高中导数

零、高中导数概述

导数是高中的一大难点，其中包含了过多的知识点，如不等式放缩、零点定理等，涉及的题型也极其多样，如隐零点、同构、极值点偏移、端点效应……

然而高中部分老师只是将导数作为高中数学的一章，并不明白就应试的目的而言，应该将导数作为单独一科，仔细介绍其中的知识点。

一、预备知识

1、导数的定义

2、函数不等式汇总

2.1 泰勒展开式相关的不等式及其衍生式

2.1.1 指数函数类

由$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$可得:

1. $e^x\geq 1+x+\frac{x^2}{2}(x\geq 0)$
2. $e^x\geq 1+x(x\in\mathbb{R})$

下证不等式(1):

构造函数$f(x)=e^x-(1+x+\frac{x^2}{2})$

求导有：$f'(x)=e^x-x-1$

再次求导有：$f''(x)=e^x-1$

因为$e^x-1\geq 0(x\geq 0)$，
所以$f''(x)\geq 0(x\geq 0)$，
所以$f'(x)$在$[0,+\infty]$递增，
所以$f'(x)\geq 0(x\geq 0)$,
所以$f(x)$在$[0,+\infty]$递增

不等式(1)得证

下证不等式(2)：

由不等式(1)的证明可类比得到。

注1：

由证法可知，对于$x \in \mathbb{R}$，$e^x \geq x+1$均成立，其中 $y=x+1$为$y=e^x$在$(0,1)$处的切线方程，由此可衍生出许多不等式。

例如：由上述不等式，可写出一个“元”不等式：$e^{f(x)} \geq f(x)+1$。

1. 若令$f(x)=x-1$，可得一个常见的放缩不等式：$e^x \geq ex(x \in \mathbb{R})$
2. 若令$f(x)=-x$，可得：$e^x \leq \frac{1}{1-x}$
3. 若令$f(x)=x+\ln x$，可得$xe^x \geq x+\ln x+1$(常见同构放缩不等式)

相似的，如果我们把刚得到的不等式进行进一步衍生，又可以诞生出一些有用的式子：

1. 若将$e^x \geq ex$中的x换成$\frac{x}{2}$可得：$e^x \geq \frac{e^2}{4}x^2 \geq x^2$（直接将$e^x$与$x^2$产生联系，好用的取点不等式）
2. 若将$e^x \geq ex$中的x换成$\frac{x}{3}$可得：$e^x \geq \frac{e^3}{27}x^3 \geq \frac{1}{2}x^3$（直接将$e^x$与$x^3$产生联系，好用的取点不等式）
3. 甚至，若将$e^x \geq x+1$中的x换成$\ln x$，可得：$\ln x \geq x-1$，这个式子一会儿会讲。

上述衍生不等式可能出现于任何题目中，遇到它们别害怕，它们其实都是$e^x \geq x+1$，所以一定要关注并理解“元”不等式。

注2：

将不等式$e^x \geq x+1$弱化，可得$e^x > x$。虽然弱化后的式子精确度下降，但是它极为精简，只有一次项，可以用于解决一些取点问题。

注3：

在$f(x)=x$的泰勒展开式中截取片段，可得：

n为奇数，则：$e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}(x \in \mathbb{R})$

n为偶数，则：

$x \geq 0$时，$e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}(x \in \mathbb{R})$;

$x \leq 0$时，$e^x < 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}(x \in \mathbb{R})$

注4：

用$-x$替换x可得：$e^x=1+\frac{-x}{1!}+\frac{(-x)^2}{2!}+\cdots$

则由泰勒公式有：$e^x-e^{-x}=2(x+\frac{x^3}{3!}+\ldots)$

由上式可衍生出一个重要不等式：$e^x-e^{-x}\geq 2x(x\geq 0)$

事实上，$\frac{e^x-e^{-x}}{2}$与$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$互为反函数。

于是，当$x\geq 0$时，有不等式链：$\frac{e^x-e^{-x}}{2}\geq x\geq \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

2.1.2 对数函数类

由于$\ln x$在$x=0$处无定义，因此在这里我们转为研究$f(x)=\ln(x+1)$的性质，再通过函数变换得到$f(x)=\ln x$的性质。

$\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$

把上式当作“元”式，可得：

$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+\cdots$

由上述不等式可以生成一系列不等式：

1. $x\geq 0$时，$x\geq \ln(x+1)\geq x-\frac{x^2}{2}(当且仅当x=0取等)$。可直接构造函数进行证明。
2. 对于$\ln x\leq x-1$，用$\frac{x}{e}$替换x有：$\frac{x}{e}-1\geq \ln\frac{x}{e}$，即$\ln x\leq \frac{x}{e}$（依旧是一个常见的切线放缩不等式，因为它由$\ln x\leq x-1$这个切线放缩不等式衍生出来）
3. 对于不等式链：$1-\frac{1}{x}\leq \ln x\leq x-1$
   ，用$x+1$替代x，则可得：

$$\frac{x}{x+1}\leq \ln(x+1)\leq x(x\geq 0)$$

注1：

对$ln(x+1)\leq x$的两边取指数有：$e^x\geq x+1$，又一次体现了“元”的思想。

注2：

$y=x$为$y=\ln(x+1)$在$(0,0)$处的切线

注3：

用$x-1$替代x，可知：$\ln x \le x-1$，（极为常见），可得到一个“元”式：$\ln f(x) \le f(x)-1$。令$f(x)=\frac{1}{x}$有：$\ln x \ge 1-\frac{1}{x}$，则可知双边不等式：$1-\frac{1}{x} \le \ln x \le x-1$（极为常见）

注4：

由$\ln(x+1)$的泰勒展开式可得：

n为奇数时，$\ln(x+1) \le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}(x \ge 0)$

n为偶数时，$\ln(x+1) \ge x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}(x \ge 0)$

下面为方便读者阅读，将1，2两部分涵盖的不等式整理为下方的不等式“树”：

> 暂略

上面的不等式“树”涵盖了众多不等式，笔者将它们一一列出，并不是希望读者将它们全部熟记于心，而是希望读者能够在此基础上充分理解“元”的思想，并且可以熟练运用一些重要不等式，从而帮助自己在考场高压的环境下“游龙/游弋”。可以说，市面上大多数导数模拟题不过都是源自一个复杂的衍生不等式。

2.1.3 三角函数类

1. $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$
2. $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$
3. $\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\cdots$

由上述式子可以得到一系列不等式：

1. $x \ge 0$时，$x-\frac{x^6}{6} \le \sin x \le x \le \tan x$；$1-\frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$
   关于三角函数类常见不等式实际上只有那么几个，下面再一一介绍它们。
2. $\sin x \ge \frac{2}{\pi}x(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$
   上述式子为Jordan不等式，由于$y=\frac{2}{\pi}x$为$y=\sin x$的割线，且$y=\sin x$为上凸函数，因此上式成立。
3. $x \ge 0$时，$\frac{\sin x}{x+\sin x} \le \frac{x}{3}$
   证明：
   $f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}-\frac{x}{3}$
   $f'(x)=-\frac{(\cos x-1)^2}{3(2+\cos x)^2}$
   因为$f'(x) \le 0$，所以$f(x)$在$\mathbb{R}$上单调递减，所以$f(x) \le f(0)=0$
   注：类似地，当$x \ge 0$时，$\frac{\sin x}{3+\cos x} \le \frac{x}{4}$
4. $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$时，$\sin x+\tan x \ge 2x$
   证明：

设$f(x)=\sin x+\tan x-2x$

$f'(x)=\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-2\geq\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}-2\geq 0$

因为$f'(x)\geq 0$

所以$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上单调递增

所以$f(x)\geq f(0)=0$

即 $\sin x+\tan x\geq 2x(0\leq x<\frac{\pi}{2})$

注：上述论证法中使用了$\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\geq 2$这一个均值不等式，这是一种常见的放缩手段

5. $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$时，$2\sin x+\tan x\geq 3x$

证明：

设$f(x)=2\sin x+\tan x-3x$

$f'(x)=\frac{(2\cos x+1)(\cos x-1)^2}{\cos^2 x}\geq 0$

因为$f'(x)\geq 0$

所以$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$单调递增

所以$f(x)\geq f(0)=0$

即$2\sin x+\tan x\geq 3x(0\leq x\leq\frac{\pi}{2})$

至此，函数不等式的部分彻底结束，下面是一些例题，供读者练习。

例1、已知$\frac{e^x}{x^3}-x-a\ln x\geq 1$对于任意的$x\in(1,+\infty)$成立，求$a$的范围

解：

$$\begin{aligned}\text{原式}\iff&\frac{e^x}{x^3}-x-1\geq a\ln x &(1)\\ \iff& e^{x-3\ln x}-x-1\geq a\ln x &(2)\end{aligned}$$

则由$e^x\geq x+1$, 将其中的x代换为$x-3\ln x$,

则$e^{x-3\ln x}-x-1\geq x-3\ln x-x-1+1\geq a\ln x$

则$a\leq -3$

3、泰勒公式

4、洛必达法则

5、增长速率