

Densità spettrale di energia

Si introduce una rappresentazione spettrale del contenuto energetico di un segnale

Dato un segnale $x(t)$ di energia a tempo continuo, dalla relazione di Parseval si ha

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Analogamente per un segnale $x(n)$ tempo discreto si ha

$$\mathcal{E}_x = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(v)|^2 dv$$

Tali relazioni indicano che la funzione $S_x(\cdot) = |X(\cdot)|^2$ rappresenta la distribuzione spettrale dell'energia *ESD* (Energy Spectral Density) del segnale $x(\cdot)$.

► L' *ESD* è una funzione reale e non negativa. Inoltre l'*ESD* è pari per segnali reali ed è invariante rispetto ad una traslazione del segnale nel dominio del tempo (come esercizio, si ricavano queste proprietà a partire dalle proprietà della trasformata di Fourier).

► Dalla definizione, segue immediatamente che l'*ESD* dell'ingresso $x(\cdot)$ e dell'uscita $y(\cdot)$ di un sistema LTI sono legate dalla relazione

$$S_y(\cdot) = |H(\cdot)|^2 S_x(\cdot)$$

per cui la funzione $|H(\cdot)|^2$ prende il nome di funzione di trasferimento dell'energia.

Definizione energetica di banda

Integrando l'*ESD* su in un intervallo di frequenze, si ottiene l'energia del segnale contenuta nell'intervallo di integrazione. Per i segnali di energia, dunque, la banda può essere definita come l'intervallo di frequenze in cui è contenuta una determinata frazione dell'energia totale, ad esempio il 90%, il 95%, il 99% . Se i segnali sono reali (per cui la *ESD* è pari) si prendono in esame solo le frequenze positive (banda monolaterale), mentre per segnali complessi si fa sempre riferimento alla banda bilaterale.

Per i sistemi, la banda viene comunemente definita con riferimento alla funzione di trasferimento dell'energia.

Impulso rettangolare

Sia $x(t)$ un impulso rettangolare di ampiezza A e durata T ; ricordando che

$$A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow AT \operatorname{sinc}(fT)$$

si ottiene immediatamente l'*ESD* dell'impulso rettangolare

$$S_x(f) = \mathcal{E}_x T \operatorname{sinc}^2(fT)$$

dove $\mathcal{E}_x = A^2 T$ è l'energia di $x(t)$.

È interessante valutare la frazione di energia $\mathcal{E}(k)/\mathcal{E}$ dell'impulso rettangolare compresa nell'intervallo di frequenze

$$-\frac{k}{T} \leq f \leq \frac{k}{T} \quad k = 1, 2, \dots$$

Integrando l'*ESD* si ha

$$\frac{\mathcal{E}(k)}{\mathcal{E}} = \int_{-\frac{k}{T}}^{\frac{k}{T}} T \operatorname{sinc}^2(fT) df = 2 \int_0^k \operatorname{sinc}^2(\lambda) d\lambda$$

Valutando numericamente l'integrale si ha che per $k = 1$, cioè nel lobo principale, la frazione di energia è pari al 90,3%; includendo anche una coppia di lobi laterali ($k=2$) la frazione di energia sale al 95 %, mentre per racchiudere il 99%

dell'energia occorre portare in conto nove coppie di lobi laterali, cioè $k = 10$. Corrispondentemente la banda (monolatera) al 90% è $1/T$, quella al 95% è $2/T$ e quella al 99% è $10/T$.

Impulso esponenziale

Ricordando che

$$x(t) = A e^{-2\pi t/T} u(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{AT}{2\pi + j2\pi fT}$$

si ottiene immediatamente l'espressione per l'ESD di un impulso esponenziale

$$S(f) = \frac{A^2 T^2}{(2\pi)^2 + (2\pi fT)^2}$$

L'energia $\mathcal{E}(B)$ nella banda $-B \leq f \leq B$ è quindi

$$\mathcal{E}(B) = \int_{-B}^B \frac{A^2 T^2}{(2\pi)^2 + (2\pi fT)^2} df = \frac{A^2 T}{2\pi^2} \arctan(BT)$$

in particolare ponendo $B = \infty$ si ottiene l'energia totale $\mathcal{E}_x = \frac{A^2 T}{4\pi}$.

Noto lo spettro di energia si può calcolare la banda del segnale. Precisamente la banda monolatera B_ϵ cui compete la frazione $1 - \epsilon$ dell'energia totale si ottiene risolvendo l'equazione

$$1 - \epsilon = \frac{2}{\pi} \arctan(B_\epsilon T)$$

da cui si ricava

$$B_\epsilon = \frac{1}{T} \tan\left(\frac{\pi}{2}(1 - \epsilon)\right)$$

Così per esempio la banda al 95% dell'energia vale:

$$B_{0.05} = f_0 \tan\left(0.95 \frac{\pi}{2}\right) \text{ Hz} \simeq 12.7/T$$

Densità spettrale di potenza

Questa definizione, come vedremo in seguito, ha valore come definizione ma presenta una scarsa utilità operativa.

Ricordiamo che, dalla definizione di potenza di un segnale, si ha

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

Considerando il segnale $x_T(t)$ troncato nell'intervallo $(-T, T)$ e definendo la sua trasformata

$$x_T(t) = x(t) \Pi\left(\frac{t}{2T}\right) \longleftrightarrow X_T(f)$$

si ottiene

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_T(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |X_T(f)|^2 df.$$

Passando al limite sotto il segno di integrale si ha

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(f)|^2 df$$

da cui si osserva che la funzione integranda è interpretabile come densità spettrale di potenza (abbreviazione *PSD*) del segnale, che è dunque definita da

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(f)|^2$$

► Si noti bene come l'introduzione del segnale troncato $x_T(t)$ ci abbia consentito di applicare la relazione di Parseval che, altrimenti, non sarebbe stata direttamente applicabile all'integrale nell'intervallo limitato di frequenze $(-T, T)$ avendosi

$$\int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \neq \int_{-T}^T |X(f)|^2 df$$

Densità spettrale mutua di energia e di potenza

Anche l'energia mutua può essere analizzata in frequenza, invero dalla relazione di Parseval si ha

$$\mathcal{E}_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df \quad \mathcal{E}_{xy} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\nu)Y^*(\nu)d\nu$$

che porta immediatamente ad interpretare la funzione integranda come *densità spettrale di energia mutua (ESD mutua)* di $x(\cdot)$ e $y(\cdot)$, cioè

$$S_{xy}(\cdot) = X(\cdot)Y^*(\cdot)$$

Notiamo esplicitamente che in questa definizione l'ordine dei due segnali è importante, dal momento che il secondo dei due spettri deve essere coniugato.

Analogamente per i segnali di potenza si definisce la *densità spettrale di potenza mutua* di $x(\cdot)$ e $y(\cdot)$ nell'ordine, e la si denota col simbolo $S_{xy}(\cdot)$, il limite

$$S_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_T(f)Y_T^*(f)$$

dove $X_T(f)$ e $Y_T(f)$ denotano al solito gli spettri dei segnali troncati. Analogamente nel caso di segnali a tempo discreto, con ovvio significato dei simboli, si pone

$$S_{xy}(\nu) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} X_N(\nu)Y_N^*(\nu)$$

Teorema di Wiener-Kintchine

Per segnali di energia, ricordando la proprietà della trasformata di Fourier, per cui ad una coniugazione in un dominio corrisponde una coniugazione più un ribaltamento nell'altro dominio, si ottiene

$$x(\cdot) * y^*(-(\cdot)) \longleftrightarrow X(\cdot)Y^*(\cdot) = S_{xy}(\cdot)$$

La convoluzione a primo membro è la funzione di mutua correlazione che è, dunque, legata allo spettro di energia mutua dall'operazione di trasformazione

$$r_{xy}(\cdot) \longleftrightarrow S_{xy}(\cdot)$$

Ovviamente,, per $x(\cdot) \equiv y(\cdot)$, si ha che la funzione di autocorrelazione e la densità spettrale di energia sono legati fra loro dalla trasformata di Fourier, cioè:

$$r_x(\cdot) \longleftrightarrow S_x(\cdot)$$

In forma più generale, è possibile dimostrare che anche per segnali di potenza la PSD di un segnale coincide con la trasformata di Fourier della funzione di mutua correlazione. Il teorema di Wiener-Kinchine stabilisce tale importante relazione.



Teorema di Wiener-Kintchine

Dati due segnali $x(\cdot)$ e $y(\cdot)$, la densità spettrale mutua $S_{xy}(\cdot)$ è la trasformata di Fourier della loro funzione di mutua correlazione.

Prova (Approfondimento)

Supposti i segnali a tempo continuo, della definizione di spettro mutuo si ha

$$X_T(f)Y_T^*(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1) \Pi\left(\frac{t_1}{2T}\right) e^{-j2\pi f t_1} \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t_2) \Pi\left(\frac{t_2}{2T}\right) e^{j2\pi f t_2} dt_1 dt_2$$

da cui si ricava

$$X_T(f)Y_T^*(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t_1}{2T}\right) \Pi\left(\frac{t_2}{2T}\right) x(t_1) y^*(t_2) e^{-j2\pi f(t_1 - t_2)} dt_1 dt_2$$

effettuando nell'integrale il cambio di variabile

$$\begin{cases} t = t_1 \\ \tau = t_1 - t_2 \end{cases}$$

si ottiene

$$X_T(f)Y_T^*(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t}{2T}\right) \Pi\left(\frac{t - \tau}{2T}\right) x(t) y^*(t - \tau) e^{-j2\pi f \tau} dt d\tau$$

da cui, dividendo per $2T$ e passando al limite per $T \rightarrow \infty$,

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t}{2T}\right) \Pi\left(\frac{t - \tau}{2T}\right) x(t) y^*(t - \tau) dt \right] e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

Il limite tra parentesi quadre a secondo membro della relazione precedente formalmente differisce dalla media temporale in quanto il prodotto delle due finestre rettangolari di durata $2T$ è ancora una finestra rettangolare ma di durata $2T - |\tau|$; tuttavia, per $T \rightarrow \infty$ la riduzione della durata non ha effetto ($2T - |\tau| \simeq 2T$) e, conseguentemente, l'espressione tra parentesi quadre è la mutua correlazione $r_{xy}(\tau)$ tra i due segnali, onde l'asserto.

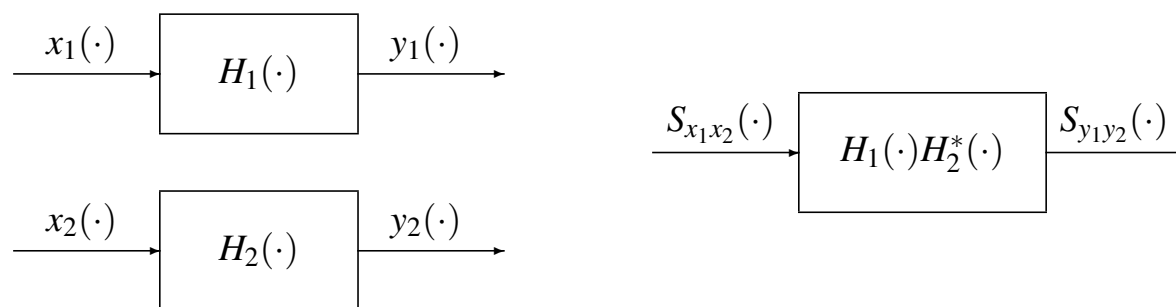
Si osservi che se due segnali sono incoerenti allora, a norma del teorema di Wiener-Kinchine, la loro *PSD* mutua è nulla.

Legami ingresso-uscita per le *PSD*

Dal Teorema di Wiener-Khinchine è immediato stabilire i legami esistenti tra le *PSD*, o le *ESD* a seconda del tipo di segnali, in ingresso ed in uscita a sistemi LTI semplicemente trasformando gli analoghi legami tra le correlazioni precedentemente stabiliti.

Ricordando che la mutua correlazione tra le uscite di due sistemi LTI è data dalla relazione

$$r_{y_1 y_2}(\cdot) = r_{h_1 h_2}(\cdot) * r_{x_1 x_2}(\cdot)$$



trasformando secondo Fourier si ha

$$S_{y_1 y_2}(\cdot) = H_1(\cdot)H_2^*(\cdot)S_{x_1 x_2}(\cdot)$$

In modo analogo è possibile stabilire gli altri legami di interesse: così lo spettro di potenza dell'uscita è legato a quello dell'ingresso dalla relazione

$$S_y(\cdot) = |H(\cdot)|^2 S_x(\cdot)$$

mentre le *PSD* mutue uscita-ingresso e ingresso-uscita sono date da

$$S_{yx}(\cdot) = H(\cdot)S_x(\cdot) \quad S_{xy}(\cdot) = H(\cdot)^* S_x(\cdot)$$

Rumore termico

Il termine *spettro bianco* viene utilizzato per descrivere un segnale in cui tutte le componenti spettrali hanno la stessa ampiezza, e dunque, la *PSD* risulta essere una funzione costante della frequenza. Per il teorema di Wiener-Kintchine, l'autocorrelazione di un segnale con spettro bianco deve essere impulsiva.

È interessante osservare che la PSD del rumore termico è sostanzialmente costante in tutta la banda di frequenze in cui i sistemi si trovano ad operare. Infatti, abbiamo visto che

$$S_x(f) \sim \frac{KT}{2} = \mathcal{N}_0/2$$

per frequenze minori di 10^{12} Hz. La potenza di rumore in uscita ad un filtro LTI quando l'ingresso è rumore bianco è data da

$$P_x = \frac{\mathcal{N}_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

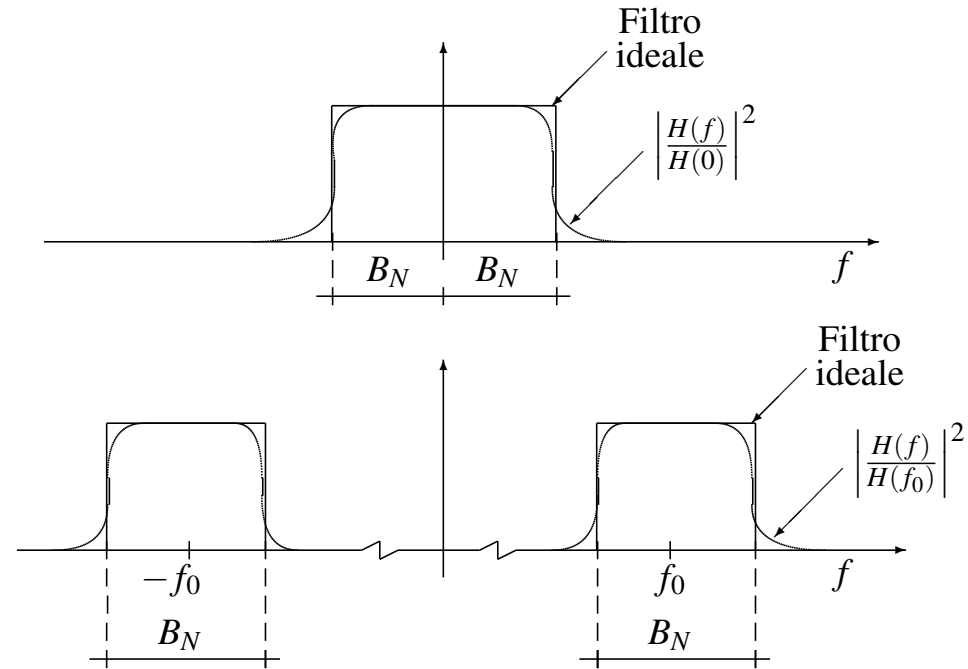
Introdotta la banda equivalente di rumore (monolatera) del filtro

$$B_N = \int_0^{+\infty} \left| \frac{H(f)}{H(f_0)} \right|^2 df$$

l'espressione della potenza si semplifica in

$$P_x = \mathcal{N}_0 |H(f_0)|^2 B_N$$

Pertanto la banda equivalente di rumore è la banda del filtro ideale avente lo stesso guadagno $|H(f_0)|^2$ di centro banda e la cui funzione di trasferimento dell'energia sottende la stessa area. Tale interpretazione è illustrata in figura sia nel caso di sistemi passa-basso che passa-banda.



Dalla relazione di Parseval segue anche che la banda equivalente di rumore è calcolabile anche a partire dalla risposta impulsiva mediante la relazione

$$2B_N = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt}{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi f_0 t} dt \right|^2}$$

Il campionamento dei segnali

Il campionamento è alla base del processo di conversione analogico-numerico (A/D) dei segnali. L'errore introdotto durante la conversione A/D può essere reso arbitrariamente piccolo se le variabili che intervengono nel processo sono adeguatamente dimensionate.

Si consideri una forma d'onda $x_a(t)$, ci proponiamo di stabilire se, ed in quali ipotesi, la sequenza dei suoi campioni

$$x(n) = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty$$

rappresenti il segnale tempo continuo $x_a(t)$, nel senso che sia possibile ricostruire esattamente $x_a(t)$ a partire da $x(n)$.

Campionamento ideale

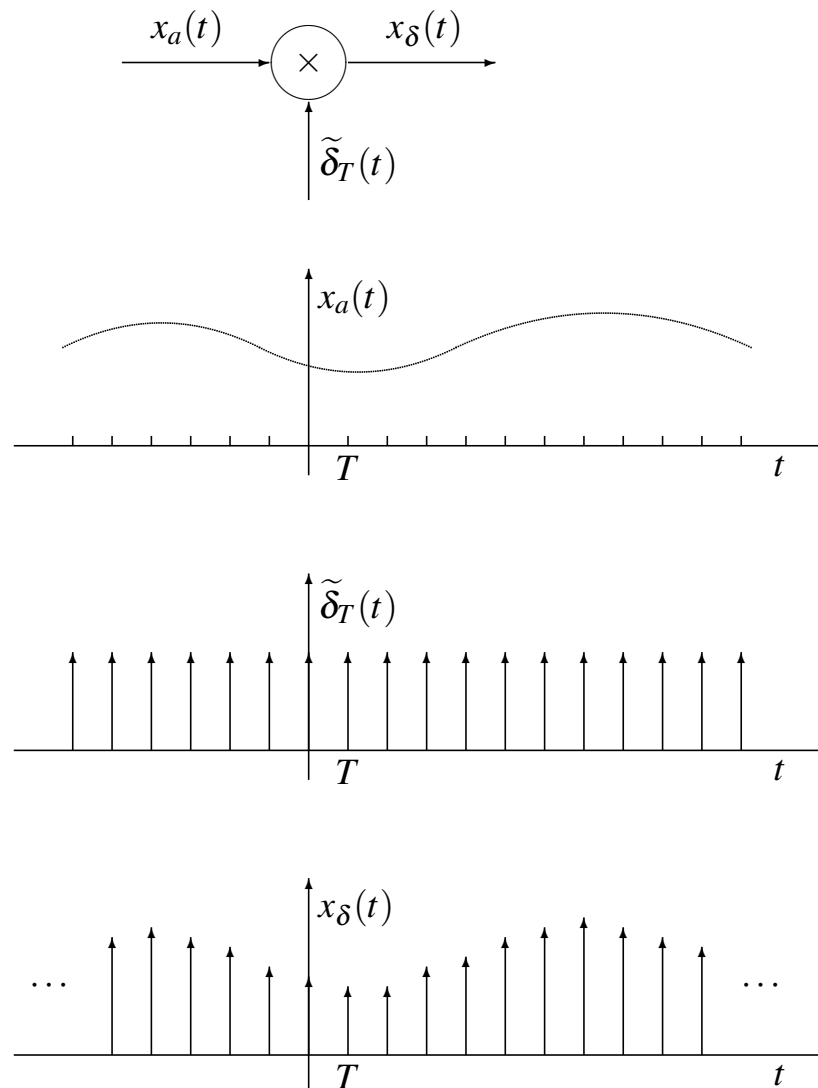
Ricordiamo che la versione campionata di una forma d'onda $x_a(t)$ è il segnale

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) = x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

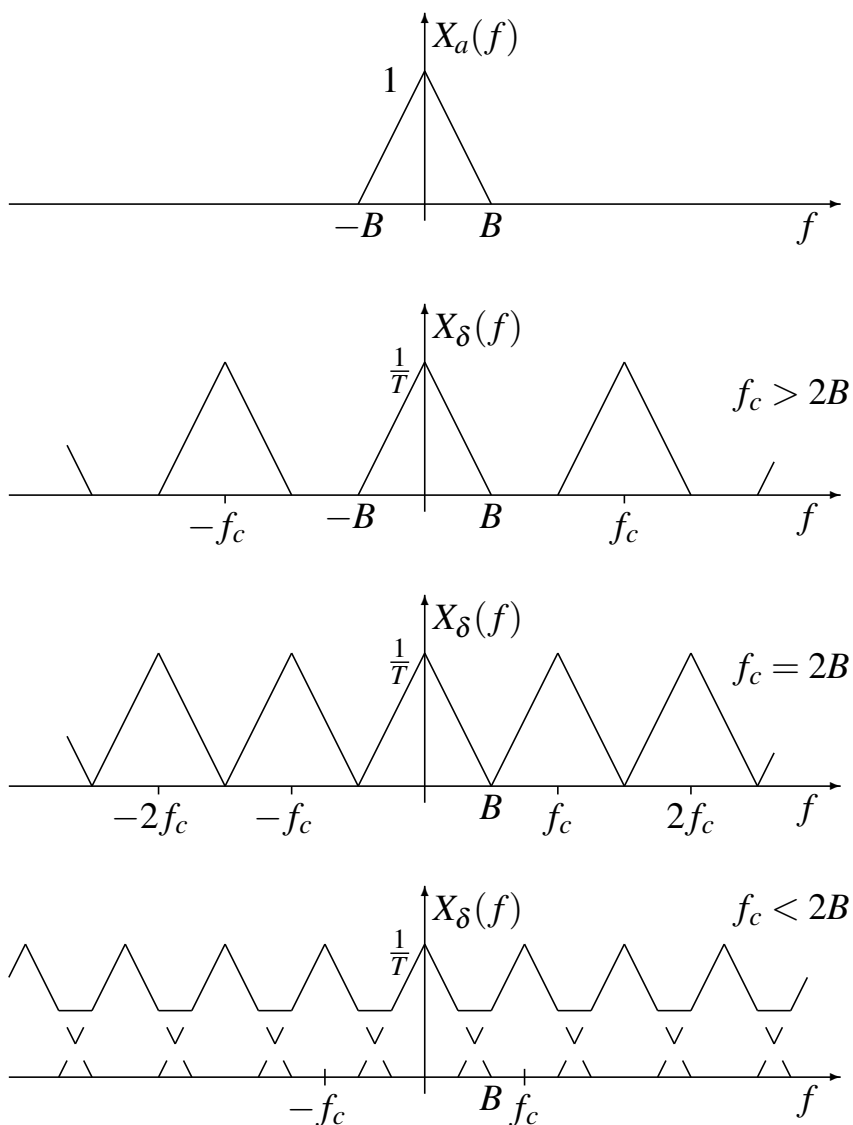
Solitamente, T è detto *periodo (o passo) di campionamento*, e il suo reciproco $f_c = 1/T$ è la *frequenza di campionamento*. Ricordando che ad un campionamento nel dominio del tempo corrisponde una replicazione in frequenza, si ha che lo spettro di $x_\delta(t)$ è dato da

$$X_\delta(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(f - \frac{k}{T}\right) = f_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(f - kf_c)$$

Dunque lo spettro del segnale campionato idealmente è costituito da repliche dello spettro di $x_a(t)$ traslate in frequenza di $kf_c = k/T$ e scalate in ampiezza del fattore $1/T = f_c$.



[In figura è mostrato il processo di campionamento ideale di un segnale. Il segnale campionato idealmente è equivalente al prodotto del segnale analogico per la sequenza di impulsi di Dirac di periodo T (treno campionatore ideale di periodo T). Il segnale risultante è costituito da impulsi ideali aventi area uguale al valore del segnale nell'istante di campionamento.]



[La figura seguente lo spettro del segnale campionato nel caso in cui il segnale $x_a(t)$ ha una banda monolaterale B strettamente limitata. Lo spettro del segnale campionato è costituito da una serie di repliche dello spettro di $x_a(t)$: nel caso in cui le repliche non si sovrappongono (sovracampionamento), è possibile isolare la replica centrata intorno alla frequenza zero dello spettro di $x_a(t)$. Viceversa, nel caso in cui le repliche si sovrappongono, è sempre possibile isolare una porzione dello spettro nella banda di frequenze $(-B, B)$ ma questa non coincide con lo spettro del segnale $x_a(t)$. La condizione che deve essere soddisfatta è

$$f_c \geq 2B \quad \text{ovvero} \quad T \leq 1/2B$$

ed è detta (*condizione di Nyquist*) .]

Dall'analisi in frequenza del campionamento segue che, se il segnale è a banda limitata ed è soddisfatta la condizione di Nyquist, allora $x_a(t)$ può essere esattamente ricostruito dalla sua versione campionata $x_\delta(t)$ con un filtro passabasso ideale avente guadagno T (per compensare il fattore di scala delle ampiezze) e frequenza di taglio f_p soddisfacente la condizione:

$$B \leq f_p \leq f_c - B$$

avente cioè risposta in frequenza

$$H(f) = T \Pi\left(\frac{f}{2f_p}\right)$$

Se invece il segnale non è a banda limitata o se, pur essendolo, la condizione di Nyquist non è soddisfatta, allora le repliche di $X_a(f)$ si sovrappongono, e quindi la ricostruzione non è più possibile: si dice allora che il segnale campionato è affetto da *aliasing*. La minima frequenza di campionamento per cui un segnale con banda (monolaterale) B può essere ricostruito senza dar luogo ad aliasing è pari a

$$f_c = 2B$$

e viene detta *frequenza di Nyquist*.



Teorema del campionamento uniforme (Nyquist)

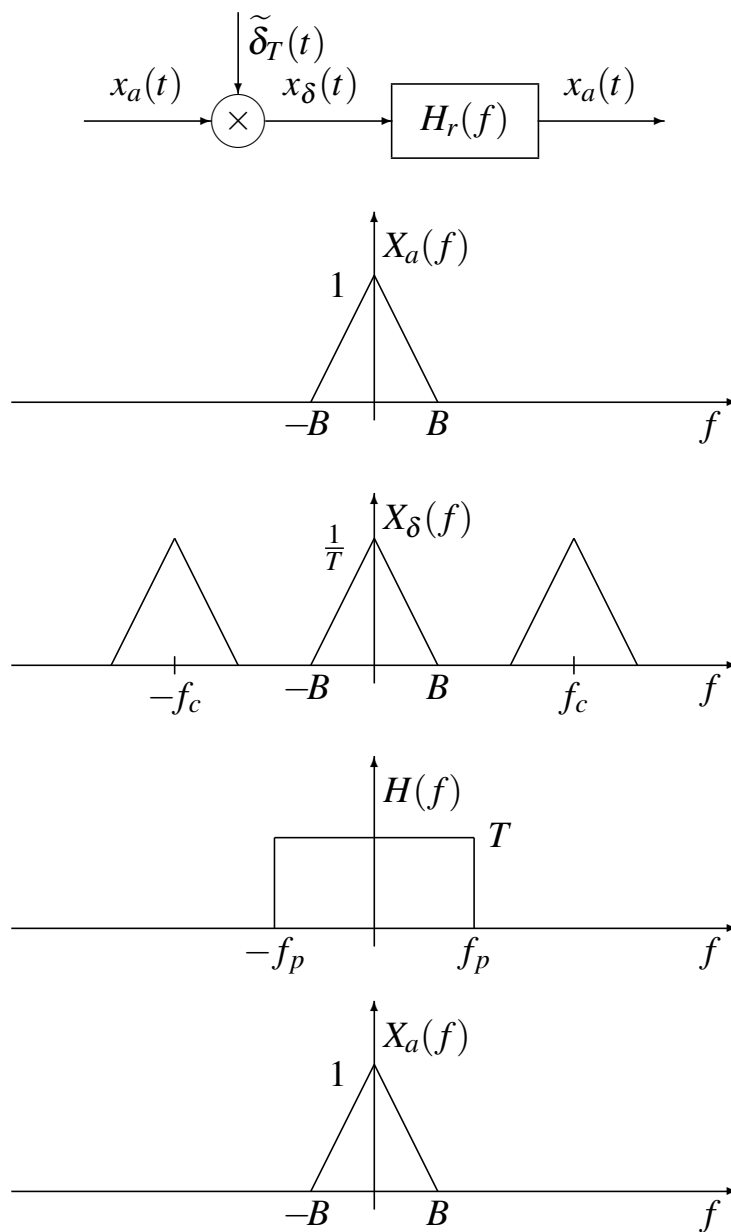
Un segnale analogico $x_a(t)$ è rappresentato dai suoi campioni presi con passo costante T , ovvero con cadenza $f_c = 1/T$, se

1. il segnale $x_a(t)$ è a banda rigorosamente limitata, cioè il suo spettro $X_a(f)$ soddisfa la condizione

$$X_a(f) \equiv 0 \quad \forall |f| \geq B$$

2. la cadenza di campionamento è maggiore o uguale a quella di Nyquist, cioè $f_c \geq 2B$.

Inoltre il segnale può essere ricostruito dalla sua versione campionata $x_\delta(t)$ con un filtro passabasso ideale di guadagno T la cui frequenza di taglio f_p soddisfi la condizione $B \leq f_p \leq f_c - B$.



[In figura è mostrato il processo di campionamento e ricostruzione ideale di un segnale. La ricostruzione è realizzata mediante un filtro passa-basso ideale.]

Ricostruzione del segnale dai suoi campioni

Come precedentemente osservato, la ricostruzione di $x_a(t)$ da $x_\delta(t)$ si ottiene con un filtro passabasso ideale di guadagno T e frequenza di taglio f_p . Scegliendo in particolare $f_p = \frac{1}{2}f_c$, la risposta in frequenza del filtro di ricostruzione risulta

$$H(f) = T\Pi(fT) = \frac{1}{f_c}\Pi\left(\frac{f}{f_c}\right)$$

cui corrisponde la risposta impulsiva

$$h(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

In tale ipotesi, valutando l'uscita come convoluzione tra il segnale campionato e il filtro di ricostruzione, si ottiene

$$x_a(t) \longleftrightarrow X_\delta(f) \quad T\Pi(fT) = x_\delta(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \text{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

che rappresenta la formula di *interpolazione ideale*: o (*serie di Shannon*) per un segnale con banda monolaterale $B \leq \frac{1}{2T}$. L'aggettivo *ideale* tiene conto del fatto che le funzioni interpolatrici $\text{sinc}(\cdot)$ sono infinitamente estese nel tempo in ambedue le direzioni mentre nella pratica il filtro di ricostruzione ha una lunghezza finita.

Campionamento reale

Nella realizzazione dei dispositivi di campionamento occorre portare in conto alcune limitazioni inerenti all'estensione spettrale dei segnali e alla fisica realizzabilità dei circuiti di campionamento e ricostruzione. Precisamente le modifiche da considerare rispetto al campionamento ideale sono le seguenti:

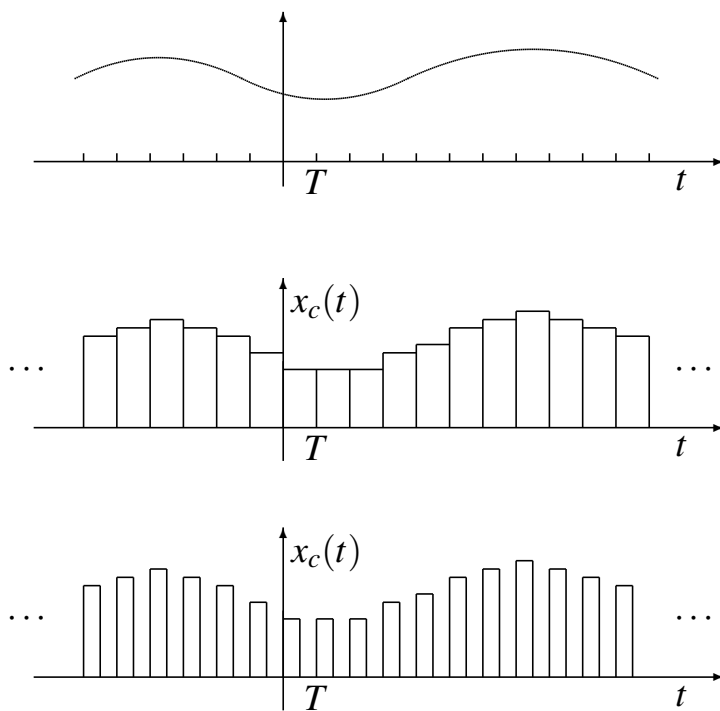
- a) il segnale campionato consiste di impulsi di ampiezza e durata finita;
- b) il filtro di ricostruzione non è ideale;
- c) il segnale da campionare non è a banda rigorosamente limitata.

Effetto della forma degli impulsi campionatori

Nel campionamento reale non è possibile generare impulsi di Dirac, per cui si utilizzano impulsi rettangolari aventi durata τ , di norma, ma non necessariamente, pari al passo di campionamento T . In tal caso si parla di campionamento di tipo *Sample & Hold*, o sinteticamente S&H, ed è schematizzabile come

$$x_{SH}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)p(t-nT) \quad \text{con} \quad p(t) = \Pi\left(\frac{t-0.5\tau}{\tau}\right)$$

dove è stato utilizzato un treno di impulsi rettangolari al posto degli impulsi di Dirac.



[La figura successiva mostra il caso di campionamento con tempo di memorizzazione pari al passo di campionamento T e minore di T .]

► Utilizzando la proprietà di campionamento della Delta e la linearità della convoluzione, si ottiene

$$x_{SH}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)[p(t) * \delta(t - nT)] = x_{\delta}(t) * p(t)$$

per cui il campionamento S&H si può riguardare come una versione filtrata del segnale campionato idealmente in cui la risposta impulsiva del filtro LTI è $p(t)$. Per analizzare la possibilità di ricostruire il segnale dalla sua versione campionata S&H si consideri la trasformata di Fourier

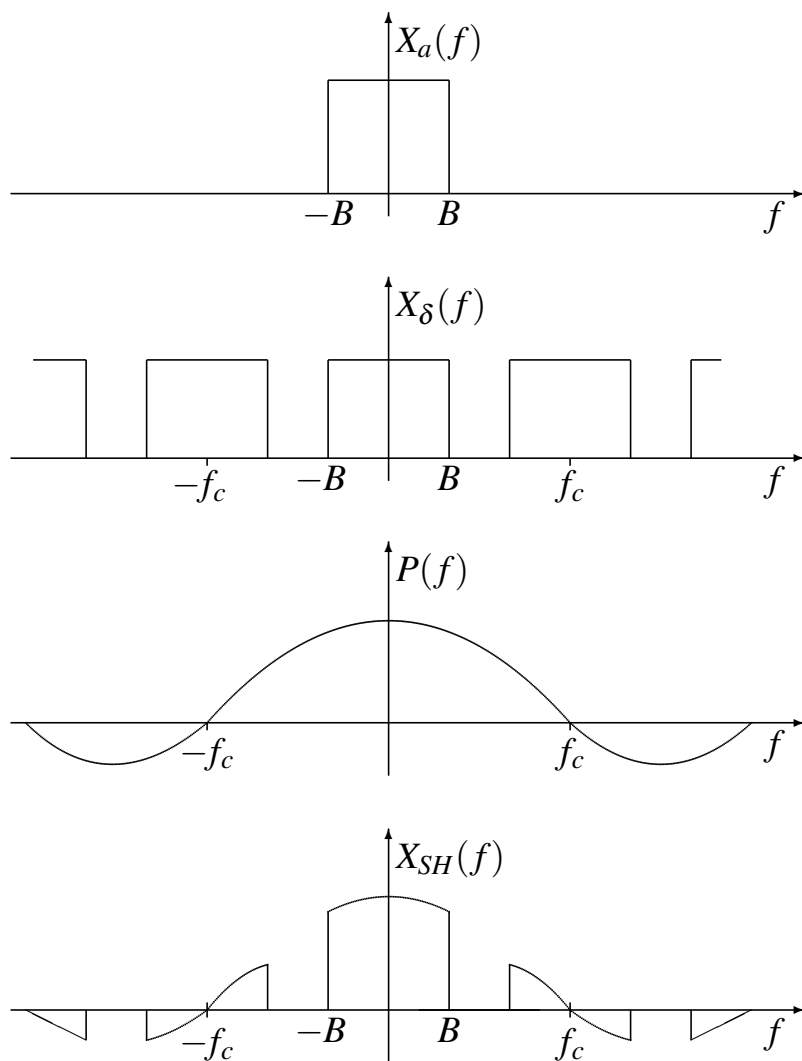
$$X_{SH}(f) = X_{\delta}(f)P(f) = P(f)\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Si osserva che le varie repliche che costituiscono lo spettro del segnale campionato idealmente vengono distorte per effetto della durata finita dell'impulso campionatore; in particolare, per quanto concerne la replica fondamentale di $X_{SH}(f)$, si ha una attenuazione delle componenti a frequenza più elevata di $x_a(t)$ (*effetto apertura*). Il segnale $x_a(t)$ è comunque recuperabile mediante filtraggio passabasso ma, in questo caso, la risposta in frequenza del filtro deve essere proporzionale al reciproco dello spettro dell'impulso $p(t)$ per compensare la distorsione, cioè deve aversi

$$H(f) \propto \frac{1}{P(f)} \quad \forall |f| \leq B$$

► Quindi, la ricostruzione del segnale si può effettuare ponendo in cascata un filtro ideale passabasso ed un equalizzatore. Si noti che l'effetto apertura può essere ridotto riducendo il tempo di memorizzazione. Infatti, se lo spettro dell'impulso $p(t)$ può essere considerato costante nella banda di $x_a(t)$, cioè $P(f) \simeq P(0) \quad \forall |f| \leq B$ allora la replica fondamentale di $X_{SH}(f)$, cioè il termine corrispondente a $n = 0$ è una versione sostanzialmente indistorta dello spettro di $x_a(t)$ ed è pertanto possibile ricostruire il segnale a partire dalla sua versione campionata S&H con un filtro passabasso.

In conclusione sia nel caso di campionamento a prodotto che nel caso di campionamento SH la forma degli impulsi non costituisce una effettiva limitazione, a patto di ricorrere, nel caso di campionamento S&H, ad un adeguato sovracampionamento del segnale e/o ad un filtro di ricostruzione con risposta in frequenza opportuna.



Lo spettro del segnale analogico a banda limitata viene prima replicato per effetto del campionamento (ideale) e, successivamente moltiplicato per lo spettro dell'impulso formatore. Il risultato mostra l'effetto apertura dovuto alla risposta in frequenza dell'impulso rettangolare.

Effetto del filtraggio non ideale

I filtri passabasso reali hanno una risposta armonica del tipo di quella mostrata in figura.

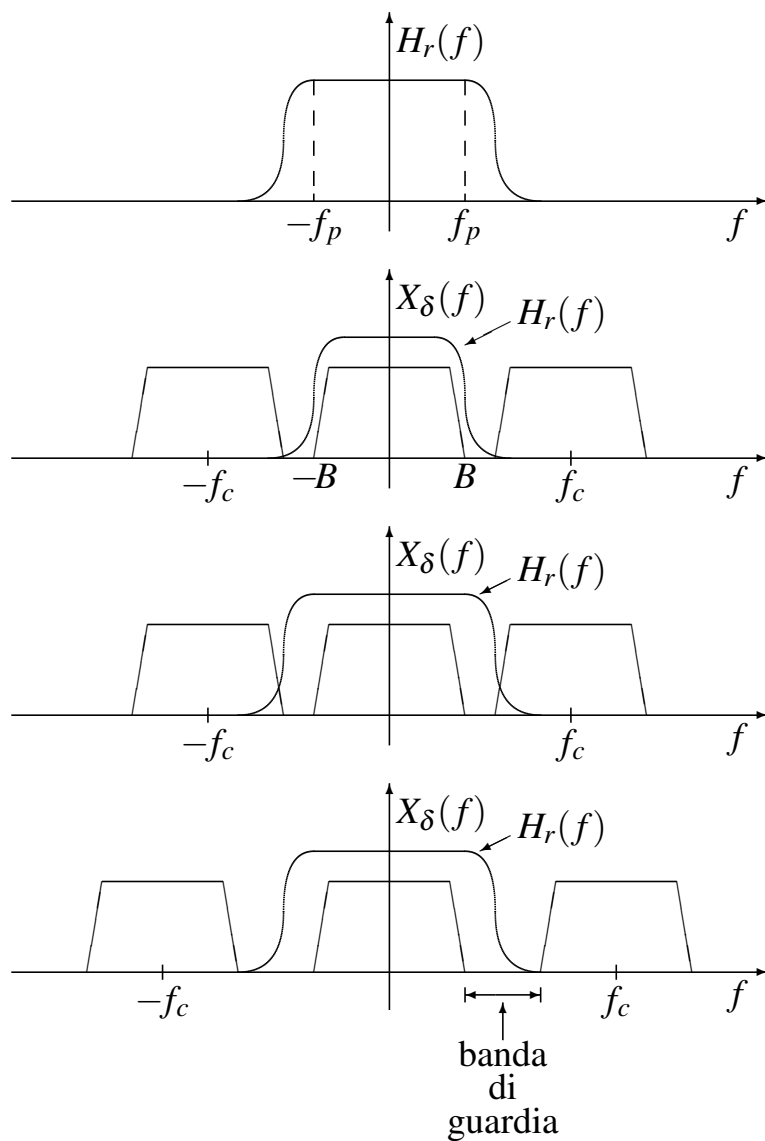
- La banda passante coincide con l'intervallo di frequenze in cui il modulo della risposta in frequenza si mantiene approssimativamente costante e diverso da zero e la fase è approssimativamente uguale a zero o uguale a $\pm\pi$ (che coincide con un cambiamento di segno).
- La banda oscura coincide con l'intervallo di frequenze in cui il modulo della risposta in frequenza è approssimativamente nullo.
- Tra le due regioni esiste una banda di transizione in cui la risposta in frequenza transita progressivamente da un valore massimo ad un valore minimo.

In banda passante ($|f| \leq f_p$) ed in quella oscura ($|f| \geq f_s$) la risposta in frequenza del filtro approssima quella del filtro ideale. Nella ricostruzione possono aversi due effetti

- a) una distorsione, tipicamente un'attenuazione, delle componenti a frequenza più elevata del segnale utile;
- b) la presenza nel segnale ricostruito di residui delle repliche centrate a frequenza multipla di quella di campionamento f_c .

Il primo effetto si ha se la banda del segnale è maggiore della frequenza di taglio del filtro cioè per $B > f_p$, mentre il secondo è prevalente se le repliche non si trovano tutte in banda oscura, cioè se $f_c - B < f_s$. Tali effetti possono essere ricondotti entro limiti accettabili aumentando la frequenza di campionamento, se è assegnato il filtro di ricostruzione, ovvero scegliendo un filtro di ricostruzione migliore (banda di transizione più stretta) per una data frequenza di campionamento.

Un sovracampionamento è comunque inevitabile per garantire una certa separazione delle varie repliche (*banda di guardia*) necessaria per allocare la banda di transizione del filtro: l'entità del sovracampionamento dipende dalla qualità del filtro di ricostruzione nel senso che migliore è il filtro più bassa è la frequenza di campionamento utilizzabile.



Effetto del filtraggio passa-basso.

Nel secondo grafico si nota che la banda di transizione del filtro di ricostruzione produce attenuazione delle frequenze più elevate nella banda utile del segnale.

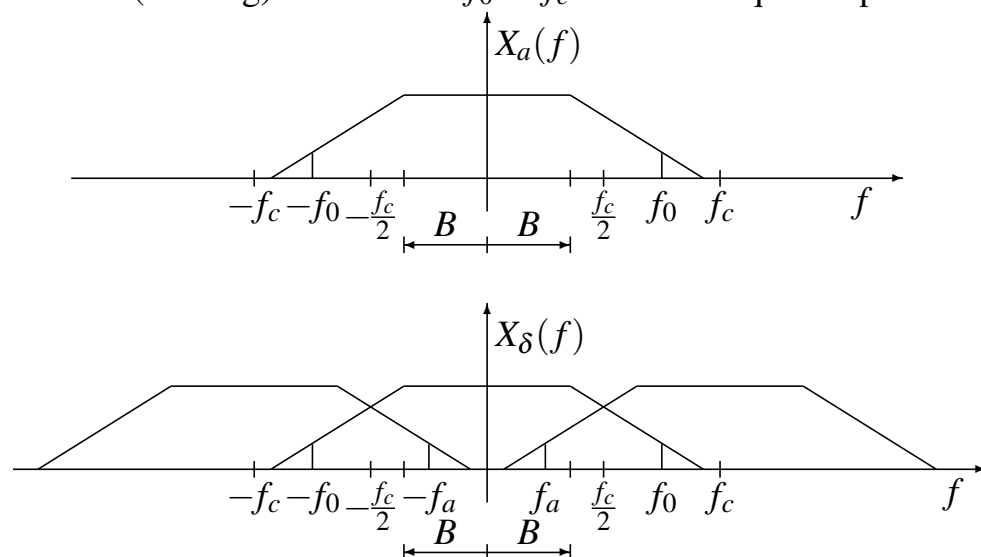
Nel terzo grafico si può osservare che la prima replica del segnale rientra nella banda utile per effetto della banda di transizione del filtro, causando aliasing.

Nell'ultima figura si si evince che la presenza di una banda di guardia evita l'aliasing.

Effetto della banda non rigorosamente limitata del segnale

I segnali hanno durata limitata, pertanto non possono essere a banda rigorosamente limitata ma solo a banda praticamente limitata, nel senso che le componenti frequenziali esterne alla banda nominale $-B < f < B$ hanno ampiezza o energia trascurabile.

Per effetto della banda non rigorosamente limitata le varie repliche di $X_a(f)$ si sovrappongono e le componenti spettrali originariamente esterne alla banda utile si presentano nel segnale ricostruito all'interno di tale banda sovrapponendosi a quelle utili (aliasing). Si noti che $f_0 = f_c - B$ è la frequenza più bassa che, per effetto dell'aliasing, rientra in banda utile



Allo scopo di ridurre la distorsione da aliasing è indispensabile attenuare notevolmente il contenuto spettrale esterno alla banda $-\frac{1}{2}f_c \leq f \leq \frac{1}{2}f_c$ prima di effettuare il campionamento, mediante un filtraggio passabasso detto appunto filtraggio anti-aliasing. È anche necessario sovracampionare il segnale in modo che non siano affette da aliasing le componenti del segnale nella banda di interesse $-B \leq f \leq B$, ma eventualmente solo quelle che capitano nella regione di transizione. In altri termini la frequenza f_p al limite di banda passante e quella f_s al limite di banda oscura del filtro anti-aliasing devono soddisfare le limitazioni

$$f_p \geq B \quad f_s \leq f_c - B$$

In conclusione, per effetto del carattere non ideale degli impulsi del treno campionario, dell'impiego di filtri non-ideali e della banda non limitata le ipotesi del teorema del campionamento in pratica non si verificano; tuttavia, una frequenza di campionamento adeguatamente maggiore di quella di Nyquist e la corretta progettazione dei filtri consentono di rendere piccolo quanto si vuole lo scarto tra il segnale originario e quello ricostruito.

Conversione analogico/numerica

Come precedentemente accennato l'elaborazione numerica dei segnali richiede la conversione delle forme d'onda in segnali numerici o *conversione A/D*. Da un punto di vista funzionale la conversione A/D può essere suddivisa nei seguenti passi

Conversione t/n, cioè la conversione della forma d'onda $x_a(t)$ nella sequenza dei suoi campioni $x(n) = x_a(nT)$.

Quantizzazione e codifica, cioè la rappresentazione dei singoli campioni con un numero finito di cifre significative, di norma binarie.

*Quelli che s'innamoran di pratica senza scienza,
son come 'l nocchieri ch'entra in navilio senza timone o bussola,
che mai ha la certezza dove si vada.*

Leonardo da Vinci. Codex G, Bibliothèque de l'Institut de France, Paris. Intorno al 1500.