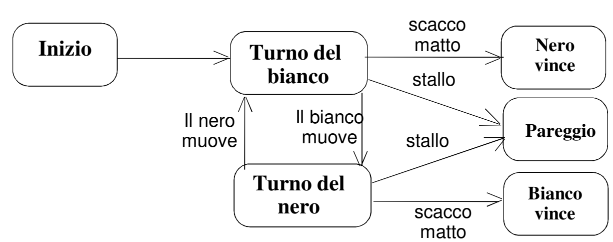
Automi a Stati Finiti

Cos'è uno stato?

Stato

Una **<u>condizione/situazione in cui si trova un oggetto</u>**, un sistema software, o un dispositivo, che soddisfa determinate condizioni e che causa l'esecuzione di attività (in risposta ad un evento) o l'attesa di un particolare evento

Esempio: gioco degli scacchi



Esempio

- Consideriamo un distributore di bevande
  - Accetta monete da 5, 10 e 25 cents
  - Non appena è stata inserita una somma di 30 cents, la macchina restituisce il resto in eccesso
  - Inoltre, non appena vi sono 30 cents inseriti, la macchina può distribuire succo d'arancia (pulsante arancione) o di mela (pulsante rosso)

In quanti stati può trovarsi la macchina?

Input possibili e stati

- **Input:**
  - Monete da 5, 10, 25 cents
  - Pulsante rosso (**R**) e arancione (**O**)
- **Output:**
  - Nulla (**n**), succo d'arancia (**OJ**), di mela (**AJ**), resto di **5, 10, 15, 20** e **25** cents
- **Stato:**
  - La macchina può trovarsi in uno stato $\mathbf{s_i}$ in cui ha raccolto 5i cents, con i=0…6 (s_0=0 cents, s_6=30 cents)

Rappresentiamo il funzionamento della macchina con una tabella degli stati…

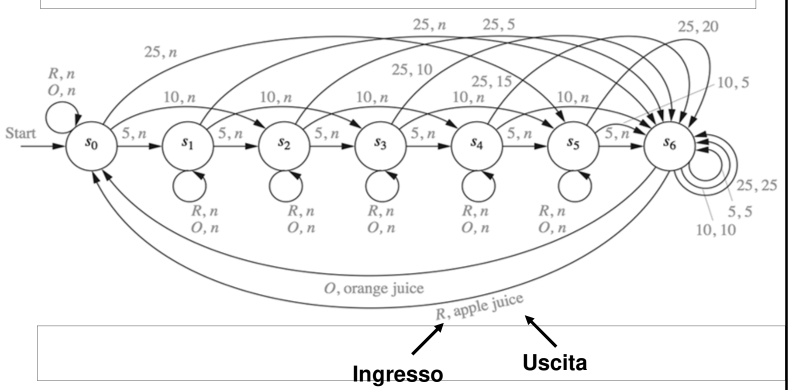
Tabella degli stati

	Stato successivo					Output				
Stato corrente	*Input*					*Input*				
	5	**10**	**25**	***O***	***R***	**5**	**10**	**25**	***O***	***R***
s_0	s_1	s_2	s_5	s_0	s_0	n	n	n	n	n
s_1	s_2	s_3	s_6	s_1	s_1	n	n	n	n	n
s_2	s_3	s_4	s_6	s_2	s_2	n	n	5	n	n
s_3	s_4	s_5	s_6	s_3	s_3	n	n	10	n	n
s_4	s_5	s_6	s_6	s_4	s_4	n	n	15	n	n
s_5	s_6	s_6	s_6	s_5	s_5	n	5	20	n	n
s_6	s_6	s_6	s_6	s_0	s_0	5	10	25	OJ	AJ

n sta per nothing

Alternativa: diagramma degli stati

Diagramma degli stati



Diamo una definizione formale di automa a stati

Definizione

Un automa (o macchina) a stati finiti **M=(S,I,O,f,g,s₀)** consiste di:

- Un insieme finito di stati **S**
- Un alfabeto di ingressi **I**
- Un alfabeto di uscita **O**
- Una funzione **f** che determina la **<u>transizione tra una stato e l'altro, dato un ingresso</u>**
- Una funzione **g** che dato un ingresso e uno stato **<u>determina l'output</u>**
- Uno stato iniziale **s_0**

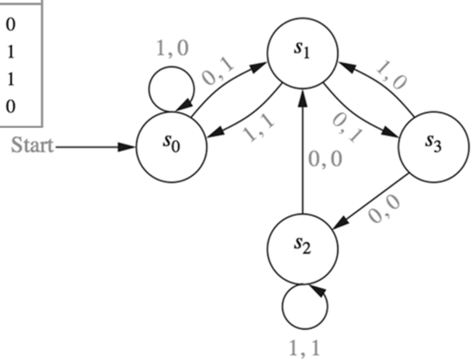
Esempio

Stato corrente	*f* Input 0	*f* Input 1	*g* Input 0	*g* Input 1
s_0	s_1	s_0	1	0
s_1	s_3	s_0	1	1
s_2	s_1	s_2	0	1
s_3	s_2	s_1	0	0

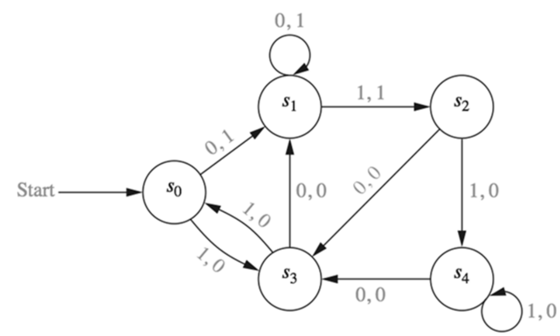
***<u>f</u>* <u>è lo stato successivo e</u> *<u>g</u>* <u>l'output.</u>**
Costruiamo il diagramma degli stati…

Soluzione

Stato corrente / *State*	*f* Input 0	*f* Input 1	*g* Input 0	*g* Input 1
s_0	s_1	s_0	1	0
s_1	s_3	s_0	1	1
s_2	s_1	s_2	0	1
s_3	s_2	s_1	0	0

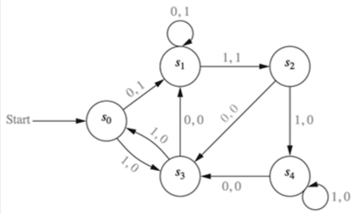


Esempio



Costruiamo la tabella degli stati…

Soluzione



Stato corrente	f Input 0	f Input 1	g Input 0	g Input 1
s_0	s_1	s_3	1	0
s_1	s_1	s_2	1	1
s_2	s_3	s_4	0	0
s_3	s_1	s_0	0	0
s_4	s_3	s_4	0	0

Domanda

Stato corrente	f Input 0	f Input 1	g Input 0	g Input 1
s_0	s_1	s_3	1	0
s_1	s_1	s_2	1	1
s_2	s_3	s_4	0	0
s_3	s_1	s_0	0	0
s_4	s_3	s_4	0	0

Data la macchina precedente, qual è l'output prodotto dalla stringa 101011?

Soluzione

Stato corrente	f Input 0	f Input 1	g Input 0	g Input 1
s_0	s_1	s_3	1	0
s_1	s_1	s_2	1	1
s_2	s_3	s_4	0	0
s_3	s_1	s_0	0	0
s_4	s_3	s_4	0	0

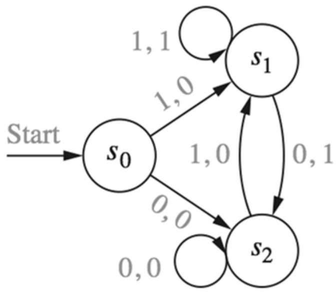
Input	1	0	1	0	1	1	—
Stato	s_0	s_3	s_1	s_2	s_3	s_0	s_3
Output	0	0	1	0	0	0	—

Unit delay machine

- Produce in **<u>uscita l'ingresso inserito all'istante precedente</u>**
- In altri termini, produce in uscita la stringa di bit 0, x_1, x_2… x_{k-1} quando la stringa di ingresso è x_1, x_2, … x_k
- Proviamo a realizzarla
  - **<u>Quanti stati?</u>**

Soluzione

Due stati (s_1 e s_2) oltre lo stato iniziale s_0
s_1 ricorda che l'input precedente è 1
s_2 ricorda che l'input precedente è 0



Gli archi che escono da s_1 producono 1 e quelli che escono da s_2 producono 0 in output.
In uscita da s_0 ho sempre 0 come output essendo 0 la costante iniziale

Esempio

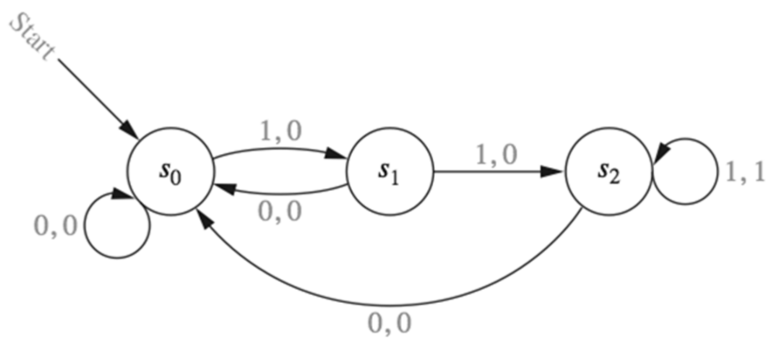
- Supponiamo che, in un determinato schema di trasmissione, il ricevente capisca che c'è un errore di trasmissione al momento in cui riceve una sequenza di 3 uni (111)
- Costruiamo una macchina a stati che riconosca una sequenza 111 e produca in output 1 soltanto all'occorrenza di tale sequenza

Quanti stati?

Stati necessari…

- Tre stati
- **s_0** ricorda che l'input precedente non è 1
- **s_1** ricorda che l'input precedente è 1 ma quello precedente ancora non era 1
- **s_2** ricorda che i due input precedenti erano 1

Automa



Definizione

- Diamo ora la **definizione di macchina a stati in grado di riconoscere un linguaggio basato** su un alfabeto di ingresso **I**
- Data una macchina a stati **M = (S,I,O,f,g,s_0)**
- Dato **L ⊆ I***
  - **I*** è l'insieme di tutte le possibili sequenze del linguaggio
  - **L** è un sottoinsieme di tali sequenze
- Diciamo che **M** accetta una **stringa di ingresso x appartenente a L se e solo se l'ultimo bit prodotto da M è 1** quando la stringa **x** è stata data in ingresso alla macchina a stati

Automi di Mealy e Moore

- Nelle macchine a stati viste finora, **gli output corrispondono a transizioni tra stati**
  - Questo tipo di macchine sono note come **automi di Mealy** (studiate da G. H. Mealy nel 1955)
- Un ulteriore tipo di macchina a stati è **quella in cui l'output è determinato soltanto dallo stato, e non dall'ingresso**
  - Note come **automi di Moore** (studiate da E. F. Moore nel 1956)