Dipartimento di Ingegneria
Università del Sannio

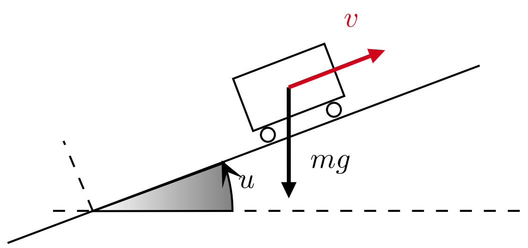
Corso di Sistemi Dinamici

A.A. 2020/2021

Tempo a disposizione: 80 min. È consentita la consultazione di testi e appunti.

07 Giugno 2021 Matricola: .... Candidato(a): ....

1. Un carrellino di massa m si muove con velocità v su un piano inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo u modificato da un motore. Il movimento è soggetto a un attrito viscoso β.



   (a) Scrivere il modello ingresso-uscita del sistema in oggetto considerando u come ingresso e v come uscita;

   (b) Determinare il sistema linearizzato intorno al punto di equilibrio corrispondente a un ingresso costante $\bar{u}$;

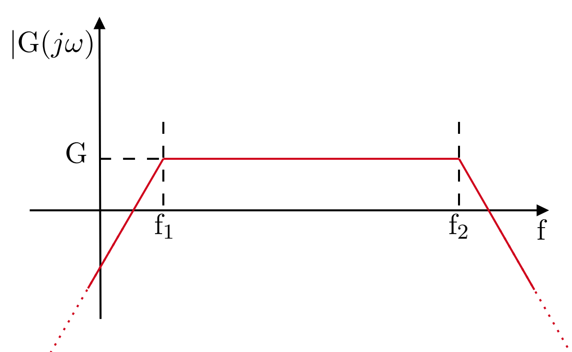
   (c) Determinare costante di tempo e guadagno statico;

   (d) Per $m = 10\,\text{kg}$, $\beta = 1\,\text{Nsm}^{-1}$, $g = 9.8\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$, $\bar{u} = 5°$, calcolare la velocità di regime.

2. La funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{ks}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

   ha approssimativamente la seguente risposta armonica in ampiezza

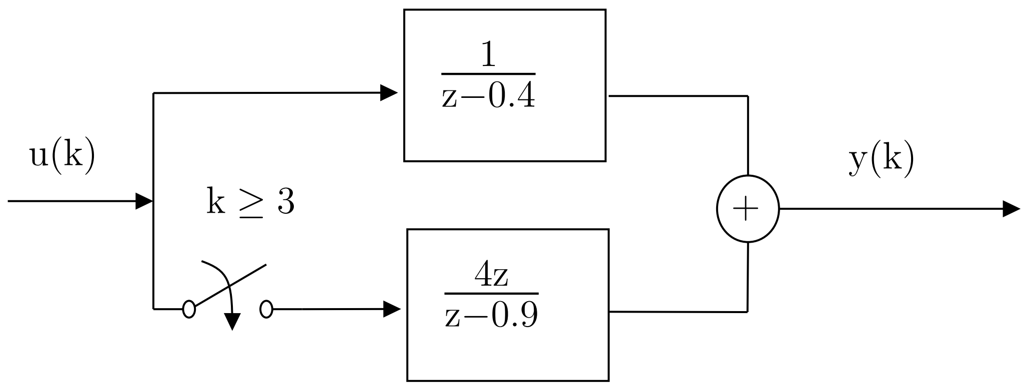


 Question 2 continues on the next page...

(a) Determinare i parametri della fdt in modo che $f_1 = 100\,\mathrm{Hz}$, $f_2 = 15\,\mathrm{kHz}$, $G = 0\,\mathrm{dB}$;

(b) Qual è la frequenza mezza decade sopra $f_2 = 15\,\mathrm{kHz}$ e quanto vale lì l'attenuazione approssimativamente?

3. Dato il sistema t.d. del seguente schema a blocchi



(a) Calcolare la f.d.t. complessiva con interruttore chiuso, il polo dominante e il tempo di assestamento all 1%;

(b) Calcolare la risposta al gradino (con interruttore che si chiude all'istante $k = 3$).

SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DI SD del 7/6/2021

Esercizio 1

(a) Proiettando la forza peso nella direzione del piano inclinato e applicando l'equazione di Newton si ha

$$m\dot{v} = -\beta v - mg \sin u \qquad (*)$$

(b) In corrispondenza dell'ingresso costante $\bar{u}$ la velocità d'equilibrio soddisfa l'equazione algebrica

$$0 = -\beta \bar{v} - mg \sin \bar{u} \qquad (**)$$

$$\bar{v} = -\frac{mg}{\beta} \sin \bar{u}$$

(Infatti con angolo nullo la velocità di equilibrio è nulla, per angoli positivi la $\bar{v}$ è negativa, ecc.)

Poniamo ora $v = \bar{v} + \delta v$
$u = \bar{u} + \delta u$

e sostituiamo in $(*)$ per ottenere

$$m\,\delta\dot{v} = -\beta(\bar{v} + \delta v) - mg \sin(\bar{u} + \delta u)$$

$$\cong -\beta\bar{v} - \beta\,\delta v - mg\underbrace{\left[\sin\bar{u} + (\cos\bar{u})\,\delta u\right]}_{\text{sviluppo in serie del I ordine}}$$

$$= -\beta\bar{v} - \beta\,\delta v - mg\sin\bar{u} - mg(\cos\bar{u})\,\delta u$$

$$= -\beta\,\delta v - mg(\cos\bar{u})\,\delta u \qquad \text{(in virtù della } (**) \text{)}$$

In definitiva, il sistema linearizzato è

$$\boxed{\delta\dot{v} = -\frac{\beta}{m}\delta v - \underbrace{g(\cos\bar{u})}\delta u} \qquad (***)$$

attenzione! Questa è una costante...

(c) La (***) è la "classica" equazione del I ordine. L'autovalore è $-\frac{\beta}{m}$ e dunque la costante di tempo vale $T = \frac{m}{\beta}$. Il guadagno statico posso ottenerlo ad esempio calcolando il punto di equilibrio della (***)

$$0 = -\frac{\beta}{m}\delta\bar{v} - g(\cos\bar{u})\delta\bar{u}$$

$$\delta\bar{v} = \underbrace{\left[-\frac{mg(\cos\bar{u})}{\beta}\right]}_{\text{guadagno statico}}\delta\bar{u}$$

(d) Basta usare la formula (**)

Esercizio 2

$$G(s) = \frac{ks}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

(a) $f_1 = 100\ \text{Hz} \Rightarrow \omega_1 = 2\pi\, 100$ ← primo punto di rottura

$$= 628\ \text{rad/s}$$

$$T_1 = 1.59 \times 10^{-3}\ \text{s}$$

$f_2 = 15\ \text{kHz} \Rightarrow \omega_2 = 2\pi \cdot 15{,}000$ ← secondo punto di rottura

$$= 283 \times 10^{3}\ \text{rad/s}$$

$$T_2 = 3.54 \times 10^{-6}\ \text{s}$$

Per determinare k notiamo che la prima parte del diagramma di Bode è determinata proprio dal termine (ks) e vogliamo che il diagramma dei moduli di (ks) valga $0\,dB = 1$ alla frequenza $f_1 = 100$ Hz, cioè alla pulsazione $\omega_1 = 628$ rad/s.

In altri termini

$$|ks|_{s=j\omega_1} = |k\,j\,628| = 1$$

$$k = 1/628$$

(b) Nell'ultimo tratto del diagramma di Bode il guadagno perde 20 dB/dec e dunque in mezza decade (cioè alla frequenza $15.000 \times 10^{1/2} \cong 47$ kHz) perde 10 dB. In altri termini il guadagno di amplificazione a quella frequenza vale -10 dB.

Esercizio 3

(a) La fdt complessiva sarà la somma delle due fdt:

$$\frac{1}{z-0.4} + \frac{4z}{z-0.9}$$

Il polo dominante è quello di modulo maggiore, dunque 0.9. Il tempo di assestamento si calcola risolvendo l'equazione $(0.9)^k \leq 0.01$

Prendendo il log di entrambi i membri della disuguaglianza otteniamo

$$k \ln 0.9 \leq \ln 0.01$$

$$-0.11\, k \leq -4.61$$

$$0.11\, k \geq 4.61$$

$$k \geq \frac{4.61}{0.11} = 41.9$$

Dunque il tempo d'assestamento all'1% e' pari a 42 (ricordare che stiamo trattando un sistema t.d.)

(b) Ci si rende facilmente conto che effetto dell'interruttore e' l'applicazione di un gradino al secondo sistema dall'istante 3 in poi, insomma una traslazione della risposta al gradino di 3 passi.

La risposta y_1 (ramo superiore) e' data da

$$y_1(k) = Z^{-1}\left(\frac{1}{z-0.4}\;\frac{z}{z-1}\right)$$

$$= Z^{-1}\left(\frac{A}{z-0.4} + \frac{B}{z-1}\right)$$

$$= \left[A\,(0.4)^{k-1} + B\right]\delta_{-1}(k-1)$$

(con A e B da determinare come e' questione più semplice, si può omettere)

Per calcolare $y_2(k)$, la risposta sul secondo ramo, calcoliamo prima la risposta al gradino del blocco di fdt $\frac{4z}{z-0.9}$, e cioè

$$\tilde{y}_2(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{4z}{z-0.9}\ \frac{z}{z-1}\right)$$

$$= \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{Cz}{z-0.9} + \frac{Dz}{z-1}\right)$$

$$= \left(C\,0.9^k + D\right)\delta_{-1}(k)$$

C e D da determinare, ma questa sintesi basta e avanza

Ora traslliamo tutto di 3 passi ottenendo

$$y_2(k) = \tilde{y}_2(k-3)$$

$$= \left(C\,0.9^{k-3} + D\right)\delta_{-1}(k-3)$$

In definitiva

$$y(k) = y_1(k) + y_2(k)$$