2 Vettori in in $\mathbb{R}^n$

Definizione 2.1 (Vettore in $\mathbb{R}^n$) *Si definisce* ***vettore ad n componenti reali*** *una n-pla ordinata di numeri reali. Le componenti del vettore possono essere disposte in colonna (vettore colonna):*

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

oppure su una riga i.e. $\boldsymbol{a} = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n)$ *(vettore riga). I vettori vengono indicati con una lettera minuscola in grassetto.*

Esempio 2.1 *Il vettore*

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 4 \end{bmatrix}$$

è un vettore colonna. Il vettore

$$\boldsymbol{a} = (1\ 2\ \dots\ 4)$$

è un vettore riga.

Definizione 2.2 (Rappresentazione geometrica di un vettore) *Dato un* riferimento cartesiano *xOy (nel piano) o Oxyz (nello spazio) un vettore* $\boldsymbol{v}$ *è interpretabile come un segmento orientato dall'origine O verso il punto le cui coordinate sono le componenti di* $\boldsymbol{v}$.

Definizione 2.3 (Uguaglianza fra vettori) *Due vettori* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *sono uguali se le componenti corrispondenti coincidono.*

Esempio 2.2 *Se* $\boldsymbol{u} = (1, 3, 4)$ *e* $\boldsymbol{v} = (1, 3, 4)$ *sono uguali, invece* $\boldsymbol{u} = (1, 3, 4)$ *e* $\boldsymbol{w} = (1, 4, 3)$ *non sono uguali, poichè la seconda e la terza componente sono diverse.*

Definizione 2.4 (Prodotto di un vettore per uno scalare) *Dato un vettore* $\boldsymbol{a}$ *ed uno scalare* λ*, il prodotto di* $\boldsymbol{a}$ *per lo scalare* λ *è dato da:* $\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$.

Definizione 2.5 (Rappresentazione geometrica del prodotto di un vettore per uno scalare) *Con l'operazione di prodotto di un vettore per uno scalare si ottiene un altro vettore che ha la stessa direzione del vettore da moltiplicare e verso coincidente con quello del primo vettore se lo scalare è maggiore di zero, opposto se lo scalare è negativo. Inoltre la lunghezza del nuovo vettore è pari al prodotto della lunghezza del vettore originario per il valore assoluto dello scalare.*

Definizione 2.6 (Somma di vettori) *I vettori* $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *e* $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ *possono essere sommati se hanno lo stesso numero di componenti. Il vettore somma è* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$.

L'operazione di addizione tra vettori ammette la seguente interpretazione geometrica: il vettore somma è dato dalla diagonale passante per O del parallelogramma che ha per lati i due vettori addendi.

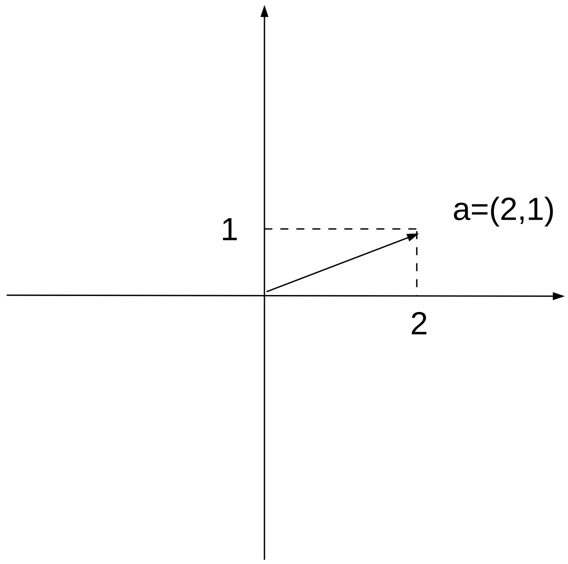

Figure 1: Rappresentazione geometrica del vettore $\boldsymbol{a} = [2, 1]$

Definizione 2.7 (Prodotto scalare euclideo) *Si definisce* prodotto scalare di due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$*, e si indica con* $\boldsymbol{uv}$*, lo scalare ottenuto sommando i prodotti delle componenti omologhe. Cioè se* $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *e* $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$*, si ha:*

$$\boldsymbol{uv} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n. \tag{1}$$

Esempio 2.3 *Dati i vettori* $\boldsymbol{u} = (2, -1, 4, 5]$ *e* $\boldsymbol{v} = [0, 9, -3, 2]$*, si ottiene:*

$$\boldsymbol{uv} = (2, -1, 4, 5)(0, 9, -3, 2) = 0 \cdot 2 - 1 \cdot 9 + 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = -11$$

Definizione 2.8 (Norma euclidea) *Si definisce* norma euclidea *o* modulo *di un vettore* u *la radice quadrata del prodotto scalare* $\boldsymbol{uu}$

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(\boldsymbol{uu})} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots u_n^2}. \tag{2}$$

Da un punto di vista geometrico, la norma euclidea esprime la lunghezza del vettore $\boldsymbol{u}$*.*

Esempio 2.4 *Sia* $\boldsymbol{u} = [-1\ 5\ 3\ 0]$*, risulta* $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{1 + 25 + 9 + 0} = \sqrt{35}$*.*

Definizione 2.9 (Versore) *Si definisce* versore *un vettore* $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^n$ *tale che* $\|\boldsymbol{e}\| = 1$*.*

Esempio 2.5 *In* $\mathbb{R}^3$ *sono versori i vettori che identificano gli assi cartesiani*

$$\boldsymbol{i} = (1, 0, 0), \boldsymbol{j} = (0, 1, 0), \boldsymbol{k} = (0, 0, 1).$$

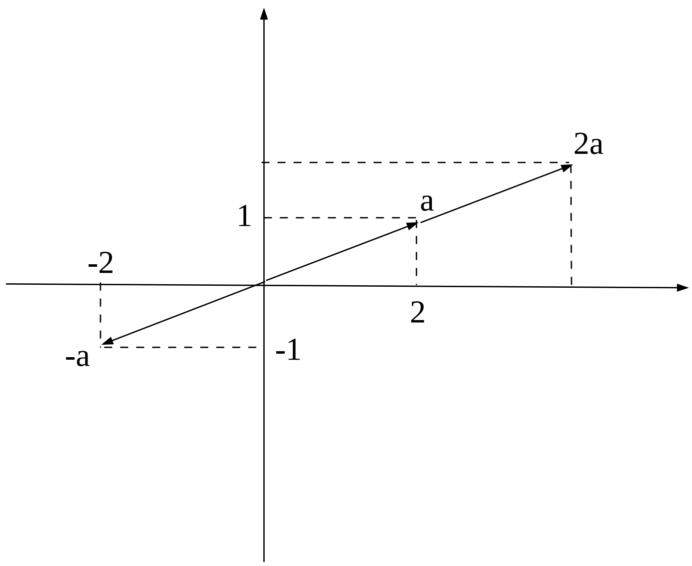

Figure 2: Rappresentazione geometrica del prodotto del vettore $\boldsymbol{a} = (2, 1)$ per lo scalare $\lambda = 2$

*Considerato un qualsiasi vettore non nullo $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, tale vettore è **normalizzabile**, è cioè posssibile considerare un versore che abbia la stessa direzione e lo stesso verso di $\boldsymbol{u}$ ma modulo unitario:*

$$\boldsymbol{e}_u = \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}.$$

Con riferimento al vettore $\mathbf{u}$ dell'esempio 2.4 risulta

$$\boldsymbol{e}_u = \frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{35}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}}, 0\right) \text{ e } \|\boldsymbol{e}_u\| = \frac{\|\boldsymbol{u}\|}{\sqrt{35}} = 1.$$

Osservazione 2.1 (Distanza tra due vettori) *Siano $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ due vettori. Si definisce distanza tra $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ la lunghezza del segmento che unisce i punti $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$.*

La distanza tra i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ corrisponde lunghezza del vettore $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ $(= \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|)$. Il risultato si ricava osservando che, sommando i vettori $\boldsymbol{u}$ e $-\boldsymbol{v}$ mediante la regola del parallelogramma, il vettore $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ ha la stessa lunghezza del segmento che unisce i punti $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ e che misura, appunto, la distanza tra $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$.

Teorema 2.1 (Interpretazione geometrica del prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$) *Dati due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ in $\mathbb{R}^2$, sia θ l'angolo da essi formato. Vale la seguente relazione: $\boldsymbol{uv} = \|u\|\|v\| \cos\theta$.*

Dimostrazione Consideriamo il triangolo formato dal vettore $\boldsymbol{u}$, dal vettore $\boldsymbol{v}$ e dal segmento che unisce i punti $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$. Come detto in precedenza, la lunghezza di questo segmento è pari a $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$. Per il teorema del coseno si ha:

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - 2\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| \cos\theta$$

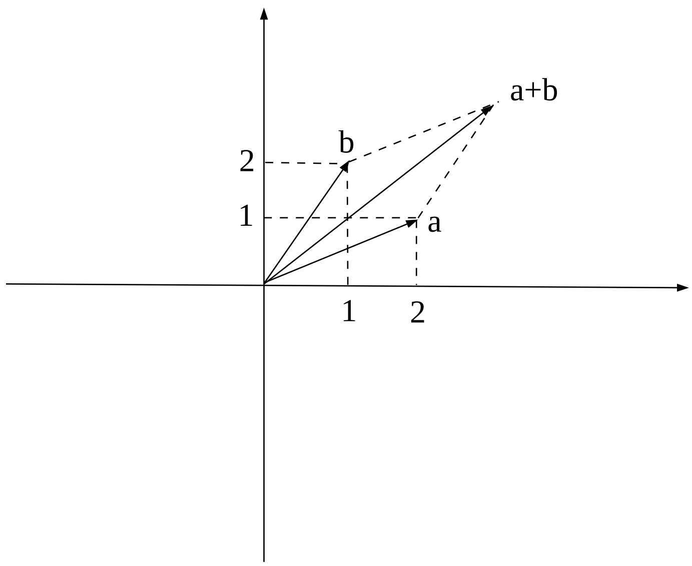

Figure 3: Somma dei vettori $\boldsymbol{a} = (2, 1)$ e $\boldsymbol{b} = (1, 2)$: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (3, 3)$

da cui:

$$\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| \cos\theta = \frac{1}{2}(\|\boldsymbol{u}\|^2+\|\boldsymbol{v}\|^2-\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2) = \frac{1}{2}[u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2-(u_1-v_1)^2-(u_2-v_2)^2] = u_1v_1+u_2v_2 = \boldsymbol{uv}$$

Corollario 2.1 (Ortogonalità di due vettori) *Due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ si dicono* ortogonali *se il loro prodotto scalare è nullo, i.e. se $\boldsymbol{uv} = 0$.*

Esempio 2.6 *Per i vettori $\boldsymbol{u} = (2, -1, 0, 3)$ e $\boldsymbol{v} = (0, 3, -3, 1)$ si ottiene $\boldsymbol{uv} = 0{\cdot}2-1{\cdot}3+0{\cdot}(-3)+3{\cdot}1 = 0$, e dunque i vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono ortogonali.*

Teorema 2.2 (Cauchy-Schwarz) *Siano $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ due vettori allora*

$$|\boldsymbol{uv}| \leq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|. \tag{3}$$

L'uguaglianza in (3) vale se e solo se i) uno dei due vettori è il vettore nullo o ii) i due vettori sono fra loro proporzionali, i.e. se esiste uno scalare λ tale che $\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{v}$.

Dimostrazione Dal teorema (2.1), poichè $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, si ha che la disequazione (3) è sempre verificata. La disequazione è soddisfatta all'uguaglianza se $\cos\theta = 1$ o $\cos\theta = -1$. ma in questo caso i due vettori sono nella stessa direzione o nella direzione opposta e pertanto uno è multiplo dell'altro.

2.1 Esercizi

i) Calcolare l'angolo tra i vettori $\boldsymbol{u} = (-2, 1, 1, 4)$ e $\boldsymbol{v} = (1, 2, 2, -1)$.

ii) Determinare i valori del parametro k per i quali i vettori $\boldsymbol{u} = (1, 3, 7, -1)$ e $\boldsymbol{v} = (3, 5, 1, k)$ sono ortogonali.