15 Autovalori e autovettori di una matrice A

Nel capitolo sulle applicazioni lineari, sono stati esposti alcuni esempi che mostrano come talune di esse trasformano delle figure geometriche, come ad esempio le dilatazioni. Per comprendere meglio la geometria delle trasformazioni lineari è importante studiare se ci sono direzioni privilegiate del piano, ad esempio direzioni lungo le quali l'applicazione lineare opera in maniera semplice; nell'analisi seguente, verranno ricercate direzioni lungo le quali l'applicazione lineare opera come una semplice moltiplicazione per uno scalare.

Si ricordi che, ancora nel capitolo delle applicazioni lineari, è stato mostrato che ad ogni applicazione lineare tra due spazi vettoriali, dei quali siano fissate due rispettive basi, è associata in maniera univoca una matrice: questa osservazione consente di spostare l'attenzione e lavorare direttamente sulle matrici anzichè sulle applicazioni.

Tutte le matrici trattate in questo capitolo sono quadrate, anche quando non verrà esplicitamente menzionato.

Sia $\boldsymbol{A}$ una matrice quadrata di ordine n. Il problema prima esposto è quello di determinare uno scalare λ ed un vettore $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ che soddisfino l'equazione:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{15.1}$$

Definizione 15.1. Uno scalare λ ed un vettore $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ che soddisfano la (15.1) prendono il nome, rispettivamente, di **autovalore** e di **autovettore** di $\boldsymbol{A}$.

Per la ricerca degli autovalori e degli autovettori di una matrice occorre introdurre la definizione di polinomio caratteristico e di equazione caratteristica.

Definizione 15.2 (Polinomio caratteristico di $\boldsymbol{A}$)**.** Data la matrice quadrata

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

allora la matrice $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I_n}$ è la seguente:

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I_n} = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \vdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}.$$

Si definisce **polinomio caratteristico di $\boldsymbol{A}$**, il polinomio ottenuto sviluppando il determinante della matrice $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I_n}$.

Esempio 15.3. Si consideri la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

volendo determinare il polinomio caratteristico di $\boldsymbol{A}$, si calcola la matrice $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_3$ come segue:

$$\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix};$$

pertanto, il polinomio caratteristico è il determinante di tale matrice, ossia

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 2.$$

Definizione 15.4 (Equazione caratteristica di $\boldsymbol{A}$)**.** Nelle ipotesi della precedente definizione, si definisce **equazione caratteristica di** $\boldsymbol{A}$, l'equazione $det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I_n}) = 0$.

Il seguente teorema fornisce uno strumento per la ricerca degli autovalori di una matrice.

Teorema 15.5. *Uno scalare λ è un autovalore di $\boldsymbol{A}$ se e solo se λ è una soluzione dell'equazione caratteristica di $\boldsymbol{A}$.*

DIMOSTRAZIONE. Nella forma matriciale, l'equazione $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$ può essere scritta come $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{I_n x}$, da cui, portando al primo membro, si ottiene che $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I_n})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Si osservi che $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I_n})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ è un sistema omogeneo di equazioni lineari, le cui incognite sono le n componenti del vettore $\boldsymbol{x}$; pertanto sicuramente la soluzione banale $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ è una soluzione di tale sistema omogeneo. Tuttavia, per definizione di autovalore, occorre ricercare soluzioni non nulle $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$; pertanto occorre che la soluzione nulla del sistema omogeneo non sia l'unica. Allora è necessario che il sistema ammetta infinite soluzioni e dunque che $rk(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I_n}) < n$.

Essendo $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I_n}$ una matrice quadrata, il rango $rk(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I_n})$ è minore di n se $det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I_n}) = 0$, ossia l'equazione caratteristica, le cui soluzioni sono gli autovalori di $\boldsymbol{A}$. ∎

Si osservi che l'equazione caratteristica di una matrice quadrata di ordine n ha grado n, per cui ammette esattamente n radici, che possono essere reali o complesse. Inoltre, può accadere che tali n non siano tutte distinte. Gli autovalori di $\boldsymbol{A}$ sono pertanto le soluzioni $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dell'equazione caratteristica. Il numero di volte con cui l'autovalore λ_i compare nella soluzione dell'equazione caratteristica viene detto **molteplicità algebrica di** λ_i e si indica col simbolo $m_a(\lambda_i)$.

Per ciascun autovalore λ_i, ogni vettore $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ che sia soluzione del sistema di equazioni lineari $(\boldsymbol{A} - \lambda_i\boldsymbol{I_n})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ è un autovettore della matrice $\boldsymbol{A}$ relativo allo scalare λ_i e perciò prende il nome di autovettore di $\boldsymbol{A}$ associato all'autovalore λ_i.

Evidentemente, dalle osservazioni fatte sul numero di soluzioni di un sistema omogeneo che non ammetta la sola soluzione nulla, per ogni autovalore λ di $\boldsymbol{A}$ esistono infiniti autovettori, che sono tutte le soluzioni di $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I_n})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Pertanto, l'insieme degli autovettori associato ad un autovalore λ costituisce un sottospazio vettoriale, che viene detto **autospazio associato all'autovalore** λ; la dimensione di tale autospazio è definita **molteplicità geometrica di** λ e si indica col simbolo $m_g(\lambda)$.

Teorema 15.6. *Per ogni autovalore λ, risulta che $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.*

Esempio 15.7 (Calcolo deli autovalori e degli autovettori)**.** Consideriamo la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Costruiamo quindi la matrice

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

e calcoliamo il polinomio caratteristico $det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = (2-\lambda)(1-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 3\lambda$.

A questo punto risolviamo l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 3\lambda = 0$. Le soluzioni dell'equazione, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 3$, sono gli autovalori di $\boldsymbol{A}$.

Per determinare gli autovettori dobbiamo risolvere il sistema di equazioni omogeneo $\boldsymbol{(A - \lambda_i I)x = 0}$. Ponendo $\lambda_1 = 0$ il sistema diventa

$$\begin{aligned} 2x_1 + \sqrt{2}x_2 &= 0 \\ \sqrt{2}x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Questo sistema è ridondante, per cui si elimina la seconda equazione e il sistema diventa:

$$2x_1 + \sqrt{2}x_2 = 0$$

Il sistema, per costruzione, ammette infinite soluzioni del tipo $(\alpha, -\sqrt{2}\alpha)$. Ponendo, ad esempio, $\alpha = 1$, un autovettore associato a $\lambda_1 = 0$ è $\boldsymbol{x} = (1, -\sqrt{2})$.

Analogamente, ponendo $\lambda_2 = 3$ il sistema diventa

$$\begin{aligned} -x_1 + \sqrt{2}x_2 &= 0 \\ \sqrt{2}x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Questo sistema è ridondante, per cui si può eliminare la seconda equazione e risulta:

$$-x_1 + \sqrt{2}x_2 = 0$$

Il sistema è indeterminato e ammette infinite soluzioni del tipo $(\sqrt{2}\beta, \beta)$; ponendo ad esempio $\beta = \sqrt{2}$, si ottiene come autovettore associato all'autovalore $\lambda_2 = 3$, il vettore $\boldsymbol{x} = (2, \sqrt{2})$.

Esempio 15.8. Sia data la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix};$$

volendone determinare gli autovalori, si considera il determinante della seguente matrice:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 5 & -1-\lambda \end{bmatrix}.$$

Tale determinante è $\lambda^2 + 4$ e quindi si osservi che l'equazione caratteristica ammette le radici complesse $2i$ e $-2i$, che sono gli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}$.

Gli esempi precedenti mostrano che gli autovalori di una matrice $\boldsymbol{A}$ possono essere a priori numeri reali o complessi. Per le matrici simmetriche, invece, vale il seguente teorema, di cui si omette la dimostrazione.

Teorema 15.9 (Autovalori di matrici simmetriche)**.** *Gli autovalori di una matrice simmetrica sono numeri reali.*

Teorema 15.10 (Autovettori di matrici simmetriche)**.** *Sia $\boldsymbol{A}$ una matrice simmetrica. Allora gli autovettori associati ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali, ossia se λ_i e λ_j sono due autovalori distinti di A e x_i e x_j due autovettori associati, rispettivamente, a λ_i e λ_j, allora $\boldsymbol{x_i^T x_j} = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano λ_i e λ_j due autovalori distinti di $\boldsymbol{A}$ $(\lambda_i \neq \lambda_j)$ e siano $\mathbf{x_i}$ e $\mathbf{x_j}$ due autovettori associati rispettivamente a λ_i e a λ_j. Allora, per definizione di autovalore e autovettore, sono verificate entrambe le equazioni $\boldsymbol{Ax_i} = \lambda_i \boldsymbol{x_i}$ e $\boldsymbol{Ax_j} = \lambda_j \boldsymbol{x_j}$. Si moltiplichino le due equazioni rispettivamente per $\boldsymbol{x_j^T}$ e $\boldsymbol{x_i^T}$; si ottiene che $\boldsymbol{x_j^T A x_i} = \lambda_i \boldsymbol{x_j^T x_i}$ e $\boldsymbol{x_i^T A x_j} = \lambda_j \boldsymbol{x_i^T x_j}$.

La matrice $\boldsymbol{A}$ è simmetrica per ipotesi e, utilizzando la definizione di matrice simmetrica, si verifica facilmente che $\boldsymbol{x_j^T A x_i} = \boldsymbol{x_i^T A x_j}$. Pertanto, si risulta che $\lambda_i \boldsymbol{x_j^T x_i} = \lambda_j \boldsymbol{x_i^T x_j}$.

Si osservi che i prodotti $\boldsymbol{x_j^T x_i}$ e $\boldsymbol{x_i^T x_j}$ coincidono, perchè rappresentano il prodotto scalare tra i vettori $\boldsymbol{x_i}$ e $\boldsymbol{x_j}$ e tale prodotto gode della proprietà commutativa. Sfruttando, infine, l'ipotesi che gli autovalori λ_i e λ_j sono distinti, allora risulta necessariamente che $\boldsymbol{x_j^T x_i} = \boldsymbol{x_i^T x_j} = 0$ e dunque gli autovettori $\boldsymbol{x_i}$ e $\boldsymbol{x_j}$ sono ortogonali.

■

15.1 Diagonalizzazione

Prima di affrontare il problema della diagonalizzazione da un punto di vista matematico, vengono premesse delle osservazioni che ne spiegano il senso. Il lettore è invitato a rileggere il capitolo delle applicazioni lineari, dal quale seguono le prossime considerazioni.

Sia V uno spazio vettoriale e sia $f: V \to V$ un'applicazione lineare. Fissata una base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \ldots, \boldsymbol{b_n}\}$ dello spazio vettoriale V, allora è possibile associare all'applicazione lineare f una matrice $\boldsymbol{A}$ del tipo

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

dove le colonne della matrice A sono tali che $f(\boldsymbol{b}_i) = a_{1i}\boldsymbol{b_1} + ... + a_{ni}\boldsymbol{b_n}$, per $i = 1, ...n$. L'utilità di tale matrice $\boldsymbol{A}$ segue dal fatto che se $\boldsymbol{v}$ è un vettore dello spazio vettoriale V, allora il vettore $f(\boldsymbol{v})$ di V si calcola effettuando il prodotto $\boldsymbol{A}v$, sottointendendo chiaramente che il vettore v è un vettore colonna e che quindi è possibile calcolare tale prodotto.

Se la matrice $\boldsymbol{A}$ è una matrice diagonale del tipo

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & ... & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & ... & a_n \end{bmatrix},$$

allora, per quanto osservato, risulta che $f(\boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{Ab_i} = a_i\boldsymbol{b_i}$ per $i = 1, ...n$, ossia $a_1, ...a_n$ sono gli autovalori della matrice A e $\boldsymbol{b_1}, \ldots, \boldsymbol{b_n}$ sono gli autovettori ad essi associati. Pertanto, la ricerca degli autovalori e degli autovettori si esaurisce nel caso in cui la matrice associata all'applicazione lineare è diagonale.

L'associazione di una matrice all'applicazione lineare non è univoca, ma è una stretta conseguenza della scelta della base dello spazio vettoriale. Pertanto, in sintesi, il problema della diagonalizzazione è ancora equivalente a: fissato uno spazio vettoriale ed un'applicazione lineare dello spazio in sé, si ricerchi, se possibile, una base dello spazio vettoriale in modo che la matrice associata all'applicazione lineare sia una matrice diagonale.

Così come l'analisi su autovalori e autovettori è stata effettuata, nel paragrafo precedente, sulle matrici anziché sulle applicazioni lineari, anche in questo paragrafo si proporrà un'elaborazione analoga, ponendo l'attenzione sul problema della diagonalizzazione di una matrice, ossia: data una matrice, ricercare una matrice diagonale che sia *simile* a quella assegnata. Di seguito, è esposta la nozione di similitudine tra matrici.

Definizione 15.11 (Matrici simili)**.** Due matrici quadrate $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ si dicono **simili** se esiste una matrice quadrata invertibile $\boldsymbol{P}$ tale che $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{PAP^{-1}}$ (chiaramente, la definizione è equivalente a richiedere che $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P^{-1}BP}$).

Come detto in precedenza, data una matrice quadrata $\boldsymbol{A}$, si pone il problema di trovare una matrice diagonale $\boldsymbol{B}$ simile ad $\boldsymbol{A}$, in modo da facilitare la ricerca di autovalori e autovettori per la matrice $\boldsymbol{B}$. Tuttavia, la ricerca della matrice simile è utile se i suoi autovalori conicidono con quelli di $\boldsymbol{A}$. In tal senso, è di fondamentale importanza il seguente teorema.

Teorema 15.12. *Le matrici simili hanno gli stessi autovalori.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ due matrici simili; dalla definizione segue che esiste una matrice invertibile $\boldsymbol{P}$ tale che $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{PAP^{-1}}$. Sia λ un autovalore di $\boldsymbol{B}$; risulta che $\boldsymbol{Bx} = \lambda\boldsymbol{x}$, con $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. Quindi si ha che $\boldsymbol{PAP^{-1}x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Moltiplicando ambo i membri per $\boldsymbol{P^{-1}}$, si ottiene che $\boldsymbol{AP^{-1}x} = \lambda\boldsymbol{P^{-1}x}$; posto $\boldsymbol{P^{-1}x} = \boldsymbol{y}$, risulta che $\boldsymbol{Ay} = \lambda\boldsymbol{y}$, ossia λ è anche un autovalore di $\boldsymbol{A}$.

In maniera analoga, sfruttando la simmetria della definizione di similitudine tra matrici, si dimostra che ogni autovalore di $\boldsymbol{A}$ è anche autovalore di $\boldsymbol{B}$. Pertanto vale la tesi. ■

La seguente definizione è centrale nello studio svolto in questo paragrafo.

Definizione 15.13 (Matrici diagonalizzabili)**.** Una matrice quadrata $\boldsymbol{A}$ si dice **diagonalizzabile** se è simile ad una matrice diagonale, cioè se esistono una matrice diagonale $\boldsymbol{D}$ e una matrice invertibile $\boldsymbol{P}$ tali che $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{PAP^{-1}}$.

Analogamente, si introduce la seguente definizione.

Definizione 15.14. Sia f un'applicazione lineare di uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ in sé. Si dice che f è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di $\boldsymbol{V}$ tale che la matrice associata a f rispetto a tale base sia diagonale.

Il teorema seguente è stato sostanzialmente dimostrato nelle osservazioni fatte all'inizio del paragrafo.

Teorema 15.15. *Sia f un'applicazione lineare di uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ in sé. Allora f è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di $\boldsymbol{V}$ costituita da autovettori di f.*

Si dimostra, con passaggi semplici, che il problema della diagonalizzazione di un'applicazione lineare o di una matrice quadrata sono equivalenti, ossia un'applicazione lineare è diagonalizzabile se e solo se lo è la matrice associata ad essa rispetto a qualsiasi base dello spazio vettoriale. Tuttavia, tale dimostrazione viene omessa in quanto richiede conoscenze che non sono state trattate nel corso.

Teorema 15.16. *Ogni matrice $\boldsymbol{A}$ di ordine n che abbia n autovalori distinti è diagonalizzabile.*

Il teorema seguente fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinchè una matrice sia diagonalizzabile.

Teorema 15.17. *Sia $\boldsymbol{A}$ una matrice di ordine n. Allora $\boldsymbol{A}$ è diagonalizzabile se e solo se gli autovalori di A sono tutti reali e la molteplicità algebrica di ciascuno di essi coincide con quella geometrica.*

Il seguente teorema fornisce una condizione necessaria

Verranno ora richiamate delle definizioni utili per lo sviluppo dell'argomento.

Definizione 15.18 (Matrici ortogonali)**.** Una matrice quadrata invertibile $\boldsymbol{H}$ di ordine n si dice ortogonale se la sua inversa coincide con la sua trasposta, ossia $\boldsymbol{H^{-1}} = \boldsymbol{H^T}$ e quindi $\boldsymbol{H^T H} = \boldsymbol{H H^T} = \boldsymbol{I_n}$.

Definizione 15.19 (Autovettori normalizzati)**.** Data una matrice $\boldsymbol{A}$, sia λ un autovalore di $\boldsymbol{A}$ e sia $\boldsymbol{x}$ un autovettore di $\boldsymbol{A}$ associato a λ. Si definisce **autovettore normalizzato $\boldsymbol{u}$**, il vettore ottenuto dividendo l'autovettore $\boldsymbol{x}$ per la sua lunghezza $||\boldsymbol{x}||$, cioè $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||}$.

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli n autovalori di una matrice quadrata A di ordine n e siano $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_n}$ degli autovettori normalizzati ad essi associati. Indicheremo con $\boldsymbol{Q}$ la matrice le cui colonne sono autovettori normalizzati di $\boldsymbol{A}$, cioè $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{u_1 u_2} \cdots \boldsymbol{u_n}]$.

Proposizione 15.20. *Sia $\boldsymbol{A}$ una matrice simmetrica e sia $\boldsymbol{Q}$ la matrice di autovettori normalizzati. Allora la matrice $\boldsymbol{Q}$ è una matrice ortogonale.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di $\mathbf{A}$ e siano $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_n}$ gli autovettori normalizzati ad essi rispettivamente associati. Evidentemente, si ha che $\mathbf{u_i^T u_j} = \mathbf{1}$ se $i = j$ e $\mathbf{u_i^T u_j} = \mathbf{0}$ se $i \neq j$ (cf.15.10). Pertanto si ha che $\mathbf{Q^T Q} = \mathbf{I_n}$. Analogamente, si prova che $\mathbf{QQ^T} = \mathbf{I_n}$, ossia la matrice $\boldsymbol{Q}$ è ortogonale. ■

Teorema 15.21 (Teorema spettrale)**.** *Ogni matrice simmetrica $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile. In particolare, se $\mathbf{D}$ è la matrice diagonale, i cui elementi sulla diagonale principale sono gli autovalori di $\mathbf{A}$, e $\mathbf{Q}$ è una matrice di autovettori normalizzati di $\mathbf{A}$, allora $\mathbf{A} = \mathbf{Q^T D Q}$ e $\mathbf{D} = \mathbf{QAQ^T}$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli n autovalori di $\mathbf{A}$ e siano $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_n}$ gli autovettori normalizzati Si consideri il prodotto $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{QAQ^T}$. La matrice $\boldsymbol{R}$ è una matrice quadrata di ordine n, il cui generico elemento r_{ij} di riga i e colonna j è definito dal prodotto $r_{ij} = \boldsymbol{u_i^T A u_j}$. Poichè il vettore $\boldsymbol{u_j}$ è l'autovettore normalizzato di $\boldsymbol{A}$ corrispondente all'autovalore λ_j, allora risulta che $\boldsymbol{A u_j} = \lambda_j \boldsymbol{u_j}$ e quindi $r_{ij} = \lambda_j \boldsymbol{u_i^T u_j}$. Pertanto, si ha che $r_{ij} = \lambda_j$ se $i = j$, cioè per tutti gli elementi sulla diagonale principale di $\boldsymbol{R}$ sono gli autovalori di $\boldsymbol{A}$ ed invece $r_{ij} = 0$ se $i \neq j$, cioè per tutti gli elementi al di fuori della diagonale principale sono nulli. Ne consegue, dunque, che $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{D}$ e la tesi è dimostrata. ■