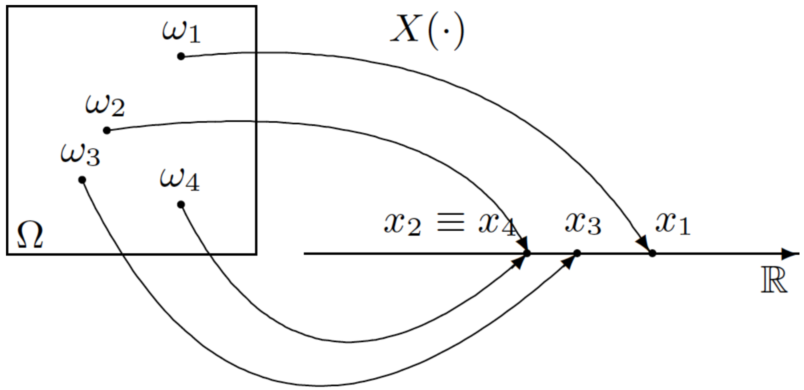
Variabili aleatorie
Definizione

Una variabile aleatoria associa un valore numerico ai risultati di un esperimento.

▶ Si consideri un esperimento aleatorio e sia Ω lo spazio dei campioni. Una variabile aleatoria (v.a.) X è una funzione reale definita su Ω,

$$X : \omega \in \Omega \longrightarrow x = X(\omega) \in \mathbb{R}$$

Il codominio della v.a. X è detto alfabeto di X.



▶ Una v.a. X si dice discreta se il suo alfabeto e discreto (finito o numerabile), continua se il suo alfabeto è continuo. Variabili di tipo misto si hanno quando insiemi continui di punti si accumula in punti discreti.

Esempio: Lancio di due monete
Lo spazio dei campioni è l'insieme delle possibili coppie di testa e di croce,

$$\Omega \equiv \{TT, TC, CT, CC\}$$

Possiamo definire una variabile aleatoria X come segue

$$\begin{aligned} X(\{TT\}) &= 1 \\ X(\{TC\}) &= 2 \\ X(\{CT\}) &= 3 \\ X(\{CC\}) &= 4 \end{aligned}$$

Conseguentemente, assumendo le uscite equiprobabili, si avrà

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= 0.25 \\ P(X = 2) &= 0.25 \\ P(X = 3) &= 0.25 \\ P(X = 4) &= 0.25 \end{aligned}$$

Esempio: Indicatore di un evento
Si definisce indicatore dell'evento E, e la si denota con I_E, la variabile aleatoria:

$$I_E : \omega \in \Omega \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \omega \in E \\ 0 & \text{se} \quad \omega \notin E \end{cases}$$

il cui alfabeto è l'insieme discreto $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$.

Funzione di Distribuzione Cumulativa

la Funzione di Distribuzione Cumulativa (CDF) è definita come:

$$F_X : x \in \mathbb{R} \longrightarrow F_X(x) = P(\{X \leq x\})$$

Il suo calcolo va condotto valutando la probabilità dell'evento $\{X \leq x\}$.

Variabile aleatoria Bernoulliana
Una v.a. Bernoulliana X ha alfabeto $\mathcal{A}_X = \{0, 1\}$ e parametro $p = P(\{X = 1\})$ Si indica sinteticamente mediante la notazione

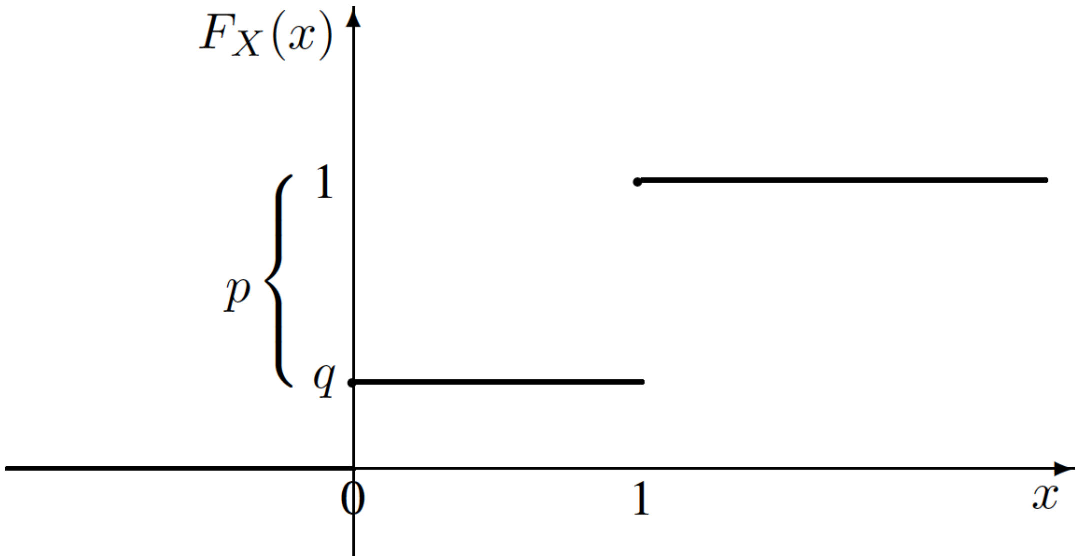
$$X \sim \mathcal{B}(1, p)\,.$$

▶ Per calcolare la CDF di una v.a. Bernoulliana, consideriamo l'evento $\{X \leq x\}$, costituito dai seguenti elementi

$$\{X \leq x\} = \begin{cases} \varnothing & \text{se} \;\; x < 0 \\ \{1\} & \text{se} \;\; 0 \leq x < 1 \\ \Omega & \text{se} \;\; x \geq 1 \end{cases}$$

per cui si ottiene

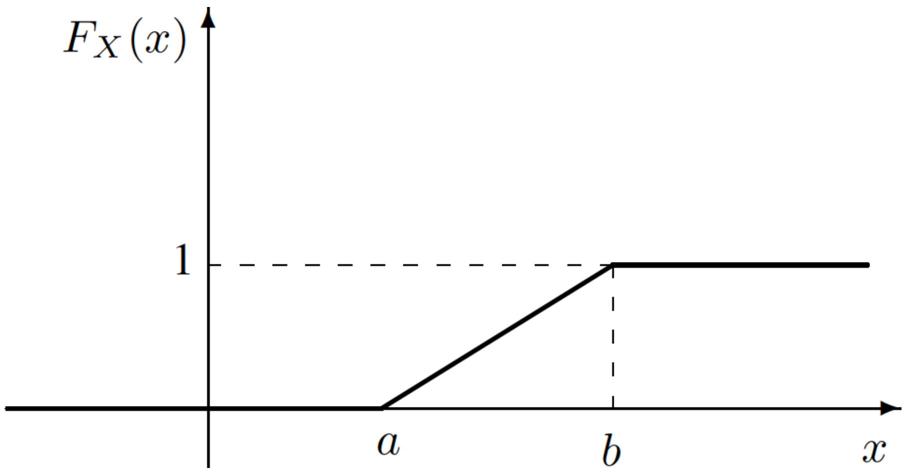
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ q = 1 - p & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$



Indipendentemente dall'esperimento sottostante la definizione di variabile aleatoria, assegnando la CDF di una v.a. otteniamo direttamente e esplicitamente un modello matematico dell'esperimento senza precisare lo spazio di probabilità su cui sono definite. Ciò avviene molto spesso nella pratica.

Variabile aleatoria Uniforme (continua)
Una v.a. avente tale CDF si dice uniforme nell'intervallo $[a, b]$ e sinteticamente si scrive $X \sim U(a, b)$ se la sua CDF è del tipo

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{se} \quad a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se} \quad x \geq b \end{cases}$$



Una v.a. si dice di tipo discreto se la sua CDF è costante a tratti ovvero è una funzione a scalini; si dice di tipo continuo se la CDF è continua su tutto $\mathbb{R}$, mentre si dice di tipo misto se la CDF è discontinua su un insieme discreto di punti, ma non è costante a tratti.

Funzione di Distribuzione Cumulativa Empirica (ECDF)
La ECDF rappresenta la versione frequentistica della CDF

Consideriamo n osservazioni della v.a. X,

$$x(1), x(2), \dots x(n)$$

la ECDFè data dalla seguente funzione reale di variabile reale

$$\widehat{F}_X : \quad x \in \mathbb{R} \longrightarrow \widehat{F}_X(x) = \frac{(N(x(i) \leq x)}{N} \in [0,1]$$

dove $N(x(i) \leq x)$ denota il numero di osservazioni $x(i),\ i = 1, 2, \dots N$, minori o uguali ad x ed N è il numero totale di prove.
Osserviamo il calcolo della ECDF può essere effettuato efficientemente come segue

1. *si ordinano le osservazioni in modo decrescente.*
$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots x_{(N)}$ *rappresentano le osservazioni ordinate.*

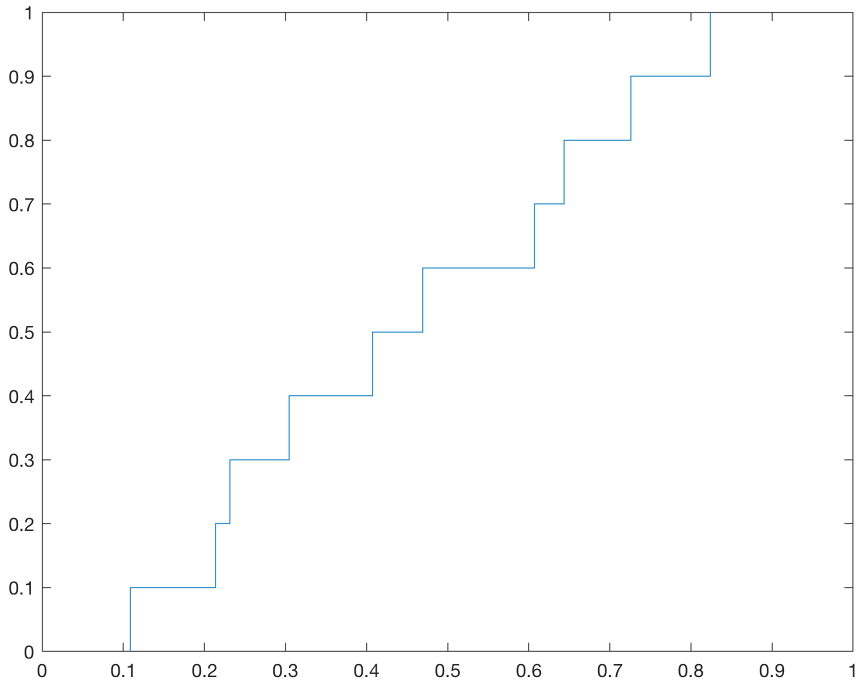
2. *Si costruisce la ECDF nel seguente modo*

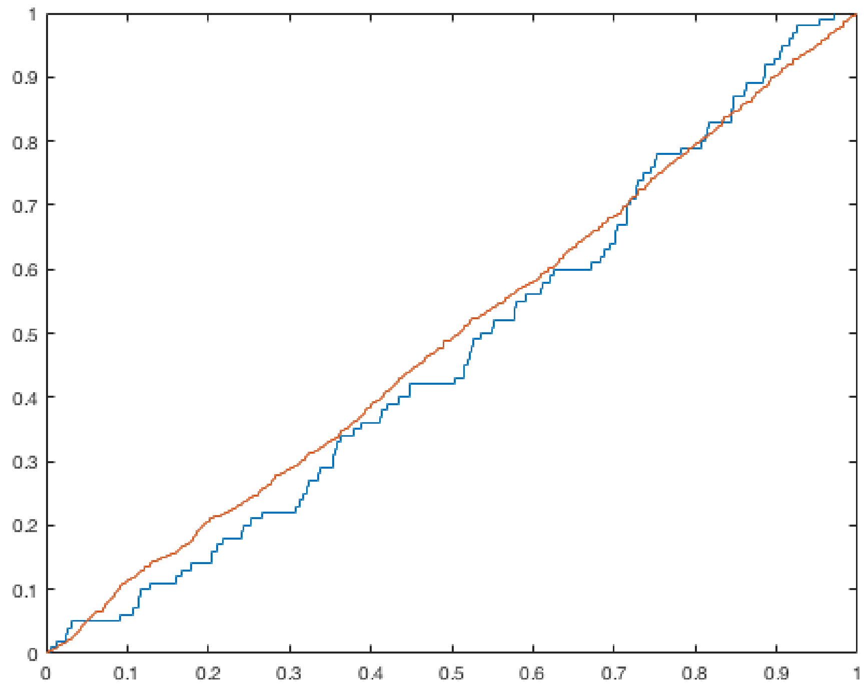
$$\widehat{F}_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < \quad x_{(1)} \\ \dfrac{k}{N} & \text{se} \quad x_{(k)} \leq \quad x < x_{(k+1)} \\ 1 & \text{se} \quad x \geq \quad x_{(N)} \end{cases}$$

Esempio. ECDF di una variabile uniforme in (0,1)

$$x_{(i)} = \{0.108, 0.470, 0.607, 0.304, 0.643, 0.407, 0.214, 0.726, 0.231, 0.824\}$$

$$y = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$$

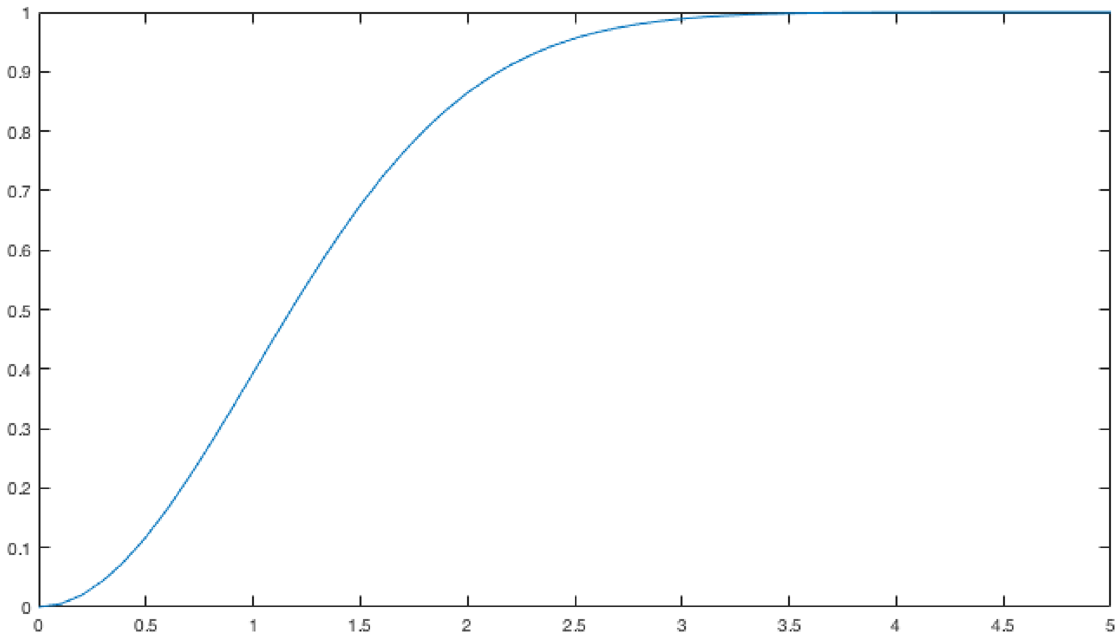




▶ Proprietà della CDF

Le principali proprietà della CDF sono riassunte nella tabella. Tali proprietà sono dette anche *costitutive* in quanto ogni funzione che soddisfa tali proprietà può essere riguardata come la CDF di una variabile aleatoria.

P1	Valori estremi	$F_X(-\infty) = 0; \qquad F_X(+\infty) = 1$
P2	Monotonicità, (la CDF è non decrescente)	$x_1 < x_2 \implies F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$
P3	Continuità da destra	$\lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$



Funzione di distribuzione di probabilità
Anche notacome funzione masse di probabilità (PMF). Si applica a v.a. discrete.

La PMF di una v.a. discreta è la funzione:

$$P_X : x \in \mathcal{A}_X \longrightarrow P_X(x) = P(\{X = x\})$$

▶ Proprietà costitutive

P1 $P_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{A}_X$ (Non negatività)

P2 $\sum_{x \in \mathcal{A}_X} P_X(x) = 1$ (Normalizzazione)

▶ Altre proprietà

P3 Probabilità di un evento $P(\{X \in A\}) = \sum_{x \in A \cap \mathcal{A}_X} P_X(x)$

P4 CDF $F_X(x) = \sum_{\{v \in \mathcal{A}_X : v \leq x\}} P_X(v)$

Distribuzione di Poisson

Processo di pura nascita. Modello di arrivi ad una coda.

La distribuzione di Poisson è definita dalla PMF

$$P_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad a > 0, \quad k = 0, 1, \ldots$$

dipendente dal parametro λ.

- Verificare che valgono le proprietà costitutive della PMF.
- La PMF di Poisson è soluzione dell'equazione differenziale stocastica di "pura nascita"

$$dP_n(t) = \lambda[P_{n-1}(t) - P_n(t)]dt$$

con le condizioni $P_0(0) = 1$ e $\sum P_n(t) = 1 \quad \forall t$, la prima delle quali assicura che la probabilità di avere un elemento al tempo zero è uguale ad 1 e la seconda che per ogni t la soluzione reppresenta una PMF.

Distribuzione Binomiale
Conteggio dei successi

Distribuzione Binomiale
Consideriamo l'esperimento che consiste in N prove, il cui risultato è di tipo *successo* oppure *insuccesso*. Il conteggio dei successi può essere visto come somma di N v.a. Bernoulliane X_i che descrivono il risultato della singola prova ognuna delle quali assume il valore "1" nel caso di successo oppure il valore "0", con probabilità p e $q = 1 - p$, rispettivamente. La variabile aleatoria

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

che descrive il conteggio dei successi è una v.a. discreta con alfabeto $\mathcal{A}_X = \{0, 1, \ldots N\}$ che prende il nome di Binomiale di parametri N e p e la cui PMF sinteticamente denominata con $X \sim \mathcal{B}(N, p)$. è data da

$$P_X(k) = P(\{X = k\}) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots N.$$

Si noti che $P_X(k)$ corrisponde alla probabilità di avere esattamente k successi ed $N - k$ insuccessi in N prove indipendenti (tale probabilità è uguale a $p^k q^{N-k}$) presa tante volte quante sono le possibili configurazioni con cui k successi ed $N - k$ insuccessi possono avvenire in N prove. Il numero di tali configurazioni è dato dal coefficiente binomiale

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!} \quad .$$

Funzione di densità di probabilità

Variabili aleatorie continue

Per le variabili aleatorie continue, una caratterizzazione probabilistica alternativa rispetto alla CDF è quella fornita dalla funzione di densità di probabilità (pdf).

▶ Che cos'è una densità ? Esempi: densità di carica (carica per unità di volume, densità di potenza (potenza per unità di superficie). Come si calcola la carica o la potenza quando le grandezze non sono costanti?

La pdf $f_X(\cdot)$ di una v.a. continua è la derivata della CDF, cioè si ha:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Conseguentemente, la CDF è ricavabile dalla pdf come

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du$$

Si noti che contrariamente alla CDF e alla PMF, la PDF non è una probabilità (le sue dimensioni fisiche sono date dal reciproco di quelle della v.a.; ad esempio se la X è un tensione aleatoria allora le dimensioni della sua PDF sono V^{-1}, se X è una durata allora le dimensioni della sua PDF sono s^{-1}, e così via).

Proprietà costitutive

▶ Dalla definizione di derivata segue che la probabilità dell'evento $\{X \in A\}$, è calcolabile come l'integrale esteso ad A della PDF

$$P(\{X \in A \subseteq \mathbb{R}\}) = \int_A f_X(x)\, dx$$

P1 $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (Non negatività)

P2 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$ (Normalizzazione)

▶ Esercizio: Dimostrare le proprietà costitutive della pdf.

P3 $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx$ (Calcolo di probabilità in intervalli)

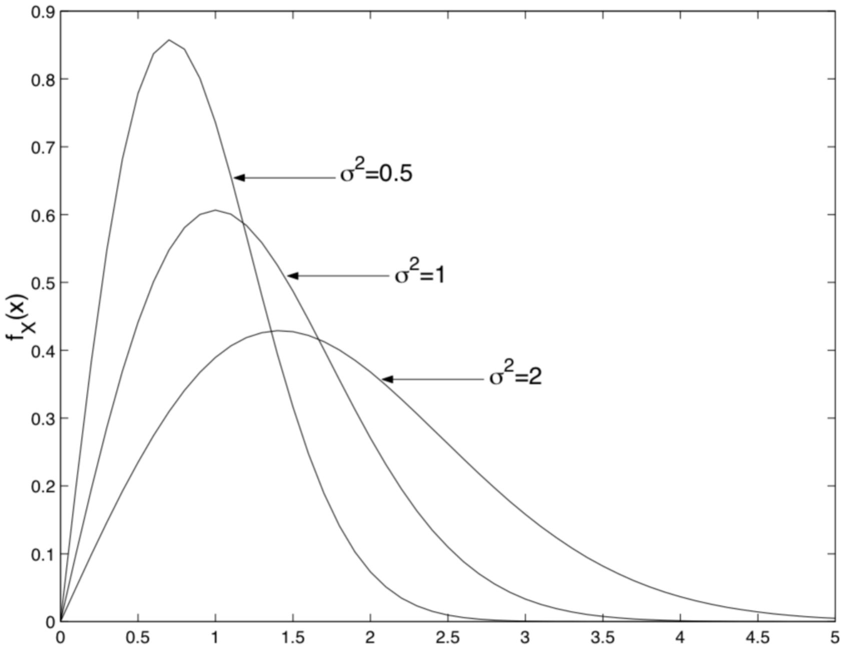
▶ Perchè due definizioni diverse per PMF e pdf ?

Variabile di Rayleigh

▶ La pdf di una v.a. X di tipo Rayleigh di parametro σ^2 è definita come

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} u(x)$$

dove $u(x)$ è la funzione gradino unitario, uguale ad 1 per $x \in (0, \infty)$ e 0 altrimenti.

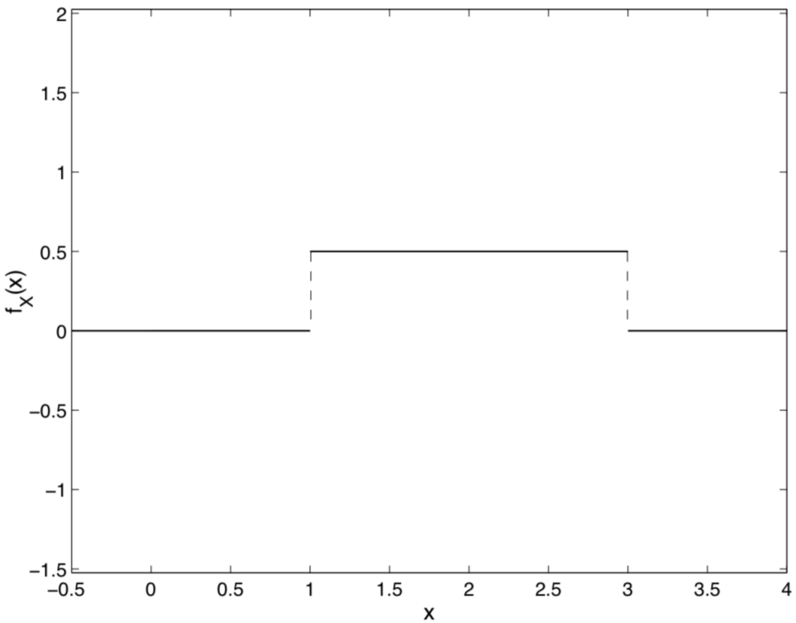


▶ Calcolare la CDF di una v.a. di tipo Rayleigh.

Variabile uniforme

- Derivando la CDF uniforme $X \sim U(a,b)$, si ha

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se} \quad x \in (a,b) \\ 0 & \text{se} \quad x \notin a,b \end{cases}$$

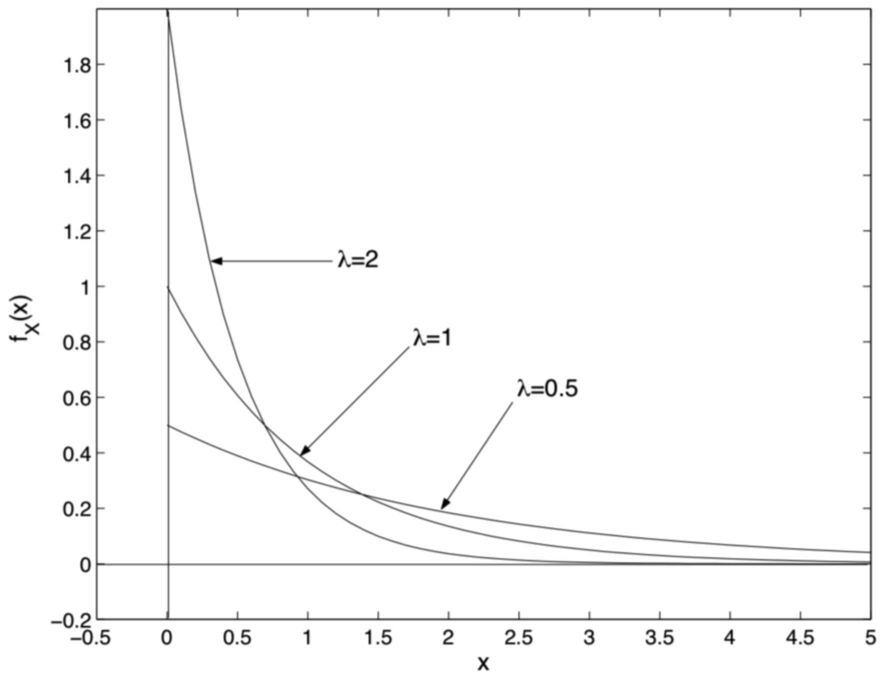


- Verificare la proprietà di normalizzazione.

Variabile esponenziale

- La pdf di una v.a. X di tipo esponenziale di parametro λ, $X \sim \mathcal{E}x(\lambda)$ è definita come

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x) \quad \lambda > 0$$

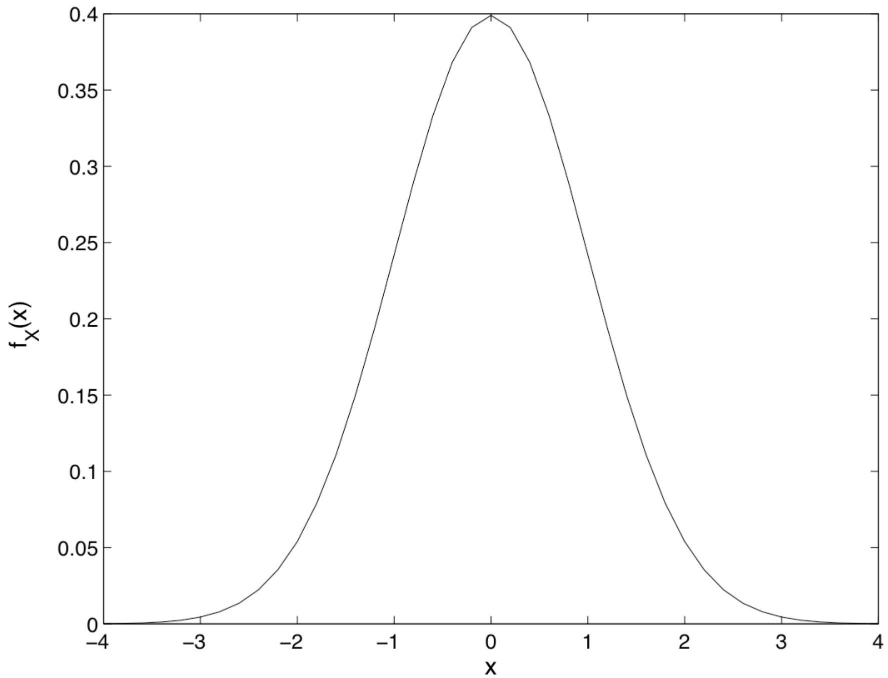


- Calcolare la CDF di una v.a. esponenziale.

Variabile Gaussiana o Normale

- Una v.a. X_0 si dice Gaussiana standard se

$$f_{X_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$



▶ La CDF della v.a. gaussiana standard si ricava dall'integrale

$$F_{X_0}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

che non è esprimibile in forma chiusa. Il problema può essere risolto ricorrendo alla funzione $Q(x) = 1 - F_{X_0}(x)$ definita dall'integrale:

$$Q(x) \triangleq \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

▶ Le v.a. gaussiane (non standard) sono la famiglia di variabili aleatorie generate dalla gaussiana standard mediante la trasformazione

$$X = \sigma X_0 + \mu, \qquad \sigma > 0,\ \mu \in \mathbb{R}$$

dove μ è detto parametro di locazione e σ parametro di scala. Sinteticamente si scrive

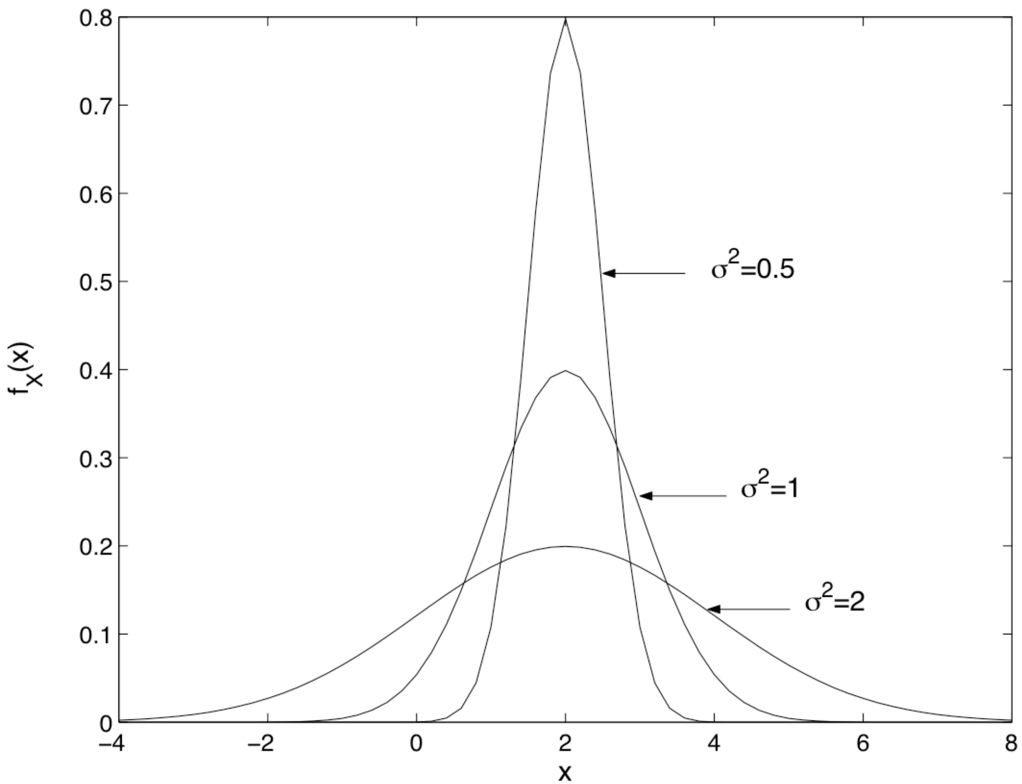
$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

▶ La CDF di una v.a. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si ricava da quella della gaussiana standard

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(\{X \le x\}) = P(\{\sigma X_0 + \mu \le x\}) \\ &= P\left(\left\{X_0 \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right\}\right) = F_{X_0}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\ &= 1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

▶ La pdf di una v.a. gaussiana non standard risulta (mediante derivazione della CDF)

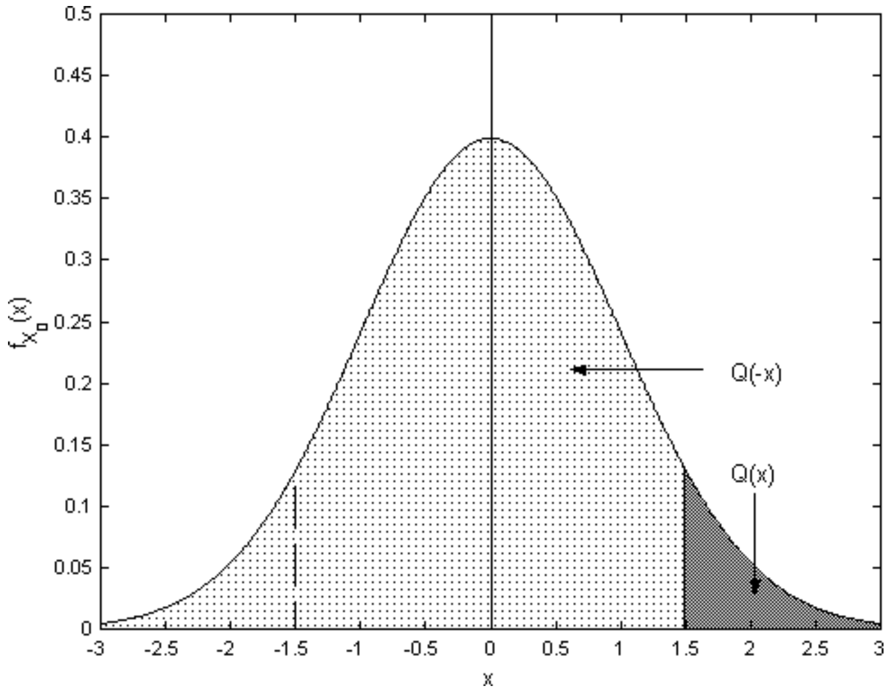
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$



La funzione $Q(\cdot)$

▶ La funzione $Q(\cdot)$ è, per definizione, la CDF complementare di una v.a. gaussiana standard

$$Q(x) \triangleq P(\{X_0 > x\}) = P(\{X_0 \geq x\}) \qquad X_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$$



Proprietà della funzione $Q(\cdot)$ (CDF complementare della pdf gaussiana standard)

P1 $Q(+\infty) = 0 \leq Q(x) \leq Q(-\infty) = 1$ (la $Q(\cdot)$ è limitata)

P2 $x_1 < x_2 \implies Q(x_1) > Q(x_2)$ (la $Q(\cdot)$ è strettamente decrescente)

P3 $Q(-x) = 1 - Q(x)$ (simmetria)

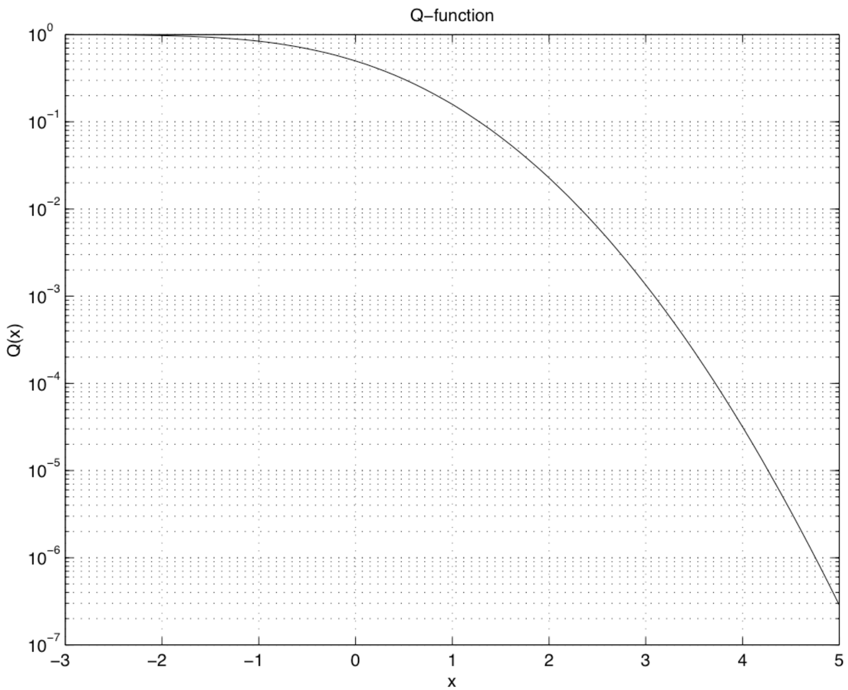
P4 $P(\{X \leq x\}) = 1 - Q\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

P5 $P(\{X > x\}) = Q\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

P6 $P(\{x_1 < X \leq x_2\}) = Q\left(\dfrac{x_1-\mu}{\sigma}\right) - Q\left(\dfrac{x_2-\mu}{\sigma}\right)$

P7 $P(\{-x < X \leq x\}) = 1 - Q\left(\dfrac{x+\mu}{\sigma}\right) - Q\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

▶ Grafico della funzione $Q(\cdot)$ in scala semilogaritmica.



▶ La funzione $Q(\cdot)$ va valutata per via numerica mediante tabelle. Si considerano i soli valori positivi dell'argomento, in quanto per valori negativi si può utilizzare la proprietà di simmetria.

In tabella sono riportati i valori della $Q(\cdot)$ per valori di $0 \leq x < 6$ e con passo 0.01. Le prime due cifre della x sono riportate nella prima colonna, mentre la terza (centesimi) è riportata nella prima riga: ad esempio il valore di $Q(2.37)$ lo si ottiene in corrispondenza della riga etichettata 2.3 e della colonna etichettata 7.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.5000000	0.4960106	0.4920216	0.4880335	0.4840465	0.4800611	0.4760778	0.4720968	0.4681186	0.4641436
0.1	0.4601721	0.4562046	0.4522415	0.4482832	0.4443299	0.4403823	0.4364405	0.4325050	0.4285762	0.4246545
0.2	0.4207402	0.4168338	0.4129355	0.4090458	0.4051651	0.4012936	0.3974318	0.3935801	0.3897387	0.3859081
0.3	0.3820885	0.3782804	0.3744841	0.3706999	0.3669282	0.3631693	0.3594235	0.3556912	0.3519727	0.3482682
0.4	0.3445782	0.3409029	0.3372427	0.3335978	0.3299685	0.3263552	0.3227581	0.3191775	0.3156136	0.3120669
0.5	0.3085375	0.3050257	0.3015317	0.2980559	0.2945985	0.2911596	0.2877397	0.2843388	0.2809573	0.2775953
0.6	0.2742531	0.2709309	0.2676288	0.2643472	0.2610862	0.2578461	0.2546269	0.2514288	0.2482522	0.2450970
0.7	0.2419636	0.2388520	0.2357624	0.2326950	0.2296499	0.2266273	0.2236272	0.2206499	0.2176954	0.2147638
0.8	0.2118553	0.2089700	0.2061080	0.2032693	0.2004541	0.1976625	0.1948945	0.1921502	0.1894296	0.1867329
0.9	0.1840601	0.1814112	0.1787863	0.1761855	0.1736087	0.1710561	0.1685276	0.1660232	0.1635430	0.1610870
1.0	0.1586552	0.1562476	0.1538642	0.1515050	0.1491699	0.1468590	0.1445722	0.1423096	0.1400710	0.1378565
1.1	0.1356660	0.1334995	0.1313568	0.1292381	0.1271431	0.1250719	0.1230244	0.1210004	0.1190001	0.1170231
1.2	0.1150696	0.1131394	0.1112324	0.1093485	0.1074876	0.1056497	0.1038346	0.1020423	0.1002725	0.0985253
1.3	0.0968004	0.0950979	0.0934175	0.0917591	0.0901226	0.0885079	0.0869149	0.0853434	0.0837933	0.0822644
1.4	0.0807566	0.0792698	0.0778038	0.0763585	0.0749336	0.0735292	0.0721450	0.0707808	0.0694366	0.0681121
1.5	0.0668072	0.0655217	0.0642554	0.0630083	0.0617801	0.0605707	0.0593799	0.0582075	0.0570534	0.0559174
1.6	0.0547992	0.0536989	0.0526161	0.0515507	0.0505025	0.0494714	0.0484572	0.0474596	0.0464786	0.0455139
1.7	0.0445654	0.0436329	0.0427162	0.0418151	0.0409295	0.0400591	0.0392039	0.0383635	0.0375379	0.0367269
1.8	0.0359303	0.0351478	0.0343795	0.0336249	0.0328841	0.0321567	0.0314427	0.0307419	0.0300540	0.0293789
1.9	0.0287165	0.0280666	0.0274289	0.0268034	0.0261898	0.0255880	0.0249978	0.0244191	0.0238517	0.0232954
2.0	0.0227501	0.0222155	0.0216916	0.0211782	0.0206751	0.0201822	0.0196992	0.0192261	0.0187627	0.0183088
2.1	0.0178644	0.0174291	0.0170030	0.0165858	0.0161773	0.0157776	0.0153863	0.0150034	0.0146287	0.0142621
2.2	0.0139034	0.0135525	0.0132093	0.0128737	0.0125454	0.0122244	0.0119106	0.0116037	0.0113038	0.0110106
2.3	0.0107241	0.0104440	0.0101704	0.0099030	0.0096418	0.0093867	0.0091374	0.0088940	0.0086563	0.0084241
2.4	0.0081975	0.0079762	0.0077602	0.0075494	0.0073436	0.0071428	0.0069468	0.0067556	0.0065691	0.0063871
2.5	0.0062096	0.0060365	0.0058677	0.0057031	0.0055426	0.0053861	0.0052336	0.0050849	0.0049400	0.0047987
2.6	0.0046611	0.0045271	0.0043964	0.0042692	0.0041453	0.0040245	0.0039070	0.0037925	0.0036811	0.0035726
2.7	0.0034669	0.0033641	0.0032640	0.0031667	0.0030719	0.0029797	0.0028900	0.0028028	0.0027179	0.0026354
2.8	0.0025551	0.0024770	0.0024011	0.0023274	0.0022556	0.0021859	0.0021182	0.0020523	0.0019883	0.0019262
2.9	0.0018658	0.0018071	0.0017501	0.0016948	0.0016410	0.0015888	0.0015381	0.0014889	0.0014412	0.0013948

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3.0	1.350e-03	1.306e-03	1.264e-03	1.223e-03	1.183e-03	1.144e-03	1.107e-03	1.070e-03	1.035e-03	1.001e-03
3.1	9.676e-04	9.354e-04	9.043e-04	8.740e-04	8.447e-04	8.164e-04	7.888e-04	7.622e-04	7.364e-04	7.114e-04
3.2	6.871e-04	6.637e-04	6.410e-04	6.190e-04	5.976e-04	5.770e-04	5.571e-04	5.377e-04	5.190e-04	5.009e-04
3.3	4.834e-04	4.665e-04	4.501e-04	4.342e-04	4.189e-04	4.041e-04	3.897e-04	3.758e-04	3.624e-04	3.495e-04
3.4	3.369e-04	3.248e-04	3.131e-04	3.018e-04	2.909e-04	2.803e-04	2.701e-04	2.602e-04	2.507e-04	2.415e-04
3.5	2.326e-04	2.241e-04	2.158e-04	2.078e-04	2.001e-04	1.926e-04	1.854e-04	1.785e-04	1.718e-04	1.653e-04
3.6	1.591e-04	1.531e-04	1.473e-04	1.417e-04	1.363e-04	1.311e-04	1.261e-04	1.213e-04	1.166e-04	1.121e-04
3.7	1.078e-04	1.036e-04	9.961e-05	9.574e-05	9.201e-05	8.842e-05	8.496e-05	8.162e-05	7.841e-05	7.532e-05
3.8	7.235e-05	6.948e-05	6.673e-05	6.407e-05	6.152e-05	5.906e-05	5.669e-05	5.442e-05	5.223e-05	5.012e-05
3.9	4.810e-05	4.615e-05	4.427e-05	4.247e-05	4.074e-05	3.908e-05	3.747e-05	3.594e-05	3.446e-05	3.304e-05
4.0	3.167e-05	3.036e-05	2.910e-05	2.789e-05	2.673e-05	2.561e-05	2.454e-05	2.351e-05	2.252e-05	2.157e-05
4.1	2.066e-05	1.978e-05	1.894e-05	1.814e-05	1.737e-05	1.662e-05	1.591e-05	1.523e-05	1.458e-05	1.395e-05
4.2	1.335e-05	1.277e-05	1.222e-05	1.168e-05	1.118e-05	1.069e-05	1.022e-05	9.774e-06	9.345e-06	8.934e-06
4.3	8.540e-06	8.163e-06	7.801e-06	7.455e-06	7.124e-06	6.807e-06	6.503e-06	6.212e-06	5.934e-06	5.668e-06
4.4	5.413e-06	5.169e-06	4.935e-06	4.712e-06	4.498e-06	4.294e-06	4.098e-06	3.911e-06	3.732e-06	3.561e-06
4.5	3.398e-06	3.241e-06	3.092e-06	2.949e-06	2.813e-06	2.682e-06	2.558e-06	2.439e-06	2.325e-06	2.216e-06
4.6	2.112e-06	2.013e-06	1.919e-06	1.828e-06	1.742e-06	1.660e-06	1.581e-06	1.506e-06	1.434e-06	1.366e-06
4.7	1.301e-06	1.239e-06	1.179e-06	1.123e-06	1.069e-06	1.017e-06	9.680e-07	9.211e-07	8.765e-07	8.339e-07
4.8	7.933e-07	7.547e-07	7.178e-07	6.827e-07	6.492e-07	6.173e-07	5.869e-07	5.580e-07	5.304e-07	5.042e-07
4.9	4.792e-07	4.554e-07	4.327e-07	4.111e-07	3.906e-07	3.711e-07	3.525e-07	3.348e-07	3.179e-07	3.019e-07
5.0	2.867e-07	2.722e-07	2.584e-07	2.452e-07	2.328e-07	2.209e-07	2.096e-07	1.989e-07	1.887e-07	1.790e-07
5.1	1.698e-07	1.611e-07	1.528e-07	1.449e-07	1.374e-07	1.302e-07	1.235e-07	1.170e-07	1.109e-07	1.051e-07
5.2	9.964e-08	9.442e-08	8.946e-08	8.476e-08	8.029e-08	7.605e-08	7.203e-08	6.821e-08	6.459e-08	6.116e-08
5.3	5.790e-08	5.481e-08	5.188e-08	4.911e-08	4.647e-08	4.398e-08	4.161e-08	3.937e-08	3.724e-08	3.523e-08
5.4	3.332e-08	3.151e-08	2.980e-08	2.818e-08	2.664e-08	2.518e-08	2.381e-08	2.250e-08	2.127e-08	2.010e-08
5.5	1.899e-08	1.794e-08	1.695e-08	1.601e-08	1.512e-08	1.428e-08	1.349e-08	1.274e-08	1.203e-08	1.135e-08
5.6	1.072e-08	1.012e-08	9.548e-09	9.010e-09	8.503e-09	8.022e-09	7.569e-09	7.140e-09	6.735e-09	6.352e-09
5.7	5.990e-09	5.649e-09	5.326e-09	5.022e-09	4.734e-09	4.462e-09	4.206e-09	3.964e-09	3.735e-09	3.519e-09
5.8	3.316e-09	3.124e-09	2.942e-09	2.771e-09	2.610e-09	2.458e-09	2.314e-09	2.179e-09	2.051e-09	1.931e-09
5.9	1.818e-09	1.711e-09	1.610e-09	1.515e-09	1.425e-09	1.341e-09	1.261e-09	1.186e-09	1.116e-09	1.049e-09

Variabile aleatoria di tipo mixture

▶ Consideriamo due variabili aleatorie X_1 ed X_2 aventi rispettivamente pdf $f_{X_1}(x)$ ed $f_{X_2}(x)$ e definiamo una nuova pdf $f_X(x)$ come combinazione lineare delle due

$$f_X(x) = c f_{X_1}(x) + (1 - c) f_{X_2}(x)$$

con $c \in [0, 1]$.

La variabile aleatoria X avente tale pdf viene chiamata mixture delle v.a. X_1 ed X_2.

▶ Dimostrare che $f_X(x)$ definisce una valida pdf in quanto verifica le relazioni costitutive di non negatività e normalizzazione.

▶ La natura bimodale della pdf è una proprietà tipica delle variabili aleatorie generate mediante mixture.

Tracciare con Matlab la pdf di una mixture di pdf Gaussiane $X_1 \sim \mathcal{N}(2, 3)$ e $X_2 \sim \mathcal{N}(3, 1)$.

Esercizi (Variabili aleatorie)

Ex. 1 Un gioco consiste nel lanciare una moneta quanto più possibile vicino ad un muro distante 2m, senza toccarlo. Se la moneta tocca il muro il tiro è perso. Due studenti gareggiano: i lanci del primo studente sono modellati da una variabile aleatoria avente pdf esponenziale con parametro $\lambda = 2$ mentre i lanci del secondo studente sono modellati da una variabile uniforme nell'intervallo $(1.6, 2.2)$. Calcolare quale dei due studenti ha maggiore probabilità di toccare il muro.

Ex. 2 Il costo di un televisore nei negozi di Milano, è modellabile come una variabile uniforme tra 400 e 500 euro, mentre nei negozi di Benevento lo stesso elettrodomestico ha un costo che è modellabile come una variabile esponenziale di parametro $\lambda = 1/400$. Tenendo conto che il 90% dei televisori viene venduto a Milano mentre il restante 10% viene venduto a Benevento, calcolare la probabilità che un televisore pagato meno di 450 euro sia stato acquistato a Ben- evento.

Ex. 3 In un frigorifero sono conservate 5 provette della sostanza A e 15 della sostanza B. La temperatura della sostanza A viene modellata come una variabile gaussiana con parametri (0,3) mentre quella della sostanza B viene modellata come una variabile gaussiana con parametri (1,2). Avendo misurato una temperatura minore di zero in una provetta scelta a caso, calcolare la probabilità di aver scelto la provetta con la sostanza di tipo A.

Ex. 4 Un ufficio postale ha due sportelli; i tempi di servizio (in minuti) dei clienti agli sportelli sono modellati da variabili aleatorie aventi pdf esponenziale di parametro $\lambda = 0.2.$ allo sportello 1 e di parametro $\lambda = 0.25.$ allo sportello 2.

Calcolare:
1. La probabilità che il tempo di servizio di un cliente allo sportello 1 duri più di tre minuti;
2. nel caso in cui i clienti siano instradati a caso agli sportelli da un usciere, calcolare la pdf del tempo di servizio di un cliente; 3. la probabilità che il tempo di servizio di un cliente duri più di tre minuti, nel caso in cui i clienti siano instradati a caso agli sportelli da un usciere.

Ex. 5 Un'industria produce barre d'acciaio cilindriche il cui diametro nominale è di 4 cm. Le barre sono accettabili se presentano un diametro effettivo compreso fra 3.995 cm e 4.005 cm. Un cliente, nel controllare le barre fornitegli, rileva che il 5% sono di diametro inferiore a quello tollerato ed il 12% di diametro superiore.

Supponendo che le misure X dei diametri seguano una distribuzione gaussiana, determinare i parametri della gaussiana che modella le barre prodotte.

Assumendo come parametro di locazione quello ottenuto nel punto precedente, calcolare quale dovrebbe essere il valore parametro σ affinchè la probabilità che le barre abbiano un diametro superiore a quello tollerato sia inferiore al 2%.

Ex. 6 Il tempo di vita di una coltura batterica è modellabile come una variabile aleatoria esponenziale con parametro $\lambda_1 = 5$ giorni se lasciata evolvere spontaneamente e $\lambda_2 = 2$ giorni se trattata con antibiotico. Si trattano il 50% delle provette con farmaco e dopo 2 giorni si osserva una provetta scelta a caso. La provetta mostra che la colonia si è estinta. Calcolare la probabilità di aver valutato una provetta soggetta a trattamento antibiotico.