Ejercicios Probabilidad

Hugo Del Castillo Mola

11 de diciembre de 2022

Índice general

Capítulo 1

Probabilidad

Ejercicio 1. *De los 42 electores del colegio electoral 15 votan A y 27 votan B. Entonces,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{A \leq 3\} &= \sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}\{A = i\} \\ &= \frac{\binom{15}{0}\binom{27}{10}}{\binom{42}{10}} + \frac{\binom{15}{1}\binom{27}{9}}{\binom{42}{10}} + \frac{\binom{15}{2}\binom{27}{8}}{\binom{42}{10}} + \frac{\binom{15}{3}\binom{27}{7}}{\binom{42}{10}} \\ &= \frac{\binom{27}{10} + 15\binom{27}{9} + \binom{15}{2}\binom{27}{8} + \binom{15}{3}\binom{27}{7}}{\binom{42}{10}}\end{aligned}$$

es la probabilidad de que de entre los 10 electores, 3 o menos eligan A.

Ejercicio 2. *Calculamos la probabilidad condicionada de que al lanzar cinco monedas se obtengan 3 caras sabiendo que se obtienen almenos 2 caras.*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{C = 3 | C \geq 2\} &= \frac{\mathbb{P}\{(C = 3) \cap (C \geq 2)\}}{\mathbb{P}\{C \geq 2\}} \\ &= \frac{\mathbb{P}\{C = 3\}}{\mathbb{P}\{C \geq 2\}}\end{aligned}$$

donde usando la regla de Laplace tenemow que

$$\mathbb{P}\{C = 3\} = \frac{\binom{5}{3}\binom{2}{2}}{2^5} = \frac{5}{16}$$

Ahora,

$$\mathbb{P}\{C \geq 2\} = 1 - \mathbb{P}\{C = 0\} - \mathbb{P}\{C = 1\}$$

$$1 - \frac{\binom{5}{5}}{2^5} - \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{4}}{2^5} = \frac{13}{16}$$

Por tanto,

$$\mathbb{P}\{C = 3 | C \geq 2\} = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{13}{16}} = \frac{5}{13}$$

Ejercicio 3. *Comprobamos que la función*

$$\mathbb{P}\{A\} = \sum_{x \in A} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

donde $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ y $\lambda > 0$, es una medida de probabilidad.

(I) *Es trivial ver que*

$$\mathbb{P}\{A\} = \sum_{x \in A} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

ya que los términos son siempre positivos.

(II) *En el caso que el cojunto sea el espacio muestral*

$$\mathbb{P}\{\Omega\} = \sum_{x \in \Omega} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda}$$

(III) *Sea $\{A_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{A}$ disjuntos dos a dos, entonces*

$$\mathbb{P}\{\bigcup_{j \in J} A_j\} = \sum_{k \in \bigcup_{j \in J} A_j} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$= \sum_{\omega \in A_1} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{\omega}}{\omega!} + \cdots + \sum_{\omega \in A_j} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{\omega}}{\omega!} + \cdots$$

$$= \sum_{j\in J} \sum_{\omega\in A_j} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{\omega}}{\omega!} = \sum_{j\in J} \mathbb{P}\{A_j\}$$

Por tanto, la función es una medida de probabilidad.

Ejercicio 4. *Para calcular la esperaza y la varianza de la variable aleatoria X primero obtenemos su función de densidad derivando al función de distribución*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \textit{otro caso} \end{cases}$$

Entonces,

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot x dx = \int_0^1 \frac{2x}{3} \cdot x dx = \frac{2x^3}{9}\Big|_0^1 = \frac{2}{9}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot x^2 dx = \int_0^1 \frac{2x}{3} \cdot x^2 dx = \frac{2x^4}{12}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{6} - \frac{2}{9}^2$$

Ejercicio 5. *Calculamos la función de densidad de la variable transformada* $Y = -2 \cdot \ln(X)$.

$$F_y(y) = \mathbb{P}\{Y = y\} = \mathbb{P}\{-2 \cdot \ln(X) = y\}$$

$$= \mathbb{P}\{\ln(X) = -\frac{y}{2}\}$$

$$= \mathbb{P}\{X = e^{-\frac{y}{2}}\}$$

$$= F_X(e^{-\frac{y}{2}})$$

Ahora,

$$f_y(y) = \frac{dF_y(y)}{dy} = \frac{dF_x(e^{-\frac{y}{2}})}{dx} \cdot \left|\frac{d(e^{-\frac{y}{2}})}{dy}\right|$$

$$= f(e^{-\frac{y}{2}}) \cdot \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}$$

donde $0 < x < 1$, *entoces* $0 < y < +\infty$.

Ejercicio 6. *Calculamos el número de unidades necesarias para satisfacer el* $80\,\%$ *de la demanda usando la desigualda de Chevyshev con* $\mathbb{E}[X] = 100, \sigma = 40$.

$$\mathbb{P}\{|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\} \leq \frac{V(X)}{t^2}$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}\{|X - 100| \geq t\} \leq \frac{40^2}{t^2}$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}\{t - 100 \leq X \leq t + 100\} \leq \frac{40^2}{t^2} = 0,2$$
$$\Rightarrow \frac{40}{t} = \sqrt{0,2}$$
$$\Rightarrow t = \frac{40}{\sqrt{0,2}} = 89,44$$

Por tanto, debemos disponer de 90 *unidades.*

Ejercicio 7.

(I) *Calculamos la función generatriz de momentos, que existe ya que*

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{\theta x}| \cdot f(x)dx < +\infty.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} M(\theta) &= \int_{\mathbb{R}} e^{\theta x} f(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{\theta x} \cdot e^{-x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x(1-\theta)} dx \\ &= \left. \frac{e^{-x(1-\theta)}}{\theta + 1} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{1-\theta} \end{aligned}$$

es la función generatriz de momentos.

(II) Calculamos la función característica.

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \int_0^{+\infty} e^{itx} \cdot e^{-x} dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-x(1-it)} dx \\
&= \left.\frac{e^{-x(1-it)}}{-(1-it)}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{1-it}
\end{aligned}$$