Geomtería Diferencial

Hugo Del Castillo Mola

28 de octubre de 2022

Índice general

Capítulo 1

Curvas

1.1. Curvas Parametrizadas

Definición 1.1 (Curva)**.** *Una curva en* $\mathbb{R}^3$ *es una función diferenciarle* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$*.*

Definición 1.2 (Vector tangente)**.** *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva en* $\mathbb{R}^3$ *con* $\alpha = (\alpha_1, \alpha^2, \alpha^3)$*. Entonces,* $\forall t \in I$

$$\alpha'(t) = \Big(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t)\Big).$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}$$

Observación. *El vector tangente también se llama vector velocidad*

Definición 1.3 (Reparametrización)**.** *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva,* $h : J \to I$ *una función diferenciable. Entonces, la función* $\beta : J \to \mathbb{R}^3$

$$\beta(t) = \alpha(h(t))$$

es una reparametrización de α *por* h*.*

Ejemplo. *Sea* $\alpha(t) = \big(t, t\sqrt{t}, 1-t\big)$ *en* $I = (0,4)$*,* $h(s) = s^2$ *en* $J = (0,2)$*. Entonces, la curva reparametrizada es* $\beta(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(s^2) = (s, s^3, 1-s^2)$*.*

Lema 1.0.1. *Si β es una reparametrización de α por h, entonces*

$$\beta'(t) = h'(t) \cdot \alpha'(h(t))$$

1.2. Curvas Regulares

Definición 1.4 (Curva Regular)**.** *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada. Entonces, si $\alpha'(t) \neq 0.\forall t \in I$ decimos que es regular.*

Definición 1.5 (Longitud de Arco)**.** *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3, t_0 \in I$. Definimos la función longitud de arco desde t_0 como $s : I \to \mathbb{R}$ donde*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(u)||du.$$

Definición 1.6 (Curva Parametriza por Longitud de Arco)**.** *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable. Entonces, si $||\alpha'(t)|| = 1, \forall t \in I$ decimos que la curva está parametrizada por longitud de arco.*

Teorema 1.1. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Entonces, $\exists \beta : J \to \mathbb{R}^3$ tal que $||\beta'(s)|| = 1, \forall s \in J$, es decir, β tiene velocidad unitaria.*

Observación. *Una reparametrización $\alpha(h)$ preserva la orientación si $h' \geq 0$ y la invierte si $h' \leq 0$.*

Observación. *Por definición, una curva regular parametrizada por arco siempre conserva la orientación.*

1.3. Producto Vectorial

Definición 1.7 (Producto Vectorial)**.** *Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$. El producto vectorial de u, v es*

$$u \times v = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

Proposición 1.1 (Propiedades Producto vectorial)**.** *Sean* $u, v \in \mathbb{R}^3$. *Entonces,*

(I) $u \times v = -v \times u$.

(II) $u \times v$ *es lineal respecto de* u *y* v*, es decir, para* $w \in \mathbb{R}^3$ *y* $a, b \in \mathbb{R}, (au + bw) \times v = au \times v + bw \times v$.

(III) $u \times v = 0 \Leftrightarrow u, v$ *son linealmente dependientes.*

(IV) $(u \times v) \cdot u = 0, (u \times v) \cdot v = 0$.

1.4. Fórmulas de Frenet

Definición 1.8 (Curvatura)**.** *Sea* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *una curva regular p.p.a.,* $s \in I$. *Entonces,* $||\alpha''(s)|| = k(s)$ *se llama curvatura de* α *en* s.

Observación. $k(s)$ *describe el cambio en la dirección de la curva en un instante.*

Proposición 1.2. *Sea* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *una curva regular p.p.a.. Entonces,* $\alpha''(s) \perp \alpha'(s), \forall s \in I$.

Demostración. $||\alpha'(s)|| = 1, \forall s \in I \Rightarrow \alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = 1 \Rightarrow 2\alpha''(s) \cdot \alpha'(s) = 0 \Rightarrow \alpha''(s) \perp \alpha'(s), \forall s \in I$.

Proposición 1.3. *La curvatura se mantiene invariante ante un cambio de orientación.*

Demostración. $\beta(-s) = \alpha(s) \Rightarrow \beta'(s) = -\alpha'(s) \Rightarrow \beta''(-s) = \alpha''(s) = k(s)$.

Definición 1.9 (Vector Tangente Unitario)**.** *Sea* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *una curva regular p.p.a.. Entonces,*

$$T(s) = \alpha'(s)$$

se llama vector tangente unitario a α en s.

Observación. $k(s) = ||T'(s)||$.

Nota. *Observamos que $\forall s \in I : k(s) > 0,\ k(s) = ||\alpha''(s)|| \Rightarrow \alpha''(s) = k(s)N(s)$ donde $N(s)$ es un vector unitario en la dirección de $\alpha''(s)$. Además, $\alpha''(s) \perp \alpha'(s) \Rightarrow N(s)$ es normal a $\alpha(s)$.*

Definición 1.10 (Vector Normal)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva regular p.p.a.. Entonces,*

$$N(s) = \frac{T'(s)}{k(s)}$$

se llama vector normal a α en s.

Observación. *El vector normal N es perpendicular al vector tangente unitario T y normal a la curva α en s. Esto es, $\alpha'(s) \cdot \alpha''(s) = T(s) \cdot k(s)N(s) = 0$*

Definición 1.11 (Plano Oscilador)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Entonces, $T(s), N(s)$ determinan un plano en $\mathbb{R}^3$ y lo llamamos plano oscilador.*

Observación. *También se llama Referencia móvil de Frenet para curvas planas.*

Definición 1.12 (Vector Binormal)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a.. Entonces, $B(s) = T(s) \times N(s)$ es el vector normal al plano oscilador en s y se dice vector binormal en s.*

Observación. *$||B'(s)||$ mide la tasa de cambio del plano oscilador, es deicr, la rapidez con la que la curva se aleja del plano oscilador en s.*

Nota. *$B' = T' \times N' + T \times N' = T \times N' \Rightarrow B'$ es normal a T y B' es paralelo a N. Entonces, escribimos $B' = \tau N$ para alguna función τ.*

Definición 1.13 (Torsión)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. tal que $\alpha''(s) \neq 0, s \in I$. Entonces, decimos que*

$$\tau(s) = \frac{B'(s)}{N(s)}$$

es la torsión de α en s.

Observación. *Si cambia la orientación entonces el signo del vector binormal cambia dado que $B = T \times N$. Por tanto, $B'(s)$ y la torsión se mantienen invariantes.*

Definición 1.14 (Tiedro de Frenet). *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. tal que $k > 0$. Entonces, para cada valor $s \in I$, $\exists T(s), N(s), B(s)$ vectores unitarios mutuamente ortogonales y los llamamos el tiedro de Frenet en α. Estos vectores vienen dados de la siguiente forma*

$$T(s) = \alpha'(s) \quad \textit{vector tangente} \ ,$$

$$k(s) = ||T'(s)|| \ \textit{curvatura} \ ,$$

$$N(s) = \frac{1}{k(s)} T'(s) \ \textit{vector normal} \ ,$$

$$B = T \times N \ \textit{vector binormal} \ ,$$

$$\tau(s) = \frac{B'(s)}{N(s)} \ \textit{torsión}$$

donde $T \cdot T = N \cdot N = B \cdot B = 1$ y cualquier otro producto escalar es 0.

DIBUJO

Definición 1.15 (Fórmulas de Frenet). *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva regualar p.p.a con $k > 0$ y torsión τ. Entonces,*

$$T' = kN,$$

$$N' = -kT + \tau B,$$

$$B' = -\tau N,$$

Proposición 1.4. *$\tau = 0$ si y solo si α es una curva en el plano.*

Demostración. *($\Rightarrow$) Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva plana p.p.a.. Entonces, $\exists p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^3$ tal que $(\alpha(s) - p) \cdot q = 0, \forall s \in I$. Derivando,*

$$\alpha'(s) \cdot q = \alpha''(s) \cdot q = 0, \ \forall s \in I.$$

Por tanto, q es ortogonal a T y $N \Rightarrow B = \frac{q}{||q||} \Rightarrow B' = 0 \Rightarrow \tau = 0$.

($\Leftarrow$) Sea $\tau = 0 \Rightarrow B' = 0 \Rightarrow B' \parallel B$. Queremos ver que α es ortogonal a B en 0. Sea

$$f(s) = (\alpha(s) - \alpha(0)) \cdot B, \forall s \in I.$$

Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \alpha' \cdot B = T \cdot B = 0$$

donde $f(0) = 0 \Rightarrow (\alpha(s) - \alpha(0)) \cdot B = 0, \;\; s \in I$. *Por tanto,* α *permanece en el plano ortogonal a* B.

Proposición 1.5. *Sea* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *una curva regular p.p.a. con curvatura constante* $k > 0$ *y* $\tau = 0$. *Entonces* α *es parte de un circulo de radio* $\frac{1}{k}$.

Demostración. $\tau = 0 \Rightarrow \alpha$ *es una curva en plano. Sea* $\gamma = \alpha + \frac{1}{k}N$ *entonces,*

$$\gamma' = \alpha' + \frac{1}{k_\alpha}N'_\alpha = T_\alpha - \frac{1}{k_\alpha}k_\alpha T_\alpha = 0.$$

Como $T_\gamma = 0 \Rightarrow k_\gamma = 0 \Rightarrow \gamma$ *es una recta horizontal. Sea* $\gamma = c \in \mathbb{R}$

$$\gamma(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k_\alpha(s)}N(s) = c, \; \forall s \in I$$

$$\Rightarrow d(c, \alpha(s)) = ||c - \alpha(s)|| = ||\frac{1}{k}N(s)|| = \frac{1}{k}.$$

Luego, α *es una curva que en todo punto se mantiene a distancia* $\frac{1}{k}$ *de un punto fijo* c, *el centro de la circunferencia.*

1.5. Curvas Arbitrarias

Proposición 1.6. *Sea* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *una curva regular con* $k > 0$ *y* $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ *su reparametrización por arco tal que* $\beta(t) = \alpha(s(t))$ *donde* $s(t)$ *es la longitud de arco. Entonces,*

$$T' = kvN$$

$$N' = -kvT + \tau v B$$

$$B' = -\tau v N$$

Demostración. $\frac{dT(s(t))}{dt} = T'(s(t)) \cdot s'(t) = k(s(t))N(s(t))v(t) = k(s)N(s)v.$

Proposición 1.7. *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular con $k > 0$ y $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ su reparametrización por arco tal que $\beta(t) = \alpha(s(t))$ donde $s(t)$ es la longitud de arco. Entonces,*

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'(s)\frac{ds}{dt} = vT(s),$$

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \frac{dv}{dt}T + vT' = v'T(s) + kv^2N$$

son la velocidad y aceleración de α en $s(t)$.

DIBUJO

Teorema 1.2. *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Entonces,*

$$T = \frac{\alpha'}{||\alpha'||},\ k = \frac{||\alpha' \times \alpha''||}{||\alpha'||^3},$$

$$N = B \times T,\ B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{||\alpha' \times \alpha''||},$$

$$\tau = (\alpha' \times \alpha'') \cdot \frac{\alpha'''}{||\alpha' \times \alpha'''||^2}.$$

Definición 1.16 (Hélice Cilíndrica)**.** *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular tal que $T(t) \cdot u = \cos(\varphi), \forall t \in I$. Entonces, α es una hélice cilíndrica.*

Teorema 1.3. *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva regula con $k > 0$. Entonces, α es una hélice cilíndrica si y solo si $\frac{\tau}{k}$ es constante.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva regular p.p.a con $k > 0$. Entonces, si α es una hélice cilíndrica $T(t) \cdot u = \cos(\varphi)$, $\forall t \in I \Rightarrow$

$$0 = (T \cdot u)' = T' \cdot u = kN \cdot u$$

donde $k > 0 \Rightarrow N \cdot u = 0$. Por tanto, $\forall t \in I$, u está en el plano *determinado por $T(t)$ y $B(t)$. Es decir,*

$$u = \cos(\varphi)T + \operatorname{sen}(\varphi)B.$$

Usando las fórmulas de Frenet

$$0 = (k\cos(\varphi) + \tau \operatorname{sen}(\varphi))N$$

$$\Rightarrow \frac{\tau}{k} = \frac{\cos(\varphi)}{sin(\varphi)}.$$

($\Leftarrow$) Si $\frac{\tau(t)}{k(t)} = \cos(\varphi), \forall t \in I$. Entonces, eligiendo $\cot(\varphi) = \frac{\tau}{k}$, si

$$U = \cos(\varphi)T + \operatorname{sen}(\varphi)B$$

tenemos que

$$U' = (k\cos(\varphi) - \tau \operatorname{sen}(\varphi))N = 0$$

determina un vector unitario u tal que $T \cdot u = \cos(\varphi) \Rightarrow \alpha$ es una hélice cilíndrica.

Teorema 1.4 (Fundamental de la Teoría Local de Curvas)**.** *Sean $k, \tau : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables con $k(s) > 0, \tau(s)$. Entonces, $\exists \alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva tal que s es la longitud de arco, $k(s)$ es la curvatura, y $\tau(s)$ es la torsión de α.*

Además, cualquier otra curva $\overline{\alpha}$ difiere de α por un movimiento rígido, es decir, $\exists \gamma : I \to \mathbb{R}$ aplicación lineal ortogonal con $\det \gamma > 0$ y $c \in \mathbb{R}^3$: $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha} \circ \gamma) + c$.

Demostración. *content*

Capítulo 2

Superficies

2.1. Definición de Superficie

Definición 2.1 (Superficies). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$. Entonces, decimos que S es una superficie si $\forall p \in S, \exists V \subset \mathbb{R}^3$ entorno de p en S y $\exists X : U \to V \cap S$ aplicación con $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto tal que*

(I) X es diferenciable,

(II) $X : U \to V$ es homeomorfismo,

(III) $(dX)_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva $\forall q \in U$.

donde $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y V entorno de p en S.

Observación. *En $I)$ si $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ entonces, $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ tienen derivadas parciales continuas en U.*

Observación. *En $II)$ dado que X es continua por $I)$ solo faltaría ver que X tiene inversa $X^{-1} : V \cap S \to U$ continua.*

Observación. *$(dX)_q$ inyectiva $\forall q \in U \Leftrightarrow \frac{\partial X}{\partial u}(q), \frac{\partial X}{\partial v}(q)$ l.i.*

Notación.

- *X se llama parametrización de S.*
- *u, v se llaman coordenadas locales de S.*
- *Las curvas obtenidas al fijar una de las variables, $X(u_0, v), X(u, v_0)$ se llaman curvas coordenadas.*

- *La imagén de X se llama entorno coordenado.*

Definición 2.2 (Valor Regular). *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, $a \in \mathbb{R}$. Entonces, decimos que a es un valor regular de f si $\forall p \in U : f(p) = a, (df)_p \neq 0$.*

Teorema 2.1 (de la Función Implícita). *Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $p = (x_0, y_0, z_0) \in U, a \in \mathbb{R}$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $f(p) = a$ y $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$, entonces $\exists U^{(x_0,y_0)} \subset \mathbb{R}^2, V^{z_0} \subset \mathbb{R}, g : U \to V$ tal que $U \times V \subset U, g(x_0, y_0) = z_0$ y*

$$\{p \in U \times V | f(p) = a\} = \big\{(x, y, g(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y \in U)\big\},$$

es decir, $f(x, y, z) = a$ se puede resolver para z cerca de p.

Proposición 2.1 (Gráfica es Superficie). *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces, la gráfica de f es una superficie regular.*

Demostración. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ aplicación diferenciable, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$ su gráfica, $X : U \to S : X(u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$ parametrización con $X(U) = S$. Entonces, X es diferenciable dado que f es diferenciable, X_u, X_v son linealmente independientes y x^{-1} es continua. Por tanto, S es una superficie.*

Proposición 2.2 (Imagen Inversa de Valor Regular). *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ función diferenciable, $a \in f(U) \subset \mathbb{R}$ un valor regular de f. Entonces, $S = f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset \Rightarrow S$ es superficie.*

Demostración. *Sea $p \in f^{-1}(\{a\})$. Entonces, a valor regular $\Rightarrow \exists i \in \{x, y, z\} : f_i(p) \neq 0$. Supongamos que $f_z(p) \neq 0$ y sea $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (x, y, f(x, y, z))$. Entonces,*

$$(dF)_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det((dF)_p) = f_z(p) \neq 0$. Por tanto, podemos aplicar el Teorema de la

Función Inversa. Entonces, $\exists V$ entorno de p y W entorno de $f(p)$ tal que $F : V \to W$ es invertible y $F^{-1} : W \to V$ es diferenciable. Por tanto, las funciones coordenada de F^{-1}

$$x = u, \quad y = v, \quad z = g(u, v, t), \qquad (u, v, t) \in W$$

son diferenciables. En particular, $z = g(u, v, a) = h(x, y)$ es una función diferenciable definida en la proyección de V al plano XY. Como

$$F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, t) : t = a\}$$

tenemos que $f^{-1}(a) \cap V$ es la gráfica de $h \Rightarrow$ es un entorno coordenado de $p \Rightarrow \forall p \in f^{-1}(a)$ se puede cubrir con un entorno coordenado $\Rightarrow f^{-1}(a)$ es una superficie regular. REVISAR

Proposición 2.3. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $p \in S$, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ aplicación con $p \in X(U) \subset S$ tal que X es diferenciable y $(dX)_q$ es inyectiva $\forall q \in U$. Entonces, si X es inyectiva, X^{-1} es continua.*

Demostración. *Similar a la siguiente prop*

2.2. Cambio de Parámetros

Definición 2.3 (Difeomorfismo)**.** *Un difeomorfismo es un homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable, es decir, una función biyectiva continua diferenciable con inversa continua diferenciable.*

Observación. *Un homeomorfismo es una aplicación biyectiva continua con inversa continua. Como f diferenciable $\Rightarrow f$ continua, para ver que f es difeomorfismo solo es necesario f biyectiva diferenciable con f^{-1} diferenciable.*

Proposición 2.4. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $X : U \to S$ parametrización tal que $p \in X(U)$. Sea $p_0 \in U : X(p_0) = p$. Entonces, $\exists V$ entorno de p_0 y $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ proyección ortogonal tal que $W = (\pi \circ X)(V) \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $\pi \circ X : V \to W$ es un difeomorfismo.*

Demostración. *Sea* $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. *Entonces,*

$$(dX)_{p_0} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}_{(p_0)}$$

Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto \pi(x,y,z) = (x,y)$, *entonces* $\pi \circ X : U \to \mathbb{R}^2$ *es diferenciable y*

$$d(\pi \circ X)_{p_0} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}_{(p_0)}$$

donde $\det(d(\pi \circ X)_{p_0}) \neq 0 \Rightarrow$ *por el teorema de la función inversa,* $\exists V \subset U$ *entorno de* p_0 *en* U *y* V_1 *entorno de* $\pi \circ X(p_0)$ *en* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $\pi \circ X$ *es biyectiva y diferenciable con* $(\pi \circ X)^{-1}$ *diferenciable* $\Rightarrow$ *difeomorfismo, tal que* $d(\pi \circ X)_{p_0}^{-1} = d(\pi \circ X^{-1})_{p_0}$.

Observación. *Un difeomorfismo es un homeomorfismo diferenciable con inverasa diferenciable.*

Observación. $Y = X \circ (\pi \circ X)^{-1} : W \to S$ *es parametrización del abierto* $\pi^{-1}(W) \cap U \cap S$ *como grafo sobre alguno de los planos coordenados.*

Proposición 2.5. *Sea* $S \subset \mathbb{R}^3$ *superfice,* $p \in S$. *Entonces,* $\exists V$ *entorno de* p *en* S *tal que V es la gráfica de una función diferenciable definida en uno de los planos coordenados.*

Demostración. *Sea* $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ *parametrización de* S *en* p *tal que*

$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v), (u,v) \in U.$$

Dado que X_u, X_v *son linealmente independientes* $\Rightarrow \det((dX)_q) \neq 0$ *donde* $q = X^{-1}(p)$, *suponemos que*

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}_q \neq 0$$

Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto \pi(x,y,z) = (x,y)$, *entonces* $\pi \circ X : U \to \mathbb{R}^2$ *y* $\det(d(\pi \circ X)_q) \neq 0$. *Entonces, podemos aplicar el teorema de la función inversa* $\Rightarrow \exists V_1$ *entorno de* q, V_2 *entorno de* $(\pi \circ X)(q)$ *tal que* $(\pi \circ X)|_{V_1} : V_1 \to V_2$ *difeomorfismo con inversa* $(\pi \circ X)^{-1} : V_2 \to V_1$.

Además, como X *es homemorfismo,* $X(V_1) = V$ *es entorno de* p *en*

S. Ahora, sea $z(u(x,y), v(x,y)) = f(x,y)$. Entonces, V es la gráfica de la función f.

Proposición 2.6 (Cambio de Parámetros). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superfice, $p \in S$, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$, $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \to S$ dos parametrizaciones de S tal que $p \in X(U) \cap Y(V) = W$. Entonces, $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \to X^{-1}(W)$ es un difeomorfismo. Se dice que h es un cambio de parámetros.*

Observación. *Si X, Y vienen dados por*

$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in U$$

$$Y(\xi,\omega) = (x(\xi,\omega), y(\xi,\omega), z(\xi,\omega)), \quad (\xi,\omega) \in V$$

entonces h viene dado por

$$u = u(\xi,\omega), v = v(\xi,\omega), \quad (\xi,\omega) \in Y^{-1}(W)$$

Además, h se puede invertir tal que h^{-1} viene dado por

$$\xi = \xi(u,v), \omega = \omega(u,v), \quad (u,v) \in X^{-1}(W)$$

Demostración. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $p \in S$,*

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S, \quad Y : V \subset \mathbb{R}^3 \to S$$

parametrizaciones de S tal que $p \in X(U) \cap Y(V) = W$ y

$$h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \to X^{-1}(W)$$

cambio de parámetros. Entonces, X parametrización $\Rightarrow$ X diferenciable y X_u, X_v son l.i. $\Rightarrow \det((dX)_p) \neq 0, \forall p \in U$. Entonces, por el teorema de la función inversa X es difeomorfismo. De la misma manera, Y es difeomorfismo. Por tanto, $h = X^{-1} \circ Y$ también lo es.

Observación. *X, Y son difeomorfismos $\Rightarrow$ h es difeomorfismo.*

Definición 2.4 (Caracterización Superficie). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Entonces, $\forall p \in S, \exists V \subset S : p \in V$ entorno, $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $X : U \to V$ difeomorfismo.*

Observación. *Una superfice regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es difeomorfica a $\mathbb{R}^2$*

2.3. Funciones Diferenciables

Nota. *La idea es reducir la difereciabilidad de una superficiea a diferenciabilidad en* $\mathbb{R}^2$.

Definición 2.5 (Función Diferenciable en $\mathbb{R}$)**.** *Sea* $S \subset \mathbb{R}^3$ *superficie,* $f : V \subset S \to \mathbb{R}$ *función. Entonces,* f *es diferenciable en* $p \in V$ *si* $\exists X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ *parametrización con* $p \in x(U) \subset V$ *tal que* $f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *es diferenciable en* $q = X^{-1}(p)$.

Observación. f *es diferenciable en* V *si* f *es diferenciable* $\forall p \in V$.

Observación. *La diferenciabilidad no depende de la elección de parametrización. Si* $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \to S$ *es otra parametrización con* $p \in Y(V)$ *y* $h = X^{-1} \circ Y$ *entonces* $f \circ Y = f \circ X \circ h$ *también es diferenciable.*

Definición 2.6 (Función Diferenciable en $\mathbb{R}^k$)**.** *Sea* $S \subset \mathbb{R}^3$ *superficie,* $f : S \to \mathbb{R}^k$. *Si* $f_j : S \to \mathbb{R}$ *es diferenciable* $\forall j \in \{1, \cdots, k\}$ *con* $f(p) = (f_1(p), \cdots, f_k(p))$, *entonces* f *es diferenciable.*

Definición 2.7 (Función Diferenciable entre Superficies)**.** *Sea* $S_1 \subset \mathbb{R}^3$, $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ *superficies,*

$$\varphi : V_1 \subset S_1 \to S_2$$

una aplicación continua. Dadas

$$X_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to S_1, \quad X_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to S_2$$

con $p \in X_1(U)$ *y* $\varphi(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$ *tal que*

$$X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 : U_1 \to U_2$$

es diferenciable en $q = X_1^{-1}(p)$, *entonces,* φ *es diferenciable en* $p \in V_1$.

Proposición 2.7 (Composición de Funciones Diferenciables)**.** *Sea* $S_1, S_2, S_3 \subset \mathbb{R}^3$ *superficies,* $f : S_1 \to S_2, g : S_2 \to S_3$ *diferenciables. Entonces,* $f \circ g$ *es diferenciable.*

Demostración. *content*

2.4. Plano Tangente

Definición 2.8 (Vector Tangente). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $p \in S$. Decimos que $v \in \mathbb{R}^3$ es un vector tangente a S en p si $\exists \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S, \epsilon > 0$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$*

Notación. *El conjunto de vectores tangentes a S en p se llama Plano Tangente en p y se representa T_pS.*

Proposición 2.8 (Caracterización Plano Tangente). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfice, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ parametrización, $q \in U$. Entonces,*

$$T_{X(q)}(S) = (dX)_q(\mathbb{R}^2)$$

Demostración.

($\Rightarrow$) *Sea $w \in T_{X(q)}(S)$. Entonces, para $\epsilon > 0$, $\exists \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to X(U) \subset S$ diferenciable tal que $\alpha(0) = X(q)$ y $\alpha'(0) = w$. Entonces, $\beta = X^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ es diferenciable. Por tanto, para $X \circ \beta = \alpha$, la definición de diferencial $\Rightarrow (dX)_q(\beta'(0)) = \alpha'(0) = w \Rightarrow w \in (dX)_q$.*

($\Leftarrow$) *Sea $w = (dX)_q(v), v \in \mathbb{R}^2$, donde $v \in \mathbb{R}^2$ es la pendiente de $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ tal que $\gamma(t) = vt + q, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Entonces, por definición de diferencial, $w = \alpha'(0)$ para $\alpha = X \circ \gamma \Rightarrow w \in T_q(S)$*

Observación. *El plano tangente a S en p $T_pS = (dX)_{X^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2)$ no depende de la elección de X parametrización. Pero si que determina una base $\{\frac{\partial X}{\partial u}(q), \frac{\partial X}{\partial v}(q)\}$ que genera $T_{X(q)}S$.*

Ejemplo. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ parametrización de S, $T_p(S)$ plano tangente en p generado por X, $w \in T_p(S)$ vector tangente. Entonces, las coordenadas de w en la base asociada a X se determina de la siguiente manera.*

El vector tangente $w = \alpha'(0)$ donde $\alpha = X \circ \beta$ donde $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ es una curva diferenciable dada por $\beta(t) = (X^{-1} \circ \alpha)(t) = (u(t), v(t))$ con $\beta(0) = q = X^{-1}(p)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\alpha'(0) &= \frac{d}{dt}(X \circ \beta)(0) = \frac{d}{dt}X(u(t), v(t))(0) \\ &= X_u(q)u'(0) + X_v(q)v'(0) = w\end{aligned}$$

Por tanto en la base $\{X_u(q), X_v(q)\}$, w tiene coordenadas $(u'(0), v'(0))$.

Observación. *Sea $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ superficies, $\varphi : V \subset S_1 \to S_2$ aplicación diferenciable. $\forall p \in V, \exists w \in T_p(S_1)$ tal que $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to V$ curva diferenciable con $\alpha'(0) = w, \alpha(0) = p$. Entonces, $\beta = \varphi \circ \alpha$ curva con $\beta(0) = \varphi(p) \Rightarrow \beta'(0) \in T_{\varphi(p)}(S_2)$.*

Además, $\beta'(0)$ no depende de la elección de α. La apliación $(d\varphi)_p : T_p(S_1) \to T_{\varphi(p)}(S_2)$ definida por $(d\varphi)_p(w) = \beta'(0)$ es lineal.

2.5. Diferencial de una Aplicación Diferenciable

Definición 2.9 (Diferencial)**.** *Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable. Sea $w \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ curva diferenciable tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$. Entonces, la curva $\beta = F \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable y $(dF)_p(w) = \beta'(0)$ es la diferencial de F en p, donde $(dF)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es aplicación lineal.*

Observación. *Forma para tangente*

Proposición 2.9. *La aplicación $(df)_p : T_pS \to \mathbb{R}^m$ está bien definida, es decir, $(df)_p(v)$ no depende de α. Además, es una aplicación lineal.*

Demostración. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ parametrización con $p \in X(U)$. Entonces, $T_pS = (dX)_q(\mathbb{R}^2)$ con $q = X^{-1}(p) \Rightarrow (dX)_q : \mathbb{R}^2 \to T_pS$ es un isomorfismo lineal (definición).*

Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, $\alpha(-\epsilon, \epsilon) \subset X(U)$. Ahora, la curva $X^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ es tal que $(X^{-1} \circ \alpha)(0) = q$. Como $X \circ (X^{-1} \circ \alpha) = \alpha$ derivando en $t = 0$ tenemos que

$$(dX)_q\big[(X^{-1} \circ \alpha)'(0)\big] = \alpha'(0) = w,$$

es decir,

$$(X^{-1} \circ \alpha)'(0) = (dX)_q^{-1}(w).$$

Por la regla de la cadena,

$$(f \circ \alpha)'(0) = \frac{d}{dy}(f \circ X) \circ (X^{-1} \circ \alpha)$$

$$= d(f \circ X)_q((X^{-1} \circ \alpha)'(0)) = d(f \circ X)_q \circ (dX)_q^{-1}(w)$$

Por tanto,

$$(df)_p = d(f \circ X)_q \circ (dX)_q^{-1}$$

Teorema 2.2 (Regla de la Cadena). *Sean $S_1, S_2, S_3 \subset \mathbb{R}^3$ superficies, $f : S_1 \to S_2, g : S_2 \to S_3$ aplicaiones diferenciables. Entonces, dado $p \in S_1$ tenemos que*

$$d(g \circ f)_p = (dg)_{f(p)} \circ (df)_p$$

(También para F:rnm -¿rnn, G:rnn -¿rnk)

Demostración. *Si $v \in T_pS_1$, elegimos*

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S_1$$

tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Entonces,

$$f \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S_2$$

tal que $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$ y $(f \circ \alpha)'(0) = (df)_p(v)$. Por tanto,

$$d(g \circ f)_p(v) = [(g \circ f) \circ \alpha]'(0)$$

$$= [g \circ (f \circ \alpha)'](0)$$

$$= (dg)_{f(p)}((df)_p(v)).$$

Teorema 2.3 (de la Función Inversa). *Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ difereciable, $p \in U : (dF)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es isomorfismo. Entonces, $\exists V \subset U : p \in V$ entorno y $\exists W \subset \mathbb{R}^n : F(p) \in W$ entorno tal que $F : V \to W$ tiene inversa difereciable $F^{-1} : W \to V$. $F|_V$ es difeomorfismo.*

Observación. *Un isomorfismo es una función biyectiva.*

Proposición 2.10. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Entonces,*

(I) *$f : S \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, S conexo y $(df)_p = 0, \forall p \in S \Rightarrow f$ es constante.*

(II) *$f : S \to \mathbb{R}$ diferenciable y $p \in S$ es un extremo local de $f \Rightarrow p$ es un punto crítico de f.*

Demostración.

(I) *Sea $a \in f(S)$. Entonces, $A = \{p \in S : f(p) = a\} \neq \emptyset, A \subset S$ cerrado. Veamos que A es abierto. Si $p \in A$, $X : U \to S$ parametrización tal que $p \in X(U)$ con U conexo, entonces $\forall q \in U, d(f \circ X)_q = (dX)_{X(p)} \circ (dX)_q = 0$. Entonces, $f \circ X$ es constante en $U \Rightarrow f = (f \circ X) \circ X^{-1}$ es constante en $X(U)$. Como $\forall p \in A, f(p) = a \Rightarrow p \in X(U) \subset A \Rightarrow A$ es abierto. Luego, S conexo $\Rightarrow A = S$, es decir, f es constante.*

(II) *Sea $p \in S$ extremo local de f. Si $v \in T_pS$ y $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, entonces $(f \circ \alpha)$ tiene un extremo local en $t = 0 \Rightarrow (df)_p(v) = (f \circ \alpha)'(0) = 0 \Rightarrow p$ es punto crítico de f.*

Teorema 2.4 (de la Función Implícita para Superficies)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $f : S \to \mathbb{R}$ diferenciable, $p \in S$, $a \in \mathbb{R}$. Si $f(p) = a$ y $(df)_p \neq 0$ (p no es punto crítico de f). Entoces, $\exists V \subset S$ entorno de p en S y $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ curva regular inyectiva homeomorfa a su imagen con $\epsilon > 0$ tal que*

$$\alpha(0) = p \quad \text{y} \quad f^{-1}(\{a\}) \cap V = \alpha(-\epsilon, \epsilon)$$

Por tanto, si $a \in f(S)$ entonces $f^{-1}(\{a\})$ es una curva simple.

Demostración. *Sea $U \subset \mathbb{R}^2 : (0,0) \in U$, $X : U \to S$ parametrización con $X(0,0) = p$. Definimos*

$$g : U \to \mathbb{R}$$

tal que $g = f \circ X$, entonces

$$g(0,0) = f(X(0,0)) = f(p) = a$$

y, por la regla de la cadena,

$$(df)_{(0,0)} = (df)_p \circ (dX)_{(0,0)}.$$

Dado que $(dX)_{(0,0)}$ es inyectiva y $(df)_p \neq 0$, tenemos que

$$(dg)_{(0,0)} \neq 0,$$

es decir, $(g_u, g_v)(0,0) \neq (0,0)$. Supongamos que $g_v(0,0) \neq 0$. Por el toerema de la aplicación implícita, $\exists \epsilon, \delta > 0$ y

$$h : (-\epsilon, \epsilon) \to (-\delta, \delta)$$

tal que $(-\epsilon, \epsilon) \times (-\delta, \delta) \subset U$ y $h(0) = 0$ ACABAR

Nota.

Definición 2.10 (Superficies Transversales)**.** *Sea $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ superficies, $p \in S_1 \cap S_2$ es un punto de intersección. Si*

$$T_p(S_1) = T_p(S_2),$$

entonces S_1 y S_2 son tangentes en p. En el caso contrario, si

$$T_p(S_1) \neq T_p(S_2),$$

entonces S_1 y S_2 se cortan transversalmente en p y, de forma local, la intersección es la traza de la curva.

Observación. *S_1 y S_2 son transversales si lo son $\forall p \in S_1 \cap S_2$.*

Proposición 2.11. *Sea $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ superficies que se cortan transversalmente en p. Entonces, $\exists V \subset \mathbb{R}^3$ entorno de p, $I \subset \mathbb{R}$ abierto, $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ homeomorfa a $\alpha(I)$ tal que $\alpha(I) = V \cap S_1 \cap S_2$.*

Demostración. Sea $O \subset \mathbb{R}^3$ entorno de p y $g : O \to \mathbb{R}$ tal que 0 es un valor regular y $S_2 \cap O = g^{-1}(\{0\})$. Definimos

$$f : S_1 \cap O \to \mathbb{R}$$

por $f = g|_{S_1 \cap O}$ diferenciable tal que $p \in f(S_1 \cap O)$. Ademaś, $f(p) = g(p) = 0$ y $(df)_p = (dg)_{p|_{T_p S_1}}$. Si p fuera punto crítico de f, tendríamos que

$T_pS_1 \subset \ker(dg)_p = T_pS_2$. *Pero esto es imposible ya que* S_1 *y* S_2 *se cortan transversalmente. Aplicando el teorema de la función implícita tenemos el resultado.*

Teorema 2.5. *La intersección transversal de dos superficies es vacía o es un curva simple.*

Teorema 2.6 (Función Inversa)**.** *Sean* $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$*,* $f : S_1 \to S_2$ *aplicación difereciable,* $p \in S_1$*. Si* $(df)_p : T_p(S_1) \to T_{f(p)}(S_2)$ *es un isomorfismo lineal, entonces* $\exists V_1$ *entorno de* p *en* S_1 *y* $\exists V_2$ *entorno de* $f(p)$ *en* S_2 *tal que* $f(V_1) = V_2$ *y* $f|_{V_1} : V_1 \to V_2$ *es un difeomorfismo.*

Demostración. *Sea*

$$X_i : U_i \to S_i, \quad i \in \{1, 2\}$$

parametrizaciones tal que $p \in X_1(U_1), f(p) \in X_2(U_2)$ *y* $f(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$*. Sea* $q_i \in U_i, i \in \{1, 2\}$ *tal que* $X_1(q_1) = p$ *y* $X_2(q_2) = f(p)$*. La aplicación*

$$X_2^{-1} \circ f \circ X_1 : U_1 \to U_2$$

es diferenciable y

$$d(X_2^{-1} \circ f \circ X_1)_{q_1} = (dX_2)_{q_2}^{-1} \circ (df)_p \circ (dX_1)_{q_1}$$

es un isomorfismo lineal por ser composición de isomorfismos. Ahora, podemos aplicar el teorema de la función inversa. Entonces, $\exists W_i \subset U_i$ *entornos de* $q_i, i \in \{1, 2\}$ *tal que*

$$(X_2^{-1} \circ f \circ X_1)(W_1) = W_2$$

y tal que

$$X_2^{-1} \circ f \circ X_1 : W_1 \to W_2$$

es un difeomorfismo. Para $V_i = X_i(W_i) \subset S_i, i \in \{1, 2\}$*, tenemos que* $V_1 \subset S_1$ *es un entorno de* p *y* $V_2 \subset S_2$ *es un entorno de* $f(p)$*. Además,* $f(V_1) = V_2$ *y*

$$f|_{V_1} = X_2 \circ (X_2^{-1} \circ f \circ X_1) \circ X_1^{-1} : V_1 \to V_2$$

es un difeomorfismo, ya que es composición de difeomorfismos.

Proposición 2.12. *Sean $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ superficies, $\phi : S_1 \to S_2$ difeomorfismo, $p \in S_1$. Entonces, $(d\phi)_p : T_p(S_1) \to T_{f(p)(S_2)}$ es isomorfismo lineal y $(d\phi)_p^{-1} = (d\phi^{-1})_p$.*

Demostración. *Sea $w \in T_{\phi(p)}S_2$ y $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to S_2$ tal que $\beta(0) = \phi(p), \beta'(0) = w$. Entonces, $\alpha = \phi^{-1} \circ \beta : (-\epsilon, \epsilon) \to S_1$ diferenciable tal que $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = w$ y $(d\phi)_p(\alpha(0)) = (\phi \circ \alpha)'(0) = \beta'(0) = w$.*

ACABAR

Capítulo 3

Orientabilidad

3.1. Campos

Definición 3.1 (Campo)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Un espacio vectorial diferenciable en S es una aplicación diferenciable $V : S \to \mathbb{R}^3$.*

- *Si $V(p) \in T_p(S), \forall p \in S$, decimos que V es un campo tangente a S.*
- *Si $V(p) \perp T_p(S), \forall p \in S$, decimos que V es un campo normal a S.*

Además, si $|V(p)| = 1, \forall p \in S$, decimos que V es el campo unitario.

Observación. *$\forall p \in S$, hay dos vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$ perpendiculares al plano tangente $T_p(S)$.*

Proposición 3.1. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie, $X : U \to \mathbb{R}^3$ parametrización de S. Entonces, $\exists N \subset V = X(U)$ campo normal unitario.*

Demostración. *content*

Definición 3.2 (Supercicies Orientable)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie. Decimos que S es orientable si admite un campo normal unitario global $N : S \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Decimos que N es una orientación de S. Cada superficie S tiene dos orientaciones. Fijada N decimos que S está orientada.*

Observación. *el campo vectorial unitario global N se conoce como aplicación de Gauss.*

Proposición 3.2. *Sea* $S \subset \mathbb{R}^3$ *superficie. Entoces,* S *es orientable* $\Leftrightarrow \exists N : S \to \mathbb{R}^3$ *en* S.

Demostración. *content*