Bevezetés

Ez a jegyzet erősen kézirat, ennek ellenére remélem fog segíteni a felkészülésben. A rövid elméleti összefoglalók egyáltalán nem rövidek, ezek csak arra valók, hogy utána tudjanak nézni valaminek, ha valamit nem értenek, vagy nem tudnak. A feladatok mellett vannak jelek:

- • (bumszli) Ezzeket a feladatokat feltétlenül nézzék át.

- ◦ (üres bumszli) Ezek a gyakorlati köntösbe bújtatott elméleti ismereteket feldolgozó feladatok. Ilyenek még nincsenek, ne is keressék őket, de majd lesznek.

- $*$ (halálfej, de halálfejet nem találtam a Latexben) A halálfejes feladatok a nehéz feladatok.

- **S** (**S**=szimuláció) a szimulációval megoldható feladatokat jelöli. Remek szakdolgozat téma.

A jegyzetet folyamatosan fejlesztem, az új változattal felülírom a régit, így érdemes időről-időre újra letölteni. Eredményes felkészülést kívánok

Glavosits Tamás

1. Gyakorlat
Kombinatorika,
Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Rövid elméleti összefoglaló

1. Kombinatorika

Matematikai eszközök:

1. **Faktoriális függvény:**

$$n! \doteq \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0; \\ 1 \cdot 2 \cdots n, & \text{ha } n \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

2. **Binomiális együttható:**

$$\binom{n}{k} \doteq \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{(n)_k}{k!} \qquad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

3. **Polinomiális együttható:**

$$\binom{n}{k_1 k_2 \dots k_r} \doteq \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!},$$

ahol $n \in \mathbb{Z}_+$; $k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbb{Z}_+$ úgy, hogy $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$.

Az elemi kombinatorika alapfeladatainak két csoportja van, a sorbarendezés és a kiválasztás.

I. Sorbarendezés, más szóval permutáció: Adott n elem, ezeknek keressük az összes lehetséges sorrendjét. Permutáció esetén az elemekből alkotott sorozatokat lapunk. A gyakorlati alkalmazások szempontjából általában nincs szükségünk az összes lehetséges sorrend előállítására illetve felsorolására, elegendő meghatározni a számukat. A permutációnak két fajtája van: az ismétlés nélküli és az ismétléses.

1. **Ismétlés nélküli permutáció:** Az n darab elem páronként különböző. Az n elem ismétlés nélküli permutációinak számát P_n módon jelöljük.

$$P_n = n! \qquad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

2. **Ismétlésese permutáció:** Az n darab elem között k_1, k_2, …, k_r azonos tulajdonságú elem szerepel. Az azonos tulajdonságú elemek egymás közötti sorrendjét nem vesszük figyelembe. A lehetséges sorrendek számát ebben az esetben $P_n^{k_1,\dots,k_r(i)}$ módon jelöljük.

$$P_n^{k_1,k_2,\dots,k_r(i)} = \binom{n}{k_1 k_2 \dots k_r} \doteq \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!},$$

ahol $n \in \mathbb{Z}_+$; k_1, k_2, …, $k_r \in \mathbb{Z}_+$ úgy, hogy $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$.

II. Kiválasztás: Adott n elem, melyek közül kiválasztunk k darabot. Ismét nem szükséges a kiválasztásokat ténylegesen elvégezni, illetve felsorolni, csak a számukat keressük.

A kiválasztásos feladatokat két szempont szerint 2-2 csoportba osztjuk, így négyféle alapfeladatot kapunk.

Az első szempont az, hogy a kiválasztott elemeknek számít-e a sorrendje, vagy nem. Ha számít a sorrend, akkor **variáció**ról, ha nem számít, akkor **kombináció**ról beszélünk. Variáció esetén az elemekből álló sorozatokat kapunk.

Akár variációról, akár kombinációról beszélünk, a kiválasztási feladatokat csoportosíthatjuk aszerint is, hogy egy elem legfeljebb egyszer, vagy többször is választható. Az előbbi esetben **ismétlés nélküli**, az utóbbiban **ismétléses** kiválasztásról beszélünk. Ismétlés nélküli kombináció k elemű részhalmazokat, míg az ismétléses kombináció k elemű multihalmazokat eredményez. A multihalmaz abban különbözik a halmaztól, hogy a multihalmazban ugyanaz az elem többször is előfordulhat. Például az $\{1, 2, 1\}$ egy három elemű multihalmaz, amely azonos az $\{1, 1, 2\}$ multihalmazzal. Ennek megfelelően az alábbi 4 alapesetet kapjuk:

1. Az n **elem** k **tagú ismétlés nélküli variáció**inak a számát V_n^k módon jelöljük.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1) = (n)_k.$$

2. Az n **elem** k **tagú ismétléses variáció**inak a számát $V_n^{k(i)}$ módon jelöljük.

$$V_n^{k(i)} = n^k.$$

3. Az n **elem** k **tagú ismétlés nélküli kombinációinak**inak a számát C_n^k módon jelöljük.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{(n)_k}{k!}.$$

4. Az n **elem** k **tagú ismétléses kombinációinak**inak a számát $C_n^{k(i)}$ módon jelöljük.

$$C_n^{k(i)} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)_k}{k!}.$$

A kiválasztásos feladatok típusait az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

	Variáció	Kombináció
Ism. nélküli	$V_n^k = (n)_k$	$C_n^k = \binom{n}{k}$
Ismétléses	$V_n^{k(i)} = n^k$	$C_n^{k(i)} = \binom{n+k-1}{k}$

A binomiális együtthatók tulajdonságai:

I. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1;$

II. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k};$

III. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$

Ha a binomiális állandókat $\triangle$ alakban rendezzük, akkor megkapjuk a **Pascal** $\triangle$-et. A binomiális állandók tulajdonságai a Pascal $\triangle$ alábbi tulajdonságait eredményezik:

I. Minden sor 1-gyel kezdődik és 1-re végződik;

II. A Pascal $\triangle$ tengelyesen szimmetrikus;

III. A Pascal $\triangle$-ben minden szám, amely nem a sor elején, vagy a sor végén van, megkapható a fölötte álló két szám összegeként.

A következő ábrán a Pascal $\triangle$ látható.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccccc} & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\ & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\ & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\ & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\ & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\ \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \end{array}$$

A szumma jel használata: Az $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ véges összeget $\sum_{i=1}^n a_i$ módon jelöljük.

A véges szumma tulajdonságai:

1. *Skalárszorzó kiemelhető, azaz*
$$\sum_{i=1}^n \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^n a_i$$
minden $\lambda \in \mathbb{R}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *esetén.*

2. *Összeg tagonként szummázható, azaz*
$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$
minden $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \in \mathbb{R}$; $b_1\ b_2,\ \ldots,\ b_n \in \mathbb{R}$ *esetén.*

A binomiális tétel:
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{i=n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$
minden $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$; $a\ b \in \mathbb{R}$ *esetén.*

A polinomiális tétel:
$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_r)^n = \sum_{i_1 + i_2 \cdots + i_r = n} \binom{n}{i_1 i_2 \ldots i_r} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_r^{i_r}$$
minden $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$; $a_1,\ \ldots,\ a_r \in \mathbb{R}$ *esetén. A szummázás minden olyan nemnegatív egész komponesekből álló* $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ *szám* r*-esre kiterjed, amelyek összege* n*.*

2. Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Matematikai eszközök:

Hatványhalmaz: *$\mathcal{P}(X)$ jelöli egy X halmaz összes részhalmazainak a halmazát. A $\mathcal{P}(X)$ halmazt az X halmaz* ***hatványhalmaz****ának nevezzük.*

Példa.

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$,

$\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$,

$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$,

$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

A megszámlálhatóan végtelen unió: *Legyenek az A_i ($i \in \mathbb{Z}_+$) halmazok egy X (univerzális halmaz) részhalmazai. Ekkor*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \doteq \{x \in X \mid \exists i \in \mathbb{Z}_+ : x \in A_i\},$$

azaz az $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ az összes olyan $x \in X$ elemek halmaza, amelyek az A_1, A_2 ... halmazok valamelyikében benne vannak.

Végtelen numerikus sor: *Ha (a_n) egy sorozat, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jelenti az n-edik részletösszegek sorozatának a határértékét, amennyiben az konvergens. Azt mondjuk, hogy az $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$* ***végtelen numerikus sor abszolút konvergens****, ha a tagok abszolútértékeiből alkotott sor konvergens. Ha egy végtelen numerikus sor abszolút konvergens, akkor konvergens is. A megfordítás általában nem igaz, azaz, van olyan konvergens numerikus sor, amely nem abszolút konvergens.*

A σ-algebra: *Legyen X egy tetszőleges halmaz. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ halmazcsalád egy σ-algebra X-en, ha*

1. *$\emptyset \in \mathcal{A}$;*
2. *Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\overline{A} \doteq X \setminus A \in \mathcal{A}$;*
3. *Ha (A_n) halmazoknak egy olyan sorozata, hogy $A_n \in \mathcal{A}$ minden $n \in \mathbb{Z}_+$; esetén, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.*

Tehát $\mathcal{A}$ az X bizonyos részhalmazaiból álló halmazcsalád, amelyre teljesül, hogy tartalmazza az üreshalmazt, minden elemével együtt annak komplementerét, továbbá zárt a megszámlálhatóan végtelen unióra nézve.

Példa. *Triviális példák σ-algebrákra, hogy ha X egy halmaz, akkor $\{\emptyset, X\}$ és $\mathcal{P}(X)$ egyaránt σ-algebrák X-en.*

A σ-algebra tulajdonságai: *Ha $\mathcal{A}$ egy σ-algebra az X halmazon, akkor az $\mathcal{A}$ halmazcsalád zárt a véges halmazműveletekre nézve, azaz valahányszor A, $B \in \mathcal{A}$, mindannyiszor $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$.*

Példa. *Legyen $X \doteq \{1, 2, 3, 4\}$ és $\mathcal{B} \doteq \{\{1\}, \{2\}\}$. Jelölje $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$-t tartalmazó legszűkebb σ-algebrát X-en. Ekkor*

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

Ebből a példából az is látszik, hogy az X halmaz egyelemű részhalmazai nem feltétlenül elemei az X egy σ-algebrájának.

Kolmogorov-féle valószínűségi mező *Az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ hármast **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**nek nevezzük, ha*

1. *Ω egy nemüres halmaz. Az Ω-t **eseménytér**nek nevezzük. Az Ω elemei az **elemi esemény**ek. Az elemi események nem események. Az Ω egyelemű részhalmazai sem feltétlenül események.*

2. *$\mathcal{F}$ egy σ-algebra Ω-n. Az $\mathcal{F}$ elemeit **esemény**eknek nevezzük.*

3. *$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ egy függvény úgy, hogy*

   I. ***Nemnegatív***, *azaz $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén;*

   II. ***1-re normált***, *azaz $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;*

   III. ***σ-additív***, *azaz*

   $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

   valahányszor $A_i \in \mathcal{F}$ minden $i \in \mathbb{Z}_+$ úgy, hogy $A_j \cap A_k = \emptyset$, ha $j \neq k$, azaz (A_n) események páronként diszjunkt tagokból álló sorozata.

   A $\mathbb{P}(A)$ számot az A esemény valószínűségének nevezzük tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén.

*Az **I.**, **II.**, **III.** axiómákat **Kolmogorov-féle axiómák**nak nevezzük.*

A valószínűség tulajdonságai: *Legyen* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező. Ekkor teljesülnek a következő állítások:*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

2. $\mathbb{P}$ *végesen additív, azaz*
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$
minden $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$ *esetén.*

3. *Komplementer esemény valószínűsége:*
$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A), \quad \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) \qquad (A \in \mathcal{F}).$$

4. *A valószínűség monotonitása: Ha* $A, B \in \mathcal{F}$ *úgy, hogy* $A \subseteq B$, *akkor*
$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B).$$

5. $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$ *minden* $A \in \mathcal{F}$ *esetén, azaz egy esemény valószínűsége mindig egy* $[0,1]$ *intervallumba eső valós szám.*

6. *Ha* $A, B \in \mathcal{F}$ *úgy, hogy* $A \subseteq B$, *akkor*
$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B).$$

7. *Szita formula 2 eseményre: Ha* A *és* B *tetszőleges események, akkor*
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

8. *Szita formula 3 eseményre: Ha* A B *és* C *tetszőleges események, akkor*
$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \\ = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

9. *Szita formula* n *eseményre (Poincare formula): Ha* A_1, A_2, $\cdots$, A_n *tetszőleges események, akkor*
$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap (A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

Példa. *Legyen* $\Omega \doteq \{1,2,3,4\}$,

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,2,3,4\}\},$$

továbbá $\mathbb{P}(\{1\}) = 0.1$, $\mathbb{P}(\{2\}) = 0.2$. *Határozzuk meg a többi esemény valószínűségét!*
MO.:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{2,3,4\}) &= 1 - \mathbb{P}(\{1\}) = 1 - 0.1 = 0.9,\\
\mathbb{P}(\{1,3,4\}) &= 1 - \mathbb{P}(\{2\}) = 1 - 0.2 = 0.8,\\
\mathbb{P}(\{1,2\}) &= \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) = 0.1 + 0.2 = 0.3,\\
\mathbb{P}(\{3,4\}) &= 1 - \mathbb{P}(\{1,2\}) = 1 - 0.3 = 0.7,\\
\mathbb{P}(\{1,2,3,4\}) &= \mathbb{P}(\Omega) = 1.
\end{aligned}$$

Feladatok

1. Kombinatorika

1.• Feladat. *Hány 10-jegyű szám készíthető 3 darab kettes, 5 darab hatos számjegyekből és 2 darab hetes ?*

2.• Feladat. *Hány 8-jegyű szám készíthető 1 darab nulla, 3 darab kettes és 4 darab hármas számjegyekből?*

3.• Feladat. *Hány 9-jegyű szám készíthető 2 darab nulla, 3 darab kettes és 4 darab hármas számjegyekből?*

4.• Feladat. *Hány 7-jegyű páros szám készíthető 3 darab nulla, 2 darab egyes, és 2 darab kettes számjegyekből?*

5.• Feladat. *Egy dobozban 10 golyó van, közülük 3 fehér, 5 piros, és 2 kék színű. A 10 golyót egymás után kihúzzuk a dobozból. Hány különböző sorrendben húzhatjuk a golyókat, ha az egyszínűeket nem különböztetjük meg?*

6.• Feladat. *Hányféleképpen osztható szét 5 ezer forint jutalom 4 dolgozó között, ha mindegyik dolgozó ezerrel osztható összegű jutalmat kaphat, de a 0 Ft jutalom is megengedett.*

7.• Feladat. *Hányféleképpen rakhatunk be 3 levelet 9 rekeszbe, ha a levelek között nem teszünk különbséget és egy rekeszbe maximum egy levelet tehetünk?*

8.• Feladat. *Hányféleképpen rakhatunk be 3 levelet 9 rekeszbe, ha a levelek között nem teszünk különbséget és egy rekeszbe több levelet is tehetünk?*

2. További gyakorló feladatok

9. Feladat. *Hányféle sorrendje van az*

a. *A, B, C betűknek?*

b. *A, A, B, B, B betűknek?*

c. *A, A, B, B, B, C, C betűknek?*

d. *Hány 3 hosszúságú kód készíthető a 0, 1 karakterekből?*

e. *Hány 10 hosszúságú kód készíthető az A, B, C karakterekből?*

10. Feladat. *Hányféleképpen lehet 7 vendéget 3 vendégházba elszállásolni, ha a vendégházak rendre 2, 3, illetve 2 személyesek?*

11. Feladat. *14 versenyző indul egy futóversenyen. Hányféleképpen alakulhatnak a dobogós helyezések (arany, ezüst, bronz), ha nincs holtverseny?*

12. Feladat. *Hányféleképpen lehet kitölteni egy TOTÓ-szelvényt?*
(13+1 mező van, minden egyes mezőbe a 0, 1, X jelek valamelyikét kell beírni.)

13. Feladat. *Hányféleképpen lehet kitölteni egy LOTTÓ-szelvényt?*
(90 szám közül 5-t kell megjelölni.)

14. Feladat. *Egy cukorkacsomagoló üzemben egy gép 10-féle cukorkát tölt zsákocskákba. Minden zsákba 4 db cukorkát rak véletlenszerűen. Tartalmuk szerint hányféle zsák keletkezhet a töltés során?*

15. Feladat. *Van 10 doboz (beszámozva, rögzített sorrendben) és 4 db egyforma golyó. Hányféleképpen lehet a 4 golyót a 10 dobozba elhelyezni?*

Megoldások

1. Kombinatorika

1.• Megoldás. *A 2, 2, 2, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7 számjegyekből kell 10 jegyű számot alkotni.*
Az elkészíthető számok száma:

$$P_{10}^{3,2,5(i)} = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 5!} = 2520.$$

2.• Megoldás. *A 0, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3 számjegyekből kell 8 jegyű számot alkotni.*
A létrehozható összes számsorozat száma:

$$P_{8}^{1,3,4(i)} = \frac{8!}{1! \cdot 3! \cdot 4!} = 280.$$

Ezek közül a 0-val kezdődőek száma:

$$P_{7}^{3,4(i)} = C_7^3 = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Így a létrehozható 8 jegyű számok száma: 280-35=245.

3.• Megoldás. *A 0, 0, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3 számjegyekből kell 9 jegyű számot alkotni. Az előző feladattal analóg módon kapjuk, hogy a létrehozható 9 jegyű számok száma:*

$$P_{9}^{2,3,4(i)} - P_{7}^{3,4(i)} = \frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} - \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 1260 - 35 = 1225.$$

4.• Megoldás. *A 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2 számjegyekből kell 7 jegyű páros számot alkotni.*
A szám első és az utolsó jegyét is kell figyelni. Csak azok a számok jók, amelyek egyel vagy kettővel kezdődnek, és nullára vagy kettőre végződnek. Ezek a feltételek egymást páronként kizárják, így $2 \cdot 2 = 4$ *diszjunkt esetet kapunk. Ezeket az eseteket egy olyan* 2×2 *táblázatban foglaljuk, amelyben a sorok az első jegyet, az oszlopok az utolsó jegyet jelentik.*

	0	2
1	$P_5^{2,1,2(i)} = 30$	$P_5^{3,1,1(i)} = 20$
2	$P_5^{2,2,1(i)} = 30$	$P_5^{3,2(i)} = 10$

Így a létrehozható 7 jegyű páros számok száma: $30 + 20 + 30 + 10 = 90$.

5.• Megoldás. *A 3 fehér 5 piros és két kék golyó összes sorrendjének a száma:*

$$P_{10}^{3,5,2(i)} = \frac{10!}{3! \cdot 5! \cdot 2!} = 2520.$$

6.• Megoldás. *Az 5 ezer forint a 4 dolgozó között*

$$C_4^{5(i)} = \binom{4+5-1}{4} = \binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$$

féleképpen osztható szét.

7.• Megoldás. *A 3 levelet a 9 rekeszbe*

$$C_9^3 = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84.$$

féleképpen lehet elhelyezni, ha egy rekeszbe maximum egy levelet tehetünk.

8.• Megoldás. *A 3 levelet a 9 rekeszbe*

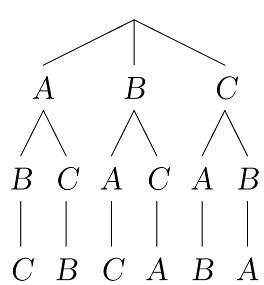
$$C_9^{3(i)} = \binom{9+3-1}{3} = \binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 165.$$

féleképpen lehet elhelyezni, ha egy rekeszbe több levelet is tehetünk.

2. További gyakorló feladatok

9. Megoldás.
a. *Az A, B, C betűk összes sorrendjének a száma $P_3 = 3! = 6$.*

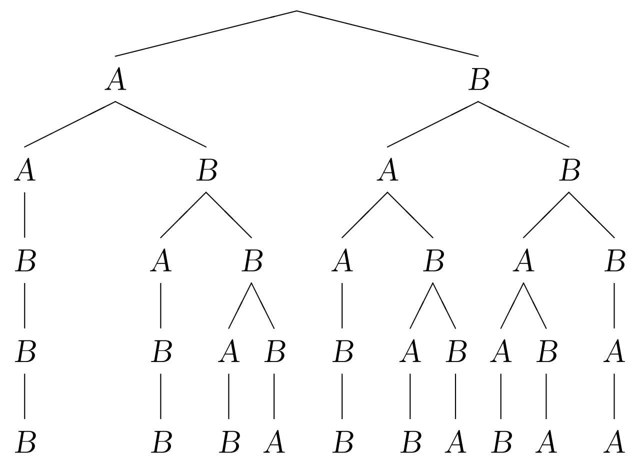
Bár a lehetséges sorrendek előállítására nincs szükségünk, most mégis megadjuk a sorrendeket egy alkalmas gráf segítségével:



ABC,
ACB,
BAC,
BCA,
CAB,
CBA.

b. *Az A, A, B, B, B betűk összes lehetséges sorrendjének a száma:* $P_5^{2,3(i)} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$

Mivel nincs túl sok lehetőség, ezért a sorrendeket megkereshetjük egy alkalmas gráf segítségével:

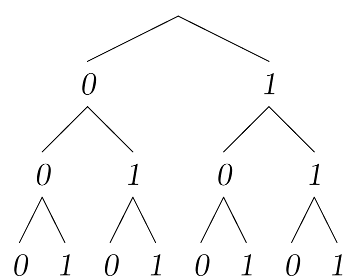


AABBB,
ABABB,
ABBAB,
ABBBA,
BAABB,
BABAB,
BABBA,
BBAAB,
BBABA,
BBBAA.

c. *Az A, A, B, B, B, C, C betűk összes lehetséges sorrendjének a száma:* $P_7^{2,3,2(i)} = \frac{7!}{2!3!2!} = 420.$

d. *A keresett kódok száma:* $V_2^{3(i)} = 2^3 = 8.$

A lehetőségek ebben az esetben is megkereshetőek egy alkalmas gráf segítségével:



000,
001,
010,
011,
100,
101,
110,
111.

e. *A keresett kódok száma:* $V_3^{10(i)} = 3^{10} = 59049.$

10. Megoldás. *A 7 vendéget a 3 vendégházban*

$$\binom{7}{2}\binom{7-2}{3}\binom{7-(2+3)}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} \cdot \frac{(7-2)!}{3!(7-(2+3))!} \cdot \frac{(7-(2+3))!}{2!(7-(2+3+2))!} = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = P_7^{2,3,2(i)}$$

féleképpen lehet elszállásolni.

11. Megoldás. *A dobogós helyezések lehetőségeinek száma:* $V_{14}^{3(i)} = 14 \cdot 13 \cdot 12 = 2184.$

12. Megoldás. *A TOTÓ szelvények száma:* $V_3^{14} = 3^{14} = 4782969 \approx 5M.$

13. Megoldás. *A LOTTÓ szelvények száma:*

$$C_{90}^5 = \binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43949268 \approx 44M.$$

14. Megoldás. *A cukorkákból készíthető - tartalmuk szerint különböző - különböző zsákocskák száma:* $n = 10, k = 4,$

$$C_{10}^{4(i)} = \binom{10+4-1}{4} = \binom{13}{4} = 715.$$

15. Megoldás. *A 4 golyót a 10 dobozba*

$$C_{10}^{4(i)} = \binom{10+4-1}{4} = \binom{13}{4} = 715$$

féleképpen lehet elhelyezni.

2. Gyakorlat
Klasszikus valószínűségi mező,
Műveletek valószínűségekkel,
Golyóhúzás urnából
A valószínűség geometriai kiszámítási módja

Rövid elméleti összefoglaló

1. A klasszikus valószínűségi mező

A klasszikus valószínűségi mező: *Egy* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *Kolmogorov-féle valószínűségi mezőt* ***klasszikus valószínűségi mező****nek nevezünk, ha*

1. Ω *véges halmaz;*

2. *Az* Ω *minden 1 elemű részhalmaza esemény;*

3. *Az* Ω *bármely két egyelemű részhalmaza - mint esemény - egyforma valószínűséggel következik be, azaz*
$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}(\{\omega_2\}) \qquad (\omega_1, \omega_2 \in \Omega).$$

A klasszikus valószínűségi mező tulajdonságai: *Ha* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *egy klasszikus valószínűségi mező, akkor*

1. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$*, azaz az* Ω *minden részhalmaza esemény;*

2. *Minden* $A \in \mathcal{F}$ *esetén*
$$\mathbb{P}(A) = \frac{|\, A \,|}{|\, \Omega \,|} = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}.$$

Példa. *Dobókockával dobunk. Jelölje* A *azt az eseményt, hogy páros számot dobunk;* B *azt az eseményt, hogy hárommal osztható számot dobunk;* C *azt az eseményt, hogy kettővel is és hárommal is osztható számot kapunk;* D *azt az eseményt, hogy kettővel, vagy hárommal osztható számot kapunk. Határozzuk meg az* A*,* B*,* C*,* D *események valószínűségét!*
Mo.:
$$\begin{aligned}
\Omega &\doteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};\\
A &\doteq \{2, 4, 6\};\\
B &\doteq \{3, 6\};\\
C &= A \cup B \doteq \{2, 3, 4, 6\};\\
D &= A \cap B \doteq \{6\}.
\end{aligned}$$

A dobókocka szabályosságát feltételezve klasszikus valószínűségi mezőt kapunk. Így a kedvező/összes képlet felhasználásával kapjuk, hogy $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(D) = \frac{1}{6}$.

Példa. *Két dobókockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel. Számoljuk ki az alábbi események valószínűségét:*

$$\begin{aligned} A &\doteq \text{ dupla hatost dobunk;} \\ B &\doteq \text{ dupla hatost, vagy dupla egyest dobunk;} \\ C &\doteq \text{ egy hatost és egy egyest dobunk;} \\ D &\doteq \text{ a két dobott szám valamelyike egyes, vagy hatos;} \\ E &\doteq \text{ a két dobott szám összege osztható kettővel, vagy hárommal.} \end{aligned}$$

Mo.: Legyen

$$\Omega \doteq \{(i,j) \mid i = 1,2,\ldots,6, j = 1,2,\ldots,6\} = \{1,2,\ldots,6\} \times \{1,2,\ldots,6\}.$$

Ekkor $\mid \Omega \mid = 6^2 = 36$. *Nyilvánvaló, hogy az* $(i,j) \in \Omega$ *elemi esemény azt jelenti, hogy a piros dobókockával* i*-t, a kékkel* j*-t dobunk. A dobókockák szabályosságát feltételezve klasszikus valószínűségi mezőt kapunk. Így a kedvező/összes képlet felhasználásával kapjuk, hogy* $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{36}$, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, $\mathbb{P}(D) = \frac{4\cdot 6-4}{36} = \frac{5}{9}$.

Az E *esemény valószínűségének a kiszámolásához érdemes észrevenni, hogy a dobott két szám összege csak* 2, 3, …, 12 *lehet. Ezek közül a kettővel, vagy hárommal oszthatók a*

$$2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12$$

Ha táblázatba rendezzük az Ω *elemeit, akkor az azonos összegű számpárok egy a táblázat bal alsó sarkából a jobb felsőbe mutató átlóval párhuzamos vonalba rendeződnek, így könnyű őket összeszámolni.*

	•	•	•		•	
2	•	•		•		•
3	•		•		•	•
4		•		•	•	•
5	•		•	•	•	
6		•	•	•		•
	8	9	10		12	

Tehát a kedvező esetek száma:

$$1 + 2 + 3 + 5 + 5 + 4 + 3 + 1 = 24.$$

Így kapjuk, hogy $\mathbb{P}(E) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$. *Lehet, hogy egyszerűbb úgy számolni, hogy a dobott számok összegei közül csak a 7 és a 11 nem oszthatóak kettővel, vagy hárommal. A 7 hatféleképpen, a 11 kétféleképpen írható fel a dobott számok összegeként. Így a komplementer esemény valószínűségére vonatkozó képlet alapján* $\mathbb{P}(E) = 1 - \frac{8}{36} = \frac{2}{3}$.

Példa. *A harminckét lapos magyar kártyából kihúzunk egy lapot. Jelölje A azt az eseményt, hogy pirosat húzunk; B, hogy disznót húzunk; C, hogy piros disznót húzunk; D, hogy pirosat, vagy disznót húzunk. Határozzuk meg az A, B, C, D események valószínűségét!*
Mo.: A magyar kártyában van 4 szín és 8 szám, minden színhez tartozik minden szám. A színek: piros, tök makk zöld. A számok: disznó, király, felső, alsó, VII, VIII, IX, X. Például P_d *jelöli a piros disznót. Legyen* Ω *a magyar kártya lapjainak halmaza. Ekkor*

$$\begin{aligned}
A &= \{P_d, P_k, P_f, P_a, P_{\mathrm{VII}}, P_{\mathrm{VIII}}, P_{\mathrm{IX}}, P_{\mathrm{X}}\},\\
B &= \{P_d, T_d, M_d, Z_d\},\\
C &= A \cap B\{P_d\}.
\end{aligned}$$

A keresett valószínűségek: $\mathbb{P}(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. *Mivel* $C = A \cap B$ *és* $D = A \cup B$, *így kapjuk, hogy* $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{32}$, $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$.

Példa. *A harminckét lapos magyar kártyából kihúzunk 3 lapot (visszatevés nélkül). Mennyi a valószínűsége, hagy a harmadik kihúzott lap piros?*
Mo.: Valahogy úgy érezzük, hogy - szimmetria okokból - ugyanannyi a valószínűsége, hogy a harmadik lap piros, mintha csak egy lapot húznánk, azaz a keresett valószínűség most is $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, *de ezt számolással is alá kellene támasztani. Ehhez tekintsük a következő modellt:*

Legyen Ω *a magyar kártya lapjaiból képzett 3 tagú (ismétlés nélküli) variációknak a halmaza. Ekkor* $\mid \Omega \mid = V_{32}^3 = 32 \cdot 31 \cdot 30$.

A kedvező esetek összeszámolásához nyilvánvaló, hogy a harmadik lapot nyolcféleképpen lehet kiválasztani. Az első helyre marad 31 lehetőség, a második helyre 30 lehetőség. A lehetőségek összeszorzódnak, így a kedvező lehetőségek száma: $31 \cdot 30 \cdot 8$. *Tehát a keresett valószínűség* $\frac{31 \cdot 30 \cdot 8}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, *mint ahogy azt előzetesen megsejtettük.*

2. Műveletek eseményekkel

Az események halmazok, így az eseményekkel végezhető műveletek a halmazműveletek. Szokás még $A \cup B$ helyett $A + B$-t; $A \cap B$ helyett AB-t; $A \setminus B$ helyett $A - B$-t írni.

Példa. *Legyen A, B, C három esemény. Fejezzük ki az A, B, C és halmazműveletek segítsé-*

gével az alábbi eseményeket:

$$\begin{aligned}
D &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül egy sem teljesül},\\
E &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül pontosan egy teljesül},\\
F &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legfeljebb egy teljesül},\\
G &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legalább egy teljesül},\\
H &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül pontosa kettő teljesül},\\
I &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legfeljebb kettő teljesül},\\
J &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül legalább kettő teljesül},\\
K &\doteq \text{ az } A,\ B,\ C \text{ események közül mindhárom teljesül}.
\end{aligned}$$

Mo.: Több egyenértékű megoldás is adható. Ezek közül néhányat felsorolunk.

$$\begin{aligned}
D &= \overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C},\\
E &= (A \cup B \cup C) \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))\\
&= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C),\\
F &= (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) =\\
&= \overline{(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)} = \overline{A \cap B} \cap \overline{A \cap C} \cap \overline{B \cap C} =\\
&= (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup \overline{C}),\\
G &= A \cup B \cup C,\\
H &= (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C),\\
I &= \overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C},\\
J &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C),\\
K &= A \cap B \cap C.
\end{aligned}$$

3. Golyóhúzás urnából

Ebben a részben tárgyaljuk a visszatevéses és a visszatevés nélküli golyóhúzást urnából. Mindkét eseteben az alábbi jelöléseket alkalmazzuk:

N: jelöli az urnában lévő golyók számát;

s: az urnában lépő piros golyók száma ($0 \leqslant s \leqslant N$);

$N - s$: az urnában lépő fehér golyók száma;

n: golyót húzunk ki az urnából;

k: a kihúzott golyók közül a piros golyók száma.

A golyók halmaza:

$$\{P_1, P_2, \ldots, P_s, F_1, F_2, \ldots, F_{N-s}\}.$$

A golyókat mindkét esetben egyenként húzzuk ki az urnából. A visszatevéses esetben, a kihúzott golyót - miután megnéztük a színét - visszarakjuk az urnába, Majd újra húzunk. A visszatevés nélküli esetben a kihúzott golyót nem rakjuk vissza az urnába.

Jelölje A_k azt az eseményt, hogy a kihúzott golyók között k db piros golyó van. A $p_k = \mathbb{P}(A_k)$ valószínűséget keressük.

A számolás során alkalmazni fogjuk az $(n)_k$ rövidítést az $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ k-tényezős szorzat számára, ahol $n \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Golyóhúzás visszatevéssel. *Ebben az esetben $0 \leqslant k \leqslant n$. Legyen Ω a golyók halmazából képezhető n elemű ismétléses variációknak a halmaza, azaz*

$$\Omega \doteq \{(g_1, g_2, \ldots, g_n) \mid g_i \in G \ (i = 1, 2 \ldots, n)\} = G \times G \times \cdots \times G = G^n.$$

Ekkor az összes eset száma: $\mid \Omega \mid = N^n$.
A kedvező esetek száma:

$$\mid A_k \mid = P_n^{k,n-k(i)} \cdot V_s^{k(i)} \cdot V_{N-s}^{n-k(i)} = \binom{n}{k} s^k (N-s)^{n-k},$$

ugyanis $P_n^{k,n-k(i)} = \binom{n}{k}$ *féleképpen lehet sorbarendezni k darab piros és $n-k$ darab fehér golyót, ha az azonos színűek sorrendje nem számít; a piros helyeket* $V_s^{k(i)} = s^k$ *feleképpen lehet piros, a fehér helyeket* $V_{N-s}^{n-k(i)} = (N-s)^{n-k}$ *féleképpen lehet fehér golyókkal feltölteni.*

Így kapjuk, hogy

$$p_k = \frac{\binom{n}{k} s^k (N-s)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k} \left(\frac{N}{s}\right)^k \left(1 - \frac{N}{s}\right)^{n-k}.$$

Golyóhúzás visszatevés nélkül. *Mivel ekkor a húzást követően a golyók nem kerülnek vissza az urnába, így n-re és k-ra teljesülniük kell az alábbi egyenlőtlenségeknek: $n \leqslant N$; $0 \leqslant k$, $n-(N-s) \leqslant k$, $k \leqslant s$, $k \leqslant n$. Az utóbbi 4 egyenlőtlenség együttesen azt jelentik, hogy $\max(0, n-(N-s)) \leqslant k \leqslant \min(s, n)$. Legyen Ω a golyók halmazából képezhető n elemű (ismétlés nélküli) variációknak a halmaza, azaz*

$$\Omega \doteq \{(g_1, g_2, \ldots, g_n) \mid g_i \in G \ (i = 1, 2 \ldots, n), \ \text{úgy, hogy } g_j \neq g_k, \ \text{ha } j \neq k\}.$$

Ekkor az összes eset száma: $\mid \Omega \mid = V_N^n = (N)_n$.

A kedvező esetek száma:

$$| A_k |= P_n^{(i)k,n-k} \cdot V_s^k \cdot V_{N-s}^{n-k} = \binom{n}{k}(s)_k(N-s)_{n-k},$$

ugyanis $P_n^{(i)k,n-k} = \binom{n}{k}$ *féleképpen lehet sorbarendezni* k *darab piros és* $n-k$ *darab fehér golyót, ha az azonos színűek sorrendje nem számít; a piros helyeket* $V_s^k = (s)_k$ *feleképpen lehet piros, a fehér helyeket* $V_{N-s}^{n-k} = (N-s)_{n-k}$ *féleképpen lehet fehér golyókkal feltölteni.*

Így kapjuk, hogy

$$p_k = \frac{\binom{n}{k}(s)_k(N-s)_{n-k}}{(N)_n} = \frac{\frac{(s)_k}{k!}\frac{(N-s)_{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{(N)_n}{n!}} = \frac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

4. A valószínűség geometriai kiszámítási módja

Az A esemény ismeretlen valószínűségének a meghatározására olyan modellt használunk, melyben Ω egy olyan ponthalmaz, amelyet valamilyen módon tudunk mérni (például ívhossz, felszín térfogat) az Ω mértéke pozitív, de véges. Jelöljük ezt a mértéket m-mel. Az $A \subseteq \Omega$ halmaznak szintén létezik az m szerinti mértéke. Ekkor

$$\mathbb{P}(A) \doteq \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Feladatok

Klasszikus valószínűségi mező

1.•S Feladat. *Egy külföldi ösztöndíjra kiírt pályázat elbírálásának utolsó fordulójára 11 egyenlő képességű jelölt maradt, 5 fiú és 6 lány. A bíráló bizottság ezután sorsolással választ ki közülük 4 főt. Mi a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között lesz lány?*

2.•S Feladat. *Egy fogadásra egymástól függetlenül 5 angol, 3 francia és 4 olasz diplomata érkezik. Mi a valószínűsége, hogy az első három vendég érkezési sorrendje angol-francia-olasz?*

A valószínűség geometriai kiszámítási módja

3.•S Feladat. *Egy ügyfélszolgálaton az ügyintézés 30 percet vesz igénybe. Az egyik nap két ismerős megy be az ügyfélszolgálatra egymástól függetlenül 8 és 12 óra között véletlenül választva az időpontot. Mi a valószínűsége, hogy lesz olyan időpont, amikor egyszerre vannak bent?*

4.•S Feladat. *Ketten megbeszélik, hogy délután 5 óra és délután 5 óra 30 perc között találkoznak. mekkora valószínűséggel találkoznak, ha egymástól függetlenül érkeznek és mindketten 8 perc várakozás után elmennek, ha a másik addig nem érkezett meg?*

5.•S Feladat. *Két ember A, B véletlenszerűen megjelennek egy adott helyen 12 és 13 óra között. A 20 percet hajlandó várni B-re, B 30 percet hajlandó várni A-ra. Mi a valószínűsége, hogy nem találkoznak?*

6.•S Feladat. *Egy kis kitötőben egyszerre csak egy hajó rakodhat. Az egyik nap 8 és 20 óra között biztosan érkezik két hajó. A rakodás mindkettő esetében 57 percet vesz igénybe. Mennyi a valószínűsége, hogy nem kell várniuk egymásra?*

7.S Feladat. *Egységnyi hosszúságú szakaszt három részre bontunk 2 véletlenszerűen megválasztott ponttal. Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott három szakaszból háromszög szerkeszthető?*

8.S Feladat. *Egységnyi hosszúságú szakaszt két részre bontunk egy találomra választott ponttal, majd a két részt közül a hosszabbikon még egy pontot választunk és ezzel ezt is kettéosztjuk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kapott három szakaszból háromszög szerkeszthető?*

9.S Feladat. *Vegyünk három, egységnyi hosszúságú szakaszt. Mindegyikből vágjunk le találomra egy darabot. Mennyi a valószínűsége, hogy a megmaradó három szakaszból háromszög szerkeszthető?*

10. Feladat. *(Buffon-féle tűprobléma) Egy kis hosszúságú tűt ejtünk egy vonalas papírra. A kis hosszúság azt jelenti, hogy a tű l hossza kisebb vagy egyenlő, a párhuzamos egyenesek d távolságánál. Mennyi a valószínűsége, hogy a tűnek a hozzá legközelebb eső egyenessel van közös pontja?*

Megoldások

A klasszikus valószínűségi mező

1.•S Megoldás. *I.Mo. Komplementer esemény valószínűsége alapján.*
Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\begin{aligned} A &\doteq \text{van a csoportban lány}, \\ J &\doteq \{F_1, \ldots, F_5, L_1, \ldots L_4\} \text{ a jelöltek halmaza}, \\ \Omega &\doteq \{B \subseteq J \| B| = 4\} \text{ (Klasszikus valószínűségi mező)}. \end{aligned}$$

Ezekkel a jelölésekkel

$$A = \{H \subseteq \Omega | H \cap \{L_1, \ldots, L_4\} \neq \emptyset\},$$

amiből a komplementer esemény valószínűségére vonatkozó összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{\binom{5}{4}}{\binom{9}{4}} = \frac{121}{126} = 0.9603.$$

II. Mo. Esetszétválasztással. A diszjunkt eseteket a kiválasztott 4 fő nemek szerinti eloszlása alapján kapjuk.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{3}}{\binom{9}{4}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{2}}{\binom{9}{4}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{1}}{\binom{9}{4}} + \frac{\binom{4}{4}\binom{5}{0}}{\binom{9}{4}} = \frac{40 + 60 + 20 + 1}{126} = \frac{121}{126} = 0.9603.$$

2.•S Megoldás.
Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$D \doteq \{A_1, \ldots, A_4, F_1, \ldots, F_3, D_1 \ldots, D_4\} \text{ a diplomaták halmaza.}$$

Ekkor $|D| = 11$.

Legyen Ω *a D elemeiből alkotott 3-tagú sorozatok halmaza. (Klasszikus valószínűségi mező.)*
Összes esetek száma: $|\Omega| = V_{11}^3 = 11 \cdot 10 \cdot 9$. *Legyen*

$$A \doteq \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega | x_1 \in \{A_1, \ldots, A_4\}, x_2 \in \{F_1, \ldots, F_3\}, x_3 \in \{D_1, \ldots, D_4\}\}.$$

A kedvező esetek száma: $|A| = 4 \cdot 3 \cdot 4$. *Így*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 4}{11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{8}{165} = 0.0\overline{48}.$$

A valószínűség geometriai kiszámítási módja

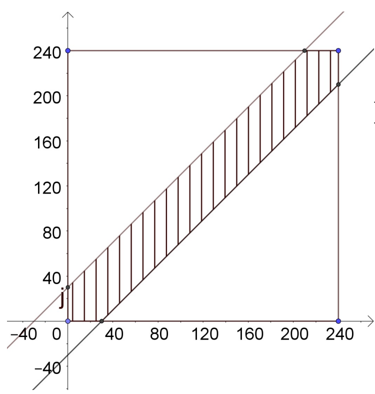
3.•S Megoldás. *A feladatot átfogalmazzuk a következő módon. Ledobunk két pontot x-et és y-t a $[0,240]$ intervallumra véletlenszerűen, egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy $|x-y| \leqslant 30$? Bevezetünk néhány jelölést:*

$$\Omega \doteq [0,240] \times [0,240],$$
$$A \doteq \{(x,y) \in \Omega \mid |x-y| \leqslant 30\}.$$

Ekkor

$$|x-y| \leqslant 30 \quad \Leftrightarrow \quad -30 \leqslant x-y \leqslant 30 \quad \Leftrightarrow \quad y \leqslant x+30 \quad \text{és} \quad x-30 \leqslant y.$$

Így kapjuk, hogy



$$\mathbb{P}(A) = \frac{T(A)}{T(\Omega)} = \\ = \frac{240^2 - 2\frac{(240-30)^2}{2}}{240^2} = \frac{240^2-210^2}{240^2} = \\ = 1 - \left(\frac{210}{240}\right)^2 = \frac{15}{64} \approx 0.2344.$$

4.•S Megoldás. *Az előző feladat megoldásával analóg módon kapjuk, hogy:*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{30^2 - 2\frac{(30-8)^2}{2}}{30^2} = 1 - \left(\frac{2}{30}\right)^2 = \frac{104}{225} \approx 0.4622.$$

5.•S Megoldás. *A feladat átfogalmazható úgy, hogy ledobunk két pontot x-et és y-t véletlenszerűen és egymástól függetlenül a $[0,60]$ intervallumra. Jelölje x az A ember érkezési idejét (12 óra után eltelt idő percben), y a B érkezési idejét. Ekkor*

$$\Omega = [0,60] \times [0,60], \quad T(\Omega) = 60^2.$$

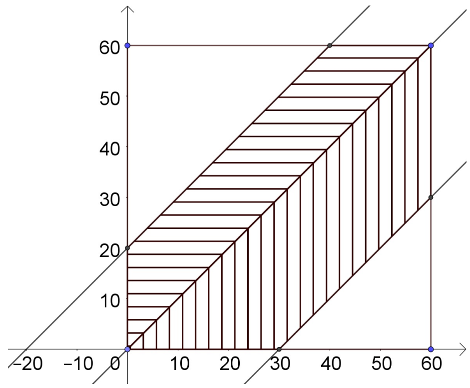
Jelölje A azt az eseményt, hogy a két ember találkozik.

$$A_1 = \{(x,y) \in T | x \leqslant y\} \quad \text{(azaz } A \text{ érkezik hamarabb és találkoznak.)}$$
$$A_2 = \{(x,y) \in T | y < x\} \quad \text{(azaz } B \text{ érkezik hamarabb és találkoznak.)}$$

Ekkor $A = A_1 \cup A_2$ és $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, azaz A a A_1 és A_2 halmazok diszjunkt úniója.

$$(x,y) \in A_1 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) \in [0,60], \quad x \leqslant y \leqslant x+20,$$
$$(x,y) \in A_2 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) \in [0,60], \quad y < x \leqslant y+30,$$

így A_1 *az* $y = x$ *és* $y = x + 20$ *egyenesek által határolt sávnak a* $[0, 60] \times [0, 60]$ *téglába eső része, a* A_2 *az* $y = x$ *és az* $y = x - 30$ *sávoknak a* $[0, 60] \times [0, 60]$ *téglába eső része.*



$$T(A_1) = \frac{60^2}{2} - \frac{20^2}{2},$$
$$T(A_2) = \frac{60^2}{2} - \frac{30^2}{2}$$

így

$$T(A) = T(A_1) + T(A_2) = 60^2 - \left(\frac{20^2}{2} + \frac{30^2}{2}\right).$$

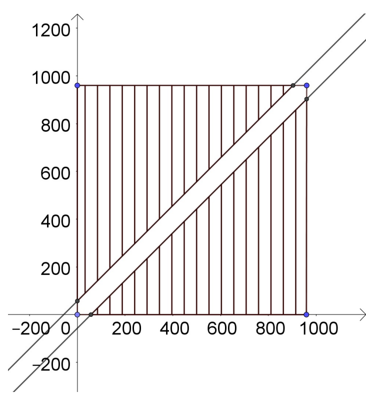
Tehát

$$\mathbb{P}(A) = \frac{T(A)}{T(\Omega)} = \frac{60^2 - \left(\frac{20^2}{2} + \frac{30^2}{2}\right)}{60^2} = 1 - \frac{\frac{20^2}{2} + \frac{30^2}{2}}{60^2} = 1 - \frac{20^2 + 30^2}{2 \cdot 60^2}.$$

A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = \frac{20^2 + 30^2}{2 \cdot 60^2} = \frac{13}{72} \approx 0.1806.$$

6.•S Megoldás. *16 óra = 960 perc. A korábbi feladatokkal analóg módon kapjuk, hogy*



$$\mathbb{P}(A) = \frac{2 \cdot \frac{(960-57)^2}{2}}{960^2} =$$
$$= \left(\frac{903}{960}\right)^2 = 0.8848.$$

7.S Megoldás. *Bevezetjük a szokásos jelöléseket:*

$$\Omega \doteq [0, 1] \times [0, 1],$$
$$A \doteq \{(x, y) \in \Omega |\ \text{a 3 szakaszból háromszög szerkeszthető}\},$$
$$A_1 \doteq \{(x, y) \in A | x \leqslant y\} \qquad A_2 = \{(x, y) \in A | y < x\}.$$

Ekkor

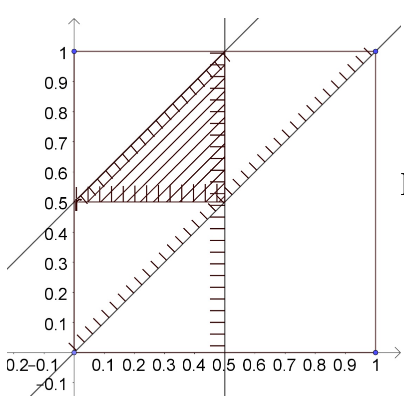
$$A = A_1 \cup A_2, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2), \quad \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = 2\mathbb{P}(A_1),$$

így elegendő $\mathbb{P}(A_1)$*-et kiszámolni. Ehhez tegyük fel, hogy* $x \leqslant y$*. Az* x *és* y *pontok 3 részre bontják a* $(0,1)$ *intervallumot.*

A kapott 3 szakasz hossza: x, $y-x$, $1-y$*. Ezekre a szakaszhosszokra alkalmazva a háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy*

$$\begin{aligned}
x + (y-x) \geqslant 1-y \quad &\Leftrightarrow \quad y \geqslant 1-y \quad \Leftrightarrow \quad 2y \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad y \geqslant \frac{1}{2},\\
x + 1 - y \geqslant y - x \quad &\Leftrightarrow \quad 2x+1 \geqslant 2y \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{1}{2} \geqslant y,\\
y - x + 1 - y \geqslant x \quad &\Leftrightarrow \quad 1 \geqslant 2x \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

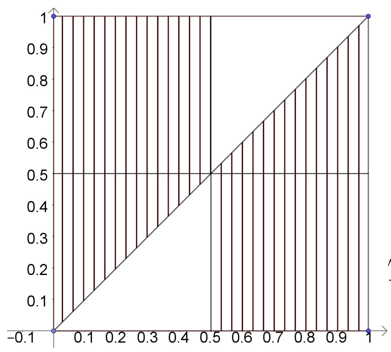
A kapott lineáris egyenlőtlenségek félsíkokat határoznak meg a síkban, ezeket a félsíkokat kell összemetszenünk. A féksíkok határegyenesét úgy kapjuk, hogy a kisebb, vagy nagyobb egyenlő relációjeleket egyenlőségjelre cseréljük. A kapott egyenes két félsíkra bontja a síkot. Úgy győződünk meg arról, hogy melyik félsík pontjai elégítik ki a lineáris egyenlőtlenséget, hogy egy tetszőlegesen megválasztott pont, mondjuk az origó pontjait a lineáris egyenlőtlenségbe helyettesítjük.



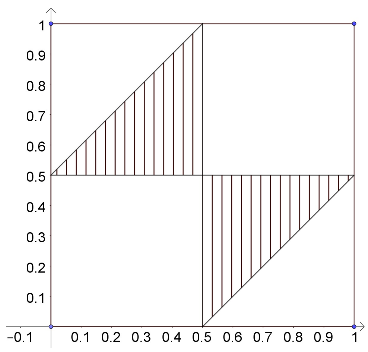
$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{t(A_1)}{t(\Omega)} = \frac{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}}{1} = \frac{1}{8},$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(A) = 2\mathbb{P}(A_1) = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

8.S Megoldás. *Legyen*



$$\Omega = \left\{ (x,y) \in [0,1]\times[0,1] \middle| x \in \left[0,\frac{1}{2}\right], y \in [x,1] \right\} \cup$$
$$\cup \left\{ (x,y) \in [0,1]\times[0,1] \middle| x \in \left[\frac{1}{2},1\right], y \in [0,x] \right\},$$
$$T(\Omega) = \frac{3}{4}.$$



$$A = \{(x,y) \in \Omega | \text{a kapott 3 szakaszból háromszög szerkeszthető}\},$$
$$T(A) = \frac{1}{4} \qquad \textit{(Lásd előző feladat).}$$

Így kapjuk, hogy

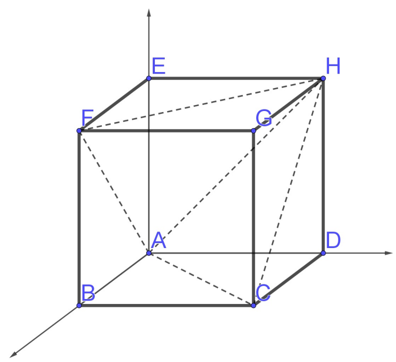
$$\mathbb{P}(A) = \frac{T(A)}{T(\Omega)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

9.S Megoldás. *Vezessük be a szokásos jelöléseket*

$$\Omega \doteq [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$$

$$A \doteq \{(x,y,z) \in \Omega | \text{x-ből, y-ból és z-ből háromszög szerkeszthető}\}.$$

Jelölje ABCDEFGH azt az egység oldalhosszú kockát, amelynek az A csúcsa az origó, az A csúcsa felett van E csúcsa, az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ a koordináta-rendszer tengelyei és az ABCD illetve *az EFGH körüljárási irányok megegyeznek.*



$$\begin{array}{ll} A=(0,0,0), & E=(0,0,1), \\ B=(1,0,0), & F=(1,0,1), \\ C=(1,1,0), & G=(1,1,1), \\ D=(0,1,0), & H=(0,1,0). \end{array}$$

Az A halmaz a háromszög-egyenlőtlenség miatt az alábbi egyenlőtlenség-rendszerrel adható meg:

$$\begin{array}{llllll} 1. & 0 \leqslant x \leqslant 1, & 2. & 0 \leqslant y \leqslant 1, & 3. & 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ 4. & x \leqslant y+z, & 5. & y \leqslant x+z, & 6. & z \leqslant x+y. \end{array}$$

Ezek közül az 1., 2., 3. egyenlőtlenség-rendszer az egységkocka pontjait, azaz Ω-t karakterizálja, így elegendő foglalkoznunk a 4., 5., 6. egyenlőtlenségekkel. Ezek mindegyikének megoldáshalmaza egye-egy féltér.

A 4. egyenlőtlenség megoldáshalmaza az a féltér, amelyet az

$$\alpha: \qquad 0=-x+y+z$$

egyenletű sík határol. Erre a síkra illeszkednek az A, C, F pontok, a féltér nem tartalmazza a B pontot, de tartalmazza a G pontot.

Az 5. egyenlőtlenség megoldáshalmaza az a féltér, amelyet a

$$\beta: \qquad 0=x-y+z$$

egyenletű sík határol. Erre a síkra illeszkednek az A, C, H pontok, a féltér nem tartalmazza a D pontot, de tartalmazza a G pontot.

Végül a 6. egyenlőtlenség által meghatározott félteret a

$$\gamma: \qquad 0=x+y-z$$

egyenletű sík határolja Erre a síkra illeszkednek az A, F, H pontok. A féltér nem tartalmazza az E pontot, de tartalmazza a G pontot.

Érdemes észrevenni, hogy a

$$G_{ACFB}, \quad G_{ACHD}, \quad G_{AFME}, G_{CHFG}$$

háromszög-alapú gúlák egybevágóak. (A későbbiekben egyszerűen gúla.) A T_{ACHF} egy $\sqrt{2}$ oldalhosszúságú (szabályos) tetraéder. (A későbbiekben egyszerűen tetraéder.)

$$V_{\text{kocka}} = 1, \quad V_{\text{tetraéder}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{(\sqrt{2})^3 \cdot \sqrt{2}}{12} = \frac{1}{3},$$

Így kapjuk, hogy

$$1 = V_{\text{kocka}} = V_{\text{tetraéder}} + 4V_{\text{gúla}} = \frac{1}{3} + 4 \cdot V_{\text{gúla}} \quad \Rightarrow \quad V_{\text{gúla}} = \frac{1}{6}.$$

Így

$$V(A) = V_{\text{tetraéder}} + V_{\text{gúla}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2},$$

amiből kapjuk, hogy

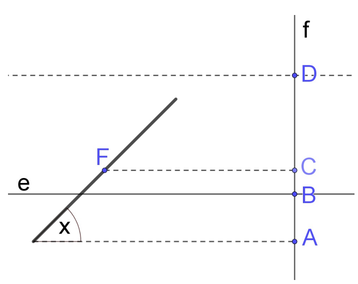
$$\mathbb{P}(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

10. Megoldás. *A probléma és a probléma geometriai valószínűség segítségével történő elméleti megoldása egyaránt* ***Georges Louis Leclerc****-től (1707-1788), Buffon grófjától származik. A módszer alkalmas a π közelítő értékének kísérleti úton történő meghatározására.*

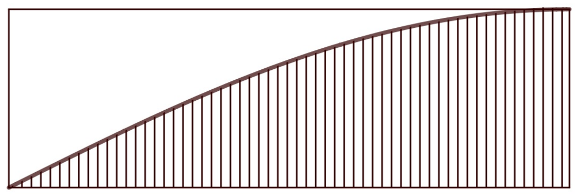
Legyen e a tűhöz legközelebbi egyenes és jelöljön f egy olyan egyenest, amely merőleges e-re. A tűnek az e egyeneshez viszonyított helyzetét az (x, y) koordináták írják le, ahol x a tűnek a párhuzamos egyenesekkel bezárt szögét y a tű felezőpontjának e-től való távolságát jelöli. Ekkor

$$\Omega = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{d}{2}\right], \qquad T(\Omega) = \frac{\pi}{2}\frac{d}{2}.$$

Jelölje A azt az eseményt, amikor a tűnek van közös pontja a hozzá legközelebb eső egyenessel, azaz az e egyenessel. Ez pontosan akkor következik be, amikor a tű felelzőpontjának az e-től való távolsága (y) kisebb, vagy egyenlő a tűnek az f-re eső merőleges vetületének a felénél ($\frac{l}{2}\sin(x)$).



X a tűnek az e-vel bezárt szöge,
$\overline{AC}$ a a tűnek az f-re eső merőleges vetületének a fele,
$\overline{BC}$ a a tű feklezőpontjának az e-től mért távolsága,
$\overline{BD}$ két párhuzamos egyenes távolságának a fele $= \dfrac{d}{2}$.



$l = d = 1$ *eset,*

$y = \frac{1}{2}\sin(x).$

Így

$$A = \left\{ (x, y) \in \Omega \middle| 0 < y < \frac{l}{2}\sin(x) \right\},$$

$$T(A) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2}\sin(x)dx = \frac{l}{2}\Big[-\cos(x) \Big]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{l}{2},$$

amiből kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \frac{T(A)}{T(\Omega)} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{\pi}{2}\frac{d}{2}} = \frac{2}{\pi}\frac{l}{d}.$$

3. Gyakorlat
A feltételes valószínűség,
Bayes-formula, teljes valószínűség tétele, Bayes Tétel,
A lánc szabály. Események függetlensége

Rövid elméleti összefoglaló

1. A feltételes valószínűség

Legyenek A, $B \in \mathcal{F}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Ekkor

$$\mathbb{P}(A|B) \doteq \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

A $\mathbb{P}(A \mid B)$ az A esemény valószínűsége, feltéve, hogy a B esemény bekövetkezik.

A feltételes valószínűség tulajdonságai:

1. *Szita formula feltételes valószínűségre:*

$$\mathbb{P}(A \cup B|C) = \mathbb{P}(A \mid C) + \mathbb{P}(B|C) - \mathbb{P}(A \cap B|C),$$

valahányszor A, B, $C \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $\mathbb{P}(C) \neq 0$.

2. *Véges additivitás feltételes valószínűségre:*

$$\mathbb{P}(A \cup B \mid C) = \mathbb{P}(A|C) + \mathbb{P}(B|C)$$

valahányszor A, B, $C \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $\mathbb{P}(C) \neq 0$ és $(A \cap B) \cap C = \emptyset$.

3. *Komplementer esemény feltételes valószínűsége:*

$$\mathbb{P}\left(\overline{A}|B\right) = 1 - \mathbb{P}(A|B) \qquad (A, B \in \mathcal{F};\ \mathbb{P}(B) \neq 0).$$

valahányszor A, $B \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

2. Bayes-formula, teljes valószínűség tétele, Bayes Tétel

A Bayes-formula: *Legyenek $A, B \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $\mathbb{P}(A) \neq 0$ és $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Ekkor*

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Teljes eseményrendszer: *Legyenek* $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$ *úgy, hogy* $B_j \cap B_k = \emptyset$*, ha és* $j \neq k$*. A* (B_n) *eseményrendszert* ***teljes eseményrendszer****nek nevezzük, ha* $\bigcup_n B_n = \Omega$*. Azaz a teljes eseményrendszer események egy véges, vagy végtelen sorozata, amely az* Ω *páronként diszjunkt tagokból álló lefedését adja.*

A továbbiakban a teljes valószínűség tételének és a Bayes-formulának csak a véges változatát ismertetjük, mivel csak ezeket használjuk a feladatok megoldása során. A végtelen változatokban a véges összegek helyett végtelen numerikus sorok szerepelnek.

A teljes valószínűség tétele: *Ha* $B_1, B_2, \dots, B_n$ *egy olyan teljes eseményrendszer amelyre* $\mathbb{P}(B_i) \neq 0$ *minden* $i = 1, 2 \dots, n$ *esetén,* $A \in \mathcal{F}$ *egy további esemény, akkor*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j).$$

A Bayes Tétel: *Ha* $B_1, B_2, \dots, B_n$ *egy olyan teljes eseményrendszer amelyre* $\mathbb{P}(B_i) \neq 0$ *minden* $i = 1, 2 \dots, n$ *esetén,* $A \in \mathcal{F}$ *egy további esemény úgy, hogy* $\mathbb{P}(A) \neq 0$*, akkor*

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}.$$

3. A lánc szabály

Lánc szabály: *Legyenek* $B_1, B_2, \dots, B_n$ *olyan események, melyekre* $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1}) \neq 0$*. Ekkor*

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1) \cdots \mathbb{P}(B_n|B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1}).$$

4. Események függetlensége

Két esemény függetlensége: *Az események (sztochasztikus) függetlenségének a fogalma a feltételes valószínűség fogalmából származtatható. Az* A *és* B *események függetlenek, ha* $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$*, azaz a* B *esemény bekövetkezése nem befolyásolja az* A *esemény bekövetkezését. A* $\mathbb{P}(A|B)$ *kifejezéshez szükség van a* $\mathbb{P}(B) \neq 0$ *feltételre. Azonban a* $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ *formulából rendezéssel kapjuk*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A).$$

formulát, amihez már a $\mathbb{P}(B) \neq 0$ *feltételre sincs szükség. Ezt a formulát fogadjuk el két esemény függetlenségének definíciójának.*

Eseményrendszer páronkénti függetlensége: *Azt mondjuk, hogy egy* $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ *eseményrendszer páronként független, ha bármely két tagja független.*

Véges sok esemény teljes függetlensége: *Azt mondjuk, hogy az A_1, A_2, … A_n* ***események teljesen függetlenek****, ha tetszőleges $1 \leqslant k \leqslant n$ és $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$ indexek esetén*

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

azaz a véges sok tagból álló metszet valószínűsége egyenlő a valószínűségek szorzatával.

Eseményrendszer teljes függetlensége: *Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$* ***eseményrendszer teljesen független****, ha bármely véges részrendszere teljesen független.*

Eseményrendszer függetlensége alatt, ha csak mást nem mondunk, mindig teljes függetlenséget értünk.

Példa. *Legyen $\Omega \doteq \{1,2,3,4\}$ egy klasszikus valószínűségi mező eseménytere. Legyenek $A \doteq \{1,2\}$, $B \doteq \{2,3\}$, $C \doteq \{1,3\}$. Ekkor az A, B, C események páronként függetlenek, mivel*

$$\frac{1}{4} = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C),$$

azonban teljesen nem függetlenek, mivel

$$\frac{1}{4} = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}.$$

Példa. *A harminckét lapos magyar kártyából kihúzunk egy lapot. Jelölje A azt az eseményt, hogy pirosat húzunk; B, hogy disznót húzunk. Függetlenek-e az A és B események? Ezt követően eltávolítjuk a pakliból a zöld alsót. Megváltozik-e az A és a B események függetlensége?*
Mo.: Mint ahogy azt korábban már láttuk, az A és B események függetlenek, mivel

$$\frac{1}{32} = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}.$$

A zöld alsó eltávolítása után az A és B események már nem lesznek függetlenek, ugyanis ekkor

$$\frac{1}{31} = \mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{8}{31} \cdot \frac{4}{31}.$$

Példa. *Pozitív valószínűségű diszjunkt események nem lehetnek függetlenek.*
Ha $A \subseteq B$, $\mathbb{P}(A) \neq 0$, $\mathbb{P}(B) \neq 1$, akkor az A és B események nem lehetnek függetlenek.

Független események tulajdonságai:

1. *Ha A, B olyan események, melyekre $\mathbb{P}(A) = 0$ vagy $\mathbb{P}(A) = 1$, akkor A és B függetlenek.*
2. *Ha A, B független események, akkor az $\overline{A}$, B; az A, $\overline{B}$; az $\overline{A}$, $\overline{B}$ események is függetlenek.*
3. *Ha az $\mathcal{A}$ eseményrendszer teljesen független és az $\mathcal{A}$ eseményei közül tetszőlegesen sokat a komplementerére cserélünk ki, akkor a teljes függetlenség megőrződik.*

Feladatok

1. A feltételes valószínűség

1.• Feladat. *Tudjuk, hogy P(A)=0.36, P(A|B)=0.43 és P(B|A)=0.93. Mennyi a valószínűsége, hogy az A és B legalább egyike bekövetkezik?*

2. Bayes-formula, teljes valószínűség tétele, Bayes Tétel

2.• Feladat. *Egy terméket három üzemben készítenek. A három üzemben a selejtszázalék rendre 0.09, 0.17 és 0.41, míg a három üzemben az összterméknek rendre 23, 42 és 35 százalékát állítják elő. Az össztermékből kivesznek egy darabot, és az hibás. Mi a valószínűsége, hogy az első üzemben gyártották?*

3.• Feladat. *Egy adott betegségben szenvedő betegek 33%-át egy olyan új kezelésnek vetik alá, amely a korábbi 25%-ról, 53%-ra javítja a gyógyulási arányt. Egy gyógyult beteget kiválasztva mi a valószínűsége, hogy ő az új kezelésben részesült?*

4.• Feladat. *A CHIPCAD microchip gyártó cég teljes termelése két gépsorról származik. Az I. gépsor adja a termelés 64 %-át 0.042 % selejttel, míg a II. gépsor adja a termelés 36%-át 0.013% selejttel. Ha egy véletlenül kiválasztott chip selejtes, akkor mi a valószínűsége, hogy azt a II. gépsor gyártotta?*

5.∗ Feladat. *Egy törzs minden tagja az év egy adott napján leopárdvadászatra megy. A vadászaton egy vadászt 0.11 valószínűséggel támad meg egy leopárd és ekkor 0.40 valószínűséggel öli meg a leopárd a vadászt. Egyéb veszélyek miatt 0.09 valószínűséggel halhat meg a vadász a vadászaton. Ha egy vadász meghalt a vadászaton, akkor mi a valószínűsége, hogy egy leopárd ölte meg?*

6.•S Feladat. *20 doboz mindegyikében 36 golyó van, amelyek közül rendre 17, 18, 19, ... , 36 fehér. Találomra választunk egy dobozt, majd véletlenül kihúzunk egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy fehér golyót húzunk?*

7.∗ Feladat. *Az igazak városában a lakosok 72%-a igazat mond, a hazugok városában a lakosok 87%-a hazudik. Mi nem tudjuk, hogy melyik városban vagyunk, egyforma eséllyel lehetünk mindkettőben. megkérdezünk egy embert és azt mondja, hogy ez a hazugok városa. mi a valószínűsége, hogy ez az ember hazudik?*

8.• Feladat. *A meteorológusok szerint holnap 0.23 valószínűséggel lesz eső és 0.51 valószínűséggel lesz szél. ha lesz eső, akkor 0.33 valószínűséggel szél is lesz. Mi a valószínűsége, hogy ha szél lesz, eső is lesz?*

9.• Feladat. *Egy országban a lakosság 95 százalékának van televíziója és 92 százalékának autója. Az autóval rendelkezők legalább hány százalékának van televíziója is?*

10. Feladat. *Valakit keresünk az Egyetemen. A keresett személy egyforma valószínűséggel lehet adott 5 terem valamelyikében és annak a valószínűsége, hogy az 5 terem valamelyikében egyáltalán jelen van pp. Már 4 termet megnéztünk és a keresett személyt nem találtuk. Mennyi a valószínűsége, hogy az ötödik teremben van?*

3. Lánc szabály

11. Feladat. *Valamilyen vegyszerrel szúnyogirtást végeznek. Az első permetezés során a szúnyogok 80%-a elpusztult, a második permetezés során a megmaradt szúnyogok 40%-a pusztult el, a harmadik permetezés során a megmaradt szúnyogok 20%-a pusztult el. Mennyi a valószínűsége, hogy egy szúnyog még 2 irtást túlél, feltéve, hogy az elsőt túlélte?*

4. Események függetlensége

12.• Feladat. *Az A, B és C független események, amelyre $\mathbb{P}(A) = 0.020$, $\mathbb{P}(B) = 0.240$ és $\mathbb{P}(C) = 0.370$. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy egynél több következik be közülük!*

13.• Feladat. *Az A, B, és C független események, amelyre $\mathbb{P}(A) = 0.360$, $\mathbb{P}(B) = 0.080$ és $\mathbb{P}(C) = 0.340$. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy pontosan kettő következik be közülük!*

14.• Feladat. *Legyen $\mathbb{P}(A) = 0.17$, $\mathbb{P}(A|B) = 0.17$ és $\mathbb{P}(B|A) = 0.69$. Határozza meg $\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B})$ értékét!*

15. Feladat. *Legyen $\mathbb{P}(A) = 0.18$, $\mathbb{P}(A|B) = 0.17$ és $\mathbb{P}(B|A) = 0.69$. Határozza meg $\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B})$ értékét!*

16.• Feladat. *A és B független események, $\mathbb{P}(A) = 0.24$ és $\mathbb{P}(B) = 0.86$. Határozza meg $\mathbb{P}(A|A+B)$ értékét!*

17.∗ Feladat. *Igazoljuk, hogy véges sok egynél kisebb valószínűségű eseményekből álló teljesen független eseményrendszer nem fedi le Ω-t.*

18.•S Feladat. *Egy kisegér 3 folyosó bármelyikén eljuthat egy sajtdarabhoz. Akármelyik folyosón 3 ajtón kell áthaladni. Mi a valószínűsége, hogy a kisegér el tud jutni a sajthoz, ha az ajtók egymástól függetlenül 0.53 valószínűséggel nyílnak ki, és kinyitásuk után nyitva is maradnak (ha van nyitott folyosó, akkor a kisegér megtalálja a sajtot)?*

19.$*$S Feladat. *Két út vezet A városból a B városba és szintén két út B-ből C városba. (Az A városból a C városba csak a B városon át lehet eljutni.) Mind a négy út egymástól függetlenül, 0.40 valószínűséggel járhatatlan a hó miatt. Feltéve, hogy A-ből C-be nincs végig járható útvonal, mi a valószínűsége, hogy A-ból B-be van járható út?*

20.S Feladat. *Egy út vezet A városból a B városba és két út B-ből C városba. (Az A városból a C városba csak a B városon át lehet eljutni.) Mind a három út egymástól függetlenül, p valószínűséggel járhatatlan a hó miatt. Feltéve, hogy A-ből C-be nincs végig járható útvonal, mi a valószínűsége, hogy A-ból B-be van járható út?*

21.S Feladat. *Két út vezet A városból a B városba és egy út B-ből C városba. (Az A városból a C városba csak a B városon át lehet eljutni.) Mind a három út egymástól függetlenül, p valószínűséggel járhatatlan a hó miatt. Feltéve, hogy A-ből C-be nincs végig járható útvonal, mi a valószínűsége, hogy A-ból B-be van járható út?*

22.•S Feladat. *Az A és B játékos felváltva dob kosárra (A kezd). Az A játékos 0.75 míg B 0.72 valószínűséggel talál a kosárba. A játékot addig folytatják, amíg valamelyik játékos beletalál a kosárba. Mi annak a valószínűsége, hogy pont az ötödik dobás után ér véget a játék?*

23.•S Feladat. *Egy dobozba 11 fehér és 19 piros golyó van. ketten felváltva húznak egy-egy találomra választott folyót, amelyet visszatesznek. Ezt addig folytatják, amíg csak valamelyikük piros golyót nem húz. Mennyi a valószínűsége annak, hogy nem a kezdő húz először piros golyót?*

24.• Feladat. *Legalább hányszor kell feldobni két szabályos dobókockát, ahhoz, hogy legfeljebb 0.36 valószínűséggel egyszer se kapjunk dupla hatost?*

25. Feladat. *Két lottószelvénnyel függetlenül játszunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a két szelvény valamelyikén van legalább 2-es találat?*

Megoldások

1. A feltételes valószínűség

1.• Megoldás. *Az alábbi adatokat ismerjük:*

$$a.\quad \mathbb{P}(A) = 0.36, \qquad b.\quad \mathbb{P}(A|B) = 0.43, \qquad c.\quad \mathbb{P}(B|A) = 0.93.$$

A $\mathbb{P}(A \cup B)$ valószínűséget keressük. Az **a.***-ból és a* **c.***-ból kapjuk, hogy*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.93 \cdot 0.36 = 0.3348.$$

ezt **b.***-vel összevetve kapjuk, hogy*

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A|B)} = \frac{0.3348}{0.43} = 0.7786.$$

így a szita-formula alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.36 + 0.7786 - 0.3348 = 0.8038.$$

2. Bayes-formula, teljes valószínűség tétele, Bayes Tétel

2.• Megoldás. *Vezessük be a következő jelöléseket:*

$$B_i \doteq \text{a kiválasztot terméket az } i\text{-edik üzemben gyártották } qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$A \doteq \text{a kiválasztot termék hibás.}$$

Felhasználva a fenti jelöléseket, az alábbi adatokat ismerjük:

	I. gép	*II. gép*	*III. gép*
selejtszázalék	$\mathbb{P}(A\|B_1) = 0.09$	$\mathbb{P}(A\|B_2) = 0.17$	$\mathbb{P}(A\|B_3) = 0.41$
termelés	$\mathbb{P}(B_1) = 0.23$	$\mathbb{P}(B_2) = 0.42$	$\mathbb{P}(B_3) = 0.35$

A táblázat első sorából a 10^{-2} szorzótényezőket kihagytuk, de - mint ahogy azt látni fogjuk - nincsenek hatással a végeredményre, csak a feltételes valószínűségek aránya fontos. A $\mathbb{P}(B_1|A)$ feltételes valószínűséget keressük. Mivel a B_1, B_2, B_3 események nemzérus valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszert alkotnak, így alkalmazható a Bayes Tétel.

$$\mathbb{P}(B_1|A) = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3)} =$$
$$= \frac{0.09 \cdot 0.23 \cdot 10^{-2}}{(0.09 \cdot 0.23 + 0.17 \cdot 0.42 + 0.41 \cdot 0.35) \cdot 10^{-2}} = 0.0879.$$

3.• Megoldás. *Vezessük be a következő jelöléseket*

$$U \doteq \text{ a kiválasztott beteg új kezelésben részesült,}$$
$$G \doteq \text{ a kiválasztott beteg gyógyult.}$$

A feladat szövege alapján tudjuk, hogy $\mathbb{P}(U) = 0.33$, $\mathbb{P}(G|\overline{U}) = 0.25$, $\mathbb{P}(G|U) = 0.53$. *A* $\mathbb{P}(U \mid G)$ *feltételes valószínűséget keressük. A komplementer esemény valószínűsége alapján kapjuk, hogy* $\mathbb{P}(\overline{U}) = 0.67$. *Mivel az* U *és* $\overline{U}$ *események nemzérus valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszert alkotnak, így alkalmazható a Bayes Tétel.*

$$\mathbb{P}(U|G) = \frac{\mathbb{P}(U \cap G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\mathbb{P}(G|U)\mathbb{P}(U)}{\mathbb{P}(G|U)\mathbb{P}(U) + \mathbb{P}(G|\overline{U})\mathbb{P}(\overline{U})} = \frac{0.53 \cdot 0.33}{0.53 \cdot 0.33 + 0.25 \cdot 0.67} = 0.5108.$$

4.• Megoldás. *Az előző feladat megoldásával analóg módon kapjuk, hogy*

$$\frac{0.00013 \cdot 0.36}{0.00013 \cdot 0.36 + 0.00042 \cdot 0.64} = \frac{13 \cdot 36}{13 \cdot 36 + 42 \cdot 64} = 0.1483.$$

5.∗ Megoldás. *A feladat megoldásában nagy szerepe van a szöveg értelmezésnek. Vezessük be a következő jelöléseket*

$$T \doteq \text{támad a leopárd,}$$
$$\text{Öl} \doteq \text{öl a leopárd,}$$
$$E \doteq \text{egyéb veszélyek miatt hal meg a vadász,}$$
$$H \doteq \text{meghal a vadász.}$$

A szöveg alapján az alábbi adatokat ismerjük: $\mathbb{P}(T) = 0.11$, $\mathbb{P}(\text{Öl}|T) = 0.40$, $\mathbb{P}(E) = 0.09$. *A* $\mathbb{P}(\text{Öl} \mid H)$ *ismeretlen feltételes valószínűséget keressük.*

A szöveg alapján úgy gondoljuk, hogy $\text{Öl} \subseteq T$, *mivel ha nem támad a leopárd, akkor ölni sem tud. Így kapjuk, hogy*

$$\mathbb{P}(\text{Öl}) = \mathbb{P}(\text{Öl}|T)\mathbb{P}(T) = 0.11 \cdot 0.4, \qquad \mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(\text{Öl} \cup E) = \mathbb{P}(\text{Öl}) + \mathbb{P}(E) = 0.11 \cdot 0.4 + 0.09.$$

Felhasználva, hogy $\text{Öl} \subseteq H$, *a keresett feltételes valószínűség*

$$\mathbb{P}(\text{Öl}|H) = \frac{\mathbb{P}(\text{Öl} \cap H)}{\mathbb{P}(H)} = \frac{\mathbb{P}(\text{Öl})}{\mathbb{P}(H)} = \frac{0.11 \cdot 0.4}{0.11 \cdot 0.4 + 0.09} = 0.3284.$$

6.•S Megoldás. *Vezessük be a következő jelöléseket.*

$$A \doteq \text{fehér golyót húzunk,}$$
$$B_i \doteq \text{az } i\text{-edik dobozt választjuk} \quad (i = 1, 2, \ldots, 20).$$

Az $\mathbb{P}(A)$ valószínűséget keressük. Mivel a B_1, B_2, ..., B_{20} események teljes eseményrendszert alkotnak és $\mathbb{P}(B_j) = \mathbb{P}(B_j)$ valahányszor $j, k = 1, 2, \ldots 20$, így $\mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{20}$ minden $i = 1, 2, \ldots 20$ esetén. Tudjuk továbbá, hogy

$$\mathbb{P}(A|B_i) = \frac{17 + i - 1}{36} \qquad (i = 1, 2, \ldots 20).$$

Így a teljes valószínűség tétele alapján

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{20} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i) = \frac{17}{36} \cdot \frac{1}{20} + \frac{18}{36} \cdot \frac{1}{20} + \cdots + \frac{36}{36} \cdot \frac{1}{20} =$$
$$= \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{20} \cdot (17 + 18 + \cdots + 36) = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{17 + 36}{2} \cdot 20 = \frac{17 + 36}{2 \cdot 36} = 0.7361.$$

7.$*$ Megoldás. *Vezessük be a következő jelöléseket*

$$\begin{aligned} A &\doteq \text{ az igazak városában vagyunk,} \\ B &\doteq \text{ a hamisak városában vagyunk,} \\ C &\doteq \text{ a megkérdezett ember azt mondja, hogy ez a hazugok városa,} \\ I &\doteq \text{ a megkérdezett ember igazat mond,} \\ H &\doteq \text{ a megkérdezett ember hazudik.} \end{aligned}$$

A feladat megoldásában a legnagyobb nehézséget az okozza, hogy fel kell ismerni, hogy feltételes valószínűséget kell kiszámolnunk. Nevezetesen a $\mathbb{P}(H|C)$ feltételes valószínűség kiszámítása a kérdés. A feladat megoldása függ attól, hogy hogyan értelmezzük a szöveget. Úgy gondoljuk, hogy hogy egy adott kérdésre adott válasz igaz, vagy hamis volta függ a kérdéstől, azaz a C és a H események nem függetlenek.

Ismerünk néhány adatot, úgy mint

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(I|A) = 0.72, \quad \mathbb{P}(H|B) = 0.87.$$

A Bayes Tétel alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(H|C) = \frac{\mathbb{P}(C|H) \cdot \mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}(C|H) \cdot \mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(C|I) \cdot \mathbb{P}(I)}.$$

A továbblépéshez szükség van egy kis ügyeskedésre. Itt használjuk fel, hogy mit is jelent a C esemény.

$$\mathbb{P}(C|H) \cdot \mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(C \cap H) = \mathbb{P}(A \cap H) = \mathbb{P}(H|A) \cdot \mathbb{P}(A)$$
$$\mathbb{P}(C|I) \cdot \mathbb{P}(I) = \mathbb{P}(C \cap I) = \mathbb{P}(B \cap I) = \mathbb{P}(I|B) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Mivel az I és a H események egymás komplementerei, így a komplementer esemény feltételes valószínűségére vonatkozó összefüggés alapján

$$\mathbb{P}(H|A) = 1 - \mathbb{P}(I|A) = 1 - 0.72, \qquad \mathbb{P}(I|B) = 1 - \mathbb{P}(H|B) = 1 - 0.87,$$

így kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(H|C) = \frac{\mathbb{P}(H|A)\cdot\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(H|A)\cdot\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(I|B)\cdot\mathbb{P}(B)} = \\ = \frac{(1-0.72)\cdot\frac{1}{2}}{(1-0.72)\cdot\frac{1}{2} + (1-0.87)\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1-0.72}{2-(0.72+0.87)} = 0.6829.$$

8.• Megoldás. *Vezessük be a következő jelöléseket:*

$$E \doteq \text{ lesz eső}, \qquad Sz \doteq \text{ lesz szél}.$$

A bevezetett jelölésekkel az ismert adatok az következő módon írhatóak fel:

$$\mathbb{P}(E) = 0.23, \qquad \mathbb{P}(Sz) = 0.51, \qquad \mathbb{P}(Sz|E) = 0.23.$$

A $\mathbb{P}(E \mid Sz)$ feltételes valószínűséget keressük. A Bayes Formula alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(E|\,Sz) = \frac{\mathbb{P}(E\cap Sz)}{\mathbb{P}(Sz)} = \frac{\mathbb{P}(Sz\,|E)\cdot\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(Sz)} = \frac{0.33\cdot 0.23}{0.51} = 0.1488.$$

9.• Megoldás. *Vezessük be a következő jelöléseket*

$$T \doteq \text{ egy véletlenszerűen kiválasztott embernek van telelevíziója},$$
$$A \doteq \text{ egy véletlenszerűen kiválasztott embernek van autója}.$$

Ezekkel a jelölésekkel: $\mathbb{P}(T) = 0.95$ és $\mathbb{P}(A) = 0.92$. A $\mathbb{P}(T|A)$ feltételes valószínűséget keressük. Először a szita formula segítségével alsó becslést adunk a $\mathbb{P}(A\cap T)$ valószínűségre:

$$1 \geqslant \mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B),$$

így kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A\cap B) \geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 = 0.95 + 0.92 - 1 = 0.87.$$

A keresett alsó becslés:

$$\mathbb{P}(T|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap T)}{\mathbb{P}(A)} \geqslant \frac{0.87}{0.92} = 0.9457.$$

10. Megoldás. *Tetszőleges $i = 1, 2, 3, 4, 5$ esetén jelölje A_i azt az eseményt, hogy a keresett személy az i-edik teremben van. Így kapjuk, hogy*

$$p = \mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_5) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_5) = 5\mathbb{P}(A_5).$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A_1) = \dots = \mathbb{P}(A_5) = \frac{p}{5}.$$

Így a keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(A_5|\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_4}) = \frac{\mathbb{P}(A_5 \cap (\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_4}))}{\mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_4})} = \frac{\mathbb{P}(A_5)}{\mathbb{P}(\overline{A_1 \cup \dots \cup A_4})} =$$
$$= \frac{\mathbb{P}(A_5)}{1 - \mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_4)} = \frac{\mathbb{P}(A_5)}{1 - 4 \cdot \mathbb{P}(A_1)} = \frac{\frac{p}{5}}{1 - \frac{4p}{5}} = \frac{p}{5 - 4p}.$$

3. A lánc szabály

11. Megoldás. *Jelölje B_i azt az eseményt, hogy egy szúnyog túléli az i-edik permetezést tetszőleges $i = 1, 2, 3$ esetén. Ekkor*

$$\mathbb{P}(B_1) = 0.2, \qquad \mathbb{P}(B_2|B_1) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B_2}|B_1) = 1 - 0.4 = 0.6,$$
$$\mathbb{P}(B_3|B_1 \cap B_2) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B_3}|B_1 \cap B_2) = 1 - 0.2 = 0.8.$$

A $\mathbb{P}(B_2 \cap B_3|B_1)$ feltételes valószínűséget keressük. A láncszabály alapján kapjuk, hogy:

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(B_2|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_3|B_1 \cap B_2) = 0.2 \cdot 06 \cdot 0.8 = 0.096.$$

Így a keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(B_2 \cap B_3|B_1) = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3)}{\mathbb{P}(B_1)} = \frac{0.096}{0.2} = 0.48.$$

4. Események függetlensége

12.• Megoldás. *A megoldás során a szita formulát és a teljes függetlenséget is felhasználjuk. A keresett valószínűség:*

$$\mathbb{P}(\textit{legalább 2 bekövetkezik}) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) =$$
$$= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - 3\mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) =$$
$$= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) - 2\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) =$$
$$= \mathbb{P}(A)[\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - 2\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)] + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) =$$
$$= 0.02[0.24 + 0.37 - 2 \cdot 0.24 \cdot 0.37] + 0.24 \cdot 0.37 = 0.0974.$$

13.• Megoldás. *A megoldás során a szita formulát és a teljes függetlenséget is felhasználjuk. A keresett valószínűség:*

$$\mathbb{P}\left((\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C})\right) =$$
$$= \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) + \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B} \cap C\right) + \mathbb{P}\left(A \cap B \cap \overline{C}\right) =$$
$$= (1 - 0.36) \cdot 0.08 \cdot 0.34 + 0.36 \cdot (0 - 0.08) \cdot 0.34 + 0.36 \cdot 0.08 \cdot (1 - 0.34) = 0.1490.$$

14.• Megoldás. *Mivel* $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$, *így* A *és* B *függetlenek, de akkor* $\overline{A}$ *és* $\overline{B}$ *is függetlenek. Így kapjuk, hogy*

$$\mathbb{P}\left(\overline{A}|\overline{B}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A) = 0 - 0.17 = 0.83.$$

15. Megoldás. *A keresett valószínűség:*

$$\mathbb{P}\left(\overline{A}|\overline{B}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)} = \frac{\mathbb{P}\left(\overline{A \cup B}\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)} = \frac{1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}{1 - \mathbb{P}(B)}.$$

Mivel

$$0.69 = \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{0.18},$$

így kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.69 \cdot 0.18.$$

Mivel

$$0.17 = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0.69 \cdot 0.18}{\mathbb{P}(B)},$$

így kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(B) = \frac{0.69 \cdot 0.18}{0.17}.$$

Tehát

$$\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{1 - (0.18 + \frac{0.69 \cdot 0.18}{0.17} - 0.69 \cdot 0.18)}{1 - \frac{0.69 \cdot 0.18}{0.17}} = 0.7929.$$

16.• Megoldás. *A keresett valószínűség:*

$$\mathbb{P}(A|A \cup B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap (A \cup B))}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A \cup B)}.$$

Felhasználjuk a szita-formulát:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) =$$
$$= 0.24 + 0.86 - 0.24 \cdot 0.86 = 0.8936.$$

Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A|A \cup B) = \frac{0.24}{0.8936} = 0.2686.$$

17.$*$ Megoldás. *Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik olyan A_1, ..., A_n egynél kisebb valószínűségi eseményekből álló teljesen független eseményrendszer, amely lefedi Ω-t. Ekkor*

$$0 = \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}\left(\overline{\Omega}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right) =$$
$$= \mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A_2}\right)\cdots\mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right)\big) = (1-\mathbb{P}(A_1))(1-\mathbb{P}(A_2))\cdots(1-\mathbb{P}(A_n)) > 0,$$

ami ellentmondás. A kapott ellentmondás bizonyítja az állításunk helyességét.

18.$\bullet$S Megoldás. *(Egérke és a sajt.) Események:*

$$\begin{aligned} A &\doteq \textit{ az első folyosó átjárható,} \\ B &\doteq \textit{ a második folyosó átjárható,} \\ C &\doteq \textit{ a harmadik folyosó átjárható.} \end{aligned}$$

Két megoldást is adunk a feladatra:
I.Mo: A szita formula és a függetlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \\ &\quad = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\ &\quad = 3\mathbb{P}(A) - 3\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 3\mathbb{P}(A) - 3\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \\ &\quad = 3\mathbb{P}(A) - 3\mathbb{P}(A)^2 + \mathbb{P}(A)^3 = 3 \cdot 0.53^3 - 3 \cdot 0.53^6 + 0.53^9 = 0.3834. \end{aligned}$$

II.Mo: Számolhatunk a komplementer esemény valószínűségére vonatkozó összefüggés felhasználásával is. Ekkor is felhasználjuk a függetlenséget.

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) =$$
$$= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)\mathbb{P}\left(\overline{C}\right) = 1 - (1 - 0.53^3)^3 = 0.3834.$$

A feladatban látott gondolatmenet alapján kapjuk, hogy ha $\mathcal{A} \doteq \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ teljesen független eseményekből álló eseményrendszer, $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{A}$ tetszőleges $i = 1, 2, \ldots, r$ esetén úgy, hogy

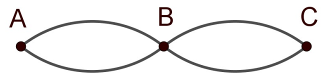
1. *$\mathcal{B}_i \neq \emptyset$ tetszőleges $i = 1, 2, \ldots, r$ esetén;*
2. *$\mathcal{B}_j \cap \mathcal{B}_k = \emptyset$, ha $j \neq k$;*
3. *$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r = \mathcal{A}$;*

és a B_i eseményeket

$$B_i = \bigcap \mathcal{B}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

módon definiáljuk, akkor a B_1, B_2, ..., B_r események teljesen függetlenek.

19.*S Megoldás. *(A hó miatt járhatatlan utak I.) Az alábbi ábrán az A, B, C településeket összekötő utak láthatóak.*



Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$U_{XY} \doteq \text{ az } X \text{ városból az } Y \text{ városba el lehet jutni.}$$

Jelölje továbbá a az A-ból B-be vezető utak járhatóságát U_1, illetve U_2; a B-ből C-be vezető utak járhatóságát U_3, illetve U_4; továbbá $\mathbb{P}(\overline{U_i}) = p$ tetszőleges $i = 1, 2, 3, 4$ esetén. A feladat kétféleképpen is megoldható.
I. Mo: Közvetlenül számoljuk a keresett valószínűséget.

$$\mathbb{P}\left(U_{AB}|\overline{U_{AC}}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(U_{AB} \cap \overline{U_{AC}}\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{U_{AC}}\right)}.$$

Érdemes észrevenni, hogy az U_{AB} és U_{BC} események függetlenek, ugyanis:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\overline{U_{AB}}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{U_1} \cap \overline{U_2}\right) = p^2,\\
&\mathbb{P}\left(\overline{U_{BC}}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{U_3} \cap \overline{U_4}\right) = p^2,\\
&\mathbb{P}\left(\overline{U_{AB}} \cap \overline{U_{BC}}\right) = \mathbb{P}\left((\overline{U_1} \cap \overline{U_2}) \cap (\overline{U_3} \cap \overline{U_4})\right) = p^4.
\end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy:

$$\mathbb{P}\left(U_{AB}|\overline{U_{AC}}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(U_{AB} \cap \overline{U_{AC}}\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{U_{AC}}\right)} = \frac{\mathbb{P}\left(U_{AB} \cap \overline{U_{AB} \cap U_{BC}}\right)}{\mathbb{P}(\overline{U_{AB} \cap U_{BC}})} = \frac{\mathbb{P}\left(U_{AB} \cap (\overline{U_{AB}} \cup \overline{U_{BC}})\right)}{1 - \mathbb{P}(U_{AB} \cap U_{BC})} =$$
$$= \frac{\mathbb{P}\left(U_{AB} \cap \overline{U_{BC}}\right)}{1 - \mathbb{P}(U_{AB} \cap U_{BC})} = \frac{(1-p^2)p^2}{1-(1-p^2)^2} = \frac{1-p^2}{2-p^2}.$$

II. Mo: A komplementer esemény valószínűségére vonatkozó összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(U_{AB}|\overline{U_{AC}}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{U_{AB}}|\overline{U_{AC}}\right) = 1 - \frac{\mathbb{P}\left(\overline{U_{AB}} \cap \overline{U_{AC}}\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{U_{AC}}\right)} = 1 - \frac{\mathbb{P}\left(\overline{U_{AB}}\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{U_{AC}}\right)} =$$
$$= 1 - \frac{p^2}{1-(1-p^2)^2} = \frac{1-p^2}{2-p^2}.$$

A feladatban látott gondolatmenet alapján kapjuk, hogy ha $\mathcal{A} \doteq \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ teljesen független eseményekből álló eseményrendszer, $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{A}$ tetszőleges $i = 1, 2, \ldots, r$ esetén úgy, hogy

1. $\mathcal{B}_i \neq \emptyset$ tetszőleges $i = 1, 2, \ldots, r$ esetén;

2. $\mathcal{B}_j \cap \mathcal{B}_k = \emptyset$, ha $j \neq k$;

3. $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r = \mathcal{A}$;

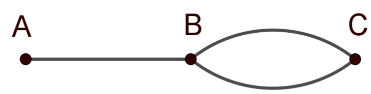
és a B_i eseményeket

$$C_i = \bigcup \mathcal{B}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

módon definiáljuk, akkor a C_1, C_2, ..., C_r események teljesen függetlenek.

Sőt, a D_1, D_2, ..., D_r események is teljesen függetlenek, ahol $D_i \in \{B_i, C_i\}$ tetszőleges $i = 1, 2, \ldots, r$ esetén, ahol a $\{B_i\}_{i=1}^r$ események az előző feladatot követő megjegyzésben vannak definiálva.

20.S Megoldás. *(A hó miatt járhatatlan utak II.)*



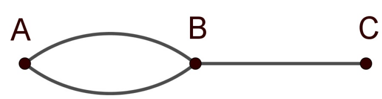
Események:

$$U_{XY} \doteq \text{ az } X \text{ városból az } Y \text{ városba el lehet jutni.}$$

Ezúttal a direkt megoldást választjuk, bár lehet, hogy a komplementer esemény valószínűségét egyszerűbb lenne kiszámítani. Az előző feladatban látott módon most is megmutatható, hogy az U_{AB} és U_{BC} események függetlenek. Így kapjuk, hogy:

$$\mathbb{P}\left(U_{AB} \cap \overline{U_{AC}}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(U_{AB} \cap \overline{U_{AC}}\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{U_{AC}}\right)} = \frac{\mathbb{P}\left(U_{AB} \cap \overline{U_{BC}}\right)}{1 - \mathbb{P}(U_{AB} \cap U_{BC})} = \frac{(1-p)p^2}{1-(1-p)(1-p^2)} = \frac{(1-p)p}{1+p-p^2}.$$

21.S Megoldás. *(A hó miatt járhatatlan utak III.)*



Események:

$$U_{XY} \doteq \text{ az } X \text{ városból az } Y \text{ városba el lehet jutni.}$$

Megint módon számolunk a komplementer esemény valószínűségének a kiszámítása helyett. Az előző feladatban látott módon most is megmutatható, hogy az U_{AB} és U_{BC} események függetlenek. Így kapjuk, hogy:

$$\mathbb{P}\left(U_{AB} \cap \overline{U_{AC}}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(U_{AB} \cap \overline{U_{AC}}\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{U_{AC}}\right)} = \frac{\mathbb{P}\left(U_{AB} \cap \overline{U_{BC}}\right)}{1 - \mathbb{P}(U_{AB} \cap U_{BC})} = \frac{(1-p^2)p}{1-(1-p^2)(1-p)} = \frac{1-p^2}{1+p-p^2}.$$

22.•S Megoldás. *Események:*

$$A \doteq \text{ az } A \text{ játékos talál bele a kosárba,} \quad \mathbb{P}(A) = 0.75,$$
$$B \doteq \text{ a } B \text{ játékos talál bele a kosárba,} \quad \mathbb{P}(B) = 0.72.$$

Így a keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(5.\text{ dobás után ér véget a játék}) = (1-0.75)(1-0.72)(1-0.75(1-0.72)\cdot 0.75 =$$
$$= (1-0.75)^2(1-0.72)^2 \cdot 0.75 = \frac{147}{40000} = 3.675 \cdot 10^{-3}.$$

23.•S Megoldás. *A megoldás során felhasználjuk a mértani sor összegképletére vonatkozó jól ismert képletet:*
A mértani sor összegképlete:

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}, \quad \text{ha} \qquad |q| < 1.$$

A golyók száma: összesen 30 golyó van, melyek közül 11 fehér, és 19 piros. Így

$$\mathbb{P}(\text{Fehéret húzunk}) \doteq \mathbb{P}(F) = \frac{11}{30}, \quad \mathbb{P}(\text{Pirosat húzunk}) \doteq \mathbb{P}(P) = \frac{19}{30}.$$

Események:

$$A_k \doteq \text{ a } k\text{-adik lépésben ér véget a játék,}$$
$$P_k \doteq \text{ a } k\text{-adik lépésben pirosat húzunk,}$$
$$F_k \doteq \text{ a } k\text{-adik lépésben fehéret húzunk.}$$

Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\text{Nem a kezdő húz először pirosat}) = \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_4) + \mathbb{P}(A_6) + \dots =$$
$$= \mathbb{P}(F_1 \cap P_2) + \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) + \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap F_5 \cap P_6) + \dots =$$
$$= \mathbb{P}(F) \cdot \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(F)^3 \cdot \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(F)^5 \cdot \mathbb{P}(P) + \dots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{11}{30}\frac{19}{30}\right) \cdot \left[\left(\frac{11}{30}\right)^2\right]^k = \frac{11}{30} \cdot \frac{19}{30} \cdot \frac{1}{1-(\frac{11}{30})^2} = \frac{19 \cdot 11}{30^2 - 11^2} = \frac{11}{41} = 0.2683.$$

Azok számára, akik nem szeretik használni a geometriai sor összegképletét, megmutatjuk, hogy a feladat az összegképlet használata nélkül is megoldható. Ehhez tekintsük az alábbi eseményeket:

$$A \doteq \text{a kezdő játékos nyer;}$$
$$B \doteq \text{nem a kezdő játékos nyer.}$$

A $\mathbb{P}(B)$ valószínűséget keressük. Tudjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(F)^2 \cdot \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(F)^4 \cdot \mathbb{P}(P) + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{19}{30} \left[\left(\frac{11}{30} \right)^2 \right]^k ;$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(F) \cdot \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(F)^3 \cdot \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(F)^5 \cdot \mathbb{P}(P) + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{11}{30} \frac{19}{30} \right) \cdot \left[\left(\frac{11}{30} \right)^2 \right]^k .$$

Mivel

$$1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \frac{11}{30}\mathbb{P}(A) = \frac{41}{30}\mathbb{P}(A),$$

így $\mathbb{P}(A) = \frac{30}{41}$, amiből kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{30}{41} = \frac{11}{41}.$$

24.• Megoldás. *Események:*

$$A_n \doteq \text{az } n\text{-edik dobás során nem kapunk dupla hatost,}$$
$$B_n \doteq \text{az } n \text{ dobás során egyszer sem kapunk dupla hatost.}$$

Tetszőleges $n \in \mathbb{Z}_+$) esetén. Így

$$\mathbb{P}(A_n) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A_n}) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}.$$

Felhasználva a függetlenséget kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \ldots \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1)^n = \left(\frac{35}{36} \right)^n \leqslant 0.36.$$

Exponenciális egyenlőtlenséget kell megoldanunk:

$$\ln \left(\left(\frac{35}{36} \right)^n \right) \leqslant \ln(0.36), \qquad n \ln \left(\frac{35}{36} \right) \leqslant \ln(0.36), \qquad n \geqslant \frac{\ln(0.36)}{\ln(\frac{35}{36})} = 36.27.$$

Legalább 37-szer kell feldobni a kockát.

25. Megoldás. *Események:*

$$A \doteq \text{ az első lottószelvényen van egy legalább 2-es találatom ,}$$
$$B \doteq \text{ a második lottószelvényen van egy legalább 2-es találatom .}$$

Ekkor
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{\binom{5}{0}\binom{85}{5} + \binom{5}{1}\binom{85}{4}}{\binom{90}{5}} = 0.0233.$$
A szita-formula és a függetlenség alapján kapjuk, hogy
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \\ = 2\mathbb{P}(A) - (\mathbb{P}(A))^2 = \mathbb{P}(A)[2 - \mathbb{P}(A)] = 0.4060.\end{aligned}$$

4. Gyakorlat
Valószínűségi változók (diszkrét eset),
Várható érték és szórásnégyzet

Rövid elméleti összefoglaló

1. Valószínűségi változók

Valószínűségi változó: *Legyen* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező. Egy* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *függvényt* ***valószínűségi változó****nak nevezünk, ha*

$$(\xi < x) \doteq \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

azaz a ξ *nívóhalmazai események.*

Érdemes megjegyezni, hogyha ξ *tetszőleges valószínűségi változó, akkor*

$$(\xi = x) \doteq \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$$

tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ *esetén.*

Az alkalmazás szempontjából a legfontosabb valószínűségi változók a diszkrét és az abszolút folytonos valószínűségi változók. Ebben a fejezetben csak a diszkrét valószínűségi változókkal foglalkozunk.

Valószínűségi változó eloszlásfüggvénye: *Legyen* ξ *egy tetszőleges valószínűségi változó. Az* $\mathbb{F}_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{F}_\xi(x) \doteq \mathbb{P}(\xi < x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon definiált függvényt a ξ *valószínűségi változó* ***eloszlásfüggvény****ének nevezzük. Ebből a definícióból is látszik, hogy minden valószínűségi változónak van eloszlásfüggvénye.*

Az eloszlásfüggvény tulajdonságai: *Az* $\mathbb{F}_\xi$ *eloszlásfüggvény*

1. *Monoton növekvő;*
2. *Balról folytonos;*
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathbb{F}_\xi(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbb{F}_\xi(x) = 1.$

2. Diszkrét valószínűségi változók

Egy X halmazt **megszámlálható**nak nevezünk, ha véges, vagy megszámlálhatóan végtelen. Ez utóbbi azt jelenti, hogy X elemei és $\mathbb{Z}_+$ elemei között létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. Tehát röviden egy X halmazt megszámlálhatónak nevezünk, ha elemei (véges, vagy végtelen) sorozatba rendezhetőek.

A diszkrét valószínűségi változó: *Azt mondjuk, hogy a* ξ ***valószínűségi változó diszkrét****, ha értékkészlete megszámlálható. Egy diszkrét valószínűségi változó értékkészletét*

$$\mathbb{R}_\xi \doteq \{x_1, x_2, \dots\}$$

módon jelöljük.

Ha ξ *egy diszkrét valószínűségi változó, akkor a*

$$p_1 \doteq \mathbb{P}(\xi = x_1),\ p_2 \doteq \mathbb{P}(\xi = x_2),\ \dots$$

valós számsorozatot (vagy még inkább az $x_i \mapsto p_i$ $(i = 1, 2, \dots)$ *függvényt) a* ξ *valószínűségi változó* ***eloszlás****ának a nevezzük.*

Érdemes megjegyezni, hogyha ξ egy olyan diszkrét valószínűségi változó, amely csak véges sok értéket vesz fel, akkor az eloszlásfüggvénye egy olyan balról folytonos lépcsős függvény, amely minden x_i helyen p_i értéket ugrik.

A diszkrét valószínűségi változó tulajdonságai: *Ha* ξ *egy diszkrét valószínűségi változó* $p_1, p_2, \dots$ *eloszlással, akkor*

1. $p_n \geqslant 0$ *minden* $n = 1, 2, \dots$ *esetén;*
2. $\sum_i p_i = 1$,

azaz diszkrét valószínűségi változó eloszlása nemnegatív, 1 összegű valós számok sorozata.

3. Diszkrét valószínűségi változó várható értéke

A ξ ***diszkrét valószínűségi változó várható érték****ének az*

$$\mathbb{E}(\xi) \doteq \sum_i x_i p_i = \sum_i x_i \mathbb{P}(\xi = x_i)$$

módon definiált valós számot nevezzük, amennyiben a definícióban szereplő numerikus sor abszolút konvergens.

Valószínűségi változók összegét és skalár szorosát pontonként értelmezzük. Kicsit részletesebben, ha $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező, $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változók; $c \in \mathbb{R}$, akkor a $\xi + \eta$, $c\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényeket

$$(\xi + \eta)(\omega) \doteq \xi(\omega) + \eta(\omega), \qquad (c\xi)(\omega) \doteq c \cdot \xi(\omega)$$

módon definiáljuk. Viszonylag könnyen látható, valószínűségi változók összege és skalár szorosa szintén valószínűségi változó. Ezekkel a műveletekkel a $\{\xi : \Omega \to \mathbb{R} \mid \xi$ valószínűségi változó $\}$ egy valós számok teste feletti vektortér.

Azt is érdemes megjegyezni, hogyha c egy valós szám, akkor a $\xi + c : \Omega \to \mathbb{R}$

$$(\xi + c)(\omega) \doteq \xi(\omega) + c \qquad (\omega \in \Omega)$$

módon definiált függvény szintén valószínűségi változó.

A várható értéke tulajdonságai: *Legyenek ξ, η valószínűségi változók; c egy valós szám. A várható érték a következő tulajdonságokkal rendelkezik:*

1. ***Additív**, azaz*
$$\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi) + \mathbb{E}(\eta),$$
ami úgy értendő, hogyha a ξ és η valószínűségi változóknak van várható értékük, akkor a $\xi + \eta$ valószínűségi változónak is van várható értéke, és az összeg várható értéke egyenlő a várható értékek összegével.

2. ***Homogén**, azaz*
$$\mathbb{E}(c\xi) = c\mathbb{E}(\xi),$$
ami úgy értendő, hogyha a ξ valószínűségi változóknak van várható értéke, akkor a $c\xi$ valószínűségi változónak is van várható értéke és a várható érték jele mögül a skalár szorzó kihozható.

3. *Eltolással kapcsolatos tulajdonság*
$$\mathbb{E}(\xi + c) = \mathbb{E}(\xi) + c,$$
ami úgy értendő, hogyha a ξ valószínűségi változóknak van várható értéke, akkor a $\xi + c$ valószínűségi változónak is van várható értéke és ebben esetben a várható érték kiszámítására alkalmazható a fenti összefüggés.

A fenti 1. és 2. tulajdonság azt jelenti, hogy a várható érték lineáris. A várható érték tulajdonságainak felsorolásakor nem véletlenül maradt ki a "diszkrét" jelző, ugyanis a várható érték fenti három tulajdonsága általános érvényű, tetszőleges valószínűségi változók esetén érvényes.

A transzformációs szabály diszkrét valószínűségi változó esetén: *Legyen ξ egy olyan diszkrét valószínűségi változó, amelynek van várható értéke, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy ("elég jó") függvény, azaz $g(\xi)$ is egy valószínűségi változó és $g(\xi)$-nek is van várható értéke. Ekkor a $g(\xi)$ valószínűségi változó várható értéke*

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \sum_i g(x_i) p_i$$

módon számolható.

Az "elég jó" függvény konkrétan azt jelenti, hogy g Borel-mérhető, de a céljainknak az is megfelel, ha folytonos. A folytonos függvények Borel mérhetőek.

A $g(\xi) : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény

$$g(\xi)(\omega) \doteq g(\xi(\omega)) \qquad (\omega \in \Omega)$$

módon van definiálva.

Könnyen látható, hogyha ξ egy valószínűségi változó, g egy Borel-mérhető függvény, akkor a $g(\xi)$ is egy valószínűségi változó.

A transzformációs formula azt fejezi ki, hogy a $g(\xi)$ várható értékének a kiszámolásához nem kell meghatároznunk a $g(\xi)$ valószínűségi változó eloszlását, az $\mathbb{E}(g(\xi))$ a ξ eloszlása alapján számolható.

4. Valószínűségi változó szórásnégyzete

Valószínűségi változó szórásnégyzete: *A ξ valószínűségi változó* ***szórásnégyzet****ének a*

$$\mathbb{D}^2(\xi) \doteq \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi))^2$$

módon definiált valós számot nevezzük, amennyiben a definícióban szereplő numerikus sor abszolút konvergens.

Valószínűségi változó szórása: *Ha ξ egy olyan valószínűségi változó, amelynek van szórásnégyzete, akkor a*

$$\mathbb{D}(\xi) \doteq \sqrt{\mathbb{D}^2(\xi)}$$

módon definiált számot a ξ valószínűségi változó ***szórás****ának nevezzük.*

Valószínűségi változó szórásnégyzetének a kiszámítása: *A ξ valószínűségi változó szórásnégyzetét a várható érték linearitása miatt célszerű az*

$$\mathbb{D}^2(\xi) \doteq \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2$$

módon számolni. Az $\mathbb{E}(\xi^2)$ számot a ξ valószínűségi változó ***második momentum****ának nevezzük. Az $\mathbb{E}(\xi^2)$ diszkrét esetben például a transzformációs szabály alapján*

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \sum_i x_i^2 p_i$$

módon számolható.

A szórásnégyzet tulajdonságai: *A szórásnégyzet*

1. ***Négyzetesen homogén**, azaz*

$$\mathbb{D}^2(c\xi) = c^2\mathbb{D}^2(\xi),$$

ami úgy értendő, hogyha a ξ valószínűségi változónak van szórásnégyzete, akkor a $c\xi$ valószínűségi változónak is van tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén és érvényes a fenti formula.

2. ***Transzláció invariáns**, azaz*

$$\mathbb{D}^2(\xi + c) = \mathbb{D}^2(\xi),$$

ami úgy értendő, hogyha a ξ valószínűségi változónak van szórásnégyzete, akkor a $\xi + c$ valószínűségi változónak is van tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén és érvényes a fenti formula.

Érdemes megjegyezni, hogy a szórásnégyzet általában nem additív, azonban bizonyos esetekben igen. Például, ha ξ_1 és ξ_2 olyan független valószínűségi változók amelyeknek van szórásnégyzete, akkor a $\xi_1 + \xi_2$ valószínűségi változónak is van szórásnégyzete és

$$\mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2) = \mathbb{D}^2(\xi_1) + \mathbb{D}^2(\xi_2),$$

azaz független esetben az összeg szórásnégyzete egyenlő a szórásnégyzetek összegével.

A valószínűségi változók függetlenségét a későbbiekben fogjuk definiálni. Érdemes azonban megjegyezni, hogy a szórásnégyzet additivitásához elegendő, ha a ξ_1 és a ξ_2 valószínűségi változók korrelálatlanok. Valószínűségi változók korrelálatlansága azt jelenti, hogy szorzatuk várható értéke egyenlő a várható értékük szorzatával. A korrelálatlanság gyengébb tulajdonság, mint a függetlenség, azaz ha két valószínűségi változó független, akkor korrelálatlan.

5. Matematikai eszközök (generátorfüggvény)

Legyen $f(z) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ egy valós (vagy komplex) együtthatós, valós (vagy komplex) változós hatványsor. Definiáljuk az $r \in \mathbb{R}$ számot

$$r \doteq \begin{cases} 0, & \text{ha } \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty; \\ \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{ha } \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 0; \\ +\infty, & \text{ha } \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0; \end{cases}$$

módon. Ekkor r-et a hatványsor **konvergenciasugar**ának nevezzük.

A Cauchy-Hadamard Tétel. *Az $f(z) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ hatványsor az origó körüli r sugarú körlap belsejében, azaz a*

$$B(0,r) \doteq \{z \in \mathbb{R} \mid |z| < r\} \qquad (\text{ vagy } B(0,r) \doteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\})$$

halmaz pontjaiban abszolút konvergens és akárhányszor differenciálható. A differenciálás tagonként végezhető, azaz

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} (n)_k a_n z^{n-k} \qquad (x \in B(0,r)).$$

Semmit sem tudunk mondani a hatványsor konvergenciájáról a $B(0,r)$ körlemez határpontjaiban, a külső pontokban a hatványsor divergens.

Diszkrét valószínűségi változó generátorfüggvénye: *A generátorfüggvény egy olyan matematikai segédeszköz, amely sok esetben segít a diszkrét valószínűségi változó várható értékének és szórásnégyzetének a meghatározásában.*

Legyen ξ egy diszkrét valószínűségi változó úgy, hogy $\mathcal{R}_\xi \subseteq \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, azaz a ξ csak nemnegatív egész értékeket vesz fel. Definiáljuk a $G_\xi : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényt

$$G_\xi(z) \doteq \sum_{k \in \mathcal{R}_\xi} p_k z^k = \sum_{k \in \mathcal{R}_\xi} \mathbb{P}(\xi = k) z^k \qquad (z \in D)$$

módon. Ez a függvény egy komplex változós függvénysor, azon belül is hatványsor.

A $\mathcal{R}_\xi \subseteq \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ feltételnek csupán annyi a szerepe hogyha $\mathcal{R}_\xi \subseteq \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ és $\mathcal{R}_\xi$ végtelen, akkor G_ξ egy hatványsor, így alkalmazható rá a Cauchy-Hadamard Tétel, melynek segítségével meghatározható a konvergencia tartomány, azaz a G_ξ függvény értelmezési tartománya és a tagonkénti differenciálhatósága. Ha azonban a ξ valószínűségi változó véges értékkészletű, akkor az $\mathcal{R}_\xi \subseteq \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ feltétel felesleges és a Cauchy-Hadamard Tétel sem alkalmazható.

Azt a tényt, hogy a G_ξ függvény komplex számokra is értelmezve van, egyáltalán nem fogjuk kihasználni.

Érdemes még megjegyezni, hogy a G_ξ függvény esetén a Cauchy-Hadamard Tételben szereplő $r = 0$ eset nem állhat elő, mivel $G_\xi(1) = \sum_i p_i = 1$, ez a hatványsor abszolút konvergens, így $r \geqslant 1$, de gyakori az $r > 1$ eset.

Amennyiben a ξ valószínűségi változónak létezik várható értéke, az a generátorfüggvény segítségével

$$\mathbb{E}(\xi) = G_\xi'(1)$$

módon számolható.

Amennyiben a ξ valószínűségi változónak létezik a szórásnégyzete, az a generátorfüggvény segítségével

$$\mathbb{D}^2(\xi) = G_\xi'(1) + G_\xi''(1) - [G_\xi'(1)]^2$$

módon számolható.

A generátorfüggvény különösen akkor alkalmazható jól a várható érték, illetve a szórásnégyzet meghatározására, ha a generátorfüggvényt, azaz a definícióban szereplő hatványsor *összegfüggvényét explicit alakban ismerjük. Például ilyenek a binomiális, illetve Poisson eloszlású valószínűségi változók generátorfüggvényei.*

A generátorfüggvény definiálásához még arra sincs szükség, hogy a valószínűségi változó diszkrét legyen. A $z \mapsto G_\xi(z)$ függvény definiálható $G_\xi(z) \doteq \mathbb{E}(z^\xi)$ módon azokra a z számokra, amelyekre az $\mathbb{E}(z^\xi)$ várható érték értelmezve van.

7. Példák

Példa. *Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy klasszikus valószínűségi mező, ahol $\Omega \doteq \{a, b, c, d\}$. Definiáljuk a $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változót az alábbi táblázat segítségével:*

ω	a	b	c	d
$\xi(\omega)$	5	1	5	2

Ekkor a ξ értékkészlet $\mathcal{R}(\xi) = \{1, 2, 5\}$.

A ξ eloszlása:

$$(\xi = 1) = \{b\} \quad \Longrightarrow \quad p_1 = \mathbb{P}(\xi = 1) = \mathbb{P}\{b\} = \frac{1}{4} = 0.25,$$
$$(\xi = 2) = \{d\} \quad \Longrightarrow \quad p_2 = \mathbb{P}(\xi = 2) = \mathbb{P}\{d\} = \frac{1}{4} = 0.25,$$
$$(\xi = 5) = \{a, c\} \quad \Longrightarrow \quad p_3 = \mathbb{P}(\xi = 5) = \mathbb{P}\{a, c\} = \frac{2}{4} = 0.5.$$

x_k	1	2	5
p_k	0.25	0.25	0.5

Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi) = 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.25 + 5 \cdot 0.5 = 3.25;$$
$$\mathbb{E}(\xi^2) = 1^2 \cdot 0.25 + 2^2 \cdot 0.25 + 5^2 \cdot 0.5 = 13.75;$$
$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 3,1875.$$

Csak azért, hogy lássuk a generátorfüggvény működését, most a várható értéket és a szórásnégyzetet kiszámítjuk a generátorfüggvény segítségével is.

$$G_\xi(z) = 0.25z + 0.25z^2 + 0.5z^5,$$
$$G'_\xi(z) = 0.25 + 0.25 \cdot 2 \cdot z + 0.5 \cdot 5 \cdot z^4 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}(\xi) = G'_\xi(1) = 0.25 + 0.25 \cdot 2 \cdot 1 + 0.5 \cdot 5 \cdot 1 = 3.25,$$
$$G''_\xi(z) = 0.25 \cdot 2 + 0.5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot z^3 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad G''_\xi(1) = 0.25 \cdot 2 \cdot 1 + 0.5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 10.5 \quad \Longrightarrow$$
$$\mathbb{D}^2(\xi) = G'_\xi(1) + G''_\xi(1) - [G'_\xi(1)]^2 = 3.25 + 10.5 - 3.25^2 = 3.1875.$$

Példa *Kockával dobunk. Számoljuk ki a dobott szám-mint valószínűségi változó - várható értékét és szórásnégyzetét.*
Mo.: Jelölje ξ a dobott számot. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény értékei: $\xi(1) = 1$, $\xi(2) = 2, \dots, \xi(6) = 6$. A ξ eloszlása:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

A így kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi) &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1 + 2 + \cdots + 6) = \frac{7}{2} = 3.5, \\
\mathbb{E}(\xi^2) &= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6}) = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + \cdots + 6^2) = \frac{91}{6}, \\
\mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12} = 2.9167.
\end{aligned}$$

Példa *Két kockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel. Számoljuk ki a dobott számok összegének a várható értékét és szórásnégyzetét.*
Mo.: Jelölje ξ_1 a piros, ξ_2 a kék dobókockával dobott számot. Legyen $\eta = \xi_1 + \xi_2$. A várható érték additivitása alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\eta) = \mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1) + \mathbb{E}(\xi_2) = 3.5 + 3.5 = 7.$$

Mivel a ξ_1 és ξ_2 valószínűségi változók függetlenek (intuíció alapján, mivel a dobókockák esés közben nem beszélik meg egymással, hogy melyik lapjukra essenek), ezért a szórásnégyzetek összeadódnak, így kapjuk, hogy

$$\mathbb{D}^2(\eta) = \mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2) = \mathbb{D}^2(\xi_1) + \mathbb{D}^2(\xi_2) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = 5.8333.$$

Feladatok

Várható érték és szórásnégyzet

1.•S Feladat. *Az A és B játékos felváltva dob kosárra (A kezd). Az A játékos 0.51, míg B 0.39 valószínűséggel talál a kosárba. A játék maximum 4 dobásig tart, de azonnal befejeződik, ha valamelyik játékos beletalált a kosárba. Számítsa ki a játékbeli dobások számának várható értékét!*

2.•S Feladat. *Egy lezser hallgató maximum négyszer jöhet el vizsgázni, és minden vizsgán 0.25 valószínűséggel megy át. Hányszor vizsgázik átlagban egy lezser hallgató?*

3.•S Feladat. *Egy játékban a játékos és a bankár is megpörgeti a rulettet. (A ruletten az 1, 2, ... , 7 számok vannak.) A játékos akkor nyer, ha nagyobb számot pörget, mint a bankár. A játékos nyerése esetén 1800 Ft nyereményt kap. Mennyit kellene a játékosnak minden pörgetése előtt befizetnie, hogy játékonként átlagosan 200 Ft haszna legyen a banknak?*

4.•S Feladat. *Egy dobozban 24 piros és 14 kék golyó van. A dobozból visszatevés nélkül kihúzunk 3 golyót. Várhatóan hány piros golyót húzunk ki?*

Megoldások

1.•S Megoldás. *Jelölje* ξ *a dobások számát.*

$$\mathbb{P}(A \text{ talál}) = 0.51, \qquad \mathbb{P}(B \text{ talál}) = 0.39.$$

Ekkor a ξ *diszkrét valószínűségi változó eloszlása:*

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1, & p_1 &= 0.51,\\
x_2 &= 2, & p_2 &= (1-0.51)\cdot 0.39 = 0.1911,\\
x_3 &= 3, & p_2 &= (1-0.51)\cdot(1-0.39)\cdot 0.51 = 0.152439,\\
x_4 &= 4, & p_2 &= (1-0.51)\cdot(1-0.39)\cdot 1-0.51) = (1-0.51)^2\cdot(1-0.39) = 0.146461.
\end{aligned}$$

Így

$$\mathbb{E}(\xi) = 1\cdot 0.51 + 2\cdot 0.1911 + 3\cdot 0.152439 + 4\cdot 0.146461 = 1.9354.$$

2.•S Megoldás. *Jelölje* ξ *a vizsgák számát és jelölje* A *azt az eseményt, hogy a lezser hallgató átmegy egy adott vizsgán. Ekkor* $\mathbb{P}(A) = 0.25$. *A* ξ *diszkrét valószínűségi változó eloszlása:*

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1, & p_1 &= 0.25,\\
x_2 &= 2, & p_2 &= 0.75\cdot 0.25,\\
x_3 &= 3, & p_2 &= 0.75^3\cdot 0.25,\\
x_4 &= 4, & p_2 &= 0.75^3.
\end{aligned}$$

Így

$$\mathbb{E}(\xi) = 1\cdot 0.25 + 2\cdot 0.75\cdot 0.25 + 3\cdot 0.72^2\cdot 0.25 + 4\cdot 0.75^3 = \frac{175}{64} = 2.7344.$$

3.•S Megoldás. *Jelölje* J *azt az eseményt, hogy a játékos nyer,* B *azt az eseményt, hogy a bank nyer. A* $\mathbb{P}(J)$ *valószínűség úgy számolható ki, hogy gondolatban táblázatba foglaljuk a pörgetés lehetséges kimeneteleit, úgy, hogy a sorok a játékos, az oszlopok a bank pörgetéseit jelölik. A játékos a főátló alatti cellákhoz tartozó kimenetelek esetén nyer. Így*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(J) &= \frac{\frac{7\cdot 7-7}{2}}{7\cdot 7} = \frac{7\cdot 7-7}{2\cdot 7\cdot 7} = \frac{3}{7},\\
\mathbb{P}(B) &= 1-\frac{3}{7} = \frac{4}{7}.
\end{aligned}$$

x *forintot kell a játékosnak befizetnie. A* ξ *valószínűségi változó jelöli a bank nyereségét. A* ξ *eloszlása:*

x_i	x	$x-1800$
p_i	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

Így $200 = \mathbb{E}(\xi) = \frac{4}{7}x + \frac{3}{7}(x - 1800)$, *amiből kapjuk, hogy*

$$1400 = 4x + 3(x - 1800), \qquad x = \frac{1400 + 5400}{7} = 971.4286.$$

4.•S Megoldás. *Jelölje* ξ *a kihúzott piros golyók számát. Ekkor* ξ *eloszlása:*

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{\binom{24}{0}\binom{14}{3}}{\binom{38}{3}}$	$\frac{\binom{24}{1}\binom{14}{2}}{\binom{38}{3}}$	$\frac{\binom{24}{2}\binom{14}{1}}{\binom{38}{3}}$	$\frac{\binom{24}{3}\binom{14}{0}}{\binom{38}{3}}$

Így

$$\mathbb{E}(\xi) = 0 \cdot \frac{\binom{24}{0}\binom{14}{3}}{\binom{38}{3}} + 1 \cdot \frac{\binom{24}{1}\binom{14}{2}}{\binom{38}{3}} + 2 \cdot \frac{\binom{24}{2}\binom{14}{1}}{\binom{38}{3}} + 3 \cdot \frac{\binom{24}{3}\binom{14}{0}}{\binom{38}{3}} = \frac{36}{19} = 1.8947.$$

Ez az eredmény úgy is megkapható, hogyha tudjuk, hogy ξ hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó $N = 38$, $s = 14$, $n = 3$ paraméterekkel. Ekkor

$$\mathbb{E}(\xi) = n\frac{s}{N} = 3 \cdot \frac{24}{38} = \frac{36}{19} = 1.8947.$$

5. Gyakorlat
Nevezetes diszkrét eloszlások: Bernoulli, binomiális, hipergeometrikus, geometriai, Poisson; Abszolút folytonos valószínűségi változók

Rövid elméleti összefoglaló Az alábbi nevezetes diszkrét valószínűségi változókkal fogunk megismerkedni:

1. Bernoulli;
2. Binomiális;
3. Hipergeometrikus;
4. Geometriai;
5. Poisson.

1. A Bernoulli eloszlás

Feldobunk egy érmét. Jelölje F azt az eseményt, hogy fejet dobunk, I azt, hogy írást. Legyen

$$\mathbb{P}(F) = p, \qquad \mathbb{P}(I) = 1 - p \doteq q.$$

Jelölje ξ a fejdobások számát. Ekkor a ξ valószínűségi változó a 0 és az 1 értékeket veheti fel. A ξ eloszlása:

x_i	0	1
p_i	q	p

Ekkor a ξ várható értékét és szórásnégyzetét

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi) &= 0 \cdot q + 1 \cdot p = p,\\
\mathbb{E}(\xi^2) &= 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p,\\
\mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq
\end{aligned}$$

módon számolható.

2. A binomiális eloszlás

Jelölje ξ egy p valószínűségű A esemény bekövetkezéseinek a számát n számú független kísérlet esetén. Ekkor azt mondjuk, hogy ξ binomiális eloszlású n és p paraméterekkel, amit $\xi \sim B(n,p)$ módon jelölünk. Ekkor a ξ eloszlása

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

A ξ várható értéke és szórásnégyzete

$$\mathbb{E}(\xi) = np, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = npq.$$

A golyóhúzás urnából visszatevéssel, ha ξ jelöli a kihúzott piros golyók számát binomiális eloszlású n és $p = \frac{s}{N}$ paraméterekkel, ahol N jelöli a golyók számát, s a piros golyók számát, $N - s$ a fehér golyók számát, n golyót húzunk, amelyek között k piros golyó van.

Legyen $p \in (0,1)$, és $q \doteq 1 - p$. A binomiális tétel alapján kapjuk, hogy

$$1 = (p+q)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

a szumma jel mögött éppen egy $\xi \sim B(n,p)$ valószínűségi változó eloszlásának a tagjai állnak. Innen származik az eloszlás neve.

3. A hipergeometrikus eloszlás

Golyót húzunk urnából visszatevés nélkül. Jelölje ξ jelöli a kihúzott piros golyók számát. Ekkor azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó hipergeometrikus eloszlású. A hipergeometrikus eloszlás a következő paraméterektől függ: N jelöli a golyók számát, s a piros golyók számát, $N - s$ a fehér golyók számát, n golyót húzunk, amelyek között k piros golyó van. Mivel a golyókat a húzásokat követően nem tesszük vissza az urnába, ezért kell teljesülnie a $n \leqslant N$ feltételnek.

A ξ valószínűségi változó eloszlása:

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \frac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad (\max\{0, n-(N-s)\} \leqslant k \leqslant \min\{s,n\}).$$

A ξ várható értéke és szórásnégyzete

$$\mathbb{E}(\xi) = n\frac{s}{N}, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = n\frac{N-n}{N-1}\frac{s}{N}\left(1 - \frac{s}{N}\right).$$

4. A geometriai eloszlás

Független kísérletek sorozatát figyeljük. Jelölje ξ azt a számot, hogy egy p valószínűségű A esemény hányadik kísérlet során következik be először. Ekkor ξ-t p paraméterű geometriai eloszlásnak nevezzük.

A ξ valószínűségi változó eloszlása:

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = pq^{k-1} \qquad (k \in \mathbb{Z}_+).$$

A ξ várható értéke és szórásnégyzete

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{p}, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{q}{p^2}.$$

Legyen $p \in (0,1)$, és $q \doteq 1 - p$. A mértani sor összegképletére vonatkozó összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = \frac{p}{1-q} = 1.$$

A szumma jel mögött éppen egy p paraméterű geometriai eloszlás tagjai állnak. Innen származik az eloszlás neve.

5. A Poisson eloszlás

Legyen $\lambda > 0$ egy rögzített valós szám. Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó Poisson eloszlású λ paraméterrel, ha eloszlása:

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

A ξ várható értéke és szórásnégyzete

$$\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{D}^2(\xi) = \lambda.$$

Az exponenciális függvény Taylor sora

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Írjuk x helyére λ-t, mindkét oldalt osszuk el e^{λ}-nal, majd az $e^{-\lambda}$-t vigyük be a szumma jel mögé. Így kapjuk, hogy

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Érdemes észrevenni, hogy a szumma jel mögött éppen egy λ paraméterű Poisson eloszlás tagjai állnak. Ebből már lehet sejteni, hogy a Poisson eloszlásnak lesz köze az exponenciális eloszláshoz. A két eloszlás közötti kapcsolatot Poisson folyamatok című részben fogjuk leírni.

Abszolút folytonos valószínűségi változók

Egy ξ valószínűségi változót abszolút folytonosnak nevezünk, ha létezik hozzá olyan $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amellyel

$$\mathbb{F}_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Az f_ξ függvényt a ξ valószínűségi változó ***sűrűségfüggvény****ének nevezzük. Tehát minden valószínűségi változónak van eloszlásfüggvénye, de csak az abszolút folytonos valószínűségi változóknak van sűrűségfüggvényük.*

A sűrűségfüggvény tulajdonságai *Ha az f_ξ függvény a ξ abszolút folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, akkor az f_ξ függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

1. *Nemnegatív;*
2. *Folytonos;*
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)dt = 1.$

Érdemes megjegyezni, hogyha a ξ valószínűségi változót abszolút folytonos, akkor az $\mathbb{F}_\xi$ függvény folytonos, továbbá a sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvényből

$$f_\xi(x) = \mathbb{F}_\xi'(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon számolható.

Intervallumba esés valószínűsége *Ha ξ egy abszolút folytonos valószínűségi változó, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, akkor*

$$\mathbb{P}(\xi \in (a,b)) = \int_a^b f_\xi(x)dx = \mathbb{F}_\xi(b) - \mathbb{F}_\xi(a).$$

Ez a formula nem érzékeny arra, hogy az intervallum végpontjai hozzátartoznak, vagy nem tartoznak hozzá az intervallumhoz.

Abszolút folytonos valószínűségi változó várható értéke *A ξ abszolút folytonos valószínűségi változó várható értékét*

$$\mathbb{E}(\xi) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx$$

módon definiáljuk, amennyiben az $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_\xi(x)dx$ integrál létezik és véges.

A transzformációs formula *Abszolút folytonos valószínűségi változók esetén is létezik a transzformációs formula, mely szerint az $\mathbb{E}(g(\xi))$ várható érték*

$$\mathbb{E}(g(\xi)) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_\xi(x) dx$$

módon számolható, ha a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy elég jó függvény, és az $\mathbb{E}(g(\xi))$ várható érték létezik.

Például $g(x) = x^2$ speciális esetben kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi^2) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x) dx.$$

Abszolút folytonos valószínűségi változó szórásnégyzete *A ξ abszolút folytonos valószínűségi változó szórásnégyzetét*

$$\mathbb{D}^2(\xi) \doteq \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi))^2$$

módon definiáljuk, amennyiben a definícióban szereplő várható értékek léteznek.

A szórásnégyzet abszolút folytonos esetben is számolható

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}\xi^2 - [\mathbb{E}(\xi)]^2$$

módon.

Valószínűségi változó mediánja

Medián *Egy ξ valószínűségi változó* ***medián****jának nevezünk egy olyan μ számot, amelyre*

$$\mathbb{P}(\xi < \mu) \leqslant \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(\xi > \mu) \leqslant \frac{1}{2}.$$

A medián tulajdonságai: *Legyen ξ egy tetszőleges valószínűségi változó. Ekkor teljesülnek a következők.*

1. *A medián mindig létezik, de nem feltétlenül egyértelmű;*
2. *Ha a μ egy olyan szám, amelyre $\mathbb{F}(\mu) = \frac{1}{2}$, akkor a μ egy mediánja a ξ-nek. Abszolút folytonos esetben a megfordítás is igaz;*
3. *Ha ξ egy abszolút folytonos valószínűségi változó, akkor μ pontosan akkor mediánja ξ-nek, ha μ-től jobbra és balra a sűrűségfüggvény alatti terület megegyezik.*

Példa *Legyen a* ξ *egy* p *paraméterű Bernoulli eloszlású valószínűségi változó és jelölje* μ *a* ξ *mediánját. Ha* $p < \frac{1}{2}$, *akkor* $\mu = 1$ *azaz a medián egyértelműen létezik, de az* $\mathbb{F}_\xi(\mu) = \frac{1}{2}$ *egyenletnek nincs megoldása, mivel* $\mathcal{R}_\xi = \{0, p, 1\}$, *így* $\frac{1}{2} \notin \mathcal{R}_\xi$.

Ha $p = \frac{1}{2}$, *akkor a mediánok halmaza a* $[0, 1]$ *intervallum, azonban az* $\mu = 1$ *azaz a medián egyértelműen létezik, de az* $\mathbb{F}_\xi(\mu) = \frac{1}{2}$ *egyenlet megoldáshalmaza a* $]0, 1]$ *intervallum.*

Ha $p < \frac{1}{2}$, *akkor* $\mu = 0$ *azaz a medián egyértelműen létezik, de az* $\mathbb{F}_\xi(\mu) = \frac{1}{2}$ *egyenletnek nincs megoldása, mivel* $\mathcal{R}_\xi = \{0, p, 1\}$, *így* $\frac{1}{2} \notin \mathcal{R}_\xi$.

Példa *Ha* ξ *egy olyan abszolút folytonos valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye az* y *tengelyre szimmetrikus, akkor a* 0 *egy mediánja. Például, ha* $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, *akkor a* ξ *egyetlen mediánja az* m.

Ha $\xi \sim U(a, b)$, *akkor a* ξ *egyetlen mediánja az* $\frac{a+b}{2}$.

Feladatok

1. A Bernoulli eloszlás

2. Binomiális

1.•S Feladat. *Egy dobozban 12 alkatrész van, amelyek közül 8 selejtes, 5 elemű mintát veszünk visszatevéssel. Mi a valószínűsége, hogy a mintában 2 selejtes alkatrész van?*

2.•S Feladat. *7 golyót osztunk ki egyenként 5 dobozba úgy, hogy bármelyik dobozt egyenlő valószínűséggel választjuk minden golyó elhelyezésekor. Mennyi a valószínűsége, hogy a harmadik dobozba 4 golyó kerül?*

3.•S Feladat. *Az A esemény bekövetkezésének a valószínűsége 0.31. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb kétszer következik be tíz kísérletből?*

4.•S Feladat. *Az A esemény bekövetkezésének a valószínűsége 0.44. Mennyi a valószínűsége, hogy tíz kísérletből legfeljebb hétszer következik be?*

5.•S Feladat. *Az A esemény bekövetkezésének a valószínűsége 0.16. Mennyi a valószínűsége, hogy tíz kísérletből legalább háromszor bekövetkezik?*

3. Hipergeometrikus eloszlás

6.•S Feladat. *Egy dobozban 11 alkatrész van, amelyek közül 7 selejtes. 4 elemű mintát veszünk visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége, hogy a mintában 3 selejtes alkatrész van?*

7.•S Feladat. *Egy külföldi ösztöndíjra kiírt pályázat elbírálásának utolsó fordulójára 8 egyenlő képességű jelölt maradt, 5 fiú és 3 lány. A bíráló bizottság ezután sorsolással választ ki közülük 5 főt. Mi a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között lesz lány?*

8.•S Feladat. *Egy rejtvénypályázaton három díjat sorsolnak ki a helyes megfejtést beküldők között (egy megfejtő legfeljebb egy díjat kaphat). 50 jó megfejtés érkezett be összesen, ezek közül 20 Miskolcról. Mi a valószínűsége, hogy lesz miskolci nyertes?*

9.•S Feladat. *Egy dobozban 7 piros és 2 zöld golyó van. Visszatevés nélkül, bekötött szemmel kihúzunk 4 golyót. Mi a valószínűsége, hogy pontosan 3 piros golyót húzunk?*

4. Geometriai eloszlás

10.S Feladat. *Egy urnában piros és fehér golyók vannak. Annak a valószínűsége, hogy pirosat húzunk p. Addig húzunk visszatevéssel, míg pirosat nem húzunk. Mennyi a szükséges húzások számának a várható értéke és szórásnégyzete?*

Adjuk meg a várható értéket és a szórásnégyzetet $p = \frac{3}{7}$ speciális esetben.

11.S Feladat. *Egy urnában piros és fehér golyók vannak. Annak a valószínűsége, hogy pirosat húzunk p. Addig húzunk visszatevéssel, amíg az r-edik piros golyót ki nem húzzuk. Mennyi a szükséges húzások számának várható értéke és szórásnégyzete?*

Adjuk meg a várható értéket $p = \frac{3}{7}$, $r = 3$ speciális esetben.

12.S Feladat. *Egy urnában van N golyó, amelyek közül s piros és $N - s$ fehér. Addig húzunk visszatevés nélkül, amíg pirosat nem húzunk. Jelölje ξ a szükséges húzások számát. Adjuk meg a ξ eloszlását, illetve a várható értékét és szórásnégyzetét $N = 7$, $s = 3$ esetén.*

13.S Feladat. *Egy urnában van N golyó, amelyek közül s piros és $N - s$ fehér. Addig húzunk visszatevés nélkül, amíg az összes pirosat ki nem húzzuk. Jelölje ξ az összes húzások számát. Adjuk meg a ξ eloszlását, illetve várható értékét $N = 7$ és $s = 3$ esetén.*

14.S Feladat. *Egy dobozban N db tojás van, amelyek közül s db selejtes. A tojásokat egyenként felütjük egy tálba, valahányszor selejtes (záp) tojást ütünk fel, mindannyiszor azt az összes addig felütött tojással együtt kiöntjük. Jelölje η az így megmentett tojások számát. Határozzuk meg az η eloszlását. Adjuk meg az η várható értékét és szórásnégyzetét az $N = 10$ és $s = 1$ speciális esetben.*

15.S Feladat. *Annak a valószínűsége, hogy egy üveg akciós sör selejtes p. A forgalmazó N ilyen sört csomagol egy csomagba. Kiválasztunk egy selejtes csomagot, azaz olyan csomagot, amelyben van selejtes sör és addig vizsgáljuk a söröket, ameddig selejteset nem találunk. Jelölje ξ a megvizsgált sörök számát. Adjuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlását, várható értékét és szórásnégyzetét!*

Oldjuk meg a feladatot numerikusan abban az esetben, amikor átlagosan minden 1000 üvegből 1 selejtes és a forgalmazó 4 üveget csomagol egy csomagba.

5. Poisson eloszlás

16.• Feladat. *Egy szervízbe műszakonként átlagban 5 gépkocsi jelentkezik javításra és számuk Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Mi a valószínűsége, hogy egy nap legalább 4, de legfeljebb 7 gépkocsit javítanak?*

17.• Feladat. *Egy szelet kalácsban a mazsolák száma Poisson-eloszlást követ, és egy szeletben átlag 9 szem mazsola van. Mi a valószínűsége, hogy egy szeletben legalább 7, de legfeljebb 10 szem mazsola van?*

18.• Feladat. *Egy kilogramm kalácsban átlag 52 szem mazsola van. Az 5 dekás szeletekben a mazsolák száma Poisson-eloszlást követ. Legalább hány szeletet kell vennünk, hogy már legalább 0.92 legyen annak a valószínűsége, hogy lesz közöttük mazsola nélküli szelet?*

6. Általános feladatok (abszolút folytonos eloszlás)

19.• Feladat. *A ξ abszolút folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqslant 0; \\ A(3.4x^2 + 6.2x), & \text{ha } 0 < x \leqslant 6; \\ 1, & \text{ha } 6 < x. \end{cases}$$

Határozza meg $E(29\xi - 486)$ értékét!

20.• Feladat. *A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye*

$$f(x) = \begin{cases} 1.4x^3, & \text{ha } 0 < x \leqslant B; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozza meg $P(\xi > E(\xi))$ valószínűségét!

21.• Feladat. *A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye egy megfelelő B konstanssal*

$$f(x) = \begin{cases} B(2x + 1), & \text{ha } 1.2 < x < 2.4; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Számítsa ki a ξ várható értékét!

22.• Feladat. *A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqslant 2.8; \\ \dfrac{a}{x^3}, & \text{ha } x > 2.8. \end{cases}$$

Számítsa ki a ξ mediánját!

Megoldások

1. Bernoulli eloszlás

2. Binomiális eloszlás

1.•S Megoldás. *Jelölje ξ a mintában lévő selejtes alkatrészek számát. Ekkor* $p = \dfrac{8}{12}$, $n = 5$, $k = 2$, $\xi \sim B(n = 5, p = \frac{8}{12})$, *a keresett valószínűség:*

$$\mathbb{P}(\xi = 2) = p_2 = \binom{5}{2}\left(\frac{8}{12}\right)^2\left(\frac{4}{12}\right)^3 = \frac{80}{243} \approx 0.3292.$$

2.•S Megoldás. *Jelölje ξ a harmadik dobozba kerülő golyók számát. Ekkor* $p = \frac{1}{5} = 0.2$, $n = 7$, $k = 4$, $\xi \sim B(n = 7, p = 0.2)$, *a keresett valószínűség:*

$$\mathbb{P}(\xi = 4) = p_4 = \binom{7}{4} \cdot 0.2^4 \cdot 0.8^3 = \frac{448}{15625} \approx 0.0287.$$

3.•S Megoldás. *A ξ valószínűségi változó jelöli az A esemény bekövetkezésének a számát. Ekkor $\xi \sim B(n = 10, p = 0.31)$. A keresett valószínűség:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \leqslant 2) &= p_0 + p_1 + p_2 = \\ &= \binom{10}{0} \cdot 0.31^0 \cdot 0.69^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.31^1 \cdot 0.69^9 + \binom{10}{2} \cdot 0.31^2 \cdot 0.69^8 \approx 0.3566.\end{aligned}$$

4.•S Megoldás. *A ξ valószínűségi változó jelöli az A esemény bekövetkezésének a számát. Ekkor $\xi \sim B(n = 10, p = 0.44)$. A keresett valószínűség:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \leqslant 7) &= 1 - \mathbb{P}(\xi > 7) = 1 - (p_8 + p_9 + p_{10}) = \\ &= 1 - \left(\binom{10}{8} \cdot 0.44^8 \cdot 0.56^2 + \binom{10}{9} \cdot 0.44^9 \cdot 0.56^1 + \binom{10}{10} \cdot 0.44^{10} \cdot 0.56^0\right) = \\ &\approx 1 - 0.0236 \approx 0.9764.\end{aligned}$$

5.•S Megoldás. *A ξ valószínűségi változó jelöli az A esemény bekövetkezésének a számát. Ekkor $\xi \sim B(n = 10, p = 0.16)$. A keresett valószínűség:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \geqslant 3) &= 1 - \mathbb{P}(\xi < 3) = 1 - (p_0 + p_1 + p_1) = \\ &= 1 - \left(\binom{10}{0} \cdot 0.16^0 \cdot 0.84^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.16^1 \cdot 0.84^9 + \binom{10}{2} \cdot 0.16^2 \cdot 0.84^8\right) = \\ &\approx 1 - 0.7936 \approx 0.2064.\end{aligned}$$

3. Hipergeometrikus eloszlás

6.•S Megoldás. *Jelölje ξ a mintában lévő selejtes alkatrészek számát. ξ hipergeometrikus eloszlású $N = 11$, $s = 7$, $n = 4$ paraméterekkel. A keresett valószínűség:*

$$\mathbb{P}(\xi = 2) = \frac{\binom{7}{2}\binom{4}{2}}{\binom{11}{4}} = \frac{\frac{7\cdot 6}{2}\cdot\frac{4\cdot 3}{2}}{\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}} = \frac{21}{55} = 0.3818.$$

7.•S Megoldás. *Jelölje ξ a mintában lévő lányok számát. ξ hipergeometrikus eloszlású $N = 8$, $s = 3$, $n = 5$ paraméterekkel. A keresett valószínűség:*

$$\mathbb{P}(\xi > 0) = 1 - \mathbb{P}(\xi = 0) = 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{5}{5}}{\binom{8}{5}} = 1 - \frac{1}{\binom{8}{3}} = 1 - \frac{1}{\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}} = \frac{55}{56} = 0.9821.$$

8.•S Megoldás. *Jelölje ξ a mintában lévő miskolci nyertesek számát ($k = 0, 1, 2, 3$). ξ hipergeometrikus eloszlású $N = 50$, $s = 20$ paraméterekkel. A keresett valószínűség:*

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - p_0 = 1 - \frac{\binom{30}{3}}{\binom{50}{3}} = 1 - \frac{30\cdot 29\cdot 28}{50\cdot 49\cdot 48} = 0.784.$$

9.•S Megoldás. *Jelölje ξ a mintában lévő piros golyók számát. ξ hipergeometrikus eloszlású $s = 7$, $N - s = 2$, $n = 4$ paraméterekkel. A keresett valószínűség:*

$$\mathbb{P}(\xi = 3) = p_3 = \frac{\binom{7}{2}\binom{2}{1}}{\binom{11}{4}} = \frac{\frac{7\cdot 6}{2}\cdot\frac{2\cdot 1}{1}}{\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}} = \frac{7}{55} = 0.1273.$$

4. Geometriai eloszlás

10.S Megoldás. *Jelölje ξ a szükséges húzások számát. Ekkor ξ egy p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó. A ξ eloszlása a $q = 1 - p$ konvenció felhasználásával:*

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = q^{k-1} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

A ξ generátorfüggvénye:

$$G_\xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}z^k = pz\sum_{k=1}^{\infty}(qz)^{k-1} = pz\sum_{k=0}^{\infty}(qz)^k = \frac{pz}{1-qz}.$$

Ekkor

$$G'_\xi(z) = \frac{p(1-qz)+pzq}{(1-qz)^2} = \frac{p}{(1-qz)^2}, \qquad G'_\xi(1) = \frac{1}{p},$$

$$G''_\xi(z) = p(-2)\frac{1}{(1-qz)^3}(-q) = \frac{2pq}{(1-qz)^3}, \qquad G'_\xi(1) = \frac{2pq}{p^3} = \frac{2q}{p^2}.$$

Így

$$\mathbb{E}(\xi) = G_{\xi}'(1) = \frac{1}{p},$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = G_{\xi}''(1) + G_{\xi}'(1) - [G_{\xi}'(1)]^2 = \frac{2pq}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2-2p+p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

A várható érték és a szórásnégyzet a $p = \frac{3}{7}$ *esetén*

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{7}{3}, \qquad \mathbb{D}(\xi) = \frac{1-\frac{3}{2}}{\left(\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{28}{9} = 3.\dot{1}.$$

11.S Megoldás. *Jelölje* η *a szükséges húzások számát.* η *egy* p *paraméterű* r *rendű negatív binomiális eloszlás. A* $q \doteq 1-p$ *konvenció felhasználásával kapjuk, hogy*

$$\mathbb{P}(\eta = r+0) = p^r,$$

$$\mathbb{P}(\eta = r+k) = \binom{r+k-1}{r-1} q^k p^{r-1} p = \binom{r+k-1}{r-1} qp^r \qquad (k \in \mathbb{Z}_+)$$

Ekkor $\eta = \xi_1 + \cdots + \xi_r$*, ahol* ξ_i $(i = 1, \cdots, r)$ r *db páronként független geometriai eloszlású valószínűségi változó. Így a várható érték additivitása alapján kapjuk, hogy*

$$\mathbb{E}(\eta) = \mathbb{E}(\xi_1 + \cdots + \xi_r) = \mathbb{E}(\xi_1) + \cdots + \mathbb{E}(\xi_r) = r \cdot \mathbb{E}(\xi_1) = \frac{r}{p}.$$

mivel páronként független valószínűségi változók összegének szórásnégyzete egyenlő a szórásnégyzetek összegével, így

$$\mathbb{D}^2(\eta) = \mathbb{D}^2(\xi_1 + \cdots + \xi_r) = \mathbb{D}^2(\xi_1) + \cdots + \mathbb{D}^2(\xi_r) = r\mathbb{D}^2(\xi_1) = \frac{rq}{p^2}.$$

Végül, mivel páronként független valószínűségi változók összegének a generátorfüggvénye egyenlő a generátorfüggvények szorzatával, így kapjuk, hogy

$$G_\eta(z) = G_{\xi_1+\cdots+\xi_r} = G_{\xi_1} \ldots G_{\xi_r} = [G_{\xi_1}]^r = \left[\frac{pz}{1-qz}\right]^r.$$

A várható érték $p = \frac{3}{7}$, $r = 3$ *speciális esetben*

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{21}{3}, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{28}{3} = 9.3.$$

12.S Megoldás. *A ξ eloszlásának a megállapításához válasszuk a következő modellt:*
Legyen

$$G \doteq \{P_1, \ldots, P_s, F_1, \ldots, F_{N-s}\} \qquad \text{(a golyók halmaza)},$$
$$\Omega \doteq \{(g_1, \ldots, g_N) | g_i \in G \ (i = 1, \ldots, N); g_j \neq g_k, \ \text{ha } j \neq k\},$$

azaz Ω a G elemeiből alkotott permutációk halmaza. A megoldás során használni fogjuk az $(n)_k$ konvenciót az $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ szorzat jelölésére tetszőleges $n \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ esetén. Ekkor ξ eloszlása:

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \begin{cases} \dfrac{s}{N}, & \text{ha } k = 1; \\[2ex] \dfrac{s}{N}\dfrac{(N-s)_k}{(N-1)_k}, & \text{ha } k = 2, \ldots, N-s. \end{cases}$$

$N = 7$, $s = 3$ esetén a ξ eloszlását táblázatba foglaljuk:

k	1	2	3	4	5
p_k	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$\mathbb{E}(\xi) = 1 \cdot \frac{3}{7} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 3 \cdot \frac{6}{35} + 4 \cdot \frac{3}{35} + 5 \cdot \frac{1}{35} = 2,$$
$$\mathbb{E}(\xi^2) = 1^2 \cdot \frac{3}{7} + 2^2 \cdot \frac{2}{7} + 3^2 \cdot \frac{6}{35} + 4^2 \cdot \frac{3}{35} + 5^2 \cdot \frac{1}{35} = 5.2,$$
$$\mathbb{D}(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 5.2 - 2^2 = 1.2.$$

Az általános megoldás generátorfüggvény segítségével adható meg, bár rövid levezetést nem ismerünk. Megmutatható, hogy

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{N+1}{s+1}, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{s(N-s)(N+1)}{(s+1)^2(s+2)},$$

ami $N = 7$ és $s = 3$ speciális esetben visszaadja a numerikus eredményeket.

13.S Megoldás. *A ξ valószínűségi változó eloszlásának a megállapításához válasszuk a következő modellt: Legyen*

$$G \doteq \{P_1, \ldots, P_s, F_1, \ldots, F_{N-s}\} \quad \text{(a golyók halmaza)},$$
$$\Omega \doteq \{(g_1, \ldots, g_N) | g_i \in G \ (i = 1, \ldots, N); g_j \neq G_k, \ \text{ha } j \neq k\},$$

azaz Ω a G elemeiből alkotott permutációk halmaza. Ekkor a ξ eloszlása:

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \begin{cases} \dfrac{(s)_s(N-s)_{N-s}}{(N)_s} = \dfrac{(s)_s(N-s)_{N-s}}{(N)_s(N-s)_{N-s}} = \dfrac{1}{\binom{N}{s}}, & \text{ha } k = 0; \\[3ex] \dbinom{s+k-1}{s-1}\dfrac{(s)_s(N-s)_{N-s}}{(N)_n} = \dfrac{\binom{s+k-1}{s-1}}{\binom{N}{s}}, & \text{ha } k = 1, \ldots, N-s. \end{cases}$$

Vizsgáljuk az $N = 7$, $s = 3$ esetet.

$s+k$	$3(k=0)$	$4(k=1)$	$5(k=2)$	$6(k=3)$	$7(k=4)$
$\mathbb{P}(\xi = s+k)$	$\frac{1}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35}$	$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{3}{35}$	$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{6}{35}$	$\frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{10}{35}$	$\frac{\binom{6}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{15}{35}$

így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi) &= 3 \cdot \frac{1}{35} + 4 \cdot \frac{3}{35} + 5 \cdot \frac{6}{35} + 6 \cdot \frac{10}{35} + 7 \cdot \frac{15}{35} = 6, \\
\mathbb{E}(\xi^2) &= \frac{186}{5}, \\
\mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \frac{186}{5} - 6^2 = \frac{6}{5}.
\end{aligned}$$

14.S Megoldás. *Jelölje N a tojástartóban lévő tojások számát, és s azt, hogy ezek közül mennyi záp. Jelölje ξ az előző feladatban szereplő valószínűségi változót, azaz azt a számot, hogy a kihúzott tojások közül hányadik az utolsó záp. Jelölje η a megmentett tojások számát. Ekkor $\eta = N - \xi$. Így felhasználva az előző feladat eredményét is kapjuk, hogy az η eloszlása*

$$\mathbb{P}(\eta = N - (s+k)) = \frac{\binom{s+k-1}{s-1}}{\binom{N}{s}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, N-s).$$

A numerikus feladat megoldásához tegyük fel, hogy $M = 10$ és $s = 1$. Ekkor, a korábbi feladat alapján

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{N+1}{s+1} = \frac{11}{2}, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{s(N-s)(N+1)}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{33}{4} = 8.25,$$

így, mivel $\eta = 10 - \xi$ kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\eta) = 10 - \mathbb{E}(\xi) = 10 - \frac{11}{2} = \frac{9}{2} = 4.5, \qquad \mathbb{D}^2(\eta) = \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{33}{4}, \qquad \mathbb{D}(\xi) = 2.8723..$$

Az eredmény megmutatja, hogy a tojásokat érdemes külön pohárban egyenként felütni, mert akkor 9 biztosan megmenthető.

15.S Megoldás. *Jelölje ξ a megvizsgált sörök számát. Ekkor a ξ eloszlása (a $q = 1 - p$ konvenció felhasználásával):*

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \frac{q^{k-1}p}{1 - q^N} \qquad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

A ξ generátorfüggvénye:

$$G_\xi(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{q^{k-1}p}{1-q^N} z^k = \sum_{k=1}^{N} \frac{pz}{1-q^N}(qz)^{k-1} = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{pz}{1-q^N}(qz)^l = \frac{pz}{1-qz}\frac{1-(qz)^N}{1-qz} \doteq g(z)h(z).$$

Mivel a g függvény éppen a p paraméterű geometriai eloszlás generátorfüggvénye, így a $g^{'}(1)$ és $g^{''}(1)$ értékét már egy korábbi feladat alapján ismerjük.

$$g(1) = 1, \qquad g^{'}(1) = \frac{1}{p}, \qquad g^{''}(1) = \frac{2q}{p^2}.$$

A h függvény deriváltjai:

$$h^{'}(z) = \frac{-Nq^N z^{N-1}}{1-q^N}, \qquad h^{''}(z) = \frac{-N(N-1)q^N z^{N-2}}{1-q^N}.$$

Így kapjuk, hogy:

$$h(1) = 1, \qquad h^{'}(1) = \frac{Nq^N}{1-q^N}, \qquad h^{''}(1) = -\frac{N(N-1)q^N}{1-q^N}.$$

A generátorfüggvény deriváltjai az 1 helyen:

$$G_\xi^{'}(1) = g^{'}(1)h(1) + g(1)h^{'}(1) = \frac{1}{p} - \frac{N}{1-q^N} = \mathbb{E}(\xi),$$

$$G_\xi^{''}(1) = g^{''}(1)h(1) + 2g^{'}(1)h^{'}(1) + g(1)h^{''}(1) = \frac{2q}{p^2} - 2\frac{1}{p}\frac{Nq^N}{1-q^N} - \frac{N(N-1)q^N}{1-q^N}.$$

Így

$$G_\xi^{''}(1) + G_\xi^{'}(1) - \left[G_\xi^{'}(1)\right]^2 = \frac{q}{p^2} - \left(\frac{N}{1-q^N}\right)^2 q^N = \mathbb{D}^2(\xi).$$

Visszatérve az akciós sörökhöz ($p = \frac{1}{10^3}$, $N = 4$ eset) kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi) = 1000 - \frac{4}{1-\left(\frac{999}{1000}\right)^4}\left(\frac{999}{1000}\right)^4 = 2.4987.$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = 999 \cdot 1000 - \frac{4^2}{\left(1-\left(\frac{999}{1000}\right)^4\right)^2}\left(\frac{999}{1000}\right)^4 = 1.25.$$

Oldjuk meg a feladatot numerikusan is.

$$\mathbb{E}(\xi) = 1 \cdot \frac{\frac{1}{1000}}{1-\left(\frac{999}{1000}\right)^4} + 2 \cdot \frac{\frac{999}{1000} \cdot \frac{1}{1000}}{1-\left(\frac{999}{1000}\right)^4} + 3 \cdot \frac{\left(\frac{999}{1000}\right)^2 \cdot \frac{1}{1000}}{1-\left(\frac{999}{1000}\right)^4} + 4 \cdot \frac{\left(\frac{999}{1000}\right)^3 \cdot \frac{1}{1000}}{1-\left(\frac{999}{1000}\right)^4} =$$
$$= 2.498749375,$$
$$\mathbb{E}(\xi^2) = 1^2 \cdot \frac{\frac{1}{1000}}{1-\left(\frac{999}{1000}\right)^4} + 2^2 \cdot \frac{\frac{999}{1000} \cdot \frac{1}{1000}}{1-\left(\frac{999}{1000}\right)^4} + 3^2 \cdot \frac{\left(\frac{999}{1000}\right)^2 \cdot \frac{1}{1000}}{1-\left(\frac{999}{1000}\right)^4} + 4^2 \cdot \frac{\left(\frac{999}{1000}\right)^3 \cdot \frac{1}{1000}}{1-\left(\frac{999}{1000}\right)^4} =$$
$$=7.493747376,$$
$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 1.25.$$

5. Poisson eloszlás

16.• Megoldás. *Jelölje ξ a szervizbe naponta érkező gépkocsik számát.*
Ekkor $\xi \sim$ Poiss $(\lambda = 5)$. Mivel az unió diszjunkt, így alkalmazható a véges additivitás.

$$\mathbb{P}(4 \leqslant \xi \leqslant 7) = \mathbb{P}((\xi = 4) \cup (\xi = 5) \cup (\xi = 6) \cup (\xi = 7)) =$$
$$= p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = \left(\frac{5^4}{4!} + \frac{5^5}{5!} + \frac{5^6}{6!} + \frac{5^7}{7!}\right) e^{-5} = 0.6016.$$

17.• Megoldás. *Jelölje ξ az egy szelet kalácsban lévő mazsolák számát.*
Ekkor $\xi \sim$ Poiss $(\lambda = 9)$. Mivel az unió diszjunk, így alkalmazható a véges additivitás.

$$\mathbb{P}(7 \leqslant \xi \leqslant 10) = \mathbb{P}((\xi = 7) \cup (\xi = 8) \cup (\xi = 9) \cup (\xi = 10)) =$$
$$= p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} = \left(\frac{9^7}{7!} + \frac{9^8}{8!} + \frac{9^9}{9!} + \frac{9^{10}}{10!}\right) e^{-9} = 0.4992.$$

18.• Megoldás. *Jelölje ξ az 5 dekás szeletben lévő mazsolák számát. Mivel 100 dkg kalácsban 52 szem mazsola van, így 5 dkg kalácsban $\frac{5 \cdot 52}{100} = 2.6$. Így $\xi \sim$ Poiss $(\lambda = 2.6)$.*

Jelölje A_n azt az eseményt, hogy n szeletet kivéve van közöttük mazsola nélküli szelet. Keressük az n-et a $\mathbb{P}(A_n \geqslant 0.92$ teljesülése esetén. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right) = 1 - \mathbb{P}(A_n) \leqslant 1 - 0.92 = 0.08,$$

Az $\overline{A_n}$ jelenti azt az eseményt, hogy n szeletet kivéve nincs közöttük mazsola nélküli szelet, ami azt jelenti, hogy mindegyikben van mazsola, azaz az elsőben is van, a másodikban is van ..., az n-edikben is van. Így ezeknek az eseményeknek a függetlenségét kihasználva kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right) = (1 - p_0)^n = \left(1 - \frac{2.6^0}{0!} e^{-2.6}\right)^n = (1 - e^{-2.6})^n \leqslant 0.08.$$

Így egy exponenciális egyenlőtlenséget kaptunk, amely logaritmus-vonás segítségével megoldható.

$$n \geqslant \frac{\ln(0.08)}{\ln(1-e^{-2.6})} = 32.7266,$$

tehát legalább 33 db süteményt kell kivenni.

7. Általános feladatok (abszolút folytonos eloszlások)

19.• Megoldás. *Mivel a ξ valószínűségi változó abszolút folytonos, így $\mathbb{F}_\xi$ folytonos. Az $\mathbb{F}_\xi$ szakaszonként folytonos, így csak azt kell biztosítani, hogy az $\mathbb{F}_\xi$ ívei folytonosan csatlakozzanak. Ehhez elegendő, hogy*

$$\mathbb{F}(6) = A(3.4 \cdot 6^2 + 6.2 \cdot 6) = 1,$$

ahonnan kapjuk, hogy $A = \frac{1}{159.6}$.

A ξ sűrűségfüggvénye:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{159,6}(6.8x+6,2), & \textit{ha } x \in]0,6] \\ \\ 0 & \textit{egyébként.} \end{cases}$$

A ξ várható értéke:

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_0^6 x\frac{1}{159.6}(6.8x+6.2)dx = \frac{1}{159.6}\int_0^6 (6.8x^2+6.2x)dx =$$
$$= \frac{1}{159.6}\left[\frac{6.8x^3}{3} + \frac{6.2x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=6} = \frac{1}{159.6}\left(\frac{6.8\cdot 6^3}{3} + \frac{6.2\cdot 6^2}{2}\right) = \frac{501}{133}.$$

Így

$$\mathbb{E}(29\xi - 486) = 29\mathbb{E}(\xi) - 486 = 29 \cdot \frac{501}{133} - 486 = -376.4594.$$

20.• Megoldás.

I. Mo.: Először meghatározzuk a B értékét. Mivel $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ így kapjuk, hogy

$$1 = \int_0^B 1.4x^3dx = 1.4\int_0^B x^3dx = 1.4\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=B} = 1.4\frac{B^4}{4}.$$

Így $B = \sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}$.

A ξ várható értéke:

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_0^B x \cdot 1.4x^3 dx = 1.4 \int_0^B x^4 dx = 1.4 \left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{x=\sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}} = \frac{1.4}{5}\left(\sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}\right)^5 = \frac{4}{5}\sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}.$$

A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi > \mathbb{E}(\xi)) = 1.4 \int_{\mathbb{E}(\xi)}^B x^3 dx = 1.4 \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=\frac{4}{5}\sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}}^{x=\sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}} = \frac{1.4}{4}\left[x^4\right]_{x=\frac{4}{5}\sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}}^{x=\sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}} =$$

$$= \frac{1.4}{4}\left(\frac{4}{1.4} - \frac{4}{1.4}\left(\frac{4}{5}\right)^4\right) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{369}{625} = 0.5904.$$

II. Mo.: Talán egyszerűbb úgy számolni, hogy először megkeressük a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, egyelőre ismeretlenül hagyva a B értékét. Mivel

$$1.4 \int_0^x t^3 dx = 1.4\frac{x^4}{4},$$

így a keresett eloszlásfüggvény:

$$\mathbb{F}_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \textit{ha } x < 0; \\ \dfrac{1,4}{4}x^4 & \textit{ha } 0 \leqslant x < B; \\ 1 & \textit{ha } B < x. \end{cases}$$

Könnyen megkapható a B értéke abból, hogy az $\mathbb{F}_\xi$ íveinek folytonosan kell csatlakoznia, így $1 = \mathbb{F}_\xi(B) = \frac{1,4}{4}B^4$, amiből kapjuk, $B = \sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}$.

Ezt követően a várható érték az előző megoldásban látott módon számolható.

Végül a keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi > \mathbb{E}(\xi)) = 1 - \mathbb{P}(\xi < \mathbb{E}(\xi)) = 1 - \mathbb{F}_\xi(\mathbb{E}(\xi)) =$$

$$= 1 - \frac{1.4}{4}\left(\frac{4}{5}\sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}\right)^4 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{369}{625} = 0.5904.$$

21.• Megoldás. *Először meghatározzuk a B értékét. Mivel $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ így kapjuk, hogy*

$$1 = \int_{1.2}^{2.4} B(2x+1)dx = B\int_{1.2}^{2.4}(2x+1)dx =$$

$$= B\left[\frac{2x^2}{2} + x\right]_{x=1.2}^{x=2.4} = B\left[2.4^2 + 2.4 - 1.2^2 - 1.2\right] = 5.52B.$$

Így $B = \frac{1}{5.52}$. *A* ξ *várható értéke:*

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{5.52}\int_{1.2}^{2.4}(2x^2+x)dx = \frac{1}{5.52}\left[\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{x=1.2}^{x=2.4} =$$

$$= \frac{1}{5.52}\left(\frac{2\cdot 2.4^3}{3}+\frac{2.4^2}{2}-\frac{2\cdot 1.2^3}{3}-\frac{1.2^2}{2}\right) = 1.7955.$$

22.• Megoldás. *Először meghatározzuk az* a *értékét. Mivel* $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx$, *így kapjuk, hogy*

$$1 = \int_{2.8}^{+\infty}\frac{a}{x^3}dx = a\int_{2.8}^{+\infty}x^{-3}dx = a\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_{x=2.8}^{x=+\infty} = a\left[\frac{1}{-2x^2}\right]_{x=2.8}^{x=+\infty} = \frac{a}{2\cdot 2.8^2},$$

amiből kapjuk, hogy $a = 2\cdot 2.8^2$.

A μ *medián értékét keressük. Ehhez az* $\mathbb{F}_\xi(\mu) = \frac{1}{2}$ *egyenletet kell megoldanunk.*

$$\frac{1}{2} = \mathbb{F}_\xi(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} f_\xi(x)dx = 2\cdot 2.8^2\int_{2.8}^{\mu}x^{-3}dx = 2\cdot 2.8\left[\frac{1}{-2x^2}\right]_{x=2.8}^{x=\mu} =$$

$$= 2\cdot 2.8^2\left(-\frac{1}{2\mu^2}+\frac{1}{2\cdot 2.8^2}\right) = -\frac{2\cdot 2.8^2}{2\mu^2}+1,$$

amiből kapjuk, hogy $\frac{2.8^2}{\mu^2} = \frac{1}{2}$, $2\cdot 2.8^2 = \mu^2$, $\mu = 2.8\sqrt{2}$.

6. Gyakorlat
Nevezetes abszolút folytonos valószínűségi változók: egyenletes, exponenciális, normális eloszlás

Az alábbi nevezetes abszolút folytonos valószínűségi változókkal fogunk megismerkedni:

1. Egyenletes;
2. Exponenciális;
3. Normális.

1. Az egyenletes eloszlás

Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó ***egyenletes eloszlás****ú az $[a, b]$ intervallumon, ha a részintervallumba esés valószínűsége arányos a részintervallum hosszával. Jele: $\xi \sim U(a, b)$.*

A ξ valószínűségi változó ***eloszlás****, illetve* ***sűrűségfüggvénye****:*

$$\mathbb{F}_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqslant a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{ha } x \in [a, b]; \\ 1, & \text{ha } x \geqslant b \end{cases} \qquad f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{ha } x \in [a, b]; \\ 0, & \text{ha } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

A ξ valószínűségi változó ***várható értéke*** *és* ***szórásnégyzete****:*

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

2. Az exponenciális eloszlás

Legyen $\lambda > 0$. Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó λ ***paraméterű exponencális eloszlás****ú valószínűségi változó, ha* ***eloszlás****, illetve* ***sűrűségfüggvénye****:*

$$\mathbb{F}_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqslant 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0; \end{cases} \qquad f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqslant 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Jele: $\xi \sim Exp(\lambda)$. A ξ valószínűségi változó ***várható értéke*** *és* ***szórásnégyzete****:*

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Tulajdonságok *Az exponenciális eloszlás rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

1. ***Örökifjú tulajdonság:*** *Ha ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor*

$$\mathbb{P}(\xi < s+t|\xi > s) = \mathbb{P}(\xi < t) \qquad (s,t > 0).$$

2. ***Poisson folyamat:*** *Ha időegység alatt bekövetkező események száma Poisson eloszlású valószínűségi változó, akkor két egymást követő bekövetkezés között eltelt idő exponenciális eloszlású ugyanazzal a λ paraméterrel.*

3. A normális eloszlás

A normális eloszláson belül külön tárgyaljuk a standard normális eloszlást, amelyet $\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$ és az (m,σ^2) paraméterű valószínűségi változót amelyet $\xi \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ módon jelölünk. Az (m,σ^2) valószínűségi változó mindig származtatható a standard normálisból $\sigma\eta + m \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ módon. Továbbá nyilvánvaló, hogy a standard normális az (m,σ^2) paraméterű normális eloszlás speciális esete.

*Azt mondjuk, hogy az η valószínűségi változó **standard normális** ha **eloszlás**, illetve **sűrűségfüggvénye**:*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

*tetszőleges $x \in$ esetén. A η standard normális valószínűségi változó **várható értéke** és **szórásnégyzete**:*

$$\mathbb{E}(\xi) = 0, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = 1.$$

*Ha $\xi \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ akkor az **eloszlás**, illetve **sűrűségfüggvénye**:*

$$\mathbb{F}_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt \qquad f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

*tetszőleges $x \in$ esetén. Ekkor a **várható értéke** és a **szórásnégyzete**:*

$$\mathbb{E}(\xi) = m, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = \sigma^2.$$

A normális és a standard normális eloszlást a sűrűségfüggvényével definiáljuk. Az eloszlásfüggvényt a sűrűségfüggvényből származtatjuk integrálással. Sajnos a kapott függvény nem elemi függvény, így értékeit vagy számítógéppel számoltatjuk valamilyen numerikus módszerrel, vagy táblázatból nézzük ki. Ha az általunk vizsgált eloszlás nem normális, akkor n várható érték levonásával és a szórással történő osztással normális eloszlásúvá alakítjuk. Ezt az átalakítást nevezzük **standardizálás**nak. A második bemutatásra kerülő összefüggés azt mutatja, hogy hogyan kell a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének az értékét negatív helyen meghatározni.

Tulajdonságok

1. ***Standardizálás:*** *Ha* $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, *akkor* $\doteq \frac{\xi - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
2. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ *minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén.*

Feladatok

1. Egyenletes eloszlás

1.• Feladat. *Egy kör sugara egyenletes eloszlású a (0, 1.4) intervallumban. Számítsa ki a kör területének, mint valószínűségi változónak a mediánját!*

2.• Feladat. *Egy* ξ *egyenletes eloszlású valószínűségi változóról tudjuk, hogy* $E(\xi) = 3.0$ *és* $D(\xi) = 4.1$. *Mi a valószínűsége, hogy 2 egymástól függetlenül megismételt kísérlet mindegyikében* ξ *2.1 és 6.6 közötti értéket vesz fel?*

3.• Feladat. *Legyen a* ξ *valószínűségi változó egyenletes eloszlású a* $[-2.40, 2.40]$ *intervallumon. Számítsa ki a* $P(2\xi + 1 < 1.6)$ *valószínűségét!*

2. Exponenciális eloszlás

4.• Feladat. *A* ξ *és* η *valószínűségi változók függetlenek. A* ξ *egyenletes eloszlású a* $(-1.2, 3.0)$ *intervallumon, míg az* η *4.0 várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Számítsa ki a* $P(\xi < 0.7, \eta < 5.6)$ *valószínűséget!*

5.• Feladat. *Egy üzletbe átlag 29 vevő érkezik óránként és számuk Poisson-eloszlású: Mi a valószínűsége, hogy két egymás után érkező vevő érkezése között eltelik legalább 4.5 perc?*

6.• Feladat. *A gépjárművezetői vizsgán a vizsga időtartama (percben mérve)*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0; \\ 0.02e^{-0.02x}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

sűrűségfüggvényű valószínűségi változó. Az előttünk lévő már 13 perce vezet. Mi a valószínűsége, hogy 6 percen belül nem fejezi be a vizsgát?

7.• Feladat. *Annak a valószínűsége, hogy egy benzinkútnál 5 percnél többet kell várakozni a tapasztalatok szerint 0.22. A várakozási időt exponenciális eloszlásúnak feltételezve, mi annak a valószínűsége, hogy 6 percnél kevesebbet kell várakozni?*

8.• Feladat. *Egy TV élettartama* ξ *exponenciális eloszlású valószínűségi változó 14000 óra átlagos élettartammal. Mi a valószínűsége, hogy egy TV 20000 óránál tovább lesz jó?*

9.• Feladat. *Egy csiga életének hossza exponenciális eloszlású valószínűségi változó 1.48 év várható értékkel. Mi a valószínűsége, hogy kedvenc csigánk életének harmadik évében pusztul el?*

10.• Feladat. *Egy hallgató ennek a feladatnak a megoldásával átlagosan 3 perc alatt végez. A feladatra fordított idő exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Mi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott hallagató 9 percen belül oldja meg a feladatot?*

11.• Feladat. *Egy gép élettartama ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó 9 év átlagos élettartammal. Adja meg azt a legnagyobb K számot, amelyre még igaz, hogy egy gép legalább 0.85 valószínűséggel működtőképes lesz K évig.*

12.• Feladat. *Egy TV élettartama ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó 6 év átlagos élettartammal. Adja meg azt a legnagyobb K számot, amelyre még igaz hogy egy adott TV legalább 0.78 valószínűséggel működőképes lesz K évig.*

13.• Feladat. *A ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke 1.80. Számítsa ki azt az m értéket, amelytől jobbra és balra megegyezik az $\eta = \xi^2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye alatti terület!*

14.• Feladat. *Egy ξ valószínűségi változó exponenciális eloszlású 0.30 szórással. Határozza meg $E(8\xi^2 - 19\xi + 7)$ értékét!*

15.• Feladat. *Egy céllövő találati pontossága 1.9 cm várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Legfeljebb hányszor lőhet, ha azt akarjuk, hogy még legalább 80%-os biztonsággal minden találata a 9.0 cm sugarú körbe essen?*

16.• Feladat. *Egy üzletbe átlag 24 vevő érkezik óránként és számuk Poisson-eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy két egymás után érkező vevő érkezése között eltelik legalább 2.7 perc?*

3. Normális eloszlás

17.• Feladat. *Egy munkadarab hossza közelítőleg normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 65 és szórása 1.3. Mennyi a valószínűsége, hogy a munkadarab hossza kisebb, mint 67.08?*

18.• Feladat. *Egy munkadarab hossza közelítőleg normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 50 mm. Határozza meg a munkadarab hosszának a szórását, ha 0.85 annak a valószínűsége, hogy a munkadarab hossza kisebb, mint 50.05 mm.*

19.• Feladat. *Legyen ξ egy olyan nulla várható értékű normális eloszlású valószínűségi változó, amelyik 0.42 valószínűséggel veszi fel értékét a $]-5.8, 5.8[$ intervallumon. Számítsa ki a $P(0.5 \leqslant 1.7\xi + 1 < 1.7)$ valószínűséget!*

20.• Feladat. *Egy alkatrész élettartamáról azt tudjuk, hogy jó közelítéssel normális eloszlású valószínűségi változó 2 év várható értékkel és 2.90 év szórással. Mi a valószínűsége, hogy két ilyen alkatrész közül legalább az egyik az ötödik évben megy tönkre?*

21.• Feladat. *Egy csomagológép 1 kilogrammos zacskókat tölt. A zacskóba töltött cukor mennyisége normális eloszlású valószínűségi változó 1 kg várható értékkel és 0.031 kg szórással. A zacskó súlyra nézve első osztályú, ha a súlya 0.95 kg és 1.05 kg közé esik. Mi a valószínűsége, hogy két véletlenül kiválasztott zacskó közül legalább az egyik első osztályú?*

22.• Feladat. *Egy alkatrész hossza normális eloszlású valószínűségi változó 35 mm várható értékkel és 0.019 mm szórással. Az alkatrészt jónak minősítjük, ha a hossza 34.9454 mm és 35.0532 mm közé esik. Mi a valószínűsége, hogy 100 alkatrészt megvizsgálva legalább 99 jót találunk?*

23.• Feladat. *Hengeres alkatrészeket gyártunk. Az átmérő 16 mm várható értékű és 0.007 mm szórású normális eloszlású valószínűségi változó, míg a hossz 75 mm várható értékű és 0.05 mm szórású normális eloszlású valószínűségi változó. Egy alkatrész átmérőre jó, ha az átmérő a (15.986, 16.021) intervallumba esik. Egy alkatrész hosszra jó, ha a hossz a (74.95, 75.1) intervallumba esik. Egy alkatrész jó, ha átmérőre is és hosszra is jó. Átlagosan az alkatrészek hány százaléka lesz selejtes, ha egy alkatrész átmérője és hossza független egymástól?*

Megoldások

1. Egyenletes eloszlás

1.• Megoldás. *Jelölje ξ a kör sugarát, η a kör területét. Ekkor $\eta = \xi^2\pi$, továbbá tudjuk, hogy $\xi \sim U(0, 1.4)$, így $\mathbb{F}_\xi(x) = \dfrac{x}{1.4}$, ha $x \in (0, 1.4)$.*

Az η mediánját keressük, amihez szükségünk van az η eloszlásfüggvényére. Az η eloszlásfüggvényének a meghatározásakor egyrészt felhasználjuk, hogy $\eta = \xi^2 \geqslant 0$, így $\mathbb{F}_\eta(x) = 0$, ha $x < 0$. Másrészt, $\xi \geqslant 0$, így $\sqrt{\xi^2} = |\xi|\xi$. Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}_\eta(x) = \mathbb{P}(\eta < x) = \mathbb{P}(\xi^2\pi < x) = \mathbb{P}\left(\xi < \sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ \dfrac{\sqrt{x}}{1.4\sqrt{\pi}}, & \text{ha } 0 < \sqrt{\frac{x}{\pi}} < 1.4, \\ & \text{azaz } 0 < x < 1.96\pi, \\ 1 & \text{ha } 1.96\pi < x. \end{cases}$$

A μ medián értékének a meghatározásához az $\mathbb{F}_\eta(\mu) = \frac{1}{2}$ egyenletet kell megoldanunk. Így kapjuk, hogy $\mathbb{F}_\eta(\mu)\frac{\sqrt{\mu}}{1.4\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}$, $\sqrt{\mu} = 0.7\sqrt{\pi}$, $\mu = 0.49\pi$.

2.• Megoldás. *Tudjuk, hogy* $\xi \sim U(a,b)$ *és* $\mathbb{E}(\xi) = \dfrac{a+b}{2} = 3.0$ *és* $\mathbb{D}(\xi) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$. *Az a és b paraméterek meghatározásához a*

$$\left.\begin{aligned} a+b &= 6, \\ -a+b &= 4.1 \cdot \sqrt{12}. \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldani. A két egyenletet összeadva kapjuk, hogy $b = \frac{1}{2}(6+4.1\sqrt{12}) = 10.1014$, *amiből kapjuk, hogy* $a = 6 - b = 6 - 10 - 1014 = -4.1014$.

A ξ *2.1 és 6.6 közötti értéket*

$$p = \mathbb{P}(2.1 < \xi < 6.6) = \frac{6.6 - 2.1}{10.1014 - (-4.1014)} = 0.3168$$

valószínűséggel vesz fel, tehát a keresett valószínűség két független módon megismételt kísérlet esetén $\mathbb{P}(A_1 \cap A_1) = \mathbb{P}(A_1) \cap \mathbb{P}A_1) = p^2 = 0.1004$.

3.• Megoldás. *Tudjuk, hogy* $\xi \sim U(-2.4, 2.4)$. *A keresett valószínűség:*

$$\mathbb{P}(2\xi + 1 < 1.6) = \mathbb{P}(2\xi < 0.6) = \mathbb{P}(\xi < 0.3) = \mathbb{F}_\xi(0.3) = \left.\frac{x+2.4}{4.8}\right|_{x=0.3} = \frac{2.7}{4.8} = \frac{9}{16} = 0.5625.$$

2. Exponenciális eloszlás

4.• Megoldás. $\xi \sim U(-1.2, 3.0)$, $\eta \sim Exp\left(\frac{1}{4}\right)$. *A* ξ *és* η *valószínűségi változók függetlensége alapján kapjuk, hogy*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi < 1.0, \eta < 5.6) = \mathbb{P}(\xi < 1.0)\mathbb{P}(\eta < 5.6) = \\ = \mathbb{F}_\xi(1.0)\mathbb{F}_\eta(5.6) = \frac{0.7+1.2}{3+1.2}\left(1 - e^{-\frac{1}{4.0}\cdot 5.6}\right) = 0.3408. \end{aligned}$$

5.• Megoldás. *Au időegység 1 óra. Jelölje* ξ *az üzletbe óránként érkező vevők számát. Mivel* $\mathbb{E}(\xi) = \lambda = 29$, *így* $\xi \sim \mathrm{Poiss}(29)$.

Jelölje η *a két vevő között eltelt időt órában mérve. Ekkor* $\eta \sim Exp(\lambda = 29)$. *A keresett valószínűség:*

$$\mathbb{P}\left(\eta > \frac{4.5}{60}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\eta < \frac{4.5}{60}\right) = 1 - \mathbb{F}_\eta\left(\frac{4.5}{60}\right) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{4.5\cdot 29}{60}}\right) = e^{-\frac{4.5\cdot 29}{60}} = 0.1136.$$

6.• Megoldás. *Jelölje* ξ *a vizsga időtartamát percben mérve, ekkor* $\xi \sim Exp(\lambda > 0.02)$. *A számolás során felhasználjuk az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságát, mely szerint:*

$$\mathbb{P}(\xi < s+t | \xi > s)\mathbb{P}(\xi < t) \qquad (s, t > 0).$$

A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi > 6+13|\ \xi > 13) = 1 - \mathbb{P}(\xi < 6+13|\ \xi > 13) = \\ = 1 - \mathbb{P}(\xi < 6) = 1 - \mathbb{F}_\xi(6) = 1 - (1 - e^{-0.02\cdot 6}) = e^{-0.02\cdot 6} = 0.8869.$$

7.• Megoldás. *Jelölje* η *a várakozási időt percben mérve. Mivel* $\eta \sim Exp(\lambda)$*, így* $\mathbb{F}_\eta(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$.

A λ *paraméter meghatározása:*

$$0.22 = \mathbb{P}(\eta \geqslant 5) = 1 - \mathbb{P}(\eta < 5) = 1 - \mathbb{F}_\eta(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda\cdot 5}) = e^{-5\lambda},$$

amiből kapjuk, hogy $-5\lambda = \ln(0.22)$*, azaz* $\lambda = \frac{\ln(0.22)}{-5}$*. A keresett valószínűség:*

$$\mathbb{P}(\eta < 6) = \mathbb{F}_\eta(6) = 1 - e^{-\lambda\cdot 6} = 1 - e^{\frac{6\cdot\ln(0.22)}{5}} = 0.8375.$$

8.• Megoldás. *Jelölje* ξ *a TV élettartalmát órában mérve. Mivel* $\mathbb{E}(\xi) = 14000 = \frac{1}{\lambda}$*, így* $\lambda = \dfrac{1}{14000}$ *és* $\xi \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{14000}\right)$*. Mivel* $\mathbb{F}_\xi(x) = 1 - e^{-\frac{1}{14000}x}$ *tetszőleges* $x > 0$ *esetén, így a keresett valószínűség:*

$$\mathbb{P}(\xi \geqslant 20000) = 1 - \mathbb{P}(\xi < 20000) = 1 - \mathbb{F}_\xi(20000) = 1 - (1 - e^{-\frac{20000}{14000}}) = e^{-\frac{20}{14}} = 0.2397.$$

9.• Megoldás. *Jelölje* ξ *a csiga élettartalmát években mérve. Mivel* $\mathbb{E}(\xi) = 1.48 = \frac{1}{\lambda}$*, így* $\lambda = \frac{1}{1.48}$ *és* $\xi \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{1.48}\right)$.

A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(2 < \xi < 3) = \mathbb{P}(\xi < 3) - \mathbb{P}(\xi < 2) = \mathbb{F}_\xi(3) - \mathbb{F}_\xi(2) = \\ = (1 - e^{-\frac{3}{1.48}}) - (1 - e^{-\frac{2}{1.48}}) = e^{-\frac{2}{1.48}} - e^{-\frac{3}{1.48}} = 0.1272.$$

10.• Megoldás. *Jelölje* ξ *a hallgató feladat megoldására fordított idejét percben mérve. Mivel* $\mathbb{E}(\xi) = 3 = \frac{1}{\lambda}$*, így* $\lambda = \frac{1}{3}$ *és* $\xi \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{3}\right)$.

A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi < 9) = \mathbb{F}_\xi(9) = 1 - e^{-\frac{9}{3}} = 1 - e^{-3} = 0.9502.$$

11.• Megoldás. *Jelölje* ξ *a gép élettartamát évben mérve. Mivel* $\mathbb{E}(\xi) = 9 = \frac{1}{\lambda}$*, így* $\lambda = \frac{1}{9}$ *és* $\xi \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{9}\right)$.

A K *értékét keressük úgy, hogy a* $\mathbb{P}(\xi > K) \geqslant 0.85$ *feltétel teljesüljön.*

$$0.85 \leqslant \mathbb{P}(\xi > K) = 1 - \mathbb{P}(\xi \leqslant K) = 1 - \mathbb{P}(\xi < K) = 1 - \mathbb{F}_\xi(K) = 1 - (1 - e^{-\frac{K}{9}}) = e^{-\frac{K}{9}}.$$

A kapott exponenciális egyenlőtlenség már könnyen megoldható. $e^{-\frac{K}{9}} \geqslant 0.85$, $-\frac{K}{9} \geqslant \ln(0.85)$, $K \leqslant -9\ln(0.85) = 1.4627$.

12.• Megoldás. *Jelölje* ξ *a TV élettartamát évben mérve. Mivel* $\mathbb{E}(\xi) = 6 = \frac{1}{\lambda}$, *így* $\lambda = \frac{1}{6}$ *és* $\xi \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{6}\right)$.

A K *értékét keressük úgy, hogy a* $\mathbb{P}(\xi > K) \geqslant 0,78$ *feltétel teljesüljön.*

$$0,78 \leqslant \mathbb{P}(\xi > K) = 1 - \mathbb{P}(\xi \leqslant K) = 1 - \mathbb{P}(\xi < K) = 1 - \mathbb{F}_\xi(K) = 1 - (1 - e^{-\frac{K}{6}}) = e^{-\frac{K}{6}} \geqslant 0.78.$$

A kapott exponenciális egyenlőtlenség már könnyen megoldható. $e^{-\frac{K}{6}} \geqslant 0.78$, $-\frac{K}{6} \geqslant \ln(0.78)$, $K \leqslant -6\ln(0.78) = 1.4608$.

13.• Megoldás. *Mivel* $\mathbb{E}(\xi) = 1.8 = \frac{1}{\lambda}$, *így* $\lambda = \frac{1}{1.8}$ *és* $\xi \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{1.8}\right)$. *Legyen* $\eta \doteq \xi^2$. *Érdemes észrevenni, hogy az* η *valószínűségi változó mediánját keressük, amit most* m*-mel jelölünk. Az* m *értékének a meghatározásához az* $\mathbb{F}_\eta(m) = \frac{1}{2}$ *egyenletet kell megoldanunk. Ehhez először meg kell határozni az* $\eta = \xi^2$ *valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Mivel* $\eta = \xi^2 \geqslant 0$, *így* $\mathbb{F}_\eta(x) = 0$, *ha* $x < 0$. *Másrészt,* $\xi \geqslant 0$, *így* $\sqrt{\xi^2} = |\xi|\xi$. *Így kapjuk, hogy*

$$\mathbb{F}_\eta(x) = \mathbb{P}(\eta < x) = \mathbb{P}(\xi^2 < x) = \mathbb{P}\left(\xi < \sqrt{x}\right) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ 1 - e^{\frac{\sqrt{x}}{1.8}}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Tehát az $1 - e^{-\frac{\sqrt{m}}{1.8}} = \dfrac{1}{2}$ *exponenciális egyenletet kell megoldani. A megoldás:* $e^{-\frac{\sqrt{m}}{1.8}} = 0.5$, $-\frac{\sqrt{m}}{1.8} = \ln(0.5)$, $m = [1.8\ln(0.5)]^2 = 1.5567$.

14.• Megoldás. $\xi \sim Exp(\lambda)$. *Tudjuk, hogy* $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{D}(\xi) = 0.3 = \frac{1}{\lambda}$. *Így*

$$\frac{1}{\lambda^2} = \mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \mathbb{E}(\xi^2) - \frac{1}{\lambda^2},$$

amiből rendezéssel kapjuk, hogy $\mathbb{E}(\xi^2) = \frac{2}{\lambda^2}$. *A várható érték linearitása alapján*

$$\mathbb{E}(8\xi^2 - 19\xi + 7) = 8\mathbb{E}(\xi^2) - 19\mathbb{E}(\xi) + 7 = 8\frac{2}{\lambda^2} - 19\frac{1}{\lambda} + 7 = 16 \cdot 0.3^2 - 19 \cdot 0.3 + 7 = 2,74.$$

15.• Megoldás. *Mivel* $\mathbb{E}(\xi) = 1.9 = \frac{1}{\lambda}$, *így* $\lambda = \frac{1}{1.9}$ *és* $\xi \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{1.9}\right)$. *Egy lövés találatának a valószínűsége* $\mathbb{P}(\xi < 9.0) = \mathbb{F}_\xi(9.0) = 1 - e^{-\frac{9.0}{1.9}}$, *amiből a függetlenség felhasználásával kapjuk, hogy az*

$$\left(1 - e^{-\frac{9.0}{1.9}}\right)^n \geqslant 0.8$$

exponenciális egyenlőtlenséget kell megoldanunk. A megoldás: $n\ln(1 - e^{-\frac{9.0}{1.9}}) \geqslant \ln(0.8)$, $n \leqslant \frac{\ln(0.8)}{\ln(1-e^{-\frac{9.0}{1.9}})} = 25.34$, *tehát a céllövő legfeljebb 25-ször lőhet.*

16.• Megoldás.

3. Normális eloszlás

17.• Megoldás. *Jelölje ξ a munkadarab hosszát. Tudjuk, hogy $\xi \sim \mathcal{N}(m = 65, \sigma^2 = 1.3^2)$. Ekkor a keresett valószínűség:*

$$\mathbb{P}(\xi < 67.08) = \mathbb{P}\left(\eta < \frac{67.08 - 65}{1.3}\right) = \Phi(2.3692) = 0.9909.$$

18.• Megoldás. *jelölje ξ a munkadarab hosszát. Tudjuk, hogy $\xi \sim \mathcal{N}(m = 50, \sigma^2)$. A feledat az ismeretlen szórás meghatározása. Ekkor*

$$0.85 = \mathbb{P}(\xi < 50.05) = \mathbb{P}\left(\eta < \frac{50.05 - 50}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{0.05}{\sigma}\right),$$

amiből az ismeretlen σ paramétert már könnyű kifejezni. $1.04 = \frac{0.05}{\sigma}$, $\sigma = \frac{0.05}{1.04} = 0.0481$.

19.• Megoldás. *Tudjuk, hogy $\xi \sim \mathcal{N}(m = 0, \sigma^2)$, ahol a σ^2 paraméter ismeretlen; továbbá* $\mathbb{P}(-5.8 \leqslant \xi \leqslant 5.8) = 0.42$. *Először a σ értékét határozzuk meg. Standardizálással kapjuk, hogy $\eta \doteq \frac{\xi - 0}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.*

$$\mathbb{P}(-5.8 \leqslant \xi \leqslant 5.8) = \mathbb{P}\left(\frac{-5.8}{\sigma} \leqslant \eta \leqslant \frac{5.8}{\sigma}\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{5.8}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{5.8}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{5.8}{\sigma}\right) - 1 = 0.42, \quad \text{azaz}$$
$$\Phi\left(\frac{5.8}{\sigma}\right) = \frac{0.42 + 1}{2} = 0.71$$

A kapott egyenlőségből az ismeretlen szórás már visszakereséssel meghatározható: $\frac{5.8}{\sigma} = 0.55$, $\sigma = \frac{5.8}{0.55} = 10.5455$.

A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(0.5 \leqslant 1.7\xi + 1 < 1.7) = \mathbb{P}\left(\frac{0.5 - 1}{1.7} \leqslant \xi < \frac{1.7 - 1}{1.7}\right) =$$
$$= \mathbb{P}\left(\frac{0.5 - 1}{1.7 \cdot 10.5455} \leqslant \eta < \frac{1.7 - 1}{1.7 \cdot 10.5455}\right) = \Phi(0.04) - \Phi(-0.03) =$$
$$= \Phi(0.04) + \Phi(0.03) - 1 = 0.5160 + 0.5160 - 1 = 0.028.$$

20.• Megoldás. *Jelölje ξ egy alkatrész élettartamát. Ekkor $\xi \sim \mathcal{N}(m = 2, \sigma^2 = 0.29^2)$. A feladatot a függetlenség feltételezése mellet oldjuk meg. Legyen $p \doteq \mathbb{P}(4 \leqslant \xi < 5)$.*

A p értékének a meghatározása:

$$p = \mathbb{P}(4 \leqslant \xi < 5) = \mathbb{P}\left(\frac{4-2}{2.9} \leqslant \eta \leqslant \frac{5-2}{2.9}\right) =$$
$$= \Phi(1.0345) - \Phi(0.6896) = 0.8485 - 0.7549 = 0.0936.$$

Az ismeretlen valószínűség a szita formula alapján: $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = 2p - p^2 = 0.1784$.

21.• Megoldás. *Jelölje ξ a zacskóba töltött cukorka mennyiségét. Tudjuk, hogy $\xi \sim \mathcal{N}(m = 1\sigma^2 = 0.031^2)$. Ekkor standardizálással kapjuk, hogy*

$$p = \mathbb{P}(0.95 \leqslant \xi < 1.05) = \mathbb{P}\left(\frac{0.95-1}{0.031} \leqslant \eta < \frac{1.05-1}{0.031}\right) = \Phi(1.6129) - \Phi(-1.6129) =$$
$$= 2\Phi(1.6129) - 1 = 2 \cdot 0.9463 - 1 = 0.8926.$$

A keresett valószínűség a szita formula segítségével már könnyen meghatározható: $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = 2p - p^2 = 0.9885$.

22.• Megoldás. *Jelölje ξ egy véletlenszerűen kiválasztott alkatrész hosszát, és η 100 megvizsgált alkatrész közül a jó alkatrészek számát. Tudjuk, hogy $\xi \sim \mathcal{N}(m = 35, \sigma^2 = 0.019^2)$, $\eta \sim B(n = 100, p)$, ahol p ismeretlen paraméter. Ezekkel a jelölésekkel a $p_{99} + p_{100}$ értéket kell meghatározni.*

Az ismeretlen p paraméter meghatározása:

$$p = \mathbb{P}(34.9468 \leqslant \xi < 35.0532) = \mathbb{P}\left(\frac{34.9468-35}{0.019} \leqslant \frac{\xi - 35}{0.019} < \frac{35.0532-35}{0.019}\right) =$$
$$= \Phi(2.8) - \Phi(-2.8) = 2\Phi(2.8) = 2 \cdot 0.9974 - 1 = 0.9948..$$

A keresett valószínűség:

$$p_{99} + p_{100} = \binom{100}{99} p^{99}(1-p)^1 + \binom{100}{100} p^{100}(1-p)^0 = 100 \cdot p^{99}(1-p) + p^{100} =$$
$$= p^{99}(100(1-p) + p) = p^{99}(100 - 99p) = 0.9041.$$

23.• Megoldás. *Jelölje ξ_1 az alkatrész átmérőjét, ξ_2 az alkatrész hosszát. Tudjuk, hogy $\xi_1 \sim \mathcal{N}(m = 16, \sigma^2 = 0.007^2)$, $\xi_2 \sim \mathcal{N}(m = 75, \sigma^2 = 0.05^2)$, továbbá a ξ_1 és a ξ_2 valószínűségi* *változók függetlenek. Jelölje A azt az eseményt, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott alkatrész jó. A feladat a* $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)$ *valószínűség meghatározása.*

$$\begin{aligned}
p \doteq \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(15.986 < \xi_1 < 16.021, 74.95 < \xi_2 < 75.1) = \\
= \mathbb{P}(15.986 < \xi_1 < 16.021)\mathbb{P}(74.95 < \xi_2 < 75.1) = \\
= \mathbb{P}\left(\frac{15.986-16}{0.007} < \eta_1 < \frac{16.021-16}{0.007}\right)\mathbb{P}\left(\frac{74.95-75}{0.05} < \eta_1 < \frac{75.1-75}{0.05}\right) = \\
= (\Phi(3)-\Phi(-2))(\Phi(2)-\Phi(-1)) = (\Phi(3)+\Phi(2)-1)(\Phi(2)+\Phi(1)-1) = \\
= (0.9987+0.9772-1)(0.9972+0.8413-1) = 0.9759 \cdot 0.8185 = 0.7988.
\end{aligned}$$

Így a keresett valószínűség: $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - p = 0.2012$, *tehát az alkatrészek* 20.12% *lesz selejtes, ami elég sok.*

Hivatkozások

[01] J. **Aczél**, Lectures on Functional Equations and Their Applications, *Academic Press, New York-London.* (1966) [Mathematics in Science and Engineering, Vol. 19].