

**INSTITUTO  
DE INGENIERÍA  
UNAM**

Instituto de Ingeniería - UNAM  
Coordinación de Ingeniería Sismológica

---

**Diseño de un esquema numérico de inversión de datos  
basado en regresión lineal para determinar la velocidad  
de fase a partir del registro de ruido sísmico empleando  
la técnica del Arreglo Circular sin Centro, CCA.**

---

Marco Antonio Oliva Gutiérrez

Agosto - 2019



## Resumen

El presente manual pretende servir como una manual de usuario para el esquema computacional de inversión de datos de ruido sísmicos unidimensional obtenidos con la técnica de Arreglo Circular sin Centro (Centerless Circular Array) en lo subsecuente CCA escrito con ayuda del Sistema Algebraico Computarizado Matlab.

El manual incluye la descripción de cada elemento que lo conforma, el fundamento teórico del problema inverso que aborda así como experimentos numéricos con base en información conocida a manera de verificación.



## Listado de variables

- **alpha0:** Serie de tiempo 0 eq XX en cho.
- **alpha1** Serie de tiempo 0 eq XX en cho.
- **Dt** Muestreo realizado en la adquisición de datos.
- **Dv** Parámetro para modelar la Velocidad de fase inicial, contribuye con la frecuencia del TPSDR. Varía en ordenes de magnitud logarítmicos.
- **f** Ancho de banda total de la función M.
- **F1** Genera una figura con 4 subplots. El primer subplot corresponde a la función M. El Cociente del Espectro de Densidad de Potencia calculado a partir de los datos observados
- **F2** Genera el segundo subplot en la figura 1 correspondiente a la función M en el ancho de banda seleccionado.
- **F3** Genera el tercer subplot en la figura 1 con la curva de velocidad de fase inicial.
- **F4** Genera el cuarto subplot en la figura 1 con el la respuesta teórica del modelo a la velocidad de fase seleccionada (Cociente del Espectro de Densidad de Potencia Teórico).
- **F5** Genera un gráfico donde se muestran el modelo calculado a cada iteración.
- **F6** Gráfico del Error Medio Cuadrático RMS.
- **F7** Gráfico de la velocidad de fase calculada (resultado del proceso de inversión)
- **F8** Gráfico que actualiza la velocidad de fase inicial y la respuesta del modelo en la figura 1 en caso de que el modelo no sea el adecuado antes de proceder a la inversión (Esta figura se activa en caso de seleccionar No en el cuadro de dialogo).
- **file** Contiene las series de tiempo de todos los sensores empleados en la adquisición de datos.
- **finv** Ancho de banda seleccionado para invertir.
- **fn** Frecuencia de Nyquist.



- **fs** Frecuencia máxima.
- **G0** Espectro de densidad de potencia obtenido a partir de la síntesis de las series de tiempo contenidas en  $\alpha_0$ .
- **G1** Espectro de densidad de potencia obtenido a partir de la síntesis de las series de tiempo contenidas en  $\alpha_1$ .
- **inv-ZtZ** Matriz cuadrada de OBS, PAR con  $\text{OBS} = \text{PAR}$  resultado de la inversa del producto de la Matriz  $Z$  con su transpuesta  $(Z^t Z)^{-1}$ .

*(Función teórica de Bessel de primera especie y orden cero. Se emplea para calcular la respuesta teórica de la función)*

- **J0T** Función teórica de Bessel de primera especie y primer orden. Se emplea para calcular la respuesta teórica de la función  $M(rk(\omega))$ .
- **kr** Producto del número de onda dependiente de la frecuencia y el radio del arreglo.
- **LonReg** Longitud del registro de microtemores en segundos.
- **M** Cociente del Espectro de Densidades de Potencia  $G_0$  y  $G_1$  de datos observados. Se denominada función  $M$ , dependiente del producto del radio del arreglo y el numero de onda en función de la frecuencia  $M(rk(\omega))$ .
- **M2** Espectro de Densidad de Potencia del ancho de banda seleccionado.
- **Max** Frecuencia máxima del ancho de banda a invertir.
- **Min** Frecuencia mínima del ancho de banda a invertir.
- **NoEst** Número total de estaciones del arreglo circular empleado en la adquisición de datos en campo.
- **NoReg** Cantidad total de registros de microtemores.
- **nV** Número de ventanas totales calculado a partir del número de ventanas, la longitud del registro y el tamaño de la ventana.
- **nXven** Numero de datos por ventana, se calcula a partir del tamaño de la ventana y el muestreo implementado.
- **OBS** Número total de observaciones (datos).
- **r** Radio del arreglo circular de campo.



- **RMS** Error Medio Cuadrático.
- **sigma** Parámetro para modelar la Velocidad de fase inicial, controla la frecuencia del TPSDR varia en escala de decenas.
- **TPSDR** Del ingles Teoretical Power Spectral Density Ratio. Es el modelo directo del método CCA, simula numéricamente la respuesta teórica del Cociente del Espectro de Dendidad de Potencia.
- **Tras** Permite seleccionar el traslape de los periodogramas que se construyen en la función Observados.m
- **V0** Parámetro para modelar la Velocidad de fase inicial, denominado velocidad inicial, controla la primer caída a cero del TPSDR, es el parámetro mas sensible del modelo inicial.
- **Vpcal** Velocidad de fase calculada. Es el modelo invertido de velocidad de fase resultado de la inversión.
- **W** Tamaño de la ventana en segundos.
- **Xmc** Es la solución de la ecuación  $y = Ax + b$ . Representa la X calculada con **mínimo cuadrado**, esta variable al finalizar el proceso iterativo es renombrada como Vpcal.
- **Z** Matriz de Jacobiano con diferencias finitas de segundo orden.

## Componentes del esquema de Inversión

El esquema computacional está conformado por 15 archivos, 1 principal y 14 subprogramas representados por funciones, todos ellos escritos en Matlab con extensión .m, cada uno de ellos se enlistan a continuación:

- **CCA1Dinv**

- reAdfiLe
- Observados
- BandaINV
- DirectoCCA
- Jacobiano
- Fig1
- Fig2
- Fig3
- Fig5
- Fig6
- Fig7
- Fig8
- INVn
- INVy

### CCA1Dinv

Archivo que contiene el programa principal. Se conforma por la llamada de 7 funciones, las variables que conforman el modelo inicial de la velocidad de fase (Figura XXA), la perturbación inicial y modificable para la matriz Jacobiana y un cuadro de dialogo que permite continuar con la inversión (Figura XXB).

```
A      V0 = 800;  
        Dv = 10;  
        sigma = 50;  
        Vp = V0 + Dv*exp((-finv.^2)./sigma);  
  
B      per = 0.025;  
        answer = questdlg('Proceder con la Inversion?', ...  
        'Proceso Completado','Yes','No','No');
```

### reAdfiLe

Función que se encarga de leer el archivo .dat y recibir los parámetros de entrada introducidos desde el teclado por el usuario

```
[file, NoEst, NoReg, LonReg, Dt, W, Tras, r] = reAdfiLe('registros.dat');
```

Los datos leídos desde el teclado se convierten en parámetros de salida.

### Observados

Función que se encarga de construir el espectro de densidad de potencia (PSD, por sus siglas en inglés), a partir de la autocorrelación de las series de tiempo obtenidas de los datos observados. El PSD de datos observados se conoce como Función  $M(rk(\omega))$  que depende del radio del arreglo multiplicado por el número de onda  $k$  dependiente de la frecuencia.

```
[M,nXven,f,fs,F1] = Observados(file,NoEst,W,Dt,Tras,LonReg,NoReg);
```

Esta función requiere como parámetros de entrada, los elementos de salida de la función anterior a excepción del radio del arreglo. A partir de esta función, se obtiene la función  $M$  y su gráfico.

### Fig1

Función contenida en Observados.m, construye el gráfico de la función  $M$  datos observados.

```
F1 = Fig1(f,M);
```

### BandaINV

Función que permite seleccionar el ancho de banda que se desea invertir.

```
[finv,M2,OBS,F2] = BandaINV(fs, nXven, f, M, F1);
```

Esta función genera un nuevo vector de frecuencias con el ancho de banda deseado y em-pata los valores de las frecuencia a invertir con su correspondiente posición en el vector  $M$  generando así, un nuevo vector denominado  $M2$ , juntos constituyen el gráfico contenido en  $F2$ .

### Fig2

Función que construye el gráfico de la función  $M$  correspondiente con en el rango de frecuencias a invertir. Esta función se encuentra dentro de BandaINV.m.

```
F2 = Fig2( finv, M2, F1 );
```

### DirectoCCA

Esta función simula numéricamente la respuesta teórica que se esperaría obtener al calcular el PSD de datos observados. En otras palabras, resuelve el problema directo de microtemores con el Arreglo Circular sin Centro (CCA).

```
TPSD = DirectoCCA(finv,r,Vp)';
```

### Jacobiano

Este archivo construye la matriz de Jacobiano que permite linealizar el problema inverso a través de la aproximación numérica con diferencias finitas de las derivadas de la respuesta del modelo respecto a cada parámetro. La matriz de Jacobiano  $Z$ , tiene una dimensión de

```
Z = Jacobiano( finv, r, Vp, OBS, PAR, per, TPSD );
```

datos por parámetros esto es  $Z(OBS, PAR)$  donde  $OBS = PAR$  una vez que el ancho de banda a invertir ha sido seleccionada. Esta función se encuentra dentro de los archivos INVy.m e INVn.m. La función Jacobiano.m es el subprograma más importante de todo el repositorio.

### Fig3

Esta función se encarga de generar los subgráficos 3 y 4 de la figura 1 correspondientes a la velocidad de fase inicial y la respuesta del modelo a esa velocidad de fase denominado, Cociente del Espectro de Densidad de Potencia Teórico (TPSDR).

```
F3 = Fig3( finv, Vp, TPSD, r, F1, F2);
```

### Fig5

Con esta función se genera la figura 2 en donde el ancho de banda seleccionado y el TPSDR se despliegan en la misma figura y el TPSDR va convergiendo a los datos observados a cada iteración

```
F5 = Fig5( finv, M2, TPSD, r);
```

### Fig6

Esta función, es el subprograma más pequeño que conforma el repositorio. Inicializa la figura 3 para que la representación gráfica del error medio cuadrático RMS se pueda visualizar en tiempo real. Esta contenida en el subprograma INVy.m e INVn.m.

```
F6 = Fig6;
```

### Fig7

Esta función genera la figura 4 que muestra el resultado de la regresión lineal. Plotea la velocidad de fase calculada tras el proceso de inversión.

```
F7 = Fig7( finv, Xmc);
```





### Fig8

Esta función se activa si se selecciona "No" en el cuadro de dialogo antes de iniciar el procedimiento de Inversión. Su finalidad es generar el subplot 3 y 4 de la velocidad de fase y el TPSDR respectivamente hasta que se cumpla la condición de que el modelo inicial "Si" sea correcto. Esta función esta contenida en el subprograma INVn.

```
F8 = Fig8( finv, Vp, TPSD, r, F1, F3);
```

### INVy

INVy es el acrónimo de Inversión yes, esta función se activa cuando se ha seleccionado "yes" en el cuadro de dialogo. Contiene todo el procedimiento para realizar la inversión. Incluye las figuras *RMS* e *Iteraciones* además de la matriz de Jacobiano (Jacobiano.m).

```
Vpca1 = INVy(finv, r, Vp, OBS, PAR, per, M2, TPSD, V0, Dv, sigma);
```

### INVn

INVny es el acrónimo de Inversión no, esta función se activa cuando se ha seleccionado "no" en el cuadro de dialogo. Contiene todo el procedimiento para realizar la inversión. Incluye las figuras *RMS* e *Iteraciones* además de la matriz de Jacobiano (Jacobiano.m). A diferencia del archivo INVy.m esta función permite generar los subplots 3 y 4 de la figura 1 hasta que el modelo inicial permita generar un respuesta del modelo lo mas parecida al ancho de banda de la función M a invertir (subplot 2 figura 1).

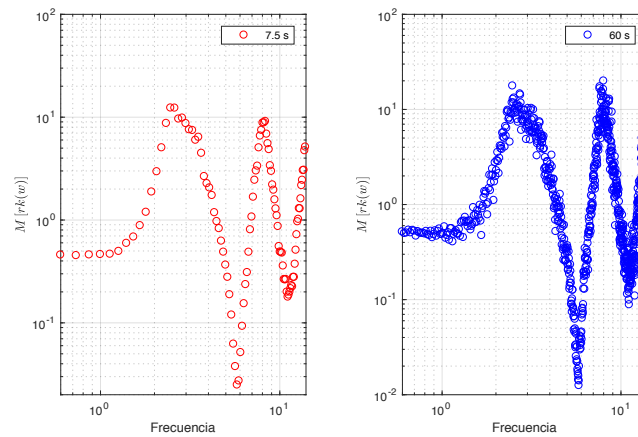
```
Vpca1 = INVn(finv, r, Vp, OBS, PAR, per, M2, TPSD, V0, Dv, sigma, F1, F3);
```

## Validación de la Inversión

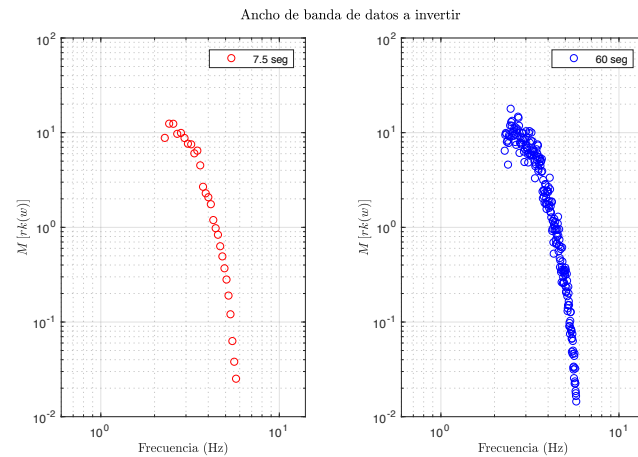
Los resultados del esquema de inversión, fueron validados empleando un trabajo presentado en el 9<sup>th</sup> International Workshop on Seismic Microzoning and Risk Reduction:

*F. Cruz y M. Rodríguez 2010. Shallow structure of shear velocity in sediments using ambient seismic noise. Comparison between SPAC and CCA.*

Para ello se tomaron los datos contenidos en un archivo con extensión .dat y se construyeron los espectros de potencia  $G0$  y  $G1$  empleando el archivo Observados.m diseñado por *Favio C.H. 2019* y modificado durante la elaboración del presente esquema de inversión. Posteriormente se calculo la función  $M(rk(\omega))$  considerando una ventana de 7.5 y 60 segundos.



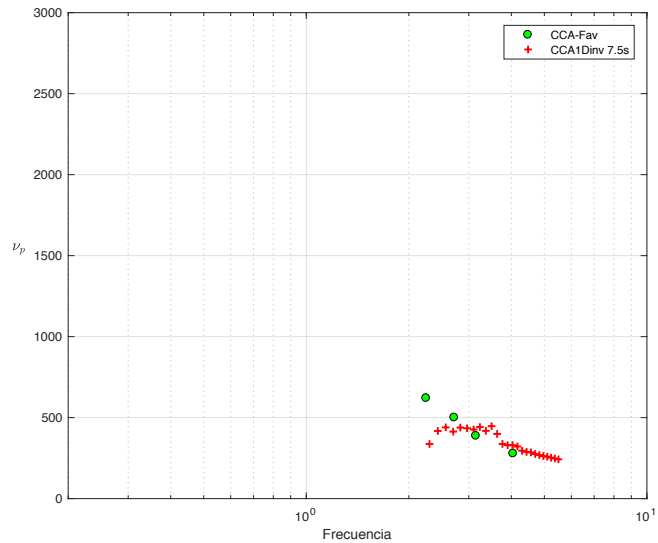
De la función  $M$  se selecciono el ancho de banda a invertir comprendido entre 2.5 y 5.8 Hz para ambas ventanas.



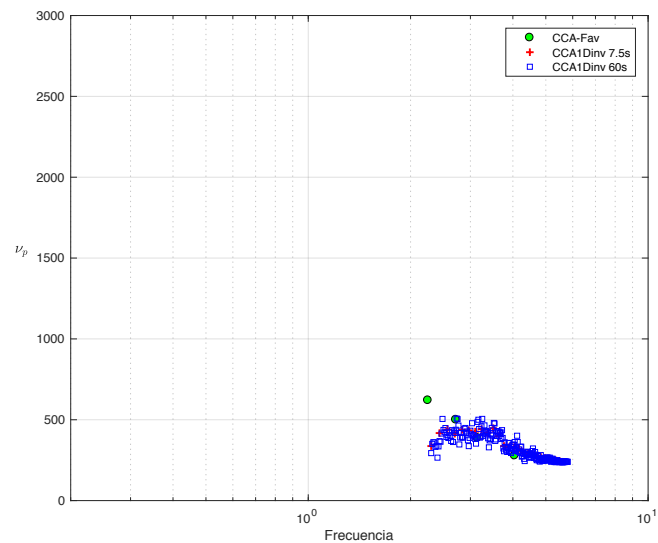


Los resultados de la Inversión se muestra en las figuras siguientes:

- Ventana de 7.5 segundos



- Ventana de 60 segundos





## Conclusiones

La curva de velocidad de fase resultado del proceso de Inversión, fué comparada con su correspondiente calculada de forma manual obteniendo una marcada similitud entre ellas. A través del esquema CCA1Dinv fue posible aumentar significativamente el numero de puntos que conforman la curva.

Se observo un patrón característico en el calculo del modelo inverso. Conforme aumenta el tamaño de la ventana, la velocidad de fase, aunque tiende a perder precisión, la exactitud se mantiene con pocas afectaciones por lo que los resultados pueden considerarse aún razonables.

Para reducir esta imprecisión, se requeriría incorporar a la regresión lineal empleada la correspondiente incertidumbre de cada uno de los datos de la función  $M$  (datos observados). La forma de hacerlo es a través de integrar la incertidumbre de cada medición en una matriz de  $n \times n$  donde  $n$  es el número de parámetros. Esta modificación de la regresión lineal se conoce como: *mínimo cuadrado ponderado*.



## Referencias

- [1] Richard C. Aster, Brian Borchers, and Clifford H. Thurber. *Parameter Estimation and Inverse Problems*. Elsevier, 2018.
- [2] Ikuo Cho, Taku Tada, and Yuzo Shinozaki. A new method to determine phase velocities of Rayleigh waves from microseisms. *GEOPHYSICS*, 69(6):1535–1551, nov 2004.
- [3] Ikuo Cho, Taku Tada, and Yuzo Shinozaki. Centerless circular array method: Inferring phase velocities of Rayleigh waves in broad wavelength ranges using microtremor records. *Journal of Geophysical Research*, 111(B9), sep 2006.
- [4] Favio Cruz and Miguel Rodriguez. Shallow structure of shear velocity in sediments using ambient seismic noise. comparison between spac and cca. 9Th International Workshop on Seismic Microzoning and Risk Reduction, February 2010.
- [5] Gene H. Golub. *Matrix Computations*. J. Hopkins Uni. Press, 2013.
- [6] F J. Chavez-Garcia, Miguel Rodriguez, and W R. Stephenson. An alternative approach to the spac analysis of microtremors: Exploiting stationarity of noise. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 95:277–293, 02 2005.
- [7] M. Kulesh, M. Holschneider, M. S. Diallo, Q. Xie, and F. Scherbaum. Modeling of wave dispersion using continuous wavelet transforms. *Pure and Applied Geophysics*, 162(5):843–855, may 2005.
- [8] E.C. Leong and A.M.W. Aung. Weighted average velocity forward modelling of rayleigh surface waves. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 43:218–228, dec 2012.
- [9] M. A. Oliva-Gutiérrez. Solución al problema inverso de la inyección de corriente directa en medios estratificados 1-D. Apuntes de Inversión de datos: Proyecto Final, CICESE, August 2017.