

Segnali e sistemi nel dominio della frequenza

La rappresentazione dei segnali mediante δ -impulsi, definita dalla formula di riproducibilità ci ha consentito di ricavare il legame di convoluzione tra ingresso e uscita di un sistema LTI. L'analisi in frequenza è invece basata sulla rappresentazione dei segnali come combinazione lineare di esponenziali complessi.

Cominciamo ad esaminare l'uscita di un sistema ad un fasore, come illustrato in figura per un sistema continuo o discreto.



Sia $x(t) = e^{j2\pi ft}$ l'ingresso di un sistema LTI continuo avente risposta impulsiva $h(t)$, la corrispondente uscita è data da

$$y(t) = h(t) * e^{j2\pi ft} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j2\pi f(t-\tau)} d\tau = e^{j2\pi ft} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau}_{H(f)} = H(f) e^{j2\pi ft}$$

dove si è posto

$$H(f) = \left. \frac{y(t)}{x(t)} \right|_{x(t)=e^{j2\pi ft}}$$

Tale relazione definisce al variare di f la *risposta in frequenza* del sistema LTI che, quindi, è il rapporto uscita/ingresso nel dominio del tempo in regime fasoriale.

Analogamente, nel caso discreto, se il sistema ha risposta impulsiva $h(n)$, per un ingresso esponenziale $x(n) = e^{j2\pi vn}$, si ha

$$y(n) = h(n) * e^{j2\pi vn} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) e^{j2\pi v(n-m)} = e^{j2\pi vn} \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) e^{-j2\pi vm}}_{H(v)} = H(v) e^{j2\pi vn}$$

dove

$$H(\nu) = \left. \frac{y(n)}{x(n)} \right|_{x(n)=e^{j2\pi\nu n}}$$


è la risposta in frequenza del sistema LTI discreto.

Quindi, nel caso dei sistemi continui la risposta in frequenza è legata alla risposta impulsiva dalla relazione

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

e, analogamente, per i sistemi a tempo discreto

$$H(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j2\pi\nu n}$$

 L'interpretazione della risposta in frequenza come rapporto uscita/ingresso nel dominio del tempo in regime fasoriale individua un metodo operativamente valido per la misura della risposta in frequenza di un sistema in cui il sistema LTI viene sottoposto a una serie di sollecitazioni di tipo fasoriale, in modo da ricavare per punti la funzione $H(f)$ o $H(\nu)$.

Alternativamente, la relazione tra risposta impulsiva e risposta in frequenza mostra che una volta calcolata la risposta impulsiva è possibile trasformarla con metodi numerici o analitici per calcolare la risposta in frequenza.

Esempio 1: Risposta in frequenza di un elemento di ritardo

L'elemento di ritardo unitario discreto è definito dal legame ingresso-uscita

$$y(n) = x(n - 1)$$

L'uscita, corrispondente all'ingresso $e^{j2\pi\nu n}$ è

$$y(n) = e^{j2\pi\nu(n-1)} = e^{j2\pi\nu n} e^{-j2\pi\nu}$$

da cui risulta che la risposta in frequenza è data da

$$H(\nu) = e^{-j2\pi\nu}$$

Nello stesso modo si vede che una linea di ritardo, cioè un sistema continuo definito dal legame ingresso-uscita $y(t) = x(t - T)$ ha come risposta in frequenza $H(f) = e^{-j2\pi fT}$.

Esempio 2: Risposta in frequenza di un sistema ARMA

Si consideri il sistema ARMA definito dall'equazione alle differenze

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)$$

Posto $x(n) = e^{j2\pi\nu n}$ e quindi $y(n) = H(\nu)e^{j2\pi\nu n}$ nell'equazione alle differenze si ottiene

$$H(\nu) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k e^{-j2\pi\nu k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k e^{-j2\pi\nu k}}$$

Esempio 3: Risposta in frequenza di un filtro RC

Con riferimento al filtro RC, per $x(t) = e^{j2\pi ft}$, si ha:

$$y(t) = e^{j2\pi ft} \frac{\frac{1}{j2\pi fC}}{R + \frac{1}{j2\pi fC}} = e^{j2\pi ft} \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

Quindi la risposta armonica di un filtro RC risulta

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} = \frac{1}{1 + jf/f_c}$$

dove $f_c = 2\pi(RC)$ è la frequenza di taglio a 3 dB del filtro, corrispondente al fatto che per $f = f_c$ si ha $|H(f)| = 1/\sqrt{2}$, cioè il rapporto fra le ampiezze di uscita e di ingresso è pari a -3 dB.

Risposta in regime sinusoidale

È semplice, per sistemi reali, ricavare la risposta in frequenza a partire da un ingresso di tipo sinusoidale. Si consideri quindi l'ingresso

$$x(t) = A_x \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

da cui

$$y(t) = \underbrace{A|H(f_0)|}_{A_y} \cos[2\pi f_0 t + \underbrace{\varphi + \angle H(f_0)}_{\varphi_y}]$$

cioè la risposta ad una senoide di frequenza f_0 ampiezza A e fase iniziale φ è ancora una senoide della stessa frequenza f_0 , avente ampiezza A_y e fase iniziale φ_y date da

$$A_y = |H(f_0)|A \quad \varphi_y = \angle[H(f_0)] + \varphi$$

La relazione precedente definisce un metodo pratico, e largamente usato, per ricavare sperimentalmente modulo e fase della risposta in frequenza di un sistema incognito valutando il rapporto fra le ampiezze e lo sfasamento fra due sinusoidi rispettivamente in uscita e in ingresso al sistema; quindi, se si desidera la risposta in frequenza a diverse frequenze occorre variare la frequenza delle sinusoidi in ingresso esplorando tutto il campo desiderato.

Trasformata di Fourier di segnali a tempo continuo e tempo discreto

Si riportano le definizioni di trasformata di Fourier sottolineando similitudini e differenze tra segnali a tempo discreto e a tempo continuo.

► L'analisi dei paragrafi precedenti evidenzia l'utilità di rappresentare i segnali come sovrapposizione di fasori. Per segnali continui l'equazione che definisce tale rappresentazione (*equazione di sintesi*) è

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

e i coefficienti sono dati da (*equazione di analisi*)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Analogamente per segnali discreti l'equazione di sintesi è

$$x(n) = \int_{-1/2}^{+1/2} X(v) e^{j2\pi vn} dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(\theta) e^{j2\pi vn} d\theta$$

e quella di analisi

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi vn} \quad X(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\theta n}$$


► La funzione $X(\cdot)$, indipendentemente dal parametro frequenziale utilizzato (ω , f , θ o v), si chiama *Trasformata di Fourier* o *spettro* del segnale $x(\cdot)$.

Lo spettro è una funzione complessa e pertanto è spesso conveniente considerarne la parte reale e la parte immaginaria, ovvero il modulo e la fase: questi ultimi vengono comunemente denominati *spettro d'ampiezza* e, rispettivamente, *spettro di fase*. Nel seguito, per indicare sinteticamente il legame di trasformazione secondo Fourier useremo la scrittura:

$$X(\cdot) = \mathcal{F}\{x(\cdot)\} \quad x(\cdot) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\cdot)\}$$

o anche

$$x(\cdot) \longleftrightarrow X(\cdot)$$

 La principale differenza tra la rappresentazione spettrale di segnali continui e discreti deriva dalla periodicità in frequenza del fasore discreto $e^{j2\pi v n}$. Per segnali discreti lo spettro $X(v)$ di una sequenza è sempre periodico di periodo 1 (ovvero $X(\theta)$ è periodico di periodo 2π), pertanto è sufficiente considerare $X(v)$ nell'intervallo $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ (ovvero $X(\theta)$ nell'intervallo $(-\pi, \pi)$).

► Il legame ingresso uscita nel dominio della frequenza per un sistema LTI segue immediatamente dal principio di sovrapposizione: infatti esprimendo l'ingresso $x(t)$ come sovrapposizione di fasori,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

si ottiene immediatamente la corrispondente rappresentazione dell'uscita in termini di fasori, cioè

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) X(f) e^{j2\pi f t} df$$


Un analogo risultato vale per segnali e sistemi discreti.

Da tale equazione segue che gli spettri dell'ingresso e dell'uscita sono legati alla risposta in frequenza del sistema da

$$Y(\cdot) = X(\cdot) H(\cdot)$$

da cui segue che il legame per gli spettri di ampiezza e di fase è dato da

$$|Y(\cdot)| = |X(\cdot)| |H(\cdot)| \quad \angle Y(\cdot) = \angle X(\cdot) + \angle H(\cdot)$$

 Il legame ingresso/uscita nel dominio della frequenza evidenzia come i sistemi LTI abbiano un comportamento selettivo in frequenza: alcune componenti dell'ingresso sono amplificate, altre attenuate o eliminate del tutto; tale proprietà è denominata capacità di filtraggio e spiega l'impiego del termine filtro come sinonimo di sistema.

Definizione di Banda di un segnale

La banda di un segnale può essere definita come l'insieme di frequenze occupate dalle componenti significative dello spettro. A tal fine, considerato un opportuno multiplo della frequenza di taglio a 3 dB, ad esempio, posto $B = 10f_0$ (banda monolatera) risulta che le componenti esterne all'intervallo $(-B, B)$ sono attenuate di almeno 23 dB rispetto a quella di centrobanda; in altri termini si ha

$$20 \log \left| \frac{X(f)}{X(0)} \right| \geq -23 \text{ dB} \quad \forall |f| > B$$

Esempi di trasformate

In seguito, si riportano alcuni esempi di trasformata di Fourier. Lo studente è incoraggiato a prestare attenzione a tali derivazioni al fine di acquisire familiarità con il metodo di trasformazione di Fourier.

Impulso esponenziale monolatero continuo

Consideriamo un impulso esponenziale monolatero di ampiezza A e costante di tempo T , cioè il segnale $x(t) = Ae^{-t/T} u(t)$. Dall'equazione di sintesi si ha

$$X(f) = \int_0^{+\infty} Ae^{-t/T} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{AT}{1 + j(2\pi fT)}$$

e quindi

$$Ae^{-t/T} u(t) \longleftrightarrow \frac{AT}{1 + j(2\pi fT)}$$

In particolare spettro d'ampiezza e di fase sono dati da:

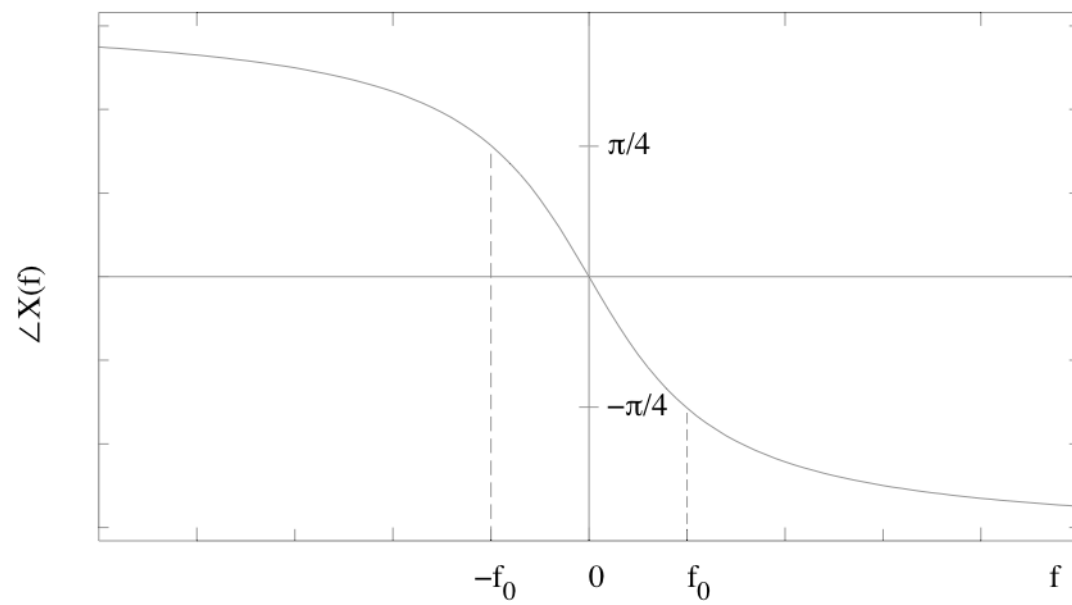
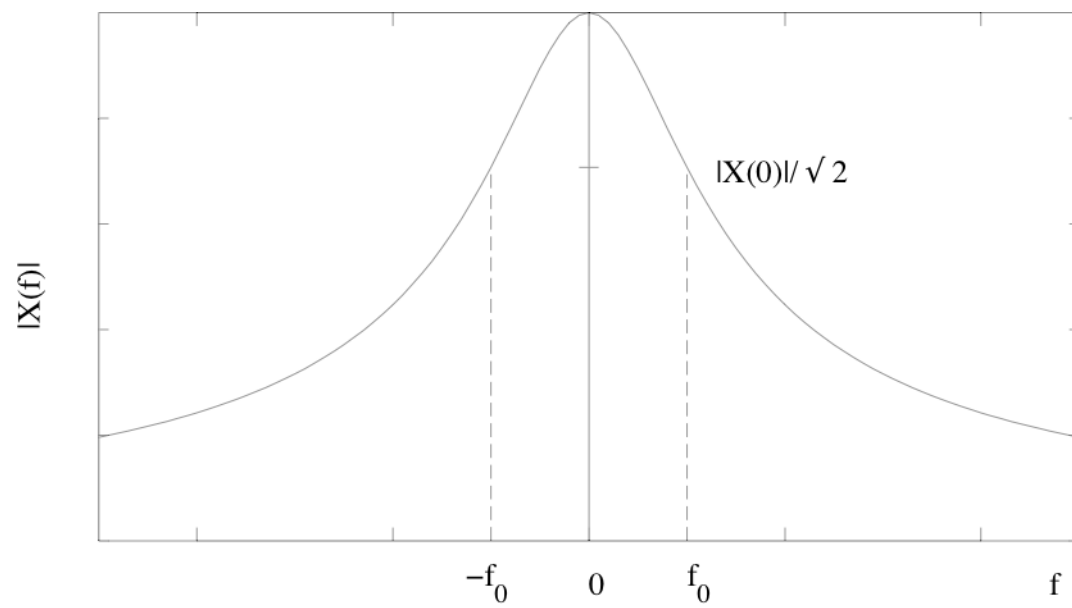
$$|X(f)| = \frac{AT}{\sqrt{1 + (2\pi fT)^2}} \quad \angle X(f) = -\arctan(2\pi fT)$$

e sono riportati in figura.

Si noti che lo spettro d'ampiezza è massimo per $f = 0$ e ed è concentrato nell'intorno della frequenza zero (spettro passabasso); inoltre la frequenza $f_0 = 1/(2\pi T)$ è la frequenza di taglio a 3 dB avendosi

$$20\log \left| \frac{X(f)}{X(0)} \right|_{f=f_0} = 10\log \frac{1}{1 + (2\pi fT)^2} \Big|_{f=f_0} = -3 \text{ dB}$$

Al diminuire della costante di tempo T diminuisce la durata del segnale, ma aumenta la sua banda.



Impulso esponenziale bilatero continuo

L'impulso esponenziale bilatero continuo è il segnale

$$x(t) = e^{-a|t|} \quad a > 0$$

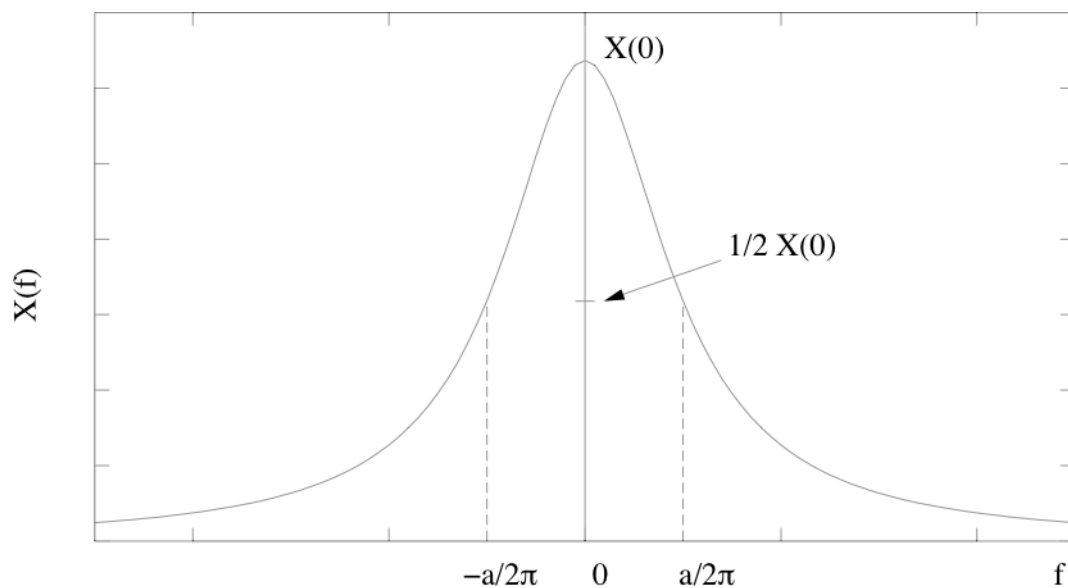
ed il suo spettro si calcola come

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

Pertanto risulta

$$e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

Lo spettro $X(f)$ è reale e pari ed è rappresentato nella figura seguente. Anche l'impulso esponenziale è un segnale passa-basso ed a è la pulsazione di taglio a 6 dB.



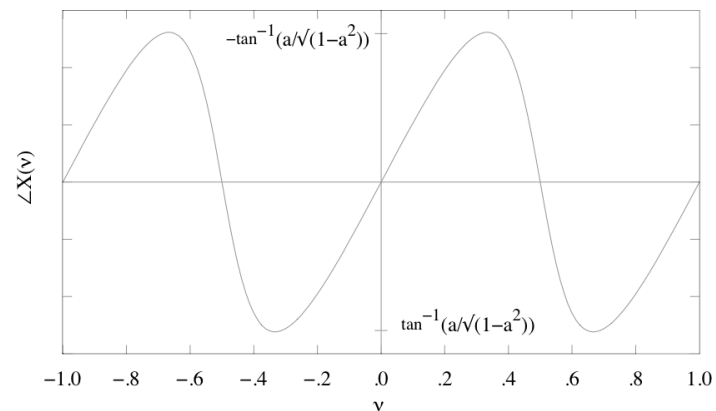
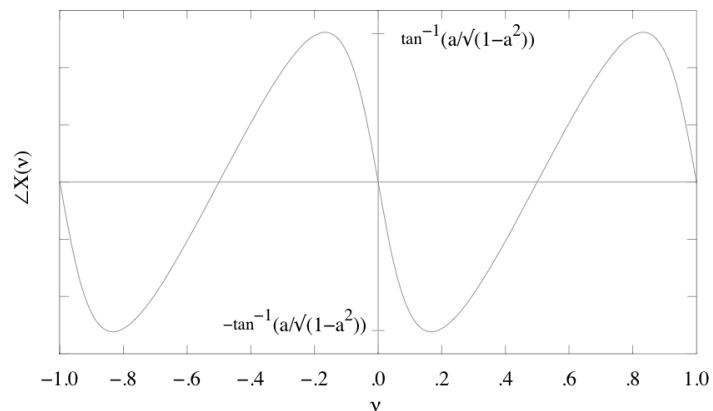
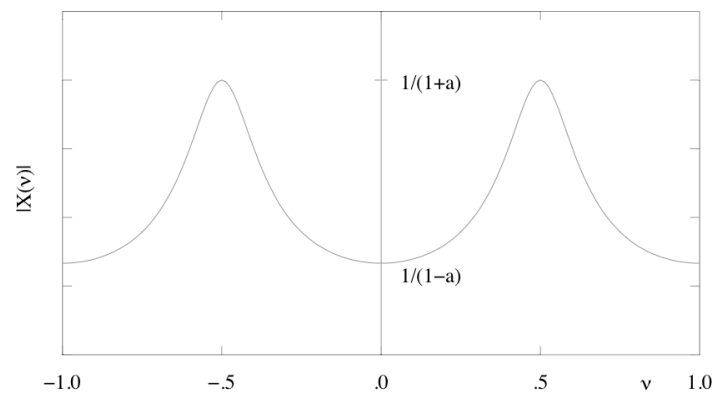
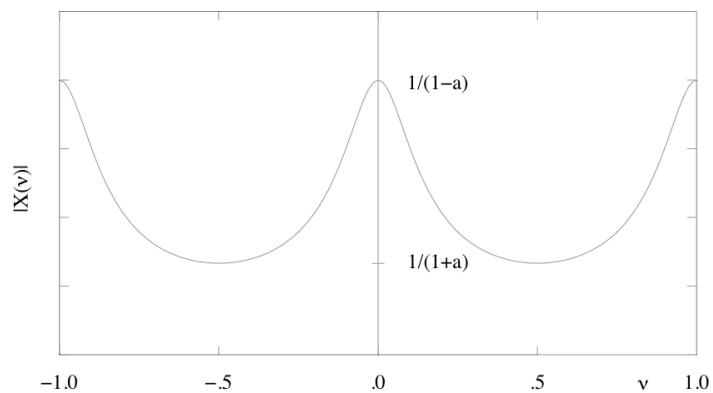
Sequenza esponenziale monolatera

La sequenza esponenziale monolatera è il segnale

$$x(n) = a^n u(n) \quad |a| < 1$$

Dall'equazione di analisi si ottiene

$$X(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n) e^{-j\theta n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a e^{-j\theta})^n = \frac{1}{1 - a e^{-j\theta}}$$



► In figura sono riportati gli spettri d'ampiezza e fase rispettivamente per $a > 0$ e per $a < 0$. Per $a > 0$ la sequenza è un segnale passa-basso, mentre per $a < 0$ lo spettro è concentrato nell'intorno delle frequenze $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots$ (segnale passa-alto). Il valore di $|a|$ regola la rapidità di decadimento della sequenza nel dominio del tempo e la larghezza di banda nel dominio della frequenza: precisamente al diminuire di $|a|$ la sequenza va sempre più rapidamente a zero mentre la sua banda aumenta.

Sequenza esponenziale bilatera

Si consideri la sequenza esponenziale bilatera

$$x(n) = a^{|n|} \quad |a| < 1$$

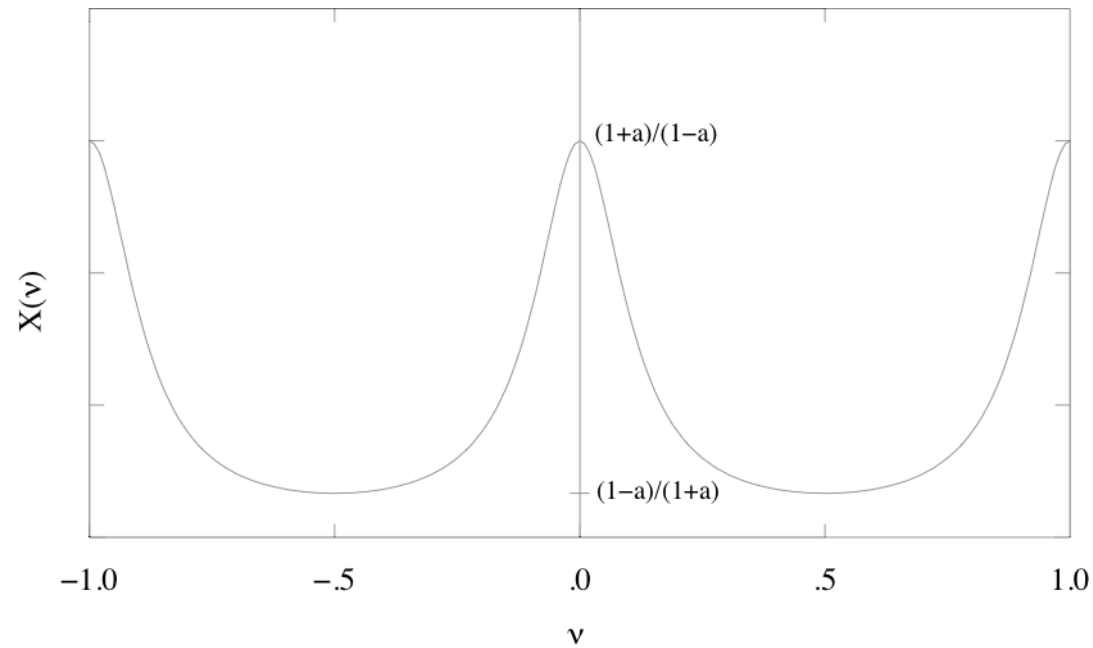
La sua trasformata è

$$X(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\theta n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\theta n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\theta})^n + \sum_{k=1}^{+\infty} (ae^{j\theta})^k$$

La prima sommatoria è la serie geometrica di ragione $ae^{-j\theta}$ e la seconda sommatoria è la serie geometrica di ragione $ae^{j\theta}$ mancante del primo termine, quindi si ha

$$X(\theta) = \frac{1}{1 - ae^{-j\theta}} + \frac{1}{1 - ae^{j\theta}} - 1 = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \theta + a^2}$$

Lo spettro della sequenza esponenziale bilatera è reale e pari; inoltre il segnale è passa-basso, per $0 < a < 1$, mentre per $a < 0$ è passa-alto.



Impulso rettangolare

Consideriamo un impulso rettangolare di ampiezza A e durata T

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

La sua trasformata è

$$X(f) = A \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} e^{-j2\pi ft} dt = A \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} = AT \text{sinc}(fT)$$

Il segnale è passa-basso e come larghezza di banda si può assumere la semiampiezza $1/T$ del lobo principale (banda monolaterale); in tal caso, le componenti fuori banda sono attenuate rispetto a quella a frequenza zero di almeno 13.2dB.

Impulso rettangolare a tempo discreto

Si consideri la finestra rettangolare $x(n) = \mathcal{R}_N(n)$; il suo spettro si può calcolare come

$$X(v) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi v n} = \frac{1 - e^{-j2\pi v N}}{1 - e^{-j2\pi v}}$$

da cui, mettendo in evidenza $e^{-j\pi v N}$ al numeratore e $e^{-j\pi v}$ al denominatore, si ha

$$\mathcal{R}_N(n) \longleftrightarrow \mathcal{D}_N(v)$$

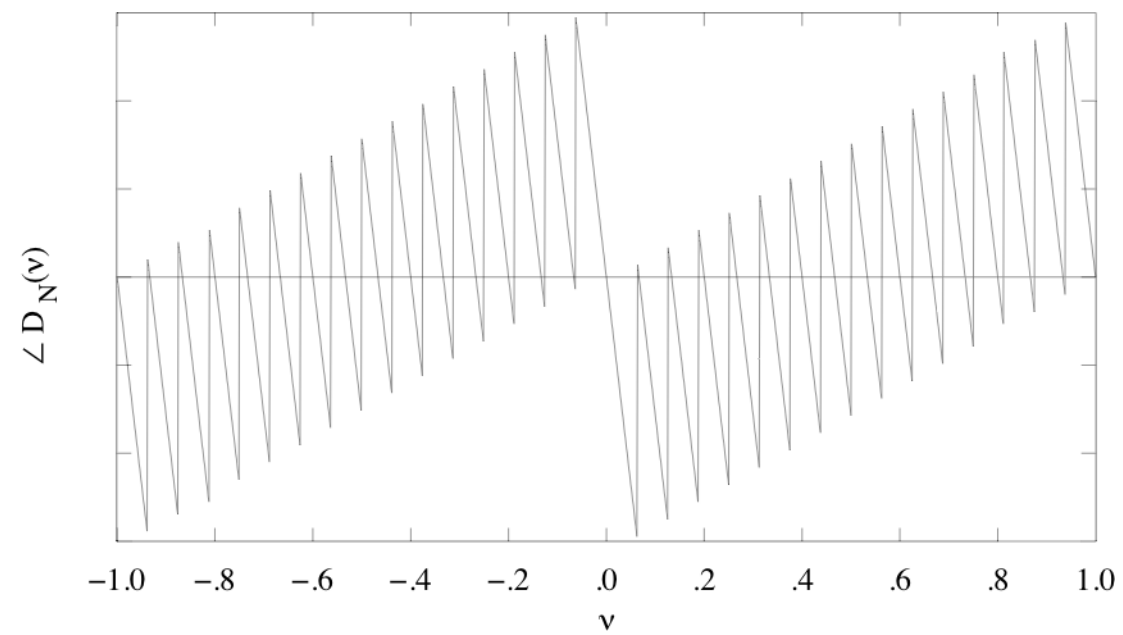
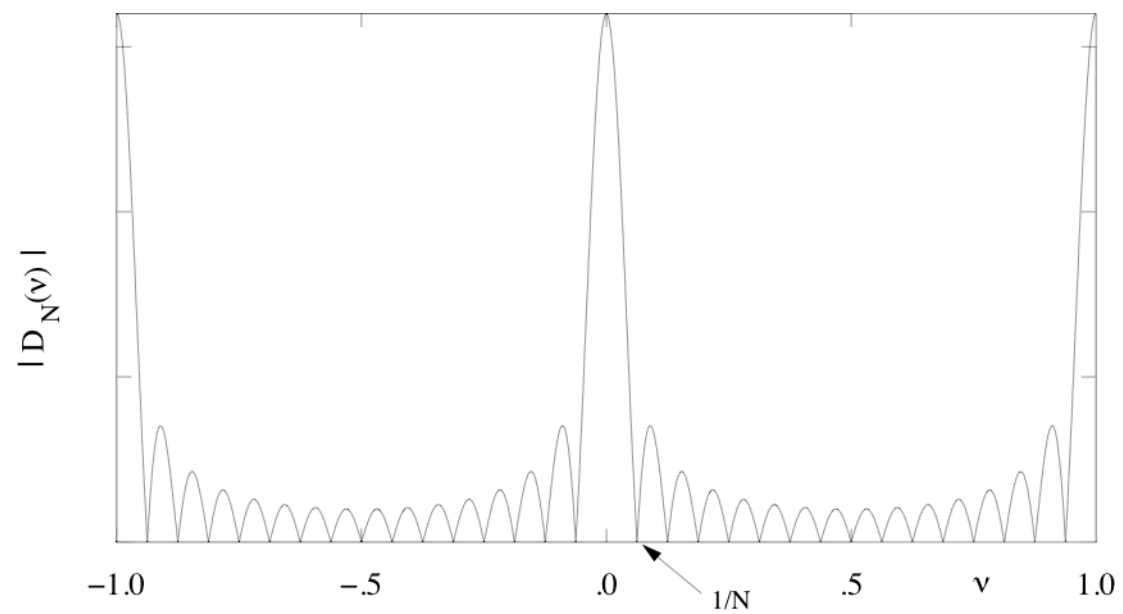
dove si è introdotta la funzione di Dirichlet

$$\mathcal{D}_N(v) = \frac{\sin(\pi v N)}{\sin(\pi v)} e^{-j(N-1)\pi v}$$

La finestra rettangolare è stata definita in modo non simmetrico rispetto all'origine per cui la sua trasformata non è puramente reale. Lo spettro ha un massimo nell'origine mentre gli zeri si trovano alle frequenze k/N , $k = 1, 2, \dots, N-1$. Alle frequenze multiple di N lo spettro ha ampiezza unitaria. L'ampiezza A_1 del primo lobo laterale, rapportata all'ampiezza A_0 del lobo centrale, è leggermente dipendente da N , secondo la tabella

N	3	4	5	10	∞
$(A_1/A_0)_{dB}$	-9,54	-11,30	-12,04	-12,17	-13,26

per $N > 10$ il rapporto $(A_1/A_0)_{dB}$ si può ritenere approssimativamente costante e pari a -13 dB , tendendo asintoticamente ($N \rightarrow \infty$) a $-13,26\text{ dB}$, cioè al valore che compete all'impulso rettangolare a tempo continuo.



Proprietà della trasformata di Fourier

In questa sezione analizziamo le proprietà della trasformata di Fourier che, per la maggior parte, valgono indifferente-mente sia per le forme d'onda che per le sequenze; pertanto, per evitare inutili duplicazioni, le proprietà saranno espresse (quando possibile) con riferimento ad un argomento generico, denotato con il simbolo (\cdot) . Conformemente all'uso adottato sinora, i segnali nel dominio del tempo vengono denotati con la lettera minuscola e le loro trasformate con le corrispondenti maiuscole. Le proprietà vengono date senza dimostrazione, l'enfasi essendo piuttosto sulla loro applicazione.

► Linearità

È immediato verificare che la trasformata di Fourier è lineare, cioè risulta:

$$a_1x_1(\cdot) + a_2x_2(\cdot) \longleftrightarrow a_1X_1(\cdot) + a_2X_2(\cdot)$$

In altri termini lo spettro di una combinazione lineare di segnali è la combinazione lineare, con gli stessi coefficienti, dei singoli spettri (principio di sovrapposizione).

► Dualità

$$x(t) \longleftrightarrow X(f) \implies X(t) \longleftrightarrow x(-f)$$

Esempio: Impulso sinc(\cdot)

Consideriamo l'impulso sinc(\cdot) di ampiezza A e banda B , cioè il segnale

$$x(t) = A \operatorname{sinc}(2Bt)$$

Dalla proprietà di dualità segue che

$$A \operatorname{sinc}(2Bt) \longleftrightarrow \frac{A}{2B} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Si osservi che l'impulso sinc(\cdot) costituisce un primo esempio di segnale a banda rigorosamente limitata, cioè il suo spettro è identicamente zero al di fuori della gamma di frequenze $-B < f < B$ (banda).

Impulsi ideali

La trasformata dell'impulso ideale a tempo discreto si può calcolare come

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n) e^{-j2\pi v n} = 1$$

Analogamente nel caso dell'impulso ideale continuo si ottiene

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

Le corrispondenti equazioni di sintesi forniscono due proprietà degli esponenziali:

$$\delta(n) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{j2\pi n v} dv$$

e rispettivamente:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f t} df$$

Si noti che le equazioni precedenti valgono indipendentemente dall'interpretazione di n e t come tempi e di v e f come frequenze: in particolare, invertendo i ruoli di t e di f (dualità) e tenendo conto che l'impulso di Dirac è pari, si ha anche

$$\delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f t} dt$$

L'equazione è utile perchè consente di ottenere la trasformata di Fourier (in senso generalizzato) di un segnale continuo e costante nel tempo, il quale non è dotato di trasformata di Fourier in senso ordinario. Infatti, posto $x(t) = A$, si può scrivere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-j2\pi f t} dt = A \delta(f)$$

Ancora una volta è possibile notare che segnali lentamente variabili nel tempo presentano uno spettro molto concentrato in frequenza e viceversa segnali rapidamente variabili presentano componenti spettrali significative a frequenze elevate.

► *Proprietà di simmetria della trasformata di Fourier*

È facile controllare che ad una riflessione nel dominio del tempo corrisponde una riflessione nel dominio della frequenza e viceversa; cioè

$$x(-(\cdot)) \longleftrightarrow X(-(\cdot))$$

Pertanto un segnale pari ha spettro pari e viceversa. Inoltre ad una coniugazione in un dominio corrisponde una coniugazione più una riflessione nell'altro dominio; in altri termini si ha:

$$x^*(\cdot) \longleftrightarrow X^*(-(\cdot)) \quad x^*(-(\cdot)) \longleftrightarrow X^*(\cdot)$$

Come conseguenza si ha che se $x(\cdot)$ è reale, cioè $x(\cdot) = x^*(\cdot)$, allora risulta $X(\cdot) = X^*(-(\cdot))$. Una funzione che verifica questa proprietà si dice *Hermitiana*. Il carattere Hermitiano dello spettro è equivalente alla condizione che $\Re\{X(\cdot)\}$ sia pari e $\Im\{X(\cdot)\}$ sia dispari; o anche alla condizione che lo spettro d'ampiezza sia pari e quello di fase dispari.

Se $x(\cdot)$ oltre che reale è anche pari, allora segue che anche lo spettro è pari oltre che Hermitiano e quindi lo spettro è puramente reale: pertanto se $x(\cdot)$ è reale e pari, anche $X(\cdot)$ è reale e pari.

► *Cambiamento di scala*

Per segnali a tempo continuo è immediato verificare che

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Quindi, ad una compressione nel dominio del tempo corrisponde un'espansione dello spettro e viceversa.

► *Traslazione nel dominio del tempo*

È facile verificare che

$$x(t - T) \longleftrightarrow X(f)e^{-j2\pi fT} \quad x(n - N) \longleftrightarrow X(\nu)e^{-j2\pi \nu N}$$

Quindi un ritardo introduce uno sfasamento lineare con ma non influisce sullo spettro d'ampiezza.

► *Segnale campionatore ideale di periodo T*

Consideriamo il segnale campionatore ideale di periodo unitario $\tilde{\delta}(t)$, cioè la sequenza d'impulsi di Dirac

$$\tilde{\delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-k)$$

Si può dimostrare che

$$\tilde{\delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-k) \longleftrightarrow \tilde{\delta}(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(f-m)$$

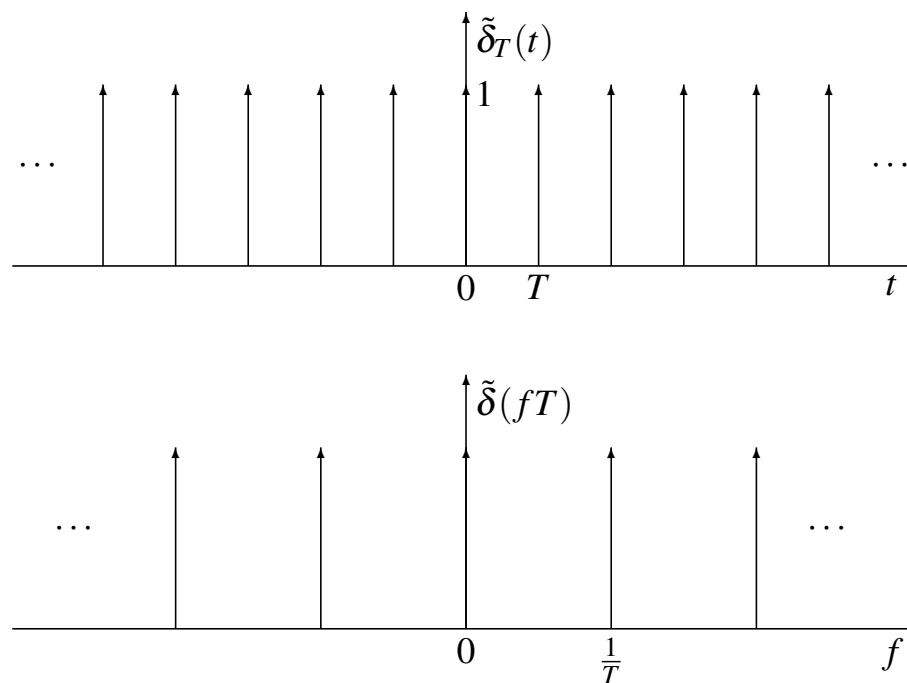
Consideriamo ora il segnale campionatore ideale continuo di periodo T , cioè la sequenza di impulsi di Dirac di area unitaria localizzati negli istanti $t = kT$:

$$\tilde{\delta}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$$

applicando le proprietà di cambiamento di scala dell'impulso di Dirac e della trasformata di Fourier, si ottiene

$$\tilde{\delta}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) = \frac{1}{T} \tilde{\delta}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow \tilde{\delta}(fT) = \frac{1}{T} \tilde{\delta}_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Lo spettro del segnale campionatore ideale di periodo T e della sua trasformata è illustrato in figura.



► *Traslazione nel dominio della frequenza (modulazione)*

È immediato verificare che

$$x(t)e^{j2\pi f_c t} \longleftrightarrow X(f - f_c) \qquad x(n)e^{j2\pi v_c n} \longleftrightarrow X(v - v_c)$$

Esempio: Trasformata di un fasore

Il fasore continuo $Ae^{j2\pi f_c t}$, tenuto conto della proprietà di traslazione nel dominio della frequenza e del risultato ottenuto dalla trasformata di una costante, ha come spettro l'impulso di Dirac $A\delta(f - f_c)$. Dunque lo spettro di un fasore è una riga alla frequenza f_c del fasore di ampiezza (area) pari all'ampiezza del fasore. Analogamente, un fasore discreto $Ae^{j2\pi v_c n}$ si trasforma traslando in frequenza lo spettro della sequenza costante $A\tilde{\delta}(n)$, pertanto si ha

$$Ae^{j2\pi v_c n} \longleftrightarrow A\tilde{\delta}(v - v_c)$$

Esempio: Impulso modulato

L'impulso modulato con inviluppo rettangolare, cioè il segnale

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_c t)$$

ha come trasformata il segnale

$$A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_c t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}AT \operatorname{sinc}[(f - f_c)T] + \frac{1}{2}AT \operatorname{sinc}[(f + f_c)T]$$

Dopo la modulazione lo spettro risulta concentrato intorno alle frequenze $+f_c$ e $-f_c$, quindi il segnale modulato è di tipo *passa-banda*.

Esempio: impulso cosinusoidale

L'impulso cosinusoidale è il segnale:

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\cos\left(\pi\frac{t}{T}\right)$$

Pertanto, ponendo $f_c = \frac{1}{2T}$ nell'espressione dello spettro dell'impulso RF, si ottiene:

$$A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\cos\left(\pi\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow \frac{1}{2}AT \operatorname{sinc}\left(fT - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}AT \operatorname{sinc}\left(fT + \frac{1}{2}\right)$$

Esplicitando la funzione $\text{sinc}(\cdot)$ e semplificando si ha

$$A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\cos\left(\pi\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow \frac{2AT}{\pi} \frac{\cos(\pi fT)}{1 - (2fT)^2}$$

Rispetto ad un impulso rettangolare di pari durata la banda la larghezza del lobo principale è $(3/T)$ ma i lobi secondari sono attenuati di circa $\alpha_{SL} = 23$ dB rispetto all'ampiezza del lobo principale, e decadono a zero più rapidamente, precisamente come f^{-2} , corrispondente a 12 dB/ott.

► *Scambio di alte e basse frequenze*

Consideriamo il segnale modulato $x(n)(-1)^n$. Dall'uguaglianza

$$(-1)^n = \cos(\pi n) = e^{j\pi n}$$

e dalla proprietà di traslazione in frequenza segue che

$$x(n)(-1)^n \longleftrightarrow X\left(v - \frac{1}{2}\right)$$

L'effetto in frequenza è di traslare lo spettro periodico del segnale di mezzo periodo, e quindi, tenendo conto della periodicità, di scambiare fra loro le regioni dello spettro corrispondenti alle basse ed alle alte frequenze. Nell'ipotesi che $x(n)$ sia un segnale passa-basso, il segnale modulato ha, quindi, spettro passa-alto.

► *Convoluzione*

La formulazione di tale proprietà, valida sia per sequenze che per segnali continui, si ha

$$x(\cdot) * y(\cdot) \longleftrightarrow X(\cdot)Y(\cdot)$$

Quindi, alla convoluzione di due segnali nel dominio del tempo corrisponde il prodotto dei rispettivi spettri nel dominio della frequenza.

La proprietà duale di quella della convoluzione è la proprietà di *modulazione generalizzata*: tale proprietà afferma che ad un prodotto nel dominio del tempo corrisponde una convoluzione nel dominio della frequenza. Precisamente per i segnali a tempo continuo risulta:

$$x(t)y(t) \longleftrightarrow X(f) * Y(f) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$$

Tale proprietà è sempre applicabile quando il prodotto nel dominio del tempo è ben definito (quindi può non essere applicabile quando ambedue i segnali contengono impulsi di Dirac) e quando essi sono separatamente trasformabili, eventualmente anche in senso generalizzato (infatti è comunque ben definita la convoluzione fra funzioni generalizzate).

Per segnali a tempo discreto la proprietà si enuncia allo stesso modo, ma l'operazione di convoluzione è diversa: precisamente è possibile dimostrare che lo spettro del prodotto di due sequenze è legato a quello delle singole sequenze da

$$x(n)y(n) \longleftrightarrow X(v) * Y(v) = \int_{-1/2}^{+1/2} X(u)Y(v-u)du$$

in cui l'integrale va esteso al periodo e diviso per il periodo stesso. Per sottolineare tale diversità la convoluzione relativa a segnali periodici dello stesso periodo è detta *convoluzione periodica*. Opportuna attenzione deve essere posta sul fatto che i segnali devono avere lo stesso periodo, che è anche il periodo della convoluzione.

Dualità

$$x(t) \longleftrightarrow X(f) \implies X(t) \longleftrightarrow x(-f)$$

Linearità

$$a_1 x_1(\cdot) + a_2 x_2(\cdot) \longleftrightarrow a_1 X_1(\cdot) + a_2 X_2(\cdot)$$

Riflessione

$$x(-(\cdot)) \longleftrightarrow X(-(\cdot))$$

Coniugazione

$$x^*(\cdot) \longleftrightarrow X^*(-(\cdot)) \quad x^*(-(\cdot)) \longleftrightarrow X^*(\cdot)$$

Cambiamento di scala

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Traslazione nel dominio del tempo

$$x(t - T) \longleftrightarrow X(f) e^{-j2\pi f T}$$

$$x(n - N) \longleftrightarrow X(v) e^{-j2\pi v N}$$

Traslazione nel dominio della frequenza

$$x(t) e^{j2\pi f_c t} \longleftrightarrow X(f - f_c)$$

$$x(n) e^{j2\pi v_c n} \longleftrightarrow X(v - v_c)$$

Modulazione

$$2x(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_0) \longleftrightarrow X(f - f_c) e^{j\varphi_0} + X(f + f_c) e^{-j\varphi_0}$$

$$x(n) \cos(2\pi v_c n + \varphi_0) \longleftrightarrow X(v - v_c) e^{j\varphi_0} + X(v + v_c) e^{-j\varphi_0}$$

Convoluzione nel dominio del tempo

$$x(\cdot) * y(\cdot) \longleftrightarrow X(\cdot) Y(\cdot)$$

Convoluzione nel dominio della frequenza

$$x(t) y(t) \longleftrightarrow X(f) * Y(f)$$

Derivazione nel dominio del tempo

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} \longleftrightarrow (j2\pi f)^k X(f)$$

Derivazione nel dominio della frequenza

$$(\cdot)^k x(\cdot) \longleftrightarrow \left(\frac{j}{2\pi}\right)^k \frac{d^k X(\cdot)}{d(\cdot)^k}$$

Valore nell'origine

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt \quad x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df$$

Uguaglianza di Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) Y^*(f) df$$

Replicazione e campionamento

L'operazione di replicazione periodica, o semplicemente replicazione, genera un segnale periodico con periodo pari a quello di replica, T o N a seconda del caso. In questo paragrafo si studia la trasformata di Fourier di segnali periodici ottenuti come replicazione di un segnale generatore. Tale trasformata fornisce un segnale campionato.

► Si definisce la replicazione di periodo T di $x(t)$ il segnale:

$$\tilde{x}(t) = \text{rep}_T[x(t)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT)$$

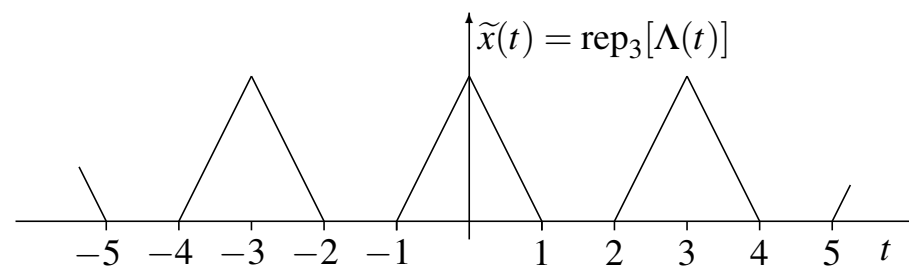
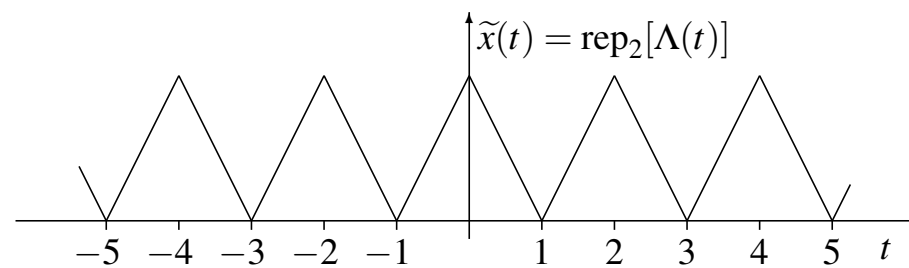
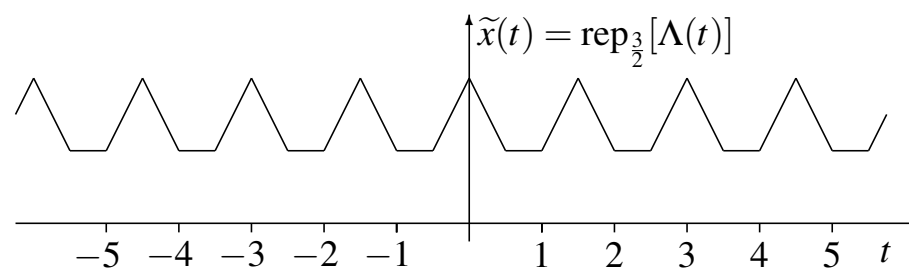
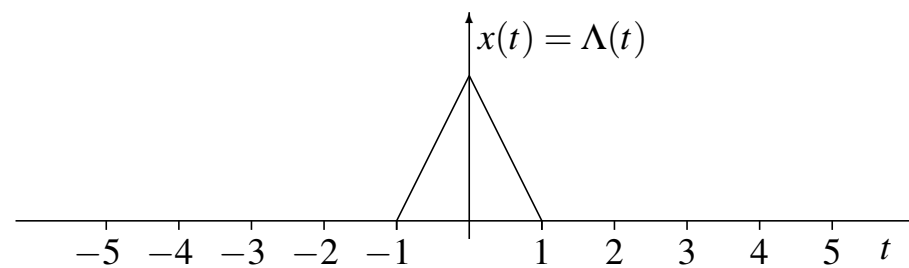
e, analogamente, nel caso di sequenze, si pone:

$$\tilde{x}(n) = \text{rep}_N[x(n)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n - kN)$$

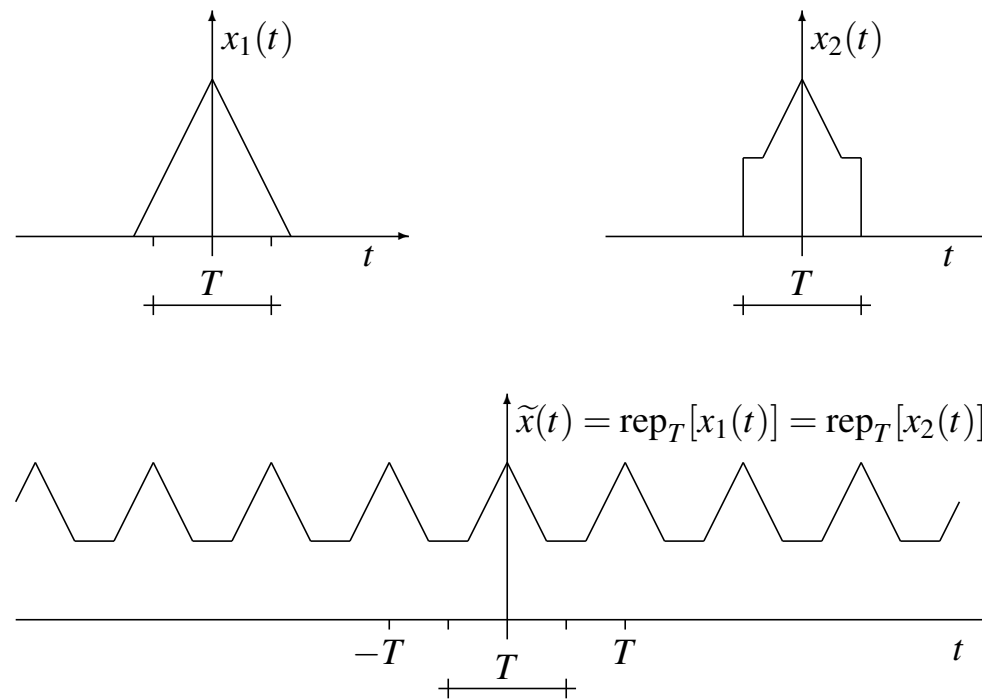
Il segnale $x(\cdot)$ che viene replicato è detto segnale generatore.

Affinché l'operazione abbia senso è sufficiente che il generatore sia un segnale d'energia, non necessariamente di durata limitata. Tuttavia è di interesse utilizzare come generatore un impulso di Dirac: in tal caso infatti il segnale replicato è il segnale campionario ideale, $\tilde{\delta}_T(t)$ o $\tilde{\delta}_N(n)$.

A scopo esemplificativo nella figura seguente sono riportati i segnali ottenuti replicando l'impulso triangolare $\Lambda(t)$ di periodo $T = 3/2$, $T = 2$ e $T = 3$.



► Si noti che un qualunque segnale periodico $\tilde{x}(\cdot)$ può essere sempre considerato come la replicazione di un opportuno generatore $x(\cdot)$: infatti è sufficiente scegliere come generatore $x(\cdot)$ la restrizione di $\tilde{x}(\cdot)$ ad un periodo. È però importante notare che la corrispondenza così istituita fra segnale periodico e segnale generatore non è biunivoca: precisamente, dato un segnale $x(\cdot)$, è univocamente definito il segnale periodico $\tilde{x}(\cdot) = \text{rep}[x(\cdot)]$, ma, dato un segnale periodico, esistono diversi generatori $x(\cdot)$ tali che $\tilde{x}(\cdot) = \text{rep}[x(\cdot)]$ (si veda la figura successiva).



L'utilità della rappresentazione come replicazione forma d'onda periodica sta nel poterne determinare immediatamente lo spettro. Infatti, ricordando che ad una replicazione nel tempo corrisponde un campionamento in frequenza si ha

$$\tilde{x}(t) \longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

dove $X(f)$ è lo spettro del segnale generatore $x(t)$.

In maniera analoga, si ha

$$\tilde{x}(n) \longleftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{N}\right) \delta\left(v - \frac{k}{N}\right)$$

Dunque lo spettro di un segnale periodico è uno spettro a righe, ogni riga essendo rappresentata da un impulso di Dirac, equispaziate in frequenza di $1/T$ (risp. $1/N$), le cui aree – a meno della costante di proporzionalità $1/T$ (risp. $1/N$) – seguono l'involuppo $X(f)$ (risp. $X(v)$); in altri termini, lo spettro di un segnale periodico si ottiene campionando uniformemente in frequenza – con un treno campionatore ideale di periodo $1/T$ (risp. $1/N$) – lo spettro $X(f)$ (risp. $X(v)$) di un qualunque generatore e scalando i campioni secondo il fattore $1/T$ (risp. $1/N$).

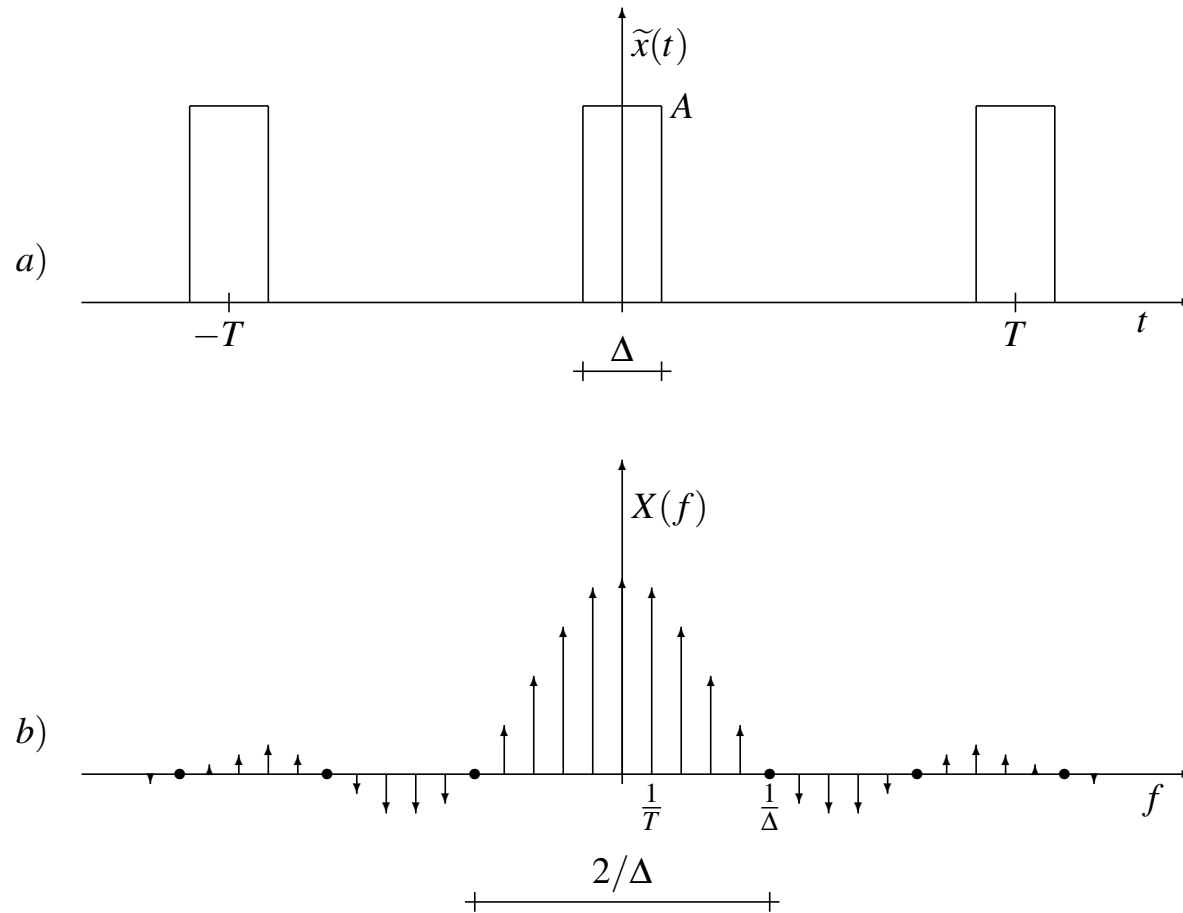
Treno di impulsi rettangolari

Si consideri il treno d'impulsi rettangolari di ampiezza A , durata Δ , periodo T , con $T > \Delta$ (vedi figura) tale treno può riguardarsi come la replicazione, con periodo T , dell'impulso $A\Pi(t/\Delta)$, pertanto si ottiene

$$X\left(\frac{k}{T}\right) = A\Delta \text{sinc}(f\Delta) \Big|_{f=\frac{k}{T}} = A\Delta \text{sinc}\left(k\frac{\Delta}{T}\right)$$

ed il suo spettro è

$$\tilde{x}(t) \longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A\frac{\Delta}{T} \text{sinc}\left(k\frac{\Delta}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$



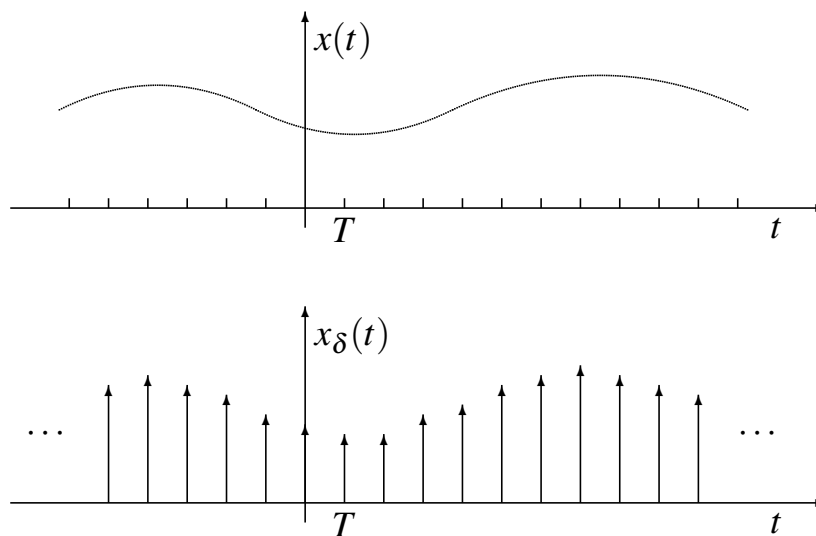
Dato un segnale $x(\cdot)$, la sua versione campionata è il segnale

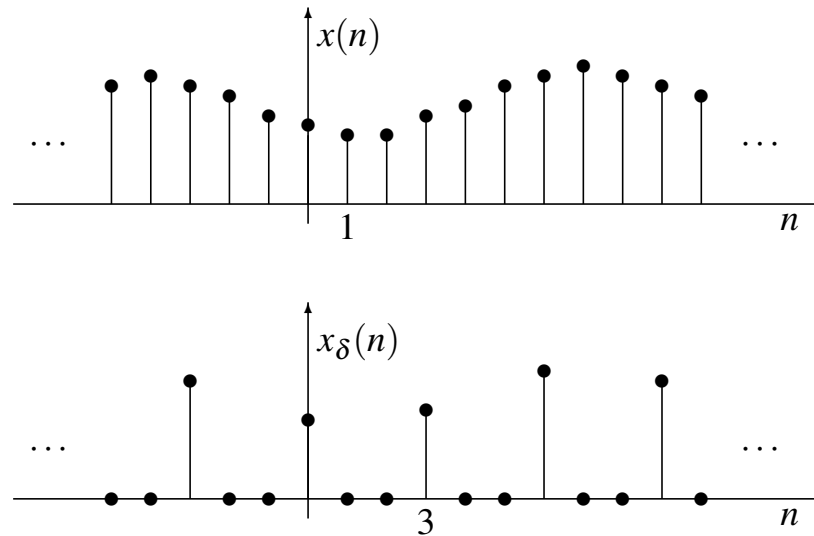
$$x_{\delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \delta(t - kT)$$

nel caso di segnali a tempo continuo, mentre nel caso di sequenze si pone

$$x_{\delta}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kN) \delta(n - kN)$$

T (resp. N) è detto periodo o passo di campionamento, ed il suo reciproco frequenza o cadenza di campionamento.





È immediato verificare che

$$\tilde{x}(t) = \text{rep}_T[x(t)] = x(t) * \tilde{\delta}_T(t) \qquad \tilde{x}(n) = \text{rep}_N[x(n)] = x(n) * \tilde{\delta}_N(n)$$

cioè la replicazione del segnale $x(\cdot)$ la si ottiene effettuandone la convoluzione con un treno campionatore ideale. Usando la proprietà di convoluzione e la trasformata del segnale campionatore ideale, trasformando si ottiene

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT) \longleftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

nel caso di segnali continui, e

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n - kN) \longleftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{N}\right) \delta\left(v - \frac{k}{N}\right)$$

nel caso di sequenze. Le relazioni precedenti si esprimono sinteticamente dicendo che ad una replicazione nel dominio del tempo corrisponde un campionamento in frequenza.

Similmente, trasformando la relazione si ottiene

$$X_{\delta}(f) = X(f) * \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

ovvero

$$x_{\delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \delta(t - kT) \longleftrightarrow X_{\delta}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

nel caso di forme d'onda, e, analogamente nel caso di sequenze, si ha:

$$X_{\delta}(v) = X(v) * \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{k}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(v - \frac{k}{N}\right)$$