小樣本下單一母體之母體平均數的檢定

7.2 小樣本下單一母體之母體平均數的檢定

對某些研究案例而言，大樣本常不容易取得，在本節中將介紹小樣本下母體平均數 μ 的檢定方法。

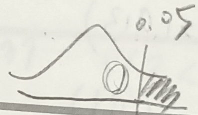
當資料來自常態母體，母體標準差 σ 為未知時，$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ 服從自由度為 $n-1$ 的 t 分配，我們使用統計量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ 來做檢定，其中 μ_0 為一已知的常數。

在小樣本，母體為常態分配且母體標準差 σ 為未知時，我們可以得到以下的檢定公式：

統計假設的配置法	檢定統計量	棄卻域
$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$\lvert T\rvert > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$H_0:\mu\geq\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$T<-t_{\alpha}(n-1)$
$H_0:\mu\leq\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$T>t_{\alpha}(n-1)$

其中 μ_0 為一個已知的常數。

例7.5



$t_{0.05}(15)=1.753$

$S=$ ——

某校為了解該校修習統計學的學生，在統計學課程理解的程度上是否和去年一樣平均測驗成績有55分的水準。隨機從現在修習統計學的學生中選出16人來接受測驗，得到這16個人的成績如下：

75	80	65	50
45	30	60	64
55	58	63	68
38	66	70	62

(1) $H_0: \mu\leq 55$

$H_1: \mu>55$

(2) $\alpha=0.05$

(3) $t>t_{0.05}(15) \Rightarrow t>1.753$

$\bar{x}=59.3125$

$S=\sqrt{\dfrac{58897-16\times 59.3125^2}{15}}=13.189$

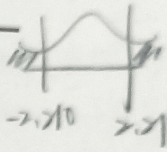
(4) $\dfrac{59.3125-55}{\frac{13.189}{\sqrt{16}}}=\dfrac{4.3125}{3.2\ldots}\fallingdotseq 1.308$ #

接受 H_0

當 n_1、n_2 為小樣本，兩組獨立樣本皆來自常態母體且母體標準差 σ_1、σ_2 未知，但假設母體標準差為相等 $(\sigma_1=\sigma_2)$ 時，則我們可以得到以下的檢定公式：

統計假設的配置法	檢定統計量	棄卻域
$H_0:\mu_1-\mu_2=d_0$ $H_1:\mu_1-\mu_2\neq d_0$	$T=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-d_0}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$	$\lvert T\rvert>t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$
$H_0:\mu_1-\mu_2\geq d_0$ $H_1:\mu_1-\mu_2< d_0$	$T=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-d_0}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$	$T<-t_{\alpha}(n_1+n_2-2)$
$H_0:\mu_1-\mu_2\leq d_0$ $H_1:\mu_1-\mu_2> d_0$	$T=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-d_0}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$	$T>t_{\alpha}(n_1+n_2-2)$

其中 $S_p=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$。



(1) $H_0: u_1-u_2=0$
$H_1: u_1-u_2\neq 0$

(2) $\alpha=0.05$

(3) $t>t_{0.025}(16)$
$\Rightarrow t>2.210$

(4) $\dfrac{7.728-7.546}{0.642\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}}}$

例7.7

今有 A、B 兩種品牌的嬰兒奶粉供使用，從體重相近的嬰兒中隨機抽取10位使用 A 品牌，另隨機抽取8位使用 B 品牌，經過6個月的使用後，分別得其體重的平均數為7.728公斤和7.546公斤，標準差為0.653公斤和0.627公斤。假設 A、B 兩種品牌的嬰兒奶粉對嬰兒體重的成長服從常態分配，且兩者母體變異數相等，在顯著水準0.05下，這兩種品牌的使用，對嬰兒體重的成長是否有差異性？

u_1 u_2

解 (1) $H_0:\mu_1-\mu_2=0$，$H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0$。

(2) $\alpha=0.05$。

(3) 棄卻域 $C=\{\lvert T\rvert>t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\}=\{\lvert T\rvert>t_{0.025}(16)\}=\{\lvert T\rvert>2.120\}$。

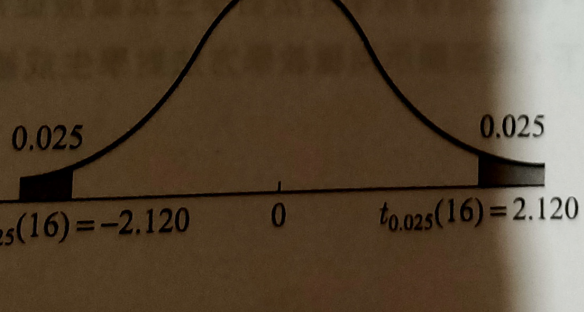
(4) $S_p=\sqrt{\dfrac{9\times0.653^2+7\times627^2}{10+8-2}}=0.642$，$T=\dfrac{7.728-7.546}{0.642\sqrt{\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{8}}}=0.598$。

$\dfrac{0.182}{0.642\times0.474}$
$=\dfrac{0.182}{0.304}$
$\doteq 0.598$

$S_p=\sqrt{\dfrac{9\times0.653^2+7\times0.627^2}{16}}$

$=\sqrt{\dfrac{3.837681+2.751923}{4}}$

$\doteq\dfrac{2.567}{4}=0.642$



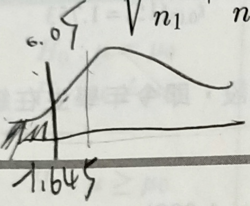
統計假設的配置法	檢定統計量	棄卻域
$H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$Z = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - d_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\lvert Z\rvert > z_{\frac{\alpha}{2}}$
$H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq d_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 < d_0$	$Z = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - d_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$Z < -z_\alpha$
$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq d_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 > d_0$	$Z = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - d_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$Z > z_\alpha$

當母體標準差為未知時，可分別以樣本標準差 S_1、S_2 來替代 σ_1、σ_2 的位置，此時，檢定統計量則以 $Z = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - d_0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$ 來替代，而檢定的方式也是一樣的。

(1) H_0 $u_1 - u_2 \geq 0$　(2) $\alpha = 0.05$

H_1 $u_1 - u_2 < 0$　(3) $Z < -Z_{0.05}$

$Z < -1.645$



(4) $\dfrac{6.98 - 7.2}{\sqrt{\frac{0.78^2}{200} + \frac{0.75^2}{180}}} = \dfrac{-0.22}{\sqrt{0.0030420 + 0.003125}}$

例 7.6

為了解大一男女學生每日晚間的平均睡眠時間，隨機抽取 200 位男生，得其平均數為 6.98 小時，標準差為 0.78 小時；另隨機抽取 180 位女生，得其平均數為 7.20 小時，標準差為 0.75 小時。在顯著水準 0.05 下，大一男學生每日的平均睡眠時間是否少於女學生？

解 (1) $H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0$，$H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$。

(2) $\alpha = 0.05$。

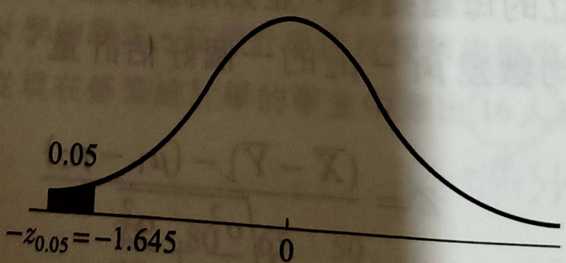
(3) 棄卻域 $C = \{Z < -z_\alpha\} = \{Z < -1.645\}$。

(4) $Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} = \dfrac{6.98 - 7.20}{\sqrt{\dfrac{0.78^2}{200} + \dfrac{0.75^2}{180}}} = -2.801$。

$= \dfrac{-0.22}{0.07853}$

$= -2.801$

拒絕 H_0



根據以上檢定結果，我們棄卻虛無假設，即男學生的平均睡眠時間少於女學生。