TEOREMA DEL DIFFERENZIALE *

SIA $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^N$ APERTO E $\overline{x} \in A$. SE f È DERIVABILE E ∇f È CONTINUO IN x, ALLORA f È DIFFERENZIABILE IN x.

DIMOSTRAZIONE (IN $\mathbb{R}^2$) *

DAL TH. DI LAGRANGE PER FUNZIONI AD UNA VARIABILE SAPPIAMO CHE:

$$\exists\, x_1 \in [x, x+h] \quad \text{tc} \quad g(x+h) - g(x) = g'(x_1)\, h$$

PROVIAMO A SCRIVERLO PER FUNZIONI A 2 VARIABILI:

$$f(x+h, y+k) - f(x, y)$$

AGGIUNGO E SOTTRAGGO $f(x, y+k) \Rightarrow$

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) =$$

$$= \underbrace{f(x+h, y+k) - f(x, y+k)}_{a} + \underbrace{f(x, y+k) - f(x, y)}_{b}$$

DATO CHE PER a ABBIAMO LA SECONDA VARIABILE FISSATA E PER b LA PRIMA VARIABILE FISSATA È COME SE f FOSSE AD UNA SOLA VARIABILE E, DATO CHE DA Hp. È DERIVABILE, POSSO APPLICARE IL TH. DI LAGRANGE:

PER $a \Longrightarrow$

$$\exists x_1 \in [x, x+h] \mid f(x+h, y+k) - f(x, y+k) =$$

$$= f_x(x_1, y+k)\, h$$

PER $b \Longrightarrow$

$$\exists y_1 \in [y, y+k] \mid f(x, y+k) - f(x, y) =$$

$$= f_y(x, y_1)\, k$$

QUINDI:

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = a + b =$$

$$= f_x(x_1, y+k)h + f_y(x, y_1)k$$

SAPPIAMO CHE UNA FUNZIONE É DIFFERENZIABILE SE:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h, y+k) - f(x,y) - f_x(x,y)h - f_y(x,y)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\left| \frac{f(x+h, y+k) - f(x,y) - f_x(x,y)h - f_y(x,y)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| =$$

DIS. TRIANG.

$$= \left| \frac{f_x(x_1, y+k)h - f_x(x,y)h}{\sqrt{h^2+k^2}} + \frac{f_y(x, y_1)k - f_y(x,y)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \leq$$

$$\leq |f_x(x_1, y+k) - f_x(x,y)| \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} + |f_y(x, y_1) - f_y(x,y)| \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq *$$

IN CUI :

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\sqrt{h^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \frac{\sqrt{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1$$

e $\quad \dfrac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1$

*

$$\leq |f_x(x_1, y+k) - f_x(x,y)| + |f_y(x, y_1) - f_y(x,y)|$$

LA TESI SI OTTIENE PASSANDO AL LIMITE PER $(h,k) \longrightarrow (0,0)$ E RICORDANDO CHE f_x E f_y SONO CONTINUE, INFATTI:

$|f_x(x_1, y+k) - f_x(x,y)|$, $x_1 \in [x, x+h]$

PER $(h,k) \to (0,0)$, $x_1 \longrightarrow x$ e $y+k \longrightarrow y$

IL VETTORE TENDE QUINDI AL VETTORE (x,y) E SFRUTTANDO LA <u>def</u>. DI CONTINUITÀ DI f APPLICATA AD f_x $\Longrightarrow$ $|f_x(x_1, y+k) - f_x(x,y)| \longrightarrow 0$

$|f_y(x, y_1) - f_y(x, y)|$, $y_1 \in [y, y+k]$

PER $(h,k) \to (0,0)$, $x \to x$ e $y_1 \to y$

IL VETTORE TENDE QUINDI AL VETTORE (x,y) E SFRUTTANDO LA def. DI CONTINUITÀ DI f APPLICATA AD f_y $\Rightarrow$ $|f_y(x, y_1) - f_y(x, y)| \longrightarrow 0$

$\blacksquare$

TEOREMA CURVE EQUIVALENTI *

DUE CURVE EQUIVALENTI HANNO LA STESSA LUNGHEZZA.

DIMOSTRAZIONE *

DUE CURVE $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ E $\varphi : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ SONO EQUIVALENTI SE:

$$\exists\, g : [a,b] \longrightarrow [c,d] \quad e \quad \gamma(t) = \varphi(g(t)).$$

TROVO LA LUNGHEZZA DI $\gamma(t)$ e $\varphi(s)$:

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \quad , \quad L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(s)|\,ds$$

$$\gamma(t) = \varphi(g(t)) \Longrightarrow \varphi'(t) = \varphi'(g(t))\,g'(t)$$

QUINDI:

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b |\underset{\substack{\uparrow \\ \text{VETT.}}}{\varphi'(g(t))}\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{NUM.}}}{g'(t)}|\,dt =$$

$$= \int_a^b |\varphi'(g(t))|\,|g'(t)|\,dt$$

SE SUPPONIAMO $g'(t) > 0$:

$$\int_a^b |\varphi'(g(t))|\, g'(t)\,dt$$

PONGO $g(t) = s$ $\quad ds = g'(t)\,dt$

$$= \int_c^d |\varphi'(s)|\,ds = L(\varphi)$$

$\blacksquare$

TEOREMA*

SIA ω UNA FORMA DIFFERENZIALE ESATTA E CONTINUA.

SIA $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ UNA CURVA REGOLARE DI ESTREMI

$\overline{x}_0$ E $\overline{x}$ $(\gamma(a) = \overline{x}_0$ E $\gamma(b) = \overline{x})$. ALLORA:

$$\int_\gamma \omega = f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0)$$

DOVE f É LA PRIMITIVA DI ω.

DIMOSTRAZIONE*

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^{N} a_i (x_1(t), \dots x_N(t)) \, x'(t) \, dt = *$$

DALLE Hp. LA FORMA DIFFERENZIALE É ESATTA,

QUINDI:

$$* = \int_a^b \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x_i} \cdot x_i(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \left(\nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \right) dt = **$$

PER <u>def</u>. $\left(\nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \right) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))$

$$** = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\,dt = ***$$

PER IL Th. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE:

$$*** = [f(\gamma(t))]_a^b = f(\underbrace{\gamma(b)}_{=\bar{x}}) - f(\underbrace{\gamma(a)}_{=\bar{x}_0}) = f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)$$

DA HP.

$\blacksquare$

TEOREMA CARATTERIZZAZIONE * FORME DIFFERENZIALI

SIA $A \subseteq \mathbb{R}^N$ APERTO E CONNESSO E ω UNA FORMA DIFFERENZIALE DEFINITA SU A. SONO EQUIVALENTI:

i) ω É ESATTA;

ii) $\displaystyle\int_\gamma \omega = 0$, PER OGNI CURVA CHIUSA γ REGOLARE A TRATTI, CONTENUTA IN A.

iii) $\displaystyle\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$ PER OGNI COPPIA DI CURVE γ_1 E γ_2 REGOLARI A TRATTI CONTENUTE IN A CHE HANNO GLI STESSI ESTREMI E VERSO DI PERCORRENZA

DIMOSTRAZIONE *

i) $\Longrightarrow$ ii)

ESSENDO ω ESATTA, SAPPIAMO CHE:

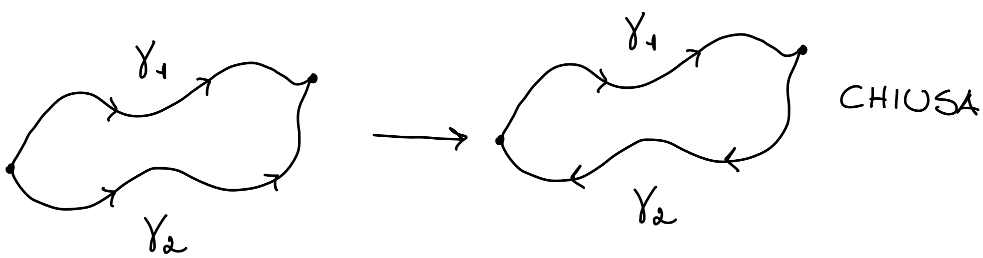
$$\int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

ω É CHIUSA, QUINDI $\gamma(b) = \gamma(a)$ E:

$$\int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0$$

ii) $\Longrightarrow$ iii)

CHIAMO $\gamma_1 - \gamma_2$ LA CURVA CHE SI OTTIENE UNENDO γ_1 A γ_2 PERCORSA AL CONTRARIO.



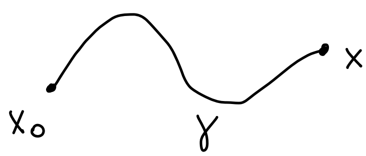
$$0 = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{-\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$$

PERCHÉ É CHIUSA

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = 0 \qquad \Longrightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

iii) $\Longrightarrow$ i)

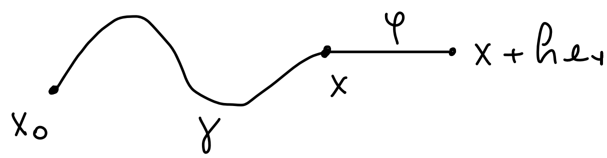
SCELGO $x_0 \in A$. PER DEFINIRE $f(x)$ PRENDO UNA CURVA QUALSIASI γ CHE PARTE DA x_0 E ARRIVA AD x.



$$f(x) = \int_\gamma \omega$$

CALCOLO $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$:

$f(x+he_1) - f(x) =$



$$= \int_{\gamma+\varphi}\omega - \int_\gamma \omega = \cancel{\int_\gamma \omega} + \int_\varphi \omega - \cancel{\int_\gamma \omega} = \int_\varphi \omega$$

$$\varphi(t) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

$$\varphi(t) = x + t h e_1$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(t) = (x_1 + th, x_2, \dots x_N)$$

CALCOLO IL LIMITE DEL RAPPORTO INCREMENTALE:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h e_1) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{\varphi} \omega =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 \sum_{i=1}^{N} a_i(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 a_1(x_1 + th, x_2, \dots x_N)\, h\, dt = *$$

PONGO $z = th$ $\quad t = \frac{z}{h}$ $\quad dt = \frac{1}{h} dz$

$$* = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h a_1(x_1 + z, x_2, \dots x_N)\, \cancel{h} \cdot \frac{1}{\cancel{h}} dz = **$$

ESSENDO a_1 CONTINUA, PER IL Th. MEDIA INTEGRALE:

$$** = \lim_{h \to 0} a_1(y_1, x_2 \dots x_N)$$

CON $y_1 \in [x_1, x_1 + h]$

E AL lim, se $h \to 0 \implies y_1 \to x_1$

$$\lim_{h\to 0} e_1(y_1, x_2, \dots x_N) = e_1(x_1, x_2, \dots x_N)$$

PERCHÉ e_1 CONTINUA ■

CONDIZIONE NECESSARIA ** ALLA CONVERGENZA

SE $\sum_{k=0}^{\infty} e_k = \ell$ $(\ell \neq \pm\infty)$, ALLORA $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$.

DIMOSTRAZIONE *

SIA s_n LA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI.

DALLA <u>def</u>. DI s_n:

$$s_n = \sum_{k=0}^{\infty} e_k \implies \sum_{k=0}^{\infty} e_k = \lim_{n\to\infty} s_n$$

QUINDI:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = l$$

$$\lim_{n \to \infty} s_{n-1} = l$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\left(\lim_{n \to \infty} s_n \right)}_{l} - \underbrace{\left(\lim_{n \to \infty} s_{n-1} \right)}_{l} = 0$$

DALLE PROPRIETÀ DEI LIMITI:

$$\lim_{n \to \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \to \infty} a_n \qquad \blacksquare$$

$$\downarrow$$

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

$$\ominus$$

$$s_{n-1} = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}$$