1 Calcolo Combinatorio

1.1 Disposizioni semplici di n oggetti di classe h

Definizione 1.1 (Disposizioni semplici di n oggetti di classe h). *Dati n oggetti e detto k un numero intero positivo minore o uguale a n, si chiamano disposizioni semplici di questi n oggetti di classe k, tutti i gruppi che si possono formare con gli n oggetti dati in modo che ogni gruppo contenga soltanto k degli oggetti dati, e che due gruppi qualunque differiscano fra loro o per qualche oggetto, oppure per lordine con cui gli oggetti sono disposti.*

Il numero delle disposizioni di n oggetti di classe h si indica con D_h^n.

Proposizione 1.2. *Il numero di disposizioni semplici di n elementi in classe h é*

$$D_h^n = n(n-1)(n-2)\dots(n-h+1)$$

In altri termini, D_h^n uguale al prodotto dei k numeri consecutivi decrescenti a partire da n.

Dim. Gli n oggetti presi ad uno ad uno danno luogo, ovviamente, ad n disposizioni di classe 1 e dunque $D_1^n = n$. Per formare i gruppi di classe 2 consideriamo ciascun gruppo di classe 1 e, aggiungiamo uno alla volta ciascuno degli $n-1$ elementi estranei al gruppo considerato. Ogni gruppo di classe 1 genera cos $n-1$ gruppi di classe 2 e pertanto si ha $D_2^n = D_1^n(n-1) = n(n-1)$.

Per formare i gruppi di classe 3 consideriamo ciascun gruppo di classe 2 e, aggiungiamo uno alla volta ciascuno degli $n-2$ elementi estranei al gruppo considerato. Ogni gruppo di classe 2 genera cos $n-2$ gruppi di classe 3 e pertanto si ha $D_3^n = D_2^n(n-2) = D_1^n(n-1)(n-2) = n(n-1)(n-2)$.

Per formare i gruppi di classe h consideriamo ciascun gruppo di classe $h-1$ e, aggiungiamo uno alla volta ciascuno degli $n-(h-1) = n-h+1$ elementi estranei al gruppo considerato. Ogni gruppo di classe $h-1$ genera cos $n-h+1$ gruppi di classe h e pertanto si ha $D_h^n = D_{h-1}^n(n-h+1) = D_{h-2}^n(n-h+2)(n-h+1) = ... = n(n-1)(n-2)...(n-h+1)$. ⋄

Esempio 1.3. *Consideriamo l'insieme con quattro oggetti $T = \{a, b, c, d\}$. Le disposizioni semplici dei quattro oggetti in classe* 2 *sono* 12*:* $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, a\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, a\}, \{c, b\}, \{c, d\}, \{d, a\}, \{d, b\}, \{d, c\}$.

Le disposizioni semplici degli stessi oggetti in classe 3 *si ottengono combinando ciascuna delle disposizioni semplici in classe 2 con ciascuno degli oggetti rimanenti:* $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, b\}, \{a, c, d\}, \{a, d, b\}, \{a, d, c\}, \{b, a,$

1.2 Disposizioni con ripetizione di n oggetti di classe h

Definizione 1.4 (Disposizioni con ripetizione di n oggetti di classe h). *Si dicono disposizioni con ripetizione di n elementi presi di classe k), tutti i possibili gruppi che si possono formare prendendo k degli elementi, con leventuale ripetizione di qualcuno di essi in modo che ogni gruppo contenga soltanto k degli oggetti dati, e che due gruppi qualunque differiscano fra loro o per qualche oggetto, oppure per lordine con cui gli oggetti sono disposti.*

Il numero di diposizioni con ripetizione di n oggetti di classe h si indica con $D_h^{'n}$.

Esempio 1.5. *Consideriamo l'insieme con quattro oggetti $T = \{a, b, c, d\}$. Le disposizioni con ripetizione dei quattro oggetti in classe* 2 *sono* $4^2 = 16$*:* $\{a, a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, a\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, a\}, \{c, b\}, \{c, d\}, \{d, a\}, \{d, b\}$

Le disposizioni con ripetizione degli stessi oggetti in classe 3 *si ottengono combinando ciascuna delle disposizioni semplici in classe 2 con ciascuno degli oggetti rimanenti:*

$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, b\}, \{a, c, d\}, \{a, d, b\}, \{a, d, c\}, \{b, a, c\}, \{b, a, d\}, \{b, c, a\}, \{b, c, d\}, \{b, d, a\}, \{b, d, c\}, \{c, a, b\}, \{c, a,$

Proposizione 1.6. *Il numero di diposizioni con ripetizione di n oggetti di classe h e' $D_h^{'n} = n^h$.*

Dim. Gli n oggetti presi ad uno ad uno danno luogo, ovviamente, ad n disposizioni di classe 1 e dunque $D_1^n = n$. Poiche' sono ammesse ripetizioni Per formare i gruppi di classe 2 consideriamo ciascun gruppo di classe 1 e aggiungiamo uno alla volta ciascuno degli n oggetti. Ogni gruppo di classe 1 genera cos n gruppi di classe 2 e pertanto si ha $D_2^{'n} = D_1^{'n}(n-1) = n(n-1)$.

Per formare i gruppi di classe 3 consideriamo ciascun gruppo di classe 2 e aggiungiamo uno alla volta ciascuno degli n oggetti. Ogni gruppo di classe 2 genera cos n gruppi di classe 3 e pertanto si ha $D_3^{'n} = D_2^{'n}n = n^2n = n^3$.

Per formare i gruppi di classe h consideriamo ciascun gruppo di classe $h-1$ e, aggiungiamo uno alla volta ciascuno degli $n-(h-1) = n-h+1$ elementi estranei al gruppo considerato. Ogni gruppo di classe $h-1$ genera cos $n-h+1$ gruppi di classe h e pertanto si ha $D_h^n = D_{h-1}^n(n-h+1) = D_{h-2}^n(n-h+2)(n-h+1) = \dots = n(n-1)(n-2)\dots(n-h+1)$. ⋄

1.3 Permutazioni di n oggetti

Definizione 1.7 (Permutazioni di n oggetti). *Le permutazioni di n oggetti distinti sono tutti i gruppi formati ciascuno da tutti gli n oggetti dati e che differiscono fra loro soltanto per lordine degli oggetti. Esse corrispondono alle diposizioni semplici di classe n degli n oggetti. Il numero di permutazioni di n oggetti viene indicato con P_n.*

Proposizione 1.8. *Il numero di permutazioni di n oggetti é $P_n = n!$.*

Proof. Il numero delle permutazioni di n oggetti é uguale al numero di disposizioni semplici di n oggetti di classe n. Pertanto $P_n = D_n^n = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots 1 = n!$.

Esempio 1.9 (Permutazioni di n oggetti). *Dato l'insieme $T = \{a, b, c\}$, le sue permutazioni sono $P_3 = 3! = 6$: $\{a,b,c\}$, $\{a,c,b\}$, $\{b,a,c\}$, $\{b,c,a\}$, $\{c,a,b\}$, $\{c,b,a\}$.*

1.4 Combinazioni semplici di n oggetti di classe h

Definizione 1.10 (Combinazioni semplici di n oggetti di classe h). *Si chiamano combinazioni semplici di n elementi distinti di classe $k < n$ tutti i possibili gruppi di k oggetti che si possono formare con gli n oggetti in modo da considerare distinti solo quei gruppi che differiscono per almeno un elemento.*

Il numero di combinazioni semplici di n oggetti di classe h e' C_h^n.

Proposizione 1.11. *Il numero di combinazioni di n oggetti in classe h e'*

$$C_h^n = \frac{n!}{(n-h)!h!}$$

.

Dim. Nelle disposizioni semplici, ogni insieme di oggetti distinti compare per un numero di volte pari alle permutazioni degli stessi oggetti. Pertanto

$$D_h^n = C_h^n P_h$$

. Ne segue che

$$C_h^n = \frac{D_h^n}{P_h} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-h+1)}{h!} = \frac{n!}{(n-h)!h!}$$

. $\diamond$

Esempio 1.12. *Le combinazioni di 4 oggetti in classe 3 sono C_3^4: $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$.*

Per le combinazioni semplici vale la seguente proprietá:

Proposizione 1.13. $C_h^n = C_{n-h}^n$.