13 Sistemi di equazioni lineari

Definizione 13.1 (Equazione Lineare) *Si definisce **equazione lineare** un'espressione della forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_nx_n = b,$$

dove $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono numeri reali, detti coefficienti dell'equazione, $x_1, \dots, x_n$ sono dette incognite e $b \in \mathbb{R}$ si dice termine noto.

Definizione 13.2 (Soluzione di un'equazione lineare) *Una soluzione di un'equazione lineare $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, è una n-upla di numeri reali $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n$ che verifichi l'equazione, tale cioè che $a_1\bar{s}_1 + a_2\bar{s}_2 + \dots a_n\bar{s}_n = b$.*

risolvere un'equazione lineare significa determinare tutte le n-uple che verifichino l'equazione.

Definizione 13.3 (Sistema di equazioni lineari) *Un **sistema di equazioni lineari** è un insieme di equazioni lineari che devono essere soddisfatte simultaneamente:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

dove le incognite sono $x_1, x_2, \dots, x_n$, i coefficienti sono $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}$ e i termini noti sono $b_1, b_2, \dots, b_m$.

Esempio 13.1 (Sistema di equazioni lineari) *Il seguente è un sistema lineare di tre equazioni in quattro incognite.*

$$\begin{cases} 3x_1 + 11x_2 - 4x_3 = -1 \\ -2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ 1x_1 + 5x_2 - \frac{4}{3}x_3 + \sqrt{3}x_4 = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Definizione 13.4 (Soluzione di un sistema di equazioni lineari) *Si definisce **soluzione di un sistema lineare di** m **equazioni in** n **incognite** una n-pla $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ che è soluzione di tutte le equazioni del sistema, contemporaneamente.*

Definizione 13.5 (Sistemi di equazioni lineari consistente) *Un sistema di equazioni lineari si dice **consistente** o **compatibile** se ammette almeno una soluzione. Viceversa, il sistema si dice **impossibile**.*

Esempio 13.2 *Il sistema seguente di due equazioni in due incognite*

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

è impossibile. Il sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + y = 1. \end{cases}$$

è invece compatibile, infatti ammette la soluzione $(x, y) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

Per trattare un sistema sistema di equazioni lineari è opportuno introdurre la notazione matriciale.

Definizione 13.6 (Notazione matriciale di un sistema lineare) *Dato un sistema di equazioni lineari, sia*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

il vettore colonna delle incognite. Sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

la ***matrice dei coefficienti*** *e sia*

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

il ***vettore dei termini noti****. Un sistema di equazioni lineari può essere descritto in forma matriciale:*

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{3}$$

dove $\mathbf{A}$ *è appunto la matrice dei coefficienti di tipo* $m \times n$, $\mathbf{x}$ *è un vettore colonna di tipo* $n \times 1$, $\mathbf{b}$ *è un vettore colonna di tipo* $m \times 1$ *e l'espressione* $\mathbf{Ax}$ *indica il prodotto riga per colonna tra* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{x}$.

Esempio 13.3 *Il sistema di equazioni lineari dell'esempio 13.1, in notazione matriciale diventa:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 11 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & -\frac{4}{3} & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Può anche accadere che un sistema lineare ammetta più di una soluzione. Si dimostra che,

Teorema 13.1 *Se un sistema di equazioni lineari ammette più di una soluzione, allora ne ammette infinite.*

Dim. Supponiamo che un sistema lineare di m equazioni in n incognite, consistente, ammetta due soluzioni $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ ed $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$. Questo significa che:

$$\mathbf{Ar} = \mathbf{b} \text{ e } \mathbf{As} = \mathbf{b}$$

Consideriamo una nuova $n-$pla t data da

$$\mathbf{t} = \lambda\mathbf{s} + \mu\mathbf{r} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \lambda + \mu = 1$$

avremo allora:

$$\mathbf{At} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{s} + \mu\mathbf{r}) = \lambda\mathbf{As} + \mu\mathbf{At} = \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{b} = (\lambda + \mu)\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

Dunque $\mathbf{t}$ è una soluzione per il nostro sistema lineare. Inoltre, essendo $\mathbf{t}$ composta da infinite $n-$ple ottenute al variare di λ e $\mu = 1 - \lambda \in \mathbb{R}$, le soluzioni saranno infinite.

Esempio 13.4 *Il sistema di due equazioni in due incognite*

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0. \end{cases}$$

ammette infinite soluzioni del tipo $(x, y) = (-t, t), t \in \mathbb{R}$.

Definizione 13.7 (Matrici associate ad un sistema di equazioni lineari) *La matrice* $\mathbf{A}$ *dei coefficienti del sistema è detta* ***matrice incompleta del sistema****, mentre la matrice* $\mathbf{A}' = [\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$*, che comprende la matrice dei coefficienti* $\mathbf{A}$ *e la colonna dei termini noti* $\mathbf{b}$*, è detta* ***matrice completa del sistema****.*

Esempio 13.5 *Con riferimento alla Definizioni 13.7 e 13.3 si ha*

$$\mathbf{A}' = [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \tag{4}$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \\ b_n \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

Esempio 13.6 (Matrice incompleta e completa di un sistema di equazioni lineari) *Per il sistema lineare*

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = -1 \end{cases}$$

si ha:

$$\mathbf{A}' = [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Teorema 13.2 (Esistenza delle soluzioni in un sistema di equazioni lineari) *Un sistema lineare ammette soluzioni se e solo se il vettore dei termini noti* $\boldsymbol{b}$ *è linearmente dipendente dai vettori colonna di* $\boldsymbol{A}$*.*

Dim. Siano $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^n$, n vettori colonna, di m righe, corrispondenti alle colonne della matrice A dei coefficienti e sia $\mathbf{b}$ il vettore dei termini noti. Un sistema di equazioni lineari può essere descritto anche come equazione vettoriale:

$$\mathbf{a}^1 x_1 + \mathbf{a}^2 x_2 + \dots + \mathbf{a}^n x_n = \mathbf{b} \tag{6}$$

Esempio 13.7 *Il sistema lineare*

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ 5x - 4y + 2z = 6 \end{cases}$$

può essere scritto come

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Ne segue da questa rappresentazione di un sistema di equazioni lineari, che la compatibilità di un sistema di equazioni lineari equivale a dire che il vettore dei termini noti $\boldsymbol{b}$ è linearmente dipendente dai vettori colonna $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n$ o, in altri termini, che esistono n scalari $x_1, \ldots, x_n$ tali che il vettore $\mathbf{b}$ possa essere espresso come combinazione lineare tramite questi, dei vettori colonna $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n$.

Esempio 13.8 *Con riferimento all'esempio 13.1, si ha che le colonne del sistema sono*

$$\boldsymbol{a}^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}^2 = \begin{bmatrix} 11 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}^3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 13.3 (Teorema di Rouchè-Capelli) *Un sistema lineare ammette soluzioni se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della matrice incompleta, se cioè $rk(\boldsymbol{A}) = rk(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$.*

Dim. Supponiamo che $rk(\boldsymbol{A}) = rk(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$. Questo implica che il vettore $\boldsymbol{b}$ dipende linearmente dai vettori colonna di $\boldsymbol{A}$ e cioè che esiste $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tale che $\boldsymbol{A}\alpha = \boldsymbol{b}$. Dunque, le componenti di α costituiscono una soluzione del sistema lineare. Viceversa, se il sistema possiede almeno una soluzione, significa che esiste un vettore $u = (u_1, \ldots, u_n)$ tale che $\boldsymbol{A}u = \boldsymbol{b}$. Quindi le componenti di questo vettore sono i coefficienti di una combinazione lineare delle colonne di $\boldsymbol{A}$, per cui $\boldsymbol{b}$ è linearmente dipendente dalle colonne di $\boldsymbol{A}$. Questo implica che aggiungendo $\boldsymbol{b}$ ad $\boldsymbol{A}$, il massimo numero delle colonne linearmente indipendenti di $\boldsymbol{A}$ non cambia. Dunque $rk(\boldsymbol{A}) = rk(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$.

Teorema 13.4 *Sia $p = rk(A) = rk(A|b)$. Se $p < m$, esistono p righe del sistema linearmente indipendenti e $m - p$ righe linearmente dipendenti. Ogni soluzione del sistema ridotto formato dalle sole p righe linearmente indipendenti, soddisfa anche le restanti $m - p$ righe linearmente dipendenti.*

Dim. Supponiamo, senza perdita di generalità, che le prime p righe siano linearmente indipendenti. Sia $[a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn}b]$ una delle righe linearmente dipendenti dalle prime p. Si avrà pertanto $a_{m1} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{i1}$, $a_{m2} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{i2}$, $\ldots$, $a_{mn} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{in}$ e $b_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i b_i$. Ne consegue che ogni soluzione che soddisfa le prime p equazioni, sarà soluzione anche di quelle che dipendono linearmente da queste p.

Osservazione 13.1 *Un sistema che ha alcune equazioni linearmente dipendenti da altre, è un sistema ridondante quindi, in base al teorema enunciato, possiamo ricercare le sue soluzioni trovando quelle del sistema ridotto in cui sono presenti solo le sue equazioni significative, cioè quelle linearmente indipendenti.*

Teorema 13.5 (Sistemi di equazioni lineari con un'unica soluzione) *Sia $p = rk(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}|\mathbf{b})$. Un sistema di equazioni lineari ammette un'unica soluzione se e solo se $p = n$ (p uguale al numero delle incognite).*

Dim. Se $p = n$ infatti, il numero di equazioni significative è pari al numero delle incognite. Allora, per trovare le soluzioni del nostro sistema, possiamo limitarci a trovare le soluzioni delle equazioni significative, il che equivale a studiare un sistema la cui matrice dei coefficienti è quadrata, dunque invertibile. Per cui l'unica soluzione che stiamo cercando è :

$$x = A^{-1}b$$

Teorema 13.6 (Sistemi di equazioni lineari con infinite soluzioni) *Sia $p = rk(A) = rk(A|b)$. Un sistema di equazioni lineari ammette infinite soluzioni se e solo se $p < n$ (p uguale al numero delle incognite).*

Dim. Se $p < n$, il sistema presenta più incognite che equazioni sostanziali. Questo sistema è

$$\mathbf{a}^1 x_1 + \mathbf{a}^2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}^p x_p + \mathbf{a}^{p+1} x_{p+1} + \ldots + \mathbf{a}^n x_n = \mathbf{b}$$

Assegnando arbitrariamente dei valori numerici ad $n - p$ incognite che, senza ledere le generalità, possiamo supporre siano le ultime $n - p$, otteniamo

$$\mathbf{a}^1 x_1 + \mathbf{a}^2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}^p x_p = \mathbf{b} - \mathbf{a}^{p+1} x_{p+1} - \ldots - \mathbf{a}^n x_n = \overline{\mathbf{b}}$$

ottenendo così un sistema di p equazioni in p incognite che, per il teorema precedente, ammette una soluzione. Se chiamiamo infatti A_p la matrice dei coefficienti del nuovo sistema, la soluzione è

$$x = A_p^{-1}\overline{\mathbf{b}}$$

Vista l'arbitrarietà della scelta dei valori numerici abbiamo infinite possibilità e per ogni assegnazione otteniamo una soluzione al sistema, ottenendo così infinite soluzioni.

13.1 Sistemi di equazioni lineari omogenei e spazio nullo di una matrice

Definizione 13.8 (Sistemi di equazioni lineari omogenei) *Un sistema di equazioni lineari si dice* ***omogeneo*** *se la colonna dei termini noti è un vettore nullo, i.e.* $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Esempio 13.9 *Il sistema*

$$\begin{cases} 3x - 5y - z = 0 \\ 7y - 3z = 0 \end{cases}$$

è un sistema di due equazioni in tre incognite omogeneo.

Si noti che un sistema lineare omogeneo è sempre risolubile, in quanto l'n-upla nulla è sempre soluzione del sistema, detta **soluzione banale**.

Osservazione 13.2 (Soluzioni di un sistema lineare omogeneo) *Risolvere un sistema lineare omogeneo, dunque, non significa verificare l'esistenza di una soluzione (che, appunto, esiste sempre), bensì determinare tutte le soluzioni.*

Teorema 13.7 *Un sistema lineare omogeneo ammette soluzioni non banali se e solo se il rango della matrice associata è strettamente minore del numero delle incognite. Altrimenti, infatti, ne ammetterebbe solo una, che è appunto la soluzione banale.*

Dim. Dal Teorema 13.5 segue che la soluzione banale è l'unica soluzione di un sistema lineare omogeneo se e solo se il rango della matrice associata è uguale al numero delle incognite. Pertanto, il sistema lineare omogeneo ammette altre soluzioni non banali se e solo se tale rango è minore del numero delle incognite.

Teorema 13.8 (Spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo) *L'insieme $\mathcal{S}_0$ delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, con A matrice di tipo $m \times n$, costituisce un sottospazio di R^n.*

Dim. Siano s_1 ed s_2 due soluzioni del sistema, allora risulta

$$\mathbf{A}(\lambda_\mathbf{1}\mathbf{s_1} + \lambda_\mathbf{2}\mathbf{s_2}) = \mathbf{A}\lambda_\mathbf{1}\mathbf{s_1} + \mathbf{A}\lambda_\mathbf{2}\mathbf{s_2} = \lambda_\mathbf{1}\mathbf{As_1} + \lambda_\mathbf{2}\mathbf{As_2} = 0$$

e quindi $\lambda_\mathbf{1}\mathbf{s_1} + \lambda_\mathbf{2}\mathbf{s_2}$ è ancora soluzione del sistema lineare omogeneo assegnato. Pertanto l'insieme $\mathcal{S}_0$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Il teorema precedente ci consente di procedere alla seguente definizione.

Definizione 13.9 *Sia A una matrice di tipo $m \times n$ e si consideri il sistema lineare omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ associato alla matrice A; il sottospazio vettoriale $\mathcal{S}_0$ di $\mathbb{R}^n$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato alla matrice A si definisce* ***spazio nullo della matrice*** *A; la dimensione dello spazio nullo della matrice A è chiamata* ***nullità di*** *A.*

Teorema 13.9 *Sia A una matrice di tipo $m \times n$ di rango p; allora la nullità di A è $n - p$.*

Dim. Sia U la matrice ridotta a scala per righe della matrice A. Poichè il rango della matrice A è p, allora esistono un numero p di righe non nulle nella matrice U. Equivalentemente, il sistema omogeneo $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$ associato alla matrice U coinvolge $n - p$ variabili libere. La nullità della matrice A coincide col numero di variabili libere $n - p$.

13.2 Spazio delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari

Definizione 13.10 (Sistema lineare omogeneo associato ad un sistema lineare) *Dato un sistema di equazioni lineari non omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, si definsce* ***sistema lineare omogeneo associato*** *a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, il sistema che ha la stessa matrice incompleta, ma come colonna dei termini noti il vettore nullo, i.e.* $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$

Teorema 13.10 (Soluzioni di un sistema lineare) *Sia $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ un sistema lineare consistente. Sia $\mathcal{S}$ l'insieme delle sue soluzioni, $\overline{s}$ una sua soluzione particolare ed $\mathcal{S}_0$ l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato. Si ha:*

$$\mathcal{S} = \overline{s} + \mathcal{S}_0$$

cioè, ogni soluzione di questo sistema si ottiene sommando ad $\overline{s}$ una soluzione del sistema omogeneo associato e, viceversa, sommando ad $\overline{s}$ una soluzione del sistema omogeneo associato, si ottiene una soluzione del sistema dato.

13.3 Soluzione di sistemi di equazioni lineari mediante eliminazione di Gauss

Definizione 13.11 (Sistemi lineari equivalenti) *Due sistemi di equazioni lineari si dicono* ***equivalenti*** *se ammettono le stesse soluzioni.*

Esempio 13.10 *Ad esempio, risultano equivalenti i sistemi*

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} 2x - 2y = 8 \\ x = 2 \end{cases}$$

che ammettono entrambi come unica soluzione $(2, -2)$.

Di seguito presentiamo alcune operazioni elementari che consentono di trasformare un dato sistema lineare in uno ad esso equivalente.

Definizione 13.12 (Operazioni elementari sulle righe di un sistema) *Le operazioni elementari sulle righe di un sistema sono:*

i) scambio di due equazioni;

ii) sostituzione di una equazione con una multipla di questa;

iii) sostituire un'equazione con la stessa a cui ne sia stata aggiunta un'altra moltiplicata per uno scalare.

Esempio 13.11 *Nel caso dell'esempio 13.10, il secondo sistema è ottenuto dal primo moltiplicando l'ultima equazione per lo scalare* 2 *e sommando le due equazioni del primo dopo averle moltiplicate per lo scalare* $\frac{1}{2}$.

Teorema 13.11 *Le operazioni elementari sulle righe trasformano un sistema di equazioni lineari in un sistema equivalente, cioè non alterano l'insieme delle soluzioni.*

Osservazione 13.3 *È importante osservare che le operazioni sulle righe di un sistema (cf. Definizione 13.12) non sono altro che operazioni elementari sulle righe della matrice del sistema* $\mathbf{A}' = [\mathbf{A}|\mathbf{b}]$.

Le operazioni elementari (cf. Definizione 13.12), consentono appunto di passare da ogni sistema lineare ad un sistema ad esso equivalente a scala.

Dal momento che le operazioni elementari su di un sistema lineare non sono altro che operazioni elementari sulla matrice associata al sistema, due sistemi sono equivalenti (cf. Definizione 13.11)se e solo se le matrici rappresentative sono fra loro equivalenti.

Poiché ogni sistema è identificabile con la matrice che lo rappresenta, si parla indifferentemente di equazioni linearmente indipendenti (o dipendenti) o di righe linearmente indipendenti (o dipendenti), o ancora, di rango del sistema o della matrice incompleta che lo rappresenta.

Consideriamo un sistema $n \times n$. Un sistema del genere ammette esattamente una soluzione.

Definizione 13.13 (Sistemi triangolari) *Un sistema è in **forma triangolare** se nella $k-$ma equazione, i coefficienti delle prime $k-1$ variabili sono tutti zero, e i coefficienti di x_k sono non nulli, per $k = 1, ...n$.*

Esempio 13.12 *Il sistema*

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ y - z = 2 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

è in forma triangolare. Un sistema in forma triangolare è semplice da risolvere. Dalla terza equazione, segue che $z = 2$. Sostituendo questo valore nella seconda equazione otteniamo $y - 2 = 2$ dunque $y = 4$. Sostituendo $y = 4, z = 2$ nella prima equazione, concludiamo che $3x + 2 \cdot 4 + 2 = 1$, dunque $x = -3$. La soluzione del sistema è $(-3, 4, 2)$.

Ogni sistema triangolare $n \times n$ può essere risolto in questo modo. Più in generale, l'$n-$ma equazione dà il valore x_n. Questo viene sostituito nella $(n-1)-$ma equazione, per trovare x_{n-1}. I valori x_n ed x_{n-1} vengono utilizzati nella $(n-2)-$ma equazione per trovare x_{n-2} e così via.

Osservazione 13.4 *Se un sistema $n \times n$ di equazioni non è triangolare, si possono usare delle operazioni elementari per trasformarlo in un sistema equivalente che sia però in forma triangolare.*

Esempio 13.13 *Si consideri il sistema di tre equazioni in tre incognite*

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ y - z = 0 \\ 4x + 5y + 4z = 1 \end{cases}$$

Risulta che la matrice completa del sistema è di tipo 3×4:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

È possibile ridurre a scala la matrice A' con l'Algoritmo di Gauss, ottenendo la matrice S equivalente ad A'

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix},$$

per cui il sistema di partenza è equivalente ad

$$\begin{cases} 4x + 5y + 4z = 1 \\ y + z = 2 \\ -2z = -2 \end{cases},$$

che ammette un'unica soluzione $\{(-2, 1, 1)\}$.

Definizione 13.14 (Sistemi lineari a scala) *Un sistema di equazioni lineari si dice **a scala** se la sua matrice completa è a scala.*

Esempio 13.14 *Considerato il sistema lineare*

$$\begin{cases} x - y + t = 0 \\ y - z = 2 \\ z + t = 1 \end{cases} \tag{7}$$

la sua matrice completa

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

è una matrice a scala per righe, dunque il sistema è a scala.

Osservazione 13.5 (Sistemi di equazioni lineari impossibili) *Dato un sistema a scala è possibile riconoscere subito se ammette o meno soluzioni. Infatti, se nella matrice completa* $\mathbf{A}'$ *è presente una riga del tipo* $0\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ b$*, esso è impossibile.*

Osservazione 13.6 *Sia* $Ax = b$ *un sistema di equazioni lineari a scala. Se* $rk(A) = rk(A') = p < m$*, allora* A' *avrà* $m - p$ *righe nulle, che sono linearmente dipendenti e possono quindi essere eliminate.*

Definizione 13.15 (Risoluzione di un sistema lineare a scala) *Per risolvere un sistema lineare a scala consistente si procede a ritroso a partire dall'ultima equazione* ($k = m$)*: si risove la* k*-sima equazione e si sostituisce la soluzione trovata nella* $(k-1)$*-sima.*

Esempio 13.15 *Con riferimento al sistema dell'Esempio 13.14 si capisce che l'ultima equazione ammette infinte soluzioni, ad esempio se a* t *si dà il valore* λ *si ottiene* $z = 1 - \lambda$*, nella penultima equazione si ha* $y = 3 - \lambda$ *e nella prima equazione* $x = 3$*, i.e. le soluzioni del sistema sono*

$$\{(x, y, z, t) = (3 - 2\lambda, 3 - \lambda, 1 - \lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Osservazione 13.7 *Evidenziata l'importanza dei sistemi a scala, si capisce che l'algoritmo di Gauss può essere utile per la risoluzione dei sistemi lineari. Infatti basta applicare uno di questi algoritmi alla matrice completa di un sistema, per ottenere un'altro sistema a scala, equivalente al primo, di immediata risoluzione.*

Osservazione 13.8 (Numero di parametri nelle soluzioni di un sistema lineare) *Dal teorema di Rouchè Capelli e dalle considerazioni fatte sui sistemi a scala, si deduce che se* $Ax = b$ *è un sistema lineare di* m *equazioni in* n *incognite di rango* $p = rk(A') = rk(A)$*, allora il sistema ammette un'unica soluzione se* $n = p$*,* ∞^{n-p} *soluzioni (che si legge "infinito alla* $n - p$*" soluzioni) se* $p < n$*, ed in tal caso le soluzioni dipendono da* $n - p$ *parametri. Per il calcolo del rango del sistema, talvolta è più utile applicare il teorema degli orlati, piuttosto che la riduzione a scala. I minori coinvolti nel calcolo dell'orlato non singolare individuano anche le righe linearmente indipendenti del sistema, ovvero un sistema equivalente al primo.*

Esempio 13.16 *Si consideri il sistema*

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 6x + 4y - 2z = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases},$$

tale sistema è di tre equazioni in tre incognite, ma è facile verificare che esso ha rango 2, poiché la seconda equazione è ottenuta dalla prima moltiplicandola per 2, pertanto, esso ammette infinite soluzioni, anzi è possibile quantificare "quanto infinite" esse siano. Il fatto che una delle tre incognite si possa scegliere liberamente, si esprime dicendo che "l'insieme delle soluzioni ha un grado di libertà" Ci sono cioè ∞^1 *soluzioni, cioè soluzioni che dipendono da un parametro. In forma matriciale, si vede subito che*

$$A' = [A|b] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e la seconda riga è il doppio della prima. Le soluzioni sono dunque $\{(1-6t, t, 3-16t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Il sistema lineare di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} 2y - z = 0 \\ 4y - 2z = 1 \end{cases}$$

è incompatibile, infatti la matrice completa è

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha rango 2*, mentre la matrice incompleta è*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

di rango 1.

13.4 Soluzione di un sistema di equazioni lineari con la regola di Cramer

Definizione 13.16 (Sistema quadrato) *Un sistema lineare si dice quadrato se la matrice incompleta è una matrice quadrata.*

Osservazione 13.9 (Metodo della matrice inversa) *Dato un sistema quadrato* $Ax = b$*, se la matrice* A *non è singolare, cioè risulta* $det(A) \neq 0$*, il sistema ammette una ed una sola soluzione. Moltiplicando a sinistra per* A^{-1} *ambo i membri della relazione, otteniamo*

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

Essendo $A^{-1}A = I$*, si esplicita la soluzione del sistema*

$$x = A^{-1}b$$

Ma la ricerca dell'inversa di una matrice, soprattutto per $n \geq 4$, richiede molto tempo, quindi si utilizzano altri metodi di risoluzione. Dal Teorema 13.3 si deduce il seguente risultato

Teorema 13.12 (Teorema di Cramer) *Un sistema quadrato ammette una ed una sola soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è invertibile.*

Esempio 13.17 *Il sistema lineare*

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ z + y = 0 \\ 2x + z - 2y = 0 \end{cases}$$

è un sistema lineare quadrato.

Fino a questo momento è stato visto che uno dei modi possibili per risolvere un sistema lineare consiste nella riduzione a scala della matrice rappresentativa del sistema stesso e nella risoluzione per sostituzione del sistema equivalente che ammette la matrice a scala come sua matrice associata.

Nel caso in cui si voglia risolvere un sistema lineare quadrato con un numero piccolo di equazioni (diciamo al più tre) può essere conveniente adoperare la **regola di Cramer**.

Teorema 13.13 (Regola di Cramer) *Sia $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ un sistema lineare quadrato di n equazioni lineari tale che $det(A) \neq 0$. Allora, l'unica soluzione del sistema è l'n-upla $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, con*

$$s_i = \frac{\det[A^1 \ldots A^{i-1} B A^{i+1} \ldots A^n]}{\det A}, \text{ per ogni } i = 1, \ldots, n$$

dove la matrice $[A^1 \ldots A^{i-1} B A^{i+1} \ldots A^n]$ è ottenuta da $\mathbf{A}$, sostituendo alla colonna i-esima la colonna dei termini noti.

Esempio 13.18 (Regola di Cramer per un sistema quadrato) *Consideriamo il sistema lineare Si consideri il sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite*

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Notiamo che la matrice $\mathbf{A}$ dei coefficienti del sistema è una matrice invertibile dal momento che $|\mathbf{A}| = -2 \neq 0$. Osserviamo che il fatto che il determinante della matrice sia non nullo significa che la matrice ha rango massimo, cioè 3 e che il sistema avrà una sola soluzione. La regola di Cramer ci dice che le componenti dell'unica soluzione $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, si trovano in questo modo:

$$\overline{x} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{-2} = 4,$$

$$\overline{y} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}{-2} = 0$$

e

$$\overline{z} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}}{-3} = -1$$

L'unica soluzione del sistema è quindi $(4, 0, -1)$

La regola di Cramer può essere adoperata anche per un sistema non quadrato, cioè se è dato un sistema di m equazioni in n incognite, di rango p, allora tale sistema è equivalente ad un altro sistema individuato dalle p righe linearmente indipendenti. D'altra parte, per il Teorema 13.3 è possibile assegnare ad $n-p$ incognite altrettanti $n-p$ parametri (che vanno riletti nel termine noto), si perviene, così, ad un sistema di p equazioni in p incognite al quale si applica la regola di Cramer per i sistemi quadrati.

Esempio 13.19 *Sia dato il sistema di tre* $(m = 3)$ *equazioni in quattro* $(n = 4)$ *incognite*

$$\begin{cases} 3x - y + z + t = 1 \\ 4x - 2z + 2t = 2 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

È facile verificare che il rango di tale sistema è due $(p = 2)$*, infatti la seconda equazione è combinazione lineare della prima e della terza equazione. Il teorema di Rouchè Capelli ci dice allora che ci sono* ∞^2 *soluzioni* (∞^{n-p})*, ottenibili risolvendo il sistema*

$$\begin{cases} 3x - y + z + t = 1 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Assegnando allora a z *e a* t *due valori arbitrari (parametri), i.e.* $z = \lambda$*,* $t = \mu$ *si ottiene il sistema*

$$\begin{cases} 3x - y = 1 - \lambda - \mu \\ x - y = -2\lambda \end{cases}$$

Dato che questo sistema è quadrato, è applicabile la regola di Cramer, che dè luogo a

$$\det(A) = 3 \cdot (-1) - ((-1) \cdot 1) = -2,$$

$$\overline{x} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda - \mu & -1 \\ -2\lambda & -1 \end{bmatrix}}{-2} = \frac{-1 - \lambda + \mu}{-2},$$

$$\overline{y} = \frac{\det \begin{bmatrix} 3 & 1 - \lambda - \mu \\ 1 & -2\lambda \end{bmatrix}}{-2} = \frac{-1 - 5\lambda + \mu}{-2}$$

e la quaterna di soulzioni è

$$\left\{ (x, y, z, t) = \left(\frac{-1 - \lambda + \mu}{-2}, \frac{-1 - 5\lambda + \mu}{-2}, \lambda, \mu \right) : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Osservazione 13.10 (Interpretazione geometrica dei sistemi lineari) *I sistemi lineari consentono di descrivere ed individuare* **sottospazi affini, i.e. rette, piani ed iperpiani** *negli spazi affini ed euclidei. Ad esempio una retta in* $\mathbb{R}^2$ *è data da un'equazione lineare in due incognite, nello spazio* $\mathbb{R}^3$ *è descritta mediante un sistema lineare di due equazioni linearmente indipendenti in tre incognite, un piano in* $\mathbb{R}^3$ *da un'equazione in tre incognite, ecc., ecc. Consideriamo, ad esempio il caso di tre incognite. Un'equazione lineare con tre incongnite, geometricamente rappresenta un piano nello spazio. Un sistema di due equazioni in tre incongnite rappresenta l'intersezione di due piani. Abbiamo tre possibilità:*

- *se i due piani sono distinti e paralleli, non ci sono intersezioni, dunque il sistema non ammette soluzioni;*
- *se i due piani si incontrano in una retta, ci sono* ∞^1 *soluzioni (i punti sulla retta);*
- *se i due piani coincidono, ci sono* ∞^2 *soluzioni (tutti i punti del piano).*

Supponiamo ora di avere un sistema di tre equazioni in due incognite. Esso rappresenta l'intersezione di tre rette nel piano. Anche stavolta abbiamo tre possibilità:

- *se le due rette non hanno alcun punto in comune, non ci sono intersezioni, dunque il sistema non ammette soluzioni;*
- *se le due rette si incontrano in uno stesso punto, c'è un'unica soluzione;*
- *se le due rette coincidono, ci sono* ∞^1 *soluzioni (tutti i punti delle rette).*