Ejercicios Probabilidad

Hugo Del Castillo Mola

19 de octubre de 2022

Índice general

Capítulo 1

Probabilidad

1.1. Entrega 3

Ejercicio 1.1 (Ejercicio 2, Hoja 4). *Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{2}$ y $P(A|B) = \frac{1}{4}$. Indicar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:*

1. $A \subset B$,
2. A y B independientes,
3. A^c y B^c independientes,
4. A y B incompatibles,
5. $P(A^c|B^c) = \frac{1}{2}$,
6. $P(A|B) + P(A|B^c) = 1$

Solución. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ donde $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $A, B \in \mathcal{A}$ tal que $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{2}$ y $P(A|B) = \frac{1}{4}$.*

(I) *(FALSO) Supongamos que $A \subset B$, entonces $A \cap B = A \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)$ y*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

Es contradicción, dado que $P(B|A) = \frac{1}{2}$. Por tanto, $A \not\subset B$.

(II) *(CIERTO) Sabemos que*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

entonces

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(A \cap B)$$
$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Ahora,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$\Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Como A y B son independientes $\Leftrightarrow$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A)$$

donde $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ y $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Deducimos que A y B son independientes.

(III) *(CIERTO) Veamos que A y B independientes $\Rightarrow$ A^c y B^c independientes. Queremos ver que $P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c)$.*

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

donde $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ por ser A y B independientes,

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)$$

$$= 1 - P(A) - P(B)(1 - P(A)) = P(A^c) - P(B) \cdot P(A^c)$$
$$= P(A^c)(1 - P(B^c)) = P(A^c) \cdot P(B^c)$$

(IV) *(FALSO) Si A y B son incompatibles, $P(A \cap B) = 0$ pero $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$.*

(V) *(FALSO) Por ser A^c y B^c independients, tenemos que*

$$P(A^c|B^c) = P(A^c) = 1 - P(A) = \frac{3}{4} \neq \frac{1}{2}$$

(VI) *(FALSO) Por ser A y B independientes, A^c y B^c son independientes. También lo son A y B^c ya que*

$$P(A^c \cap B) = P(B \setminus (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B)$$

donde $A \cap B \subset B$, entonces

$$P(A^c \cap B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B) \cdot P(A^c)$$

A partir de la independencia de estos sucesos,

$$P(A|B) + P(A|B^c) = P(A) + P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 1.2 (Ejercicio 6, Hoja 4). *Sean A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sucesos independientes. Demostrar que:*

(I) *$A_1 \cup A_2$, $A_3 \cap A_4$ y A_5 son independientes,*

(II) *$(A_1 \cup A_2) \cap A_3$ y ${A_4}^c \cup {A_5}^2$ son independientes.*

Solución. (I)

(II) *Primero, $A_1 \cup A_2$ y $A_3 \cap A_4$ son independientes si y solo*

$$P((A_1 \cup A_2) \cap (A_3 \cap A_4)) = P(A_1 \cup A_2) \cdot P(A_3 \cap A_4)$$

Como

$$P((A_1 \cup A_2) \cap (A_3 \cap A_4)) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3 \cap A_4) - P((A_1 \cup A_2) \cup (A_3 \cap A_4))$$

(III)