5 Rango di una matrice

Definizione 5.1 (Spazio delle righe di A**)** *Data una matrice* $\boldsymbol{A}$*, si definisce* ***spazio delle righe di A*** *il sottospazio vettoriale generato dai vettori riga di* $\boldsymbol{A}$*.*

Definizione 5.2 (Spazio delle colonne di $\boldsymbol{A}$**)** *Data una matrice* $\boldsymbol{A}$*, si definisce* ***spazio delle colonne di A*** *il sottospazio vettoriale generato dai vettori colonna di* $\boldsymbol{A}$*.*

Esempio 5.1 *Data la matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

lo spazio delle righe di $\boldsymbol{A}$ *è l'insieme delle terne della forma:*

$$\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) = (\alpha, \beta, 0).$$

Lo spazio delle colonne è l'insieme di tutti i vettori della forma:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definizione 5.3 (Rango delle righe di $\boldsymbol{A}$**)** *Data una matrice* $\boldsymbol{A}$ *di tipo* $m \times n$*, si definisce* ***rango delle righe di A*** *la dimensione dello spazio delle righe di* $\boldsymbol{A}$*.*

Definizione 5.4 (Rango delle colonne di $\boldsymbol{A}$**)** *Data una matrice* $\boldsymbol{A}$ *di tipo* $m \times n$*, si definisce* ***rango delle colonne di A*** *la dimensione dello spazio delle colonne di* $\boldsymbol{A}$*.*

Osservazione 5.1 *Il rango per righe di una matrice può anche essere definito come il numero massimo di vettori riga linearmente indipendenti contenuti in* $\boldsymbol{A}$*. Ciò in quanto la dimensione dello spazio delle righe di* $\boldsymbol{A}$ *corrisponde al massimo numero di vettori linearmente indipendenti tra i vettori (riga) che generano lo spazio delle righe di* $\boldsymbol{A}$*.*

Analogamente, il rango per colonne di una matrice può anche essere definito come il numero massimo di vettori colonna linearmente indipendenti contenuti in $\boldsymbol{A}$*.*

Teorema 5.1 *Data una matrice* $\boldsymbol{A}$ *di tipo* $m \times n$*, il rango delle righe è uguale al rango delle colonne. Possiamo pertanto parlare di* ***rango della matrice A****, che viene indicato con* $rk(\boldsymbol{A})$*.*

Osservazione 5.2 (Proprietà del rango) *Valgono le seguenti proprietà:*

- *Se* $\boldsymbol{A}$ *è una matrice di tipo* $m \times n$*, il rango di* $\boldsymbol{A}$ *è* $rk(A) \leq \min\{m, n\}$ *.*
- *Se* $\boldsymbol{A}$ *è una matrice di tipo* $m \times n$ *e di rango* $rk(A) = p$*, allora* $\boldsymbol{A}$ *possiede* $m - p$ *righe ed* $n - p$ *colonne che sono combinazioni lineari delle precedenti.*
- *La matrice nulla di tipo* $m \times n$ *ha rango* 0*.*
- *Date due matrici* $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B}$ *conformabili, è possibile provare che* $rk(\boldsymbol{AB}) \leq \min\{rk(\boldsymbol{A}), rk(\boldsymbol{B})\}$*.*

- *Se $\boldsymbol{A}$ è una matrice ed M una sua sottomatrice, allora $rk(M) \leq rk(\boldsymbol{A})$.*

Si ricordi che due matrici si dicono equivalenti per righe se è possibile ottenerne una effettuando una sequenza finita di operazioni elementari sulle righe dell'altra.

La proposizione che segue è utile per il calcolo del rango di una matrice.

che segue può essere riformulato dicendo che le operazioni elementari su una generica matrice non ne alterano il suo spazio delle righe, e dunque il rango resta invariato.

Teorema 5.2 (Spazio delle righe di matrici equivalenti per righe) *Se le matrici $\boldsymbol{A}$e $\boldsymbol{B}$ sono equivalenti per righe, lo spazio delle righe di $\boldsymbol{A}$ e lo spazio delle righe di $\boldsymbol{B}$ sono uguali.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ due matrici equivalenti per righe. Poichè $\boldsymbol{B}$ è una matrice equivalente per righe ad $\boldsymbol{A}$, allora possiamo ottenere $\boldsymbol{B}$ a partire da $\boldsymbol{A}$ attraverso una sequenza finita di operazioni sulle righe. Quindi i vettori riga di $\boldsymbol{B}$ sono combinazioni lineari dei vettori riga di $\boldsymbol{A}$ ed appartengono tutti allo spazio delle righe di $\boldsymbol{A}$. Ne consegue che lo spazio delle righe di $\boldsymbol{B}$ è un sottospazio dello spazio delle righe di $\boldsymbol{A}$.

Ma anche $\boldsymbol{A}$, essendo equivalente per righe a $\boldsymbol{B}$, può essere ottenuta da $\boldsymbol{A}$ attraverso una sequenza finita di operazioni elementari (inverse) sulle righe. Quindi i vettori riga di $\boldsymbol{A}$ sono combinazioni lineari dei vettori riga di $\boldsymbol{B}$ ed appartengono tutti allo spazio delle righe di $\boldsymbol{B}$. Ne consegue che lo spazio delle righe di $\boldsymbol{B}$ è un sottospazio dello spazio delle righe di $\boldsymbol{A}$.

Ma se lo spazio delle righe di $\boldsymbol{B}$ è un sottospazio dello spazio delle righe di $\boldsymbol{A}$ e viceversa allora si può concludere che lo spazio delle righe di $\boldsymbol{A}$ e lo spazio delle righe di $\boldsymbol{B}$ coincidono.

Corollario 5.1 (Rango di matrici equivalenti per righe) *Siano $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ due matrici equivalenti per righe. Allora $rk(\boldsymbol{A}) = rk(\boldsymbol{B})$.*

DIMOSTRAZIONE. Poichè $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ sono equivalenti per righe, per il toerema precedente avranno lo stesso spazio delle righe e, di conseguenza la dimensione dello spazio delle righe di $\boldsymbol{A}$, $rk(\boldsymbol{A})$, sarà uguale alla dimensione dello spazio delle righe di $\boldsymbol{B}$, $rk(\boldsymbol{A})$.

Il teorema precedente ci suggerisce di utilizzare l'algoritmo di eliminazione di Gauss per il calcolo del rango di una matrice: infatti, basta trasformare la matrice di partenza $\boldsymbol{A}$ in una matrice a scala per righe $\boldsymbol{B}$. Dal teorema segue che $rk(\boldsymbol{B}) = rk(\boldsymbol{A})$; la speciale struttura a scala di $\boldsymbol{B}$ consente un immediato calcolo del rango.

Teorema 5.3 (Calcolo del rango di una matrice a scala per righe) *Sia $\boldsymbol{B}$ una matrice a scala per righe. Il rango di $\boldsymbol{B}$ è dato dal numero di righe non nulle.*

Dimostrazione Se $\boldsymbol{A}$ è una matrice a scala, le sue righe non nulle formano un insieme di vettori linearmente indipendenti, in quanto nessuno dei vettori riga può essere ottenuto come combinazione lineare dei restanti (la dimostrazione di quest'affermazione è lasciata al lettore).

Esempio 5.2 *Studiamo il rango della seguente matrice, al variare di k in $\mathbb{R}$:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2k \\ 1 & 1 & -k & 2k \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il rango della matrice $\boldsymbol{A}$ è necessario ridurla. Una possibile riduzione per righe è la *seguente:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2k \\ 1 & 1 & -k & 2k \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 2 \\ 0 & 2-2k & 0 & 2k-4 \\ 1 & 1 & -k & 2k \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 2 \\ 0 & 2-2k & 0 & 2k-4 \\ 0 & 1-k & -k+1 & 2k-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 2 \\ 0 & 1-k & -k+1 & 2k-2 \\ 0 & 2-2k & 0 & 2k-4 \end{pmatrix}$$

Dall'espressione dell'ultima matrice, si deduce facilmente che per $k = 1$ la riga R_2 si annulla completamente e dunque $rk(\boldsymbol{A}) = 2$. Per ogni $k \neq 1$, invece, $rk(\boldsymbol{A}) = 3$.