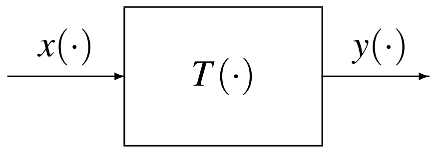
Sistemi nel dominio del tempo

► Un sistema può essere rappresentato mediante un operatore $T(\cdot)$ che converte il segnale $x(\cdot)$ detto *ingresso* nel segnale $y(\cdot)$ detto *uscita*. L'azione del sistema $T(\cdot)$ sul segnale può essere schematizzata come in figura



Per un sistema continuo il legame ingresso/uscita è definito dalla trasformazione

$$y(t) = T[x(t), t]$$

e analogamente per un sistema discreto si ha

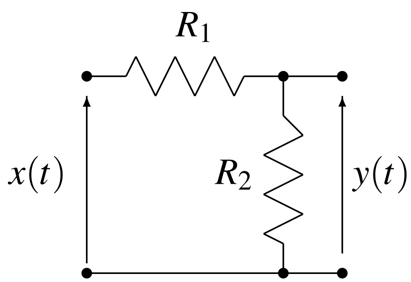
$$y(n) = T[x(n), n]$$

Tali notazioni sottolineano che il valore attuale dell'uscita dipende sia dall'istante di tempo considerato che dal segnale d'ingresso. I sistemi in cui l'uscita dipende, oltre che dall'ingresso, anche dal tempo si dicono tempo-varianti.

Esempio 1 - Partitore resistivo
Si consideri il circuito elettrico in figura, denominato *partitore resistivo*: l'analisi del circuito fornisce immediatamente il legame ingresso-uscita per le tensioni

$$y(t) = ax(t) \qquad a = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

dunque uscita ed ingresso risultano proporzionali con costante di proporzionalità a. Il partitore resistivo è un sistema continuo.



Esempio 2 - Ritardo elementare
Il ritardo elementare di una posizione è il sistema discreto definito dall'equazione

$$y(n) = x(n-1)$$

Esempio 3 - Filtro a media mobile (Moving Average)
Il filtro a media mobile(sinteticamente filtro MA) è il sistema descritto dal legame ingresso-uscita

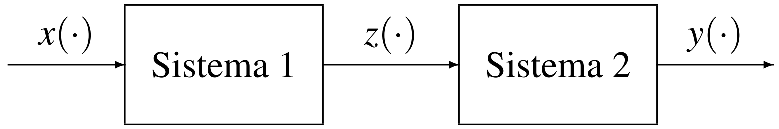
$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k)$$

in cui il valore attuale dell'uscita $y(n)$ è dato dalla somma pesata, con pesi b_k, del valore attuale $x(n)$ e di quelli precedenti $x(n-k),\ \ k = 1\ldots N$ dell'ingresso.

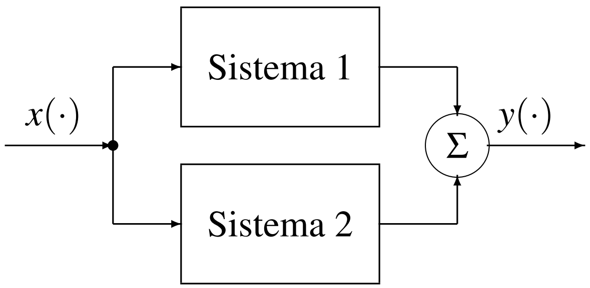
► È possibile costruire sistemi complessi a partire da sistemi semplici. I tipi di connessione fondamentale sono

1. connessione in cascata o serie
2. connessione in parallelo
3. connessione in controreazione

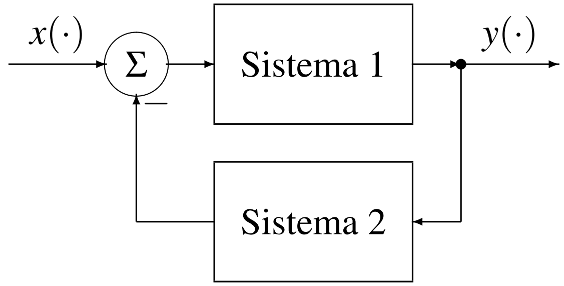
La figura si riferisce al caso di due sistemi, ma l'estensione delle connessioni in cascata ed in parallelo al caso di più sistemi è immediata.



Connessione in cascata



Connessione in parallelo



Connessione in controreazione

Proprietà dei sistemi

► *Dispersività*
L'uscita di un sistema in un determinato istante di tempo dipende in genere da tutto il segnale di ingresso: ciò si esprime dicendo che il sistema è *dispersivo* o *con memoria*. Viceversa un sistema si dice *non dispersivo* o *senza memoria* se il valore $y(t)$ ($y(n)$) dell'uscita all'istante t (n) dipende solo dal corrispondente valore dell'ingresso nello stesso istante ed eventualmente dall'istante di tempo. È immediato verificare che il partitore resistivo è un sistema non dispersivo mentre il ritardo elementare e il filtro MA sono sistemi dispersivi.

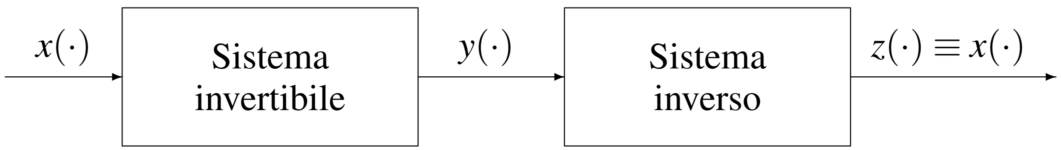
► *Causalità*
Un sistema è *causale* se il valore dell'uscita $y(t)$ all'istante t (n) dipende solo dai valori assunti da $x(\cdot)$ negli istanti di tempo precedenti, t compreso. È immediato verificare che i sistemi degli esempi 1-3 sono casuali, mentre il filtro MA definito dall'equazione

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n+1) \qquad b_1 \neq 0$$

è un sistema discreto, dispersivo e non causale.

Sebbene i sistemi causali abbiano grande importanza, essi non sono gli unici sistemi d'interesse pratico. La causalità non è una restrizione necessaria nell'elaborazione d'immagini e, più in generale, ogni qual volta la variabile indipendente non è il tempo. È parimenti superfluo imporre il vincolo della causalità per tutte le elaborazioni che non sono effettuate in tempo reale: così ad esempio i segnali geofisici, sismici, metereologici vengono spesso prima registrati e poi elaborati in tempo differito senza alcun vincolo di causalità.

► *Invertibilità*
Un sistema è *invertibile* se esiste un altro sistema, detto *sistema inverso*, tale che la cascata del sistema invertibile e del suo inverso realizza la trasformazione identica



Si consideri ad esempio il sistema definito dall'equazione:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

esso realizza la somma corrente dei valori dell'ingresso ed è denominato *accumulatore*; è immediato verificare che tale sistema è invertibile e che il suo inverso è il sistema MA definito dall'equazione

$$z(n) = \nabla_1[y(n)] = y(n) - y(n-1) = x(n)$$

detto anche *differenza prima* e denotato con il simbolo ∇_1.

► *Invarianza temporale*
Un sistema è *temporalmente invariante* se una traslazione dell'ingresso comporta una traslazione della stessa entità anche dell'uscita

$$\begin{array}{ccccccc} x(t) & \longrightarrow & y(t) & \Longrightarrow & x(t-T) & \longrightarrow & y(t-T) \\ x(n) & \longrightarrow & y(n) & \Longrightarrow & x(n-N) & \longrightarrow & y(n-N) \end{array}$$

È possibile verificare che i sistemi considerati negli esempi precedenti sono temporalmente invarianti. Il sistema definito dall'equazione

$$y(n) = nx(n)$$

la cui risposta $y_1(n)$ all'ingresso $x_1(n) = x(n-N)$ vale:

$$y_1(n) = nx_1(n) = nx(n-N) \neq (n-N)x(n-N) = y(n-N)$$

non è temporalmente invariante.

► *Stabilità Bounded Input - Bounded Output*
Un sistema è *stabile* BIBO se la risposta ad un qualunque ingresso limitato è anch'essa limitata. Il sistema definito dall'equazione $y(n) = nx(n)$ non è stabile; infatti la risposta ad un gradino in ingresso, cioè $x(n) = u(n)$, è una rampa, cioè $y(n) = nu(n)$, che non è limitata.

► *Linearità*
Un sistema è *lineare* se è omogeneo ed additivo, cioè se verifica le seguenti condizioni

Omogeneità: ad un cambiamento di scala per le ampiezze dell'ingresso corrisponde uno stesso cambiamento di scala delle ampiezza dell'uscita, cioè

$$x(\cdot) \to y(\cdot) \qquad \Longrightarrow \qquad ax(\cdot) \to ay(\cdot)$$

qualunque sia l'ingresso $x(\cdot)$ e qualunque sia il fattore di scala a.

Additività: la risposta ad un segnale somma è la somma delle singole risposte; cioè

$$\left.\begin{array}{l} x_1(\cdot) \to y_1(\cdot) \\ x_2(\cdot) \to y_2(\cdot) \end{array}\right\} \Longrightarrow x_1(\cdot) + x_2(\cdot) \to y_1(\cdot) + y_2(\cdot)$$

qualunque siano gli ingressi $x_1(\cdot)$ e $x_2(\cdot)$.

Somma e integrale di convoluzione

Nei sistemi lineari, se l'ingresso è una combinazione lineare di segnali

$$x(\cdot) = a_1 x_1(\cdot) + a_2 x_2(\cdot) + a_3 x_3(\cdot) + \dots$$

allora l'uscita è data da

$$y(\cdot) = a_1 y_1(\cdot) + a_2 y_2(\cdot) + a_3 y_3(\cdot) + \dots$$

dove $y_k(\cdot)$ è l'uscita corrispondente a $x_k(\cdot)$.

► Rappresentando un generico ingresso $x(\cdot)$ come sovrapposizione di segnali elementari di cui sia nota la risposta è dunque possibile ottenere la risposta complessiva del sistema sovrapponendo le risposte ai singoli segnali elementari. Una efficace decomposizione dei segnali di ingresso è quella in termini di impulsi introdotta nel capitolo precedente.

1. Decomposizione
Nel caso di segnali a tempo discreto, possiamo esprimere la generica sequenza $x(n)$ come sovrapposizione di impulsi unitari

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Si noti che i singoli impulsi sono traslati in k ed hanno ampiezza $x(k)$.

2. Risposta all'impulso
Detta $h(n)$ la risposta del sistema all'impulso unitario, per l'invarianza temporale del sistema si ha che la risposta all'impulso traslato $\delta(n-k)$ risulta essere $h(n-k)$. Cioè

$$\delta(n) \quad \longrightarrow \quad h(n) \quad \Rightarrow \delta(n-k) \quad \longrightarrow \quad h(n-k)$$

3. Sovrapposizione

Essendo il sistema lineare, la risposta ad $x(n)$ è data dalla combinazione lineare, con coefficienti $x(k)$, delle risposte ai singoli impulsi $\delta(n-k)$. L'uscita $y(n)$ sarà data dalla somma

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n)$$

che prende il nome di *convoluzione discreta* fra $h(n)$ e $x(n)$, o semplicemente di convoluzione se è chiaro che si opera su segnali discreti, e viene denotata col simbolo $x(n) * h(n)$.

► Notiamo che l'ordine dei due fattori è inessenziale; infatti con cambio di variabile è immediato verificare che

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

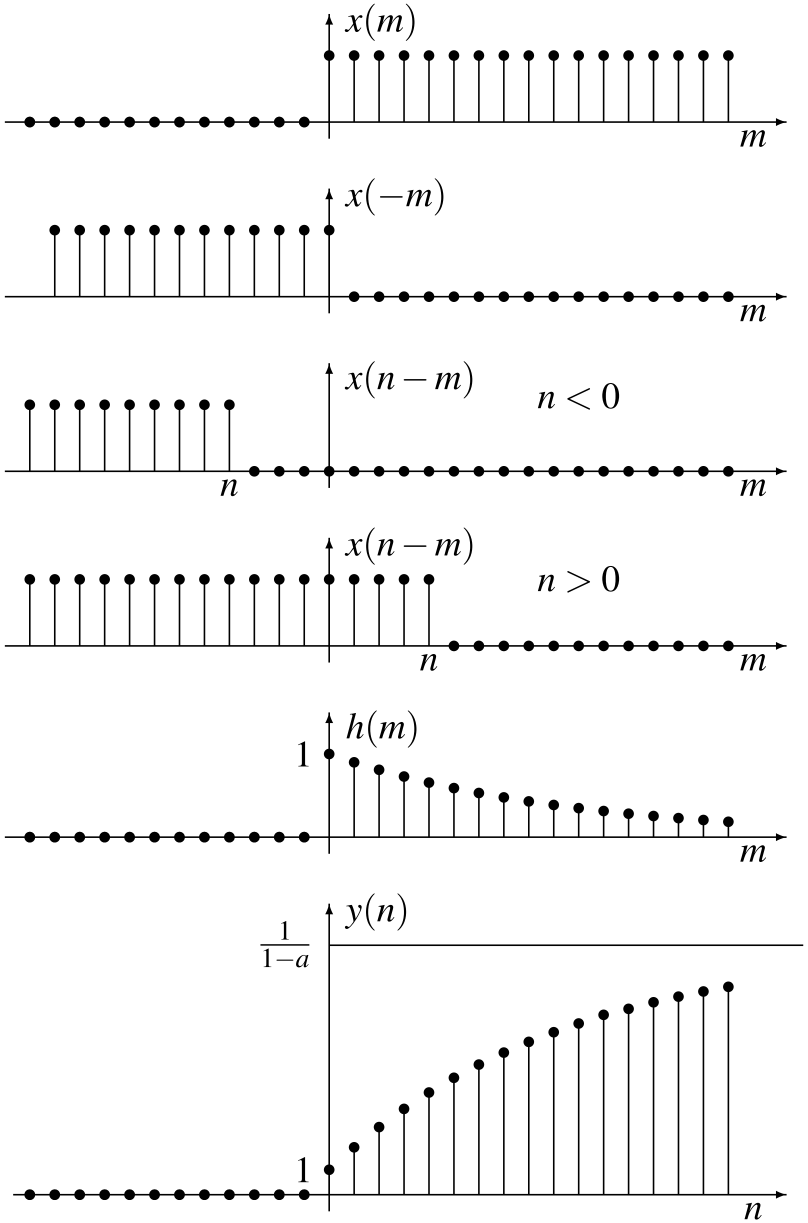
In altri termini la convoluzione è commutativa

$$= x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

Anche i sistemi LTI continui sono caratterizzabili attraverso la risposta impulsiva $h(\tau)$; il corrispondente legame ingresso-uscita è

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = x(t) * h(t)$$

L'integrale prende il nome di *convoluzione* (continua) fra $x(t)$ e $h(t)$. L'interpretazione del secondo integrale è la seguente: siccome è possibile pensare a $x(t)$ come la sovrapposizione di δ-impulsi traslati $\delta(t-\tau)$, al variare del ritardo τ, di area $x(\tau)d\tau$, allora l'uscita del sistema è la sovrapposizione delle relative risposte impulsive $h(t-\tau)$ con gli stessi pesi $x(\tau)d\tau$.



Esempio 1: Convoluzione di un gradino ed una sequenza esponenziale

Ci proponiamo di valutare la risposta al gradino $x(n) = u(n)$ del sistema LTI avente risposta impulsiva $h(n) = a^n u(n)$, con $0 < a < 1$.

Occorre costruire il segnale $x(n-m)$ ribaltando l'ingresso $x(m)$ e traslandolo di n campioni. La traslazione è in ritardo, cioè nel verso positivo dell'asse dei tempi se $n > 0$ o in anticipo di $|n|$ campioni se $n < 0$. L'uscita, per il dato valore di n, si ottiene sommando i valori di $h(m)$ pesati secondo il corrispondente valore di $x(n-m)$, cioè moltiplicando tra loro i campioni relativi allo stesso istante m e poi sommando i vari prodotti.

Per la commutatività della convoluzione i ruoli di segnale e risposta impulsiva possono essere scambiati. Dall'esame dei grafici è chiaro che, per $n < 0$, $x(n-m)$ e $h(m)$ non si sovrappongono, cioè non sono mai contemporaneamente diversi da zero e quindi $y(n) = 0$ per $n < 0$. Per $n \geq 0$, il prodotto $h(m)x(n-m)$ vale

$$h(m)x(n-m) = \begin{cases} a^m & 0 \leq m \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

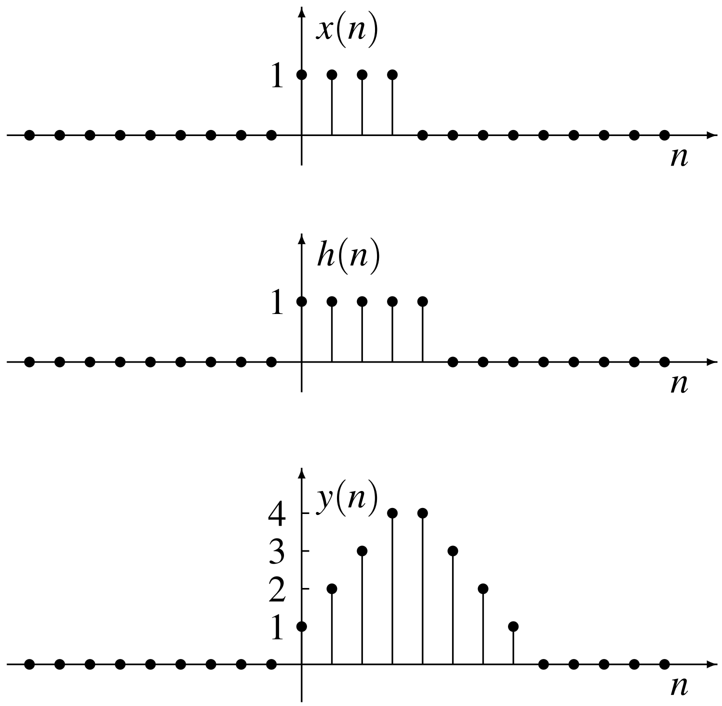
Pertanto, per $n \geq 0$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} a^m = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Esempio 2: Convoluzione di due impulsi rettangolari
Si considerino $x(n)$ e $h(n)$ costituite da impulsi rettangolari di lunghezza $N = 4$ e $M = 5$ rispettivamente, cioè:

$$x(n) = \mathscr{R}_N(n) \qquad h(n) = \mathscr{R}_M(n)$$

Applicando la procedura di convoluzione si ha che $x(n) * h(n)$ ha l'andamento trapezoidale indicato in figura



► Dall'esempio precedente risulta che la convoluzione di due sequenze rettangolari di lunghezza N e M è una sequenza trapezoidale di lunghezza $L = N + M - 1$. Ponendo $M = N$, si ricava anche che la convoluzione di due sequenze rettangolari della stessa lunghezza è una sequenza triangolare di lunghezza ed ampiezza $2N - 1$ mentre, in generale, la convoluzione di due qualsiasi sequenze di lunghezza finita, N e M è una sequenza di lunghezza $L = N + M - 1$.

Proprietà della convoluzione

► *Proprietà associativa e commutativa*

$$x(n) * h(n) * g(n) = x(n) * [h(n) * g(n)] = [x(n) * h(n)] * g(n)$$

Tale proprietà mostra che la connessione in serie di due sistemi LTI aventi risposta impulsiva $h(n)$ e $g(n)$ è equivalente a un unico sistema LTI con risposta impulsiva $h(n) * g(n)$. Inoltre, la risposta impulsiva globale è indipendente dall'ordine con cui i sistemi sono connessi in serie. Questa proprietà si può estendere ad un numero arbitrario di sistemi connessi in serie.

► *Proprietà distributiva*

$$x(n) * [h(n) + g(n)] = x(n) * h(n) + x(n) * g(n)$$

Tale proprietà mostra che due sistemi LTI in parallelo sono equivalenti ad un unico sistema LTI la cui risposta impulsiva è la somma delle singole risposte impulsive. Questa proprietà è generalizzabile ad un numero arbitrario di sistemi connessi in parallelo.

► *Elemento unitario*
È immediato verificare che l'impulso $\delta(n)$ si comporta come l'unità nei confronti della convoluzione, nel senso che si ha

$$x(n) * \delta(n) = x(n)$$

Si interpreta quindi $\delta(n)$ come la risposta impulsiva del sistema identico.

► *invarianza temporale*
Detto $y(n)$ il risultato della convoluzione fra $x(n)$ e $h(n)$, il risultato della convoluzione fra $x(n-N)$ e $h(n)$ è $y(n-N)$,

$$x(n) * h(n) = y(n) \implies x(n-N) * h(n) = y(n-N)$$

Le proprietà della convoluzione sono sintetizzate nella successiva tabella, sia con riferimento al caso di segnali a tempo continuo che di sequenze.

Commutativa	$x(\cdot) * h(\cdot) = h(\cdot) * x(\cdot)$
Associativa	$x(\cdot) * [h_1(\cdot) * h_2(\cdot)] = [x(\cdot) * h_1(\cdot)] * h_2(\cdot) = x(\cdot) * h_1(\cdot) * h_2(\cdot)$
Distributiva	$x(\cdot) * [h_1(\cdot) + h_2(\cdot)] = x(\cdot) * h_1(\cdot) + x(\cdot) * h_2(\cdot)$
Cambiamento di scala	$[ax(\cdot)] * h(\cdot) = x(\cdot) * [ah(\cdot)] = a[x(\cdot) * h(\cdot)]$
Invarianza temporale	$x(n-L) * h(n-N) = [x * h](n-L-N)$ $x(t-T) * h(t-\Delta) = [x * h](t-T-\Delta)$
Esistenza dell'unità	$x(\cdot) * \delta(\cdot) = \delta(\cdot) * x(\cdot) = x(\cdot)$

► La convoluzione continua ha le stesse proprietà della convoluzione discreta. La procedura per calcolare l'uscita per uno specifico valore di t è la seguente: si determina il segnale $x(t-\tau)$ (considerato come funzione di τ con t fisso) mediante una riflessione intorno all'asse verticale e una traslazione (in ritardo se $t \geq 0$, in anticipo se $t < 0$); si moltiplicano poi i segnali $x(t-\tau)$ e $h(\tau)$ e si calcola l'area sottesa dal prodotto; al variare di t si ottiene l'intero segnale di uscita. Ovviamente i ruoli di $x(t)$ e $h(t)$ possono essere invertiti secondo convenienza.

Sistemi ARMA

Una categoria di sistemi LTI discreti di notevole importanza nelle applicazioni è costituita da quei sistemi per i quali l'ingresso $x(n)$ e l'uscita $y(n)$ soddisfano un'equazione alle differenze, lineare, a coefficienti costanti, di ordine N, cioè del tipo:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)$$

Iniziamo con l'osservare che, nel caso particolare $N = 0$ e $a_0 \neq 0$, tale equazione si riscrive

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{b_k}{a_0} x(n-k)$$

e pertanto definisce un sistema LTI: precisamente tale sistema è il filtro MA con risposta impulsiva

$$h(m) = \begin{cases} b_m/a_0 & m = 0, 1, \ldots, M-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Poiché la risposta impulsiva ha durata finita, precisamente è lunga M campioni, i filtri MA sono anche detti filtri FIR (Finite Impulsive Response). I sistemi descritti dall'quazione precedente sono comunemente chiamati sistemi ARMA (Auto Regressive Moving Average) e comprendono come casi particolari i sistemi MA, ed sistemi AR, corrispondenti a $M = 1$ e $b_0 \neq 0$.

Legami ingresso-uscita per le funzioni di correlazione
Il problema che affrontiamo è quello di determinare la componente continua e la funzione di autocorrelazione dell'uscita di un sistema LTI

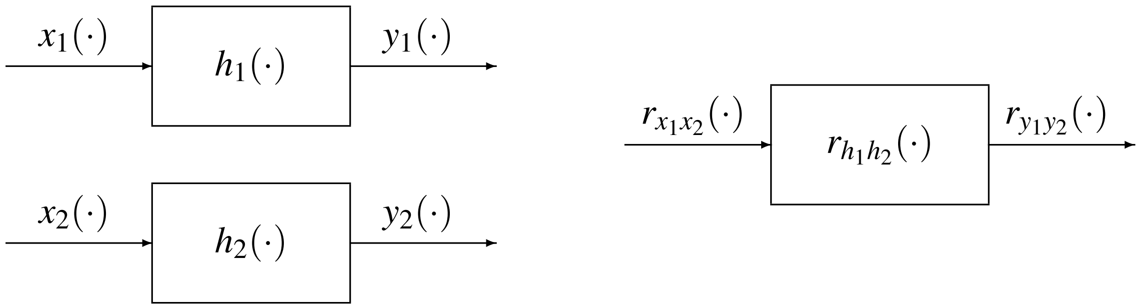
► *Componente continua dell'uscita*
Riferendoci, per fissare le idee, ai segnali a tempo discreto, la media temporale all'uscita di un sistema LTI è

$$\begin{aligned} < y(n) > &= < h(n) * x(n) > \\ &= < \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) > \\ &= < x(n-m) > \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \\ &= x_{dc}\, H(0) \end{aligned}$$

ove si è introdotto il *guadagno in continua* del sistema $H(0)$ pari all'area sottesa dalla risposta impulsiva, cioè:

$$H(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)$$

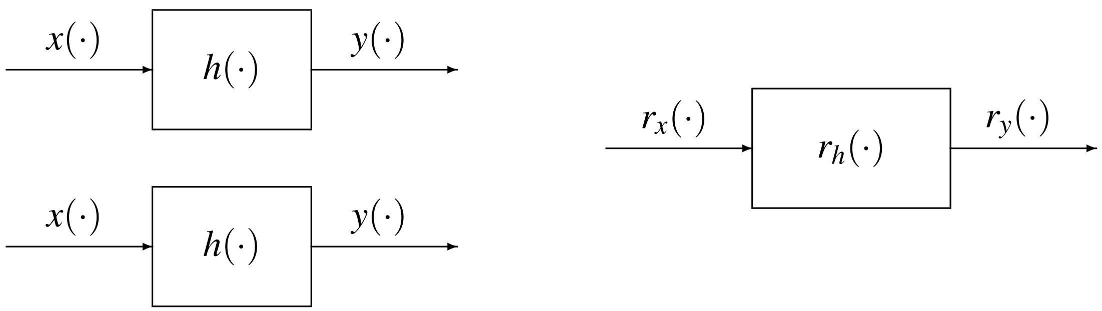
Pertanto, la componente continua in uscita al sistema è proporzionale a quella in ingresso, con costante di proporzionalità pari al guadagno in continua.
► *Funzioni di correlazione*
Consideriamo la situazione in figura, da cui, particolarizzando segnali e sistemi, è possibile ricavare i vari casi di interesse. I segnali in gioco possono essere di energia o di potenza, a tempo discreto o continuo: a seconda dei casi le funzioni di correlazione ammettono espressioni diverse, ma in ogni caso possono essere riguardate come prodotti scalari.



Si può dimostrare che la mutua correlazione $r_{y_1y_2}(\cdot)$ tra le uscite dei sistemi in funzione di quella $r_{x_1x_2}(\cdot)$ tra gli ingressi ai sistemi aventi risposta impulsiva $h_1(\cdot)$ e $h_2(\cdot)$ è data da

$$r_{y_1y_2}(\cdot) = r_{x_1x_2}(\cdot) * h_1(\cdot) * h_2^*(-(\cdot)) = r_{x_1x_2}(\cdot) * r_{h_1h_2}(\cdot)$$

Particolarizzando lo schema generale è immediato derivare il legame ingresso-uscita per la funzione di autocorrelazione. In questo caso si ottiene lo schema in figura



da cui si ricava che l'autocorrelazione dell'uscita è pari alla convoluzione dell'autocorrelazione dell'ingresso e di quella della risposta impulsiva, cioè

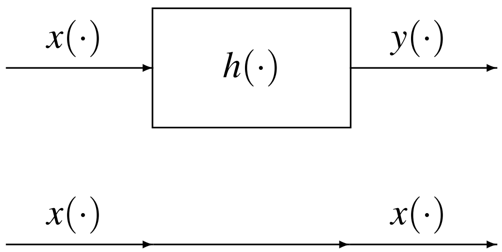
$$r_y(\cdot) = r_x(\cdot) * h(\cdot) * h^*(-(\cdot)) = r_x(\cdot) * r_h(\cdot)$$

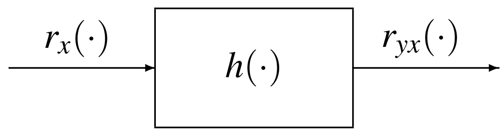
L'equazione generale consente anche di ricavare come casi particolari le mutue correlazioni uscita-ingresso e ingresso-uscita. Si ha infatti, dallo schema di figura,

$$r_{yx}(\cdot) = r_x(\cdot) * h(\cdot) * \delta(-(\cdot)) = r_x(\cdot) * h(\cdot)$$

che esprime il legame tra la mutua correlazione fra l'uscita e l'ingresso di un sistema LTI. In modo analogo si ottiene

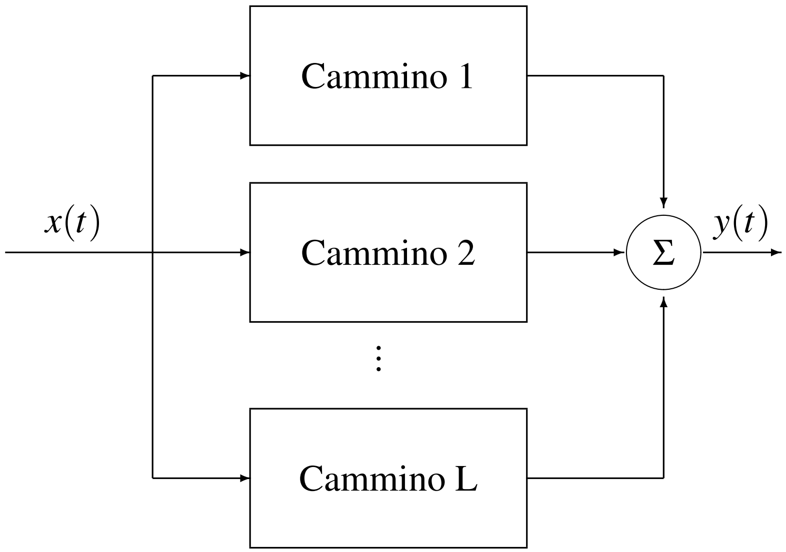
$$r_{xy}(\cdot) = r_x(\cdot) * h^*(-(\cdot))$$





Esempio: Risoluzione di cammini multipli di propagazione
Si consideri la propagazione attraverso un canale non distorcente. Ill segnale trasmesso $x(t)$ risulta ritardato ed attenuato per effetto della propagazione ed il mezzo non dispersivo si comporta come un sistema LTI di risposta impulsiva $h(t) = a\delta(t - t_0)$. Se la propagazione avviene su cammini multipli come delineato nella figura successiva, supponendo di trasmettere il segnale $x(t)$, il segnale ricevuto sarà

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x(t - t_i)$$



dove α_i e t_i sono l'attenuazione e il ritardo relativi al cammino $i-$esimo: si pone il problema di identificare il numero di cammini e di misurarne i ritardi. Sollecitando il mezzo col segnale $x(t)$, la funzione di mutua correlazione fra segnale trasmesso e quello ricevuto $v(t)$ vale

$$r_{yx}(\tau) = \sum_{i=1}^{L} \alpha_i r_x(\tau - t_i)$$

Pertanto, ricordando che l'autocorrelazione ha un massimo nell'origine, i ritardi t_i possono essere determinati dei picchi multipli, ognuno in corrispondenza di un ritardo di propagazione.
Si osservi che per risolvere i vari cammini, è necessario che gli impulsi presenti nella mutua correlazione non si sovrappongano e, quindi, che il segnale trasmesso abbia un'autocorrelazione di breve durata.

Approfondimento: derivazione dell'equazione per le relazioni ingresso/uscita tra correlazioni

Riferendoci, per fissare le idee, a segnali e sistemi a tempo discreto, si ha

$$r_{y_1y_2}(m) = < y_1(n), y_2(n-m) > = < \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_1(i)x_1(n-i), \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_2(j)x_2(n-m-j) >$$

Nella relazione precedente $h_1(i)$ e $h_2(j)$ sono degli scalari: conseguentemente, per la proprietà distributiva del prodotto scalare rispetto alla somma, si ha:

$$r_{y_1y_2}(m) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_1(i)h_2^*(j) < x_1(n-i), x_2(n-m-j) >$$

il prodotto scalare a secondo membro dell'equazione precedente è la mutua correlazione $r_{x_1x_2}(m+j-i)$, conseguentemente il legame cercato è

$$r_{y_1y_2}(m) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_2^*(j) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_1(i) r_{x_1x_2}(m+j-i)$$

Tale legame può essere anche espresso in forma più compatta in termini di convoluzione: si ha infatti

$$r_{y_1y_2}(m) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_2^*(j)[h_1 * r_{x_1x_2}](m+j) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [h_1 * r_{x_1x_2}](k) h_2^*(k-m)$$

L'ultimo cambio di variabili $k = m + j$ è stato introdotto per evidenziare che la residua sommatoria è ancora una convoluzione in cui il secondo fattore è $h_2^*(-(\cdot))$; poiché inoltre la convoluzione è commutativa e associativa possiamo scrivere infine

$$r_{y_1y_2}(m) = r_{x_1x_2}(m) * \underbrace{h_1(m) * h_2^*(-m)}_{r_{h_1h_2}(m)} = r_{x_1x_2}(m) * r_{h_1h_2}(m)$$

essendo $r_{h_1h_2}(m)$ la mutua correlazione delle risposte impulsive. Una analoga derivazione vale per segnali e sistemi continui.