Ejercicios Geomtería Diferencial

Hugo Del Castillo Mola

26 de septiembre de 2022

Índice general

Capítulo 1

Espacio de Probabilidad

1.1. Experimentos aleatorios

Definición 1.1 (Experimento Determinista). *Experimeto cuyo desarrolo es previsible con certidumbre y sus resultados están perfectamente determinados una vez fijadas las condiciones del mismo.*

Ejemplo. *Averiguar el espacio recorrido por un cuerpo en caída libre en el vacío al cabo de cierto tiempo t, donde se sabe que $x = \frac{1}{2}gt^2$ con g la gravedad de la Tierra.*

Definición 1.2 (Experimento Aleatorio). *Experimento en contexto de incertidumbre. Se caracterizan porque su desarrolo no ese previsible con certidumbre.*

Ejemplo. *Lanzar un dado.*

1.2. Espacio Muestral

Definición 1.3 (Espacio Muestral). *Dado un experimento aleatorio, Ω es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento. Decimos que Ω es el espacio muestral del experimento y los elementos de Ω se llaman sucesos elementales.*

Ejemplo. *Dado el experiemento "Lanzar un dado y obtener un 6", el espacio muestral es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si consideramos "Lanzar un dado y obtener un número par", el espacio muestral sería $\Omega = \{$ par , impar $\}$.*

1.2.1. Tipos de Espacios Muestrales

Definición 1.4 (Espacio Muestral Finito). *Sea Ω un espacio muestral. Entonces, decimos que Ω es finito si tiene un número finito de elementos.*

Ejemplo. *Lanzar un dado.*

Definición 1.5 (Espacio Muestral Infinito Numerable). *Sea Ω un espacio muestral. Entonces, decimos que Ω es infinito numerable si tiene un número infinito y numerable de elementos.*

Ejemplo. *Lanzar una moneda hasta obtener cara por primera vez. Aquí debemos considerar que se puede dar el caso en el que no se obtenga nunca cara y tiremos la moneda infinitas veces.*

Definición 1.6 (Espacio Muestra Continuo). *Sea Ω un espacio muestral. Entonces, decimos que Ω es continuo si no hay discontinuidades o cambios abrutos entre los elementos del espacio muestral.*

Ejemplo. *El nivel del agua de un pantano entre los tiempos t_1, t_2. El espacio muestral $\Omega = \{f_t; t \in [t_1, t_2]\}$.*

1.3. Sucesos

Nota. *Sea $\mathcal{A} \subset \Omega$. Decimos que se ha presentado el suceso $A \subset \mathcal{A}$ si el resultado del experiemento ha sido $w \in A$, un suceso elemental contenido en $\mathcal{A}$.*

1.4. Sucesiones de Conjuntos

Definición 1.7 (Sucesión de Conjuntos). *Sea Ω espacio muestral, $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Omega)$ una aplicación. Decimos que f es una sucesión de conjuntos y la repesentamos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.*

1.5. Límites de una sucesión de conjuntos

Definición 1.8 (Límite Inferior). *Sea Ω espacio muestral, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ sucesión de conjuntos. Entoces, el límite inferior de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es el conjunto de puntos de Ω cuyos elementos pertenecen a todos los A_n excepto a lo* *sumo a un número finito de ellso.* $\liminf A_n$.

Definición 1.9 (Límite Superior). *Sea Ω espacio muestral, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ sucesión de conjuntos. Entoces, el límite superior de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es el conjunto de puntos de Ω cuyos elementos pertenecen a infinitos A_n. Y se denota* $\limsup A_n$.

Observación. $A \in \{A_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow A \in \limsup A_n$ *pero* $A \notin \liminf A_n$

Proposición 1.1. *Sea Ω espacio muestral, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una sucesión de conjuntos. Entonces,*

(I) $\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$,

(II) $\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$.

Demostración.

(I) ($\Rightarrow$) Sea $w \in \liminf A_n$. Entonces, $\exists k \in \mathbb{N} : w \in A_n, \forall n \geq k$. Por tanto,

$$w \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

($\Leftarrow$) Sea $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$. Entonces, $\exists k \in \mathbb{N} : w \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in A_k \cap A_{k+1} \cap \cdots \Rightarrow w$ pertenece a infinitos A_n salvo a lo sumo a un número finito de ellos.

(II) ($\Rightarrow$) Sea $w \in \limsup A_n$. Entonces, $w \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow w \in \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n.$$

($\Leftarrow$) Sea $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$. Entonces, $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in A_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow w \in \limsup A_n$.

Proposición 1.2. $\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow \liminf A_n \subset \limsup A_n$.

Demostración. *Sea* $w \in \liminf A_n$. *Entonces,* $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : w \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in A_n, \forall n \geq k \Rightarrow w \in \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \Rightarrow w \in \limsup A_n$.

1.5.1. Sucesión de conjuntos convergente

Definición 1.10 (Covergencia)**.** *Sea* Ω *un espacio muestral,* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *una sucesión. Entonces, decimos que* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente si y solo si* $\liminf A_n = \limsup A_n$.

1.5.2. Sucesiones Monótonas

Definición 1.11 (Sucesión Monótona)**.** *Sea* Ω *un espacio muestral,* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *una sucesión. Entonces, decimos que* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona creciente si y solo si* $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$. *Y decimos que* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona decreciente si y solo si* $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$.

Notación.

(I) $\uparrow A_n$ *sucesión monótona creciente,*

(II) $\downarrow A_n$ *sucesión monótona creciente.*

Proposición 1.3. *Sea* Ω *un espacio muestral,* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *una sucesión monónota. Entonces,* $\liminf A_n = \limsup A_n$.

Demostración. (I) *Sea* $\downarrow A_n$. *Entonces,* $A_{n+1} \subset A_n \Rightarrow$

$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

y

$$\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Por tanto, $\liminf A_n = \limsup A_n$.

(ii)