Dipartimento di Ingegneria
Università del Sannio

Corso di Sistemi Dinamici

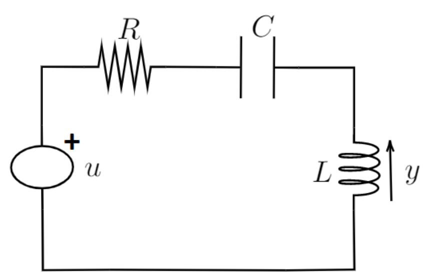
A.A. 2020/2021

Tempo a disposizione: 90 min. È consentita la consultazione di testi e appunti.

12 Luglio 2021 Matricola: .... Candidato(a): ....

1. Un biologo sperimentatore misura che un certo batterio in un certo brodo di coltura ha un tempo di raddoppio pari a 1.5 h. La capacità portante è pari a 1000 unità.
   (a) Scrivere il modello logistico t.c. che rappresenta la dinamica sopra detta;
   (b) Supponiamo ora che, giunta la coltura all'equilibrio, vengano prelevate 100 unità una volta, e poi di nuovo 100 unità dopo mezz'ora (dunque i prelievi di 100 unità avvengono agli istanti $t = 0\,\mathrm{h}$ e $t = 0.5\,\mathrm{h}$). Quanti batteri ci sono nella cultura all'istante $t^* = 1\,\mathrm{h}$? (Utilizzare il modello linearizzato.)

2. Dato il circuito elettrico in figura con $L = 1\,\mathrm{mH}$ e $C = 10\,\mathrm{pF}$, con ingresso u e uscita y in V,



   (a) Determinare per quali valori di R il sistema ha poli complessi e coniugati;
   (b) Determinare per quale valore di R la risposta armonica presenta un picco di risonanza di 40 dB;
   (c) Tracciare quindi i diagrammi di Bode e determinare la pulsazione alla quale il guadagno vale $-20\,\mathrm{dB}$.

3. Gli studenti di un certo corso della durata di due anni hanno un tasso di abbandono alla fine del primo anno pari a $a_1 = 10\%$ e un tasso di abbandono $a_2 = 5\%$ nel secondo anno. Inoltre una frazione r degli studenti del secondo anno deve ripetere l'anno. Detti $x_1(k)$ e $x_2(k)$ gli iscritti al primo e al secondo anno (inclusi i ripetenti) all'anno k, $u(k)$ gli immatricolati dell'anno k che frequenteranno il primo anno nell'anno $k+1$ e $y(k)$ i laureati alla fine dell'anno k (supponendo che chi non abbandona e non ripete si laurea),
   (a) Scrivere il modello I-S-U della dinamica degli studenti;
   (b) Determinare i vari valori di equilibrio $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2, \overline{y}$ in corrispondenza di un numero costante di immatricolati ogni anno $\overline{u} = 100$;
   (c) verificare che il sistema è asintoticamente stabile.

1) Il modello logistico è dato da

(a) $$\dot{x} = \beta x \left(1 - \frac{x}{C}\right)$$

Dunque $\boxed{C = 1000}$. Per determinare il tasso di crescita β basta imporre il raddoppio dopo 1.5h, e cioè

$$e^{\beta(1.5)} = 2$$

$$1.5\beta = \ln 2 \qquad \boxed{\beta = \frac{\ln 2}{1.5} = 0.46}$$

(b) La linearizzazione intorno al punto di equilibrio $\bar{x} = C$ è data da (v. anche lezione)

$$\dot{\delta x} = -\beta\,\delta x \qquad \text{con } \delta x = x - \bar{x} = x - C$$

Un attimo dopo il primo prelievo di 100 unità, la condizione iniziale sarà

$$\delta x(0) = x(0) - C = 900 - 1000 = -100$$

e dunque dopo mezz'ora ci saranno

$$\delta x(0.5) = -100\, e^{-\beta \times 0.5} = -100\, e^{-0.23}$$

$$= -79$$

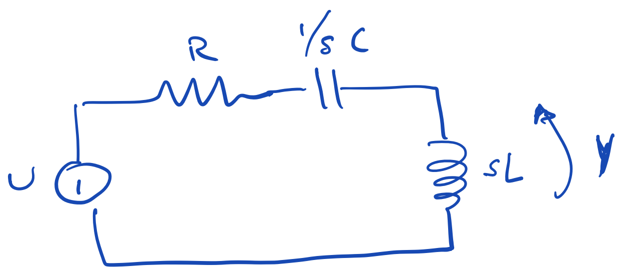
Dunque dopo mezz'ora ci saranno circa 21 unità in più. Se ora togliamo altre 100 unità la condizione iniziale sarà $-79 - 100 = -179$ e dopo un'altra mezz'ora avremo

$$\delta x(1) = -179\, e^{-0.23} = -142$$

Dunque nelle colture si troveranno

$$\boxed{x(1)} = \delta x(1) + C = -142 + 1000 = \boxed{858 \text{ unità}}$$

(2) (a) La maniera più rapida di ottenere la f.d.t. è lavorare nel dominio delle "s" con le impedenze operazionali utilizzando l'idea del "partitore resistivo"



per cui

$$Y = \frac{sL}{R + \frac{1}{sC} + sL} = \frac{s^2LC}{1 + sRC + s^2LC}$$

Ora, dall'eguaglianza

$$1 + sRC + s^2LC = 1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$$

si ricava facilmente, eguagliando i coefficienti omologhi,

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\xi = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

I poli sono complessi e coniugati per $\xi < 1$, e cioè

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 20\ k\Omega$$

(b) Per il termine trinomio $1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$

al denominatore il picco di risonanza è approssimativamente localizzato alla pulsazione naturale ω_n e vale

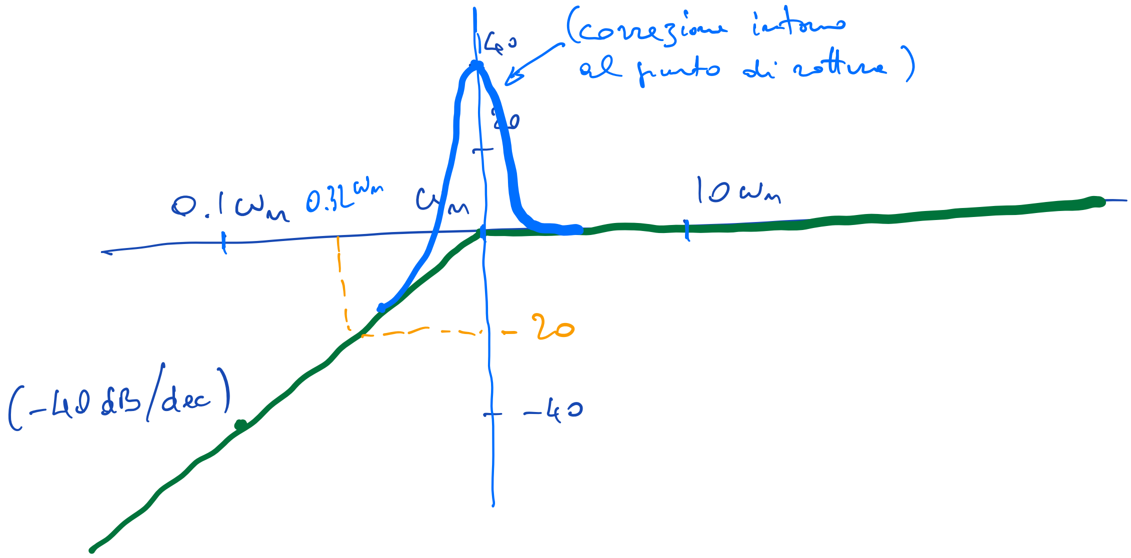
$$\frac{1}{2\xi} = 40\ dB = 100$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{1}{200} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

e dunque $R = \frac{1}{100}\sqrt{\frac{L}{C}}$

$$= 100\ \Omega$$

(c) Il diagramma di Bode asintotico e' il seguente



Si vede che il guadagno di -20 dB si ottiene circa a metà (geometrica) tra le pulsazioni $0.1\,\omega_n$ e ω_n, dunque intorno alla pulsazione

$$\sqrt{(0.1\,\omega_n)\,\omega_n} = 0.32\,\omega_n$$
$$= 0.32/\sqrt{LC}$$
$$= 0.32 \times 10^7 \text{ rad/sec}$$

③

(a)
$$x_1(k+1) = u(k)$$
$$x_2(k+1) = (1-a_1)x_1(k) + r x_2(k)$$
$$y(k) = (1-a_2-r)\,x_2(k)$$

(b) Il punto di equilibrio si determina risolvendo le seguenti equazioni algebriche

$$\bar{x}_1 = \bar{u}$$
$$\bar{x}_2 = (1-a_1)\bar{x}_1 + r\bar{x}_2$$

da cui

$$(1-r)\bar{x}_2 = (1-a_1)\bar{x}_1 = (1-a_1)\bar{u}$$

Dunque

$$\bar{x}_1 = 100$$
$$\bar{x}_2 = \frac{1-a_1}{1-r}100 = \frac{1-0.1}{1-r}(100) = 90/(1-r)$$

$$\bar{y} = (1 - a_2 - r)\,\bar{x}_2$$

(c) In forma matriciale abbiamo

$$x(k+1) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-a_1 & r \end{pmatrix}}_{A} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(k)$$

Il polinomio caratteristico è dato da

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ -(1-a_1) & \lambda - r \end{pmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda - r)$$

e dunque gli autovalori sono

$$\lambda = 0$$

$$\lambda = r$$

entrambi all'interno del cerchio unitario.