Ingegneria Elettronica per l'Automazione e le Telecomunicazioni
MATEMATICA 2 A.A. 2021/2022
ESAME 20 Giugno 2022

Nome e Cognome	N. Matricola

Problema	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

Note: Non si possono utilizzare calcolatori o appunti. Il valore in punti (su 100) di ogni esercizio è indicato sul margine sinistro.

Formule per la trasformata di Laplace

$y = f(t)$	$Y(p) = \mathcal{L}(y) = F(p)$	
1	$\dfrac{1}{p}$	$\text{Re } p > 0$
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$	$\text{Re } (p+a) > 0$
$\sin at$	$\dfrac{a}{p^2+a^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Im } a\rvert$
$\cos at$	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Im } a\rvert$
$\sinh at$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Re } a\rvert$
$\cosh at$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Re } a\rvert$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$\text{Re } p > 0, \quad n \geq 0$
te^{at}	$\dfrac{1}{(p-a)^2}$	$\text{Re } (p+a) > 0$
$e^{-at}(1-at)$	$\dfrac{p}{(p+a)^2}$	$\text{Re } (p+a) > 0$
$e^{at}\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$	$\text{Re } (p-a) > \lvert\text{Im } \omega\rvert$
$e^{at}\cos \omega t$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$	$\text{Re } (p-a) > \lvert\text{Im } \omega\rvert$
$t\sin \omega t$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Im } \omega\rvert$
$t\cos \omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Im } \omega\rvert$
$\dfrac{\sin \omega t}{t}$	$\arctan \dfrac{\omega}{p}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Im } \omega\rvert$
$u(t-a) = \begin{cases} 1, & t > a > 0 \\ 0, & t < a \end{cases}$	$\dfrac{1}{p}e^{-ap}$	$\text{Re } p > 0$

Operazioni di trasformazione di Laplace

Operazioni	
1. Trasformata di Laplace	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$
2. Trasformata di una derivata	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$
3. Sostituzione	$\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\} = F(p-a)$
4. Traslazione	$\mathcal{L}\{f(t-b)\} = F(p)e^{-bp}$

(8) 1.a (MB 1.13.35, p.32) Trovare la serie di Maclaurin, fino al quarto ordine incluso, della funzione

$$f(x) = \frac{x}{\sin x}$$

(4) 1.b Discutere del suo intervallo di convergenza.

(4) 1.c (MB 2.11.9, p. 69) Trovare in forma rettangolare $(x + iy)$ il valore di: $\sin(\pi - i \ln 3)$

(4) 1.d (MB 2.12.31, p. 71) Trovare in forma rettangolare $(x + iy)$ il valore di: $\sinh\left(\ln 2 + \frac{i\pi}{3}\right)$

ANNO ACCADEMICO 2021-2022

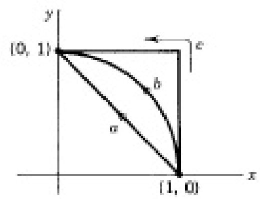
(10) **2.a** (MB 14.4.6, p. 681) Trovare i primi termini di ciascuna delle serie di Laurent attorno all'origine, cioè una serie per ogni regione anulare tra i punti singolari, della seguente funzione e trovarne il residuo all'origine

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1+z)^2}$$

(10) **2.b** (MB 14.7.11, p. 699) Calcolare il seguente integrale definito usando il teorema dei residui:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(4x^2+1)^3}$$

(MB 6.8.6, p. 307))Trovare il lavoro fatto dalla forza $\mathbf{F} = (2xy - 3)\mathbf{i} + x2\mathbf{j}$ spostando un oggetto da $(1, 0)$ a $(0, 1)$ lungo ciascuno dei tre percorsi mostrati:



(6) **2.a** (a) retta,

(8) **2.b** (b) arco di circonferenza,

(6) **2.c** (c) lungo rette parallele agli assi.

(MB 7.9.12, p. 370) La seguente funzione è data in un periodo:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 < x < 0, \\ x-1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

(6) **3.a** Disegnare schematicamente diversi periodi della funzione.

(14) **3.b** Sviluppare nella appropriata serie di Fourier

(10) 4.a (MB, 8.4.14, p. 407) Trovare la soluzione generale della seguente equazione differenziale

$$(x-1)y' + y - x^{-2} + 2x^{-3} = 0$$

(10) 4.b (MB, 8.8.19, p. 439) Dimostrare la formula generale (n. 3 nella tabella delle operazione)

$$\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\} = F(p-a)$$

(MB, 8.9.21, p. 443) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y'' - 2y' + y = 2\cos t, \qquad y(0) = 5,\ y'(0) = -2$$

(10) **5a.** Trovando l'integrale generale e quindi applicando le condizioni iniziali

(10) **5b.** Usando le trasformate di Laplace