomial Negativa

Consideramos una sucesión de realizaciones de un experimento. Según el número de veces que suceda  $A$  queremos ver el número de fallos anteriores.

**Definición 7.8.** Una v.a.  $X$  sigue una distribución binomial negativa si tiene función de masa

$$\mathbb{P}\{X = x\} = \binom{n+x-1}{n-1} p^{n-1} q^x \cdot p$$

**Proposición 7.8.**

(I) *Función distribución*

$$F(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\} = \sum_{i=0}^x \binom{n+i-1}{i} p^n q^i$$

(II) *Función característica*

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} \binom{n+x-1}{x} p^n q^x \\ &= p^n \sum_{x=0}^{\infty} \binom{n+x-1}{x} (e^{it} q)^x = p^n (1 - e^{it} q)^{-n} \end{aligned}$$

(III) *Momentos*

$$\alpha_1 = \frac{nq(nq + 1)}{p^2}$$

$$V(X) = \frac{nq}{p^2}$$

(IV)

## 7.9. Distribución Uniforme

**Definición 7.9.** Una v.a.  $X$  continua sigue una distribución uniforme en  $[a, b]$  si su función de densidad viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

### Proposición 7.9.

- *Función distribución*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

- *Momentos respecto al origen*

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b \end{aligned}$$

- *Momentos respecto a la media*

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \mathbb{E}[(X - \alpha_1)^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f(x) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx \end{aligned}$$

donde  $t = x - \frac{a+b}{2}$ ,  $dx = dt$

$$\sigma^2 = \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} t^2 dt = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- *Función característica*

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_a^b e^{itx} \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{it(b-a)} \cdot (e^{itb} - e^{ita})\end{aligned}$$

- *Función generatriz de momentos*

## 7.10. Distribución Normal

**Definición 7.10.** Una v.a.  $X$  sigue una distribución normal  $N(0, 1)$  si su función de densidad es de la forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

**Definición 7.11.** Una v.a.  $X$  sigue una distribución normal  $N(\mu, \sigma)$  si su función de densidad es de la forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

**Proposición 7.10.**

- *Función distribución*

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

donde haciendo el cambio  $\frac{x-\mu}{\sigma} = y$  tenemos

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

- Relación entre  $N(0, 1)$  y  $N(\mu, \sigma)$ . Si  $X \equiv N(\mu, \sigma)$ ,

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

entonces,  $Y \equiv N(0, 1)$ .

- Función característica

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

- Momentos respecto al origen

$$\alpha_1 = \frac{\varphi'(t)}{i} \Big|_{t=0}$$

$$\varphi'(t) = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}} \cdot i\mu - \frac{2t\sigma^2}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi'(0) = i\mu \Rightarrow \sigma_1 = \mu$$

- Momentos respecto a la media

$$\alpha_2 = \frac{\varphi''(t)|_{t=0}}{i^2} = \mu^2 + \sigma^2$$

$$\Rightarrow V(X) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

- Función generatriz de momentos

**Teorema 7.3.** La suma de normales es normal.

## 7.11. Distribución Gamma

**Definición 7.12** (Función Gamma). Llamamos función gamma a

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

**Proposición 7.11** (Propiedades). (I)  $\Gamma(1) = 1$ ,

(II)  $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$

$$(III) \quad p \in \mathbb{Z}^+, \Gamma(p) = (p-1)!$$

**Definición 7.13.** Una v.a.  $X$  sigue una distribución gamma de parámetros  $\gamma(p, a)$  si su función de densidad es de la forma

$$f_X(x) = \frac{a^p e^{-ax} x^{p-1}}{\Gamma(p)},$$

$x \geq 0$

**Proposición 7.12.**

■ *Función distribución*

$$F_X(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} \int_0^x e^{-as} s^{p-1} ds, \quad 0 < x < \infty$$

■ *Función característica*

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \left(1 - \frac{it}{a}\right)^{-p}$$

■ *Función generatriz de momentos*

$$M(\theta) = \left(1 - \frac{\theta}{a}\right)^{-p}$$

■ *Momentos respecto al origen*

$$\alpha_k = M^{(k)}(\theta) \Big|_{\theta=0}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{p}{a}, \quad \alpha_2 = \frac{p(p+1)}{a^2}$$

■ *Momentos respecto a la media*

$$V(X) = \frac{p(p+1)}{a^2} - \frac{p^2}{a^2} = \frac{p}{a^2}$$

**Teorema 7.4.** *La suma de v.a. gamma independientes es gamma.*

**Demostración.** *content*

## 7.12. Distribución Exponencial

**Definición 7.14.** *Una v.a.  $X$  sigue una distribución exponencial de parámetro  $\theta$  si su función de densidad es de la forma*

$$f_X(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

**Observación.**  $Exp(\theta) = \gamma(1, \theta)$ .

**Proposición 7.13.**

- *Función distribución*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\theta x} & x > 0 \end{cases}$$

- *Función característica*

$$\varphi(t) = \left(1 - \frac{it}{\theta}\right)^{-1}$$

- *Función generatriz de momentos*

$$M(s) = \left(1 - \frac{s}{\theta}\right)^{-1}$$

- *Momentos respecto a la media*

$$\alpha_1 = \frac{1}{\theta}, \quad \alpha_2 = \frac{2}{\theta^2}$$

- *Momentos respecto al origen*

$$V(X) = \frac{1}{\theta^2}$$

▪

**Teorema 7.5.** *La suma de  $n$  variable aleatorias independientes e idénticamente distribuidas  $X_i \equiv \text{Exp}(\theta)$  es una  $\gamma(n, \theta)$ .*



# Capítulo 8

## Vectores Aleatorios

### 8.1. Función Distribución en $\mathbb{R}^2$

**Definición 8.1** (Distribución Propia). Sea  $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$ ,  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  función de distribución. Si se verifica que

- (I)  $\forall a, b \in \mathbb{R}^2 : a \leq b$  se tiene que  $F(a, b] \geq 0$ .
- (II)  $F$  es continua por la derecha, es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x)$ , donde  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ .
- (III)  $\lim_{x_1, x_2 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2) = 1$ .
- (IV)  $\lim_{x_1 \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2) = 0, \forall x_2$  y  $\lim_{x_2 \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2) = 0, \forall x_1$

**Teorema 8.1.** Sea  $P$  probabilidad en  $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$ ,  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x_1, x_2) = P(-\infty, x].$$

Entonces,  $F$  es una función de distribución propia.

**Observación.** A la función de distribución propia  $F$  se le llama función de distribución asociada a la probabilidad  $P$ .

**Definición 8.2** (Vector Aleatorio). Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  espacio de probabilidad. Entonces, la aplicación

$$X = (X_1, \dots, X_n) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

definida por

$$X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)), \quad \omega \in \Omega$$

es una variable aleatoria  $n$ -dimensional si y solo si

$$X^{-1}(B) = \{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in (B) \in \mathcal{A}, \quad \forall B \in \mathcal{B}_n$$

**Teorema 8.2.**  $X = (X_1, \dots, X_n)$  es una variable aleatoria multidimensional si y solo si  $X_i$  es variable aleatoria unidimensional  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

## 8.2. Ley de Probabilidad de un Vector Aleatorio

**Proposición 8.1** (Probabilidad Inducida por  $X$  en  $\mathbb{R}^n$ ). Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  espacio de probabilidad,  $X = (X_1, \dots, X_n)$  vector aleatorio. Entonces,  $X$  induce una probabilidad

$$\mathbb{P}_X\{B\} = \mathbb{P}\{X^{-1}(B)\} = \mathbb{P}\{A\}$$

donde  $X(A) = B, \forall B$ . A la aplicación  $\mathbb{P}_X$  la llamamos probabilidad inducida por  $X$  en  $\mathbb{R}^n$ .

## 8.3. Función de Distribución Inducida por Variable Aleatoria Unidimensional

**Teorema 8.3.** Sea  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  una función. Entonces,  $F$  es una función de distribución si y solo si se verifica

- (I)  $F(-\infty, y) = 0 = F(x, -\infty)$ .
- (II)  $F(+\infty, +\infty) = 1$ .
- (III)  $F(x, y)$  es continua por la derecha.
- (IV)  $F(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Observación.** Este teorema se puede generalizar al caso  $n$ -dimensional.

## 8.4. Función de Masa en $\mathbb{R}^2$

**Definición 8.3** (Función de Masa en  $\mathbb{R}^2$ ). Sea  $(X, Y)$  v.a. en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  espacio de probabilidad. Entonces, la función  $p_{XY} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$p_{XY}(x, y) = \mathbb{P}\{X = x, Y = y\}$$

$$= F(x, y) - F(x^-, y) - F(x, y^-) + F(x^-, y^-) \geq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

se llama función de masa de  $(X, Y)$ .

**Teorema 8.4.** Sea  $(X, Y)$  v.a. con función de masa  $p_{XY}$  y sea

$$D_{XY} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p_{XY}(x, y) > 0\}.$$

Entonces,  $D_{XY}$  es un conjunto numerable.

## 8.5. Variable Aleatoria Bidimensional Discreta

**Definición 8.4** (Variable Aleatoria Bidimensional Discreta). Sea  $(X, Y)$  v.a. con función de masa  $p_{XY}$  y sea

$$D_{XY} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p_{XY}(x, y) > 0\}$$

donde  $D_{XY} \neq \emptyset$  y  $\sum_{(x,y) \in D_{XY}} p_{XY}(x, y) = 1$ . Entonces,  $(X, Y)$  se llama v.a. discreta y  $D_{XY}$  es su soporte.

**Definición 8.5** (Punto de Salto). Sea  $(X, Y)$  v.a. discreta, entonces  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que

$$p_{XY}(x, y) > 0$$

se llama punto de salto o discontinuidad de salto. Y  $D_{XY}$  es el conjunto de puntos de salto.

**Definición 8.6** (Función de Distribución de Variable Aleatoria Bidimensional Discreta). Sea  $(X, Y)$  v.a. discreta. Entonces,

$$F(x, y) = \sum_{x_i \leq x, y_i \leq y} p_{XY}(x_i, y_i)$$

es su función de distribución.

**Teorema 8.5.** Una colección de números no negativos  $\{p(x, y) : x = 1, 2, \dots; y = 1, 2, \dots\}$  que satisface

$$\sum_{x=1, y=1}^{\infty} p(x, y) = 1$$

## 8.6. Función De Densidad en $\mathbb{R}^2$

**Definición 8.7** (Función de Densidad en  $\mathbb{R}^2$ ). Una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  se llama función de densidad si

- (I)  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \geq 0$ .
- (II)  $f$  es integrable Riemann en  $\mathbb{R}^2$ .
- (III)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$ .

**Teorema 8.6.** Sea  $f$  un función de densidad en  $\mathbb{R}^2$ . Definimos la función

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$$

Entonces,  $F$  es función de distribución en  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 8.7.** Sea  $f$  función de densidad en  $\mathbb{R}^2$  y  $F$  función de distribución en  $\mathbb{R}^2$  definida por

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Si  $f$  es continua y  $F \in \mathcal{C}^2$ , entonces

$$\frac{\partial^2 F(x_1, y_1)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x_1, y_1)}{\partial y \partial x} = f(x_1, y_1)$$

## 8.7. Variable Aleatoria Bidimensional Continua

**Definición 8.8** (Variable Aleatoria Bidimensional Continua). Sea  $(X, Y)$  v.a. Si su función de distribución  $F$  se puede expresar como

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Entonces, se dice que  $(X, Y)$  es v.a. continua y

$$C_{XY} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) > 0\}$$

se llama soporte continuo de  $(X, Y)$ .

**Observación.** Como  $f$  es función de densidad se tiene que

$$\iint_{C_{XY}} f(u, v) du dv = 1$$

**Teorema 8.8.** Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función no negativa, integrable Riemann en  $\mathbb{R}^2$  y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

entonces  $f$  es la función de densidad de alguna variable aleatoria bidimensional continua.

## 8.8. Distribuciones Marginales

**Teorema 8.9.** Sea  $(X, Y)$  v.a. discreta con función de masa  $p_{XY}$  y soporte  $D_{XY}$ . Entonces,  $X$  es una v.a. unidimensional discreta con soporte  $D_X$ , e  $Y$  es una v.a. unidimensional discreta con soporte  $D_Y$ .

**Definición 8.9** (Funciones de Densidad Marginales). Sea  $f$  una función de densidad en  $\mathbb{R}^2$ . Entonces, las funciones

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv \\ f_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du \end{aligned}$$

se llaman funciones de densidad marginales.

**Observación.**  $f_1$  y  $f_2$  son funciones de densidad.

**Definición 8.10** (Función de Distribución Marginal). Sea  $(X_1, X_2)$  v.a. y  $F(x_1, x_2)$  su función de distribución. Entonces, llamamos función de distribución marginal respecto de  $X_i$  a

$$\begin{aligned} F_i &= F(x_i, +\infty) = \mathbb{P}\{X_i \leq x_i, X_j \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{P}\{(-\infty, x_i] \times \mathbb{R}\} \\ &= \lim_{x_j \rightarrow \infty} F(x_i, x_j) \end{aligned}$$

donde  $i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$ .

**Teorema 8.10.** Sea  $(X_1, X_2)$  v.a. continua con función de densidad  $f$  y soporte continuo  $C_{X_1 X_2}$ . Entonces,

$$C_{X_i} = \pi_i(C_{X_1, X_2})$$

es el soporte de  $X_i$  con función de densidad marginal  $f_i$ .

## 8.9. Distribuciones Condicionadas

**Definición 8.11** (Función de Masa Condicionada). Sea  $(X, Y)$  v.a. discreta con función de masa  $p_{XY}$  y soporte  $D_{XY}$ . Entonces, la función  $p(x|b) : \mathbb{R} \rightarrow$

$\mathbb{R}$  definida por

$$p(x|b) = \begin{cases} \frac{p_{XY}(x,b)}{p_Y(b)}, & (x,b) \in D_{XY} \\ 0, & (x,b) \notin D_{XY} \end{cases}$$

donde  $b \in D_Y$ , es la función de masa de  $X$  condicionada por  $Y = b$ .

**Teorema 8.11.** La v.a.  $X$  condicionada por  $Y = b \in D_Y$  es una v.a. discreta con función de masa  $p(x|b)$ .

**Definición 8.12** (Función de Densidad Condicionada). Se llama función de densidad de  $X$  condicionada por  $Y = y$  a la función  $f_{X|Y}(x|y)$  no negativa que satisface

$$F_{X|Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(t|y) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Observación.**  $f_{X|Y}$  es función de densidad sobre  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 8.12.** Sea  $(X, Y)$  v.a. continua con función de densidad  $f$ . Entonces,

(1)  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f$  es continua y  $f_2(y) \geq 0$  y  $f_2$  es continua existe la función de densidad condicional de  $X$  condicionada por  $Y$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}$$

## 8.10. Independencia

**Definición 8.13** (Sucesos Independientes Dos a Dos). Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ,  $\{A_j\}_{j \in J}$  fml. de sucesos. Decimos que son independientes dos a dos si  $\forall i, j \in J$  se tiene que

$$\mathbb{P}\{A_i \cap A_j\} = \mathbb{P}\{A_i\}\mathbb{P}\{A_j\}$$

**Definición 8.14** (Sucesos Mutualmente Independientes). Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ,  $\{A_j\}_{j \in J}$  fml. de sucesos. Decimos que son mutamente independientes si  $\forall I \subset J : \text{card}(I) \geq 2$  se tiene que

$$\mathbb{P}\left\{\bigcap_{i \in I} A_i\right\} = \prod_{i \in I} \mathbb{P}\{A_i\}$$

**Proposición 8.2.** Sea  $(X, Y)$  v.a. Si  $X$  e  $Y$  son v.a. independientes, entonces  $(X, Y)$  es v.a. independiente. En particular si  $X, Y$  con v.a. discretas se tiene que

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Y si  $X, Y$  son v.a. continuas se tiene que

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

**Observación.** Si  $X, Y$  son v.a. independientes con funciones de distribución  $F_X, F_Y$ , entonces

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

es la función de distribución de  $(X, Y)$ .

**Observación.** Si  $X, Y$  son v.a. independientes entonces,

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) \quad y \quad f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$$

son las funciones de densidad condicionadas.

## 8.11. Transformaciones

**Teorema 8.13.** Sea  $(X, Y)$  v.a. continua con función de densidad  $f$ .

(I) Sea la transformación

$$z = g_1(x, y),$$

$$t = g_2(x, y)$$

tal que existe la transformación inversa

$$x = h_1(z, t),$$

$$y = h_2(z, t)$$

(II) Ambas Transformaciones son continuas.



(III) Existen todas as derivadas parciales.

(IV) El jacobino de a transformación inversa

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(z, t)} = \begin{vmatrix} x_z & x_t \\ y_z & y_t \end{vmatrix}$$

es distinto de cero.

Entonces, la v.a.  $(Z, T)$  es continua y tiene función de densidad

$$l(z, t) = f(h_1(z, t), h_2(z, t)) \cdot |J|$$

### 8.11.1. Suma Variables Aleatorias

**Proposición 8.3.** Sea  $(X, Y)$  v.a. con función de densidad  $f$ . La variable aleatoria  $Z = X + Y$  tiene función de densidad

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, z - t) dt$$

y función de distribución

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, z - t) dt ds$$

Si  $X$  e  $Y$  son independientes

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(z - t) dt$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(z - t) dt$$

donde  $f_1$  y  $f_2$  son las funciones de densidad marginales.

### 8.11.2. Producto Variables Aleatorias

**Proposición 8.4.** Sea  $(X, Y)$  v.a. con función de densidad  $f$ . La variable

aleatoria  $Z = X \cdot Y$  tiene función de densidad

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \frac{z}{t}) \cdot \frac{1}{|t|} dt$$

y función de distribución

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \frac{z}{t}) \cdot \frac{1}{|t|} dt ds$$

Si  $X$  e  $Y$  son independientes

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(\frac{z}{t}) \cdot \frac{1}{|t|} dt$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(\frac{z}{t}) \cdot \frac{1}{|t|} dt ds$$

donde  $f_1$  y  $f_2$  son las funciones de densidad marginales.

### 8.11.3. Cociente Variables Aleatorias

**Proposición 8.5.** Sea  $(X, Y)$  v.a. con función de densidad  $f$ . La variable aleatoria  $Z = X/Y$  tiene función de densidad

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(tz, t) |t| dt$$

y función de distribución

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{+\infty} f(tz, t) |t| dt ds$$

Si  $X$  e  $Y$  son independientes

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(tz) f_2(t) |t| dt$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(tz) f_2(t) |t| dt ds$$

donde  $f_1$  y  $f_2$  son las funciones de densidad marginales.

## 8.12. Esperanza

**Definición 8.15** (Esperanza Variable Aleatoria Bidimensional Discreta). Sea  $(X, Y)$  v.a. con función de masa  $p_{XY}$  y soporte  $D_{XY}$ . Si la serie

$$\sum_{(x,y) \in D_{XY}} |g(x, y)| p_{XY}(x, y)$$

converge, entonces

$$\mathbb{E}[g(X, Y)] = \sum_{(x,y) \in D_{XY}} |g(x, y)| p_{XY}(x, y)$$

es la esperanza de  $g(X, Y)$ .

**Definición 8.16** (Esperanza Variable Aleatoria Bidimensional Discreta). Sea  $(X, Y)$  v.a. continua con función de densidad  $f$ . Si la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x, y)| f(x, y) dx dy$$

es finita, entonces

$$\mathbb{E}[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$

es la esperanza de la v.a.  $g(X, Y)$ .

## 8.13. Momentos

**Definición 8.17** (Momentos Respecto al Origen). Sea  $(X, Y)$  v.a. El momento respecto al origen de orden  $(k, l)$  es

$$\alpha_{kl} = \mathbb{E}[X^k Y^l]$$

**Definición 8.18** (Momento Respecto a la Media). Sea  $(X, Y)$  v.a. El mo-

mento respecto a la media es de orden  $(k, l)$

$$\mu_{kl} = \mathbb{E}[(X - \alpha_{10})^k (Y - \alpha_{01})^l]$$

**Definición 8.19** (Coeficiente de Correlación). *El coeficiente de correlación se define como*

$$\rho = \frac{\mu_{11}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

siendo  $\sigma_X = \sqrt{\mu_{20}}$  y  $\sigma_Y = \sqrt{\mu_{02}}$

## 8.14. Propiedades Esperanza

**Proposición 8.6.** *La esperanza verifica*

(I)  $\mathbb{E}[c] = c, \forall c \in \mathbb{R}$

(II) Si  $\mathbb{E}[|X_i|] < +\infty$  entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}[X_i]$$

(III) Si  $\mathbb{E}[|X_i|] < +\infty$  y  $\mathbb{E}[|X_i|^2] < +\infty$  entonces

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot X_2] = \mu_{11} + \alpha_{01} \cdot \alpha_{10}$$

(IV) Si  $\mathbb{E}[|X_i|] < +\infty$  entonces

$$\mathbb{E}\left[\prod X_i\right] = \prod \mathbb{E}[X_i]$$

(V)  $\mathbb{E}[g_1(X)] \leq \mathbb{E}[g_2(X)]$

(VI)  $|\mathbb{E}[g(X)]| \leq \mathbb{E}[|g(X)|]$

(VII)  $\mathbb{E}[g_1(X) + g_2(X)] = \mathbb{E}[g_1(X)] + \mathbb{E}[g_2(X)]$

## 8.15. Propiedades Varianza

**Proposición 8.7.** *La varianza verifica*

(I)

(II)

(III)

(IV)

(V)

(VI)

**8.16. Función Característica**

**8.17. Coeficiente Correlación**

**8.18. Regresión**