Ingegneria Elettronica per l'Automazione e le Telecomunicazioni
MATEMATICA 2   A.A. 2021/2022
ESAME   24 Gennaio 2022

Nome e Cognome	N. Matricola

Problema	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

Note: Non si possono utilizzare calcolatori o appunti. Il valore in punti (su 100) di ogni esercizio è indicato sul margine sinistro.

Formule per la trasformata di Laplace

$y = f(t)$	$Y(p) = \mathcal{L}(y) = F(p)$	
1	$\frac{1}{p}$	Re $p > 0$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	Re $(p+a) > 0$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	Re $p > \lvert\text{Im } a\rvert$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	Re $p > \lvert\text{Im } a\rvert$
$\sinh at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	Re $p > \lvert\text{Re } a\rvert$
$\cosh at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	Re $p > \lvert\text{Re } a\rvert$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	Re $p > 0, \quad n \geq 0$
te^{at}	$\frac{1}{(p-a)^2}$	Re $(p+a) > 0$
$e^{-at}(1-at)$	$\frac{p}{(p+a)^2}$	Re $(p+a) > 0$
$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$	Re $(p-a) > \lvert\text{Im } \omega\rvert$
$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$	Re $(p-a) > \lvert\text{Im } \omega\rvert$
$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$	Re $p > \lvert\text{Im } \omega\rvert$
$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$	Re $p > \lvert\text{Im } \omega\rvert$
$\frac{\sin\omega t}{t}$	$\arctan\frac{\omega}{p}$	Re $p > \lvert\text{Im } \omega\rvert$

Operazioni di trasformazione di Laplace

Operazioni	
1. Trasformata di Laplace	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$
2. Trasformata di una derivata	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$
3. Sostituzione	$\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\} = F(p-a)$
4. Traslazione	$\mathcal{L}\{f(t-b)\} = F(p)e^{-bp}$

(8) 1.a (MB 1.13.33, p.32) Trovare la serie di Maclaurin, fino al sesto ordine incluso, della funzione

$$f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 - x}$$

La serie cercata si può ottenere come il prodotto della serie della funzione $1 - \sin x$ moltiplicata per la serie di $1/(1 - x)$

Sviluppo in serie di Maclaurin della funzione $1 - \sin x$, arrestato al settimo ordine:

$$1 - \sin(x) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \cdots$$

(e quindi divisione lunga per il polinomio $1 - x$) e sviluppo della funzione $(1 - x)^{-1}$ che è la somma di una serie geometrica di ragione x (e quindi convergente per $|x| < 1$)

$$(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \cdots$$

moltiplicando le due serie e conservando solo i termini fino al quinto ordine, abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \sin x}{1 - x} &= \left(1 - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \cdots) \\
&= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \cdots \\
&\quad\; - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6 - \cdots \\
&\quad\; + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{3!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots \\
&\quad\; - \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{5!} - \cdots = \\
&= 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{3!} + x^5\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}\right) + x^6\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}\right) + \cdots \\
&= 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + \frac{19x^5}{120} + \frac{19x^6}{120} + \cdots
\end{aligned}$$

(4) **1.b** Determinare per quali valori di x essa converge.

Teorema III pag 671 di ML Boas: La serie converge all'interno del cerchio di centro z_0 ($= 0$ nel nostro caso) che si estende fino al punto singolare più vicino per la funzione $f(x)$ cioè $x = 1$

(8) 1.c (MB 2.10.28, p. 67) Usando la formula di Eulero e il fatto che una equazione complessa rappresenta in realtà due equazioni reali trovare le formule per $\sin 3\theta$ e $\cos 3\theta$

$(e^{i\theta})^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$

$(e^{i\theta})^3 = e^{i3\theta} = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$ $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

ANNO ACCADEMICO 2021-2022

(14) **2.a** (MB 14.4.3) Trovare i primi termini di ciascuna delle serie di Laurent attorno all'origine, cioè una serie per ogni regione anulare tra i punti singolari, della seguente funzione

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

Per $0 < |z| < 1$ normale serie di Taylor, sviluppo in fratti semplici della frazione $f(z)$ ottenendo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{2z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-2)} = \frac{1}{2z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{4}\frac{1}{1-z/2} \\
&= \frac{1}{2z} + (1 + z + z^2 + z^3 + \cdots) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{2z} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8z} + \frac{15z^2}{16} + \frac{31z^3}{32} + \cdots
\end{aligned}$$

Per $1 < |z| < 2$ la frazione centrale va sviluppata in termini di $1/z$, cioè:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{2z} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2(z-2)} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{4}\frac{1}{1-z/2} \\
&= \frac{1}{2z} - \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots\right) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \cdots\right) \\
&= -\left(\frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{4} + \frac{z}{8} + \frac{z^2}{16} + \frac{z^3}{32} + \cdots\right)
\end{aligned}$$

Per $2 < |z|$ anche la terza frazione va sviluppata in termini di $1/z$, cioè:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{2z} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2z(1-\frac{2}{z})} \\
&= \frac{1}{2z} - \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots\right) + \frac{1}{2z}\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{z^3} + \frac{3}{z^4} + \cdots
\end{aligned}$$

(6) **2.b** Trovare il residuo in ognuno dei poli della funzione data in **2.a**.

Nel caso di polo semplice (è il nostro caso per i tre poli) troviamo il residuo moltiplicando $f(z)$ per $z - z_0$ e calcolando il risultato a $z = z_0$, la stessa operazione fatta per trovare i coefficienti dei tre fratti semplici che rappresentano la funzione $f(z)$, quindi

$R[f, z = 0] = \frac{1}{2}$; $\qquad R[f, z = 1] = -1$; $\qquad R[f, z = 2] = \frac{1}{2}$

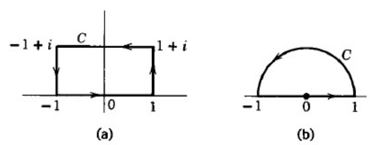
(4) 2.a (MB 14.3.3, p. 676) Trovare la parte reale e la parte immaginaria $u(x, y)$ e $v(x, y)$ della funzione z^2

$$z = x + iy \quad \rightarrow \quad z^2 = (x + iy)(x + iy) = x^2 - y^2 + 2ixy$$
$$u(x, v) = x^2 - y^2; \quad v(x, y) = 2xy$$

(4) 2.b Stabilire se la funzione è analitica

Condizioni di Cauchy-Riemann
$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$
mentre $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x = \frac{\partial u}{\partial x}$
quindi la funzione è analitica.

(8) 2.c Calcolare $\oint_C z^2 dz$ lungo il solo percorso (b) indicato in figura per integrazione diretta nel piano complesso, cioè, come un integrale di linea in uno spazio a due dimensioni, *senza* usare teoremi sull'integrazione di funzioni complesse di variabili complesse.



$z^2 dz = (x+iy)^2(dx+idy) = \left[\left(x^2 - y^2\right) + i2xy\right](dx+idy) = \left[\left(x^2 - y^2\right) dx - 2xydy\right] + i\left[2xydx + \left(x^2 - y^2\right) dy\right]$
espressione che nei vari tratti si riduce rispettivamente a
— da A a B del rettangolo $y = 0; dy = 0; -1 \le x \le 1$
$z^2 dz$ diventa $x^2 dx \longrightarrow \int_A^B z^2\, dz$ diventa $\int_{-1}^1 x^2\, dx = \frac{2}{3}$
— da B ad A lungo la semicirconferenza di raggio $r = 1$; $x = r\cos(\theta) = \cos(\theta); y = r\sin(\theta) = \sin(\theta); dx = -\sin(\theta)d\theta; dy = \cos(\theta)d\theta$
quindi $z = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta) = re^{i\theta} = e^{i\theta}; dz = ie^{i\theta}d\theta; z^2 dz = e^{i2\theta}ie^{i\theta}d\theta = ie^{i3\theta}\mathrm{d}\theta$
e l'integrale da B ad A $\int_B^A z^2\, dz$ diventa $\int_0^\pi z^2(\theta)z'(\theta)d\theta = i\int_0^\pi e^{i3\theta}\, d\theta = \frac{i}{3i}\left(e^{i3\theta}\right)_0^\pi = \frac{1}{3}(-1-1) = -\frac{2}{3}$
e l'integrale lungo l'intero percorso chiuso è zero.

(4) 2.d Commentare il risultato ottenuto con l'aiuto del teorema di Cauchy

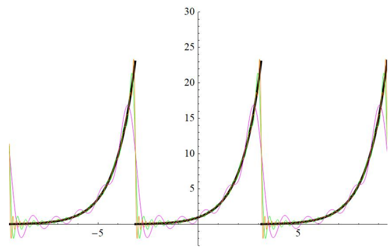
Teorema di Cauchy: Se $f(z)$ è analitica su ed all'interno del percorso chiuso C, allora $\displaystyle\oint_C f(z)dz = 0$.

z^2 è analitica sull'intero piano complesso e quindi $\displaystyle\oint_C z^2 dz = 0$ che conferma i calcoli eseguiti.

(MB 7.8.12a, p. 363) È data la funzione, periodica di periodo 2π e definita per $x \in (-\pi, \pi)$ da:

$$f(x) = e^x$$

(6) **3.a** Disegnare schematicamente diversi periodi della funzione.



(14) **3.b** Sviluppare nella appropriata serie di Fourier

La funzione non ha particolari proprietà di simmetria quindi bisogna determinare tutti i coefficienti della serie

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} = 2\frac{\sinh\pi}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx d(e^x) = \frac{1}{\pi}\left[e^x \cos nx|_{-\pi}^{\pi} + n\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[e^x \cos nx|_{-\pi}^{\pi} + n\left(e^x \sin nx|_{-\pi}^{\pi} - n\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx\right)\right] = \frac{1}{\pi}\left[e^x \cos nx|_{-\pi}^{\pi} + ne^x \sin nx|_{-\pi}^{\pi} - n^2\int_{0}^{2\pi} e^x \cos nx dx\right] \rightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx = \frac{e^x \cos nx|_{-\pi}^{\pi} + ne^x \sin nx|_{-\pi}^{\pi}}{(1+n^2)\pi} = \frac{\cos n\pi(e^\pi - e^{-\pi})}{(1+n^2)\pi} = \frac{(-1)^n}{(1+n^2)}\frac{2\sinh\pi}{\pi}$$

in maniera del tutto simile si ottiene

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(nx)\, dx = \frac{-n\cos n\pi(e^\pi - e^{-\pi})}{(1+n^2)\pi} = \frac{(-1)^{n+1} n(e^\pi - e^{-\pi})}{(1+n^2)\pi} = \frac{-n(-1+e^{2\pi})}{(1+n^2)\pi}$$

Quindi, ponendo insieme tutti i termini, abbiamo

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_n \cos(nx) + \sum_1^\infty b_n \sin(nx) =$$

$$\frac{2\sinh\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos(nx) + \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1} n}{1+n^2}\sin(nx)\right)$$

(8) 4.a (MB, 8.4.5, p. 406) Trovare la soluzione generale della seguente equazione differenziale

$$(x-y)dy + (y+x+1)dx = 0$$

Equazione differenziale del primo ordine del tipo $Qdy + Pdx = 0$, esatta dal momento che $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 = \frac{\partial P}{\partial y}$, quindi esiste una funzione $F(x,y)$ tale che $Qdy + Pdx = dF = 0$ che possiamo determinare integrando lungo un percorso arbitrario (scelto ovviamente lungo gli assi coordinati)

$$F(x,y) - F(O) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = \int_0^x (x'+1)dx' + \int_0^y (x-y')dy' = \frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^2}{2}$$

Moltiplicando per 2 ed introducendo una costante di integrazione, possiamo scrivere la curva soluzione nella forma:

$x^2 + 2xy - y^2 + 2x + C = 0$

(4) 4.b Siete in grado di riconoscere la curva soluzione?

Equazione algebrica di secondo grado, quindi una conica, in particolare una iperbole.

(8) 4.c (MB, 8.8.10, p. 439) Trovare la funzione $y(t)$ la cui trasformata di Laplace è la seguente funzione

$$Y(p) = \frac{2p-1}{p^2-2p+10}e^{-\pi p}$$

La presenza dell'esponenziale implica una funzione discontinua e la formula di traslazione ci consente di scrivere che

$$\mathcal{L}^{-1}(Y) = u(t-\pi)f(t-\pi)$$

dove $f(t)$ è la trasformata inversa di $\frac{2p-1}{p^2-2p+10}$, che si può scrivere, dal momento che il denominatore è definito positivo, completando il quadrato:

$$\frac{2p-1}{p^2-2p+10} = \frac{2(p-1+1)-1}{(p-1)^2+3^2} = 2\frac{(p-1)}{(p-1)^2+3^2} + \frac{1}{3}\frac{3}{(p-1)^2+3^2}.$$

Quindi dalla tabella delle trasformate di Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2p-1}{p^2-2p+10}\right) = 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(p-1)}{(p-1)^2+3^2}\right) + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{(p-1)^2+3^2}\right) = 2e^t\cos 3t + \frac{1}{3}e^t \sin 3t$$

e la funzione che cerchiamo è

$$y(t) = \begin{cases} 2e^{t-\pi}\cos 3(t-\pi) + \frac{1}{3}e^{t-\pi}\sin 3(t-\pi) = -2e^{t-\pi}\cos 3t - \frac{1}{3}e^t \sin 3t & t \geq \pi \\ 0 & t < \pi \end{cases}$$

(MB, 8.10.14, p. 448) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y'' + 5y' + 6y = e^{-2t}, \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

(10) 5a. Trovando l'integrale generale e quindi applicando le condizioni iniziali

Equazione caratteristica e sue soluzioni:

$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \quad \to \quad \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -2$

Integrale generale omogenea associata:

$y_c(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-2t}$

Integrale particolare (termine forzante coincide con una soluzione omogenea associata):

$y_p(t) = Ate^{-2t} \quad \to \quad y_p' = -2Ae^{-2t} - 2Ate^{-2t}$ e $y_p'' = -4Ae^{-2t} + 4Ate^{-2t} \quad \to$

$-4Ae^{-2t} + 4Ate^{-2t} + 5Ae^{-2t} - 10Ate^{-2t} + 6Ate^{-2t} = e^{-2t} \quad \to \quad A = 1$

Integrale generale

$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-2t} + te^{-2t}$

Condizioni Iniziali:

$y(0) = c_1 + c_2 = 0 \quad y'(0) = -3c_1 - 2c_2 + 1 = 0 \quad \to \quad c_1 = 1, \quad c_2 = -1$

Pertanto

$y(t) = e^{-3t} - e^{-2t} + te^{-2t} = e^{-3t} + (t-1)e^{-2t}$

(10) 5b. Usando l'integrale di convoluzione

$$\mathcal{L}\{y'' + 5y' + 6y\} = \mathcal{L}\{e^{-2t}\} \quad \to \quad \left(p^2 + 5p + 6\right) Y = \mathcal{L}\{e^{-2t}\} \quad \to \quad Y = \frac{\mathcal{L}\{e^{-2t}\}}{p^2 + 5p + 6}$$

Trasformata inversa di $1/(p^2 + 5p + 6)$

$$Y = \frac{1}{(p^2 + 5p + 6)} = \frac{1}{(p+3)(p+2)} = -\frac{1}{p+3} + \frac{1}{p+2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2 + 5p + 6}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{p+3} + \frac{1}{p+2}\right\} = -e^{-3t} + e^{-2t}$$

quindi abbiamo

$Y = \mathcal{L}\{e^{-2t} - e^{-3t}\}\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = G(p)H(p)$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t (e^{-2\tau} - e^{-3\tau})(e^{-2(t-\tau)})d\tau \\ &= e^{-2t} \int_0^t (1 - e^{-2\tau})d\tau = e^{-2t} \left. (\tau + e^{-\tau}) \right|_0^t \\ &= e^{-2t}(t + e^{-t} - 1) = e^{-3t} + (t-1)e^{-2t} \end{aligned}$$