15 Forme quadratiche

Definizione 15.1 (Forme quadratiche) *Una **forma quadratica** è un polinomio omogeneo di secondo grado in n variabili:* $F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$*. Una forma quadratica può essere scritta in notazione matriciale come* $F = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$*, essendo*

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

e

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

*Pertanto chiameremo F **forma quadratica associata associata alla matrice*** $\boldsymbol{A}$.

Esempio 15.1 *Una forma quadratica in due variabili è* $a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2$*. In forma matriciale essa è data dal prodotto* $\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$*, dove*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Definizione 15.2 (Simmetrizzazione della matrice $\boldsymbol{A}$) *La matrice* $\boldsymbol{A}$ *di una forma quadratica* $F = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ *può essere sempre resa simmetrica. Si ha infatti* $F = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$*, dove il generico elemento della matrice* $\boldsymbol{B}$ *è* $b_{ij} = \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}$

Definizione 15.3 (Matrici definite positive) *Una matrice quadrata* $\boldsymbol{A}$ *si dice **definita positiva** se la forma quadratica associata* $F = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ *assume valori positivi per ogni* $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ *(è evidente che* $F = 0$ *se* $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$*), i.e.* $F = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0, \forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.

Definizione 15.4 (Matrici semidefinite positive) *Una matrice quadrata* $\boldsymbol{A}$ *si dice **semidefinita positiva** se la forma quadratica associata* $F = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ *assume valori non negativi per ogni* $\boldsymbol{x}$ *(si può cioè avere* $F = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$ *anche per* $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$*, i.e.* $F = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0, \forall \boldsymbol{x}$ *ed esiste almento un vettore* $\boldsymbol{x} \neq 0$ *tale che* $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$.

Definizione 15.5 (Matrici definite negative) *Una matrice quadrata* $\boldsymbol{A}$ *si dice **definita negativa** se la forma quadratica associata* $F = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ *assume valori negativi per ogni* $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ *(è evidente che* $F = 0$ *se* $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$*), i.e.* $F = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} < 0, \forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.

Definizione 15.6 (Matrici semidefinite negative) *Una matrice quadrata* $\boldsymbol{A}$ *si dice **semidefinita negativa** se la forma quadratica associata* $F = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ *assume valori non positivi per ogni* $\boldsymbol{x}$ *(si può cioè avere* $F = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$ *anche per* $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$*, i.e.* $F = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq 0, \forall \boldsymbol{x}$ *ed esiste almento un vettore* $\boldsymbol{x} \neq 0$ *tale che* $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$

Definizione 15.7 (Matrici indefinite) *Una matrice quadrata* $\boldsymbol{A}$ *si dice* ***indefinita*** *se la forma quadratica associata* $F = \boldsymbol{x^T A x}$ *può assumere sia valori negativi che positivi al variare di* $\boldsymbol{x}$.

Per riconoscere se una matrice $\boldsymbol{A}$ associata ad una forma quadratica è definita positiva, definita negativa, semidifefinita positiva, semidefinita negativa o indefinita, utilizziamo il seguente teorema per trasformare la forma quadratica F in una forma quadratica che non contiene termini misti.

Teorema 15.1 (Diagonalizzazione di una forma quadratica) *Siano* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *gli* n *autovalori della matrice quadrata* $\boldsymbol{A}$. *È possibile trovare una trasformazione di variabili per cui una forma quadratica*

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \boldsymbol{x^T A x}$$

può essere espressa in una forma semplificata del tipo $F = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$.

Dimostrazione Essendo $\boldsymbol{A}$ una matrice simmetrica, possiamo utilizzare il teorema spettrale e porre $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q^T D Q}$, dove $\boldsymbol{D}$ è la matrice diagonale degli autovalori e $\boldsymbol{Q}$ è la matrice degli autovettori normalizzati. Possiamo perciò scrivere $F = \boldsymbol{x^T Q^T D Q x}$. Ponendo poi $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q y}$ e sostituendo otteniamo $F = \boldsymbol{y^T D y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$. ◇

Il seguente teorema ci consente di riconoscere la "natura" di una forma quadratica guardando solo al segno degli autovalori di $\boldsymbol{A}$, che indichiamo con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Teorema 15.2 *Una matrice* $\boldsymbol{A}$ *associata ad una forma quadratica è:*

- *definita positiva: se* $\lambda_i > 0$ *per* $i = 1, \ldots, n$;
- *definita negativa: se* $\lambda_i < 0$ *per* $i = 1, \ldots, n$;
- *semidefinita positiva: se* $\lambda_i \geq 0$ *per* $i = 1, \ldots, n$ *ed esiste almeno un* $\lambda_j = 0$;
- *semidefinita negativa: se* $\lambda_i \leq 0$ *per* $i = 1, \ldots, n$ *ed esiste almeno un* $\lambda_j = 0$;
- *indefinita: se esistono distinti* i *e* j *tali che* $\lambda_i > 0$ *e* $\lambda_j < 0$.

Dimostrazione. Trasformando la forma quadratica $\boldsymbol{x^T A x}$ nella $\boldsymbol{y^T D y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$ attraverso la diagonalizzazione, abbiamo che il segno di $\boldsymbol{y^T D y}$ dipende solo dagli elementi della matrice $\boldsymbol{D}$, cioè dagli autovalori di $\boldsymbol{A}$. ◇