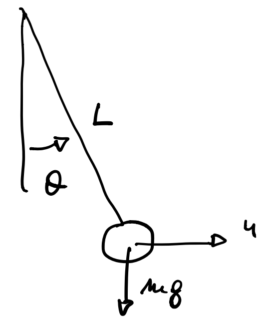
Soluzioni

1. (a) Il sistema è descritto da



$$mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + u\cos\theta$$

e siccome $\sin\theta \cong \theta$

$\cos\theta \cong 1$

per piccoli angoli θ, otteniamo il sistema linearizzato

$$mL\ddot{\theta} + mg\theta = u.$$

Per calcolare la fdt:

$$mLs^2\Theta + mg\Theta = U$$

$$\Theta = \left[\frac{1}{mLs^2 + mg}\right] U$$

fdt $G(s)$

$$G(s) = \frac{1/mL}{s^2 + g/L}$$

Il modo naturale corrispondente ai poli in $\pm j\sqrt{\frac{g}{L}}$ è una oscillazione di pulsazione $\sqrt{\frac{g}{L}}$

Se desidero che il periodo sia $T = 1\,s$, vuol dire che desidero una pulsazione $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$ rad/s.

Dunque $\sqrt{\frac{g}{L}} = 2\pi \Rightarrow \frac{g}{L} = 4\pi^2$ $\boxed{L = \frac{g}{4\pi^2} = \frac{9.8}{4\times(3.14)^2} \cong 0.25\,m}$

(L'asticella deve essere lunga circa 25 cm)

(b)

La fdt diventa dunque

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 39}$$

La risposta all'impulso unitario sarà

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{\sqrt{39}} \frac{\sqrt{39}}{s^2 + 39}\right]$$

$$= \boxed{0.64 \sin(6.2t)}$$

L'ampiezza massima dell'oscillazione che ne consegue ovviamente è 0.64 rad.

Se volessi un'ampiezza max di $10^\circ = 0.17$ rad dovrei applicare non un impulso di area unitaria ma di area $\frac{0.17}{0.64} = 0.27$, insomma $\boxed{0.27\,\delta(t)}$.

2. (a) Sulla catena di andata abbiamo la fdt

$$k\left(\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1+10s}\right) = \frac{2 + 11s}{(1+s)(1+10s)}\,k$$

Dunque la fdt del sistema in retroazione negativa sarà

$$W(s) = \frac{\dfrac{k(2+11s)}{(1+s)(1+10s)}}{1 + \dfrac{k(2+11s)}{1+11s+10s^2}}$$

$$= \frac{k(2+11s)}{1+11s+10s^2+2k+11ks}$$

$$= \frac{2k(1+5.5s)}{(1+2k)+11(1+k)s+10s^2}$$

Il sistema e' a.s. se e solo se

$$1+2k > 0 \Rightarrow k > -0.5$$

$$1+k > 0 \Rightarrow k > -1$$

In definitiva dunque deve aversi $k > -0.5$

(b) Diagrammi di Bode verificabili con Matlab.

3.

(a) z-trasformando ambo i membri si ottiene

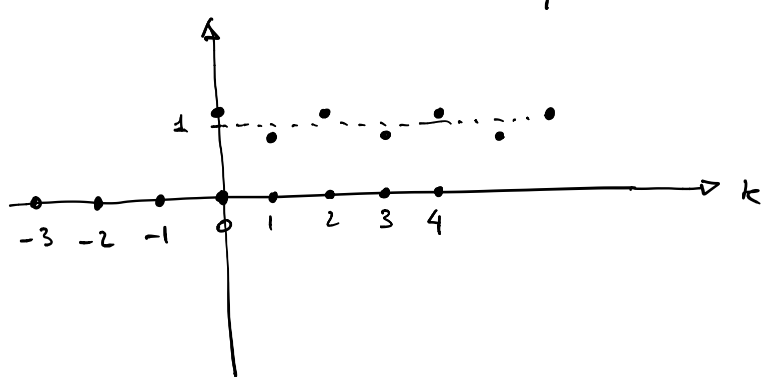
$$Y = \frac{1}{2} z^{-1} Y + \frac{1}{4} U + \frac{1}{4} z^{-1} U$$

$$Y = \frac{\frac{1}{4}(1+z^{-1})}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \, U$$

$$= \left[\frac{1}{4} \, \frac{z+1}{z - \frac{1}{2}} \right] U$$

→ questa è la fdt $G(z)$

(b)



(c) La z-trasformata del segnale $(-1)^k$ è $\frac{z}{z+1}$

e dunque la corrispondente risposta nel dominio della z sarà

$$\frac{1}{4} \, \frac{z+1}{z - \frac{1}{2}} \, \frac{z}{z+1} = \frac{1}{4} \, \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

corrispondente al modo $\left(-\frac{1}{2}\right)^k$ che tende a zero.

Dunque la risposta a regime (finiti i transitori) al segnale $(-1)^k$ è zero e sarà pure zero la risposta al segnale $0.1(-1)^k$.

Invece la risposta a regime al segnale costante 1 sarà

$$\underbrace{G(1)}_{\text{guadagno statico}} \times 1 = 1$$

In definitiva la risposta a regime al segnale dato sarà 1.