CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA
PER L'AUTOMAZIONE E LE TELECOMUNICAZIONI
Corso di Teoria e Elaborazione dei Segnali (12 CFU)

Raccolta esercizi su variabili aleatorie e momenti - tracce 2019-2020

Ex. 1 Definire la correlazione tra due variabili aleatorie e la condizione di ortogonalità. Calcolare quindi il valore quadratico medio della variabile $a_1X_1 + a_2X_2$, nel caso generale e nel caso di variabili X_1 e X_2 ortogonali.

Ex. 2 Si fornisca la definizione di varianza e si commenti il suo significato. La si applichi quindi al caso di variabili di Posizione e Scala.

Ex. 3 Sia X una variabile uniforme in $(-1/2, 1/2)$ e $Y = X^2$. Calcolare il coefficiente di correlazione tra X e Y.

Soluzione

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E[XY] - \mu_X\mu_Y \\ E[XY] = E[X^3] &= \int_{-1/2}^{+1/2} x^3 dx = 0; \quad \mu_X = E[X] = \int_{-1/2}^{+1/2} x dx = 0 \end{aligned}$$

Quindi covarianza e coefficiente di correlazione sono nulli.

Ex. 4 Si consideri la variabile $Z = 2X - Y$, con $X \sim U(-1,1)$ e $Y \sim U(0,1)$, incorrelate. Calcolare

a. media e varianza di Z;

b. la correlazione tra Z e X.

Soluzione

a.

$$\begin{aligned} E[Z] &= 2\mu_X - \mu_Y = 2 \times 0 - 1/2 = -1/2; \\ var[Z] &= 4var(X) + var(Y) - 4cov(X,Y) = 4 \times 1/3 + 1/12 = 17/12 \end{aligned}$$

b.

$$E[ZX] = E[(2X - Y)X] = E[2X^2 - YX] = 2E[X^2] - E[XY]$$

Le variabili X e Y sono incorrelate quindi la correlazione è uguale al prodotto delle medie. Poichè la variabile X ha media nulla, la correlazione è nulla. Quindi

$$E[ZX] = 2 \times 1/3 = 2/3$$

Ex. 5 Fornire la definizione di coefficiente di correlazione e calcolarne il valore nel caso di variabili aleatorie discrete indipendenti.

Ex. 6 Si fornisca la definizione di varianza di una variabile aleatoria e se ne commenti il significato. Si calcoli la varianza di una somma di due variabili correlate.

Ex. 7 Si forniscano le definizioni di indipendenza e incorrelazione di due variabili aleatorie. Si dimostri che l'indipendenza implica l'incorrelazione.

Ex. 8 Si consideri la variabile $Z = X + Y$, dove X e Y sono variabili aleatorie binarie indipendenti $X \sim B(1, 0.5)$ e $Y \sim B(1, 0.75)$. Si determini

a. l'alfabeto e la pmf di Z;

b. la correlazione tra Z e X.

Soluzione

a.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_Z &= \{0, 1, 2\};\\
p_Z(0) &= P(\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}) = p_{XY}(0, 0) = p_X(0)p_Y(0) = 0.5 \times 0.25 = 0.125\\
p_Z(1) &= P(\{X = 1\} \cap \{Y = 0\}) + P(\{X = 0\} \cap \{Y = 1\}) = p_{XY}(1, 0) + p_{XY}(0, 1)\\
&= p_X(1)p_Y(0) + p_X(0)p_Y(1) = 0.5 \times 0.25 + 0.5 \times 0.75 = 0.5\\
p_Z(2) &= P(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) = p_{XY}(1, 1) = p_X(1)p_Y(1) = 0.5 \times 0.75 = 0.375
\end{aligned}$$

dove si è sfruttata l'ipotesi di indipendenza tra X e Y per scrivere la pmf congiunta come prodotto delle marginali.

b.

$$E[ZX] = E[(X + Y)X] = E[X^2 + YX] = E[X^2] + E[XY] = 0.5 + 0.5 \times 0.75 = 0.875$$

Le variabili X e Y sono indipendenti, quindi incorrelate e per questo la correlazione è uguale al prodotto delle medie.

Ex. 9 Si enunci il teorema fondamentale per il calcolo della media e lo si applichi per il calcolo di correlazione e covarianza tra le variabili X e Y con pdf congiunta

$$f_{XY}(x, y) = 15x^2y \quad 0 \leq x \leq y \leq 1$$

Soluzione

$$\begin{aligned}
E[XY] &= \int_0^1 \int_x^1 xy \cdot 15x^2y dydx = 15 \int_0^1 x^3 \int_x^1 y^2 dydx =\\
&= 15 \int_0^1 x^3 1/3(1 - x^3)dx = 5(1/4 - 1/7) = 15/28
\end{aligned}$$

Per il calcolo della covarianza occorre calcolare le medie di X e Y

$$E[X] = \int_0^1 x \left(\int_x^1 15x^2 y dy \right) dx = 15 \int_0^1 x^3 \int_x^1 y dy dx =$$
$$= 15 \int_0^1 x^3 1/2(1-x^2) dx = 15/2(1/4-1/6) = 15/24$$

$$E[Y] = \int_0^1 y \left(\int_0^y 15x^2 y dx \right) dy = 15 \int_0^1 y^2 \int_0^y x^2 dx dy =$$
$$= 15 \int_0^1 y^2 1/3 y^3 dy = 5 \times 1/6 = 5/6$$

Infine

$$cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 15/28 - 15/24 \times 5/6$$

Ex. 10 Si consideri un canale le cui variabili di ingresso e uscita, X e Y, sono caratterizzate dalla seguente pmf congiunta

$y \diagdown x$	0	1
0	0.45	0.10
1	0.10	0.25
-1	0.05	0.05

a. Calcolare la pmf condizionale dell'uscita dato l'ingresso $p_{Y|X}(y|x)$;

b. Calcolare il coefficiente di correlazione tra ingresso e uscita.

Soluzione

a. Occorre calcolare prima la pmf dell'ingresso X

$$p_X(0) = 0.6, \quad p_X(1) = 0.4;$$

quindi

y	$p_{Y\|X}(y\|0)$	$p_{Y\|X}(y\|1)$
0	0.45/0.6	0.10/0.4
1	0.10/0.6	0.25/0.4
-1	0.05/0.6	0.05/0.4

b. *Per il coefficiente di correlazione occorre calcolare la correlazione, le medie e le varianze.*

$$E[XY] = \sum_x \sum_y xyp_{XY}(x,y) = 1 \times 0.25 - 1 \times 0.05 = 0.2$$

Essendo X *variabile binaria,* $E[X] = 0.4$*. Per calcolare* $E[Y]$ *bisogna calcolare la pmf*

$$p_Y(0) = 0.55, \quad p_Y(1) = 0.35, \quad p_Y(-1) = 0.10;$$

da cui

$$E[Y] = 1 \times 0.35 - 1 \times 0.10 = 0.25;$$

Per il calcolo delle varianze occorrono i valori quadratici medi. Essendo X *variabile binaria,* $E[X^2] = 0.4$ *e*

$$E[Y^2] = 1 \times 0.35 + 1 \times 0.10 = 0.45;$$

da cui le varianze var$(X) = 0.4 \times 0.6$ *(varianza variabile binaria), var*$(Y) = 0.45 - (0.25)^2$ *e le deviazioni standard* $\sigma_X = \sqrt{var(X)}$ *e* $\sigma_Y = \sqrt{var(Y)}$*. Infine il coefficiente di correlazione è*

$$\rho = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sigma_x \sigma_y}$$

Ex. 11 Date le variabili X e Y, gaussiane a media 1 e valor quadratico medio 2, iid (indipendenti, identicamente distribuite), si consideri la variabile $Z = 2X - Y + 1$.

a. Determinare la pdf di Z.

b. Calcolare la probabilità $P(\{Z > 10\})$.

c. Calcolare la covarianza tra Z e Y.

Soluzione

a. Z *è gaussiana perché trasformazione affine di variabili gaussiane. Occorre calcolare solo media e varianza.* $E[Z] = 2E[X] - E[Y] + 1 = 2$*, la varianza è* $\sigma_Z^2 = 4\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$ *(essendo* X *e* Y *indipendenti la covarianza è nulla). Le varianze di* X *e* Y *si ottengono dalla relazione con il valore quadratico medio,* $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 2 - 1 = 1$ *e* $\sigma_Z^2 = 5$*. Quindi* $Z \sim \mathcal{N}(2,5)$

b. $P(\{Z > 10\}) = Q(\frac{10-2}{\sqrt{5}})$.

c.

$$\begin{aligned} cov(Z,Y) &= E[ZY] - E[Z]E[Y] = E[2XY - Y^2 + Y] - E[Z]E[Y] = \\ &= 2E[XY] - E[Y^2] + E[Y] - E[Z]E[Y] = 2 - 2 + 1 - 2 = -1 \end{aligned}$$

dove $E[XY] = 1$ *perché, essendo le variabili indipendenti, è uguale al prodotto delle medie.*

Ex. 12 L'uscita di un canale di trasmissione è $Y = 2X - 1 + D$, dove $X \sim B(1, 0.5)$ e $D \sim \mathcal{N}(0, 0.1)$, indipendente da X. Calcolare

a. media e varianza di Y;

b. $P(\{Y > 0\}|\{X = 1\})$;

c. $P(\{Y > 0\})$.

Soluzione

a.

$$\begin{aligned} E[Y] &= 2E[X] - 1 + E[D] = 2 \times 0.5 - 1 + 0 = 0 \\ \sigma_Y^2 &= 4\sigma_X^2 + \sigma_D^2 = 4 \times (0.5)^2 + 0.1 = 1.1 \end{aligned}$$

b.

$$P(\{Y > 0\}|\{X = 1\}) = P(\{D + 1 > 0\}) = P(\{D > -1\}) = Q\left(\frac{-1}{\sqrt{0.1}}\right) = 1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{0.1}}\right)$$

c.

$$\begin{aligned} P(\{Y > 0\}) &= P(\{Y > 0\}|\{X = 1\})p_X(1) + P(\{Y > 0\}|\{X = 0\})p_X(0) \\ P(\{Y > 0\}|\{X = 0\}) &= P(\{D - 1 > 0\}) = P(\{D > 1\}) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{0.1}}\right) \\ P(\{Y > 0\}) &= \frac{1}{2}\left(1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{0.1}}\right) + Q\left(\frac{1}{\sqrt{0.1}}\right)\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ex. 13 Si enunci il teorema fondamentale per il calcolo della media e lo si applichi per dimostrare la proprietà di linearità della media statistica.