

Uniwersytet Warszawski, Wydział Filozofii

Grzegorz Łojek

nr.indeksu: 432235

## **Model podwójnego czynnika: porównanie metod rotacji**

Praca licencjacka na kierunku kognitywistyka

Praca wykonana pod kierunkiem:

Dr hab. Piotra Pokarowskiego

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

Warszawa, wrzesień 2023

---

## **Streszczenie**

Praca zawiera całą wiedzę potrzebną do zrozumienia metod rotacji dla modelu podwójnego czynnika. W tym celu przedstawiono: modele czynnikowe, problem ładunków krzyżowych, metody ekstrakcji czynników oraz metody rotacji czynników. Następnie omówiono metody rotacji dla modeli podwójnego czynnika oraz wybrane miary rzetelności czynników. Potem przedstawiono wyniki porównania działania metod dla określonych danych. Odzwierciedlały one zależności wskazane przez innych badaczy.

## **Słowa kluczowe**

Model podwójnego czynnika, rotacje czynników, analiza czynnikowa, miary rzetelności czynników.

## **Tytuł w języku angielskim**

The comparison of modern rotations methods for bifactor model.

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>1</b>
1.1	Cel i przedmiot pracy . . . . .	1
1.2	Stan badań . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Analiza czynnikowa i model podwójnego czynnika</b>	<b>1</b>
2.1	Analiza czynnikowa eksploracyjna i konfirmacyjna . . . . .	1
2.2	Idea analizy czynnikowej . . . . .	2
2.3	Modele jednoczynnikowe . . . . .	2
2.4	Modele wieloczynnikowe . . . . .	3
2.5	Ładunki krzyżowe . . . . .	3
2.6	Modele wyższego rzędu . . . . .	4
2.7	Modele podwójnego czynnika . . . . .	4
2.8	Opis matematyczny analizy czynnikowej . . . . .	5
2.9	Dobór ilości czynników . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Metody ekstrakcji czynników</b>	<b>7</b>
3.1	Metoda głównych osi . . . . .	7
3.2	Metoda minimalnych reszt . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Rotacje - metody poprawy wyjaśnialności modelu czynnikowego</b>	<b>9</b>
4.1	Prosta struktura . . . . .	9
4.2	Złożona struktura . . . . .	9
4.3	Schematy przedstawiające proste i złożone struktury . . . . .	10
4.4	Przeprowadzanie rotacji analitycznych . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Rotacje podwójnego czynnika</b>	<b>10</b>
5.1	procedura Schmidta-Leimana . . . . .	10
5.2	Bi-quartimin . . . . .	11
5.3	Bi-geomin . . . . .	11
5.4	Celowa rotacja podwójnego czynnika . . . . .	12
5.5	Schmidt-Leiman iteracyjny (SLi) . . . . .	13
5.6	Iteracyjne empiryczne rotacje celowe oparte na wstępnym rozwiązaniu Schmidta-Leimana (SLiD) . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Miary rzetelności czynników</b>	<b>15</b>
6.1	Miary dopasowania modeli podwójnego czynnika . . . . .	15
6.2	Omega całkowita $\omega_t$ (total) . . . . .	15
6.3	Omega hierarchiczna $\omega_h$ . . . . .	16
6.4	współczynnik wyjaśnionej wspólnej wariancji $ECV$ . . . . .	17

---

6.5	Miary rzetelności czynników, a rotacje ukośne . . . . .	17
<b>7</b>	<b>Porównanie na danych</b>	<b>18</b>
7.1	Metody . . . . .	19
7.2	Wyniki część 1 . . . . .	20
7.3	Wyniki część 2 . . . . .	22
<b>8</b>	<b>Dyskusja</b>	<b>24</b>
<b>9</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>26</b>

---

# **1 Wstęp**

## **1.1 Cel i przedmiot pracy**

Praca ma na celu przedstawić różnice pomiędzy współczesnymi metodami rotacji modeli podwójnego czynnika. Odbywa się to poprzez omówienie, na czym polegają poszczególne metody oraz jakie wyniki dają dla określonych danych. W tym celu zostanie przybliżona cała potrzebna wiedza do zrozumienia poszczególnych metod rotacji oraz zostaną przedstawione i omówione wyniki, jakie dają rotacje dla danych posiadających strukturę podwójnego czynnika.

## **1.2 Stan badań**

Model podwójnego czynnika po raz pierwszy został zaproponowany przez Holzingera w 1937 roku w kontekście badań nad inteligencją dzieci (Holzinger i Swineford 1937). Pierwotna metoda miała charakter confirmacyjny (Jennrich i Bentler 2011), 20 lat później opracowano procedurę Schmidta - Leimana (Schmid i Leiman 1957), która stała się powszechnym eksploracyjnym sposobem uzyskiwania modeli podwójnego czynnika. Dopiero w 2011 roku niejako odkryto na nowo modele podwójnego czynnika (Reise 2012) i opracowano nową metodę rotacji modeli podwójnego czynnika (Jennrich i Bentler 2011). W 2012 opracowano kolejne 4 metody rotacji: poprzednią metodę w odmianie ukośnej, nową metodę w odmianie ukośnej i ortogonalnej oraz opracowano procedurę uzyskiwania modeli podwójnego czynnika przy użyciu rotacji celowych (Jennrich i Bentler 2012; Reise 2012). Od tamtego czasu popularność modeli podwójnego czynnika wzrosła (Garcia-Garzon, Abad i i Garrido 2019). Później rozwinęto metodę zapoczątkowaną przez Reise'a i opracowano iteracyjne empiryczne rotacje celowe oparte na wstępnym rozwiązaniu Schmidta-Leimana (Garcia-Garzon, Abad i i Garrido 2019). Dokonano porównania współczesnych metod rotacji podwójnego czynnika przy pomocy metod Monte Carlo, co umożliwiło ewaluację używanych metod (Garcia-Garzon, Abad i i Garrido 2021).

# **2 Analiza czynnikowa i model podwójnego czynnika**

## **2.1 Analiza czynnikowa eksploracyjna i confirmacyjna**

Aktualnie analizę czynnikową dzielimy na eksploracyjną (EFA) oraz confirmacyjną (CFA). Po uzyskaniu nowych metod rotacji modeli podwójnego czynnika mówi się także o EBFA (albo BEFA (Garcia-Garzon, Abad i i Garrido 2021), czyli eksploracyjnej analizie czynnikowej modelu podwójnego czynnika (Jennrich i Bentler 2011). Zakłada się, że EFA to analiza nieposiadająca wcześniejszych założeń o modelu, które w jakiś sposób zmieniają, używaną w obliczeniach, macierz kowariancji. Z kolei o CFA mówimy wtedy, kiedy

założenia o modelu pozwalają na jednoznaczne wyznaczenie macierzy ładunków oraz macierzy korelacji między czynnikami (Jennrich 2007). Istnieją także metody hybrydowe, o których nie można jednoznacznie powiedzieć, że należą do EFA oraz CFA. Przykładem takich metod są rotacje z częściowo wyznaczonym celem.

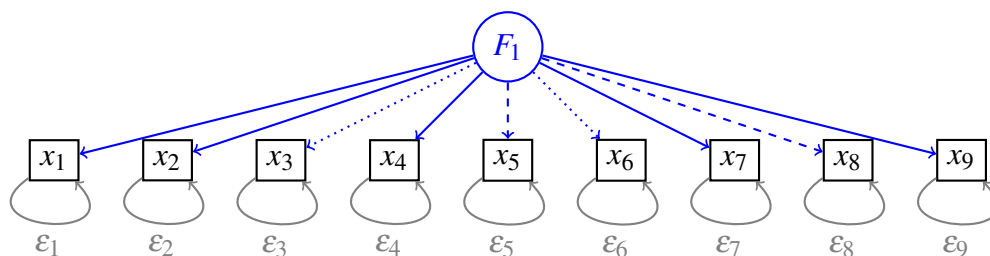
## 2.2 Idea analizy czynnikowej

Aby zrozumieć ideę analizy czynnikowej, warto przyjrzeć się jakim kontekście została opracowana. Wymyślenie analizy czynnikowej przypisuje się Charlesowi Spearmanowi (Spearman 1904). Swoje badania skupiał na inteligencji i początkowo zauważył, że dzieci, które radziły sobie lepiej w określonych przedmiotach prowadzonych w szkołach, radziły sobie równie dobrze w innych. Ta obserwacja była dla niego podstawą do postawienia hipotezy, że za zdolności naukowe dzieci odpowiada ukryta zmienna, którą zidentyfikował jako inteligencję ogólną.

Na podstawie obserwacji Spearmana można zauważyć, na czym polega idea analizy czynnikowej. Analiza czynnikowa ma na celu ujawnienie, w jakim stopniu za wartości obserwowanych zmiennych wpływają ukryte zmienne. Na podstawie tego można doszukiwać się interpretacji latentnych czynników oraz konstruować odpowiednie wskaźniki pozwalające na optymalny pomiar. W przypadku Spearmana ukrytą zmienną była inteligencja, a obiektem badań były wyniki w nauce uczniów szkolnych.

## 2.3 Modele jednoczynnikowe

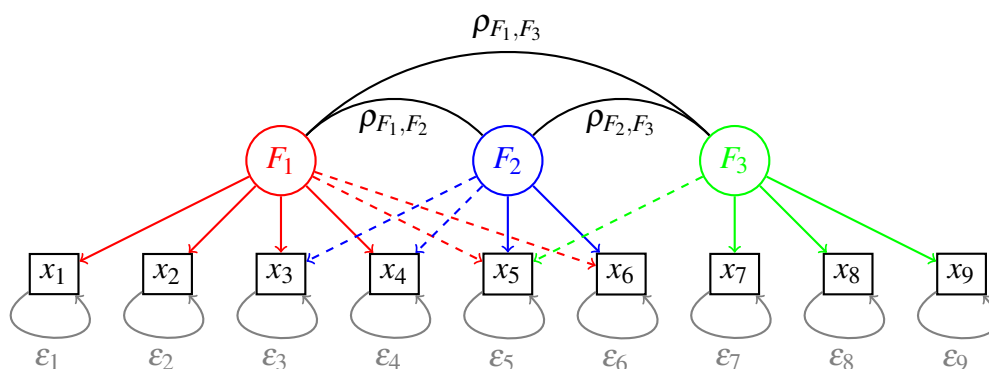
Analiza jednoczynnikowa była pierwotną wersją analizy czynnikowej zaproponowanej przez Spearmana. Zakłada istnienie jednego czynnika wspólnego, który oddziałuje na badane zmienne oraz wielu czynników specyficznych, które wyjaśniają odchylenia wartości obserwowanych zmiennych. Schemat przedstawiający model jednoczynnikowy znajduje się na rysunku 1.



Rysunek 1: Kwadraty z oznaczeniem  $X_n$  odpowiadają obserwowanym zmiennym,  $F_1$  odpowiada czynnikowi wspólnemu,  $\epsilon_n$  odpowiadają czynnikom specyficznym. Na schemacie widać, że czynnik oddziałuje na każdą ze zmiennych w różnym stopniu, oraz że zmienne posiadają swoje czynniki specyficzne, które tłumaczą odchylenia wartości względem udziału czynnika wspólnego.

## 2.4 Modele wieloczynnikowe

Teoria modeli jednoczynnikowych została rozszerzona przez Thurstone'a na modele wieloczynnikowe (Thurstone 1931). Ze względu na dużą skuteczność, zyskały one ogromną popularność i stały się główną metodą analizy czynnikowej. Wyróżniamy dwa rodzaje modeli wieloczynnikowych - czynników niezależnych i ukośnych. Założenie o niezależności czynników umożliwia prostą interpretację, jednak nie jest ona optymalna, gdyż rzadko dane odzwierciedlają idealną strukturę o niezależnych czynnikach. Z tego powodu lepszym rozwiązaniem jest ukośna analiza czynnikowa, zakładająca zależność czynników między sobą. Ta metoda daje znacznie lepsze wyniki, jednak ich interpretacja jest trudniejsza ze względu na występowanie tak zwanych ładunków krzyżowych. Model czynnikowy wielu czynników ukośnych przedstawiony jest na rysunku 2.



Rysunek 2: Kwadraty z oznaczeniem  $X_n$  odpowiadają obserwowanym zmiennym, okręgi z oznaczeniem  $F_n$  odpowiadają czynnikom wspólnym,  $\varepsilon_n$  odpowiadają czynnikom specyficznym,  $\rho_{F_n, F_m}$  odpowiadają korelacjom między czynnikami. Linia przerywaną zostały zaznaczone ładunki krzyżowe.

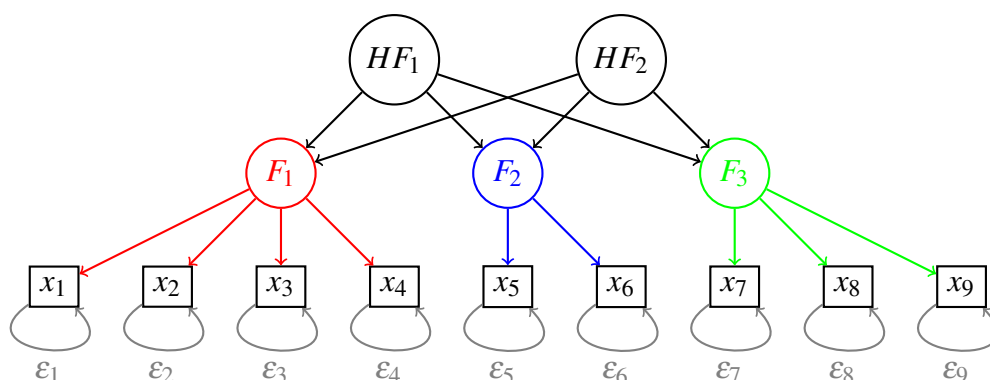
## 2.5 Ładunki krzyżowe

Ładunki krzyżowe, można określić mianem zmyły analizy czynnikowej. Utrudniają one interpretację wyników, ze względu na to, że zarówno mogą być artefaktami typowymi dla analizy czynnikowej, jak i istotnym objawem zależności między czynnikami. Przyjmuje się, że małe ładunki to takie, których wartość nie przekracza 0.3. Uznaje się je wtedy za nieznaczące (Humenny i Grygiel 2015).

Występowanie istotnie dużych ładunków krzyżowych, może wskazywać, że ma się do czynienia z jeszcze bardziej skomplikowaną strukturą, niż model wieloczynnikowy. Wtedy należy poszukiwać struktur hierarchicznych, takich jak modele wyższego rzędu, czy modele podwójnego czynnika.

## 2.6 Modele wyższego rzędu

Aby otrzymać model wyższego rzędu dla ukośnego modelu wieloczynnikowego, wystarczy wykonać analizę czynnikową, macierzy kowariancji czynników ( $\Phi$ ). W ten sposób otrzymuje się nadczynniki tłumaczące ładunki krzyżowe. Modele wyższego rzędu, są trudne w interpretacji i ze względu na abstrakcyjność nadczynników często dają niemiarodajne wyniki. Z tego powodu wymagają odpowiedniego podłoża teoretycznego oraz poparcia analizami confirmacyjnymi. Rysunek 3 przedstawia model wyższego rzędu z dwoma nadczynniki.

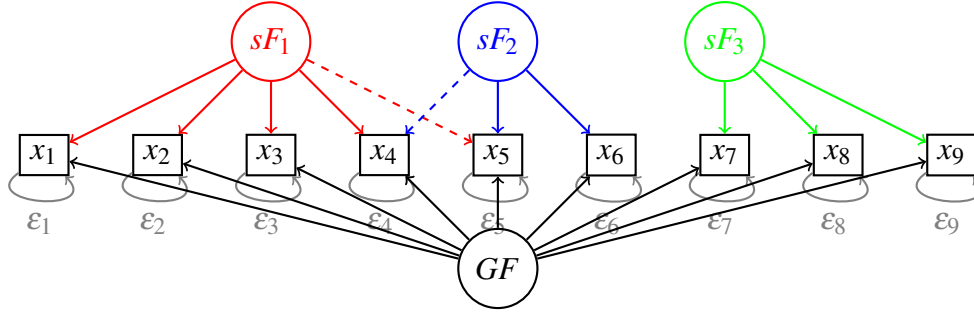


Rysunek 3: Kwadraty z oznaczeniem  $X_n$  odpowiadają obserwowanym zmiennym, okręgi z oznaczeniem  $F_n$  odpowiadają czynnikom wspólnym niższego rzędu, okręgi oznaczone  $HF_n$  odpowiadają czynnikom wyższego rzędu  $\epsilon_n$  odpowiadają czynnikom specyficznym.

## 2.7 Modele podwójnego czynnika

Modele podwójnego czynnika także posiadają strukturę hierarchiczną, dzięki czemu są w stanie tłumaczyć ładunki krzyżowe występujące w modelach wieloczynnikowych. Przez to, że są uzyskiwane w sposób bardziej bezpośredni niż modele wyższego rzędu, dają lepsze wyniki. Modele podwójnego czynnika także mogą posiadać problem ładunków krzyżowych. Dzieje się tak, kiedy wyższorzędowa struktura latentna jest wielowymiarowa (Humenny i Grygiel 2015). Oznacza to, że za zależność między czynnikami niższego rzędu odpowiada więcej niż jeden nadczynnik. Rysunek 4 przedstawia model podwójnego czynnika.





Rysunek 4: Kwadraty z oznaczeniem  $X_n$  odpowiadają obserwowanym zmiennym, okręgi z oznaczeniem  $sF_n$  odpowiadają czynnikom grupowym, okrąg z oznaczeniem  $GF$  odpowiada czynnikowi wyższego rzędu,  $\varepsilon_n$  odpowiadają czynnikom specyficznym. Na schemacie zostało zaznaczone, że modele podwójnego czynnika, także mogą posiadać ładunki krzyżowe, kiedy struktura latentna jest wielowymiarowa.

## 2.8 Opis matematyczny analizy czynnikowej

Model czynnikowy zakłada, że każdą obserwowaną zmienną -  $x$  można opisać jako sumę (Jennrich 2007):

$$x = \Lambda f + u \quad (1)$$

gdzie  $\Lambda$  to macierz ładunków,  $f$  to wektor czynników wspólnych,  $u$  to wektor czynników specyficznych. Co więcej, dla modelu czynnikowego macierz korelacji -  $R$  można opisać jako sumę:

$$R = \Lambda \Phi \Lambda^T + U^2 \quad (2)$$

gdzie  $\Phi$  to macierz kowariancji czynników wspólnych, a  $U^2$  to macierz kowariancji czynników specyficznych, która jest z założenia diagonalna.

W uzyskiwaniu modelu czynnikowego istotne są dwa kroki. Pierwszy polega na oszacowaniu  $\Lambda \Phi \Lambda^T$  oraz  $U^2$ . Ten krok nazywa się ekstrakcją czynników.

W wyniku ekstrakcji czynników otrzymuje się wstępną macierz ładunków czynnikowych -  $A$  oraz  $U^2$ . W praktyce nie zawsze da się uzyskać idealną równość między macierzą kowariancji a jej odtworzeniem, co zostanie opisane w następnych rozdziałach.

$$R \approx AA^T + U^2$$

Drugi krok to rotacja, czyli szacowanie  $\Lambda$  oraz  $\Phi$  (Jennrich 2007). W tym celu używa się macierzy  $A$  z poprzedniego kroku. Można zdefiniować macierz  $\Lambda$  jako produkt:

$$\Lambda = AT \Leftrightarrow \Lambda T^{-1} = A \quad (3)$$

gdzie  $T$  jest pewną nieosobliwą macierzą kwadratową. Przy pomocy macierzy  $T$  oblicza się macierz  $\Phi$ , gdyż:

$$AA^T = \Lambda T^{-1} T^{-T} \Lambda^T = \Lambda \Phi \Lambda^T \quad (4)$$

Z czego wynika, że:

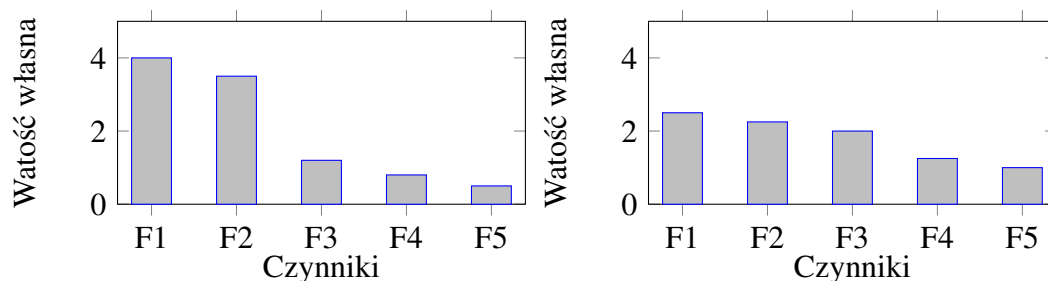
$$\Phi = T^{-1}T^{-T} \quad (5)$$

## 2.9 Dobór ilości czynników

Ekstrakcję czynników przeprowadza się dla zadanej wcześniej liczby czynników. Ustalanie optymalnej liczby czynników jest nieodłącznym elementem analizy czynnikowej. W późniejszych analizach liczba czynników jest znana, przez co nie będzie ustalana ich liczba.

Istnieje wiele sposobów na określanie liczby czynników. Można je podzielić na 3 grupy: metody klasyczne, metody stosowane w CFA, metody oparte na analizie funkcji dopasowania modelu ze względu na wartości pojedynczych parametrów (Humenny i Grygiel 2015).

Do klasycznych metod należy Kryterium Kaisera (Kaiser 1960), które polega na przyjęciu k pierwszych składowych głównych, których wartości własne są większe od 1. Analiza wykresu osypiska (Cattell 1966) także należy do tej grupy i polega na przyjęciu tych składowych, które mają wyraźnie większe wartości. W przypadku wykresu osypiska szuka się zależności takiej, że k pierwszych składowych ma znacząco większe wartości od pozostałych, co na wykresie osypiska wyraźnie widać jako skok wartości własnych kolejnych składowych. Na rysunku 5 została przedstawiona wadliwość, metody analizy wykresu osypiska.



Rysunek 5: Przykładowe wykresy osypiska, po lewej jednoznaczny, po prawej niejednoznaczny

Kryteria klasyczne nie są optymalne, jednak ze względu na prostotę są używane. Znacznie lepsze są metody oparte na analizie funkcji dopasowania.

Jedną z metod opartych na analizie funkcji dopasowania jest test jakości dopasowania chi-kwadrat. Polega na sprawdzaniu przy pomocy testu chi-kwadrat, czy odtworzona za pomocą zadanej liczby czynników macierz korelacji jest istotnie nieodróżniająca się od oryginalnej macierzy. Należy przyjąć najmniejszą liczbę czynników, dla której nie występuje istotna różnica między macierzami.

---

## 3 Metody ekstrakcji czynników

Ekstrakcja jest to iteracyjny proces uzyskiwania wstępnej macierzy czynników. Jest kilka sposobów ekstrakcji czynników, z czego najważniejsze to: metoda głównych osi (principal axes), metoda maksymalnej wiarygodności (maximum likelihood), metoda minimalnych reszt (minimal residues).

### 3.1 Metoda głównych osi

Metoda polega na przekształceniu macierzy korelacji, tak aby PCA znalazło składowe, które po odtworzeniu macierzy jak najlepiej przybliżały wartości poza diagonalą macierzy korelacji.

Procedurę rozpoczyna się od znalezienia k największych składowych przy pomocy PCA. Następnie na ich podstawie odtwarza się macierz i odejmuje się ją od pierwotnej macierzy korelacji. Z różnicy bierze się tylko diagonalę, jest ona wstępną aproksymacją macierzy kowariancji czynników specyficznych ( $U^2$ ). Następnie od macierzy korelacji odejmuje się macierz  $U^2$  i tak otrzymaną macierz  $R^*$  poddaje się kolejnej iteracji.

1.  $A \leftarrow PCA(R, k)$
2.  $U^2 = diag(R - AA^T)$
3.  $R^* = R - U^2$

Proces powtarza się do momentu, kiedy pomiędzy iteracjami nie będzie odpowiedniej różnicy między kolejnymi  $U^2$ . W rezultacie otrzymuje się macierz niezrotowanych czynników  $A$ .

Algorytm metody głównych osi napisany w R:

```
principal_axes = function(R, k, iter_lim = 100, epsilon = 10e-6){  
  U2 = diag(R)  
  for( i in 1:iter_lim){  
    Eigen = eigen(R)  
    D = Eigen$values  
    V = Eigen$vectors  
    A = diag(sqrt(D[1:k])) %*% t(V[,1:k])  
    diff = norm(U2 - diag(R - A %*% t(A)))  
    if( diff < epsilon){  
      return(A)  
    } if else( i = iter_lim - 1){  
      print("osiągnięto limit iteracji")  
      return(A)  
    }  
  }  
}
```

```

    } else{
        U2 = diag(R - A %*% t(A))
        R = R - diag(U2)
    }
}
}

```

Metody ekstrakcji służą znalezieniu takiej macierzy wstępnych czynników, dzięki której jak najlepiej można odtworzyć oryginalną macierz korelacji. Przy obliczeniach pomija się błąd na diagonalu ze względu na to, że jest on wyjaśniany przez  $U^2$ . Poniżej zostały przedstawione odtworzone (na podstawie 2 czynników) macierze korelacji, za pomocą dwóch metod: PCA oraz 5 iteracji metody osi głównych. Przedstawiono, także sumę bezwzględnego błędu poza diagonalą między odtworzoną macierzą korelacji a oryginalną.

$\begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 1 & 0.15 \\ 0.1 & 0.1 & 0.15 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.42 & 0.5 & 0.35 & -0.07 \\ 0.5 & 0.62 & 0.49 & 0.08 \\ 0.35 & 0.49 & 0.48 & 0.36 \\ -0.07 & 0.08 & 0.36 & 0.91 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.07 & 0.19 & 0.12 & 0.1 \\ 0.19 & 0.51 & 0.3 & 0.1 \\ 0.12 & 0.3 & 0.18 & 0.15 \\ 0.1 & 0.1 & 0.15 & 0.9 \end{bmatrix}$
Macierz korelacji	PCA	Główne osie - 5 iteracji
suma błędu poza diagonalą:	2.24	0.06

### 3.2 Metoda minimalnych reszt

Metoda minimalnych reszt, z założenia, bardziej skupia się na zmniejszaniu różnic poza diagonalą między odtworzoną macierzą kowariancji a oryginalną. W odróżnieniu od metody głównych osi macierz wstępnych ładunków znajduje się optymalizacyjnie (metoda głównych osi jest iteracyjna). Minimalizuje się błąd przy pomocy wstępnej macierzy ładunków (Harman i Jones 1966):

$$err = ||(R - I) - (AA^T - diag(AA^T))||_2^2 \quad (6)$$

Metoda minimalnych reszt jest domyślną metodą ekstrakcji czynników. Znajduje się w pakiecie psych w R pod nazwą minres.

---

## 4 Rotacje - metody poprawy wyjaśnialności modelu czynnikowego

Uzyskane po ekstrakcji czynniki mogą być trudne w interpretacji przez to, że różne czynniki tłumaczą te same obserwowane zmienne. W tym celu wykonuje się rotacje, które mają na celu uzyskanie prostej struktury. Rotacje, które odnajdują macierz ładunków poprzez obliczeniowe minimalizowanie określonego kryterium, nazywamy rotacjami analitycznymi.

### 4.1 Prosta struktura

Rotacje z założenia mają na celu odnalezienie jak najprostszej struktury. Prostą strukturę zaproponował Thurstone (Thurstone 1947; Browne 2001). Jest ona zdefiniowana przez 5 założeń.

1. Każdy wiersz w macierzy czynników powinien zawierać co najmniej jedno 0.
2. Każda kolumna powinna zawierać minimum tyle zer, ile jest kolumn.
3. Każde dwie kolumny powinny mieć kilka wierszy, gdzie w jednej kolumnie występuje niezerowa wartość, a w drugiej zerowa.
4. Jeżeli jest więcej lub dokładnie 4 kolumny, to dla każdej pary kolumn powinien istnieć wiersz, w których są same zera w obu kolumnach.
5. Każda para kolumn z macierzy czynników powinna mieć kilka wierszy, w których wartości są niezerowe.

### 4.2 Złożona struktura

Warto zauważyć, że nie wszystkie dane mogą być reprezentowane modelem czynnikowym o prostej strukturze. O tego typu danych mówi się, że odzwierciedlają złożoną strukturę latentną. Złożona struktura utrudnia interpretację modelu i może być podstawą do poszukiwań modeli hierarchicznych.

### 4.3 Schematy przedstawiające proste i złożone struktury

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

Bardzo prosta struktura

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & x \\ x & x & 0 & x \\ x & x & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

Prosta struktura według  
założeń Thurstone'a

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 \\ x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}$$

Złożona struktura

$$\begin{bmatrix} x & x & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 \\ x & 0 & x & 0 \\ x & 0 & x & 0 \\ x & 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

Prosta struktura modelu  
podwójnego czynnika

### 4.4 Przeprowadzanie rotacji analitycznych

Jak wspomniano w rozdziale "2.8 Opis matematyczny analizy czynnikowej" w celu uzyskania modelu czynnikowego używa się specjalnej macierzy  $T$ . Jest to macierz kwadratowa i odwracalna. W przypadku rotacji ortogonalnych macierz  $T$  dodatkowo musi być ortogonalna, dla rotacji ukośnych nie ma tego założenia.  $T$  znajduje się w sposób optymalizacyjny. Popularna jest metoda projekcji gradientowych, która posiada swoje implementacje w pakietach statystycznych (w R jest to pakiet GPArotation). Optymalizacje przeprowadza się wobec odpowiedniego kryterium rotacji.

Kryteriom rotacji odpowiadają funkcje skomplikowania, które mają na celu sprowadzenie  $\Lambda$  do prostej struktury. Oznacza się je jako  $Q(\Lambda)$ , są to funkcje przekształcające macierz ładunków w skalar. Oznacza to, że funkcje skomplikowania można, traktować jako miary złożoności modelu (Browne 2001).  $Q(\Lambda)$  posiada ograniczenie dolne, minimalna wartość to 0 i jeżeli jest ono osiągnięte, to  $\Lambda$  posiada idealnie prostą strukturę według danego kryterium rotacji.

Istnieje wiele kryteriów rotacji, z czego dokładnie zostaną omówione kryteria quartimin, geomin oraz kryterium dla rotacji celowych, gdyż są one używane w rotacjach modeli podwójnego czynnika.

## 5 Rotacje podwójnego czynnika

### 5.1 procedura Schmidta-Leimana

Procedura Schmidta-Leimana (Schmid i Leiman 1957) (w skrócie SL) długo pozostawała jedyną sensowną eksploracyjną metodą uzyskiwania modeli podwójnego czynnika (Reise 2012). SL jest przestarzałą metodą, która często nie daje odpowiednich wyników i ma tendencję do pogarszania dopasowania modelu. Na podstawie symulacji

Monte Carlo pokazano, że jest skuteczna tylko dla małej ilości czynników (do 3 czynników grupowych) i dużej liczby obserwacji (Garcia-Garzon, Abad i i Garrido 2021). Mimo tego SL pozostaje użyteczną metodą w rotacjach celowych oraz ich iteracyjnej odmianie. Służy wstępnemu wyznaczeniu macierzy celu (Garcia-Garzon, Abad i i Garrido 2019).

Model podwójnego czynnika procedurą SL uzyskuje się w 3 krokach (Jennrich i Bentler 2011):

1. Najpierw należy uzyskać model wieloczynnikowy czynników ukośnych, które daje macierz ładunków  $\Lambda$ , macierz kowariancji czynników  $\Phi$ , macierz kowariancji czynników specyficznych  $U^2$ .
2. Następnie należy uzyskać model jednoczynnikowy z macierzy  $\Phi$ , które daje wektor czynnika  $\gamma$  oraz wektor czynników specyficznych  $\Delta$
3. Wtedy można uzyskać nową macierz ładunków  $\Lambda_{SL}$ , która posiada strukturę podwójnego czynnika:

$$\Lambda_{SL} = [\Lambda\gamma, \Lambda\Delta^{1/2}] \quad (7)$$

$$R \approx \Lambda_{SL}\Lambda_{SL}^T + U^2 \quad (8)$$

## 5.2 Bi-quartimin

Rotacja bi-quartimin występuje w dwóch odmianach - ortogonalnej oraz ukośnej (Jennrich i Bentler 2011; Jennrich i Bentler 2012). Polega ona na uzyskaniu struktury podwójnego czynnika przy użyciu kryterium rotacji quartimin, dostosowanego do modelu podwójnego czynnika. Rotacje quartimin uzyskuje się poprzez minimalizowanie funkcji skomplikowania takiej postaci:

$$quartimin(\Lambda) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m \sum_{l \neq j}^m \lambda_{ij}^2 \lambda_{il}^2 \quad (9)$$

W R istnieją gotowe implementacje tej rotacji. Znajdują się one w pakietach: psych oraz GPArotations pod nazwami "bifactorT" oraz "bifactorQ", gdzie "T" w nazwie odpowiada rotacji ortogonalnej, a "Q" ukośnej.

Kryterium bi-quartimin osiąga minimum dla bardzo prostej struktury modelu podwójnego czynnika. Ten typ rotacji posiada tendencję do zawierania zbyt dużej ilości wariancji z któregoś z czynników grupowych w czynniku głównym (występuje zjawisko zapadania się czynników - factor collapse).

## 5.3 Bi-geomin

Rotacja bi-geomin, podobnie jak bi-quartimin, występuje w dwóch odmianach - ortogonalnej oraz ukośnej (Jennrich i Bentler 2012). Polega na uzyskaniu struktury

podwójnego czynnika przy użyciu kryterium rotacji geomin, dostosowanej do modelu podwójnego czynnika. Rotacje geomin uzyskujemy poprzez minimalizowanie funkcji skomplikowania takiej postaci:

$$geomin(\Lambda) = \sum_{i=1}^p \prod_{j=1}^m (\lambda_{ij}^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{m}} \quad (10)$$

Funkcja skomplikowania bi-geomin posiada parametr  $\varepsilon$ , który domyślnie jest małą wartością na przykład równą 0.01 (Jennrich i Bentler 2012). W symulacjach przeprowadzonych przez zespół Garicia-Garzona (Garcia-Garzon, Abad i i Garrido 2021) użyto parametru ustalonego na tę wartość, jednak podkreślili, że zmiana  $\varepsilon$ , może wpływać na jakość uzyskanych wyników i najlepiej jest go wyznaczyć empirycznie. Zostało pokazane, że ortogonalna rotacja bi-geomin, podobnie jak bi-quartimin, ulega zjawisku zapadania się czynników.

## 5.4 Celowa rotacja podwójnego czynnika

Jest to metoda zaproponowana przez Reise'a w 2012 roku (Reise 2012). Polega ona na rotacji celowej, czyli takiej z zadaną macierzą celu. Macierz celu narzuca, pewną strukturę macierzy ładunków, którą chcemy uzyskać. Przykładowa macierz celu dla modelu podwójnego czynnika przedstawiona jest poniżej.

$$\begin{bmatrix} ? & ? & 0 & 0 \\ ? & ? & 0 & 0 \\ ? & 0 & ? & 0 \\ ? & 0 & ? & 0 \\ ? & 0 & 0 & ? \\ ? & 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

Znaki zapytania oznaczają miejsca, które nie będą poddawane minimalizacji. Z kolei pozycje, na których występują zera, będą zmniejszane. Funkcja skomplikowania dla rotacji celowych ma postać:

$$Q(\Lambda, I_{target}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i \in I_j} (\lambda_{ij} - b_{ij})^2 \quad (11)$$

gdzie  $\lambda_{ij}$  oznacza ładunki, a  $b_{ij}$  to wartości z macierzy celu,  $I_j$  to zbiór pozycji z macierzy celu, nieposiadających ?. Z tego powodu miejsca, na których występują ?, w ogóle nie są brane pod uwagę w obliczaniu wartości funkcji skomplikowania.

Metoda zaproponowana przez Reise'a odbywa się w trzech krokach:

1. Uzyskaj macierz ładunków dla N czynników grupowych przy pomocy SL.
2. Na podstawie powyższego rozwiązania skonstruuj macierz celu. Małym wartościom



---

powinny odpowiadać 0, a reszcie ?.

3. Nową macierz wstępnych ładunków dla  $N + 1$  czynników należy poddać rotacji celowej przy pomocy wcześniej uzyskanej macierzy celu.

## 5.5 Schmidt-Leiman iteracyjny (SLi)

SLi jest ulepszeniem powyższej metody (Garcia-Garzon, Abad i i Garrido 2019). Zauważono, że proces uzyskiwania macierzy celu można powtarzać na uzyskanym rozwiązaniu, gdyż rotacja celowa ma tendencję do zmieniania struktury pierwotnie używanej macierzy ładunków. Na miejscach, w których wcześniej były niewielkie wartości po wykonaniu rotacji celowej, mogą wystąpić istotnie większe wartości. Z tego powodu powtarzanie procedury uzyskiwania macierzy celu prowadzi do różnych macierzy. SLi powtarza ten proces, aż w którejś iteracji uzyskana macierz celu będzie tą uzyskaną w poprzedniej iteracji.

Wadą tej metody jest odgórnie wyznaczany, stały próg, dla którego ładunki są uznawane za wystarczająco małe, aby w macierzy celu określić je jako zera.

## 5.6 Iteracyjne empiryczne rotacje celowe oparte na wstępnym rozwiązaniu Schmidta-Leimana (SLiD)

Z powodu, że stałe progi nie dawały odpowiednich rezultatów opracowano SLiD, czyli analogiczną procedurę bez wyznaczonego wcześniej progu. Metoda SLiD odbywa się w 4 krokach, procedura zobrazowana jest przy pomocy prostego przykładu:

0. W pierwszej iteracji należy uzyskać dwie macierze ładunków. Jedną uzyskaną przy pomocy SL dla  $N$  czynników grupowych i drugą będącą macierzą wstępnych ładunków dla  $N + 1$  czynników.

Tabela 1: Przykładowa macierz ładunków uzyskana przy pomocy SL

	<b>G</b>	<b>F1</b>	<b>F2</b>	<b>F3</b>
1	<b>-0.52</b>	-0.08	0.06	<b>-0.85</b>
2	<b>-0.73</b>	-0.09	<b>-0.68</b>	0.08
3	<b>0.4</b>	<b>-0.72</b>	0.22	0.27
4	<b>0.41</b>	<b>-0.72</b>	0.23	0.27
5	<b>0.32</b>	<b>0.91</b>	0.13	0.17
6	<b>0.31</b>	<b>0.92</b>	0.14	0.16

1. Ładunki odpowiadające wszystkim czynnikom poza głównym, należy podnieść do kwadratu, a następnie znormalizować wierszami. W pierwszej iteracji używa się

macierzy ładunków uzyskanych przy pomocy SL, w kolejnych macierzy ładunków uzyskanej w wyniku rotacji celowej.

Tabela 2: Znormalizowane kwadraty ładunków bez czynnika głównego

	<b>F1</b>	<b>F2</b>	<b>F3</b>
1	0.01	0	<b>0.99</b>
2	0.02	<b>0.97</b>	0.01
3	<b>0.81</b>	0.08	0.11
4	<b>0.8</b>	0.08	0.11
5	<b>0.95</b>	0.02	0.03
6	<b>0.95</b>	0.02	0.03

2. Dla każdej kolumny z wcześniejszego kroku należy uporządkować wartości od największych do najmniejszych i zapamiętać pozycje, na których występowały.

Tabela 3: Uporządkowane kwadraty ładunków

	<b>F1</b>		<b>F2</b>		<b>F3</b>
5	<b>0.95</b>	2	<b>0.97</b>	1	<b>0.99</b>
6	<b>0.95</b>	3	0.08	3	0.11
3	<b>0.81</b>	4	0.08	4	0.11
4	<b>0.8</b>	5	0.02	5	0.03
2	0.02	6	0.02	6	0.03
1	0.01	1	0	2	0.01

3. Dla każdej wartości należy odjąć odpowiadającą wartość z wiersza niżej. W ten sposób otrzymuje się macierz, w której występują tak zwane "skoki" wartości. Ostatnia duża wartość, przed prawie zerowymi wartościami, uznawana jest za próg.

Tabela 4: macierz ze skokami, na podstawie której wybiera się nowe progi. Kandydaci na progi są pogrubieni

	<b>F1</b>		<b>F2</b>		<b>F3</b>
5	0	2	<b>0.89</b>	1	<b>0.88</b>
6	0.14	3	0	3	0
3	0.01	4	0.06	4	0.08
4	<b>0.78</b>	5	0	5	0
2	0.01	6	0.02	6	0.02
1	0.01	1	0	2	0.01

4. Na podstawie ustalonych wcześniej progów wyznaczana jest nowa macierz celu. Przy jej pomocy przeprowadza się rotację celową na macierzy wstępnych ładunków uzyskanych w kroku 0.

$$\begin{bmatrix} ? & 0 & 0 & ? \\ ? & 0 & ? & 0 \\ ? & ? & 0 & 0 \\ ? & ? & 0 & 0 \\ ? & ? & 0 & 0 \\ ? & ? & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kroki od 1 do 4 powtarza się, podobnie jak w metodzie SLi, aż do uzyskania takiej samej macierzy celu. Zostało pokazane, że metoda SLiD w zasadzie zawsze działa znacznie lepiej od SLi (Garcia-Garzon, Abad i i Garrido 2019).

## 6 Miary rzetelności czynników

Miary rzetelności czynników służą ocenie istotności czynników. Pozwalają one między innymi na określenie w jakim stopniu uzyskany model można uznać za jednowymiarowy, czy ile informacji zawiera uzyskany model.

### 6.1 Miary dopasowania modeli podwójnego czynnika

#### 6.2 Omega całkowita $\omega_t$ (total)

Jedną z miar dopasowania modelu jest omega całkowita  $\omega_t$  (McDonald 1999). Miarę tę można interpretować jako precyzję pomiaru (Humenny i Grygiel 2015).  $\omega_t$  wskazuje, ile informacji zawiera się w modelu czynnikowym względem całego testu. McDonald zdefiniował omegę jako proporcję wariancji wspólnej ( $\sigma_C$ ) do wariancji całego testu ( $\sigma_V$ ):

$$\omega_t = \frac{\sigma_C}{\sigma_V} \quad (12)$$

Miarę tę można obliczyć na dwa sposoby. Pierwszy polega na zsumowaniu ładunków odpowiadającym każdemu czynnikowi wspólnemu, a następnie zsumowaniu kwadratów tak otrzymanych wyników. Tę sumę dzieli się na analogiczny produkt dla wszystkich czynników łącznie ze specyficznymi. Można to zapisać jako:

$$\omega_h = \frac{(\sum_{i=1}^m \lambda_G)^2 + (\sum_{i=1}^j \lambda_{S1})^2 + (\sum_{i=1}^k \lambda_{S2})^2 + \dots + (\sum_{i=1}^m \lambda_{SK})^2}{(\sum_{i=1}^m \lambda_G)^2 + (\sum_{i=1}^j \lambda_{S1})^2 + (\sum_{i=1}^k \lambda_{S2})^2 + \dots + (\sum_{i=1}^m \lambda_{SK})^2 + \sum_{i=1}^m (u_i^2)} \quad (13)$$

Gdzie  $\lambda_G$  oznacza ładunki odpowiadające czynnikowi głównemu,  $\lambda_{Sn}$  oznaczają ładunki odpowiadające kolejnym czynnikom grupowym, a  $u$  odpowiada wariancjom czynników specyficznych.

Drugi sposób bierze się z przekształcenia definicji ( $\sigma_u$  oznacza łączną wariancję czynników specyficznych):

$$\frac{\sigma_C}{\sigma_V} = 1 - \frac{\sigma_u}{\sigma_V} \quad (14)$$

Z tego można obliczyć  $\omega_t$  jako:

$$\omega_t = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m u_i^2}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m R_{ij}} \quad (15)$$

Warto mieć na uwadze, że oba sposoby mogą dawać lekko odróżniające się od siebie wyniki. Jest to efekt tego, że w wyniku ekstrakcji czynników, powstaje niewielka różnica dla elementów poza diagonalą między macierzą korelacji a odtworzoną. Pierwszy wzór operuje tylko na modelu czynnikowym, drugi uwzględnia także oryginalną macierz kowariancji.

### 6.3 Omega hierarchiczna $\omega_h$

Omega hierarchiczna oznaczana jest jako  $\omega_h$  (McDonald 1999). Wskazuje ona jaką część wariancji testu stanowi czynnik główny. Definiuje się ją jako proporcję wariancji wyjaśnianej przez czynnik głównych ( $\sigma_G$ ) do wariancji całego testu ( $\sigma_V$ ):

$$\omega_h = \frac{\sigma_G}{\sigma_V} \quad (16)$$

Ponownie jak dla  $\omega_t$  można użyć dwóch sposobów do obliczenia  $\omega_h$  i podobnie będą występowały niewielkie różnice w otrzymywanych wartościach pomiędzy jednym i drugim sposobem.

$$\omega_h = \frac{(\sum_{i=1}^m \lambda_G)^2}{(\sum_{i=1}^m \lambda_G)^2 + (\sum_{i=1}^j \lambda_{S1})^2 + (\sum_{i=j+1}^k \lambda_{S2})^2 + \dots + (\sum_{i=l+1}^m \lambda_{SK})^2 + \sum_{i=1}^m (u_i^2)} \quad (17)$$

Z powyższego równania mianownik można zamienić na sumę wartości macierzy korelacji:

$$\omega_h = \frac{(\sum_{i=1}^m \lambda_G)^2}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m R_{ij}} \quad (18)$$

## 6.4 współczynnik wyjaśnionej wspólnej wariancji *ECV*

Miara *ECV* uważana jest za doskonałą miarę jednowymiarowości skali (Humenny i Grygiel 2015). Przyjmuje się, że wartości powyżej 0.6 wskazują, że struktura latentna może być jednowymiarowa, z kolei wartości powyżej 0.9 wskazują na ścisłą jednowymiarowość. Należy zwrócić uwagę na to, że jest to miara jednowymiarowości skali i nie do końca odpowiada ona mierze istotności czynnika głównego. Z tego powodu lepszą miarą w tym celu pozostaje  $\omega_h$  (Revelle i Wilt 2013). *ECV* odpowiada proporcji wartości własnej czynnika głównego do sumy wartości własnych wszystkich czynników (Garcia-Garzon, Abad i i Garrido 2021). Współczynnik *ECV* można obliczyć jako sumę kwadratów ładunków na czynniku głównym dzieloną przez sumę sum kwadratów na wszystkich czynnikach łącznie z głównym:

$$ECV = \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_G^2}{(\sum_{i=1}^m \lambda_G^2) + (\sum_{i=1}^m \lambda_{S1}^2) + (\sum_{i=j+1}^k \lambda_{S2}^2) + \dots + (\sum_{i=l+1}^m \lambda_{SK}^2)} \quad (19)$$

Powyższe równanie upraszcza się do wartości własnej czynnika głównego dzielonego przez sumę wartości własnych wszystkich czynników wspólnych. Z tego powodu *ECV* można obliczyć w inny sposób.

$$ECV = \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_G^2}{tr(R - U^2)} \quad (20)$$

## 6.5 Miary rzetelności czynników, a rotacje ukośne

Powyżej wymienione wzory nie są dostosowane do ukośnych modeli czynnikowych (Garcia-Garzon, Abad i i Garrido 2021). Wszystko przez macierz  $\Phi$ , która posiada pewną ilość istotnej informacji, zawartej poza macierzą ładunków. Można częściowo obejść ten problem poprzez przemnożenie macierzy ładunków przez macierz kowariancji czynników. W ten sposób otrzymuje się macierz  $S$  nazywaną macierzą struktury:

$$\Lambda \Phi \Lambda^T = \Lambda S^T \quad (21)$$

Użycie standardowych metod do obliczania miar rzetelności dla ukośnych modeli czynnikowych nie daje odpowiednich wyników. Wartości  $\omega_h$  są nieznacznie odchyłone, dla *ECV* odchylenia są niewielkie (około 1%), dla  $\omega_t$  odchylenia są duże (około 5%). Z tego powodu proponuję sposoby obliczania miar  $\omega_h$ ,  $\omega_t$  oraz *ECV*, dostosowane do ukośnych modeli czynnikowych. Poniższe wzory zostały własnoręcznie wyprowadzone z definicji:

- omega hierarchiczna  $\omega_h$ .  $\lambda$  oznacza pierwszą kolumnę macierzy ładunków.  $s$  oznacza pierwszą kolumnę macierzy struktury,  $\mathbf{1}$  są wektorami samych jedynek, służą one

---

sumowaniu wszystkich elementów macierzy:

$$\omega_h = \frac{\mathbf{1}^T \lambda_s^T \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T R \mathbf{1}} \quad (22)$$

- omega całkowita  $\omega_t$ :

$$\omega_h = \frac{\mathbf{1}^T \Lambda S^T \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T R \mathbf{1}} \quad (23)$$

- współczynnik wyjaśnionej wspólnej wariancji  $ECV$ :

$$ECV = \frac{\lambda_s^T}{tr(\Lambda S^T)} \quad (24)$$

## 7 Porównanie na danych

Przy pomocy metod Monte Carlo oraz klasycznych danych posiadających strukturę latentną podwójnego czynnika przeprowadzono porównanie metod rotacji dla rotacji (Garcia-Garzon, Abad i i Garrido 2021):

- Analitycznych rotacji podwójnego czynnika: ortogonalnej bi-quartimin oraz bi-geomin (bi-quartiminT, bi-geominT)
- Schmidta - Leimana (SL)
- Iteracyjnej rotacji celowej opartej na wstępnym rozwiązaniu Schmidta - Leimana (SLi). Nie zostanie porównana w tej pracy.
- Iteracyjnej empirycznej rotacji celowej oparte na wstępnym rozwiązaniu Schmidta-Leimana (SLiD)
- dwóch metod bezpośredniego otrzymywania modelu podwójnego czynnika: bezpośredniego SL (DSL) oraz bezpośredniego modelu podwójnego czynnika (DBF), jednak nie zostaną one uwzględnione w tej pracy.

W tej pracy nie zostaną przeprowadzone symulacje Monte Carlo, z tego powodu dokładnie opisano metodę badawczą oraz uzyskane obserwacje przez zespół Garcia-Garzona.

Doświadczenia oparte na symulacjach MC, polegały na obserwacji, czy wcześniej wymienione metody rotacji podwójnego czynnika są w stanie uzyskiwać model, który trafnie będzie znajdował wartość  $\omega_h$  względem symulowanej wartości. W symulacjach zmiennymi niezależnymi były: metody rotacji, rozmiar symulowanej próbki (150, 500, 1000), liczba czynników grupowych (3, 6), liczba zmiennych zawartych w czynniku grupowym (4, 8), obecność ładunków krzyżowych, obecność pozycji testowych ładujących

---

tylko czynnik główny, zadana wielkość ładunków na czynniku głównym (0.3, 0.45, 0.6). Dla każdej kombinacji warunków (łącznie 144 kombinacje dla każdej metody rotacji) symulowano po 100 macierzy korelacji.

Z tak przeprowadzonego doświadczenia, po analizie wyników wysnuto wnioski. Poniżej wymieniono wybrane wnioski, które będą przydatne w dalszej części tej pracy.

- SLiD daje najlepsze wyniki dla większości warunków
- SL daje dobre wartości kiedy jest mała liczba czynników grupowych (3)
- SL zaniża wartości  $\omega_h$
- SL oraz SLiD zaniżają ilość wariancji w czynniku głównym, kiedy jest ona duża i zawyżają, kiedy jest ona mała.
- bi-quartimin działa gorzej od bi-geomin, obie te metody zawyżają wartości  $\omega_h$

W celu rozwinięcia porównania porównam dodatkowo rotacje bi-quartimin w odmianie ukośnej oraz sprawdzę zachowanie się metod rotacji dla danych pochodzących z kwestionariusza osobowości IPIP-HEXACO-240. Dodatkowo użyję miar rzetelności  $\omega_t$  oraz  $ECV$ .  $\omega_t$  jest obliczana w celu sprawdzenia, jak zmienia się ona w zależności od metody rotacji.  $ECV$  jest obliczane, aby sprawdzić, czy typowe dla rotacji analitycznych podwójnego czynnika zapadanie się czynnika głównego może doprowadzić do błędnej interpretacji skali jako jednowymiarowej.

## 7.1 Metody

Porównanie dzieli się na dwie części. Pierwsza jest odtworzeniem porównania metod rotacji dla tych samych danych co Garcia-Garzon et al. (Garcia-Garzon, Abad i i Garrido 2021). Są to zbiory:

1. Thurstone (Thurstone 9 testów psychologicznych), macierz korelacji 9x9, N= 213
2. Bechtold (Thurstone i Bechtold 17 testów psychologicznych), macierz korelacji 17x17, N=213
3. Holzinger (Holzinger i Swineford 14 testów), macierz korelacji 14x14, N = 355
4. Thurstone.33 (Brigham 9 testów), macierz korelacji 9x9, N=4175
5. Harman74.cor (Harman 24 testy psychologiczne), macierz korelacji 24x24, N=145
6. Reise (Reise, Morizot, Hays ocena konsumentów opieki zdrowotnej), macierz korelacji 16x16, N=35000
7. Chen (Chen, West, Souza test jakości życia), macierz kowariancji 18x18, N=403

Powyższe zbiory są klasycznymi przykładami danych odzwierciedlających latentną strukturę podwójnego czynnika. Wszystkie zawarte są w pakiecie psych w R, powyżej wymienione są nazwami z tego pakietu oraz w nawiasach tak jak nazwał je Garcia-Garzon en al.

Do przeprowadzenia rotacji użyłem gotowych implementacji, z pakietu GPArotations oraz posłużyłem się implementacjami z dodatku do pracy o SLiD (Garcia-Garzon, Abad i i Garrido 2019). Do obliczania miar rzetelności czynników użyłem własnych implementacji funkcji. Ważne jest, że użyto innych metod obliczania miar rzetelności dla rotacji ukośnej.

Druga część porównania zawiera miary rzetelności czynników uzyskiwane przez każdą z metod dla wyników przeprowadzenia kwestionariusza IPIP-HEXACO-240 na 22,786 badanych, które dostępne były w ramach Open-Source Psychometrics Project na stronie internetowej ([http://openpsychometrics.org/\\_rawdata/](http://openpsychometrics.org/_rawdata/)).

## 7.2 Wyniki część 1

Tabela 5: Uzyskane wartości  $\omega_h$  dla tych samych danych co Garcia-Garzon (obok nazwy zbioru danych, podana ilość założonych czynników grupowych)

zbiór danych		bi-geominT	bi-quartiminT	bi-quartiminQ	SLiD	SL
Thurstone	3	0.865	0.838	0.828	0.715	0.715
Bechtoldt	6	0.795	0.812	0.82	0.774	0.717
Holzinger	4	0.809	0.765	0.758	0.713	0.628
Thurstone.33	3	0.901	0.895	0.902	NA	NA
Harman74.cor	5	0.881	0.881	0.887	0.835	0.664
Reise	5	0.874	0.897	0.896	0.86	0.825
Chen	4	0.854	0.874	0.865	0.841	0.781
średnia		0.854	0.852	0.851	0.790	0.722

Wyniki uzyskane w tej pracy odpowiadają tym uzyskanych przez Garcia-Garzona. Nie udało się uzyskać wyników dla zbioru danych Thurstone.33, było to związane z przypadkiem Heywooda - w czasie ekstrakcji czynników jeden z czynników uzyskał wariancję większą równą 1. Może to być wywołane za dużą jednowymiarowością struktury latentnej. W takim przypadku SL nie jest w stanie uzyskać macierzy ładunków, przez co SLiD także nie daje rezultatów.

Wartościom odpowiadają zależności zauważone przez zespół Garcia-Garzona. Wartości uzyskiwane przez SLiD wahają się pomiędzy tymi uzyskiwanymi przez rotacje analityczne oraz SL. SL daje podobne wartości co SLiD dla zbioru Thurstone. Zbiór ten posiada małą liczbę czynników, przez co SL może dla niego dobrze działać. Wartości SL są wyraźnie najniższe. Rotacje analityczne, łącznie z ukośną rotacją (nieporównywana



wcześniej), dają wysokie średnie wartości. Co więcej, wartości przez nie uzyskiwane były bardzo podobne, w związku z czym nie można na podstawie tych wyników stwierdzić, czy któraś metoda działa znacząco gorzej albo lepiej.

Nie porównywano wcześniej ukośnej rotacji bi-quartimin. Wyniki wskazują na to, że ta metoda zachowuje się bardzo podobnie do swojej ortogonalnej odmiany.

Tabela 6: Uzyskane wartości  $\omega_t$  dla tych samych danych co Garcia-Garzon (obok nazwy zbioru danych, podana ilość założonych czynników grupowych)

zbiór danych		bi-geominT	bi-quartiminT	bi-quartiminQ	SLiD	SL
Thurstone	3	0.942	0.942	0.942	0.941	0.93
Bechtoldt	6	0.947	0.947	0.947	0.946	0.949
Holzinger	4	0.903	0.903	0.903	0.903	0.9
Thurstone.33	3	0.934	0.934	0.934	NA	NA
Harman74.cor	5	0.942	0.942	0.942	0.942	0.937
Reise	5	0.931	0.931	0.931	0.931	0.93
Chen	4	0.958	0.958	0.958	0.957	0.954
średnia		0.937	0.937	0.937	0.937	0.933

Wartości  $\omega_t$  nie były wcześniej porównywane. Widać, że rotacje analityczne oraz SLiD prowadzą do takich samych wartości  $\omega_t$ , które są wysokie. Dzieje się tak, przez to, że do tych rotacji używana jest taka sama wstępna macierz ładunków. SL daje zaniżone wartości, ze względu na to, że jest uzyskiwany z mniejszej macierzy wstępnych ładunków niż pozostałe rotacje, przez co nie zawiera wariancji z dodatkowego czynnika i pomiar jest mniej precyzyjny.

Wartości  $\omega_t$  są zależne od wymiaru wstępnej macierzy czynników, przez co metoda rotacji nie wpływa na zmianę tej miary. Jest to spodziewany rezultat, gdyż wynika on bezpośrednio z definicji  $\omega_t$ .

Tabela 7: Uzyskane wartości *ECV* dla tych samych danych co Garcia-Garzon (obok nazwy zbioru danych, podana ilość założonych czynników grupowych)

zbiór danych		bi-geominT	bi-quartiminT	bi-quartiminQ	SLiD	SL
Thurstone	3	0.658	0.631	0.628	0.548	0.581
Bechtoldt	6	0.456	0.472	0.483	0.446	0.417
Holzinger	4	0.58	0.567	0.551	0.529	0.456
Thurstone.33	3	0.772	0.77	0.774	NA	NA
Harman74.cor	5	0.556	0.553	0.557	0.524	0.451
Reise	5	0.721	0.741	0.73	0.709	0.696
Chen	4	0.641	0.654	0.65	0.632	0.602
średnia		0.626	0.626	0.625	0.565	0.534

Miara *ECV* została obliczona w celu sprawdzenia, czy zjawisko zapadania się czynników, może prowadzić do błędnej interpretacji modelu jako jednoczynnikowego. Z porównania wynika, że dla żadnej rotacji nie odpowiadały wartości *ECV* świadczące o ścisłej jednowymiarowości. W niektórych przypadkach wartości dla rotacji analitycznych sugerują, że skala może być jednowymiarowa, kiedy SL oraz SLiD dają wartości o ponad 0.1 mniejsze. Może to prowadzić do mylnej interpretacji struktury latentnej.

Dla zbioru danych Thurstone.33 szacowane wartości *ECV* przez rotacje analityczne są najwyższe. Co więcej nie udało się uzyskać wyników dla SL oraz SLiD. Może to wskazywać na rzeczywistą jednowymiarową strukturę latentną.

Podobnie jak dla  $\omega_h$  wartości *ECV* dla rotacji analitycznych wychodzą znacznie zawyżone względem SL oraz SLiD. Z tego powodu ich użycie może prowadzić do błędnych wniosków jednowymiarowości struktury latentnej.

### 7.3 Wyniki część 2

Każda ze skal HEXACO (Honesty-Humility, Emotionality, eXtraversion, Agreeableness, Conscientiousness, Openness), dzieli się na 4 podskale (Skimina i in. 2020), z czego z założenia mają one na celu mierzyć jeden czynnik. Odpowiada to modelowi podwójnego czynnika, z tego powodu zasadnym jest obliczanie wartości  $\omega_h$  oraz  $\omega_t$ . Podanie obu tych miar daje lepsze oszacowanie rzetelności modelu czynnikowego, niż użycie  $\alpha$  – *Cronbacha* (Skimina i in. 2020; Revelle i Wilt 2013).

Tabela 8: Wartości  $\omega_h$  dla IPIP-HEXACO-240

Skala	bi-geominT	bi-quartiminT	bi-quartiminQ	SLiD	SL
Honesty-Humility	0.818	0.821	0.829	0.695	0.617
Emotionality	0.827	0.846	0.87	0.679	0.611
eXtraversion	0.922	0.923	0.938	0.704	0.656
Agreeableness	0.884	0.927	0.922	0.832	0.689
Conscientiousness	0.818	0.881	0.879	0.831	0.554
Openness	0.725	0.78	0.734	0.694	0.536
średnia	0.832	0.863	0.862	0.739	0.611

Pomiędzy wartościami  $\omega_h$  dla danych pochodzących z IPIP-HEXACO-240 występują inne zależności niż w przypadku zbiorów sprawdzanych przez Garcia-Garzona. Różnica występuje dla rotacji analitycznych. Wcześniej bi-geominT dawał średnio najwyższe wartości, dla tych danych jest na odwrót. Rotacje oparte na kryterium bi-quartimin dają najwyższe wartości, a bi-geominT niższe. Rotacje analityczne w ogóle, w dalszym ciągu, dają najwyższe wartości  $\omega_h$ . Pozostałe własności są zachowane.

Tabela 9: Wartości  $\omega_t$  dla IPIP-HEXACO-240

Skala	bi-geominT	bi-quartiminT	bi-quartiminQ	SLiD	SL
Honesty-Humility	0.928	0.928	0.928	0.928	0.923
Emotionality	0.945	0.945	0.945	0.946	0.943
eXtraversion	0.959	0.959	0.959	0.959	0.953
Agreeableness	0.949	0.949	0.949	0.949	0.945
Conscientiousness	0.944	0.944	0.944	0.943	0.942
Openness	0.914	0.914	0.914	0.914	0.91
średnia	0.940	0.940	0.940	0.940	0.936

Wartości  $\omega_t$  wyszły takie same dla rotacji analitycznych oraz SLiD. SL dał mniejsze wartości. Są to spodziewane wyniki.

Tabela 10: Wartości *ECV* dla IPIP-HEXACO-240

Skala	bi-geominT	bi-quartiminT	bi-quartiminQ	SLiD	SL
Honesty-Humility	0.488	0.497	0.501	0.432	0.4
Emotionality	0.491	0.497	0.509	0.423	0.395
eXtraversion	0.638	0.639	0.646	0.522	0.497
Agreeableness	0.607	0.651	0.649	0.574	0.502
Conscientiousness	0.486	0.505	0.507	0.485	0.349
Openness	0.451	0.473	0.454	0.44	0.336
średnia	0.527	0.544	0.544	0.479	0.413

Wartości *ECV* zostały zestawione w celu sprawdzenia, czy dodatkowe gromadzenie się wariancji w czynniku głównym, typowe dla rotacji analitycznych może prowadzić do mylnych wartości sugerujących jednowymiarowość skali. Średnio można zauważyć, że rotacje analityczne dają wartości o ponad 0.1 większe od SL. Największą średnią wartość posiada bi-quartiminQ. Z porównania wynika, że wadliwość rotacji analitycznych może prowadzić do mylnych wniosków. Dla tych danych efekt jest jeszcze bardziej zauważalny niż w pierwszej części porównania. Różnice między bi-quariminQ oraz SL osiągają w niektórych przypadkach wartości powyżej 0.15.

## 8 Dyskusja

W pracy została przedstawiona podstawowa wiedza potrzebna do zrozumienia różnic pomiędzy współczesnymi metodami rotacji modeli podwójnego czynnika.

W pracy nie zostały dokładnie omówione wszystkie metody ekstrakcji czynników oraz rotacji. Przystawiono tylko te metody, które były przydatne w zrozumieniu różnic między metodami rotacji modelu podwójnego czynnika.

W pracy zostały przedstawione 3 miary rzetelności czynników, które aktualnie uważa się za przydatne do ewaluacji modeli podwójnego czynnika. Zostało doprecyzowane, w jaki sposób obliczać te miary dla modeli o czynnikach ukośnych. Jest to ważny element pracy, ponieważ własnoręcznie wyprowadzono wzory. Nie pojawiają się one powszechnie w literaturze, a użycie złych wzorów na obliczanie miar, prowadzi do błędów uniemożliwiających poprawną interpretację wyników. Należy mieć na uwadze, że istnieją inne miary rzetelności czynników takie jak  $\alpha$  – *Cronbacha* (Cronbach 1951),  $\beta$  (Revelle 1979), oraz  $\lambda$  (Guttman 1945), które także mogą być użyteczne w ewaluacji modeli podwójnego czynnika.

Omówiono współczesne metody rotacji oraz metodę Schmita-Leimana. W pracy w ogóle nie zostały omówione bezpośrednie metody rotacji podwójnego czynnika (DSL oraz DBF).

---

Wyniki uzyskane w ramach pierwszej części analizy potwierdziły, te uzyskane przez Garcia-Garzona et al. Porównana została ukośna metoda rotacji, która nie była wcześniej omawiana oraz dwie miary rzetelności  $\omega_t$  oraz *ECV*. Garcia-Garzon nie porównywał ukośnych metod rotacji, ze względu na nieokreślone miary rzetelności czynników. Z kolei nie używał miar  $\omega_t$  oraz *ECV* ze względu na to, że nie są to bezpośrednie miary rzetelności czynnika głównego. Garcia-Garzon nie porównywał  $\omega_t$  ze względu na to, że mierzy rzetelność uzyskanego modelu czynnikowego i jest zależne jedynie od etapu ekstrakcji czynników. *ECV* nie było porównywane przez Garcia-Garzona, gdyż jest miarą jednowymiarowości skali, a nie ogólną miarą czynnika głównego.

Druga analiza pokazała, że zależności wskazane wcześniej przez Garcia-Garzona et al. w większości zachodzą na danych związanych z osobowością pochodzących z IPIP-HEXACO-240.

---

## 9 Bibliografia

- Browne, M. W. (2001). "An overview of analytic rotation in exploratory factor analysis". W: *Multivariate Behavioral Research* 36.1, s. 111–150.
- Cattell, R. B. (1966). "The scree test for the number of factors". W: *Multivariate Behavioral Research* 1.2, s. 245–276.
- Cronbach, L. J. (1951). "Coefficient alpha and the internal structure of tests". W: *Psychometrika* 16.3, s. 297–334.
- Garcia-Garzon, E., F. J. Abad i i L. E. Garrido (2019). "Improving bi-factor exploratory modeling". W: *Methodology*.
- (2021). "On omega hierarchical estimation: A comparison of exploratory bi-factor analysis algorithms". W: *Multivariate Behavioral Research* 56.1, s. 101–119.
- Guttman, L. (1945). "A basis for analyzing test-retest reliability". W: *Psychometrika* 10.4, s. 255–282.
- Harman, H. H. i W. H. Jones (1966). "Factor analysis by minimizing residuals (minres)". W: *Psychometrika* 31.3, s. 351–368.
- Holzinger, K. J. i F. Swineford (1937). "The bi-factor method". W: *Psychometrika* 2.1, s. 41–54.
- Humenny, G. i P. Grygiel (2015). "Wielowymiarowa struktura latentna w perspektywie analizy czynnikowej". W: *Modele cech ukrytych w badaniach edukacyjnych, psychologii i socjologii. Teoria i zastosowania*. Red. A. Pokropek, s. 124–159.
- Jennrich, R. I. (2007). "Rotation methods, algorithms, and standard errors". W: s. 329–350.
- Jennrich, R. I. i P. M. Bentler (2011). "Exploratory bi-factor analysis". W: *Psychometrika* 76, s. 537–549.
- (2012). "Exploratory bi-factor analysis: The oblique case". W: *Psychometrika* 77.3, s. 442–454.
- Kaiser, H. F. (1960). "Varimax solution for primary mental abilities". W: *Psychometrika* 25.2, s. 153–158.
- McDonald, R. P. (1999). *Test theory: A unified approach*.
- Reise, S. P. (2012). "The rediscovery of bifactor measurement models". W: *Multivariate Behavioral Research* 47.5, s. 667–696.
- Revelle, W. (1979). "Hierarchical cluster analysis and the internal structure of tests". W: *Multivariate Behavioral Research* 14.1, s. 57–74.
- Revelle, W. i J. Wilt (2013). "The general factor of personality: A general critique". W: *Journal of Research in Personality* 47.5, s. 493–504.
- Schmid, J. i J. M. Leiman (1957). "The development of hierarchical factor solutions". W: *Psychometrika* 22.1, s. 53–61.

- 
- Skimina, E. i in. (2020). "Psychometric properties of the Polish versions of the HEXACO-60 and the HEXACO-100 personality inventories". W: *Current Issues in Personality Psychology* 8.3, s. 255–278.
- Spearman, F. H. (1904). *The strategy of great railroads*. C. Scribner's Sons.
- Thurstone, L. L. (1931). "Multiple factor analysis". W: *Psychological Review* 38.5, s. 406.
- (1947). *Multiple-factor analysis; a development and expansion of The Vectors of Mind*.