Dipartimento di Ingegneria
Università del Sannio

Corso di Sistemi Dinamici

A.A. 2021/2022

Tempo a disposizione: 105 min. È consentita la consultazione di testi e appunti e l'utilizzo di Matlab/Simulink su un portatile.
È categoricamente **vietato** l'utilizzo di qualunque applicazione di **messaggistica** su portatile o smartphone; la trasgressione comporta l'**esclusione dalla prova scritta**.

12 Settembre 2022 Matricola: .... Candidato(a): ....

1. In Figura 1 viene riportato un sistema dinamico del secondo ordine, dove $y(t)$ rappresenta l'uscita e $u(t)$ rappresenta l'ingresso del sistema.

   Considerando che il blocco 'A' ha risposta impulsiva $y_{A_\delta}(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t)$ e il blocco 'B' ha risposta impulsiva $y_{B_\delta}(t) = e^{-2t}\delta_{-1}(t)$, determinare:

   (a) La funzione di trasferimento;

   (b) Per $k = 1$, la pulsazione naturale, lo smorzamento e la sovralogazione massima in corrispondenza a un gradino di ampiezza 5;

   (c) I valori di k per i quali il sistema diventa instabile;

   (d) La risposta impulsiva per un qualsiasi valore di k che garantisca la stabilità.

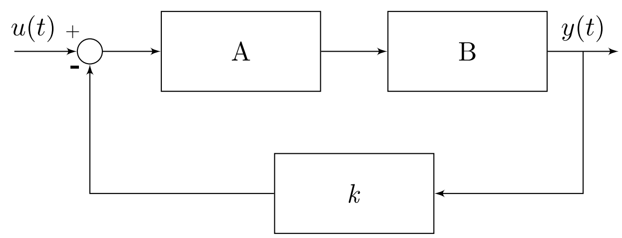


Figura 1: Schema a blocchi

2. Si consideri la seguente funzione di trasferimento in anello chiuso:

$$G(s) = \frac{ps^2 + 3ps + 2}{s^2 + (3+p)s + (2-p)}.$$

   (a) Qual è il massimo valore del parametro p per il quale il sistema rimane stabile?

   (b) Disegnare i diagrammi di Bode utilizzando il valore di p dedotto dal punto (a);

   (c) Utilizzando i diagrammi di Bode determinare se esiste una pulsazione ω^* per la quale il sistema triplica l'ampiezza di un segnale di ingresso sinusoidale e, in caso essa esista, specificarla.

3. In Figura 2 è riportato lo schema a blocchi di un sistema tempo discreto:

   (a) Determinare la funzione di trasferimento;

   (b) Determinare la risposta forzata del sistema all'ingresso $u(k) = (-1)^k$, con $k \in \mathbb{N}$.

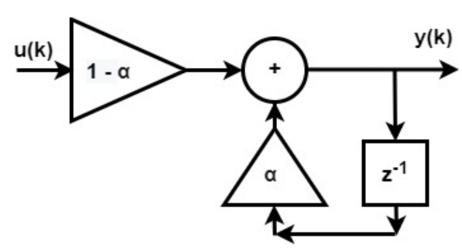


Figura 2: Schema a blocchi sistema TD

Esercizio 1

La fdt del blocco A è data da

$$W_A(s) = \mathcal{L}(y_{A\delta}) = \frac{1}{s+1}$$

la fdt del blocco B è

$$W_B(s) = \mathcal{L}(y_{B\delta}) = \frac{1}{s+2}$$

(a) La fdt a ciclo chiuso è

$$W_k(s) = \frac{\frac{1}{s+1}\frac{1}{s+2}}{1 + \frac{k}{(s+1)(s+2)}} = \frac{1}{s^2+3s+2+k}$$

(b) Per $k=1$, avremo

$$W_1(s) = \frac{1}{s^2+3s+3}$$

Il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 12 < 0$ e dunque i poli sono complessi e coniugati come ci si aspetta dalla formulazione del quesito. Dalla forma canonica del polinomio del secondo ordine $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$, ricaviamo

$$\omega_n^2 = 3$$
$$2\xi\omega_n = 3$$

e dunque $\omega_n = \sqrt{3}$
$= 1.73$ rad/s

$\xi = \frac{3}{2\omega_n} = 0.87 < 1$ come atteso.

$$S\% = 100\, e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$$
$$= 0.43$$

La sovraelongazione in corrispondenza di un gradino di ampiezza 5 sarà perciò pari a 0.02

(c) Il polinomio $s^2 + 3s + 2 + k$ è instabile per

$$2 + k < 0 \implies \boxed{k < -2}$$

(d) In questo caso occorre calcolare la trasformata inversa della fdt

$$\frac{1}{s^2 + 3s + (2+k)}$$

per un valore di $k \geq -2$, un esercizio che lascio a voi.

Esercizio 2

(a) Il polinomio al denominatore, del II ordine, è stabile per

$$3 + p > 0 \implies p \geq -3$$
$$2 - p > 0 \implies p \leq 2$$

In definitiva deve aversi

$$-3 \leq p \leq 2$$

Il massimo valore è $\bar{p} = 2$ per il quale il polinomio diventa

$$s^2 + 5s = s(s+5)$$

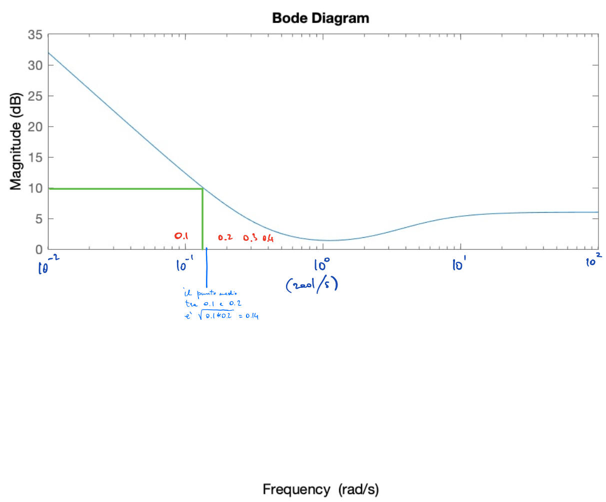
Con uno zero in 0 e un altro in -5.

Il sistema è pertanto stabile marginalmente.

(b) Banale, lo lascio a voi

$$\frac{2s^2 + 6s + 2}{s^2 + 5s}$$

con MATLAB

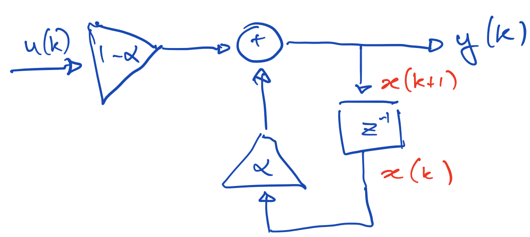


(c) Il fattore 3 deve essere espresso in dB:

$$(3)_{dB} = 20 \log_{10} 3$$
$$= 9.5 \text{ dB} \simeq 10$$

Dal diagramma di Bode si vede che $\omega^* \simeq 0.13$ rad/s.

Esercizio 3



$$x(k+1) = \alpha x(k) + (1-\alpha) u(k)$$
$$y(k) = \alpha x(k) + (1-\alpha) u(k)$$

$$\xrightarrow{Z} \quad zX = \alpha X + (1-\alpha) U$$

(con condizioni iniziali nulle)

$$X = \left(\frac{1-\alpha}{z-\alpha}\right) U$$

$\rightarrow$ fdt da U a X

$$\xrightarrow{Z} \quad Y = \alpha X + (1-\alpha) U$$
$$= \alpha \left(\frac{1-\alpha}{z-\alpha}\right) U + (1-\alpha) U$$
$$= \frac{\alpha(1-\alpha) + (1-\alpha)(z-\alpha)}{z-\alpha} U$$
$$= \left[\frac{(1-\alpha) z}{z-\alpha}\right] U$$

$\rightarrow$ fdt da U a Y
(Questa è la risposta al quesito (a))

(b) $u(k) = (-1)^k \delta_{-1}(k)$

$$U(z) = \frac{z}{z-(-1)} = \frac{z}{z+1}$$

e quindi la risposta è data dalla trasformata inversa di

$$Y(z) = \frac{(1-\alpha) z}{z-\alpha} \frac{z}{z+1}$$

che lascio calcolare a voi.