Metodi numerici per la minimizzazione di circuiti

Introduzione

- Finora abbiamo imparato a minimizzare i circuiti usando:
  - **Algebra di Boole**: complicato in molti casi, e non chiaro quando raggiungo una soluzione “soddisfacente”
  - **Mappe di Karnaugh**: difficile andare oltre 4-5 variabili d’ingresso

Metodi numerici

- A questo punto vedremo metodi che ovviano ai problemi riscontrati con le mappe di Karnaugh
  - **Più tediosi, ma scalano meglio** a problemi con un numero maggiore di variabili d’ingresso
  - **Facilmente automatizzabili**

Metodo di Quine-McCluskey

Processo

Il metodo si compone di due passi:

1. **Nel primo passo si eliminano literal dai termini e si combinano termini ove possibile**. Ciò avviene confrontando i termini due a due e sfruttando la proprietà **XY+XY’=X**
   Il risultato del primo passo è **una somma di implicanti primi**
2. Nel secondo passo si seleziona **un sottoinsieme minimo di implicanti primi** che equivale alla funzione da semplificare

Di fatto, gli stessi passi seguiti con le K-Map

…ma utilizzando **un metodo iterativo e non un approccio visuale**

Combinare termini

- Sostituiamo literal in forma true con (1) e in forma complementata con (0)
- A B’C D’+ A B’C D = A B’C
  1 0 1 0 + 1 0 1 1 = 1 0 1 –
- **Due literal si combinano se differiscono per il valore di una sola variabile**

Partiamo dai mintermini

- Supponiamo di dover semplificare la funzione:
  f(a,b,c,d)=Σm(0,1,2,5,6,7,8,9,10,14)
- Espansione in mintermini:
  a’b’c’d’+a’b’c’d+a'b'cd'+a’bc’d+a’bcd’+a’bcd+ab’c’d’+
  +ab’c’d+ab’cd’+abcd’
- Numeri binari corrispondenti:
  0000, 0001, 0010, 0101,0110,0111,1000,1001,1010,1110

Come semplifico?

In teoria **dovrei confrontare tutte le possibili coppie di mintermini per vedere dove posso applicare la semplificazione XY+XY'=X**

Serve dover confrontare tutti i mintermini?

No.. mi interessa solo **confrontare i mintermini che differiscono per una sola variabile**

Raggruppamento mintermini

Raggruppo mintermini **in base al numero di 1 in essi contenuti**

```
(0)  0000   } 0

(1)  0001
(2)  0010   } 1
(8)  1000

(5)  0101
(6)  0110
(9)  1001   } 2
(10) 1010

( 7) 0111
(14) 1110   } 3
```

Perché raggruppo?

Cosa confronto?

Mintermini nello stesso gruppo: <u>non serve confrontarli</u>

- Differiscono per almeno due literal

Mintermini tra due gruppi adiacenti

- Differiscono per un solo 1

Mintermini tra gruppi non-adiacenti: <u>non serve confrontarli</u>

- Differiscono per il valore di almeno due literal

Semplifico

√	(0)	0000	0
√	(1)	0001	1
√	(2)	0010	1
√	(8)	1000	1
√	(5)	0101	2
√	(6)	0110	2
√	(9)	1001	2
√	(10)	1010	2
√	(7)	0111	3
√	(14)	1110	3

Gruppi 0 e 1

```
( 0, 1)=000-
( 0, 2)=00-0
( 0, 8)=-000
```

Gruppi 1 e 2

```
( 1, 5)=0-01
( 1, 9)=-001
( 2, 6)=0-10
( 2,10)=-010
( 8, 9)=100-
( 8,10)=10-0
```

Gruppi 2 e 3

```
( 5, 7)=01-1
( 6,14)=-110
( 6, 7) =011-
(10,14)=1-10
```

Ho usato tutti i mintermini?

Si, quindi non devo tenermi nessun termine di dimensione 4

Passo successivo

Raggruppo i termini di dimensione 3 come fatto prima (per numero di 1 presenti)

(0, 1)	000-	**0**
(0, 2)	00-0	
(0, 8)	-000	
(1, 5)	0-01	**1**
(1, 9)	-001	
(2, 6)	0-10	
(2,10)	-010	
(8, 9)	100-	
(8,10)	10-0	
(5, 7)	01-1	**2**
(6,14)	-110	
(6, 7)	011-	
(10,14)	1-10	

Nuovo confronto

√	(0, 1)	000-	**0**
√	(0, 2)	00-0	
√	(0, 8)	-000	
	(1, 5)	0-01	**1**
√	(1, 9)	-001	
√	(2, 6)	0-10	
√	(2,10)	-010	
√	(8, 9)	100-	
√	(8,10)	10-0	
	(5, 7)	01-1	**2**
√	(6,14)	-110	
	(6, 7)	011-	
√	(10,14)	1-10	

Gruppi 0 e 1

(0, 1),(8, 9) = -00-
(0, 2),(8,10) = -0-0
~~(0, 8),(1, 9) = -00-~~
~~(0, 8),(2,10) = -0-0~~

Gruppi 1 e 2

(2, 6),(10,14)=--10
~~(2,10),(6,14)=--10~~

Passo successivo

(0,1,8, 9)	-00-	**0**
(0,2,8,10)	-0-0	
(2,6,10,14)	--10	**1**

Posso semplificare qualcosa?

No! Allora mi fermo…

Cosa mi resta?

Col. 1

```
√ (0)  0000

√ (1)  0001
√ (2)  0010
√ (8)  1000

√ (5)  0101
√ (6)  0110
√ (9)  1001
√ (10) 1010

√ ( 7) 0111
√ (14) 1110
```

Col. 2

```
√ ( 0, 1) 000-
√ ( 0, 2) 00-0
√ ( 0, 8) -000

  ( 1, 5) 0-01
√ ( 1, 9) -001
√ ( 2, 6) 0-10
√ ( 2,10) -010
√ ( 8, 9) 100-
√ ( 8,10) 10-0

  ( 5, 7) 01-1
√ ( 6,14) -110
  ( 6, 7) 011-
√ (10,14) 1-10
```

Col. 3

```
(0,1,8, 9)  -00-
(0,2,8,10)  -0-0

(2,6,10,14) --10
```

Quindi:
a’c’d+
a’bd+
a’bc+
b’c’+
b’d’+
cd’

Passo II: Minimizzare gli implicanti primi

Punto di partenza

Somma di implicanti primi ottenuti in precedenza

a’c’d+	a’bd+	a’bc +	b’c’ +	b’d’ +	cd’
(1,5)	(5,7)	(6,7)	(0,1,8,9)	(0,2,8,10)	(2,6,10,14)

Tabella degli implicanti primi

	0	1	2	5	6	7	8	9	10	14
(0,1,8,9) b’c’	x	x					x	x		
(0,2,8,10) b’d’	x		x				x		x	
(2,6,10,14) cd’			x		x				x	x
(1,5) a’c’d		x		x						
(5,7) a’bd				x		x				
(6,7) a’bc					x	x				

Identifichiamo gli implicanti primi essenziali

- Ovvero quelli **<u>relativi a mintermini che non sarebbero coperti altrimenti</u>**
- Come?
  - Facile, basta **<u>identificare le colonne con una sola “x"</u>**

Tabella degli implicanti primi

	0	1	2	5	6	7	8	9	10	14
(0,1,8,9) b’c’	x	x					x	x		
(0,2,8,10) b’d’	x		x				x		x	
(2,6,10,14) cd’			x		x				x	x
(1,5) a’c’d		x		x						
(5,7) a’bd				x		x				
(6,7) a’bc					x	x				

Tracciamo una riga orizzontale ogni volta che un implicante primo è coinvolto

Tabella degli implicanti primi

	0	1	2	5	6	7	8	9	10	14
(0,1,8,9) b’c’	~~x~~	~~x~~					~~x~~	~~x~~		
(0,2,8,10) b’d’	x		x				x		x	
(2,6,10,14) cd’			~~x~~		~~x~~				~~x~~	~~x~~
(1,5) a’c’d		x		x						
(5,7) a’bd				x		x				
(6,7) a’bc					x	x				

Avendo coinvolto un implicante primo, tutti i mintermini in esso coinvolti sono coperti

Tracciamo una riga verticale in corrispondenza di essi…

Tabella degli implicanti primi

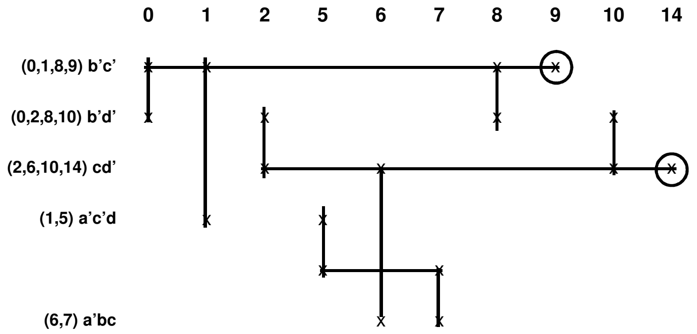
	0	1	2	5	6	7	8	9	10	14
(0,1,8,9) b'c'	x	x					x	x		
(0,2,8,10) b'd'	x		x				x		x	
(2,6,10,14) cd'			x		x				x	x
(1,5) a'c'd		x		x						
(5,7) a'bd				x		x				
(6,7) a'bc					x	x				

Rimasto qualcosa scoperto?

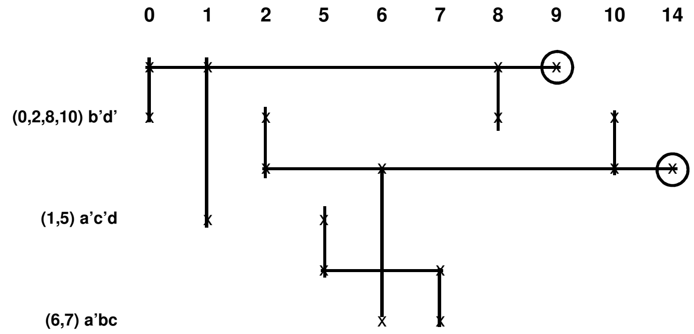
Identifichiamo implicanti primi per coprire le restanti x

	0	1	2	5	6	7	8	9	10	14
(0,1,8,9) b'c'	x	x					x	x		
(0,2,8,10) b'd'	x		x				x		x	
(2,6,10,14) cd'			x		x				x	x
(1,5) a'c'd		x		x						
				x		x				
(6,7) a'bc					x	x				

Identifichiamo implicanti primi per coprire le restanti x



Risultato finale



Risultato finale

F=b'c'+cd'+a'bd

Non sempre ridurre il set di implicanti primi è così semplice…

Esempio

- F=∑m(0,1,2,5,6,7)
- Semplificare la funzione data tramite il metodo di Quine McClusky. La funzione ha 3 input: A, B, C.

Deriviamo gli implicanti primi

```
(0) 000

(1) 001
(2) 010

(5) 101
(6) 110

(7) 111
```

Deriviamo gli implicanti primi

```
√ (0) 000        (0,1) 00-
                 (0,2) 0-0
√ (1) 001
√ (2) 010        (1,5) -01
                 (2,6) -10
√ (5) 101
√ (6) 110        (5,7) 1-1
                 (6,7) 11-
√ (7) 111
```

Non posso ulteriormente combinare, quindi mi fermo

Tabella implicanti primi

	0	1	2	5	6	7
(0,1) a'b'	x	x				
(0,2) a'c'	x		x			
(1,5) b'c		x		x		
(2,6) bc'			x		x	
(5,7) ac				x		x
(6,7) ab					x	x

Nessun implicante primo essenziale….

	0	1	2	5	6	7
(0,1) a'b'	x	x				
(0,2) a'c'	x		x			
(1,5) b'c		x		x		
(2,6) bc'			x		x	
(5,7) ac				x		x
(6,7) ab					x	x

Si procede a tentativi

Copriamo implicanti primi…

	0	1	2	5	6	7
(0,1) a'b'	x	x				
(0,2) a'c'	x		x			
(1,5) b'c		x		x		
(2,6) bc'			x		x	
(5,7) ac				x		x
(6,7) ab					x	x

Copriamo implicanti primi…

	0	1	2	5	6	7
(0,1) a'b'	x	x				
(0,2) a'c'	x		x			
(1,5) b'c		x		x		
(2,6) bc'			x		x	
(5,7) ac				x		x
(6,7) ab					x	x

Copriamo implicanti primi…

	0	1	2	5	6	7
	x	x				
(0,2) a'c'	x		x			
(1,5) b'c		x		x		
			x		x	
				x		x
(6,7) ab					x	x

Ma questo potrebbe non essere il minimo…

Quindi torniamo indietro e proviamo combinazioni diverse

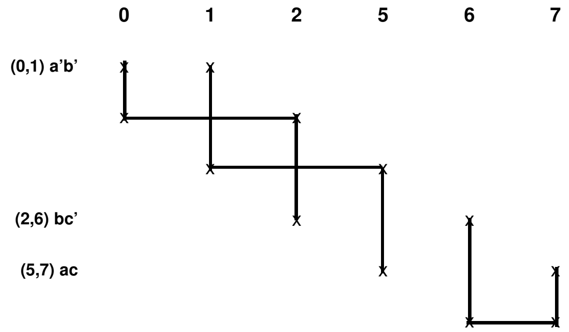
Copriamo implicanti primi…

	0	1	2	5	6	7
(0,1) a'b'	x	x				
(0,2) a'c'	x		x			
(1,5) b'c		x		x		
(2,6) bc'			x		x	
(5,7) ac				x		x
(6,7) ab					x	x

Copriamo implicanti primi…

	0	1	2	5	6	7
(0,1) a'b'	x	x				
(0,2) a'c'	x		x			
(1,5) b'c		x		x		
(2,6) bc'			x		x	
(5,7) ac				x		x
(6,7) ab					x	x

Copriamo implicanti primi…



Soluzioni ottenute

- a'b'+bc'+ac
- a'c'+b'c+ab
- Equivalenti dal punto di vista della complessità e costo del circuito…

Semplificazione di funzioni non completamente specificate

Esempio

Semplifichiamo la funzione:

$F(A, B, C, D) = \sum m(2, 3, 7, 9, 11, 13) + \sum d(1, 10, 15)$

Semplificazione mintermini

Trattiamo i mintermini “don’t care” come durante la prima fase vista in precedenza

F(A, B, C, D) =∑m(2, 3, 7, 9, 11, 13) + ∑d(1, 10, 15)

```
 (1)  0001
 (2)  0010

 (3)  0011
 (9)  1001
(10)  1010

 (7)  0111
(11)  1011
(13)  1101

(15)  1111
```

Semplificazione mintermini

Trattiamo i mintermini come termini “don’t care” durante la prima fase

F(A, B, C, D) =∑m(2, 3, 7, 9, 11, 13) + ∑d(1, 10, 15)

```
 (1)  0001      ( 1, 3)  00-1
 (2)  0010      ( 1, 9)  -001
                ( 2, 3)  001-
                ( 2,10)  -010
 (3)  0011
 (9)  1001
(10)  1010

 (7)  0111
(11)  1011
(13)  1101

(15)  1111
```

Semplificazione mintermini

Trattiamo i mintermini come termini “don’t care” durante la prima fase

F(A, B, C, D) =∑m(2, 3, 7, 9, 11, 13) + ∑d(1, 10, 15)

```
 (1)  0001      ( 1, 3)  00-1
 (2)  0010      ( 1, 9)  -001
                ( 2, 3)  001-
                ( 2,10)  -010
 (3)  0011
 (9)  1001      ( 3, 7)  0-11
(10)  1010      ( 3,11)  -011
                ( 9,11)  10-1
 (7)  0111      ( 9,13)  1-01
(11)  1011      (10,11)  101-
(13)  1101

(15)  1111
```

Semplificazione mintermini

Trattiamo i mintermini come termini “don’t care” durante la prima fase

F(A, B, C, D) =∑m(2, 3, 7, 9, 11, 13) + ∑d(1, 10, 15)

```
 (1)  0001      ( 1, 3)  00-1
 (2)  0010      ( 1, 9)  -001
                ( 2, 3)  001-
                ( 2,10)  -010
 (3)  0011
 (9)  1001      ( 3, 7)  0-11
(10)  1010      ( 3,11)  -011
                ( 9,11)  10-1
 (7)  0111      ( 9,13)  1-01
(11)  1011      (10,11)  101-
(13)  1101
                ( 7,15)  -111
(15)  1111      (11,15)  1-11
                (13,15)  11-1
```

Semplificazione mintermini

Trattiamo i mintermini come termini “don’t care” durante la prima fase
F(A, B, C, D) =∑m(2, 3, 7, 9, 11, 13) + ∑d(1, 10, 15)

```
√  (1) 0001      ( 1, 3) 00-1
√  (2) 0010      ( 1, 9) -001
                 ( 2, 3) 001-
                 ( 2,10) -010
√  (3) 0011
√  (9) 1001      ( 3, 7) 0-11
√ (10) 1010      ( 3,11) -011
                 ( 9,11) 10-1
√  (7) 0111      ( 9,13) 1-01
√ (11) 1011      (10,11) 101-
√ (13) 1101
                 ( 7,15) -111
√ (15) 1111      (11,15) 1-11
                 (13,15) 11-1
```


Semplificazione mintermini

Trattiamo i mintermini come termini “don’t care” durante la prima fase
F(A, B, C, D) =∑m(2, 3, 7, 9, 11, 13) + ∑d(1, 10, 15)

```
√  (1) 0001      ( 1, 3) 00-1
√  (2) 0010      ( 1, 9) -001
                 ( 2, 3) 001-    (1,3,9,11)   -0-1
                 ( 2,10) -010    (1,9,3,11)   -0-1
√  (3) 0011                      (2,3,10,11)  -01-
√  (9) 1001      ( 3, 7) 0-11    (2,10,3,11)  -01-
√ (10) 1010      ( 3,11) -011
                 ( 9,11) 10-1
√  (7) 0111      ( 9,13) 1-01
√ (11) 1011      (10,11) 101-
√ (13) 1101
                 ( 7,15) -111
√ (15) 1111      (11,15) 1-11
                 (13,15) 11-1
```


Semplificazione mintermini

Trattiamo i mintermini come termini “don’t care” durante la prima fase
F(A, B, C, D) =∑m(2, 3, 7, 9, 11, 13) + ∑d(1, 10, 15)


```
√  (1) 0001      ( 1, 3) 00-1
√  (2) 0010      ( 1, 9) -001
                 ( 2, 3) 001-    (1,3,9,11)   -0-1
                 ( 2,10) -010    (1,9,3,11)   -0-1
√  (3) 0011                      (2,3,10,11)  -01-
√  (9) 1001      ( 3, 7) 0-11    (2,10,3,11)  -01-
√ (10) 1010      ( 3,11) -011
                 ( 9,11) 10-1    (3,7,11,15)  --11
√  (7) 0111      ( 9,13) 1-01    (3,11,7,15)  --11
√ (11) 1011      (10,11) 101-    (9,11,13,15) 1--1
√ (13) 1101                      (9,13,11,15) 1--1
                 ( 7,15) -111
√ (15) 1111      (11,15) 1-11
                 (13,15) 11-1
```


Semplificazione mintermini

Trattiamo i mintermini come termini “don’t care” durante la prima fase
F(A, B, C, D) =∑m(2, 3, 7, 9, 11, 13) + ∑d(1, 10, 15)


```
√  (1) 0001    √ ( 1, 3) 00-1
√  (2) 0010    √ ( 1, 9) -001
               √ ( 2, 3) 001-    (1,3,9,11)   -0-1
               √ ( 2,10) -010    (1,9,3,11)   -0-1
√  (3) 0011                      (2,3,10,11)  -01-
√  (9) 1001    √ ( 3, 7) 0-11    (2,10,3,11)  -01-
√ (10) 1010    √ ( 3,11) -011
               √ ( 9,11) 10-1    (3,7,11,15)  --11
√  (7) 0111    √ ( 9,13) 1-01    (3,11,7,15)  --11
√ (11) 1011    √ (10,11) 101-    (9,11,13,15) 1--1
√ (13) 1101                      (9,13,11,15) 1--1
               √ ( 7,15) -111
√ (15) 1111    √ (11,15) 1-11
               √ (13,15) 11-1
```

Semplificazione mintermini

Trattiamo i mintermini "don't care" come prima durante la prima fase

F(A, B, C, D) =∑m(2, 3, 7, 9, 11, 13) + ∑d(1, 10, 15)

√ (1) 0001	√ (1, 3) 00-1	(1,3,9,11) -0-1
√ (2) 0010	√ (1, 9) -001	~~(1,9,3,11) -0-1~~
	√ (2, 3) 001-	(2,3,10,11) -01-
√ (3) 0011	√ (2,10) -010	~~(2,10,3,11) -01-~~
√ (9) 1001		
√ (10) 1010	√ (3, 7) 0-11	(3,7,11,15) --11
	√ (3,11) -011	~~(3,11,7,15) --11~~
√ (7) 0111	√ (9,11) 10-1	(9,11,13,15) 1--1
√ (11) 1011	√ (9,13) 1-01	~~(9,13,11,15) 1--1~~
√ (13) 1101	√ (10,11) 101-	
√ (15) 1111	√ (7,15) -111	
	√ (11,15) 1-11	
	√ (13,15) 11-1	

Tabella degli implicanti primi

Rappresentiamo i termini nella tabella degli implicanti primi, **omettendo le colonne dei mintermini "don't care" (1,10,15)**

	2	3	7	9	11	13
(1,3,9,11) b'd		x		x	x	
(2,3,10,11) b'c	x	x			x	
(3,7,11,15) cd		x	x		x	
(9,11,13,15) ad				x	x	x

Identifico gli implicanti primi essenziali…

	2	3	7	9	11	13
(1,3,9,11) b'd		x		x	x	
(2,3,10,11) b'c	x	x			x	
(3,7,11,15) cd		x	x		x	
(9,11,13,15) ad				x	x	x

Identifico gli implicanti primi essenziali…

	2	3	7	9	11	13
(1,3,9,11) b'd		x		x	x	
(2,3,10,11) b'c	x	x			x	
(3,7,11,15) cd		x	x		x	
(9,11,13,15) ad				x	x	x

Identifico gli implicanti primi essenziali…

Risultato:
F=b’c+cd+ad

	2	3	7	9	11	13
(1,3,9,11) b’d		x		x	x	
(2,3,10,11) b’c	x	x			x	
(3,7,11,15) cd		x	x		x	
(9,11,13,15) ad				x	x	x

Metodo di Petrick

Metodo di Petrick

- Abbiamo visto come a **volte identificare il set di implicanti primi minimo non sia ovvio**
- Il metodo di Petrick fornisce **una maniera sistematica per affrontare questo tipo di problema**

Partiamo dalla tabella precedente

	0	1	2	5	6	7
(0,1) a’b’	x	x				
(0,2) a’c’	x		x			
(1,5) b’c		x		x		
(2,6) bc’			x		x	
(5,7) ac				x		x
(6,7) ab					x	x

Indichiamo come $P_1 \ldots P_6$ gli implicanti primi

		0	1	2	5	6	7
P_1	(0,1) a'b'	x	x				
P_2	(0,2) a'c'	x		x			
P_3	(1,5) b'c		x		x		
P_4	(2,6) bc'			x		x	
P_5	(5,7) ac				x		x
P_6	(6,7) ab					x	x

Funzione logica P

- Definiamo una funzione logica **P**, <u>vera quando tutti i mintermini saranno stati coperti</u>
- Consideriamo **P_i=true** quando l'implicante primo della i-esima riga è incluso nella soluzione

Quindi…

		0	1	2	5	6	7
P_1	(0,1) a'b'	x	x				
P_2	(0,2) a'c'	x		x			
P_3	(1,5) b'c		x		x		
P_4	(2,6) bc'			x		x	
P_5	(5,7) ac				x		x
P_6	(6,7) ab					x	x

Per coprire il mintermine 0 dev'essere true

(P_1+P_2)

Quindi…

		0	1	2	5	6	7
P_1	(0,1) a'b'	x	x				
P_2	(0,2) a'c'	x		x			
P_3	(1,5) b'c		x		x		
P_4	(2,6) bc'			x		x	
P_5	(5,7) ac				x		x
P_6	(6,7) ab					x	x

Per coprire i mintermini 0 e 1

$(P_1+P_2)\ (P_1+P_3)$

In definitiva…

		0	1	2	5	6	7
P_1	**(0,1) a'b'**	x	x				
P_2	**(0,2) a'c'**	x		x			
P_3	**(1,5) b'c**		x		x		
P_4	**(2,6) bc'**			x		x	
P_5	**(5,7) ac**				x		x
P_6	**(6,7) ab**					x	x

$P = (P_1+P_2)\ (P_1+P_3)\ (P_2+P_4)\ (P_3+P_5)\ (P_4+P_6)\ (P_5+P_6)$

Riduciamo P in forma SOP minima

- Innanzitutto sfruttiamo la proprietà **(X+Y) (X+Z)=(X+YZ)**
  $(P_1+P_2)\ (P_1+P_3)\ (P_2+P_4)\ (P_3+P_5)\ (P_4+P_6)\ (P_5+P_6)=$
  $=(P_1+P_2P_3)(P_4+P_2P_6)(P_5+P_3P_6)$
- Ora applichiamo la proprietà **distributiva**:
  $(P_1P_4+P_1P_2P_6+P_2P_3P_4+P_2P_3P_6)(P_5+P_3P_6)=$
  $=P_1P_4P_5+P_1P_2P_5P_6+P_2P_3P_4P_5+P_2P_3P_5P_6+$
  $+P_1P_3P_4P_6+P_1P_2P_3P_6+P_2P_3P_4P_6+P_2P_3P_6$

Semplificazione (cont.)

- $P_1P_4P_5+P_1P_2P_5P_6+P_2P_3P_4P_5+P_2P_3P_5P_6+$
  $+P_1P_3P_4P_6+P_1P_2P_3P_6+P_2P_3P_4P_6+P_2P_3P_6$
- Usiamo la proprietà **X+XY=X** per eliminare termini ridondanti
  $P_1P_4P_5+P_1P_2P_5P_6+P_2P_3P_4P_5+P_2P_3P_5P_6+$
  $+P_1P_3P_4P_6+P_1P_2P_3P_6+P_2P_3P_4P_6\boxed{+P_2P_3P_6}$
- Otteniamo:
  $P_1P_4P_5+P_1P_2P_5P_6+P_2P_3P_4P_5+P_1P_3P_4P_6+P_2P_3P_6$

Cosa significa?

- $P=P_1P_4P_5+P_1P_2P_5P_6+P_2P_3P_4P_5+P_1P_3P_4P_6+P_2P_3P_6$
- Significa che **uno dei 5 termini in OR deve essere vero**
  - Ognuno di essi implica l'inclusione di un certo numero di implicanti primi
- Quindi **mi basta prendere uno qualsiasi di essi**
- Possibilmente, **uno col numero minimo di implicanti primi da considerare**
  - Ovvero, $P_1P_4P_5$ oppure $P_2P_3P_6$

Torniamo alla tabella degli implicanti primi…

$P_1P_4P_5$

		0	1	2	5	6	7
P_1		x	x				
P_2	(0,2) a'c'	x		x			
P_3	(1,5) b'c		x		x		
P_4				x		x	
P_5					x		x
P_6	(6,7) ab					x	x

a'b'+bc'+ac

$P_2P_3P_6$

		0	1	2	5	6	7
P_1	(0,1) a'b'	x	x				
P_2		x		x			
P_3			x		x		
P_4	(2,6) bc'			x		x	
P_5	(5,7) ac				x		x
P_6						x	x

a'c'+b'c+ab

Sono le stesse due soluzioni possibili ottenute graficamente!

Esercizi

Utilizzare il metodo di Quine-McCluskey per minimizzare le seguenti funzioni:

- f (a,b,c,d)=∑m(0, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 14, 15)
- f (a,b,c,d)=∑m(1, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 13)+∑d(2, 9, 15)
- f (a,b,c,d,e)=∑m(0, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 18, 24, 26, 28, 30)

In questo caso, usare il metodo di Petrick per selezionare gli implicanti primi:

- F(a,b,c,d)=∑m(9, 12, 13, 15)+∑d(1, 4, 5, 7, 8, 11,14)