Definíció

Az $S \subseteq A \times A^{**}$ program elemi, ha

$$\forall a \in A : S(a) \subseteq \{\langle a \rangle, \langle a, a, a, \ldots \rangle, \langle a, b \rangle \mid b \neq a\}.$$

Definíció

üres, vagy skip program:

$$\forall a \in A : SKIP(a) = \{\langle a \rangle\}.$$

Definíció

A törlődés, vagy abort program:

$$\forall a \in A : ABORT(a) = \{\langle a, a, a, \ldots \rangle\}.$$

Definíció

Legyen $F \subseteq A \times A$. Az S programot általános értékadásnak nevezzük, ha

$$\begin{aligned} S &= \{(a, red(\langle a, b \rangle)) \mid a, b \in A \wedge a \in D_F \wedge b \in F(a)\} \cup \\ &\quad \{(a, \langle a, a, a, \ldots \rangle) \mid a \in A \wedge a \notin D_F\}. \end{aligned}$$

Definíció

Legyen $S \subseteq A \times A^{**}$ általános értékadás program.

(a) Ha $D_F = A$, akkor az S programot értékkiválasztásnak nevezzük és $a :\in F(a)$-val jelöljük.

(b) Ha az F reláció függvény, akkor az S programot értékadásnak nevezzük és $a := F(a)$-val jelöljük.

(c) Ha $D_F \subset A$, akkor S parciális értékkiválasztás.

(d) Ha $D_F \subset A$ és F determinisztikus (F parciális függvény), akkor S parciális értékadás.

Definíció

Identitásfüggvény:

$$id_A = \{(a, a) \mid a \in A\} \subseteq A \times A.$$

Tétel

Az elemi programok programfüggvényei:

(a) $p\,(SKIP) = id_A$,
(b) $p\,(ABORT) = \emptyset$,
(c) $p\,(a := F\,(a)) = F$,
(d) $p\,(a :\in F\,(a)) = F$.

Elemi programok leggyengébb előfeltételei

Legyen R egy tetszőleges utófeltétel. Ekkor $p(SKIP)(a) = \{a\}$ miatt

$$\begin{aligned}[lf\,(SKIP, R)] &= \{a \in A \mid p\,(SKIP)\,(a) \subseteq [R]\} \\ &= \{a \in A \mid \{a\} \subseteq [R]\} = [R]\end{aligned}$$

és

$$lf\,(SKIP, R) = R.$$

Hasonlóan $p\,(ABORT)\,(a) = \emptyset$ miatt

$$lf\,(ABORT, R) = HAMIS.$$

Az általános értékadás leggyengébb előfeltétele a négy esetben

(a) $F : A \to A$ függvény, $D_F = A$.

$$[lf\,(a := F\,(a)\,, R)] = \{a \in A \mid F\,(a) \subseteq [R]\} = F^{(-1)}\,([R])\,.$$

(b) $F : A \to A$ függvény, $D_F \subset A$.

$$[lf\,(a := F\,(a)\,, R)] = \{a \in A \mid F\,(a) \subseteq [R]\} \cap D_F = F^{(-1)}\,([R]) \cap D_F\,.$$

(c) $F \subseteq A \times A$, $D_F = A$, F nem determinisztikus.

$$[lf\,(a :\in F\,(a)\,, R)] = \{a \in A \mid F\,(a) \subseteq [R]\} = F^{(-1)}\,([R])\,.$$

(d) $F \subseteq A \times A$, $D_F \subset A$, F nem determinisztikus.

$$[lf\,(a :\in F\,(a)\,, R)] = \{a \in A \mid F\,(a) \subseteq [R]\} \cap D_F = F^{(-1)}\,([R]) \cap D_F\,.$$

Definíció

Legyenek $S_1, S_2 \subseteq A \times A^{**}$ programok. Az $S \subseteq A \times A^{**}$ relációt az S_1 és S_2 programok szekvenciájának nevezzük, és $(S_1; S_2)$-vel jelöljük, ha minden $a \in A$ esetén

$$\begin{aligned} S\,(a) \quad = \quad & \{\alpha \in A^{\infty} \mid \alpha \in S_1\,(a)\} \cup \\ & \cup \{\chi_2\,(\alpha, \beta) \in A^{**} \mid \alpha \in S_1\,(a) \cap A^{*} \wedge \beta \in S_2\,(\tau\,(\alpha))\}\,. \end{aligned}$$

Definíció

Legyenek $\pi_1, \ldots, \pi_m : A \to \mathbb{L}$ feltételek, $S_1, \ldots, S_m$ programok A-n. Ekkor az $IF \subseteq A \times A^{**}$ relációt az S_i-kből képezett π_i-k által meghatározott elágazásnak nevezzük, és $(\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_m : S_m)$-vel jelöljük, ha minden $a \in A$ esetén

$$IF(a) = \left(\cup_{i=1}^{m} w_i(a)\right) \cup w_0(a),$$

ahol $\forall i \in [1..m]$:

$$w_i(a) = \begin{cases} S_i(a), \text{ ha } a \in [\pi_i] \\ \emptyset, \text{ különben} \end{cases}$$

és

$$w_0(a) = \begin{cases} \langle a, a, a, \ldots \rangle, \text{ ha } a \notin \cup_{i=1}^{m} [\pi_i] \\ \emptyset, \text{ különben.} \end{cases}$$

Tétel

A szekvencia, az elágazás és a ciklus program.

Definíció

Legyen π feltétel és S program A-n. A $DO \subseteq A \times A^{**}$ relációt az S-ből a π feltétellel képezett ciklusnak nevezzük, és (π, S)-sel jelöljük, ha

1. $\forall a \notin [\pi] : \; DO(a) = \{\langle a \rangle\}$,
2. $\forall a \in [\pi]$:

$$\begin{aligned} DO(a) \quad = \quad & \left\{\alpha \in A^{**} \mid \exists n \in \mathbb{N} : \alpha = \chi_n\left(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\right)\right. \\ & \wedge \alpha^1 \in S(a) \wedge \forall i \in [1..n-1] : \\ & \alpha^{i+1} \in S\left(\tau\left(\alpha^i\right)\right) \wedge \tau\left(\alpha^i\right) \in [\pi] \wedge \\ & \left.\wedge\left(\alpha^n \in A^{\infty} \vee \left(\alpha^n \in A^* \wedge \tau\left(\alpha^n\right) \notin [\pi]\right)\right)\right\} \cup \\ & \cup \left\{\alpha \in A^{\infty} \mid \alpha = \chi_{\infty}\left(\alpha^1, \alpha^2, \ldots\right) \wedge \alpha^1 \in S(a) \wedge \right. \\ & \left. \wedge \forall i \in \mathbb{N} : \alpha^{i+1} \in S\left(\tau\left(\alpha^i\right)\right) \wedge \tau\left(\alpha^i\right) \in [\pi]\right\}. \end{aligned}$$

Tétel

Legyen A állapottér, S_1, S_2 programok A-n, $S = (S_1; S_2)$ a belőlük képezett szekvencia. Ekkor

$$p(S) = p(S_2) \circ p(S_1).$$

Tétel

Legyen A állapottér, $S_1, S_2, \dots, S_m$ programok A-n, valamint $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m : A \to \mathbb{L}$ feltételek A-n, $IF = (\pi_1 : S_1, \dots, \pi_m : S_m)$. Ekkor

1. $D_{p(IF)} =$
$$\left\{ a \in A \mid a \in \cup_{i=1}^{m} [\pi_i] \wedge \forall j \in [1..m] : a \in [\pi_j] \Rightarrow a \in D_{p(S_j)} \right\}$$
2. $\forall a \in D_{p(IF)}$:
$$p(IF)(a) = \cup_{i=1}^{m} pw_i(a),$$
ahol
$$pw_i(a) = \begin{cases} p(S_i)(a), & \text{ha } a \in [\pi_i] \\ \emptyset, & \text{különben} \end{cases}$$

Definíció

A $p(S)$ reláció megszorítása a $[\pi]$ igazsághalmazra:

$$p(S)_{|[\pi]} = p(S) \cap ([\pi] \times A).$$

Tétel

Legyen A tetszőleges állapottér, $S \subseteq A \times A^{**}$ program, π feltétel A-n, $DO = (\pi, S)$. Ekkor $D_{p(DO)} = [\neg\pi] \cup D^{*}_{p(S)_{|[\pi]}}$ és

$$p(DO)(a) = \overline{p(S)_{|[\pi]}}(a) \quad (a \in D_{p(DO)}).$$

Tétel (A szekvencia levezetési szabálya)

Legyen $S = (S_1; S_2)$ szekvencia, Q, R és Q' állítások A-n. Ha

1. $Q \Rightarrow lf(S_1, Q')$ és
2. $Q' \Rightarrow lf(S_2, R)$,

akkor $Q \Rightarrow lf(S, R)$.

Tétel (A szekvencia levezetési szabályának megfordítása)

Legyen $S = (S_1; S_2)$ szekvencia, Q és R olyan állítások A-n, amelyekre $Q \Rightarrow lf(S, R)$. Ekkor $\exists Q' : A \to \mathbb{L}$ állítás, hogy

1. $Q \Rightarrow lf(S_1, Q')$ és
2. $Q' \Rightarrow lf(S_2, R)$.

Tétel (Az elágazás levezetési szabálya)

Legyen $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_m : S_m)$ elágazás, Q és R állítások A-n. Ha $\forall i \in [1..m] : Q \wedge \pi_i \Rightarrow lf(S_i, R)$, akkor

$$Q \wedge (\vee_{i=1}^{m} \pi_i) \Rightarrow lf(IF, R).$$

Tétel (Az elágazás levezetési szabályának megfordítása)

Legyen $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_m : S_m)$ elágazás, Q és R olyan állítások A-n, amelyekre

$$Q \wedge (\vee_{i=1}^{m} \pi_i) \Rightarrow lf(IF, R).$$

Ekkor $\forall i \in [1..m] : Q \wedge \pi_i \Rightarrow lf(S_i, R)$.

Tétel (A ciklus levezetési szabálya)

Legyen P állítás A-n, $DO = (\pi, S)$ és $t : A \to \mathbb{Z}$. Ha

1. $P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$,
2. $P \wedge \pi \Rightarrow lf(S, P)$,
3. $P \wedge \pi \wedge \forall t = t_0 \Rightarrow lf(S, t < t_0)$,

akkor $P \Rightarrow lf(DO, P \wedge \neg \pi)$.

A feladatok általános alakja:

Input	:	$n \in \mathbb{N}_0,\ x \in H^n,\ F : H^* \to G$
Output	:	$S \in G$
Q	:	–
R	:	$S = F(x_1, \ldots, x_n)$

Egy bemenő sorozattól függő S értéket kell meghatároznunk. A feladatcsoporthoz több feladattípus tartozik.

Elemi algoritmusok

1. Sorozatszámítás

Az algoritmus:

Változók:

n : egész

{a feldolgozandó sorozat elemszáma}

x : tömb(1..n:elemtipus)

{a feldolgozandó sorozat elemei}

F_0 : elemtipus$_1$ {a művelet nulleleme}

S : elemtipus$_2$ {az eredmény}

Input	:	$n \in \mathbb{N}_0,\ x \in H^n,\ F : H^* \to G$
Output	:	$S \in G$
Q	:	$\exists F_0 \in G$ (nullelem) és $\exists f : G \times H \to G$ és
		$F(x_1, \ldots, x_n) = f(F(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)$ és $F() = F_0$
R	:	$S = F(x_1, \ldots, x_n)$

A feladatot megoldó algoritmus:

sorozatszámítás(n, x, s)
  $s := F_0$
  for $i = 1 : n$
    $s := f(s, x(i))$
  end
eljárás vége

2. Eldöntés

Input	:	$n \in \mathbb{N}_0,\ x \in H^n,\ T : H \to \mathbb{L}$
Output	:	$VAN \in \mathbb{L}$
Q	:	–
R	:	$VAN \equiv (\exists i\ (1 \le i \le n) : T(x_i))$

Az algoritmus:

Függvény:

T : *elemtípus* $\to \mathbb{L}$

Változók:

n : egész — a feldolgozandó sorozat elemszáma

x : tömb (1..n:elemtipus) — a feldolgozandó sorozat elemei

VAN : logikai — az eredmény

```
eldöntés(n, x, VAN)
   i := 1
   while (i ≤ n) ∧ (¬T(x(i)))
      i := i + 1
   end
   VAN := (i ≤ n)
eljárás vége
```

3. Kiválasztás

Input	:	$n \in \mathbb{N},\ x \in H^n,\ T : H \to \mathbb{L}$
Output	:	$SORSZ \in \mathbb{N}$
Q	:	$\exists i\ (1 \le i \le n) : T(x_i)$
R	:	$(1 \le SORSZ \le n) \wedge T(x_{SORSZ})$

Az algoritmus:

Függvény:

T : *elemtípus* $\to \mathbb{L}$

Változók:

n : egész {a feldolgozandó sorozat elemszáma}

x : tömb(1..n:elemtipus) {a feldolgozandó sorozat elemei}

$SORSZ$: egész {az eredmény}

A megoldás hasonlít az előző feladattípushoz:

kiválasztás$(n, x, SORSZ)$
  $i := 1$
  while $\neg T(x(i))$
    $i := i + 1$
  end
  $SORSZ := i$
eljárás vége

4. Lin. keresés

Input	:	$n \in \mathbb{N},\ x \in H^n,\ T : H \to \mathbb{L}$
Output	:	$VAN \in \mathbb{L},\ SORSZ \in \mathbb{N}$
Q	:	–
R	:	$VAN \equiv (\exists i\ \ (1 \leq i \leq n) : T(x_i)) \wedge$
		$\wedge (VAN \Longrightarrow (1 \leq SORSZ \leq n) \wedge T(x_{SORSZ}))$

Az algoritmus:

Függvény:

$T : elemtípus \to \mathbb{L}$

Változók:

n : egész {a feldolgozandó sorozat elemszáma}

x : tömb(1..n:elemtipus) {a feldolgozandó sorozat elemei}

VAN : logikai {az eredmény - van-e megfelelő elem}

$SORSZ$: egész {az eredmény -a megfelelő elem sorszáma}

keresés$(n, x, VAN, SORSZ)$
  $i := 1$
  while $(i \leq n) \wedge (\neg T(x(i)))$
    $i := i + 1$
  end
  $VAN := (i \leq n)$
  if VAN **then** $SORSZ := i$
eljárás vége

5. Megszámolás

Input	:	$n \in \mathbb{N}_0$, $x \in H^n$, $T : H \to \mathbb{L}$, $\chi : H \to \{0, 1\}$
		$\chi(x) = 1$, ha $T(x)$ és $\chi(x) = 0$, ha $\neg T(x)$
Output	:	$DB \in \mathbb{N}_0$
Q	:	–
R	:	$DB = \sum_{i=1}^{n} \chi(x_i)$

Az algoritmus:

Függvény:

T : *elemtípus* $\to \mathbb{L}$

Változók:

n : egész {a feldolgozandó sorozat elemszáma}

x : tömb(1..n:elemtipus) {a feldolgozandó sorozat elemei}

DB : egész {az eredmény -a megfelelő elemek száma}

megszámolás(n, x, DB)
  $DB := 0$
  for $i = 1 : n$
    if $T(x(i))$ **then** $DB := DB + 1$
  end
eljárás vége

6. Maximum.

Input	:	$n \in \mathbb{N}_0$, $x \in H^n$, H rendezett halmaz ($\exists <, \leq$ reláció)
Output	:	$MAX \in \mathbb{N}$
Q	:	$n \geq 1$
R	:	$1 \leq MAX \leq n \wedge \forall i \ (1 \leq i \leq n) : x_{MAX} \geq x_i$

Az algoritmus:

Változók:

n : egész {a feldolgozandó sorozat elemszáma}

x : tömb(1..n:elemtipus) {a feldolgozandó sorozat elemei}

MAX : egész {a maximális értékű elem sorszáma}

```
maximumkiválasztás(n, x, MAX)
  MAX := 1
  for i = 2 : n
    if x(MAX) < x(i) then MAX := i
  end
eljárás vége
```

Összetett algoritmusok

7. Másolás

Input	:	$n \in \mathbb{N}_0,\ x \in H^n,\ f : H \to G$
Output	:	$y \in G^n$
Q	:	$--$
R	:	$\forall i\ (1 \le i \le n) : y_i = f(x_i)$

Az algoritmus:

Függvény:

$f : H - elemtípus \to G - elemtípus$

Változók:

n : egész {a feldolgozandó sorozat elemszáma}
x : tömb(1..n:H-elemtipus) {a feldolgozandó sorozat elemei}
y : tömb(1..n:G-elemtípus) {a feldolgozott sorozat}

A megoldás:

```
másolás(n, x, y)
  for i = 1 : n
    y(i) := f(x(i))
  end
eljárás vége
```

8. Kiválogatás

Input	:	$n \in \mathbb{N}_0,\ x \in H^n,\ T : H \to \mathbb{L},\ \chi : H \to \{0,1\}$
		$\chi(x) = 1$, ha $T(x)$ és $\chi(x) = 0$, ha $\neg T(x)$
Output	:	$DB \in \mathbb{N}_0,\ y \in [1..n]^n$
Q	:	–
R	:	$DB = \sum_{i=1}^{n} \chi(x_i) \wedge y \subset [1..n] \wedge$
		$\wedge\ \forall i\ (1 \le i \le DB) : T(x_{y_i})$

Az algoritmus:

Függvény:

T : *elemtípus* $\to \mathbb{L}$

Változók:

n : egész {a feldolgozandó sorozat elemszáma}

x : tömb(1..n:elemtipus) {a feldolgozandó sorozat elemei}

DB : egész {a megfelelő elemek száma}

y : tömb(1..n:egész) {a megfelelő elemek sorszámai}

A megoldás:

kiválogatás(n, x, DB, y)
  $DB := 0$
  for $i = 1 : n$
    if $T(x(i))$ **then**
      $DB := DB + 1$
      $Y(DB) = i$
    end
  end
eljárás vége

Feladat: Módosítsuk a feladatot és az algoritmust, hogy ne a sorszámokat, de magukat az elemeket gyüjtse ki.

9. Szétválogatás

Input	:	$n \in \mathbb{N}_0,\ x \in H^n,\ T : H \to \mathbb{L},\ \chi : H \to \{0,1\}$
		$\chi(x) = 1$, ha $T(x)$ és $\chi(x) = 0$, ha $\neg T(x)$
Output	:	$DBY, DBZ \in \mathbb{N}_0,\ y, z \in H^n$
Q	:	–
R	:	$DBY = \sum_{i=1}^{n} \chi(x_i) \wedge y \subset x \wedge \forall i\ (1 \le i \le DBY) : T(y_i) \wedge$
		$\wedge\ DBZ = n - DBY \wedge z \subset x \wedge \forall i\ (1 \le i \le DBZ) : \neg T(z_i)$

Az algoritmus:

Függvény:

T : *elemtípus* $\to \mathbb{L}$

Változók:

n : egész {a feldolgozandó sorozat elemszáma}

x : tömb(1..n:elemtipus) {a feldolgozandó sorozat elemei}

DBY, DBZ : egész {a megfelelő sorozatok elemszámai}

y, z : tömb(1..n:elemtípus) {a megfelelő sorozatok elemei}

A megoldás:

```
szétválogatás(n, x, DBY, y, z, DBZ)
  DBY, DBZ := 0, 0
  for i = 1 : n
    if T(x(i)) then
      DBY := DBY + 1
      Y(DBY) = x(i)
    else
      DBZ := DBZ + 1
      Z(DBZ) = x(i)
    end
  end
eljárás vége
```

10.Rendezés

Input	:	$n \in \mathbb{N}_0,\ x \in H^n$
Output	:	$x \in H^n$
Q	:	–
R	:	x_{ki} rendezett és $x_{ki} = permutáció\,(x_{be})$

Az algoritmus:

Változók:

n : egész {a feldolgozandó sorozat elemszáma}

x : tömb(1..n:elemtipus) {a feldolgozandó sorozat elemei}

rendezés(n, x)
  for $i = 1 : n - 1$
    for $j = i + 1 : n$
      if $x(i) > x(j)$ **then** $csere\,(x(i), x(j))$
    end
  end
eljárás vége

11.Keresés

Input	:	$n \in \mathbb{N},\ x \in H^n,\ y \in H$
Output	:	$VAN \in \mathbb{L},\ SORSZ \in \mathbb{N}_0$
Q	:	$rendezett\,(x)$
R	:	$VAN \equiv (\exists i\ \ (1 \leq i \leq n) : x_i = y) \wedge$
		$\wedge VAN \Longrightarrow (1 \leq SORSZ \leq n) \wedge x_{SORSZ} = y$

Az algoritmus:

Változók:

n : egész {a feldolgozandó sorozat elemszáma}

x : tömb(1..n:elemtipus) {a feldolgozandó sorozat elemei}

y : elemtipus { a keresett elem}

VAN : logikai {az eredmény - van-e megfelelő elem}

$SORSZ$: egész {az eredmény -az elem sorszáma}

A megoldó algoritmus:

keresés$(n, x, y, VAN, SORSZ)$
  $i := 1$
  while $(i \leq n) \wedge (x\,(i) < y)$
    $i := i + 1$
  end
  $VAN := (i \leq n) \wedge (x\,(i) = y)$
  if VAN **then** $SORSZ := i$
eljárás vége