Università degli Studi del Sannio

Esame di Sistemi Dinamici

7 maggio 2018

Tempo a disposizione: 3 Ore | *Prof. Luigi Glielmo* | Punti in palio: 33

1. Il virus HIV produce il suo danno infettando celle CD4 + T (queste ultime sono un tipo di globuli bianchi) che sono a loro volta necessarie a combattere le infezioni. A mano a mano che il virus invade una cellula T il sistema immunitario ne produce di più per combattere l'infezione e il virus si propaga in maniera "opportunistica". Un semplice modello del fenomeno è rappresentato nella figura 1.

   Normalmente le cellule T vengono prodotte ad una velocità s e muoiono con "rateo" d. I virus HIV sono presenti nel sangue dell'individuo infetto e vengono chiamati *virus liberi*; essi infettano le cellule T con rateo β. Supponiamo inoltre che i virus liberi si producano attraverso il processo di moltiplicazione delle cellule T infette con rateo k; essi inoltre muoiono con rateo c; le cellule T infette muoiono con rateo μ.

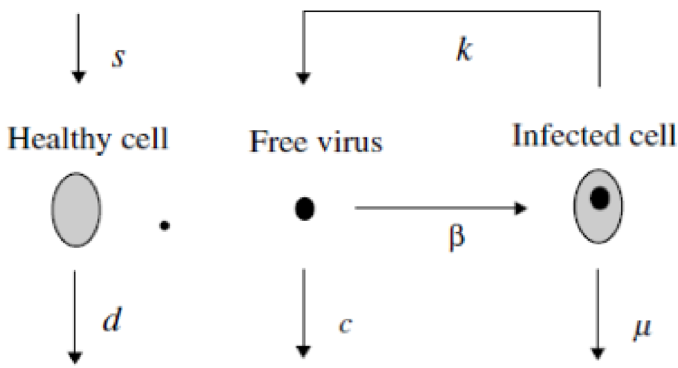

Figure 1: Modello di HIV

   Il modello sopra descritto si traduce in formule come segue:

$$\begin{aligned} \dot{T} &= s - dT - \beta T v, \\ \dot{T}^* &= \beta T v - \mu T^*, \\ \dot{v} &= kT^* - cv, \end{aligned} \tag{1}$$

   dove T è numero di celle T sane, T^* è numero di celle T infette e v è numero di virus liberi.

   i Raffrontare le equazioni date coi sistemi preda-predatore e/o SIR (suscettibili, infetti, rimossi) per evidenziare differenze o somiglianze;

   ii Supponendo che il tempo sia misurato in h (ore), fornire le "dimensioni" di tutte le variabili coinvolte (ad esempio T, è un numero puro e quindi adimensionale);

   iii Indicare, motivando, quali sono le equazioni lineari e quali quelle non lineari;

iv Tracciare uno schema di realizzazione tipo “simulink” (con integratori) utilizzando i componenti opportuni;

v Calcolare i punti di equilibrio corrispondenti a un ingresso costante $s(t) = \bar{s}$. Quale condizione deve soddisfare $\bar{s}$ affinché i risultati abbiano senso dal punto di vista biologico?

vi Dei punti di equilibrio calcolati, uno è “semplice” da trattare (si “vede” subito che lo è!). Linearizzare il sistema HIV intorno a tale punto di equilibrio;

vii Discutere la stabilità del sistema linearizzato determinato al punto precedente, anche in funzione di $\bar{s}$;

viii Calcolare la fdt del sistema linearizzato sopra detto considerando come ingresso la velocità s e come uscita T^*.

[10]

2. Si consideri il sistema a ciclo chiuso di figura. Determinare per quale intervallo di valori di $K > 0$ il sistema è a.s. [10]

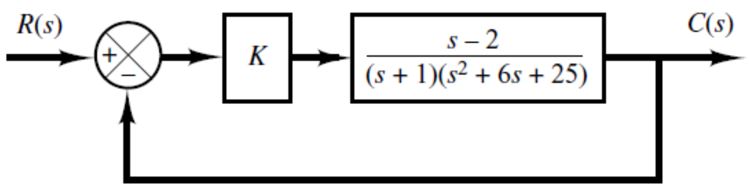

Figure 2: Sistema a ciclo chiuso

3. Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier sino alla quarta armonica del segnale in figura per $\omega = 1$. [10]

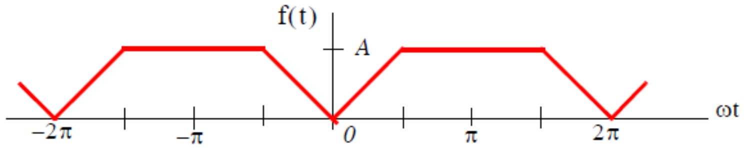

Figure 3: Forma d’onda

4. Tracciare i diagrammi di Bode della risposta armonica seguente. Calcolare la risposta armonica *esatta* alla frequenza di 200 Hz e raffrontare col valore ricavabile in maniera approssimata dai diagrammi tracciati.

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 3)}{j\omega(j\omega + 2)[(j\omega)^2 + j\omega + 2]} \tag{2}$$

[10]