5.1 Matrici Quadrate e invertibilità

Definizione 5.1 (Matrici invertibili)**.** *Sia* $\boldsymbol{A}$ *una matrice quadrata di ordine* n*. Diremo che* $\boldsymbol{A}$ *è* ***invertibile*** *se esiste una matrice quadrata* $\boldsymbol{A}^{-1}$ *di ordine* n*, detta* ***inversa di*** $\boldsymbol{A}$*, tale che:*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n.$$

Proposizione 5.2 (Proprietà dell'inversa)**.** *Valgono le seguenti proprietà:*

i) Se la matrice $\boldsymbol{A}$ *è invertibile, allora anche* $\boldsymbol{A}^{-1}$ *è invertibile.*

ii) Per ogni n*, la matrice identica* $\boldsymbol{I}_n$ *è invertibile.*

iii) Siano $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B}$ *due matrici invertibili, allora anche la matrice prodotto* $\boldsymbol{AB}$ *è invertibile, e si ha* $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$*. Infatti dalla proprietà del prodotto righe per colonne, segue che* $(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}) = \boldsymbol{ABB}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{AI}_n\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}_n$*.*

Esempio 5.3 (Inversa di una matrice $\boldsymbol{A}$)**.** *Dalla definizione* **??** *segue che la matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ammette per inversa

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Teorema 5.4 (Invertibilità e rango)**.** *Sia* $\boldsymbol{A}$ *una matrice quadrata di ordine* n*. Essa è invertibile se e solo se* $rk(\boldsymbol{A}) = n$*.*

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{A}$ una matrice quadrata di ordine n e invertibile. Consideriamo la matrice identità di ordine n, il cui rango è $rk(\boldsymbol{I}_n) = n$. Ma $\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{AA}^{-1}$ ed utilizzando le proprietà del rango possiamo scrivere $rk(\boldsymbol{AA}^{-1}) \leq \min(rk(\boldsymbol{A}), rk(\boldsymbol{A}^{-1}))$ e dunque $n = rk(\boldsymbol{AA}^{-1}) = rk(\boldsymbol{I}_n) \leq rk(\boldsymbol{A})$, ovvero $rk(\boldsymbol{A}) \geq n$. Sempre dalle proprietà del rango sappiamo che $rk(I_n) \leq n$ e, componendo le due disuguaglianze, si ottiene $rk(A) = n$.

Viceversa, se $\boldsymbol{A}$ è una matrice quadrata di ordine e rango n, allora essa è equivalente per righe ad $\boldsymbol{I}_n$. Esiste pertanto un numero finito k di matrici elementari $\boldsymbol{E}_1, \ldots, \boldsymbol{E}_k$ tali che $\boldsymbol{E}_1 \cdots \boldsymbol{E}_k\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$. Ne segue che la matrice $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}_1 \cdots \boldsymbol{E}_k$ è l'inversa di $\boldsymbol{A}$. □

Osservazione 5.5 (Sull'invertibilità)**.** *Da questo teorema si deduce che una matrice è invertibile se e solo se essa è prodotto di matrici elementari.*

Si deduce anche che, applicando l'algoritmo di Gauss-Jordan alla matrice $\boldsymbol{A}$ *si ottiene la matrice identica* $\boldsymbol{I}_n$*, (i.e.* $\boldsymbol{E}_1 \cdots \boldsymbol{E}_k\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$*) ed applicando alla matrice* $\boldsymbol{I}_n$ *le stesse operazioni elementari, si ottiene* $\boldsymbol{A}^{-1}$ *(i.e.* $\boldsymbol{E}_1 \cdots \boldsymbol{E}_k\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{A}^{-1}$*).*

Dall'osservazione precedente si deduce un metodo rapido per il calcolo dell'inversa di $\boldsymbol{A}^{-1}$. Si considera, appunto, una matrice di tipo $n \times 2n$, in effetti la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_n \end{array} \right).$$

A tale matrice si applica l'algoritmo di Gauss-Jordan e si ottiene nel primo blocco la matrice $\boldsymbol{I}_n$ e nel secondo la matrice $\boldsymbol{A}^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A}^{-1} \end{array} \right).$$

Esempio 5.6 (Calcolo dell'inversa con Gauss-Jordan)**.** *Si vuole invertire la matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Allo scopo si consideri la matrice $(A|I_2)$, i.e.

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sottraiamo alla seconda riga la prima ed otteniamo

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

moltiplichiamo ora la seconda riga per -1 ed abbiamo

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Sottraiamo infine alla prima riga la seconda e otteniamo

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

è l'inversa di $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Esempio 5.7. *Calcolare l'inversa della matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Formiamo la tabella

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Essendo uguale ad 1 il primo elemento della prima riga, si lascia inalterata tale riga. Dalla seconda riga si sottrae la prima moltiplicata per 5. Dalla terza riga, invece, si sottrae la prima moltiplicata per 10. Si ottiene così la seguente tabella:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1-9 & -10 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Si divide la seconda riga per -1, quindi si sottrae dalla prima riga la seconda riga, moltiplicata per 1, dalla terza riga si sottrae la seconda riga ottenuta moltiplicata per -5. Si ottiene la tabella

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 15 & -5 & 1 \end{array}\right).$$

Essendo uguale ad 1 *il terzo elemento della terza riga, tale riga resta inalterata. Dalla prima riga si sottrae la terza moltiplicata per* -1 *e dalla seconda riga si sottrae la terza moltiplicata per* 2*. Si ottiene*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -25 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 15 & -5 & 1 \end{array}\right).$$

Dunque, la matrice inversa è

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$