

## Minimizzazione Automi

## Ricordate l'esercizio...

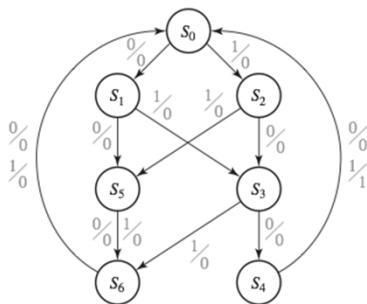
Un circuito ha un ingresso (X) e un'uscita Z. Il circuito produce un'uscita Z=1 in corrispondenza delle sequenze 0101 o 1001

Dopo aver ricevuto 4 input, il circuito si resetta

Esempio:

X =	0101	0010	1001	0100
Z =	0001	0000	0001	0000

## Soluzione



Stato	Sequenza ricevuta
S <sub>0</sub>	Reset
S <sub>1</sub>	0
S <sub>2</sub>	1
S <sub>3</sub>	01 o 10
S <sub>4</sub>	010 o 100
S <sub>5</sub>	Due input ricevuti, 1 impossibile
S <sub>6</sub>	Tre input ricevuti, 1 impossibile

## Discussione

La soluzione precedente è stata **ottenuta ragionando sull'eventuale presenza di stati ridondanti**, cercando quindi di **minimizzare il numero di stati da creare**....

## Alternativa

- Proviamo a costruire un automa in maniera “stupida”
- Ovvero, tanti stati quante le sequenze di lunghezza da 0 (reset), 1 (due sequenze), 2 (4 sequenze) 3 (otto sequenze)

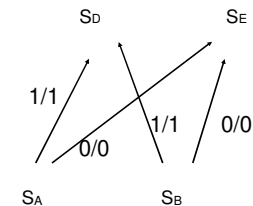
## Tabella degli stati

Sequenza di input	Stato Corrente	Stato succ.		Output (Z)	
		X = 0	X = 1	X = 0	X = 1
reset	A	B	C	0	0
0	B	D	E	0	0
1	C	F	G	0	0
00	D	H	I	0	0
01	E	J	K	0	0
10	F	L	M	0	0
11	G	N	P	0	0
000	H	A	A	0	0
001	I	A	A	0	0
010	J	A	A	0	1
011	K	A	A	0	0
100	L	A	A	0	1
101	M	A	A	0	0
110	N	A	A	0	0
111	P	A	A	0	0

0101 1001

Sono tutti utili?

## Esempio



Per ogni ingresso,  $S_A$  e  $S_B$  **conducono allo stesso stato e producono la stessa uscita**

## Stati equivalenti

- Intuitivamente, due stati sono equivalenti se per ogni ingresso producono la stessa transizione allo stato successivo (o a stati equivalenti) E la stessa uscita.
- In altri termini, hanno *le stesse funzioni di transizione  $f$  e di caratterizzazione  $g$*

## Iniziamo con la rimozione...

Sequenza di input	Stato Corrente	Stato succ.		Output (Z)	
		X = 0	X = 1	X = 0	X = 1
reset	A	B	C	0	0
0	B	D	E	0	0
1	C	F	G	0	0
00	D	H	I	0	0
01	E	J	K	0	0
10	F	L	M	0	0
11	G	N	P	0	0
000	H	A	A	0	0
001	<del>I</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
010	J	A	A	0	1
011	<del>K</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
100	L	A	A	0	1
101	<del>M</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
110	<del>N</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
111	<del>P</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>

$H \equiv I \equiv K \equiv M \equiv N \equiv P$

## Iniziamo con la rimozione...

Sequenza di input	Stato Corrente	Stato succ.		Output (Z)	
		X = 0	X = 1	X = 0	X = 1
reset	A	B	C	0	0
0	B	D	E	0	0
1	C	F	G	0	0
00	D	H	I	0	0
01	E	J	K	0	0
10	F	L	M	0	0
11	G	N	P	0	0
000	H	A	A	0	0
001	<del>I</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
010	J	A	A	0	1
011	<del>K</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
100	<del>L</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>1</del>
101	<del>M</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
110	<del>N</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
111	<del>P</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>

$H \equiv I \equiv K \equiv M \equiv N \equiv P, J \equiv L$

## Passo successivo

- Sostituiamo I, K, M, N, P con H ovunque
- Sostituiamo, L con J ovunque

## Passo successivo

Sequenza di input	Stato Corrente	Stato succ.		Output (Z)	
		X = 0	X = 1	X = 0	X = 1
reset	A	B	C	0	0
0	B	D	E	0	0
1	C	F	G	0	0
00	D	H	H	0	0
01	E	J	H	0	0
10	F	J	H	0	0
11	G	H	H	0	0
000	H	A	A	0	0
001	<del>I</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
010	J	A	A	0	1
011	<del>K</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
100	<del>L</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>1</del>
101	<del>M</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
110	<del>N</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
111	<del>P</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>

$H \equiv I \equiv K \equiv M \equiv N \equiv P, J \equiv L$

A questo punto possiamo fare ulteriori riduzioni...

## Ulteriori riduzioni...

Sequenza di input	Stato Corrente	Stato succ.		Output (Z)	
		X = 0	X = 1	X = 0	X = 1
reset	A	B	C	0	0
0	B	D	E	0	0
1	C	F	G	0	0
00	D	H	H	0	0
01	E	J	H	0	0
10	<del>F</del>	<del>J</del>	<del>H</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
11	<del>G</del>	<del>H</del>	<del>H</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
000	H	A	A	0	0
001	<del>I</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
010	J	A	A	0	1
011	<del>K</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
100	<del>L</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>1</del>
101	<del>M</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
110	<del>N</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
111	<del>P</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>

$H \equiv I \equiv K \equiv M \equiv N \equiv P, J \equiv L, D \equiv G, E \equiv F$

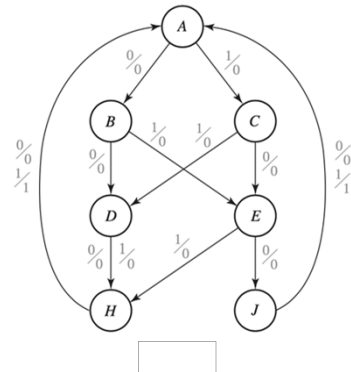
## Ulteriori riduzioni...

Sequenza di input	Stato Corrente	Stato succ.		Output (Z)	
		X = 0	X = 1	X = 0	X = 1
reset	A	B	C	0	0
0	B	D	E	0	0
1	C	E	D	0	0
00	D	H	H	0	0
01	E	J	H	0	0
10	<del>F</del>	<del>J</del>	<del>H</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
11	<del>G</del>	<del>H</del>	<del>H</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
000	H	A	A	0	0
001	<del>I</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
010	J	A	A	0	1
011	<del>K</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
100	<del>L</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>1</del>
101	<del>M</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
110	<del>N</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
111	<del>P</del>	<del>A</del>	<del>A</del>	<del>0</del>	<del>0</del>

$H \equiv I \equiv K \equiv M \equiv N \equiv P, J \equiv L, D \equiv G, E \equiv F$

## Tabella e grafo ridotti

Stato Corrente	Stato succ.		Output (Z)	
	X = 0	X = 1	X = 0	X = 1
A	B	C	0	0
B	D	E	0	0
C	E	D	0	0
D	H	H	0	0
E	J	H	0	0
H	A	A	0	0
J	A	A	0	1



Riduzione di stati equivalenti  
mediante **tabella delle  
implicazioni**  
(**implication chart**)

## Esempio

Consideriamo la seguente tabella delle transizioni:

Stato Corrente	Stato succ.		Output
	X = 0	1	
a	d	c	0
b	f	h	0
c	e	d	1
d	a	e	0
e	c	a	1
f	f	b	1
g	b	h	0
h	c	g	1

## Implication chart

- Costruiamo l'implication chart
- **Matrice (triangolare bassa) con una cella per ogni possibile coppia di stati**

## Implication chart

Stato Corrente	Stato succ. X = 0 1		Output
	X = 0	1	
a	d	c	0
b	f	h	0
c	e	d	1
d	a	e	0
e	c	a	1
f	f	b	1
g	b	h	0
h	c	g	1

## Stati sicuramente diversi

- Se hanno output diversi, due stati sono sicuramente NON equivalenti
- Inseriamo una X nella cella corrispondente della tabella se due stati sono sicuramente NON equivalenti per uscite diverse

## Implication chart

Stato Corrente	Stato succ. X = 0 1		Output
	X = 0	1	
a	d	c	0
b	f	h	0
c	e	d	1
d	a	e	0
e	c	a	1
f	f	b	1
g	b	h	0
h	c	g	1

## Come proseguiamo

Stato Corrente	Stato succ. X = 0 1		Output
	X = 0	1	
a	d	c	0
b	f	h	0
c	e	d	1
d	a	e	0
e	c	a	1
f	f	b	1
g	b	h	0
h	c	g	1

- Per gli stati con lo stesso output, definiamo la condizione che si deve verificare affinché gli stati coincidano
- In termini di stato successivo
- Ad esempio:  

$$a \equiv b \leftrightarrow d \equiv f \text{ and } c \equiv h$$

## Aggiungiamo le coppie di implicazioni tra stati...

Stato Corrente	Stato succ.		Output
	X = 0	1	
a	d	c	0
b	f	h	0
c	e	d	1
d	a	e	0
e	c	a	1
f	f	b	1
g	b	h	0
h	c	g	1

b	d-f						
	c-h						
c	X	X					
	a-d	a-f	X				
d	c-e	e-h					
e	X	X	c-e	X			
			a-d				
f	X	X	e-f	X	c-f		
			b-d		a-b		
g	b-d	b-f	X	a-b	X	X	
	c-h		e-h				
h	X	X	c-e	X	a-g	c-f	
			d-g		b-g	X	
	a	b	c	d	e	f	g

## Eliminiamo le auto-implicazioni

Stato Corrente	Stato succ. X = 0 1		Output
a	d	c	0
b	f	h	0
c	e	d	1
d	a	e	0
e	c	a	1
f	f	b	1
g	b	h	0
h	c	g	1

b	d-f c-h						
c	X	X					
d	<del>a-d</del> c-e	a-f e-h	X				
e	X	X	<del>a-d</del>	X			
f	X	X	e-f b-d	X	c-f a-b		
g	b-d c-h	b-f	X	a-b e-h	X	X	
h	X	X	c-e d-g	X	a-g c-f b-g	X	
	a	b	c	d	e	f	g

## Passo successivo

- A questo punto ogni cella è stata riempita con una **X** o con una o più coppie di implicazioni
- Analizziamo ciascuna coppia, e se fa riferimento a una cella in cui c'è già una **X**, allora l'implicazione non può essere vera, quindi la annulliamo

## Eliminiamo le implicazioni non vere

Stato Corrente	Stato succ.		Output
	X = 0	1	
a	d	c	0
b	f	h	0
c	e	d	1
d	a	e	0
e	c	a	1
f	b	b	1
g	b	h	0
h	c	g	1

b	<del>X</del>						
c	X	X					
d	<del>a-d</del> c-e	<del>a-f</del> e-h	X				
e	X	X	<del>a-d</del> a-f	X			
f	X	X	<del>b-f</del> b-g	X	<del>c-f</del>		
g	<del>b-d</del> c-h	<del>b-f</del> e-h	X	<del>a-b</del> e-f	X	X	
h	X	X	c-e d-g	X	a-g	<del>c-f</del> b-g	
	a	b	c	d	e	f	g

## Iterazione successiva

Effettuiamo un'iterazione successiva, effettuando ulteriori eliminazioni in base alle X inserite in precedenza

Iteriamo il procedimento finché non riusciamo più a effettuare eliminazioni

## Eliminiamo le ulteriori implicazioni non vere

Stato Corrente	Stato succ. X = 0 1		Output
	X = 0	1	
a	d	c	0
b	f	h	0
c	e	d	1
d	a	e	0
e	c	a	1
f	f	b	1
g	b	h	0
h	c	g	1

b	X						
c	X	X					
d	<del>a-d</del>	X	X				
e	X	X	<del>a-d</del>	X			
f	X	X	X	X	X		
g	<del>a-g</del>	X	X	X	X	X	
h	X	X	<del>a-h</del>	X	<del>a-h</del>	X	X
	a	b	c	d	e	f	g

## Iterazione successiva...

Stato Corrente	Stato succ. X = 0 1		Output
	X = 0	1	
a	d	c	0
b	f	h	0
c	e	d	1
d	a	e	0
e	c	a	1
f	f	b	1
g	b	h	0
h	c	g	1

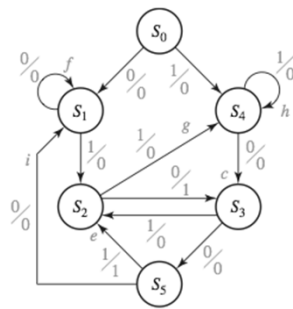
b	X						
c	X	X					
d	<del>a-d</del>	X	X				
e	X	X	<del>a-d</del>	X			
f	X	X	X	X	X		
g	X	X	X	X	X	X	
h	X	X	X	X	X	X	X
	a	b	c	d	e	f	g

Non posso eliminare più nulla...





## Soluzione ottenuta in precedenza



Stato	Sequenza termina per
$S_0$	Reset
$S_1$	0 (ma non 10)
$S_2$	01
$S_3$	10
$S_4$	1 (ma non 01)
$S_5$	100