Direkt szorzat

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges halmazok direkt, vagy Descartes féle szorzata:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i,\ i = 1, \ldots n\}.$$

Jelölés: $\times_{i=1}^{n} A_i$.
A direkt szorzat elemei rendezett elem *n-esek*.

Definíció

Legyenek A és B tetszőleges halmazok. Tetszőleges $S \subseteq A \times B$ részhalmazt (bináris) relációnak nevezzük. Az $a \in A$ és $b \in B$ elemek S relációban állnak egymással (jelölés aSb) akkor és csak akkor, ha $(a, b) \in S$.
A definíció rövidebben:

$$aSb \Longleftrightarrow (a, b) \in S.$$

Definíció

Reláció értelmezési tartománya:

$$D_S = \{a \in A \mid \exists b \in B : (a, b) \in S\}.$$

Definíció

Reláció értékkészlete:

$$R_S = \{b \in B \mid \exists a \in A : (a, b) \in S\}.$$

Definíció

Reláció értéke agy adott helyen:

$$S(a) = \{b \in B \mid (a, b) \in S\}.$$

Definíció

Az S relációt determinisztikus, vagy parciális függvénynek nevezzük, ha

$$|S(a)| \leq 1 \quad (\forall a \in A).$$

Definíció

Az S relációt függvénynek nevezzük, ha

$$|S(a)| = 1 \quad (\forall a \in D_S).$$

Definíció

Az $S^{(-1)}$ reláció az $S \subseteq A \times B$ reláció inverze, ha

$$S^{(-1)} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in S\}.$$

Definíció

A $H \subseteq B$ halmaz S reláció szerinti inverz képe:

$$S^{(-1)}(H) = \{a \in A \mid S(a) \cap H \neq \emptyset\}.$$

Definíció

Az

$$R^{-1}(H) = \{a \in D_R | R(a) \subseteq H\}$$

halmazt a H halmaz R reláció szerinti ősképének nevezzük.

Definíció

Az $R \subseteq A \times C$ reláció a $P \subseteq A \times B$ és $Q \subseteq B \times C$ relációk kompozíciója (szorzata) (jelölés: $R = Q \circ P$), ha

$$R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a, b) \in P \wedge (b, c) \in Q\}.$$

Definíció

Legyen $R \subseteq A \times A$ és $n \in \mathbb{N}$. Az R reláció n-edik hatványa $(n \geq 1)$:

$$\begin{aligned} R^{(n)} = \; & \{(a, a') \in A \times A \mid \exists a_0, a_1, \ldots, a_n \in A : \\ & (\forall i \in [1..n] : (a_{i-1}, a_i) \in R) \wedge a_0 = a \wedge a_n = a'\}. \end{aligned}$$

Definíció

Legyen A $(A \neq \emptyset)$ egy tetszőleges halmaz. Ekkor

$$\alpha = \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \rangle$$

$(\alpha_i \in A)$ egy A-beli véges sorozat.

Definíció

Az $\alpha = \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \rangle$ véges sorozat hossza $|\alpha|$.

Definíció

Az A halmazbeli véges sorozatok halmaza A^*.

Definíció

A-beli végtelen sorozat:

$$\alpha = \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots \rangle,$$

ahol $\alpha_i \in A$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén.

Definíció

A-beli végtelen sorozatok halmaza A^∞.

Definíció

Az A-beli véges és végtelen sorozatok halmaza A^{**}.

Definíció

Az $\alpha \in A^{**}$ sorozat értelmezési tartománya D_α, ahol

$$D_\alpha = \begin{cases} [1..|\alpha|], & \text{ha } \alpha \in A^* \\ \mathbb{N}, & \text{ha } \alpha \in A^\infty \end{cases}$$

Definíció

Az $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1} \in A^*$ és $\alpha^n \in A^{**}$ sorozatok egymásután írása, konkatenációja

$$kon\left(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}, \alpha^n\right).$$

Definíció

Egy $\alpha \in A^{**}$ sorozat redukáltja az a sorozat, amelyet úgy kapunk, hogy az α sorozat minden azonos elemből álló véges részsorozatát a részsorozat egyetlen elemével helyettesítjük.
Jelölése: $red(\alpha)$.

Definíció

Utolsó elem függvény $\tau : A^* \to A$, ahol $\tau(\alpha) = \alpha_{|\alpha|}$ $(\alpha \in A^*)$.

Definíció

Legyen $m, n \in \mathbb{N}, m \leq n, 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_m \leq n$,
$A = \times_{i=1}^{n} A_i$ és $B = \times_{j=1}^{m} A_{i_j}$. A $pr_B : A \to B$ függvényt projekciónak nevezzük (A ortogonális projekciója B-re), ha

$$pr_B(a) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}) \quad (\forall a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A).$$

Definíció

(Projekció kiterjesztése „terek” direkt szorzataira): Legyen A és B olyan, mint az előző definícióban, $(a_1, a_2) \in A \times A$. Ekkor

$$pr_B((a_1, a_2)) = (pr_B(a_1), pr_B(a_2)) \in B \times B.$$

Definíció

(Projekció kiterjesztése „sorozatterekre”): Legyen A és B olyan, mint az előző definícióban, $\alpha = \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots \rangle \in A^{**}$. Ekkor

$$pr_B(\alpha) = \langle pr_B(\alpha_1), pr_B(\alpha_2), \ldots, pr_B(\alpha_i), \ldots \rangle \in B^{**}.$$

vagy másképp:

$$pr_B(\alpha) = \beta \in B^{**}, \text{ ahol } \beta_i = pr_B(\alpha_i) \quad (\forall i \in D_\beta = D_\alpha).$$

Definíció

Az $R \subseteq A \times A$ reláció lezártján az $\overline{R} \subseteq A \times A$ relációt értjük, amelyre

$$D_{\overline{R}} = \{a \in A \mid \nexists \alpha \in A^{\infty} : (a, \alpha_1) \in R \wedge \forall i \in \mathbb{N} : (\alpha_i, \alpha_{i+1}) \in R\}$$

és minden $a \in D_{\overline{R}}$ esetén

$$\overline{R}(a) = \left\{ b \in A \mid b \notin D_R \wedge \exists k \in \mathbb{N}_0 : b \in R^{(k)}(a) \right\}.$$

Definíció

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges véges, vagy megszámlálhatóan végtelen halmazok. Az $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ halmazt állapottérnek nevezzük, az A_i halmazokat pedig tipusértékhalmazoknak.

Definíció

Legyen A állapottér. Az $F \subseteq A \times A$ relációt (programozási) feladatnak nevezzük.

Definíció

Az $S \subseteq A \times A^{**}$ relációt programnak nevezzük, ha

1. $D_S = A$,
2. $\forall a \in A : \forall \alpha \in S(a) : \alpha_1 = a$,
3. $\forall \alpha \in R_S : \alpha = red(\alpha)$.

Definíció

A $p(S) \subseteq A \times A$ relációt az $S \subseteq A \times A^{**}$ program programfüggvényének nevezzük, ha

1. $D_{p(S)} = \{a \in A \mid S(a) \subseteq A^{*}\}$,
2. $p(S)(a) = \{b \in A \mid \exists \alpha \in S(a) : \tau(\alpha) = b\}$.

Definíció

Az $S \subseteq A \times A^{**}$ program megoldja az $F \subseteq A \times A$ feladatot, ha

1. $D_F \subseteq D_{p(S)}$,
2. $\forall a \in D_F : p(S)(a) \subseteq F(a)$.

Definíció

Legyen $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ állapottér. A $pr_{A_i} : A \to A_i$ projekciós függvényeket változóknak nevezzük:

$$pr_{A_i}(a) = a_i \quad (\forall a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A).$$

Definíció

Legyen $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ állapottér. A $pr_{A_i} : A \to A_i$ projekciós függvényeket változóknak nevezzük:

$$pr_{A_i}(a) = a_i \quad (\forall a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A).$$

Definíció

Legyen a B állapottér altere az A állapottérnek. Az $F' \subseteq A \times A$ relációt az $F \subseteq B \times B$ feladat kiterjesztésének nevezzük, ha

$$F' = \{(x, y) \in A \times A \mid (pr_B(x), pr_B(y)) \in F\}.$$

Definíció

Legyen a B állapottér altere az A állapottérnek, és jelölje B' a B kiegészítő alterét A-ra. Legyen továbbá S program a B állapottéren. Ekkor az S' A-beli relációt az S program kiterjesztésének nevezzük, ha

$$\begin{aligned} S'(a) = &\{\alpha \in A^{**} | pr_B(\alpha) \in S(pr_B(a)) \\ &\text{és } \forall i \in D_\alpha : pr_{B'}(\alpha_i) = pr_{B'}(a)\}. \end{aligned}$$

Tétel

Legyen a B állapottér altere az A állapottérnek, és jelölje B' a B kiegészítő alterét A-ra. Legyen továbbá S program a B állapottéren, és S' az S kiterjesztése A-ra. Ekkor S' program.

Bővített identitás

Legyen B altere A-nak, B' a B kiegészítő altere A-ra, $G \subseteq A \times A$ feladat. A G bővített identitás B' felett, ha minden $(a, a') \in G$ esetén létezik $a'' \in A$, hogy $(a, a'') \in G$ és $pr_{B'}(a) = pr_{B'}(a'')$ és $pr_B(a') = pr_B(a'')$.

Vetítéstartás

Legyen B altere A-nak, $G \subseteq A \times A$ feladat. A G vetítéstartó B felett, ha minden $a_1, a_2 \in D_G$ esetén

$$pr_B(a_1) = pr_B(a_2) \Rightarrow pr_B(G(a_1)) = pr_B(G(a_2)).$$

Félkiterjesztés

Legyen B altere A-nak, $G \subseteq A \times A$ feladat, $H \subseteq B$. Azt mondjuk, hogy a G félkiterjesztés H felett, ha $pr_B^{-1}(H) \subseteq D_G$.

Tétel

Legyen B altere A-nak, B' a B kiegészítő altere A-ra, S program B-n, $F \subseteq B \times B$ feladat, S' illetve F' S-nek illetve F-nek a kiterjesztése A-ra. Legyen továbbá $\overline{F} \subseteq A \times A$ olyan feladat, melyre $pr_B(\overline{F}) = F$ és $\overline{S}$ pedig olyan program, amely ekvivalens S-sel B-n. Ekkor az alábbi állítások teljesülnek:

(1) ha S' megoldása F'-nek, akkor S megoldása F-nek,

(2) ha S' megoldása $\overline{F}$-nek, akkor S megoldása F-nek,

(3) ha $\overline{S}$ megoldása F'-nek, akkor S megoldása F-nek,

(4) ha $\overline{S}$ megoldása $\overline{F}$-nek és $p(\overline{S})$ vetítéstartó B felett, vagy $\overline{F}$ félkiterjesztés D_F felett, akkor S megoldása F-nek,

(5) ha S megoldása F-nek, akkor S' megoldása F'-nek,

(6) ha S megoldása F-nek és $\overline{F}$ bővített identitás B' felett és vetítéstartó B felett, akkor S' megoldása $\overline{F}$-nek,

(7) ha S megoldása F-nek és $p(\overline{S})$ félkiterjesztés D_F felett, akkor $\overline{S}$ megoldása F'-nek

Megoldás általánosítása

Legyen $F \subseteq A \times A$ feladat és $S \subseteq B \times B^{**}$ program. Azt mondjuk, hogy a S megoldása F-nek, ha létezik olyan C állapottér, aminek A és B is altere és S kiterjesztése C-re az F C-re való kiterjesztésének megoldása.

Definíciók:

- Logikai értékek halmaza: $\mathbb{L} = \{igaz, hamis\} = \{i, h\}$.
- Az A halmazon értelmezett (logikai) állítás egy $Q : A \to \mathbb{L}$ függvény.
- Legyen Q az A halmazon értelmezett állítás. A Q állítás igazsághalmaza:
$$[Q] = \{a \in A \mid Q(a) = igaz\}.$$
- Legyenek Q_1 és Q_2 az A halmazon értelmezett állítások. A Q_1 és Q_2 állítások ekvivalensek, ha $[Q_1] = [Q_2]$. Jelölés: $Q_1 \equiv Q_2$.
- Legyen $R \subseteq A$ tetszőleges részhalmaz. $P(R)$ olyan állítást jelöl, amelyre $[P(R)] = R$.

Következmény:

Tetszőleges Q állításra igaz, hogy $Q \equiv P([Q])$.

Definíció

Legyenek P és Q az A halmazon értelmezett állítások. A következő logikai műveleteket definiáljuk, un. igazságtáblával:

1. $P \wedge Q$ (konjunkció / és / logikai szorzás):

P	i	i	h	h
Q	i	h	i	h
$P \wedge Q$	i	h	h	h

   A $P \wedge Q$ állítás igaz $\Longleftrightarrow$ P és Q is igaz;

2. $P \vee Q$ (diszjunkció / vagy / logikai összeadás):

P	i	i	h	h
Q	i	h	i	h
$P \vee Q$	i	i	i	h

   A $P \vee Q$ állítás igaz $\Longleftrightarrow$ P és Q közül legalább az egyik igaz;

Definíció

Legyenek P és Q az A halmazon értelmezett állítások. A következő logikai műveleteket definiáljuk, un. igazságtáblával:

3 $\neg Q$ (negáció / tagadás):

Q	i	h
$\neg Q$	h	i

A $\neg Q$ állítás igaz $\iff$ Q hamis, az állítás hamis $\iff$ Q igaz;

4 $P \Rightarrow Q$ (implikáció / következés / ha P, akkor Q):

P	i	i	h	h
Q	i	h	i	h
$P \Rightarrow Q$	i	h	i	i

A $P \Rightarrow Q$ állítás hamis$\iff$ P igaz és Q hamis.

Állítás

Legyenek P és Q az A halmazon értelmezett állítások. Ekkor

(i) $[P \wedge Q] = [P] \cap [Q]$;

(ii) $[P \vee Q] = [P] \cup [Q]$;

(iii) $[\neg Q] = A \setminus [Q]$

(iv) Ha $P \Rightarrow Q$, akkor $[P] \subseteq [Q]$.

Definíció

Legyen $S \subseteq A \times A^{**}$ program, R az A állapottéren értelmezett állítás. Az S program R utófeltételhez tartozó leggyengébb előfeltétele az $lf\,(S, R)$ állítás, amelyre

$$[lf\,(S, R)] = \left\{ a \in D_{p(S)} \mid p\,(S)\,(a) \subseteq [R] \right\}.$$

Tétel (Dijkstra)

Legyen $S \subseteq A \times A^{**}$ program, R és Q az A halmazon értelmezett állítások, és $HAMIS$ az azonosan hamis állítás. Ekkor

1. $lf(S, HAMIS) = HAMIS$,
2. Ha $Q \Rightarrow R$, akkor $lf(S, Q) \Rightarrow lf(S, R)$,
3. $lf(S, Q) \wedge lf(S, R) = lf(S, Q \wedge R)$,
4. $lf(S, Q) \vee lf(S, R) \Rightarrow lf(S, Q \vee R)$

Definíció

Legyen $F \subseteq A \times A$ feladat. A B halmazt a feladat paraméterterének nevezzük, ha van olyan $F_1 \subseteq A \times B$ és $F_2 \subseteq B \times A$ reláció, hogy $F = F_2 \circ F_1$.

Specifikáció tétele

Legyen $F \subseteq A \times A$ feladat, B az F egy paramétertere, $F_1 \subseteq A \times B$, $F_2 \subseteq B \times A$ és $F = F_2 \circ F_1$. Legyen $b \in B$ és legyenek Q_b és R_b olyan állítások, amelyek igazsághalmazai

$$[Q_b] = \{a \in A \mid (a, b) \in F_1\} = F_1^{(-1)}(b),$$

$$[R_b] = \{a \in A \mid (b, a) \in F_2\} = F_2(b).$$

Ha minden $b \in B$ esetén $Q_b \Rightarrow lf(S, R_b)$, akkor az S program megoldja az F feladatot.