Ingegneria Elettronica per l'Automazione e le Telecomunicazioni

MATEMATICA 2 A.A. 2021/2022

ESAME 21 Febbraio 2022

Nome e Cognome	N. Matricola

Problema	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

Note: Non si possono utilizzare calcolatori o appunti. Il valore in punti (su 100) di ogni esercizio è indicato sul margine sinistro.

Formule per la trasformata di Laplace

$y = f(t)$	$Y(p) = \mathcal{L}(y) = F(p)$	
1	$\dfrac{1}{p}$	Re $p > 0$
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$	Re $(p+a) > 0$
$\sin at$	$\dfrac{a}{p^2+a^2}$	Re $p > \lvert \text{Im } a \rvert$
$\cos at$	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$	Re $p > \lvert \text{Im } a \rvert$
$\sinh at$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$	Re $p > \lvert \text{Re } a \rvert$
$\cosh at$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$	Re $p > \lvert \text{Re } a \rvert$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	Re $p > 0, \quad n \geq 0$
te^{at}	$\dfrac{1}{(p-a)^2}$	Re $(p+a) > 0$
$e^{-at}(1-at)$	$\dfrac{p}{(p+a)^2}$	Re $(p+a) > 0$
$e^{at}\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$	Re $(p-a) > \lvert \text{Im } \omega \rvert$
$e^{at}\cos \omega t$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$	Re $(p-a) > \lvert \text{Im } \omega \rvert$
$t\sin \omega t$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$	Re $p > \lvert \text{Im } \omega \rvert$
$t\cos \omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$	Re $p > \lvert \text{Im } \omega \rvert$
$\dfrac{\sin \omega t}{t}$	$\arctan \dfrac{\omega}{p}$	Re $p > \lvert \text{Im } \omega \rvert$
$u(t-a) = \begin{cases} 1, & t > a > 0 \\ 0, & t < a \end{cases}$	$\dfrac{1}{p}e^{-ap}$	Re $p > 0$

Operazioni di trasformazione di Laplace

Operazioni	
1. Trasformata di Laplace	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$
2. Trasformata di una derivata	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$
3. Sostituzione	$\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\} = F(p-a)$
4. Traslazione	$\mathcal{L}\{f(t-b)\} = F(p)e^{-bp}$

(8) 1.a (MB 1.13.19, p.32) Usando per $f(x)$ l'espressione più opportuna, trovare la serie di Maclaurin, fino al quinto ordine incluso, della funzione

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}}$$

(4) 1.b Determinare per quali valori di x essa converge.

(8) 1.c (MB 2.10.24, p. 67) Trovare tutti i valori della seguente radice: $\sqrt[8]{\dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}}$

ANNO ACCADEMICO 2021-2022

(10) **2.a** (MB 14.4.5, p. 681) Trovare i primi termini di ciascuna delle serie di Laurent attorno all'origine, cioè una serie per ogni regione anulare tra i punti singolari, della seguente funzione e trovarne il residuo all'origine

$$f(z) = \frac{z-1}{z^3(z-2)}$$

(10) **2.b** (MB 14.7.3, p. 699) Calcolare il seguente integrale definito usando il teorema dei residui:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\sin\theta}$$

(MB 6.8.4, p. 307) Calcolare l'integrale di linea $\int_C y^2dx + 2xdy + dz$, lungo il percorso C che collega l'origine $(0,0,0)$ con il punto $(1,1,1)$

(8) **2.a** Lungo la spezzata che va da $(0,0,0)$ a $(1,0,0)$ a $(1,0,1)$ a $(1,1,1)$

(12) **2.b** Sul cerchio $x^2 + y^2 - 2y = 0$ dall'origine fino a $(1,1,0)$ e poi sul segmento verticale fino a $(1,1,1)$

(MB 7.8.13b, p. 363) La seguente funzione è data in un periodo:

$$f(x) = 2 - x \qquad 0 < x < 4$$

(6) **3.a** Disegnare schematicamente diversi periodi della funzione.

(14) **3.b** Sviluppare nella appropriata serie di Fourier

(10) **4.a** (MB, 8.3.7, p. 403) Trovare la soluzione generale della seguente equazione differenziale

$$(1 + e^x)y' + 2e^x y = (1 + e^x)e^x$$

(10) **4.b** (MB, 8.10.9, p. 448) Usare l'integrale di convoluzione per trovare la trasformata inversa di Laplace della seguente funzione:

$$Y(p) = \frac{2}{p^3(p+2)}$$

(20) **5a.** Usando le trasformate di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y'' + 5y' + 6y = e^t \left[u(t-2) - u(t)\right], \qquad y(0) = y'(0) = 0$$