Ingegneria Elettronica per l'Automazione e le Telecomunicazioni
MATEMATICA 2 A.A. 2021/2022
ESAME 21 Aprile 2022

Nome e Cognome	N. Matricola

Problema	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

Note: Non si possono utilizzare calcolatori o appunti. Il valore in punti (su 100) di ogni esercizio è indicato sul margine sinistro.

Formule per la trasformata di Laplace

$y = f(t)$	$Y(p) = \mathcal{L}(y) = F(p)$	
1	$\frac{1}{p}$	$\text{Re } p > 0$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	$\text{Re } (p+a) > 0$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Im } a\rvert$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Im } a\rvert$
$\sinh at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Re } a\rvert$
$\cosh at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Re } a\rvert$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\text{Re } p > 0, \quad n \geq 0$
te^{at}	$\frac{1}{(p-a)^2}$	$\text{Re } (p+a) > 0$
$e^{-at}(1-at)$	$\frac{p}{(p+a)^2}$	$\text{Re } (p+a) > 0$
$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$	$\text{Re } (p-a) > \lvert\text{Im } \omega\rvert$
$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$	$\text{Re } (p-a) > \lvert\text{Im } \omega\rvert$
$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Im } \omega\rvert$
$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Im } \omega\rvert$
$\frac{\sin\omega t}{t}$	$\arctan\frac{\omega}{p}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Im } \omega\rvert$

Operazioni di trasformazione di Laplace

Operazioni	
1. Trasformata di Laplace	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$
2. Trasformata di una derivata	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$
3. Sostituzione	$\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\} = F(p-a)$
4. Traslazione	$\mathcal{L}\{f(t-b)\} = F(p)e^{-bp}$

(8) 1.a (MB 1.13.30, p.32) Trovare la serie di Maclaurin, fino al quinto ordine incluso, della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

(4) 1.b Determinare per quali valori di x essa converge.

(8) 1.c (MB 2.5.46, p. 54) Risolvere per tutti i possibili valori dei numeri reali x e y la seguente equazione:

$$\frac{x+iy}{x-iy} = -i$$

ANNO ACCADEMICO 2021-2022

(10) **2.a** (MB 14.11.9, p. 719) Trovare i primi termini di ciascuna delle serie di Laurent attorno all'origine, cioè una serie per ogni regione anulare tra i punti singolari, della seguente funzione e trovarne il residuo all'origine

$$f(z) = \frac{\sin z^2}{z^7}$$

(10) **2.b** (MB 14.7.10, p. 699) Calcolare il seguente integrale definito usando il teorema dei residui:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$$

(5) **2.a** (MB 14.2.59, p. 674) Mostrare che la funzione $u(x, y) = e^x \cos y$ è armonica, cioè soddisfa l'equazione di Laplace.

(10) **2.b** Trovare la funzione $f(z)$ di cui la funzione data (in **2.a**) è la parte reale

(5) **2.c** Mostrare che anche la funzione $v(x, y)$ trovata in **2.b** soddisfa l'equazione di Laplace.

(MB 7.8.20, p. 364) La seguente funzione è data in un periodo:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 1, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

(6) **3.a** Disegnare schematicamente diversi periodi della funzione.

(14) **3.b** Sviluppare nella appropriata serie di Fourier

(10) **4.a** (MB, 8.4.10, p. 406) Trovare la soluzione generale della seguente equazione differenziale

$$(x^2 + xy)dy + (y^2 - xy)dx = 0$$

(10) **4.c** (MB, 8.8.10, p. 439) Trovare la funzione $y(t)$ la cui trasformata di Laplace è la seguente funzione

$$Y(p) = \frac{(3p + 2)e^{-p}}{3p^2 + 5p - 2}$$

(MB, 8.9.21, p. 443) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y'' + 4y' + 5y = 26e^{3t}, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 5$$

(10) **5a.** Trovando l'integrale generale e quindi applicando le condizioni iniziali

(10) **5b.** Usando le trasformate di Laplace