DIMOSTRAZIONI M II

TEOREMA DI BAYES

Supponiamo di conoscere la prob. dell'evento F, P(F).

Allora la prob. condizionata $P(F|E)$ è una STIMA più realistica di $P(F)$.

Supponiamo che E ed F siano eventi $\in$ allo stesso spazio di risultati S tali che:

$P(F) \neq 0$ e $P(E) \neq 0$ abbiamo $$P(F|E) = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E|F)P(F) + P(E|\bar{F})P(\bar{F})}$$

Dimostrazione:

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} \qquad e \qquad P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$P(F \cap E) = P(F|E)P(E) \qquad\qquad P(E \cap F) = P(E|F)P(F)$$

Uguagliando le 2 espressioni

$$P(F|E)P(E) = P(E|F)P(F)$$

Dividiamo per $P(E)$ $\Rightarrow$ $$P(F|E) = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E)}$$

Osserviamo che $P(E) = P(E|F)P(E) + P(E|\bar{F})P(\bar{F})$

$$P(F|E) = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E|F)P(E) + P(E|\bar{F})P(\bar{F})}$$

* $P(E|F)P(E) + P(E|\bar{F})P(\bar{F})$ lo possiamo scrivere perché

$E = E \cap \underbrace{S}_{= F \cup \bar{F}} = (E \cap F) \cup (E \cap \bar{F})$ ma $E \cap F$ e $E \cap \bar{F}$ sono disgiunti.

Perché se $x \in E \cap F$ e $x \in E \cap \bar{F} \Rightarrow x \in F \cap \bar{F} = \emptyset$, quindi

$P(E) = P(E|F)P(E) + P(E|\bar{F})P(\bar{F})$

Teorema Inversa di una matrice

Una matrice quadrata $A_{n\times n}$ è invertibile se e solo se $rK(A)=n$.

2 Dim: 1° se la matrice è invertibile $\Rightarrow rK(A)=n$

2° se il $rK(A)=n \Rightarrow$ la matrice è invertibile

1°: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftarrow$ non ci sono Comb. Lineari che legano i vettori riga $\Rightarrow rK(I_3)=n$ (rk è massimo)

$\Rightarrow rK(I_n) = n$ per la 2° proprietà del rango:

$rK(AA^{-1}) \leq \min(rK(A), rK(A^{-1})) \Rightarrow n \leq rK(A) \Rightarrow rK(A) \geq n$ (A)

per la 1° proprietà del rango:

$rK(A_{n\times n}) \leq \min(n,n) \Rightarrow rK(A) \leq n$ (B)

Dato che (A) e (B) devono essere vere contemporaneamente $\Rightarrow$

$\Rightarrow rK(A) = n$

2°: $\underbrace{E_k \cdot \ldots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1}_{B_{n\times n}} \cdot A = I_n \Leftrightarrow B = A^{-1}$

Applicando Gauss-Jordan ed A otteniamo I

ma $\underbrace{E_k \cdot \ldots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1}_{B_{n\times n}} \cdot I_n = A^{-1} \Leftrightarrow B = A^{-1}$

Applicando le stesse o. e. ad I_n otteniamo A^{-1}

* Questa 2° dim. si dimostra con le matrici elementari (matrici ottenute attraverso op. el. sulle matrici identiche). Le m. elementari hanno una proprietà: se moltiplicano una qualsiasi matrice A la m. risultante sarà la stessa che uscirebbe se alla matrice A applicassi la stessa op. el applicata su I per ottenere E.

PRINCIPIO DELLA PICCIONAIA

Se N oggetti sono sistemati in k scatole, con $N>k$, ci sarà almeno una scatola contenente almeno $\lceil N/K \rceil$ oggetti. arrotondamento per eccesso

Dim: Supponiamo che tutte le scatole abbiano $\lceil N/K \rceil - 1$ oggetti, quindi che nessuna scatola contiene $\lceil N/K \rceil - 1$ oggetti.

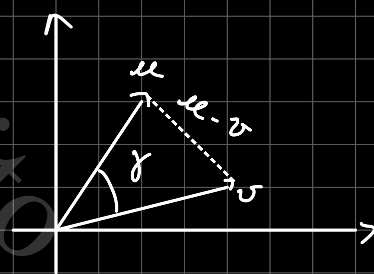
$$K(\lceil N/K \rceil - 1) < \left[K\left(\frac{N}{k}+1\right) - 1\right] = N \Rightarrow$$

dove $\lceil N/K \rceil < (N/K) + 1$

$\Rightarrow K(\lceil N/K \rceil - 1) < N$ Questa relazione non può mai essere vera, quindi il teorema è sempre vero

Interpretazione geometrica del prodotto scalare (Teo di Carnot)

$$u v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\gamma$$



Dal teorema del coseno

$$c^2 = a^2 + b^2 - (2ab)\cos\gamma$$

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\gamma$$

$$2\|u\|\|v\|\cos\gamma = \underbrace{\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} v_i^2 - \sum_{i=1}^{n}(u_i^2 + v_i^2 - 2v_i u_i) = 2\sum_{i=1}^{n}(u_i v_i)$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\|u\|\|v\|\cos\gamma = \cancel{2}\sum_{i=1}^{n}(u_i v_i)$$

$$\|u\|\|v\|\cos\gamma = \sum_{i=1}^{n}(u_i v_i)$$

Teorema di Rouché - Capelli

Un sistema lineare ammette soluzioni se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della matrice incompleta, se cioè $rk(A) = rk(A|b)$

Dim: $Ax = b$, con r, s soluzioni $\Rightarrow Ar = b$ & $As = b$

Consideriamo $u = \lambda_r r + \lambda_s s$: $\underbrace{\lambda_r + \lambda_s = 1 \text{ e } \lambda_r, \lambda_s \geq 0}_{\text{Comb. Lin. Convessa}}$

$Au = A(\lambda_r r + \lambda_s s) = \lambda_r Ar + \lambda_s As$ ma $As = Ar = b$, quindi

$\lambda_r b + \lambda_s b \Rightarrow (\lambda s + \lambda r) b \Rightarrow$ ma $\lambda_s + \lambda r = 1$ quindi $b \cdot 1 = b$

Teorema

Se $rK(A) = n$, allora il sistema lineare compatibile avrà una sola soluzione.

Dim: supponiamo $rK(A) = n$ e ci sono 2 distinte soluzioni r e s del sistema

$Ar = b$, $As = b$ con $r \neq s$

$$\begin{aligned} a_1 r_1 + \ldots + a_n r_n &= b \\ a_1 s_1 + \ldots + a_n s_n &= b \\ \hline a_1(r_1 - s_1) + \ldots + a_n(r_n - s_n) &= \emptyset \end{aligned}$$

ciò implica che i vettori sono L.D. andando contro l'ipotesi $rK(A) = n$, quindi la soluzione è 1.

Teorema

Sia $p = rK(A) = rK(A|b)$ se $p < n$ esistono p righe L.I. e $n-p$ righe L.D. $\Rightarrow$ Ogni soluzione del sistema ridotto formato dalle sole p righe L.I. soddisfa anche le restanti $n-p$ righe.

Dim: consideriamo una delle p righe $\{a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn} = b\}$

$$a_{n1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{i1} \qquad a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{in} \qquad b_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$$

Teorema

Il determinante di una matrice^2 A di ordine n è $\neq 0$ se e solo se $rK(A) = n$

Dim: Sia A una matrice^2 di ordine n con $rK(A) = n$, applicando l'algoritmo di Gauss otteniamo una matrice B triangolare superiore con tutte le righe non nulle, di conseguenza $\det(B) \neq 0$ e $\det(A) \neq 0$ perché ci sono solo pivot sulla diagonale principale.

Se invece $rK(A) < n$ otteniamo una matrice B con almeno un elemento sulla diagonale principale pari a 0, di conseguenza il $\det(B) = \det(A) = 0$

Teorema Unicità della combinazione lineare

Se $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ è una base per lo s.v. V, allora ogni vettore $v \in V$ si può scrivere come c.l. dei vettori di B. L'l.l. di B fornisce l'unicità della c.l.

Dim: $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ $\lambda_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$ con $\lambda_i \neq \gamma_i$

$$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = v$$

$$\gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_n b_n = v$$

$$b_1(\lambda_1 - \gamma_1) + \ldots + b_n(\lambda_n - b_n) = 0$$

ma ciò implica la dipendenza lineare di B che è impossibile per definizione.

Teorema Nullità

Sia A una matrice $m \times n$ di rango p, allora la nullità di A è $n-p$.

DIM:

Sia U la matrice ottenuta con l'algoritmo di Gaus applicato su A.

Poiché $rK(A) = p$ esistono p righe non nulle nella matrice U.

In modo equivalente il sistema omogeneo $Ux = 0$ associato ad U coinvolge $n-p$ variabili libere $\Rightarrow$ la nullità della matrice coincide con il numero di variabili libere $n-p$.

Teorema Tipo 3 non cambia il rk

Sia $(A|b)$ una matrice completa, un' op. el. di 3° tipo non ne modifica il rk

Dim : $A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{1n} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3 \end{array}\right)$ $\quad R_2 = \lambda R_1 + R_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{22} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ (\lambda a_{11} + a_{21}) & (\lambda a_{22} + a_{22}) & \dots & (\lambda a_{2n} + a_{2n}) & \lambda b_1 + b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3 \end{array}\right)$$

La 2° riga la posso scrivere come

$$\lambda(a_{11} x_i + \dots + a_{1n} x_n) + (a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n) = \lambda b_1 + b_2$$

ragionando $\lambda(a_{11} x_i + \dots + a_{1n} x_n) = \lambda b_1$ mentre $(a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n) = b_2$

$\Rightarrow$ le 2 eq. sono uguali.

Teorema Autovalori

Gli autovalori sono le soluzioni dell' eq. caratteristica.

Dim: Partiamo dalla def. di autovalore λ : $Ax = \lambda x$ con $x \neq 0$

Aggiungiamo una I al 2° membro : $Ax = \lambda I x$

$Ax - \lambda I x = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0$ ← sistema lineare omogeneo con λ come parametro

Abbiamo un'unica soluzione se $rk(A - \lambda I) = n$, ma dovendo escludere la soluzione banale $\underbrace{rk(A - \lambda I) < n}$ $\Rightarrow$ soluzioni infinite

$$\Updownarrow$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Teorema Spazio nullo come spazio vettoriale

$u, K : u \neq K$, $Au = 0$ & $AK = 0$

$t = \lambda_1 u + \lambda_2 K \Rightarrow At = \lambda_1 \underset{\downarrow\, 0}{Au} + \lambda_2 \underset{\downarrow\, 0}{AK} = 0$

$At = 0$ Soluzione

Dato che t è comb. lineare di u e K, tutte le condizioni dello spazio vettoriale sono rispettate

Disuguaglianza di Cauchy - Swartz

Detti v e $w \in V$ $\quad |v \cdot w| \leq |v| \cdot |w|$

Dim: Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad (v + \lambda w)^2 \geq 0 \quad \forall v, w \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$v \cdot v + 2\lambda v \cdot w + \lambda^2 w \cdot w \geq 0$

$|v|^2 + 2\lambda v w + \lambda^2 |w|^2 \geq 0$

$\lambda^2 |w|^2 + 2\lambda v w + |v|^2 \geq 0$ Quando una diseq. è sempre > 0 ?

Quando il Δ dell'eq. associata è < 0

$\frac{\Delta}{4} = (v \cdot w)^2 - |v|^2 |w|^2 < 0$

$(v \cdot w)^2 \leq |v|^2 |w|^2$

$|v \cdot w| \leq |v| \, |w|$