

## ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА

УДК 519.6:517.925

### КУСКОВО-ЛІНІЙНІ АПРОКСИМАЦІЇ $h$ -АДАПТИВНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ОДНОВИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Є. Абрамов\*, О. Ліпіна\*, Г. Шинкаренко\*\*\*, А. Ямелинець\*

\*Львівський національний університет імені Івана Франка

вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: [kis@franko.lviv.ua](mailto:kis@franko.lviv.ua)

\*\*Політехніка Опольська, вул. Любошицька, 5, м. Ополь, 45043, Польща  
e-mail: [garlu@po.opole.pl](mailto:garlu@po.opole.pl)

Розглянуто питання побудови  $h$ -адаптивного методу скінченних елементів для розв'язування одновимірних крайових задач з диференціальними рівняннями другого порядку. Особливу увагу приділено побудові апостеріорних оцінювачів похибок кусково-лінійних апроксимацій, що далі використані для системи адаптування сіток з метою відшукування наближень із наперед заданою точністю. Ефективність розробленої числової схеми проілюстрована аналізом числових розв'язків сингулярно збурених крайових задач.

*Ключові слова:* сингулярно збурена крайова задача для звичайного диференціального рівняння, метод скінченних елементів, кусково-лінійні апроксимації, апостеріорна оцінка похибки, адаптування сітки, гарантована точність обчислених апроксимацій.

#### 1. ВСТУП

Метод скінченних елементів (МСЕ) сьогодні є одним з найпоширеніших методів числового розв'язування крайових задач математичної фізики та механіки суцільного середовища [14, 16]. Його основи ґрунтуються на варіаційному формулюванні крайової задачі та дискретизації Рітца - Гальоркіна з використанням поліноміальних базисних функцій з локальними носіями, які врешті-решт приводять до рідкісно заповненої системи алгебричних рівнянь для відшукування значень розв'язку у вузлах вибраної сітки [16]. За останні десятиріччя фундамент методу зміцнено інструментарієм побудови ефективних апостеріорних оцінок похибок (АОП) знайдених апроксимацій [8–11, 13–16], який

- дає змогу локалізувати регіони області визначення шуканого розв'язку з підвищеним рівнем похибки, наприклад, примежові та внутрішні шари сингулярно збурених задач;
- створює можливості обчислювати наближені розв'язки крайових задач із наперед гарантованою точністю;
- дає надійні критерії для системи керування процесами місцевого згущення та/або розрідження сіток, вибору того чи іншого порядку поліноміальних базисних функцій тощо, забезпечуючи якщо не оптимальні, то раціональні умови використання комп'ютерних ресурсів у запланованих обчислювальних експериментах.

Огляд головних досягнень в побудові та застосування адаптивних схем МСЕ можна знайти в працях [7, 11, 12, 15], див. також [2, 3, 6].

Ми мали на меті побудувати АОП кусково-лінійних апроксимацій МСЕ для розв'язків крайових задач з диференціальними рівняннями другого порядку. Властивості запропонованих АОП забезпечують можливості

- генерування сітки скінченних елементів, здатної у просторі кусково-лінійних апроксимацій відтворити структуру шуканого розв'язку з наперед заданою точністю;
- уточнення знайдених апроксимацій МСЕ в центрах ваг та розрахункових вузлах скінченних елементів на кожному кроці процесу розрідження - згущення сітки.

Ефективність розробленої схеми МСЕ проілюструємо числовими розв'язками сингулярно збурених крайових задач.

Основні результати цієї праці анонсовано в [1].

## 2. ФОРМУЛЮВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Розглянемо таку крайову задачу: знайти функцію  $u = u(x)$ , яка є розв'язком звичайного диференціального рівняння

$$-\frac{d}{dx}\left(\mu(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + \sigma(x)\frac{du(x)}{dx} + \gamma(x)u(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega = (1, 0) \quad (1)$$

і задовольняє крайові умови

$$\begin{aligned} u(0) &= 0, \\ -\mu \frac{du}{dx} \Big|_{x=1} &= \alpha[u(1) - \bar{u}] \end{aligned} \quad (2)$$

Тут  $\mu = \mu(x)$ ,  $\beta = \beta(x)$ ,  $\sigma = \sigma(x)$  та  $f = f(x)$  – задані функції;  $\alpha$ ,  $\bar{u}$  – задані сталі з такими властивостями:

$$\begin{aligned} \alpha &\geq 0, \\ \mu(x) &\geq \mu_0 = \text{const} > 0, \quad \sigma(x) \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

майже скрізь в  $\Omega$ ,

$$\mu, \beta, \sigma \in L^\infty(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega). \quad (4)$$

Крайова задача (1), (2) має важливі застосування в екології, напівпровідниках, прогнозуванні епідемій тощо. З іншого боку, більшість реальних задач такого вигляду засвідчує, що вони є сингулярно збуреними, тобто містять малі коефіцієнти при старших похідних. Цю особливість структури задачі можна побачити [1, 2] після належної заміни незалежних змінних і введення знаних у механіці суцільного середовища критеріїв подібності Пекле і Струхаля

$$Pe := \frac{\|\beta\|_\infty \text{diam } \Omega}{\mu_0}, \quad Sh := \frac{\|\sigma\|_\infty \text{diam}^2 \Omega}{\mu_0} \equiv \frac{\|\sigma\|_\infty \text{diam } \Omega}{\|\beta\|_\infty}.$$

Тоді після нескладних перетворень крайова задача (1), (2) набуде вигляду

$$\begin{cases} -(\mu_*(z)u'(z))' + Pe[\beta_*(z)u'(z) + Sh\delta_*(z)u(z)] = f_*(z) & \forall z \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad -\mu_*u' \Big|_{z=1} = \alpha_*[u(1) - \bar{u}] \end{cases}$$

де

$$\mu_*(z) := \frac{\mu(z)}{\mu_0}, \quad \beta_*(z) := \frac{\beta(z)}{\|\beta\|_\infty}, \quad \sigma_*(z) := \frac{\sigma(z)}{\|\sigma\|_\infty},$$

$$f_*(z) := \frac{\text{diam}^2 \Omega}{\mu_0} f(z), \quad \alpha_* := \frac{\text{diam} \Omega}{\mu_0} \alpha.$$

### 3. ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Крайова задача (1), (2) допускає варіаційне формулювання вигляду

$$\begin{cases} \text{знайти } u \in V \text{ таку, що} \\ c(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (5)$$

з такими структурними елементами:

$$\begin{cases} V := H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = 0\}; \\ c(u, v) := \int_0^1 (\mu u'v' + \beta u'v + \sigma uv) dx + \alpha u(1)v(1), \\ \langle l, v \rangle := \int_0^1 f v dx + \alpha \bar{u} v(1) \quad \forall u, v \in V. \end{cases} \quad (6)$$

З огляду на теорему Лакса–Мільграма–Вишика можна переконатися, що варіаційна задача (5) коректно сформульована, якщо її дані задовольняють такі умови:

- 1) регулярності і знаковизначеності (3), (4);
- 2)  $\sigma - \frac{1}{2}\beta' \geq 0 \quad \forall x \in (0,1), \quad \alpha - \frac{1}{2}\beta(1) \geq 0.$  (7)

За цих умов білінійна форма  $c(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  варіаційної задачі утворює на просторі допустимих функцій  $V$  норму (відому як енергетична норма задачі)

$$|v|_V := \sqrt{c(v, v)} \quad \forall v \in V. \quad (8)$$

Власне норму (8) ми будемо використовувати найчастіше.

### 4. КУСКОВО-ЛІНІЙНІ АПРОКСИМАЦІЇ

Зафіксуємо натуральне  $N$  і поділимо відрізок  $[0,1]$  на скінченні елементи  $K_{i+\frac{1}{2}} := [x_i, x_{i+1}]$  довжини  $h_{i+\frac{1}{2}} := x_{i+1} - x_i$ ,  $i = 0, \dots, N-1$  так, що  $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1$ . Тут і далі дробовим індексом будемо позначати номер скінченного елемента і певні його характеристики, скажімо,  $x_{i+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i)$  – це центр ваги скінченного елемента  $K_{i+\frac{1}{2}} := [x_i, x_{i+1}]$ . На кожному з них виберемо лінійну апроксимацію шуканого розв'язку варіаційної задачі (5) у вигляді

$$\begin{aligned}
u(x) \approx u_{i+\frac{1}{2}}(x) &:= q_i [1 - \omega_{i+\frac{1}{2}}(x)] + q_{i+1} \omega_{i+\frac{1}{2}}(x) = q_i + h_{i+\frac{1}{2}} \omega_{i+\frac{1}{2}}(x) \dot{q}_{i+\frac{1}{2}} = \\
&= q_{i+\frac{1}{2}} + [\omega_{i+\frac{1}{2}}(x) - \frac{1}{2}] h_{i+\frac{1}{2}} \dot{q}_{i+\frac{1}{2}}; \\
\omega_{i+\frac{1}{2}}(x) &:= \frac{x - x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \dots, N-1.
\end{aligned} \tag{9}$$

Тут ми скористалися позначеннями

$$\begin{cases} q_{i+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(q_{i+1} + q_i); \\ \dot{q}_{i+\frac{1}{2}} := \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}}(q_{i+1} - q_i) \end{cases} \tag{10}$$

для величин, які характеризують середнє значення апроксимації  $u_h(x)$  та швидкості її зміни на скінченному елементі  $K_{i+\frac{1}{2}}$ .

На доповнення до (9) зазначимо, що

$$u'(x) \approx u'_{i+\frac{1}{2}}(x) = \dot{q}_{i+\frac{1}{2}} \quad \forall x \in K_{i+\frac{1}{2}}, \quad i = 0, \dots, N-1. \tag{11}$$

Врешті-решт, враховуючи головні крайові умови варіаційної задачі, одержимо, що

$$q_0 = 0, \tag{12}$$

і запишемо кусково-лінійну апроксимацію  $u_h(x)$  у такий спосіб

$$\begin{aligned}
u_h(x) &:= \sum_{i=0}^{N-1} u_{i+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ q_i [1 - \omega_{i+\frac{1}{2}}(x)] + q_{i+1} \omega_{i+\frac{1}{2}}(x) \right\} = \\
&= \sum_{n=1}^N q_n \varphi_n(x) \quad \forall x \in [0, 1]
\end{aligned} \tag{13}$$

В останній сумі ми явно виражаємо апроксимацію МСЕ як лінійну комбінацію кусково-визначених базисних функцій Куранта

$$\varphi_n := \begin{cases} 0, & x \in [0, x_{n-1}]; \\ \omega_{n-\frac{1}{2}}(x), & x \in (x_{n-1}, x_n]; \\ 1 - \omega_{n+\frac{1}{2}}(x), & x \in (x_n, x_{n+1}]; \\ 0, & x \in (x_{n+1}, 1]. \end{cases} \quad n = 1, \dots, N \tag{14}$$

Власне ця система функцій і формує базис вибраного нами простору апроксимацій  $V_h$ , відображаючи, що  $\dim V_h = N$ .

## 5. ОБЧИСЛЕННЯ НА СКІНЧЕННОМУ ЕЛЕМЕНТІ

Для виконання різноманітних обчислень на скінченних елементах нам потрібні складові варіаційного рівняння вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{i+\frac{1}{2}}(u, v) := \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{pu'v' + bu'v + \sigma uv\} dx + \alpha u(1)v(1)\delta_{N i+1}, \\ \langle l_{i+\frac{1}{2}}, v \rangle := \int_{x_i}^{x_{i+1}} f v dx + \alpha \bar{u} \delta_{N i+1}, \quad i = 0, \dots, N-1. \end{array} \right. \quad (15)$$

Щоб результати обчислень були наочними і допускали прозору інтерпретацію, виконуватимемо інтегрування в (15) наближено із використанням теореми про середнє в такий спосіб:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{i+\frac{1}{2}}(u, v) := \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{\mu u'v' + \beta u'v + \sigma uv\} dx + \alpha u(1)v(1)\delta_{N i+1} \cong \\ \cong \mu_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'v' dx + \beta_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'v dx + \sigma_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} uv dx + \alpha u(1)v(1)\delta_{N i+1}, \\ \langle l_{i+\frac{1}{2}}, v \rangle := \int_{x_i}^{x_{i+1}} f v dx + \alpha u(1)\bar{u} \delta_{N i+1} \cong f_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v dx + \alpha u(1)\bar{u} \delta_{N i+1}, \quad i = 0, \dots, N-1. \end{array} \right. \quad (16)$$

де

$$\mu_{i+\frac{1}{2}} := \mu(x_{i+\frac{1}{2}}), \quad \beta_{i+\frac{1}{2}} := \beta(x_{i+\frac{1}{2}}), \quad \sigma_{i+\frac{1}{2}} := \sigma(x_{i+\frac{1}{2}}).$$

Інтеграли, що залишилися, наприклад, у виразі (16) легко обчислити у випадку поліноміальних функцій  $u$  та  $v$ .

## 6. ДИСКРЕТИЗОВАНІ РІВНЯННЯ

Тепер ми готові обчислити систему лінійних алгебричних рівнянь МСЕ для відшукування коефіцієнтів його апроксимації (13).

**Пропозиція 1** *про структуру рівнянь МСЕ.*

Нехай апроксимацію розв'язку варіаційної задачі (5) шукаємо методом Гальоркіна у вигляді розвинення (13) за системою кусково-лінійних базисних функцій (14).

Тоді коефіцієнти  $q_1, q_2, \dots, q_N$  розвинення  $u_h$  обчислимо із системи лінійних алгебричних рівнянь вигляду

$$q_0 = 0, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\mu}{h} \left[ -1 + \frac{1}{6} Pe(Sh-3) \right] \right\}_{i-\frac{1}{2}} q_{i-1} + \\ & + \left\{ \frac{\mu}{h} \left[ -1 + \frac{1}{6} Pe(2Sh+3) \right] \right\}_{i-\frac{1}{2}} + \left\{ \frac{\mu}{h} \left[ -1 + \frac{1}{6} Pe(2Sh-3) \right] \right\}_{i+\frac{1}{2}} q_i + \\ & + \left\{ \frac{\mu}{h} \left[ -1 + \frac{1}{6} Pe(Sh+3) \right] \right\}_{i+\frac{1}{2}} q_{i+1} = \frac{1}{2} \left\{ [hf]_{i-\frac{1}{2}} + [hf]_{i+\frac{1}{2}} \right\} \\ & i = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\mu}{h} \left[ -1 + \frac{1}{6} Pe(2Sh - 3) \right] \right\}_{N-\frac{1}{2}} q_{N-1} + \\ & + \left\{ \frac{\mu}{h} \left[ -1 + \frac{1}{6} Pe(2Sh + 3) \right] \right\}_{N-\frac{1}{2}} q_N + \alpha q_N = \frac{1}{2} [hf]_{N-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (19)$$

Тут використано позначення

$$Pe := \frac{h\beta}{\mu}, \quad Sh := \frac{h^2\sigma}{\mu}$$

для локальних (сіткових) величин критеріїв подібності Пекле та Струхала, відповідно.

*Доведення.* Підставимо лінійну комбінацію (13) в рівняння варіаційної задачі (5) і послідовно прийнемо в ньому  $v = \varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Після належних алгебричних обчислень із застосуванням наближень (16), (детальніше див. Шинкаренко–Голуб–Щербина [5]), отримаємо систему задекларованих лінійних алгебричних рівнянь.

Систему рівнянь вигляду (17)–(19) ми взяли за основу відшукування кусково-лінійних апроксимацій МСЕ на нерівномірних сітках.

#### 7. АПОСТЕРІОРНИЙ ОЦІНЮВАЧ ПОХИБОК: КУСКОВО-КВАДРАТИЧНА БАБЛ-ФУНКЦІЯ

Уведемо до розгляду бабл-функції вигляду

$$b(x) := 4[1 - \omega_{i+\frac{1}{2}}(x)]\omega_{i+\frac{1}{2}}(x) \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}], i = 0, \dots, N. \quad (20)$$

З огляду на те, що

$$\begin{cases} (b, b)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{8}{15} h_{i+\frac{1}{2}}, \\ (b', b')_{i+\frac{1}{2}} = \frac{16}{3} h_{i+\frac{1}{2}}^{-1}, \quad i = 0, \dots, N \end{cases}$$

неважко переконатись, що

$$\begin{cases} c_{i+\frac{1}{2}}(b, b) = \left\{ \frac{16}{3} \frac{\mu}{h} + \frac{8}{15} \sigma h \right\}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{8}{15} \left\{ \frac{\mu}{h} (10 + PeSh) \right\}_{i+\frac{1}{2}}, \\ \langle l_{i+\frac{1}{2}}, b \rangle = \{hf\}_{i+\frac{1}{2}}, \quad i = 0, \dots, N-1. \end{cases} \quad (21)$$

Будемо шукати наближення  $\varepsilon_h \in E_h$  до істинної похибки апроксимації  $e_h := u - u_h \in V \setminus V_h$  у вигляді лінійної комбінації (таке подання наближення до похибки засвідчує, що ми вибрали систему функцій  $\{b_{i+\frac{1}{2}}(x)\}_{i=0}^{N-1}$  за базис підпростору  $E_h$ )

$$e_h(x) \approx \varepsilon_h(x) := \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+\frac{1}{2}} b_{i+\frac{1}{2}}(x) \quad (22)$$

з невідомими коефіцієнтами  $\{\lambda_{i+\frac{1}{2}}\}_{i=0}^{N-1}$ . Для їхнього знаходження скористаємося схемою Гальоркіна, яку застосуємо до задачі про похибку

$$\begin{cases} \text{задано } E_h \subset V \setminus V_h, \dim E_h = N, \\ \text{та апроксимацію Гальоркіна } u_h \in V_h; \\ \text{знайти похибку, } e_h \in E_h \text{ таку, що} \\ c(e_h, v) = \langle c(u_h, v), v \rangle \quad \forall v \in E_h \end{cases} \quad (23)$$

Унаслідок природної ортогональності бабл-функцій, зумовленої тим, що  $\text{supp } b_{i+\frac{1}{2}} := [x_i, x_{i+1}]$ , безпосередньо обчислюємо

$$\lambda_{i+\frac{1}{2}} = \varepsilon_h(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{\langle \rho_{i+\frac{1}{2}}(u_h), b \rangle}{c_{i+\frac{1}{2}}(b, b)}, \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (24)$$

Нарешті, беручи до уваги (20) і те, що

$$\langle \rho_{i+\frac{1}{2}}(u_h), b \rangle = \frac{2}{3} \{h(f - \beta \dot{q} - \sigma q)\}_{i+\frac{1}{2}} + O(h^3), \quad (25)$$

наведемо остаточний вигляд знайденого наближення до похибки апроксимації Гальоркіна:

$$\begin{aligned} e_h(x) &\approx \varepsilon_h(x) := \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+\frac{1}{2}} b_{i+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\langle \rho_{i+\frac{1}{2}}(u_h), b \rangle}{c_{i+\frac{1}{2}}(b, b)} b_{i+\frac{1}{2}}(x) = \\ &= \frac{5}{4} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \frac{h^2 (f - \beta \dot{q} - \sigma q)}{\mu (10 + PeSh)} \right\}_{i+\frac{1}{2}} b_{i+\frac{1}{2}}(x) \quad \forall x \in [0, 1] \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_h\|_V^2 &= c(\varepsilon_h, \varepsilon_h) = \frac{25}{16} \frac{8}{15} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \frac{h^2 (f - \beta \dot{q} - \sigma q)}{\mu (10 + PeSh)} \right\}_{i+\frac{1}{2}}^2 \left\{ \frac{\mu}{h} (10 + PeSh) \right\}_{i+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{5}{6} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \frac{h^3 (f - \beta \dot{q} - \sigma q)^2}{\mu (10 + PeSh)} \right\}_{i+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Одержані тут результати сформулюємо у вигляді такого твердження

**Пропозиція 2** про кусково-квадратичний апостеріорний оцінювач похибки МСЕ

Нехай  $T_h = \left\{ K_{i+\frac{1}{2}} \right\}$  - вибрана сітка скінченних елементів

$K_{i+\frac{1}{2}} = [x_i, x_{i+1}]$ ,  $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ ,  $h := \max_{i+\frac{1}{2}} h_{i+\frac{1}{2}}$ , на якій для задачі (5)

знайдено кусково-лінійну апроксимацію МСЕ вигляду

$$u_h(x) = q_{i+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}} \dot{q}_{i+\frac{1}{2}} \left( \frac{x - x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \right) \quad \forall x \in K_{i+\frac{1}{2}}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (28)$$

Нехай на додаток до цього для оцінки якості знайденої апроксимації використовують оцінювач похибки у вигляді розвинення

$$e_h(x) \approx \varepsilon_h(x) := \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+\frac{1}{2}} b_{i+\frac{1}{2}}(x), \quad (29)$$

де

$$b(x) := 4[1 - \omega_{i+\frac{1}{2}}(x)] \omega_{i+\frac{1}{2}}(x) \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Тоді будуть правильними такі рівності

$$(\text{I}) \quad \lambda_{i+1} \equiv \varepsilon_h \left( x_{i+\frac{1}{2}} \right) = \frac{5}{4} \left\{ \frac{h^2}{\mu} \frac{(f - \beta \dot{q} - \sigma q)}{(10 + PeSh)} \right\}_{i+\frac{1}{2}}; \quad (30)$$

$$(\text{II}) \quad \|\varepsilon_h\|_V^2 = c(\varepsilon_h, \varepsilon_h) = \frac{5}{6} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \frac{h^3}{\mu} \frac{(f - \beta \dot{q} - \sigma q)^2}{(10 + PeSh)} \right\}_{i+\frac{1}{2}}. \quad (31)$$

Тут використано позначення

$$Pe := \frac{h\beta}{\mu}, \quad Sh := \frac{h^2\sigma}{\mu}$$

для локальних (сіткових) величин критеріїв подібності Пекле та Струхаля, відповідно.

Побудований апостеріорний оцінювач похибки формує інтелектуальну частину системи керування розподілом похибок апроксимацій MSE у процесі адаптування розрахункових сіток зі скінченних елементів.

#### 8. АПОСТЕРІОРНИЙ ОЦІНЮВАЧ ПОХИБОК: КУСКОВО-ЛІНІЙНА БАБЛ-ФУНКЦІЯ

Подібні результати стосовно проектування апостеріорних оцінювачів похибок можна одержати, якщо на кожному скінченному елементі квадратичну бабл-функцію замінити кусково-лінійною. У цьому випадку одержимо такі результати.

**Пропозиція 3** про кусково-лінійний апостеріорний оцінювач похибки MSE.

Нехай  $T_h = \left\{ K_{i+\frac{1}{2}} \right\}$  – вибрана сітка скінченних елементів

$$K_{i+\frac{1}{2}} = [x_i, x_{i+1}], \quad h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad h := \max_{i+\frac{1}{2}} h_{i+\frac{1}{2}} \quad \text{на якій для задачі (5)} \quad (5)$$

знайдено кусково-лінійну апроксимацію MSE вигляду

$$u_h(x) = q_{i+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}} \dot{q}_{i+\frac{1}{2}} \left( \frac{x - x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \right) \quad \forall x \in K_{i+\frac{1}{2}}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (32)$$

Нехай на додаток до цього для оцінки якості апроксимації  $u_h$  використовують оцінювач похибки у вигляді розвинення

$$e_h(x) \approx \varepsilon_h(x) := \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+\frac{1}{2}} b_{i+\frac{1}{2}}(x), \quad (33)$$

де



$$b(x) := \frac{x - x_i}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_i} \quad \forall x \in \left[ x_i, x_{i+\frac{1}{2}} \right],$$

$$b(x) := \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_{i+\frac{1}{2}}} \quad \forall x \in \left[ x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+1} \right]. \quad i = 0, \dots, N-1$$

Тоді будуть правильними такі рівності

$$(!) \quad \lambda_{i+1} \equiv \varepsilon_h \left( x_{i+\frac{1}{2}} \right) = \frac{3}{2} \left\{ \frac{h^2 [f - \sigma q - (\beta - \mu) \dot{q}]}{\mu (12 + Sh)} \right\}_{i+\frac{1}{2}}, \quad (34)$$

$$(!!) \quad \|\varepsilon_h\|_V^2 = c(\varepsilon_h, \varepsilon_h) = \frac{3}{4} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \frac{h^3 [f - (\beta + \mu) \dot{q} - \sigma q]^2}{\mu (12 + Sh)} \right\}_{i+\frac{1}{2}}. \quad (35)$$

Наведені результати побудови апостеріорних оцінювачів похибок апроксимацій MSE демонструють вдале використання потенційних можливостей його базисних функцій: для обчислення АОП ми знову застосовуємо систему кусково-лінійних функцій Куранта, але побудовану на вдвічі згущеній сітці. Ця властивість може бути особливо корисною у проектуванні адаптивних схем MSE для задач більшої вимірності, де ціна збереження однорідності обчислень незрівнянно вища порівняно з розглядуваним випадком. Стосовно використання можливостей АОП такого типу у двовимірних задачах див. [6].

#### 9. СТРАТЕГІЯ АДАПТУВАННЯ СІТКИ

Виведені вище вирази для апостеріорних оцінювачів похибки на скінченному елементі ми використовували для побудови рекурсивного алгоритму адаптування розрахункової сітки в такий спосіб, щоб підсумкова апроксимація MSE була знайдена на кожному скінченному елементі з наперед гарантованою точністю.

Детальніше ми вибираємо за якість знайденої на сітці  $T_h = \left\{ K_{i+\frac{1}{2}} \right\}$  кусково-лінійної апроксимації  $u_h$  послідовність індикаторів

$$\eta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\|\varepsilon_h\|_{i+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left( \|u_h\|_{j+\frac{1}{2}}^2 + \|\varepsilon_h\|_{j+\frac{1}{2}}^2 \right)}} 100\%$$

$$= \frac{\sqrt{N} \|\varepsilon_h\|_{i+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\|u_h\|_V^2 + \|\varepsilon_h\|_V^2}} 100\%, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (36)$$

Тут, зокрема,

$$\|u_h\|_{i+\frac{1}{2}}^2 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [u'_h(x)]^2 dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \dot{q}_{i+\frac{1}{2}}^2 dx = \{h \dot{q}^2\}_{i+\frac{1}{2}}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (37)$$

Індикатори похибки (36) визначають, який відсоток становить норма похибки від середнього значення норми розв'язку на кожному скінченному елементі. Якщо це число більше від заданого допустимого рівня похибки, то цей скінченний елемент

поділяють на два нові додаванням нового вузла сітки в його центр ваги. Коли ж індикатор похибки певного скінченного елемента не перевищує допустимого рівня, то такий елемент без змін входить до нової розрахункової сітки. Процес уточнення апроксимацій МСЕ завершується за умови, що під час перегляду біжучої сітки не відбулося поділу жодного з її скінченних елементів.

Отже, результатом нашої стратегії послідовного адаптування сіток і відповідного переформування та розв'язування систем рівнянь є апроксимація МСЕ знайдена на мінімально можливій сітці, що має рівномірний розподіл допустимих похибок між її елементами.

#### 10. АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Проілюструємо можливості запропонованої вище адаптивної схеми МСЕ результатами деяких обчислювальних експериментів. Усі обчислення виконано з застосуванням апостеріорного оцінювача похибки (31).

*Приклад 1.* За даних крайової задачі  $\mu = 1$ ,  $\beta = 100$ ,  $\sigma = 0$ ,  $f = 100$ ,  $\alpha = 1000$ ,  $\bar{u} = 0$  обирали початкову сітку – рівномірний поділ відрізка на  $N_0 = 4$  скінченні елементи. Відшукували апроксимацію МСЕ з допустимим рівнем похибки  $\eta = 10\%$ . Точним розв'язком цієї крайової задачі є функція

$$u(x) = \frac{1001}{1100e^{100} - 1000} - \frac{1001}{1100e^{100} - 1000} e^{100x} + x,$$

графік якої на рис. 1 демонструє яскраво виражений примежовий шар в околі правого кінця своєї області визначення.

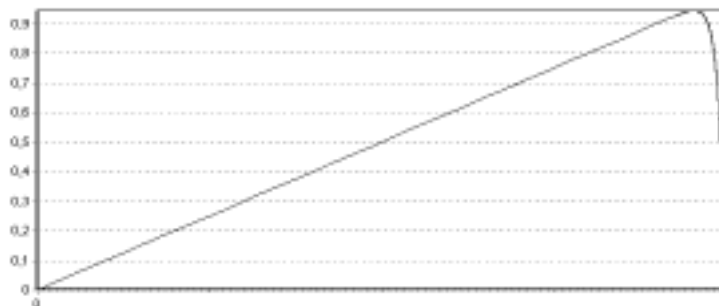


Рис. 1. Графік точного розв'язку. Примежовий шар в околі правого кінця відрізка, глобальне число Пекле  $Pe_{gl} = 100$ .

Графік наближеного розв'язку, отриманий за дев'ять кроків адаптування сітки, показано на рис. 2. Після завершення цього рекурентного процесу можна зауважити, що кардинальне згущення сіток було локалізоване в околі примежового шару, оскільки саме там похибка апроксимацій МСЕ набувала найбільших значень. Загальний характер змін розрахункових сіток від кроку до кроку відображено на рис 3. Незважаючи на те, що в процесі адаптування приріст загальної кількості скінченних елементів сповільнюється,  $H^1$  – норма апостеріорного оцінювача похибки виразно демонструє квадратичну збіжність своїх значень до нуля (рис. 4).

Цей факт засвідчує важливу властивість побудованого нами АОП – він здатний породжувати суперзбіжні послідовності кусково-лінійних апроксимацій МСЕ.

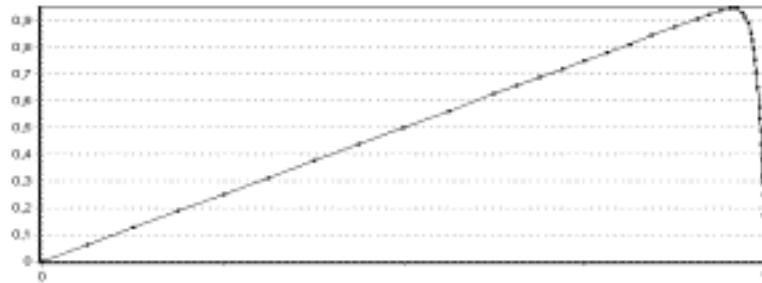


Рис. 2. Підсумкова апроксимація, обчислена за дев'ять кроків адаптування, починаючи із рівномірного поділу на чотири скінченні елементи, з  $\eta = 10\%$ . Крапками на графіку виділено значення апроксимації у вузлах остаточної сітки із 41-го елемента.

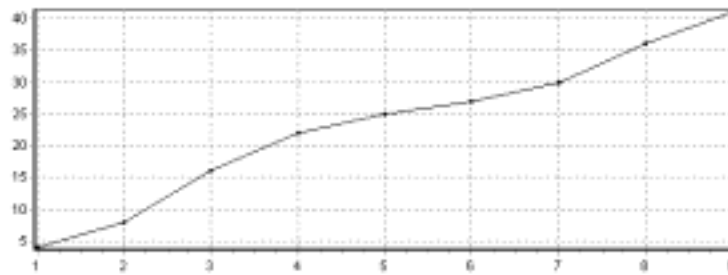


Рис. 3. Динаміка зростання кількості елементів сітки у процесі адаптування.

Нарешті, розподіл значень індикаторів похибки на рис. 5 доводить, що в задачах з переважаючою конвекцією важко досягнути рівномірного розподілу похибок між елементами сітки, оскільки їхній рівень у примежовому шарі на декілька порядків переважає похибки на решті елементів сітки. З іншого боку, цей розподіл похибки засвідчує, що знайдена нами сітка містить надлишок скінченних елементів поза околом примежового шару і, щоб стати оптимальною, повинна бути розріджена в певний спосіб саме в цьому регіоні.

*Приклад 2.* Щоб проаналізувати можливості побудованої  $h$ -адаптивної схеми МСЕ в задачах з переважаючими швидкостями реакцій, розглядали крайову задачу (1), (2) з такими даними  $\mu = 0.0025$ ,  $\beta = 0$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\alpha = 1000$ ,  $\bar{u} = 0$ ,

$$f = \cos^2 \pi x + 0.005 \pi^2 \cos 2\pi x.$$

На рис. 6 зображено графік її точного розв'язку, який становить функція

$$u(x) = \cos^2 \pi x - \frac{\exp(-(1-x)/\sqrt{\mu}) + \exp(-x/\sqrt{\mu})}{1 + \exp(-1/\sqrt{\mu})}.$$

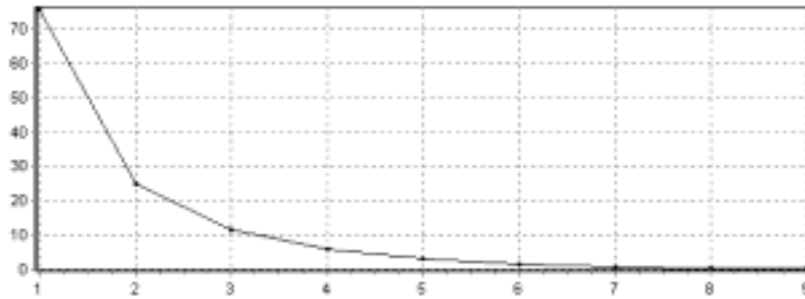


Рис. 4. Квадратичний характер покрової збіжності норми апостерірного оцінювача похибки  $\|\mathcal{E}_h\|_V$ .

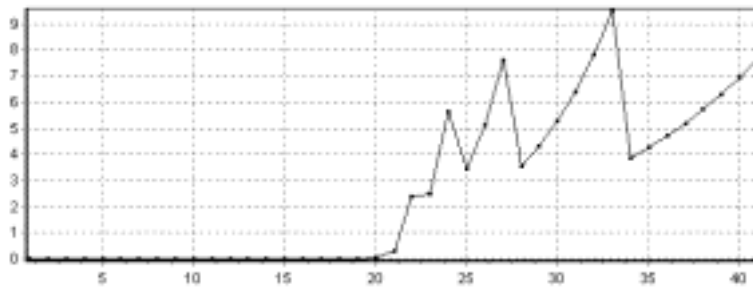


Рис. 5. Розподіл значень індикаторів якості підсумкової апроксимації між скінченими елементами остаточної сітки.

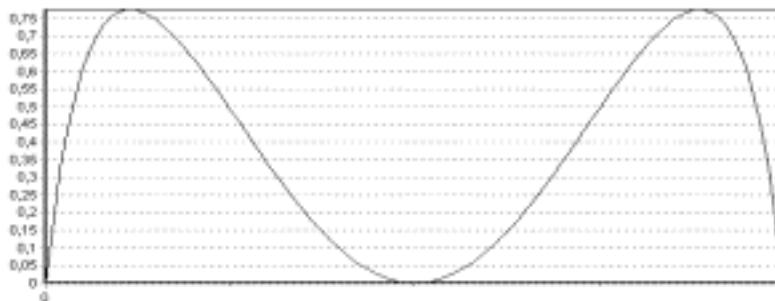
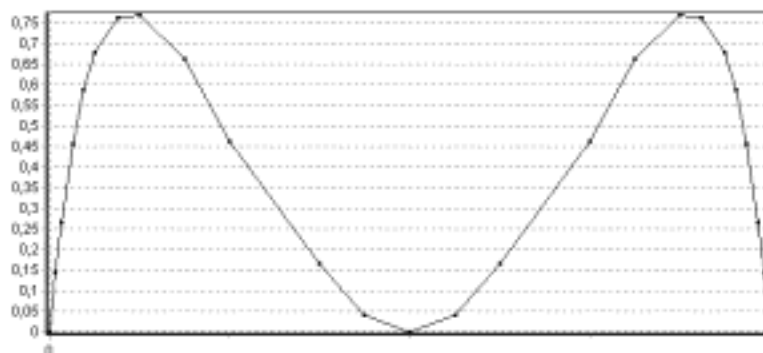


Рис. 6. Точний розв'язок крайової задачі. Глобальні числа Пекле  $Pe_{gl} = 0$  та

Струхалія  $Sh_{gl} = 10^4$ .

На рис. 7 показано графік наближеного розв'язку, обчислений за шість кроків адаптування з допустимою похибкою  $\eta = 1\%$ . Знову за старту вибирали рівномірну сітку із чотирьох скінчених елементів. Рис. 8–10 зображають певні обчислювальні характеристики процесу адаптування, серед яких треба назвати квадратичну швидкість збіжності знайдених апроксимацій МСЕ.

Рис. 7. Підсумкова апроксимація MSE з  $\eta = 1\%$ ,  $N = 24$ .

Крапками показано її значення у вузлах знайденої сітки.

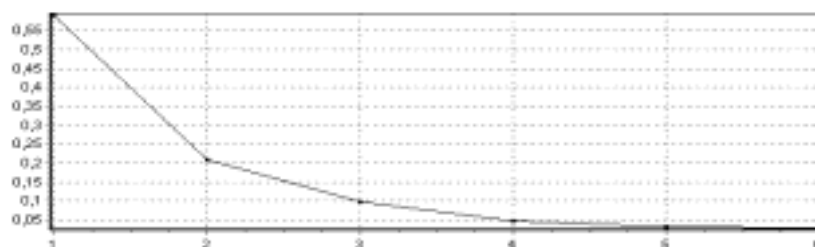
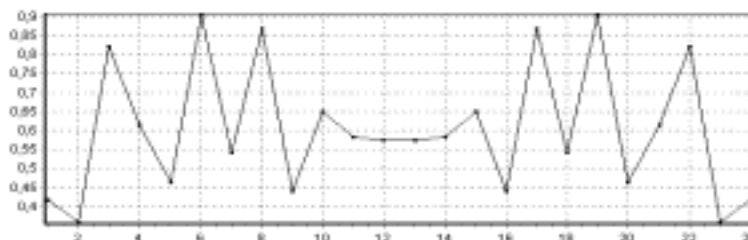
Рис. 8. Квадратичний характер збіжності норми апостерірного оцінювача похибки  $\|\varepsilon_h\|_V$ .

Рис. 9 Розподіл значень індикаторів якості підсумкової апроксимації поміж скінченними елементами остаточної сітки.

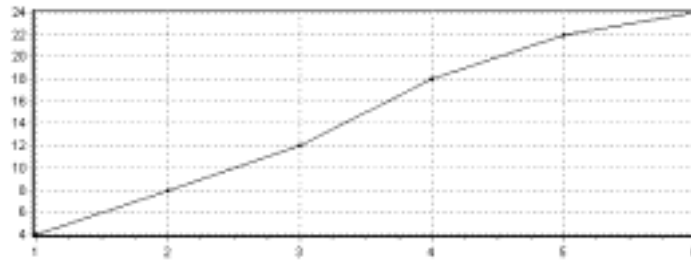


Рис. 10. Зміна кількості скінченних елементів сітки в процесі адаптування.

Якщо порівняти результати цього прикладу з попереднім, то можна побачити, що в розглянутій задачі з великими швидкостями перебігу біохімічних реакцій запропонована  $h$ -адаптивна схема МСЕ за суттєво менших обчислювальних витрат відтворює структуру сингулярностей шуканого розв'язку навіть за десятиразового підвищення вимог до точності його апроксимації.

## 11. ВИСНОВКИ

Отже, побудовано  $h$ -адаптивну схему МСЕ для розв'язування лінійних крайових задач зі звичайними диференціальними рівняннями другого порядку. Основу запропонованої схеми становить класична процедура МСЕ з просторами апроксимацій, породжуваними кусково-лінійними базисними функціями Куранта на нерівномірних сітках скінченних елементів. Остання доповнена системою керування процесом локального згущення сіток, яка здатна послідовно уточнювати апроксимації МСЕ з використанням апостеріорних оцінок їхньої похибки на кожному скінченному елементі. Інтелектуальну складову такої системи становить неявний апостеріорний оцінювач похибки, значення якого обчислюють на окремому елементі незалежно від решти складових сітки. Такі незначні обчислювальні витрати і гнучкість алгоритму досягають належним вибором ортогонального базису простору апроксимацій похибки, а саме – вибором квадратичної або кусково-лінійної бабл-функції на скінченному елементі, з наступним розв'язуванням задачі про лишок біжучої апроксимації МСЕ.

Запропонована  $h$ -адаптивна схема продемонструвала надійність та ефективність в обчислювальних експериментах з сингулярно збуреними крайовими задачами, що мали великі значення критеріїв подібності Пекле або Струхалю. Від першого кроку описана стратегія адаптування дає змогу монотонно знижувати рівень похибок послідовності генерованих апроксимацій до бажаного з квадратичною швидкістю збіжності її енергетичних норм.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Абрамов Є., Ліпіна О., Сінчук Ю. та ін. Числовий аналіз кусково лінійних апроксимацій  $h$ -адаптивних схем методу скінчених елементів // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: Тези доп. XII Всеукр. наук. конф. Львів, 2005. С. 21–22.

2. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983. 213 с.
3. Квасниця Г., Шинкаренко Г. Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач електростатики // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2002. Вип. 5. С. 95–106.
4. Квасниця Г., Шинкаренко Г. Порівняння простих апостеріорних оцінок похибок методу скінченних елементів для задачі електростатики // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2003. Вип. 7. С. 162–174.
5. Шинкаренко Г., Голуб Н., Щербина Ю. Застосування нейронних мереж для розв'язування крайових задач Штурма - Ліувілля. // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2004. Вип. 8. С. 23–37.
6. Шинкаренко Г., Козаревська Ю. Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: h-адаптивний метод скінченних елементів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2002. Вип. 5. С. 153–165.
7. Ainsworth M., Oden J.T. A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. New York: John Wiley & Sons, 2000.
8. Babuška I., Strouboulis T. The Finite Element Method and its Reliability. Oxford: Clarendon Press, 2001.
9. Bangerth W., Rannacher R. Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations. Basel: Birkhauser, 2003.
10. Eriksson K., Estep D., Hansbo P., Johnson C. Introduction to adaptive methods for differential equations // Acta Numerica. 1995. Vol. 4. P. 105–158.
11. Stein E. (ed.), Ramm E. Error-controlled Adaptive Finite Elements in Solid Mechanics. / New York: John Wiley & Sons, 2003.
12. T. Gratsch, K.-J. Bathe. A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis // Computers&Struct. 2005. Vol. 83. P. 235–265.
13. Melenk J.M. hp-Finite Element Method for Singular Perturbations. Berlin: Springer, 2002.
14. Morton K. Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems. London: Chapman & Hall, 1996. 372 p.
15. Verfurth R. A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Stuttgart: Wiley-Teubner, 1996.
16. Zienkiewicz O. C., Taylor, R. L. The Finite Element Method. Vol. 1: The Basis. Butterworth-Heinemann. Oxford, 2002.

## H-ADAPTIVE FINITE ELEMENTS METHOD FOR ONE-DIMENSIONAL BOUNDARY PROBLEM SOLUTION

**E. Abramov<sup>\*</sup>, O. Lipina<sup>\*</sup>, G. Shynkarenko<sup>\*,\*\*</sup>, A. Yamelynets<sup>\*</sup>**

*<sup>\*</sup>Ivan Franko National University of Lviv*

*Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: [kis@franko.lviv.ua](mailto:kis@franko.lviv.ua)*

*<sup>\*\*</sup>Politechnika Opolska, Luboszycka 5, Opole, 45036, Polska e-mail: [garlu@po.opole.pl](mailto:garlu@po.opole.pl)*

This article considers the application of h-adaptive finite elements method for one-dimensional second degree differential equations. Special attention is paid to the construction of a posteriori error estimator for piecewise linear approximations that is used for mesh adaptation and retrieving solution with a priori set accuracy. The effectiveness of the suggested scheme is illustrated on several examples - singular perturbed boundary problems.

*Key words:* singular perturbed boundary value problem, finite element method, piecewise linear approximation, a posteriori error estimate, mesh adaptation

*Стаття надійшла до редколегії 10.03.2006*

*Прийнята до друку 31.05.2006*