Ejercicios Geomtería Diferencial

Hugo Del Castillo Mola

4 de octubre de 2022

Índice general

Capítulo 1

Espacio de Probabilidad

1.1. Experimentos aleatorios

Definición 1.1 (Experimento Determinista)**.** *Experimeto cuyo desarrolo es previsible con certidumbre y sus resultados están perfectamente determinados una vez fijadas las condiciones del mismo.*

Ejemplo. *Averiguar el espacio recorrido por un cuerpo en caída libre en el vacío al cabo de cierto tiempo* t*, donde se sabe que* $x = \frac{1}{2}gt^2$ *con* g *la gravedad de la Tierra.*

Definición 1.2 (Experimento Aleatorio)**.** *Experimento en contexto de incertidumbre. Se caracterizan porque su desarrolo no ese previsible con certidumbre.*

Ejemplo. *Lanzar un dado.*

1.2. Espacio Muestral

Definición 1.3 (Espacio Muestral)**.** *Dado un experimento aleatorio,* Ω *es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento. Decimos que* Ω *es el espacio muestral del experimento y los elementos de* Ω *se llaman sucesos elementales.*

Ejemplo. *Dado el experiemento "Lanzar un dado y obtener un* 6*", el espacio muestral es* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*. Si consideramos "Lanzar un dado y obtener un número par", el espacio muestral sería* $\Omega = \{ \text{ par }, \text{ impar } \}$*.*

1.2.1. Tipos de Espacios Muestrales

Definición 1.4 (Espacio Muestral Finito)**.** *Sea Ω un espacio muestral. Entonces, decimos que Ω es finito si tiene un número finito de elementos.*

Ejemplo. *Lanzar un dado.*

Definición 1.5 (Espacio Muestral Infinito Numerable)**.** *Sea Ω un espacio muestral. Entonces, decimos que Ω es infinito numerable si tiene un número infinito y numerable de elementos.*

Ejemplo. *Lanzar una moneda hasta obtener cara por primera vez. Aquí debemos considerar que se puede dar el caso en el que no se obtenga nunca cara y tiremos la moneda infinitas veces.*

Definición 1.6 (Espacio Muestral Continuo)**.** *Sea Ω un espacio muestral. Entonces, decimos que Ω es continuo si no hay discontinuidades o cambios abrutos entre los elementos del espacio muestral.*

Ejemplo. *El nivel del agua de un pantano entre los tiempos t_1, t_2. El espacio muestral $\Omega = \{f_t : t \in [t_1, t_2]\}$.*

1.3. Sucesos

Nota. *Sea $\mathcal{A} \subset \Omega$. Decimos que se ha presentado el suceso $A \subset \mathcal{A}$ si el resultado del experiemento ha sido $w \in A$, un suceso elemental contenido en $\mathcal{A}$.*

1.4. Sucesiones de Conjuntos

Definición 1.7 (Sucesión de Conjuntos)**.** *Sea Ω espacio muestral, $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Omega)$ una aplicación. Decimos que f es una sucesión de conjuntos y la repesentamos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.*

1.5. Límites de una sucesión de conjuntos

Definición 1.8 (Límite Inferior)**.** *Sea Ω espacio muestral, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ sucesión de conjuntos. Entoces, el límite inferior de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es el conjunto de puntos de Ω cuyos elementos pertenecen a todos los A_n excepto a lo* *sumo a un número finito de ellso.* $\liminf A_n$.

Definición 1.9 (Límite Superior)**.** *Sea* Ω *espacio muestral,* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *sucesión de conjuntos. Entoces, el límite superior de* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es el conjunto de puntos de* Ω *cuyos elementos pertenecen a infinitos* A_n*. Y se denota* $\limsup A_n$.

Observación. $A \in \{A_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow A \in \limsup A_n$ *pero* $A \notin \liminf A_n$

Proposición 1.1. *Sea* Ω *espacio muestral,* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *una sucesión de conjuntos. Entonces,*

(I) $\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$,

(II) $\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$.

Demostración.

(I) ($\Rightarrow$) *Sea* $w \in \liminf A_n$*. Entonces,* $\exists k \in \mathbb{N} : w \in A_n, \forall n \geq k$*. Por tanto,*

$$w \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

($\Leftarrow$) *Sea* $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$*. Entonces,* $\exists k \in \mathbb{N} : w \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in A_k \cap A_{k+1} \cap \cdots \Rightarrow w$ *pertenece a infinitos* A_n *salvo a lo sumo a un número finito de ellos.*

(II) ($\Rightarrow$) *Sea* $w \in \limsup A_n$*. Entonces,* $w \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow w \in \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n.$$

($\Leftarrow$) *Sea* $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$*. Entonces,* $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in A_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow w \in \limsup A_n$.

Proposición 1.2. $\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow \liminf A_n \subset \limsup A_n$.

Demostración. *Sea* $w \in \liminf A_n$. *Entonces,* $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : w \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in A_n, \forall n \geq k \Rightarrow w \in \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in \limsup A_n$.

1.5.1. Sucesión de conjuntos convergente

Definición 1.10 (Covergencia)**.** *Sea* Ω *un espacio muestral,* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *una sucesión. Entonces, decimos que* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente si y solo si* $\liminf A_n = \limsup A_n$.

1.5.2. Sucesiones Monótonas

Definición 1.11 (Sucesión Monótona)**.** *Sea* Ω *un espacio muestral,* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *una sucesión. Entonces, decimos que* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona creciente si y solo si* $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$. *Y decimos que* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona decreciente si y solo si* $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$.

Notación.

(I) $\uparrow A_n$ *sucesión monótona creciente,*

(II) $\downarrow A_n$ *sucesión monótona creciente.*

Proposición 1.3. *Sea* Ω *un espacio muestral,* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *una sucesión monónota. Entonces,* $\liminf A_n = \limsup A_n$.

Demostración. *(I) Sea* $\downarrow A_n$. *Entonces,* $A_{n+1} \subset A_n \Rightarrow$

$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

y

$$\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Por tanto, $\liminf A_n = \limsup A_n$.

(II) Sea $\uparrow A_n$. Entonces, $A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow$

$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

y

$$\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Por tanto, $\liminf A_n = \limsup A_n$.

1.6. Estructuras con Subconjuntos

1.6.1. Álgebra

Definición 1.12 (Álgebra)**.** *Dado el espacio total Ω, una clase $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tiene estructura de álgebra si y solo si*

(I) $\Omega, \emptyset \in \mathcal{Q}$,

(II) $\forall A \in \mathcal{Q}, A^c \in \mathcal{Q}$

(III) $\forall A, A' \in \mathcal{Q}, A \cap A' \in \mathcal{Q}$,

Definición 1.13 (σ-Álgebra)**.** *Dado el espacio total Ω, una clase $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tiene estructura de σ-álgebra si y solo si*

(I) $\Omega, \emptyset \in \mathcal{Q}$,

(II) $\forall A \in \mathcal{Q}, A^c \in \mathcal{Q}$

(III) $\forall \{A_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{Q},\ \bigcap_{j \in J} A_j \in \mathcal{Q}$

1.7. Espacio Medibles

Definición 1.14 (Espacio Medible)**.** *Sea Ω espacio muestralm $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ σ-álgebra. Entoces, al par $(\Omega, \mathcal{A})$ lo llamamos espacio medible. Los elementos de $\mathcal{A}$ se llaman conjuntos medibles.*

1.8. Probabilidad

Definición 1.15 (Medida de Probabilida)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espacio medible,* $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *aplicación. Entonces, se dice que* P *es una medida de probabilidad si cumpe*

(I) $\forall A \in \Omega, P(A) \geq 0,$

(II) $P(\Omega) = 1,$

(III) $\forall \{A_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{A} : A_i \cap A_j = \emptyset, \forall j \neq i \Rightarrow$

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Proposición 1.4 (Propiedades Medida Probabilidad)**.**

(I) $P(\emptyset),$

(II) $\forall \{A_j\}_{j\in J}$ *familia finita con elementos disjuntos dos a dos, entonces*

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{k} P(A_k),$$

(III) $\forall A \in \mathcal{A}, P(A^c) = 1 - P(A),$

(IV) $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \subset B, P(A) \leq P(B),$

(V) $\forall A \in \mathcal{A}, P(A) \leq 1,$

(VI) $\forall A, B \in \mathcal{A}, P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

(VII) $\forall \{A_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{A}, P\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_j\big) = \sum_{j=1} P(A_j) - \sum_{j_1, j_1=1, j_1<j_2} P(A_{j_1} \cap A_{j_2}) + \cdots + (-1)^{j+1} P\big(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\big)$

(VIII) $\forall A, B \in \mathcal{A}, P(A \cup B) \leq P(A) + P(B),$

(IX) $\forall \{A_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{A}$ *finita*

$$P\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$$

(x) $\forall \{A_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{A}$
$$P\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

(xi) $\forall \{A_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{A}$,
$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \geq 1 - \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j^c)$$

1.9. Espacio de Probabilidad

Definición 1.16 (Espacio de Probabilidad)**.** *Sea Ω espacio muestra, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ σ-álgebra, P medida de probabilidad. Entonces, a la terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se le llama espacio de probabilidad. Los elementos de $\mathcal{A}$ se llaman sucesos.*

1.10. Continuidad Secuencial de la Probabilidad

Teorema 1.1. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, $\{A_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{A}, \uparrow A_j$. Entonces,*
$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Demostración. $A_n \uparrow \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. *Sea A tal que*
$$A = A_1 \cup \left[\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_{j+1} - A_j)\right]$$
entonces, A es unión de conjuntos disjuntos. Aplicado la aditividad finita tenemos que
$$P(A) = P(A_1) + \sum_{j=1}^{\infty}(A_{j+1} - A_j)$$
$$= P(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n}(P(A_{j+1}) - P(A_j))$$
$$= \lim_{n\to\infty} \big(P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)+P(A_3)-P(A_2)+\cdots+P(A_{n+1})-P(A_n)\big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Teorema 1.2. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad,* $\{A_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{A}, \downarrow A_j$*. Entonces,*

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Demostración. $A_n \downarrow \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$ *y* $A_n^c \uparrow \Rightarrow$ *(por la proposición anterior)*

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n^c) = \lim_{n\to\infty} P(A_n^c)$$

donde $\lim_{n\to\infty} A_n^c = A^c$.

Ahora,

$$\begin{aligned} P(\lim_{n\to\infty} A_n) &= P(A) = 1 - P(A^c) \\ &= 1 - P(\lim_{n\to\infty} A_n^c) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} \left\{1 - P(A_n)\right\} \\ &= 1 - 1 + \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \end{aligned}$$

1.11. Probabilidad Condicionada

Definición 1.17 (Probabilida Condicionada)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad y se* $A \subset \mathcal{A}$ *un suceso tal que* $P(A) > 0$*. Entonces, decimos que*

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}, P(A) > 0$$

es la probabilidad de B *condiconada por* A*.*

1.11.1. Teorema del producto

Teorema 1.3 (Regla multiplicación). *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad,* $A, B\mathcal{A} : P(A), P(B) > 0$. *Entonces,*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \text{ y}$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

1.11.2. Teorema de Probabilidad Total

Teorema 1.4 (Probabilidad Total). *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *espacio de probabilidad,* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} : A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$. *Entonces, para* $B \in \mathcal{A}$

$$P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j) \cdot P(A_j)$$

donde $P(A_j) > 0, \forall j \in \{1, 2, \cdots\}$

Demostración.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) \\ &= P\Big(B \cap \Big[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big]\Big) \\ &= P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} (B \cap A_i)\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} B \cap A_i \\ &= P(B|A_i) \cdot P(A_i),\ \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Teorema 1.5 (de Bayes). *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *espacio de probabilidad,* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ *tal que* $P(A_i) > 0, \forall i \in \mathbb{N}, B \in \mathcal{A} : P(B) > 0$. *Entonces,*

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) P(B|A_i)}, i \in \mathbb{N}.$$

Demostración.

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

usando la independencia de sucesos y el teorema de la probaibilidad total tenemos que

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}, i \in \mathbb{N}.$$

1.12. Independencia de Sucesos

Definición 1.18. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad,* $A, B \in \mathcal{A}$ *con* $P(B) > 0$. *Entonces,* A *y* B *se dicen independientes si y solo si*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Proposición 1.5. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad,* $A, B \in \mathcal{A}$ *tal que* A *y* B *son sucesos independientes. Entoces,*

$$P(A|B) = P(A) \text{ si } P(B) > 0 \text{ y}$$

$$P(B|A) = P(B) \text{ si } P(A) > 0.$$

Proposición 1.6. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad,* $A, B \in \mathcal{A}$ *tal que* A *y* B *son sucesos independientes. Entonces, también lo son* A^c *y* B^c*,* A *y* B^c*,* A^c *y* B*.*