Ingegneria Elettronica per l'Automazione e le Telecomunicazioni
MATEMATICA 2 A.A. 2020/2021
ESAME 16 Luglio 2021

Nome e Cognome	N. Matricola

Problema	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

Note: Non si possono utilizzare calcolatori o appunti. Il valore in punti (su 100) di ogni esercizio è indicato sul margine sinistro.

Formule per la trasformata di Laplace

$y = f(t)$	$Y(p) = \mathcal{L}(y) = F(p)$	
1	$\frac{1}{p}$	$\text{Re } p > 0$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	$\text{Re } (p+a) > 0$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Im } a\rvert$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Im } a\rvert$
$\sinh at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Re } a\rvert$
$\cosh at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Re } a\rvert$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\text{Re } p > 0, \quad n \geq 0$
te^{at}	$\frac{1}{(p-a)^2}$	$\text{Re } (p+a) > 0$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$	$\text{Re } (p-a) > \lvert\text{Im } \omega\rvert$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$	$\text{Re } (p-a) > \lvert\text{Im } \omega\rvert$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Im } \omega\rvert$
$t \cos \omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Im } \omega\rvert$
$\frac{\sin \omega t}{t}$	$\arctan \frac{\omega}{p}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Im } \omega\rvert$

Operazioni di trasformazione di Laplace

Operazioni	
1. Trasformata di Laplace	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$
2. Trasformata di una derivata	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$
3. Sostituzione	$\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\} = F(p-a)$
4. Traslazione	$\mathcal{L}\{f(t-b)\} = F(p)e^{-bp}$

(10) 1.a Calcolare il seguente integrale definito con un errore inferiore a 10^{-2}:

$$\int_0^1 \cos(x^7)dx$$

Scrivere in forma cartesiana $x+iy$ i seguenti numeri complessi

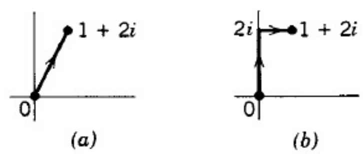
(5) 1.b (MB 2.11.8, p. 69) $\cos(\pi - 2i\ln 3)$

(5) 1.c (MB 2.14.23, p. 10) $i^{\ln i}$

(4) 2.a (MB 14.1.4, p. 667) Trovare la parte reale e la parte immaginaria $u(x, y)$ e $v(x, y)$ della funzione $|z|^2$

(4) 2.b (MB 14.2.4, p. 672) Stabilire se la funzione è analitica

(8) 2.c (MB 14.3.12, p. 672) Calcolare $\int_0^{1+2i} |z|^2 dz$ lungo i percorsi indicati in figura:



(4) 2.d Commentare i risultati ottenuti con l'aiuto del teorema di Cauchy

(MB 7.8.8b, p. 354) È data la funzione, periodica di periodo 2π e definita per $x \in (0, 2\pi)$ da:

$$f(x) = e^x$$

(6) **3.a** Disegnare schematicamente diversi periodi della funzione.

(14) **3.b** Sviluppare nella appropriata serie di Fourier

(10) 4a. Trovare la funzione $y(t)$ che ha come trasformata di Laplace la seguente funzione

$$Y = \frac{e^{-3p}}{p^2 + 2p + 5}$$

(14) 4b. Trovare la funzione $y = y(t)$ che risolve il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 9y = u(t-1) - u(t-2), & t \geq 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 1 \end{cases}$$

con $u(t)$ funzione gradino.

Del trizio, che sta fuoriuscendo da una centrale nucleare, si riversa in una vicina falda acquifera alla velocità di un chilogrammo all'anno. Il tempo di dimezzamento (emivita) del trizio è di 12 anni.

(10) 5a. Ignorando altri effetti (altre fonti o pozzi di trizio), scrivere un'equazione differenziale per la quantità di trizio presente nella falda acquifera in funzione del tempo. (Per ottenere il punteggio completo, determinare le costanti nell'equazione.)

(10) 5b. Se questa perdita si protrae per un lungo periodo, quale sarà il carico di trizio nella falda acquifera? (Quanti chilogrammi?)