5 Spazi vettoriali reali

Accade spesso che "oggetti" molto diversi tra loro hanno una certa "struttura matematica" comune, in questo caso ci si inventa un nome per quella struttura e la si studia. Questo modo di lavorare offre numerosi vantaggi: in colpo solo si studiano più oggetti, si impara a capire cosa dipende da cosa, il che consente una visione più profonda.

In questo capitolo la struttura matematica che si studia è quella di *spazio vettoriale reale* o semplicemente *spazio vettoriale*. La definizione verrà data dopo aver illustrato alcuni esempi, comunque, detto in maniera informale, uno spazio vettoriale reale non è altro che un insieme, i cui elementi verranno chiamati *vettori*, sul quale è definita una *somma tra vettori* e sul quale è definito un *prodotto per gli scalari* (operazione che ad un numero reale e ad un vettore associa un altro vettore). Naturalmente, per definizione, queste operazioni dovranno godere di alcune proprietà che in seguito verranno elencate. Per passare dal concreto all'astratto, si procederà elencando alcuni esempi, dopodichè si evidenzierà la struttura matematica che li accomuna. Negli esempi che seguono, λ denoterà sempre un numero reale.

Esempio 5.1. Spazio $\mathbb{R}^n$ delle n-ple di numeri reali. In questo caso i vettori sono elementi del tipo $(x_1, ..., x_n)$; la somma è definita ponendo $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$, mentre il prodotto per gli scalari è definito ponendo $\lambda \cdot (x_1, ..., x_n) := (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$. Questo esempio è fondamentale nello studio degli spazi vettoriali di *dimensione finita*.

Esempio 5.2. Spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo: in questo caso gli elementi del nostro insieme, cioè i vettori, sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, dove A è una matrice di tipo $m \times n$. Per la proprietà distributiva del prodotto tra matrici, se $(s_1, ..., s_n)$ e $(t_1, ..., t_n)$ sono soluzioni del sistema dato, anche la somma $(s_1 + t_1, ..., s_n + t_n)$ nonchè il prodotto $(\lambda s_1, ..., \lambda s_n)$ sono soluzioni. Queste naturali operazioni di somma tra vettori e prodotto per uno scalare sono, per definizione, le operazioni che definiscono la struttura di spazio vettoriale dell'insieme considerato, purchè soddisfino alcune proprietà elencate più avanti. Dopo aver studiato l'intero capitolo, risulterà chiaro che l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo costituisce un *sottospazio vettoriale* di $\mathbb{R}^n$.

Esempio 5.3. Spazio delle funzioni continue definite su un intervallo I: nel corso di analisi si prova che la somma di due funzioni continue è ancora una funzione continua e che anche il prodotto $\lambda \cdot f(x)$ è una funzione continua, dove $\lambda \in \mathbb{R}$ ed $f(x)$ è una funzione continua. Di nuovo, queste operazioni definiscono la struttura di spazio vettoriale dell'insieme considerato, dove i vettori sono tali funzioni continue.

Esempio 5.4. Spazio delle successioni. Chiaramente, se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono successioni, allora è possibile definire le operazioni di somma tra successioni e prodotto di uno scalare per una successione poichè anche $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\lambda a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono successioni. La struttura ottenuta costituisce uno spazio vettoriale reale, dove i vettori sono le successioni.

Esempio 5.5. Spazio delle successioni convergenti. Di nuovo, la somma di successioni convergenti è una successione convergente ed il prodotto di un numero reale per una successione convergente è una successione convergente. In effetti, lo spazio vettoriale di questo esempio costituisce un *sottospazio vettoriale* dello spazio dell'esempio precedente.

Definizione 5.6. Un insieme non vuoto V di **vettori reali** è detto **spazio vettoriale reale** se è dotato di un'operazione di somma

$$+ : (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in V \times V \longmapsto \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$$

e di un'operazione di moltiplicazione per scalari

$$\cdot : (\lambda, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{R} \times V \longmapsto \lambda \cdot \boldsymbol{v} \in V$$

che godano delle seguenti proprietà:

$$1)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}, \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \qquad \text{(proprietà commutativa della somma)}$$

$$2)(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}), \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V \qquad \text{(proprietà associativa della somma)}$$

$3) \exists \mathbf{0} \in V \quad e \quad \boldsymbol{u}+\mathbf{0}=\boldsymbol{u}, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in V$ (esistenza e proprietà dell'elemento neutro)

$4) \exists -\boldsymbol{u} \in V \quad tale \quad che \quad \boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{u} \in V$ (esistenza dell'opposto)

$5) \alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \boldsymbol{u} \quad \forall \boldsymbol{u} \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (proprietà associativa del prodotto per uno scalare)

$6) 1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \quad \forall \boldsymbol{u} \in V$ (esistenza dell'elemento neutro rispetto al prodotto per uno scalare)

$7) \alpha \cdot (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \alpha \cdot \boldsymbol{u} + \alpha \cdot \boldsymbol{v} \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
(proprietà distributiva del prodotto per uno scalare rispetto alla somma)

$8) (\alpha+\beta) \cdot \boldsymbol{u} = \alpha \cdot \boldsymbol{u} + \beta \cdot \boldsymbol{u} \quad \forall \boldsymbol{u} \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
(proprietà distributiva della somma tra scalari rispetto al prodotto)

Osservazione 5.7. Dalla definizione di spazio vettoriale reale, si ricava la proprietà seguente: $0 \cdot \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ per ogni vettore $\boldsymbol{u} \in V$. Infatti, applicando le proprietà 8) e 4), si ha che:

$$0\boldsymbol{u} = (1-1)\boldsymbol{u} = 1\boldsymbol{u} + (-1)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}.$$

Si introduce ora la nozione di sottospazio vettoriale. Un sottospazio vettoriale W di V è uno spazio vettoriale W contenuto in V.

Definizione 5.8. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia W un sottoinsieme non vuoto di V. Si dice che W è un **sottospazio vettoriale** di V se W é uno spazio vettoriale con le operazioni presenti in V. Si osservi che richiedere che le operazioni di V siano anche operazioni di W significa che

(i) $\boldsymbol{w_1} + \boldsymbol{w_2} \in W$ per ogni $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2} \in W$ (W *é chiuso rispetto alla somma*)

(ii) $\alpha \cdot \boldsymbol{w} \in W$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}, \boldsymbol{w} \in W$ (W *é chiuso rispetto al prdotto per uno scalare*)

oppure equivalentemente

($\diamond$) $\alpha \boldsymbol{w_1} + \beta \boldsymbol{w_2} \in W$ per ogni $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2} \in W, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

inoltre, le proprietá $1)-8)$ sono banalmente verificate in W poiché i vettori di W sono anche vettori dello spazio vettoriale V.

Definizione 5.9. Siano dati n vettori $\boldsymbol{u_1}, ..., \boldsymbol{u_n}$ ed n scalari $\lambda_1, ..., \lambda_n$, qualunque sia il numero naturale positivo $n \in \mathbb{N}$. Il vettore $\lambda_1 \boldsymbol{u_1} + ... + \lambda_n \boldsymbol{u_n}$ si dice **combinazione lineare** dei vettori $\boldsymbol{u_1}, ..., \boldsymbol{u_n}$ secondo gli scalari $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Esempio 5.10. La combinazione lineare dei vettori $(0,4,5), (2,3,1)$ e $(0,1,1)$ secondo gli scalari $0, 3, -1$ é data dal vettore $0(0,4,5) + 3(2,3,1) - (0,1,1) = (6,8,2)$.

La seguente proposizione, di cui si omette la dimostrazione, é fondamentale perché consente di caratterizzare i sottospazi vettoriali.

Proposizione 5.11. *Sia W un sottoinsieme non vuoto di uno spazio vettoriale V. Allora W é un sottospazio vettoriale di V se e solo se W contiene tutte le combinazioni lineari dei suoi vettori, ossia comunque scelti n vettori $\boldsymbol{u_1}, ..., \boldsymbol{u_n}$ di W ed n scalari reali $\lambda_1, ..., \lambda_n$, risulti che $\lambda_1 \boldsymbol{u_1} + ... + \lambda_n \boldsymbol{u_n}$ sia un vettore di W.*

Esempio 5.12. Il lettore puó facilmente verificare, utilizzando la definizione, che $\{\mathbf{0}\}$ é un sottospazio vettoriale di V, cosí come V stesso é un sottospazio vettoriale. $\{\mathbf{0}\}$ e V sono detti **sottospazi banali**. Tutti gli altri sottospazi si dicono **sottospazi propri** di V.

Esempio 5.13. In $\mathbb{R}^2$, l'insieme $P = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}^2\}$, che descrive una **retta passante per l'origine**, é un sottospazio vettoriale, infatti é ovviamente non vuoto e

(i) per ogni $(0, y_1), (0, y_2) \in P$, risulta $(0, y_1) + (0, y_2) = (0, y_1 + y_2) \in P$;

(ii) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}, (0, y) \in P$ risulta $\alpha(0, y) = (0, \alpha y) \in P$.

Invece il sottoinsieme $\{(3, y) : y \in \mathbb{R}\}$ di $\mathbb{R}^2$ non é un sottospazio vettoriale, in quanto non verifica nessuna delle due proprietá della definizione: ad esempio, presi $(3, y_1), (3, y_2) \in \{(3, y) : y \in \mathbb{R}\}$, la somma $(3, y_1) + (3, y_2) = (6, y_1 + y_2) \notin \{(3, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

Sia dato un sottoinsieme non vuoto S di vettori di uno spazio vettoriale V. Se si considera l'insieme di tutte le combinazioni lineari degli elementi di S, questo costituisce un sottospazio vettoriale di V per la Proposizione 5.11, che quindi suggerisce la seguente definizione.

Definizione 5.14. Sia S un sottoinsieme non vuoto di uno spazio vettoriale V. Si dice **sottospazio generato da** S, e si indica col simbolo $< S >$, il sottospazio vettoriale di V costituito da tutte le combinazioni lineari di elementi di S, cioé

$$v \in< S >\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_i \in \mathbb{R}, \boldsymbol{s_1}, \ldots, \boldsymbol{s_i} \in S : v = \lambda_1 \boldsymbol{s_1} + \cdots + \lambda_i \boldsymbol{s_i}.$$

Esempio 5.15. Sia $S = \{\mathbf{0}\}$, allora $< S >= \{\mathbf{0}\}$.

Se $\boldsymbol{v}$ é un vettore di uno spazio vettoriale reale V, lo spazio generato da $\{\boldsymbol{v}\}$, che si indica anche col simbolo $< \boldsymbol{v} >$, é costituito da tutti i vettori proporzionali a $\boldsymbol{v}$, cioé $< \boldsymbol{v} >= \{\lambda \boldsymbol{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Proposizione 5.16. *Sia V uno spazio vettoriale e sia $S = \{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_n\}$ un insieme di vettori di V. Il sottospazio generato da S - $< S >$ - é un sottospazio di V.*

5.1 Lineare dipendenza e indipendenza, insiemi di generatori

Definizione 5.17. Sia V uno spazio vettoriale e sia S un sottoinsieme non vuoto di V. Un vettore $\boldsymbol{v} \in V$ si dice **linearmente dipendente da S** se $\boldsymbol{v} \in< S >$, cioé se $\boldsymbol{v}$ si puó scrivere come combinazione lineare di elementi di S. Reciprocamente, un vettore $\boldsymbol{w} \in V$ si dice **linearmente indipendente da S** se $\boldsymbol{w} \notin< S >$.

Esempio 5.18. Sia $S = \{(0, 3, 0), (1, 9, 0), (0, 4, 0)\}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$. Il vettore $\boldsymbol{v} = (2, 3, 0)$ é linearmente dipendente da S, infatti $(2, 3, 0) = -5(0, 3, 0) + 2(1, 9, 0) + 0(0, 4, 0)$. Invece il vettore $\boldsymbol{w} = (1, 1, 1)$ non dipende da S poiché non esistono scalari che restituiscano $\mathbf{w}$ come combinazione lineare degli elementi di S.

Definizione 5.19. Un sottoinsieme non vuoto S di vettori di uno spazio vettoriale V si dice **linearmente dipendente** se esiste almeno un vettore $\boldsymbol{v}$ di S che sia linearmente dipendente dai restanti vettori di S, ossia $\boldsymbol{v}$ é linearmente dipendente da $S \backslash \{v\}$. Reciprocamente, S si dice **linearmente indipendente** se non é linearmente dipendente, cioé ogni vettore di S é linearmente indipendente dai restanti.

Esempio 5.20. L'insieme $S = \{(0, 3, 0), (1, 9, 0), (0, 4, 0)\}$ é linearmente dipendente, infatti $(0, 4, 0)$ dipende linearmente da $\{(0, 3, 0), (1, 9, 0)\}$, potendosi ottenere come $\frac{4}{3}(0, 3, 0) + 0(1, 9, 0)$.

La proposizione e l'osservazione seguenti forniscono uno strumento equivalente alla definizione per valutare la lineare dipendenza o indipendenza di un insieme di vettori.

Proposizione 5.21. *Sia $S = \{\boldsymbol{v_1}, ..., \boldsymbol{v_n}\}$ un sottoinsieme di vettori di uno spazio vettoriale V. Allora S é linearmente dipendente se e solo se esistono n scalari $\lambda_1, ..., \lambda_n$ non tutti nulli, cioé almeno uno tra essi é diverso da 0, tali che $\lambda_1 \boldsymbol{v_1} + ... + \lambda_n \boldsymbol{v_n} = \mathbf{0}$, ossia é possibile scrivere il vettore nullo come combinazione lineare di vettori di S mediante scalari non tutti nulli.*

DIMOSTRAZIONE. L'insieme S é linearmente dipendente se e solo se, per definizione, esiste un vettore in S che sia linearmente dipendente dai restanti vettori: supponiamo sia $\boldsymbol{v_n}$. Allora esistono $n-1$ scalari $\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$ tali che $\boldsymbol{v_n} = \lambda_1 \boldsymbol{v_1} + ... + \lambda_{n-1} \boldsymbol{v_{n-1}}$, ossia equivalentemente $\boldsymbol{v_n} + (-\lambda_1)\boldsymbol{v_1} + ... + (-\lambda_{n-1})\boldsymbol{v_{n-1}} = \mathbf{0}$. Pertanto, il vettore nullo é stato espresso come combinazione lineare di vettori di S mediante scalari non tutti nulli, in quanto almeno lo scalare per cui é moltiplicato $\boldsymbol{v_n}$ é $1 \neq 0$. ■

Osservazione 5.22. Si osservi che la proposizione precedente puó essere formulata in maniera analoga, riguardo alla lineare indipendenza, come segue: un insieme di vettori $S = \{\boldsymbol{v_1}, ..., \boldsymbol{v_n}\}$, scelti in uno spazio vettoriale V, é linearmente indipendente se non é possibile scrivere il vettore nullo come combinazione lineare di vettori di S mediante scalari non tutti nulli, ossia se da $\lambda_1 \boldsymbol{v_1} + ... + \lambda_n \boldsymbol{v_n} = \mathbf{0}$ segue necessariamente che $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Esempio 5.23. Se un insieme S é costituito da un solo vettore, equivalentemente $S = \{\boldsymbol{u}\}$, allora S é linearmente dipendente se e solo se $\boldsymbol{u}$ é il vettore nullo.

Infatti se $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$, allora $\lambda \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ se e solo se $\lambda = 0$ e quindi $S = \{\boldsymbol{u}\}$ é linearmente indipendente per l'Osservazione 5.21. Viceversa se $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, allora qualunque sia lo scalare $\lambda \neq 0$ risulta che $\lambda \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ e quindi S é linearmente dipendente per la Proposizione 5.20.

Definizione 5.24. Un sottoinsieme S di uno spazio vettoriale V si dice **insieme di generatori**, oppure **sistema di generatori**, per V se $< S >= V$, cioé se ogni vettore $\boldsymbol{v} \in V$ esistono dei vettori $\boldsymbol{u_1}, ..., \boldsymbol{u_n} \in S$ e degli scalari $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che $\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{u_1} + ... + \lambda_n \boldsymbol{u_n}$.

Esempio 5.25 (Insieme di generatori e insiemi linearmente indipendenti: confronto)**.** Il sottoinsieme $S = \{(0,1), (1,0), (1,1)\}$ di $\mathbb{R}^2$ é linearmente dipendente: infatti il vettore nullo puó essere espresso come combinazione lineare di elementi di S come segue: $1 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0) - 1 \cdot (1,1) = (0,0)$.

Invece, l'insieme $T = \{(1,0), (0,1)\}$ é linearmente indipendente; infatti, considerata la combinazione $\lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (0,0)$, risulta che $(\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$, che si verifica nel solo caso in cui $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

E' facile inoltre verificare che l'insieme $T = \{(1,0), (0,1)\}$ é anche un insieme di generatori per $\mathbb{R}^2$. Infatti se $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$, allora $\boldsymbol{v}$ si puó scrivere come (v_1, v_2) per opportuni numeri reali v_1 e v_2; dunque, $\boldsymbol{v} = v_1(1,0) + v_2(0,1)$ e quindi il generico vettore di $\mathbb{R}^2$ si esprime come combinazione lineare di elementi di T. Allo stesso modo, si osservi che anche l'insieme S é un sistema di generatori, infatti é anche vero che $\mathbf{v} = v_1(1,0) + v_2(0,1) + 0(1,1)$.

Infine, dall'Esempio 5.22 segue che l'insieme $U = \{(0,1)\}$ é linearmente indipendente, poiché $\lambda(0,1) = (0, \lambda) = (0,0)$ se e solo se $\lambda = 0$.

D'altra parte, l'insieme U non é un insieme di generatori, poiché, ad esempio, il vettore $(10,0)$ non é ottenibile come combinazione lineare di $(0,1)$.

Esempio 5.26. In $\mathbb{R}^n$, si consideri il sottoinsieme di n vettori $S = \{(1,0,\ldots,0), (0,1,\ldots,0), \ldots, (0,0,\ldots,1)\}$; é facile verificare che

$$< S >=< (1,0,\ldots,0), (0,1,\ldots,0), \ldots, (0,0,\ldots,1) >= \mathbb{R}^n.$$

Infatti, sia $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ il generico vettore di $\mathbb{R}^n$, esso puó essere espresso come combinazione lineare degli elementi di S come segue:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1(1,0,\ldots,0) + \lambda_2(0,1,\ldots,0) + ... + \lambda_n(0,0,\ldots,1).$$

Quindi S é un insieme di generatori di $\mathbb{R}^n$.

Questo paragrafo termina con un'ultima osservazione. Negli esempi analizzati, gli insiemi di generatori sono costituiti da un numero finito di elementi. Tuttavia, esistono spazi vettoriali generati necessariamente da insiemi di generatori infiniti. Nell'analisi svolta in questo capitolo, si suppone che gli insiemi di generatori sono sempre finiti, anche quando non verrá esplicitamente sottolineato, e che quindi gli spazi vettoriali siano tutti generabili da un insieme finito di generatori.

5.2 Base e dimensione di uno spazio vettoriale

Nel paragrafo precedente, si é osservato, mediante un esempio, che gli insiemi di generatori per uno spazio vettoriale possono essere linearmente dipendenti o indipendenti. E' il caso di introdurre una definizione per gli insiemi di generatori linearmente indipendenti perché godono di una proprietá notevole che verrá evidenziata in un teorema.

Definizione 5.27 (Base di uno spazio vettoriale)**.** Un sottoinsieme $B = \{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ di uno spazio vettoriale V si dice una **base** per lo spazio vettoriale V se é un insieme di generatori linearmente indipendente.

Esempio 5.28 (Basi di uno spazio vettoriale)**.** L'insieme $\{(1,0),(0,1)\}$ é una base per $\mathbb{R}^2$, basta guardare l'Esempio 5.24.

L'insieme $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ non é una base per $\mathbb{R}^3$, poiché non é un insieme di generatori. Infatti, ad esempio, il vettore $(2,0,0) \in \mathbb{R}^3$ non é ottenibile come combinazione lineare dei vettori $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

Allo stesso modo non é una base per $\mathbb{R}^3$ l'insieme $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(2,2,0)\}$. Infatti, tale insieme, pur essendo un insieme di generatori, é linearmente dipendente, poiché

$$(2,2,0) = 2(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1).$$

Infine, l'insieme S dell'Esempio 5.25 é una base per $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 5.29. *Se $B = \{\boldsymbol{b_1}, ..., \boldsymbol{b_n}\}$ é una base per lo spazio vettoriale V, allora ogni vettore $\boldsymbol{v}$ di V si puó scrivere come combinazione lineare dei vettori di B, perché B é un insieme di generatori per V. Si osservi che l'indipendenza lineare di B fornisce l'unicitá della combinazione lineare.*

DIMOSTRAZIONE. Si considerino due combinazioni lineari che esprimano il vettore $\boldsymbol{v}$, cioé:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \boldsymbol{b_1} + \dots \lambda_n \boldsymbol{b_n} = \mu_1 \boldsymbol{b_1} + \dots + \lambda_n \boldsymbol{b_n}.$$

Pertanto risulta:

$$(\lambda_1 - \mu_1)\boldsymbol{b_1} + \dots (\lambda_n - \mu_n)\boldsymbol{b_n} = \mathbf{0}$$

e dunque la lineare indipendenza di $B = \{\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$ garantisce che $\lambda_i = \mu_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Pertanto non esistono due combinazioni lineari ottenute con scalari distinti che forniscono lo stesso vettore. ■

Esempio 5.30. Si considerino gli insiemi $\{(1,0),(0,1)\}$, $\{(1,0),(1,1)\}$, $\{(2,0),(1,1)\}$, $\{(1,0),(0,2)\}$,... Il lettore puó facilmente verificare che sono tutte basi di $\mathbb{R}^2$. Invece, si verifichi che ogni insieme costituito da 3 o piú vettori non é una base per $\mathbb{R}^2$, perché é linearmente dipendente, e che ogni insieme costituito da un solo vettore non é una base per $\mathbb{R}^2$ perché non é un insieme di generatori per $\mathbb{R}^2$.

Ogni spazio vettoriale é dotato di infinite basi, come dimostra l'esempio precedente, che tuttavia sono accomunate dal fatto che hanno tutte la stessa cardinalitá, come dimostra il seguente teorema.

Teorema 5.31. *[Teorema della dimensione] Sia V uno spazio vettoriale (generato da un numero finito di vettori) e siano $B = \{\boldsymbol{b_1}, ..., \boldsymbol{b_h}\}$ e $C = \{\boldsymbol{c_1}, ..., \boldsymbol{c_k}\}$ due basi per V. Allora $h = k$, ossia B e C hanno lo stesso numero di vettori. In particolare, tutte le basi di V hanno la stessa cardinalitá.*

DIMOSTRAZIONE. [Richiede la conoscenza della teoria dei sistemi di eq. lineari] La dimostrazione si ottiene per doppia disuguaglianza. Supponiamo sia $k < h$. Se B é una base di V, allora ogni vettore di C potrá essere espresso come combinazione lineare dei vettori di B. Avremo pertanto:

$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{c}_1 & = & \lambda_{11}\boldsymbol{b_1} + \dots + \lambda_{1k}\boldsymbol{b}_k \\ \dots & & \dots \\ \boldsymbol{c}_h & = & \lambda_{h1}\boldsymbol{b_1} + \dots + \lambda_{hk}\boldsymbol{b}_k \end{array} \tag{5.1}$$

Costruiamo adesso una combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_h$ ed imponiamo che sia uguale al vettore null:

$$\gamma_1 \boldsymbol{c}_1 + \dots + \gamma_h \boldsymbol{c}_h = \mathbf{0},$$

allora

$$\gamma_1(\lambda_{11}\boldsymbol{b_1} + \dots + \lambda_{1k}\boldsymbol{b}_k) + \dots + \gamma_h(\lambda_{h1}\boldsymbol{b_1} + \dots + \lambda_{hk}\boldsymbol{b}_k) = \mathbf{0}$$

.

Risulta associando i coefficienti in maniera diversa che

$$(\gamma_1\lambda_{11} + \dots + \gamma_h\lambda_{h1})\boldsymbol{b}_1 + \dots + (\gamma_1\lambda_{1k} + \dots + \gamma_h\lambda_{hk})\boldsymbol{b}_k = \mathbf{0}.$$

Poiché i vettori $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ costituiscono una base, i coefficienti di combinazione devono essere tutti nulli. Risulta allora

$$\begin{cases} \gamma_1\lambda_{11} + \cdots + \gamma_h\lambda_{h1} = 0 \\ \ldots \\ \gamma_1\lambda_{1k} + \cdots + \gamma_h\lambda_{hk} = 0. \end{cases}$$

Si tratta di un sistema lineare omogeneo nelle incognite $\gamma_1, \ldots, \gamma_h$. Si tratta di un sistema lineare omogeneo di k equazioni in h incognite, con $h > k$, dunque per il teorema di Rouché -Capelli il sistema ammette infinite soluzioni $\gamma_1, \ldots, \gamma_h$ e dunque ció contraddice la lineare indipendenxa dei vettori di C, dunque $h \leq k$. Scambiando i ruoli fra B e C e fra h e k si ottiene l'asserto. ■

Si osservi che la dimostrazione teorema 5.31 contiene la dimostrazione di un enunciato noto in letteratura come Lemma di Steinitz, che presentiamo per completezza.

Lemma 5.32 (Lemma di Steinitz)**.** *Siano $S = \{\boldsymbol{s_1}, ..., \boldsymbol{s_p}\}$ e $T = \{\boldsymbol{t_1}, ..., \boldsymbol{t_q}\}$ insiemi di vettori di uno spazio vettoriale V, tali che T é linearmente indipendente ed ogni vettore di T dipende linearmente da S. Allora necessariamente $q \leq p$.*

Definizione 5.33. Sia V uno spazio vettoriale. Si definisce **dimensione** dello spazio vettoriale V la cardinalitá di una sua qualsiasi base, e si indica col simbolo $dimV$.

Osservazione 5.34. Il Teorema sulla dimensione comporta delle importanti conseguenze sulla cardinalitá degli insiemi linearmente indipendenti e degli insiemi di generatori. Infatti, se V é uno spazio vettoriale di dimensione n, allora si dimostra che un qualsiasi sottoinsieme di V che abbia piú di n vettori é linearmente dipendente; se invece ha meno di n vettori allora si prova che non puó essere un insieme di generatori. Le dimostrazioni sono omesse.

Corollario 5.35. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Allora*

- *Ogni insieme di generatori di V costituito da n vettori é una base per V;*
- *Ogni insiemi linearmente indipendente costituito da n vettori é una base per V.*

É facile verificare che la dimensione dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ é n, infatti i vettori $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ sono un sitema di generatori ed in insieme linearmente indipendente. La seguente definizione dá un nome a questa base.

Definizione 5.36. Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, si definisce **base canonica** l'insieme di vettori unitari $B = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$.

Definizione 5.37 (Coordinate di un vettore v)**.** Sia V uno spazio vettoriale e sia $B = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ una **base ordinata** per V, cioé una base in cui i vettori sono ordinati.

Il vettore v puó essere espresso in unico modo come combinazione lineare dei vettori di B:

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{u}_n,$$

cioé i coefficienti di combinazione sono univocamente determinati.

Il vettore $\boldsymbol{c} = \{\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n\}$ é chiamato il [vettore di coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto a B e si indica con $[\boldsymbol{v}]_B$.

Si osservi dunque che se V é uno spazio vettoriale di dimensione n, allora eiste una funzione biettiva e *lineare* che associa ad ogni vettore di V un vettore (un'ennupla cioé) di $\mathbb{R}^n$. Per convincersi di ció é sufficiente considerare che, fissata una base ordinata B in V e la base canonica $\mathcal{E}$ in $\mathbb{R}^n$, ad ogni vettore $v \in V$ si puó associare l'ennupla delle sue coordinate rispetto a B, che costiuisce un vettore di $\mathbb{R}^n$. Immediatamente si verifica che viceversa ad ogni ennupla in $\mathbb{R}^n$ si associa il vettore $v \in V$ che ammette questa ennupla come l'ennupla delle sue coordinate. La linearitá della funzione cosí definita sará discussa quando parleremo di applicazioni lineari. A tale applicazione successivamente daremo il nome di isomorfismo.

Il paragrafo si conclude con un importante teorema, che nasce da questa osservazione: il corollario 5.35 assicura che in uno spazio vettoriale V di dimensione n, ogni sottoinsieme di n vettori linearmente indipendenti costituisce una base per V. Si supponga di scegliere un sottoinsieme di m vettori linearmente indipendenti di V, con $m < n$. Ci si chiede se é possibile aggiungere a quest'ultimo insieme $n - m$ vettori, in modo che il nuovo insieme ottenuto sia ancora linearmente indipendente, e che quindi, avendo cardinalitá n, costituisca una base per V, in virtú del precedente corollario. Il prossimo teorema risponde in maniera affermativa al problema posto.

Teorema 5.38 (Teorema del completamento)**.** *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia S un sottoinsieme di m vettori di V che sia linearmente indipendente, con $m \leq n$. Allora, esiste un unico sottoinsieme T di V, costituito da $n-m$ vettori tale che $S \cup T$ sia linearmente indipendente e quindi sia una base per V.*

DIMOSTRAZIONE. Se $m = n$, la tesi é verificata per il corollario precedente. Sia dunque $m < n$ e si consideri il sottospazio $W =< S >$. Allora W é un sottospazio proprio di V, ovvero esiste almeno un vettore $\boldsymbol{v_1} \in V \backslash W$. Poiché $\boldsymbol{v_1} \notin W$, allora non é esprimibile come combinazione lineare dei vettori di S, ossia $\boldsymbol{v_1}$ é linearmente indipendente da S. Pertanto l'insieme $S_1 = S \cup \{\boldsymbol{v_1}\}$ é linearmente indipendente.

Si consideri ora il sottospazio vettoriale $W_1 =< S_1 >$. Se $W_1 = V$, allora S_1 é una base per V, ossia $n = m + 1$ e, posto $T = \{\boldsymbol{v_1}\}$, si ottiene la tesi. Se invece W_1 é un sottospazio proprio di V, allora, ragionando come

Iterando il ragionamento, si osservi che il procedimento si ferma esattamente dopo $n - m$ passi, in quanto a tal punto si ottiene un insieme linearmente indipendente costituito da n vettori, che per il Corollario 5.35, costituisce una base per V. Quindi, definito T come l'insieme di questi $n - m$ vettori, l'asserto é provato. ■

In pratica, il teorema precedente assicura che ogni insieme di vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale puó essere "completato" in modo che diventi una base per lo spazio vettoriale stesso.

Operativamente in $\mathbb{R}^n$ si osservi che assegnato insieme di vettori linearmene indipendente, per completare questo insieme fino ad ottenere una base di $\mathbb{R}^n$ é sufficiente mettere i vettori assegnati in una matrice, ridurre a scala la matrice cosí ottenuta ed immettere in fondo tante righe costituite dai vettori della base canonicia in modo che la matrice resti a scala.

Esempio 5.39. Completare l'insieme $\{(2, 3, 3, 4), (1, 0, 3, 1)\}$ in una base di $\mathbb{R}^4$.

Si scriva

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

riducendo a scala la matrice si ottiene

$$S == \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix},$$

Dunque considerando la matrice

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

si ottiene la base cercata considerando i vettori $\{(2, 3, 3, 4), (1, 0, 3, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

5.3 Sottospazi

Abbiamo giá osservato che l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo costituisce un sottospazio, mentre l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogneo o di un sistema di equazioni non lineari non rappresenta un sottospazio.

Va osservato che il sistema lineare omogeneo che rappresenta il sottospazio d'ługo a quella che si chiama *rappresentazione cartesiana* di un sottospazio.

Sappiamo pure che é possibile descrivere un sottospazio come spazio vettoriale generato dai vettori di una sua base, oppure che ´e possibile descrivere un sottospazio mediante quella che si dice una *rappresentazione parametrica*, cioé mediante la descrizione dei vettori che vi appartengono in termini di componenti dipendenti in modo lineare ed omogeneo da parametri reali.

Tutte queste rappresentazioni sono fra loro equivalenti.

É possibile passare da una rappresentazione cartesiana ad una parametrica e viceversa, ed ancora passare da una rappresentazione cartesiana e/o parametrica ad una in termini di spazio generato da una base.

Operativamente, assegnata una rappresentazione cartesiana, occorre applicare il teorema di Rouché-Capelli ottenendo la dimensione del sottospazio esattamente come dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema. Poi risolvendo il sistema rispetto alle variabili libere si ottiene una rappresentazione parametrica del sottospazio. Viceversa eliminando i parametri da una rappresentazione parametrica si ottiene una rappresentazione cartesiana.

Chiaramente assegnando tante ennuple di valori arbitrari ai parametri, quanti sono i parametri ma non tutti nulli e non linearmente dipendenti si ottiene una base del sottospazio assegnato. Viceversa assegnando una base del sottospazio, é sufficiente scrivere la generica combinazione lineare del sottospazio per ottenerne una rappresentazione parametrica.

Per ottenere poi una rappresentazione cartesiana da una rappresentazione in termini di base, o si procede come sopra, determinando preliminarmente una rappresentazione parametrica oppure si scrive una matrice le cui prime righe sono i vettori della base assegnata e poi si inserisce una riga del tipo $(x_1, \ldots, x_n)$ (dove n é la dimensione dello spazio ambiente). Osservando che $(x_1, \ldots, x_n)$ deve dipendere linearmente dai vettori della base, affinché appartenga al sottospazio da questi generato, riducendo a scala la matrice si deve annullare l'ultima riga, il che fornisce esattamente le equazioni lineari ed omogenee che danno la rappresentazione cartesiana cercata.

Si osservi pure che non vi é unicitá di rappresentazioni parametriche e/o cartesiane per un sottospazio.

Esempio 5.40. Sia $V =< (1, 2, 0), (1, 0, 1) >$. Una rappresentazione parametrica di V é

$$V = \{(s + t, 2s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Una rappresentazione cartesiana si ottiene da questa parametrica eliminando i parametri: se $y = s$ e $z = t$, rispettivamente penultima ed ultima componente del generico vettore di V, si ha che $x = \frac{1}{2}y + z$ e dunque la rappresentazione cartesiana cercata é $x - \frac{1}{2}y - z = 0$.

Per ottenere la rappresentazione cartesiana direttamente dalla base basta considerare la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{bmatrix},$$

ridurla a scala ed annullare l'ultima riga. Si ottiene

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & y - 2x & z \end{bmatrix},$$

da cui, schermando la matrice

$$A'' = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & z + \frac{1}{2}y - x \end{bmatrix},$$

da cui annullando l'ultima riga si ottiene il sistema lineare cercato.

Sia W il sottospazio descritto dal sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}.$$

Il teorema di Rouché-Capelli dice che la dimensione di W é 1 poiché ci sono due equazioni linearmente indipendenti in 3 incognite. Se si pone $x = s$ si ottiene la seguente rappresentazione parametrica.

$$V = \{(s, s, -s) : s \in \mathbb{R}\}.$$

Si capisce pure che una base é data da $\{(1, 1, -1)\}$ assegando ad s, nella rappresentazione parametrica il valore 1.

5.4 Sottospazio somma e sottospazio intersezione

Definizione 5.41. Sia V uno spazio vettoriale e siano U e W due suoi sottospazi. Si definiscono il **sottospazio somma** e il **sottospazio intersezione** di U e W ponendo:

$$U + W = \{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} | \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{w} \in W\}$$

$$U \cap W = \{\boldsymbol{v} | \boldsymbol{v} \in U, \boldsymbol{v} \in W\}.$$

La verifica che gli insiemi della definizione precedente sono sottospazi vettoriali é un esercizio semplice. Bisogna verificare che sono soddisfatte le due proprietá della Definizione 5.8.

La seguente formula á di importanza cruciale nello sviluppo della teoria. Essa lega le dimensioni dei sottospazi somma e intersezione di U e W.

Teorema 5.42 (Formula di Grassman)**.** *Sia V uno spazio vettoriale e siano U e W due suoi sottospazi. Le dimensioni dei sottospazi somma e intersezione di U e W sono legate dalla seguente formula:*

$$dim(U+W) = dimU + dimW - dim(U \cap W)$$

DIMOSTRAZIONE. Si consideri una base $\{\boldsymbol{b_1}, ..., \boldsymbol{b_r}\}$ di $U \cap W$ e si completi tale insieme come base di U e come base di W, con il procedimento del Teorema del completamento. Si ottiene quindi una base $\{\boldsymbol{b_1}, ..., \boldsymbol{b_r}, \boldsymbol{u_1}, ..., \boldsymbol{u_s}\}$ di U e una base $\{\boldsymbol{b_1}, ..., \boldsymbol{b_r}, \boldsymbol{w_1}, ..., \boldsymbol{w_t}\}$ di W. Si dimostra, ma i passaggi intermedi qui sono omessi, che l'insieme $\{\boldsymbol{b_1}, ..., \boldsymbol{b_r}, \boldsymbol{u_1}, ..., \boldsymbol{u_s}, \boldsymbol{w_1}, ..., \boldsymbol{w_t}\}$ costituisce una base per $U+W$. Pertanto risulta:

$$dim(U+W) = r+s+t = (r+s)+(r+t)-r = dimU + dimW - dim(U \cap W)$$

e la dimostrazione é completa. ■

Una rappresentazione cartesiana dell'interesezione di due sottospazi U eV si ottiene immediatamente considerando il sistema ottenibile considerando sia le equazioni della rappresentazione cartesiana di U sia di V.