Ejercicios Geometría Diferencial

Hugo Del Castillo Mola

23 de octubre de 2022

Índice general

Capítulo 1

Curvas

Ejercicio 1.1 (25). *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular $\mathcal{C}^\infty$. Demuestra que la recta tangente en cada punto $\alpha(s_0)$ es límite de rectas secantes, es decir, el límite de las rectas que pasan por $\alpha(s_1)$ y $\alpha(s_2)$ cuando s_1 y s_2 tienden a s_0.*

Solución (25). *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular $\mathcal{C}^\infty$, $s_0, s_1, s_2 \in I : s_1 < s_0 < s_2$. Entonces,*

$$S \equiv \alpha(s_2) - \alpha(s_1)$$

es la recta secante que pasa por s_1 y s_2. Si $s_i \to s_0$, $i \in \{1, 2\}$ entonces, $s_1 = s_0 - h_1 \xrightarrow{h_1 \to 0} s_0$ y $s_2 = s_0 + h_2 \xrightarrow{h_2 \to 0} s_0$. Consideramos el vector secante unitario

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\alpha(s_2) - \alpha(s_1)}{||s_2 - s_1||} \\ &= \frac{\alpha(s_0 + h_2) - \alpha(s_0 - h_1)}{||h_2 + h_1||} \end{aligned}$$

donde tomando límites

$$\begin{aligned} &\lim_{h_1, h_2 \to 0} \frac{\alpha(s_0 + h_2) - \alpha(s_0 - h_1)}{||h_2 + h_1||} \\ &= \lim_{h_2 \to 0} \Big(\lim_{h_1 \to 0} \frac{\alpha(s_0 + h_2) - \alpha(s_0 - h_1)}{||h_2 + h_1||} \Big) \\ &= \lim_{h_2 \to 0} \frac{\alpha(s_0 + h_2) - \alpha(s_0)}{||h_2||} = \alpha'(s_0) \end{aligned}$$

es el vector tangente unitario en $s_0 \in I$.

Ejercicio 1.2 (35). *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ curva p.p.a., $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ movimiento rígido y $\beta = M \circ \alpha$ curva. Demostrar*

(I) *M conserva la orientación $\Rightarrow k_\beta = k_\alpha$, $\tau_\beta = \tau_\alpha$,*

(II) *M invierte la orientación $\Rightarrow k_\beta = k_\alpha$, $\tau_\beta = -\tau_\alpha$.*

Solución (35). *Sea $\beta = (M \circ \alpha)$ donde $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \phi(t) = At + \vec{v}$ es un movimiento rígido con A matriz ortonormal asociada a la isometría y $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.*

Sea α p.p.a entonces,

$$||\beta'|| = ||(M \circ \alpha)'|| = ||A\alpha'|| = ||\alpha'|| = 1$$

β es p.p.a.. Esto se debe a que

$$d_t M = \frac{d}{dt}(At + \vec{v}) = A$$

$$\Rightarrow d_t(M \circ \alpha) = \frac{d}{dt}(A\alpha(t) + \vec{v}) = A\alpha'(t)$$

y dado que A es ortonormal, es decir, $A^t = A^{-1}$

$$\Rightarrow ||Ax|| = \sqrt{Ax \cdot Ax} = \sqrt{x \cdot A^t A} = ||x||, \ \forall x \in \mathbb{R}^3$$

$\Rightarrow A$ conserva la norma.

Para la curvatura de β, que es $k_\beta = ||\beta''||$, tenemos que

$$k_\beta = ||(M \circ \alpha)''|| = ||(A\alpha + \vec{v})''|| = ||A\alpha''|| = ||\alpha''|| = k_\alpha$$

dado que A es la matriz asociada a la ismoetría del movimiento rígido M, y conserva la norma. Entonces, $k_\beta = k_\alpha \Rightarrow$ la curvatura es invariante por movimiento rígido.

Y para la torsión de β que es

$$\begin{aligned}\tau_\beta = (\beta' \times \beta'') \cdot \beta''' &= (A\alpha' \times A\alpha'') \cdot A\alpha''' \\ &= \det(A) A(\alpha' \times \alpha'') \cdot A\alpha''' \\ &= \det(A)(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha''' \\ &= \det(A)\tau_\alpha \\ &\pm \det(A)\tau_\alpha\end{aligned}$$

esto se debe a que el producto vectorial bajo transformaciones de matrices obedece $(Ba) \times (Bb) = (\det(B))(B^{-1})^t(a \times b), B \in \mathcal{M}_{3\times 3}, a, b \in \mathbb{R}^3$*. Luego,* A *es ortogonal por ser la matriz asociada a una isometría linea* $\Rightarrow (A^t)^{-1} = A$*. Y* $\det(A) = \pm 1$ *por ser* A *matriz ortogonal.*

Por tanto, la torsión de β *es*

$$\tau_\beta = \begin{cases} \tau_\alpha, & \text{si } A \text{ conserva la orientación} \\ -\tau_\alpha, & \text{si } A \text{ invierte la orientación} \end{cases}$$

> **Ejercicio 1.3** (40)**.** *Sea* α *una curva* C^∞ *con* $k(s) > 0$*. Demostrar que el plano osculador en* $\alpha(s)$ *generado por* $T(s), N(s)$ *es el límite de los planos que pasan por las tripletas* $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$ *cuando* $s_i \to s$*.*

Solución (40)**.** *Sea* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *una curva regular p.p.a.,* $s_1, s_2, s_3 \in I : \alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$ *puntos no alineados y* $P(s_1, s_2, s_3)$ *el plano generado por* $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$*. Sea la curva*

$$\phi(s) = \alpha(s) \cdot n(s_1, s_2, s_3), s \in I$$

donde n *es el vector unitario perpendicular al plano* P*. Como*

$$\alpha(s_i) \in P(s_1, s_2, s_3) \Rightarrow \phi(s_i) = \alpha(s_i) \cdot n(s_1, s_2, s_3) = 0, \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

entonces, por el teorema del Valor Medio

$$\exists c_i \in (s_i, s_{i+1}) : \phi'(c_i) = \alpha'(c_i) \cdot n(s_1, s_2, s_3) = 0, \forall i \in \{1, 2\}$$

Volviendo a aplicar el teorema de Valor Medio

$$\exists t \in (c_1, c_2) : \phi''(t) = \alpha''(t) \cdot n(s_1, s_2, s_3) = 0$$

Por tanto, $n(s_1, s_2, s_3) = \alpha'(c_i) \times \alpha''(t), i \in \{1, 2\}$*. Si* $s_i \to s_0$ *entonces,* $n(s_1, s_2, s_3) \to \vec{n} = n(s_0, s_0, s_0) = \alpha'(s_0) \times \alpha''(s_0) \Rightarrow \vec{n}$ *es normal al plano generado por* α' *y* α''*, es decir, el límite de los planos que pasan por las tripletas* $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$ *es el plano osculador, generado por* T, N*.*

Capítulo 2

Superficies I

> **Ejercicio 2.1** (1). *Halla el plano tangente en cada punto de la esfera de radio 2 en* $\mathbb{R}^3$.

Solución. *Sea* $\mathbb{S}^2(r) = \{p \in \mathbb{R}^3 : |p - p_0| \leq r\}$ *con* $p_0 \in \mathbb{R}^3$ *es la esfera de centro* p_0 *y radio* r.

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(p) = |p - p_0|^2$ *y* $r \in f(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}$. *Entonces,* $\forall p \in \mathbb{R}^3 : f(p) = r$ *se tiene que* $(df)_p \neq 0$. *Por tanto,* r *es valor regular de* f. *Luego,* $\mathbb{S}^2(r)$ *es superfice. En particular,* $\mathbb{S}^2(2) = f^{-1}(\{2\})$ *es superficie.*

Ahora, si $v \in T_p(S)$, *entonces* $\exists \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ *con* $\alpha(0) = p$ *y* $\alpha'(0) = v$. *Por tanto,* $(f \circ \alpha)(t) = r, \forall t \in (-\epsilon, \epsilon) \Rightarrow (df)_p = (f \circ \alpha)'(0) = 0 \Rightarrow v \in \ker(df)_p$. *Como* $T_p(S) \subset \ker(df)_p$ *y ambos son subespacios lineales de dimensión dos, entonces* $T_p(S) = \ker(df)_p$.

> **Ejercicio 2.2** (2). *Sea* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\}$. *Demostrar que*
>
> (I) S *es una superficie*
>
> (II) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $\varphi(u, v) = (u + v, u - v, 4uv)$ *es una parametrización de* S *y dibujar las líneas coordenadas.*

Solución.

(I) *Sea* $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por*

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

La aplicación es diferencible y

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^3\}$$

es la gráfica de f. Luego, $X : U \to S : (u,v) \mapsto (u,v,f(u,v))$ es parametrización de S. Entonces, S es una superficie.

(II) *$\varphi = X \circ h$ donde $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $h(u,v) = (u+v, u-v)$. Como X es parametrización $\Rightarrow$ X difeomorfismo y h es difeomorfismo, entonces φ es difeomorfismo con $\varphi(\mathbb{R}^2) = S \Rightarrow \varphi$ es parametrización.*

Ejercicio 2.3 (3). *Parametrizar el elipsoide*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a,b,c > 0$$

Además, para cada plano $Ax + By + Cz = 0$ encontrar los puntos del elipsoide cuyo plano tangente es paralelo.

Solución. *Sea el conjunto de puntos del elipsoide*

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$$

y sea una función

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

Entonces, $f^{-1}(0) = S$ donde 0 es valor regular ya que

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right) \neq 0, \quad \forall (x,y,z) \in f^{-1}(0)$$

y por tanto, S es una superficie.

Ahora, el plano tangente de S es el núcleo de $(df)_p$. Sea $p = (p_1,p_2,p_3) \in S$. Entonces,

$$T_pS = \ker(df)_p$$

$$= \left\{(v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{2p_1}{a^2}, \frac{2p_2}{b^2}, \frac{2p_3}{c^2}\right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0\right\}$$

$$= \left\{(v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3 : \frac{2p_1}{a^2} \cdot v_1 + \frac{2p_2}{b^2} \cdot v_2 + \frac{2p_3}{c^2} \cdot v_3 = 0\right\}$$

es un plano tangente a S en el punto p que pasa por el origen. Luego, los puntos del elipsoide cuyo plano tangente es paralelo a $Ax + By + Cz = 0$ serán

$$\left\{(p_1, p_2, p_3) \in S : \frac{2p_1}{a^2} = A \cdot k, \frac{2p_2}{b^2} = B \cdot k, \frac{2p_3}{c^2} = C \cdot k, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$

ya que dos planos son paralelos si y solo si sus vectores normales son paralelos.

> **Ejercicio 2.4** (4). *Sea $V = \{(\theta, \phi) : \theta \in (0, \pi), \phi \in (0, 2\pi)\}$, $X : V \to \mathbb{R}^3$ definida por*
>
> $$X(\theta, \phi) = (\operatorname{sen}(\theta)\cos(\phi), \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi), \cos(\theta)).$$
>
> *Demostrar que X es una parametrización de un abierto de la esfera.*

Solución. *Es claro que $X(V) \subset \mathbb{S}^2$. Veamos que X es una parametrización de S.*

Primero, X es diferenciable y tiene derivadas parciales continuas. Por tanto, X es diferenciable. Además,

$$\begin{aligned}
X_\theta &= (\cos(\theta)\cos(\phi), \cos(\theta)\operatorname{sen}(\phi), -\operatorname{sen}(\theta)) \\
X_\phi &= (-\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi), \operatorname{sen}(\theta)\cos(\phi), 0) \\
X_\theta \times X_\phi &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(\theta)\cos(\phi) & \cos(\theta)\operatorname{sen}(\phi) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi) & \operatorname{sen}(\theta)\cos(\phi) & 0 \end{vmatrix} \\
&= \big(-\operatorname{sen}^2(\theta)\cos^2(\phi), -\operatorname{sen}^2(\theta)\operatorname{sen}(\phi), \cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\big) \\
X_\theta \times X_\phi &= \sqrt{\operatorname{sen}^4(\theta)\cos^2(\phi) + \operatorname{sen}^4(\theta)\operatorname{sen}^2(\phi) + \cos^2(\theta)\operatorname{sen}^2(\theta)} \\
&= \operatorname{sen}^4(\theta) + \cos^2(\theta)\operatorname{sen}^2(\theta) \\
&= \operatorname{sen}^2(\theta)
\end{aligned}$$

Entonces, $X_\theta \times X_\phi = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2(\theta) = 0$. Pero $\forall \theta \in (0, \pi), \operatorname{sen}^2(\theta) \neq 0$. Por tanto, $(dX)_p$ son linealmente independientes $\forall p \in V$. Falta ver que X es continua y tiene inversa continua.

(ESCRIBIR BIEN INTERVALOS) Como $(0, 0), (0, 2\pi), (\pi, 0), (\pi, 2\pi) \notin V$ definimos $\mathbb{S}^2 \setminus C$ donde C es el semicírculo

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : y = 0, x \geq 0\}.$$

Entonces, X es continua en $\mathbb{S}^2 \setminus C$ y por el teorema de la función inversa $\Rightarrow X$ tiene inversa X^{-1} en $\mathbb{S}^2 \setminus C$. Satisfechas las condiciones anteriores y siendo X inyectiva, tenemos que X^{-1} es continua. Por tanto, X es una parametrización de $\mathbb{S}^2 \setminus C$.

Ejercicio 2.5 (5). *Una forma de definir un sistema de coordenadas para la esfera $\mathbb{S}^2$, dada por $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, es considerar la proyección estereográfica $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ que lleva el punto $p = (x, y, z)$ de la esfera $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ donde $N = (0, 0, 2)$ a la intersección del plano XY con la línea recta que conecta N con p. Sea $(u, v) = \pi(x, y, z)$ donde $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ y $(u, v) \in XY$.*

(I) *Mostrar que $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$ viene dada por*

$$\pi^{-1} \begin{cases} x = \frac{4u}{u^2+v^2+4} \\ y = \frac{4v}{u^2+v^2+4} \\ z = \frac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4} \end{cases}$$

(II) *Mostrar si es posible, usando la proyección estereográfica, cubrir la esfera con dos entornos coordenados.*

Solución.

(I) *Dado $q \in XY$ tal que $q = (q_1, q_2)$ hallamos el punto $p \in \mathbb{S}^2 : \pi(p) = q$. Buscamos el punto de intersección entre la esfera $\mathbb{S}^2$ y la recta r que une q con N. Una parametrización de la recta puede ser*

$$r \equiv \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ 2 \end{pmatrix} t$$

entonces, $\forall (x, y, z) \in r$ tenemos que

$$x = q_1(1-t), \quad y = q_2(1-t), \quad z = 2t$$

Sustituimos en la ecuación de la esfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ para hallar el punto de intersección

$$q_1^2(1-t)^2 + q_2^2(1-t)^2 + (2t-1)^2 = 1$$
$$(q_1^2 + q_2^2)(1-t)^2 + (2t-1)^2 = 1$$
$$(q_1^2 + q_2^2)(1-t)^2 = 4t(1-t)$$
$$(q_1^2 + q_2^2)(1-t) = 4t$$
$$q_1^2 + q_2^2 = t(4 + q_1^2 + q_2^2)$$
$$\Rightarrow t = \frac{q_1^2 + q_2^2}{4 + q_1^2 + q_2^2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4u}{u^2+v^2+4}, \quad y = \frac{4v}{u^2+v^2+4}, \quad z = \frac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4}$$

(II) *Se puede cubrir la esfera usando dos parametrizaciones, una X usando $N = (0, 0, 2)$ y otra Y usando $S = (0, 0, 0)$.*

Ejercicio 2.6 (11)**.** *Ejemplo 4 sección 2.3 do Carmo*

Capítulo 3

Superficies II

Ejercicio 3.1 (1)**.** *Sea* $S, S' \subset \mathbb{R}^3$ *superficies,* $\alpha : I \to S$ *una curva diferenciable,* $f : S \to S'$ *aplicación diferenciable. Demostrar que* $f \circ \alpha : I \subset \mathbb{R} \to S'$ *es una curva diferenciable.*

Solución. *Ejemplo 2.39 Sebastian*

Ejercicio 3.2 (2)**.** *Construir un difeomorfismo entre la esfera y el elipsoide*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Hallar su diferencial.

Solución. *Sea la esfera*

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

y el elipsoide

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$$

y $f : \mathbb{S}^2 \to E$ *definida por*

$$f(x, y, z) = (ax, by, cz).$$

Vemos que f *está bien definida. Si* $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$*, entonces*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Ahora, $f(x, y, z) = (x', y', z')$ *tal que*

$$x' = ax, \quad y' = by, \quad z' = cz$$

$$\Rightarrow x = \frac{x'}{a}, \quad y = \frac{y'}{b}, \quad z = \frac{z'}{c}$$

entonces,

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

por tanto, $(x', y', z') = f(x, y, z) \in E.$

FALTA VER PROPOSICIÓN 3 DO CARMO, función inversa