GRAFI

1. Definizioni, terminologia, esempi e applicazioni(1)

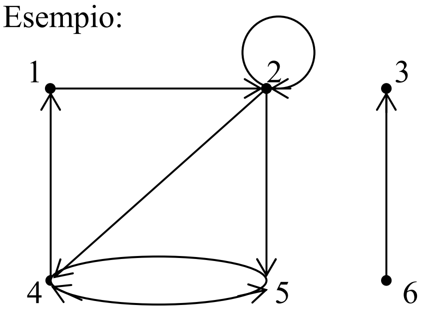
Un grafo orientato (o diretto o di-grafo) G è una coppia (V,E) dove V è un insieme non vuoto ed E una relazione binaria su V, $E \subseteq V \times V$, ossia un insieme di coppie ordinate di elementi di *V*.

Gli elementi di *V* sono chiamati *vertici* o *nodi*, gli elementi di *E* sono chiamati *spigoli* o *archi* (*edges*).

Se l' insieme *V* è finito, il grafo dicesi *finito*.

Se $(a,b) \in E$, *a* è il vertice iniziale e *b* il vertice finale; se il vertice finale coincide col vertice iniziale, cioè se $(a,a) \in E$, lo spigolo è detto *cappio* (*loop*).

Esempio:



$G = (V,E)$ orientato

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E = \{(1, 2), (2, 2), (2,4), (2,5), (4,1), (4,5), (5,4), (6,3)\}$

fig.1

Un grafo non orientato, G = (V,E), è una coppia (V,E) dove V è l' insieme dei vertici ed E è costituito da coppie non ordinate di vertici, cioè uno spigolo è un insieme $\{a,b\}$; tuttavia, per convenzione, per indicare il suddetto spigolo si usa la notazione (a,b) e inoltre le scritture (a,b) e (b,a) indicano lo stesso spigolo.

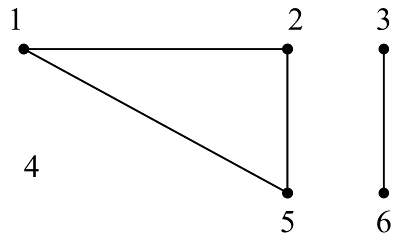
E' possibile avere spigoli del tipo (a,a) che vengono chiamati "*selfloop*".

---

(1) Si avvisa il lettore che certe definizioni che verranno date differiscono da quelle presenti in letteratura.

Nel seguito prenderemo in considerazione grafi in cui tutte le coppie di elementi di E sono distinti. Un tale grafo si dirà *semplice*.

Esempio:



$G = (V,E)$ non orientato

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

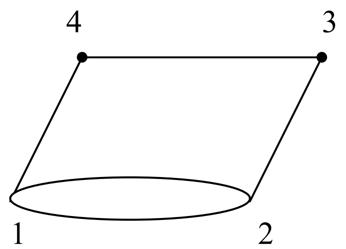
$E = \{(1, 2), (1,5), (2,5), (3,6)\}$

4 è un vertice isolato.

fig.2

Un multigrado è un grafo non orientato che ha archi multipli, cioè due vertici sono estremi di più spigoli.

Esempio:



$V = \{1, 2, 3, 4\}$

I vertici 1 e 2 sono estremi di due spigoli.

fig.3

Molte definizioni per i grafi orientati e non orientati coincidono, anche se certi termini hanno un significato leggermente diverso.

Se (a,b) è uno spigolo di un grafo orientato, si dice che (a,b) è incidente o *esce dal vertice a* ed è incidente o *entra nel vertice b*.

Esempio: nel grafo di fig.1 gli spigoli che escono dal vertice 2 sono (2,2), (2,4), (2,5), mentre gli spigoli che entrano nel vertice 2 sono (1,2) e (2,2).

Se (a,b) è uno spigolo di un grafo non orientato, si dice che (a,b) è incidente *sui vertici a* e b.

Esempio: nel grafo di fig.2, gli spigoli incidenti sul vertice 2 sono (1,2) e (2,5).

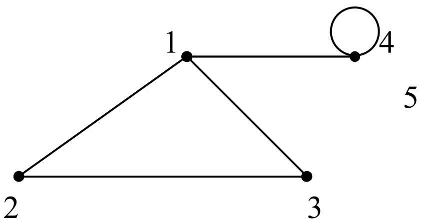
Se (a,b) è uno spigolo di un grafo, si dice che il vertice b è adiacente al vertice a.

Se il grafo è non orientato la relazione di adiacenza è simmetrica, mentre se il grafo è orientato la relazione di adiacenza non è necessariamente simmetrica.

Esempi nei grafi di fig.1 e fig.2, il vertice 2 è adiacente al vertice 1 perchè lo spigolo (1,2) è presente in entrambi; nel grafo della fig.1, il vertice 1 non è adiacente al vertice 2, perché l' arco (2,1) non appartiene al grafo.

Grado di un vertice. *Il grado di un vertice v in un grafo non orientato è il numero, d(v), di spigoli incidenti con esso.*

Se $d(v) = 0$, v si dice isolato; se $d(v) = 1$, v è detto vertice pendente. Un cappio relativo al vertice v si considera come uno spigolo incidente due volte su v.



$d(1) = 3$, $d(2) = d(3) = 2$, $d(4) = 3$, $d(5) = 0$.

fig.4

Proposizione 1. *In un grafo finito si ha:*

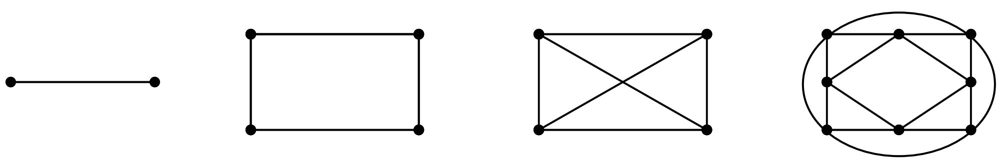
$$1)\ 2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$$

2) Il numero di vertici di grado dispari è pari.

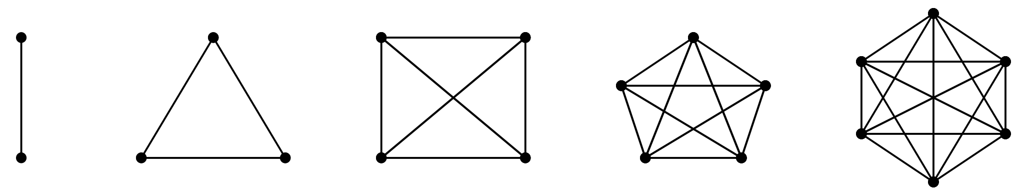
Un grafo non orientato i cui vertici hanno tutti lo stesso grado d si dice regolare di grado d.

Un grafo finito regolare di grado d con n vertici ha $\frac{1}{2}$ *nd spigoli.*

I seguenti grafi sono regolari di grado rispettivamente 1, 2, 3, 4.



Un grafo n.o. si dice completo se esso ha tutti gli spigoli possibili; un grafo completo con n vertici è regolare di grado $n-1$ e viene indicato con K_n.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

Un grafo completo con n vertici ha esattamente $n(n-1)/2$ spigoli.

In un grafo orientato si chiama *grado uscente di un vertice v*, e si indica con $d^+(v)$, il numero di spigoli che escono da v, mentre si chiama *grado entrante di v*, e si indica con $d^-(v)$, il numero di spigoli entranti in v; in tale computo i cappi contribuiscono in entrambi i casi.

Il grado di un vertice è dato dalla somma dei due gradi; chiaramente è:

$$\Sigma\, d^-(v) = \Sigma\, d^+(v) = |E|$$

In fig.1, per il vertice 2 è $d^-(2) = 2$, $d^+(2) = 3$, $d(2) = d^-(2) + d^+(2) = 5$

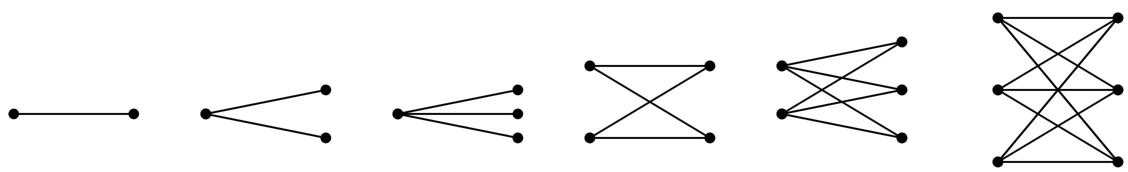
Un grafo si dice *bipartito* se l' insieme dei suoi vertici V può essere partizionato in due sottoinsiemi V_1 e V_2, $V = V_1 \cup V_2$, tale che ogni spigolo unisce un vertice di V_1 con un vertice di V_2.

Un grafo bipartito si dice completo se contiene tutti i possibili spigoli fra V_1 e V_2.

In particolare se m, n sono interi positivi il grafo bipartito completo $K_{m,n}$ è il grafo tale che

$$V = \{a_1,\dots, a_m, b_1,\dots,b_n\},\ E = \{s_{i,j} \mid i = 1, \dots, m, j = 1,\dots,n\},\ \text{con } s_{i,j} = \{a_i\, b_j\}.$$

Se $V_1 = \{a_1,\dots, a_m\}$e $V_2 = \{b_1,\dots,b_n\}$ allora $K_{m,n}$ è il grafo con $m+n$ vertici, ogni vertice di V_1 è adiacente ad ogni vertice di V_2 ed ha $m\cdot n$ spigoli.



$K_{1,1}$ $K_{1,2}$ $K_{1,3}$ $K_{2,2}$ $K_{2,3}$ $K_{3,3}$

Si chiama cammino (path) di lunghezza p di estremi a e b in un grafo $G = (V,E)$ una sequenza di $p+1$ vertici $(u_0, u_1,\dots, u_p)$ tale che $a = u_0$, $b = u_p$, e $(u_{i-1}, u_i) \in E$.

La lunghezza di un cammino è il numero dei suoi spigoli.

Il cammino contiene i vertici $u_0,\ldots, u_p$ e gli spigoli $(u_0, u_1),\ldots,(u_{i-1}, u_i),\ldots,(u_{p-1}, u_p)$.

Se esiste un cammino c da a a b si dice che b è raggiungibile da a tramite c.

Un cammino si dice semplice se tutti i suoi vertici sono distinti.

In fig.1 il cammino (1, 2, 5, 4) è un cammino semplice di lunghezza 3; il cammino (2, 5, 4, 5) non è semplice.

Per ogni vertice a c' è un unico cammino di lunghezza 0 da a allo stesso a.

Un cammino $(u_0,\ldots, u_n)$ si chiama *circuito o ciclo* se $u_0 = u_n$ e contiene almeno uno spigolo.

Il ciclo è semplice e i vertici $u_0,\ldots, u_n$ sono distinti.

Un cappio è un ciclo di lunghezza 1.

Un grafo senza cicli dicesi aciclico.

Un grafo G = (V,E) si dice connesso se c' è almeno un cammino congiungente due suoi qualsiasi vertici.

Un grafo che non è connesso dicesi sconnesso.

Il grafo di fig.1 non è connesso.

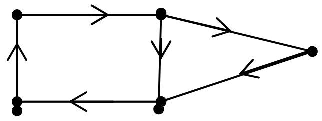
Se $a\in V$, si chiama componente connessa di a l' insieme C_a formato da tutti i vertici $x\in V$ per i quali esiste un cammino da a a x.

Sia ~ la relazione su V così definita: $\forall a,x\in V \quad a \sim x \Leftrightarrow$ esiste un cammino in G da a ad x.

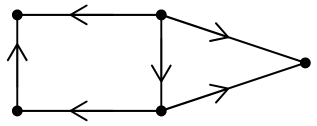
E' facile verificare che ~ è una relazione di equivalenza su V e per ogni $a\in V$ gli elementi ad esso equivalenti costituiscono la componente connessa di a. Ne segue che le varie componenti connesse formano una partizione dell' insieme V dei vertici, e ovviamente non c' è alcun spigolo che colleghi vertici appartenenti a componenti connesse distinte.

Si ha che *G è connesso se e solo se G è costituito da una sola componente connessa.*

Un grafo orientato si dice *fortemente connesso (stronkly)* se per ogni $a,b\in V$ esiste un cammino orientato da a a b e da b ad a.

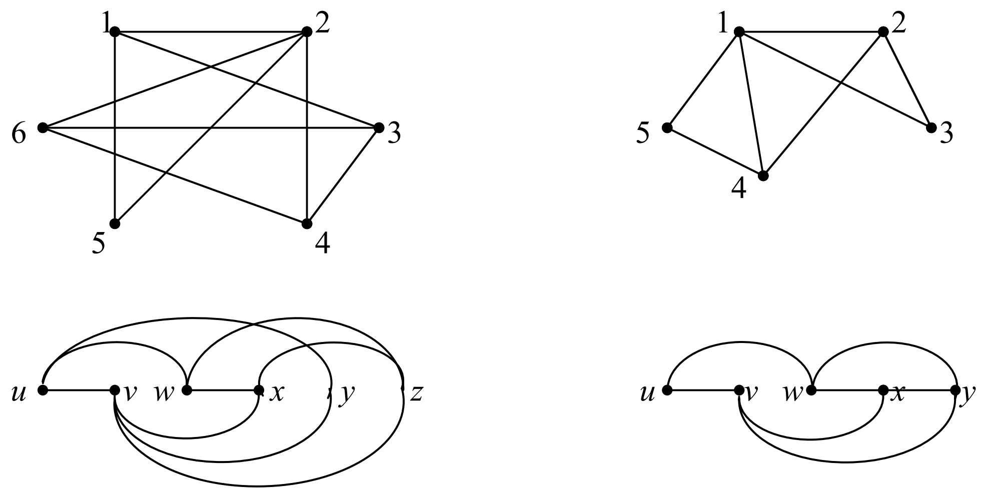


Un grafo orientato si dice debolmente connesso (weakly) se due qualsiasi vertici a,b sono uniti da un cammino non orientato.



Due grafi G = (V,E) e G'= (V',E') si dicono isomorfi se esiste un' applicazione biunivoca f: V→V' tale che :

$$(a,b) \in E \Leftrightarrow (f(a),f(b)) \in E'.$$



(a) (b)

(a) Coppia di grafi isomorfi, (b) coppia di grafi non isomorfi.

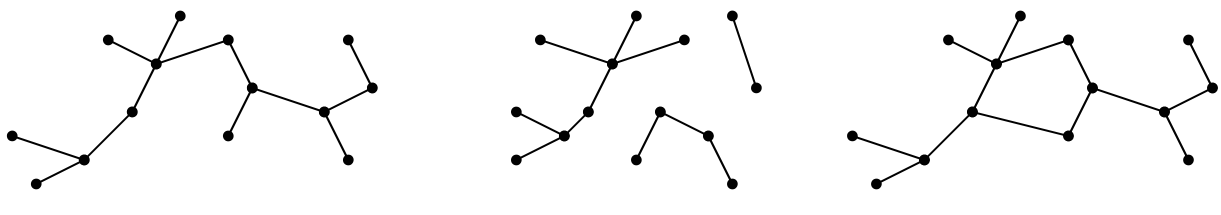
2. <u>Alberi (Free Tree)</u>

Una particolare classe di grafi sono gli *alberi* (il nome deriva, come vedremo più avanti, dalla somiglianza di questi grafi con gli alberi). Essi trovano applicazione in moltissimi problemi appartenenti a svariate discipline.

In molti problemi informatici i dati possono essere rappresentati mediante alberi, e questo fatto garantisce una risoluzione efficiente del problema che altrimenti sarebbe impossibile.

Una foresta è un grafo aciclico, un albero è un grafo connesso aciclico; gli alberi pertanto risultano essere le componenti connesse di una foresta.

Esempi:



(a) (b) (c)

(a) Un albero libero. (b) Una foresta. (c) Un grafo che contiene un ciclo e non è perciò né un albero né una foresta.

Gli alberi possono essere caratterizzati in molti modi, si hanno infatti le seguenti due proposizioni:

Proposizione 1. *Sia G = (V,E) un grafo (finito o infinito). Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- *a) G è un albero*
- *b) G è aciclico, ma se si aggiunge un qualsiasi spigolo si forma un ciclo*
- *c) Per ogni coppia di nodi a e b di G, esiste un unico cammino semplice da a a b.*
- *d) G è connesso, ma eliminando un arco qualsiasi di G si perde la connessione.*

Dimostrazione.(a) $\Rightarrow$ (b) Nell' ipotesi (a), G è aciclico. Inoltre, aggiungendo a G un arco $(u,v)\notin E$ si forma un ciclo dato da un cammino da v a u (esiste perché G è connesso) più l' arco (u,v).

(b) $\Rightarrow$ (c) Essendo G aciclico, ogni coppia di vertici può essere connessa da al più un cammino. Se vi fosse una coppia (u,v) non connessa da alcun cammino allora l' arco (u,v) potrebbe essere aggiunto senza perdere l' aciclicità.

(c) $\Rightarrow$ (d) Dato che per ipotesi due vertici qualsiasi sono connessi esattamente da un unico cammino semplice, ovviamente G è connesso.

Sia $(u,v)\in E$. Supponiamo di rimuovere (u,v) da G. Se dopo tale eliminazione il grafo fosse ancora connesso, ci sarebbe in G' un cammino da u a v. Questo e l' arco (u,v) formano due diversi cammini in G da u a v.

(d) $\Rightarrow$ (a) Supponendo (d) occorre solo verificare che G sia anche aciclico. Ma se G contenesse un ciclo, allora un qualsiasi arco su tale ciclo potrebbe essere eliminato senza perdere la proprietà di connessione.

Proposizione 2. *Sia G = (V,E) un grafo finito e sia |V| = n. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- *e) G è un albero*
- *f) G è aciclico e $|E| = |V| - 1$*
- *g) G è connesso e $|E| = |V| - 1$.*

Dimostrazione. (e) $\Rightarrow$ (f) se G è un albero, allora G è aciclico. Dimostriamo che $|E| = |V| - 1 = n - 1$ per induzione su n. Per $n = 1$ allora $|E| = \emptyset$ e quindi $|E| = |V| - 1$. Sia $n > 1$. Per la proprietà (d) del la proposizione precedente, eliminando un arco da G si perde la connessione e si ottengono esattamente due componenti connesse. Queste componenti, di dimensione d_1 e d_2 rispettivamente, con $d_1 + d_2 = n$, sono alberi. Quindi, per l' ipotesi induttiva, ciascuna di esse ha $d_1 - 1$ e $d_2 - 1$ archi, rispettivamente. Questi, con l' arco inizialmente eliminato, danno in totale

$|E| = (d_1 - 1) + (d_2 - 1) + 1 = d_1 + d_2 - 1 = n - 1$.

(f) $\Rightarrow$ (g) Supponiamo che G sia aciclico e che $|E| = |V| - 1$. Se G non fosse connesso, potremmo aggiungere a G degli archi sino ad ottenere la connessione e senza perdere l' aciclicità. Si otterrebbe un grafo $G' = (V,E')$ con $|E'| > |V| - 1$, connesso e aciclico (cioè un albero).

Ma allora $|E'| = |V| - 1$, contraddizione.

(g) $\Rightarrow$ (e) Supponiamo adesso che G sia connesso e che $|E| = |V| - 1$. Se G fosse ciclico, allora potremmo eliminare da G alcuni archi sino a forzare l' aciclicità e senza perdere la connessione. Ne risulterebbe un albero $G' = (V,E')$ con $|E'| < |V| - 1$, contraddizione.

Alberi con radice

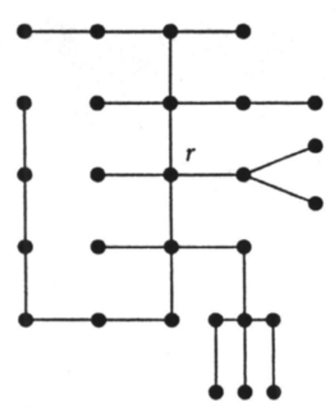
Un albero con radice è un albero con un vertice contraddistinto come radice.

Ricordiamo che in un albero, esiste un solo cammino fra due vertici qualsiasi *u* e *v* (prop.1, c); se *l* è la lunghezza di tale cammino diremo anche che *l* è la distanza fra *u* e *v*. Fissato arbitrariamente un vertice *r* come radice per ciascun nodo esiste uno ed un solo cammino che lo collega alla radice; tale cammino si chiama *cammino caratteristico del nodo*.

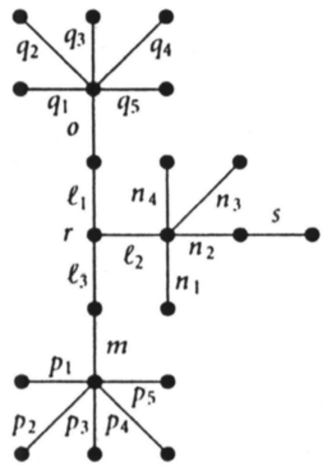
La lunghezza del cammino caratteristico di un nodo si chiama *livello del nodo*.

Ne deriva che un albero può essere disegnato disponendo i vertici su righe successive in relazione alla loro distanza dalla radice (cioè nel loro livello): nella prima riga viene fissato il vertice *r*, nella seconda riga tutti i vertici a livello 1 da *r*, nella terza riga i vertici a distanza 2 da *r*, ecc…

Esempio. I grafi delle figure (a) e (b) sono degli alberi perché ciascuno è connesso ed è privo di cicli.

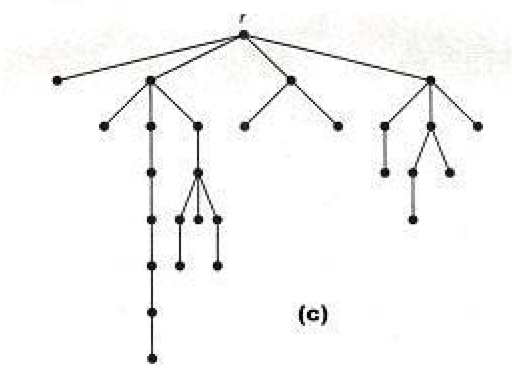


(a)

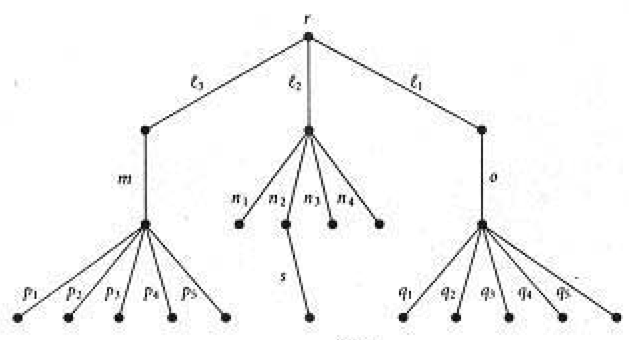


(b)

Fissando in ciascuno di essi come radice un vertice, ad esempio il vertice *r*, si ottiene un albero con radice e disponendo i vertici su righe successive in relazione alla loro distanza dalla radice si ottengono rispettivamente le figure (c) e (d).



(c)



(d)

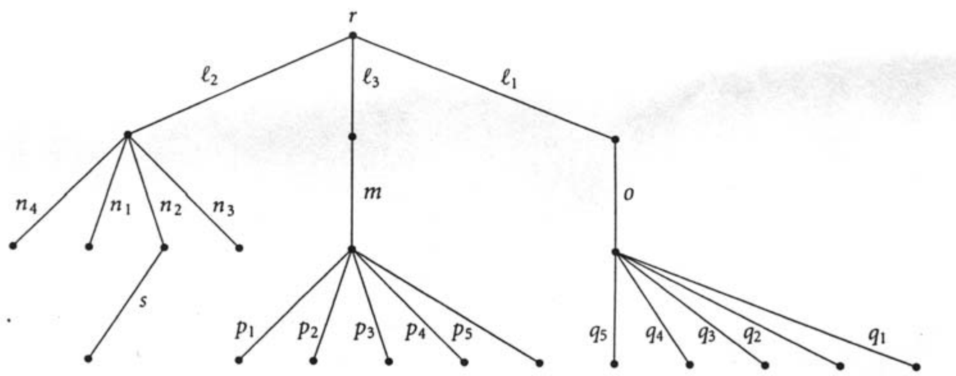
Se il cammino caratteristico di un nodo *y* contiene un nodo *x*, si dice che *x* è *antenato* di *y* e *y* è *discendente* di *x*.

Ogni nodo (eccetto la radice) è connesso tramite un ramo ad un altro nodo che ne è il *padre* e di cui rappresenta un *figlio*.

Un nodo senza figli si chiama *foglia*; un nodo con almeno una foglia si chiama *nodo interno*; il nodo interno senza padre è la radice; due o più nodi con lo stesso padre si chiamano *fratelli*.

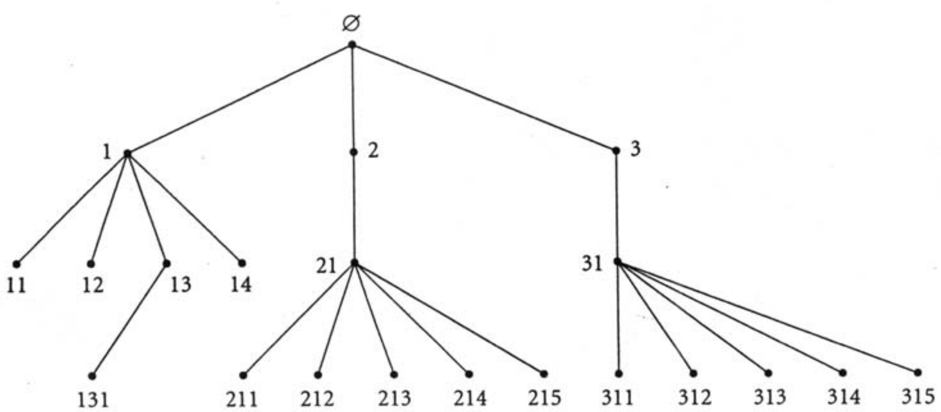
Un albero ordinato con radice è un albero con radice nel quale è imposto un ordine fra i nodi figli di ogni nodo.

Esempio. Se nell'albero con radice di cui alla fig.(d) fissiamo nei vari insiemi degli spigoli $\{l_1, l_2, l_3\}$, $\{m\}$, $\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$, $\{o\}$, $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$, $\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, $\{s\}$ l'ordine come indicato nella figura seguente, si ottiene un albero ordinato con radice.



Osserviamo inoltre che è possibile ordinare un albero finito con radice dando in modo naturale ad ogni nodo un indice. In tal caso l'ordine imposto ai nodi è dato dalla successione finita di numeri naturali associata ad ogni nodo, la lunghezza della successione è uguale al livello del nodo; la successione associata alla radice è vuota.

Nella figura successiva nell'albero con radice precedentemente visto sono stati assegnati gli indici in modo naturale ai suoi nodi.



Dicesi *altezza di un nodo v* la lunghezza del più lungo cammino dal nodo *v* ad una foglia; tutte le foglie hanno altezza zero.
Dicesi *altezza di un albero* l' altezza della sua radice, o equivalentemente il massimo livello delle sue foglie.
Se *T* è un albero e *x* è un suo nodo, l' insieme dei nodi di *T* contenente *x* e tutti i suoi discendenti dicesi *sotto-albero di T* e *x* dicesi *radice* del sotto-albero.

Un albero si dice binario se ha al più due figli (detti rispettivamente figlio sinistro e figlio destro).
In un albero binario un nodo avente due figli si dice *pieno*.
Un albero binario di altezza h si dice completo se tutti i nodi di livello minore di h sono pieni.
Proposizione. *Se T è un albero binario completo di altezza h ed n nodi, segue che:*

$$n = 2^{h+1} - 1 \quad \text{ovvero} \quad h = lg_2(n+1) - 1$$

Gli alberi ordinati con radice come rappresentazioni di espressioni algebriche.

Ad ogni espressione algebrica in cui compaiono addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, estrazioni di radici, può essere associato un albero *ordinato* con radice grazie al fatto che ogni espressione algebrica può essere descritta per passi successivi mediante espressioni algebriche più semplici tra le quali bisogna eseguire una determinata operazione.
Esempio: l'espressione algebrica $c + \sqrt{(d - (a + bc))/a}$ è ottenuta sommando le due espressioni algebriche c e $\sqrt{(d - (a + bc))/a}$, quest'ultima è ottenuta applicando la radice quadrata all'espressione $(d - (a + bc))/a$, la quale a sua volta è ottenuta dividendo tra loro le due espressioni $d - (a + bc)$ e a. L'espressione $d - (a + bc)$ si ottiene poi sottraendo le due espressioni d e $a + bc$; quest'ultima si ottiene sommando le due espressioni a e bc. Infine bc è ottenuta moltiplicando b e c. Questa descrizione dell'espressione algebrica considerata può essere rappresentata dall'albero *ordinato* con radice della figura 1, in cui le foglie rappresentano le variabili che compaiono nell'espressione, mentre tutti gli altri nodi rappresentano le operazioni presenti nell'espressione stessa.

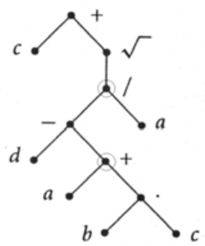


figura 1

È opportuno sottolineare il fatto che l'albero associato come prima descritto a un'espressione algebrica è *ordinato* con radice, per cui se si cambia l'ordine nell'insieme dei rami che escono da un nodo *v*, si ottiene ancora un albero ordinato con radice che rappresenta ancora un'espressione algebrica la quale però è diversa dalla precedente.

Esempio: l'albero *ordinato* con radice della figura 2, ottenuto dall'albero ordinato della figura 1 invertendo gli ordini sugli insiemi dei rami che escono dai nodo contrassegnati con ○ , è l'albero associato all'espressione $c+\sqrt{a/(d-(bc+a))}$, che è ben diversa da quella precedentemente considerata.

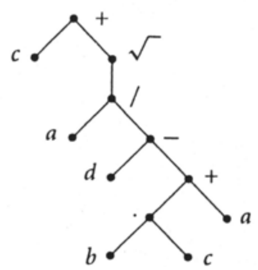


figura 2

La notazione infissa e la notazione polacca.

La notazione da noi usata per scrivere un'espressione algebrica è quella cosiddetta *a infisso*. Infatti nel denotare un'espressione ottenuta sommando, sottraendo, moltiplicando o dividendo due espressioni, il simbolo +, - , · o / viene scritto tra le due espressioni.

Esempio: scriviamo $a + bc$ e $a - bc$ per denotare le espressioni algebriche ottenute rispettivamente sommando e sottraendo le due espressioni a e bc[1].

Le espressioni algebriche possono essere scritte, senza pericolo di ambiguità, anche ponendo il simbolo dell'operazione prima degli operandi. Tale notazione è detta *notazione polacca* (perché introdotta dal matematico polacco Lukasiewicz).

Ad esempio le espressioni algebriche da noi usualmente denotate $a + b$, $a \cdot b$, $c+\sqrt{(d-(a+bc))/a}$ e $c+\sqrt{a/(d-(bc+a))}$, in notazione polacca si scrivono $+ab$, $\cdot\, ab$, $+\, c\sqrt{\ }\ /\ -\ d\ +\ a\ \cdot\ bca$ e $+c\sqrt{\ }\ /\ a - d\ + \cdot\ bca$ rispettivamente.

Si noti che la notazione polacca permette di eliminare completamente l'uso delle parentesi, purchè sia noto a priori a quanti operandi si applica ciascun simbolo (la cosiddetta arietà di un'operazione).

[1] Si ricordi che l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione, sono operazioni *binarie*, mentre l'estrazione di radice quadrata è un'operazione *unaria,* ossia si applica ad un solo argomento.

3. <u>Rappresentazioni di un grafo</u>

Ci sono diversi modi per rappresentare un grafo.

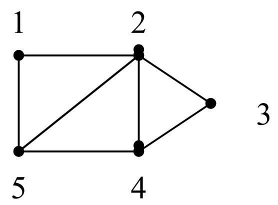
Tra i più importanti ricordiamo quelle matriciali e quella mediante liste di adiacenza.

Dato un grafo (V,E) con |V| = n, la sua matrice di adiacenza è la matrice $n \times n$ *il cui generico elemento* $a_{i,j}$ *è così definito:*

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

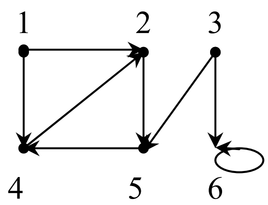
Esempi:

(1)



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

(2)



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

Si osservi che *la matrice di adiacenza di un grafo non orientato è simmetrica.*

Lo spazio di memoria occupato da tale tipo di rappresentazione non dipende dal numero degli spigoli del grafo ma dal numero n dei vertici ed è uguale a n^2.

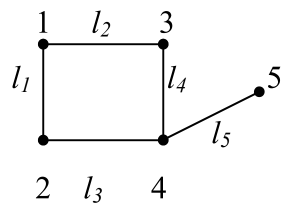
La matrice d' incidenza di un grafo non orientato G = (V,E) con |V| = n e |E| = m è la matrice $n \times m$ *il cui generico elemento* $b_{i,j}$ *è così definito:*

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ è un nodo dello spigolo } l_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

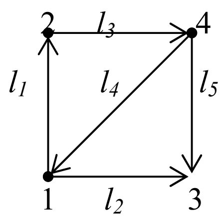
Se il grafo G = (V,E) è orientato è possibile definire la matrice d' incidenza solo se esso è semplice, cioè privo di cappi.
In queste ipotesi, poiché dobbiamo tenere conto se lo spigolo entra o esce da un nodo, il generico elemento $b_{i,j}$ è così definito:

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ è il nodo iniziale dell' arco } l_j \\ -1 & \text{se } i \text{ è il nodo finale dell' arco } l_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Riportiamo le matrici d' incidenza dei seguenti grafi:



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & +1 \end{pmatrix}$$

Lo spazio di memoria occupato da tale tipo di rappresentazione è $n \times m$ è poiché $m \leq n(n-1)/2$ (si ha l' uguaglianza se il grafo è completo) risulta al più uguale a $n^2(n-1)/2$.

La rappresentazione con liste d' adiacenza di un grafo G = (V,E) consiste in un vettore A_{dj} di n liste, una per ogni vertice di V. Per ogni $a \in V$ la lista di adiacenza $A_{dj}[a]$ contiene tutti i vertici b tale che esiste l' arco (a,b); pertanto $A_{dj}[a]$ contiene tutti i vertici adiacenti ad *a* in *G*. In ogni lista di adiacenza i vertici vengono di solito memorizzati in un ordine arbitrario.

Riportiamo le due liste di adiacenza dei due grafi (1) e (2)

a	$A_{dj}[a]$
1	2, 5
2	1, 5, 3, 4
3	2, 4
4	2, 5, 3
5	4, 1, 2

a	$A_{dj}[a]$
1	2, 4
2	5
3	6, 5
4	2
5	4
6	6

Se G è orientato la somma di tutte le liste di adiacenza è $|E| = m$, se G non è orientato la somma delle lunghezze di tutte le liste di adiacenza è $2|E| = 2m$, perché se (a,b) è un arco non orientato allora b appare nella lista di a e viceversa.

In entrambi i casi lo spazio di memoria occupato da tale tipo di rappresentazione è $|V| + |E| = n + m$.

In relazione allo spazio di memoria da impegnare, una rappresentazione può essere più conveniente rispetto ad un' altra.

Chiaramente un "grafo sparso" (cioè se $m << n^2$) conviene rappresentarlo con la lista di adiacenza, mentre un "grafo denso" (cioè $|E| \sim |V|^2$) con la matrice di adiacenza.