Dipartimento di Ingegneria
Università del Sannio

Corso di Sistemi Dinamici

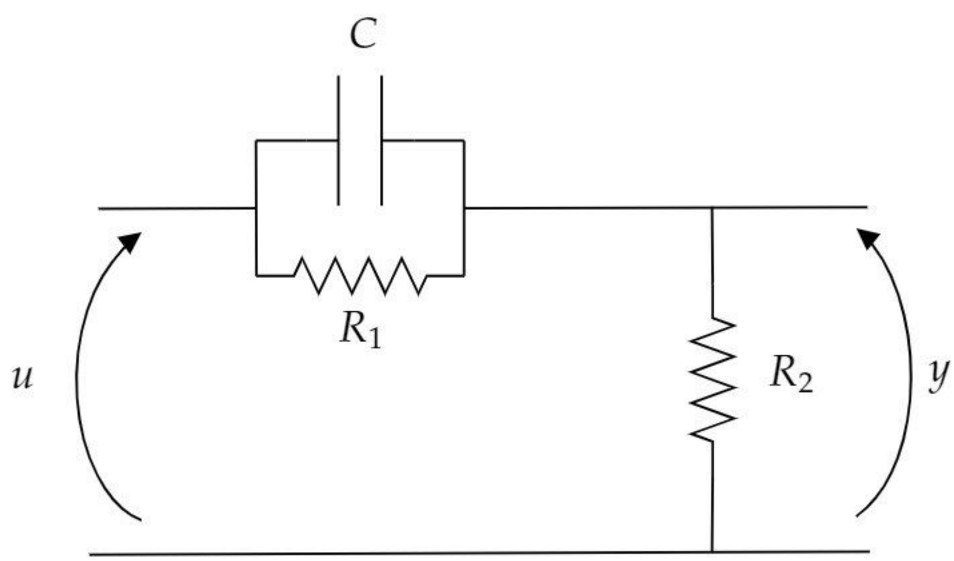
A.A. 2021/2022

Tempo a disposizione: 105 min. È consentita la consultazione di testi e appunti e l'utilizzo di Matlab/Simulink su un portatile.
È categoricamente **vietato** l'utilizzo di qualunque applicazione di **messaggistica** su portatile o smartphone; la trasgressione comporta l'**esclusione dalla prova scritta**.

07 Novembre 2022 Matricola: .... Candidato(a): ....

1. Un ciclista (in altri termini, un carrellino) procede in pianura a "ruota libera". In un certo momento la sua velocità è 30 km/h, dopo 5 s è scesa a 20 km/h. Sapendo che la massa del ciclista e della bicicletta è di 80 kg:
   (a) Calcolare il coefficiente di attrito viscoso β (kg/s);
   (b) Calcolare il tratto percorso nei 5 s;
   (c) Supponendo che dopo i 5 s sopra detti la strada vada in discesa con una pendenza di 10°, quale sarà la velocità a regime e approssimativamente dopo quanto tempo verrà raggiunta.

2. Una rete elettrica è descritta dal seguente schema.



   (a) Calcolare la f.d.t. $u \to y$;
   (b) Tracciare i diagrammi di Bode e discutere come variano in funzione del parametero $\alpha = \frac{R_2}{R_1+R_2}$;
   (c) Qual è la risposta a regime al segnale $u(t) = \bar{u}[1 + \cos(\frac{10}{\alpha R_1 C}t)]$.

3. Data la f.d.t. tempo discreto:

$$G(z) = \frac{z^2}{z^2 + 0.25}$$

determinare:

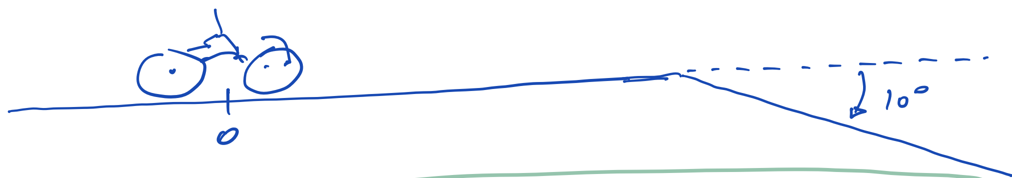
(a) la rappresentazione ingresso-uscita con equazione alle differenze;

(b) i poli del sistema e i corrispondenti modi naturali;

(c) i primi quattro campioni della risposta impulsiva.

Soluzione della prova scritta del 7/11/2022

Ex 1



a) $\boxed{m\dot{v} + \beta v = mg \sin\theta}$ dove θ e' la pendenza della strada.

Quando la strada e' in pianura, $\theta = 0$ e l'equazione diventa $m\dot{v} + \beta v = 0$.

$$\boxed{\dot{v} = -\frac{\beta}{m} v} \qquad (*)$$

con $v(0) = 30\left[\frac{km}{h}\right] = x\left[\frac{m}{s}\right]$

da cui $x = 30\left[\frac{km}{h}\frac{s}{m}\right]$

$= 30 \ \frac{1000}{3600}$

$\simeq 30 \times 0.28$

$= 8.4 \longrightarrow v(0) = 8.4 \ m/s$

$v(5) = 20\left[\frac{km}{h}\right]$

$= 20 \times 0.28 \ \frac{m}{s}$

$= 5.6 \ m/s$

Ora consideriamo che, dalle equazione (*)

$$v(t) = e^{-\frac{\beta}{m} t} v(0)$$

e, nel nostro caso

$$v(5) = e^{-\frac{\beta}{m} \times 5} v(0)$$

$$e^{-\frac{\beta}{m} 5} = \frac{v(5)}{v(0)}$$

$$-5 \frac{\beta}{m} = \ln\left(\frac{v(5)}{v(0)}\right)$$

$$\beta = -\frac{m}{5} \ln\left(\frac{v(5)}{v(0)}\right)$$

$$= -\frac{80}{5} \ln \frac{5.6}{8.4}$$

$$\cong 6.5 \ \frac{kg}{s}$$

La costante di tempo è pari a

$$T = \frac{m}{\beta} = \frac{80}{6.5} \simeq 12 \text{ s}$$

(b) Sappiamo che la velocità è la derivata della posizione, cioè

$$\dot{s} = v \quad , \quad \text{con } s(0) = 0$$

e dunque

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(\tau)\, d\tau$$

$$= 0 + \int_0^t v(0)\, e^{-\tau/T}\, d\tau$$

$$= v(0)\, T\, e^{-\tau/T} \Big|_t^0$$

$$= v(0)\,T\left(1 - e^{-t/T}\right)$$

Dopo 5 secondi dunque la distanza percorsa sarà

$$s(5) = 8.4 \cdot 12 \left(1 - e^{-5/12}\right)$$

$$\cong 34\ m$$

(c) Con la strada in discesa il modello diventa

$$m\dot{v} + \beta v = \underbrace{mg \sin 10^\circ}_{\text{Questo è un ingresso costante } \bar{u}} \qquad (**)$$

Abbiamo già visto che questo sistema del I ordine è asintoticamente stabile con costante di tempo $T = 12s$.

Quindi sottoposto a un ingresso costante si porta a regime in circa $5T = 60\ s$.

La velocità a regime coincide con quella di equilibrio e dunque, dalla (**), annullando la derivata, si ha

$$\beta \bar{v} = mg \sin 10^\circ$$

$$\bar{v} = \frac{mg \sin 10^\circ}{\beta}$$

$$= \frac{80 \cdot 9.8 \cdot \sin 10^\circ}{6.5}$$

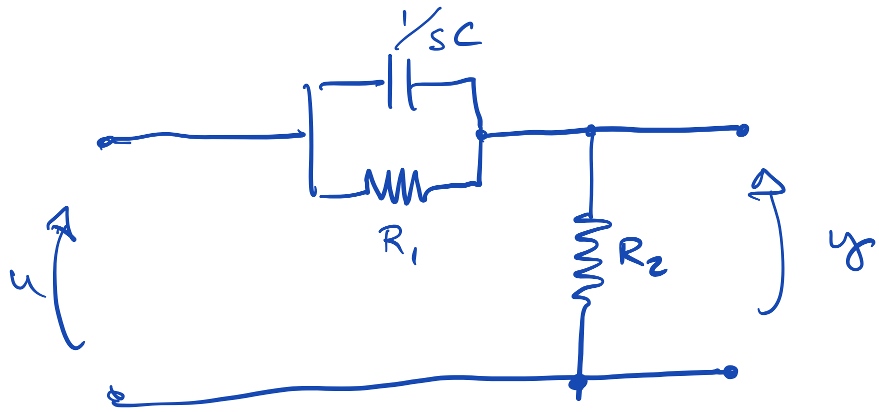
$$\cong 21 \ m/s$$

$$= 75 \ km/h$$

[troppo alta, probabilmente nella realtà in 5 s si rallenta più che 10 km/h come ho ipotizzato io, in altri termini β è più alto e la velocità a regime in discesa sarebbe più bassa]

Esercizio 2

(a) Conviene lavorare direttamente nel dominio di Laplace



$$R_1 // \frac{1}{sC} = \frac{R_1/sC}{R_1 + 1/sC} = \frac{R_1}{1 + sR_1C}$$

Da u a y è un semplice partitore resistivo e dunque la fdt è

$$\frac{R_2}{R_2 + R_1 // (1/sC)} = \frac{R_2}{R_2 + \dfrac{R_1}{1 + sR_1C}}$$

$$= \frac{R_2(1 + sR_1C)}{R_2(1 + sR_1C) + R_1}$$

$$= \frac{R_2(1 + sR_1C)}{R_1 + R_2 + sR_1R_2C}$$

$$= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + sR_1C}{1 + sR_1 \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} C}$$

$$= \alpha \frac{1 + sR_1C}{1 + s\alpha R_1C}$$

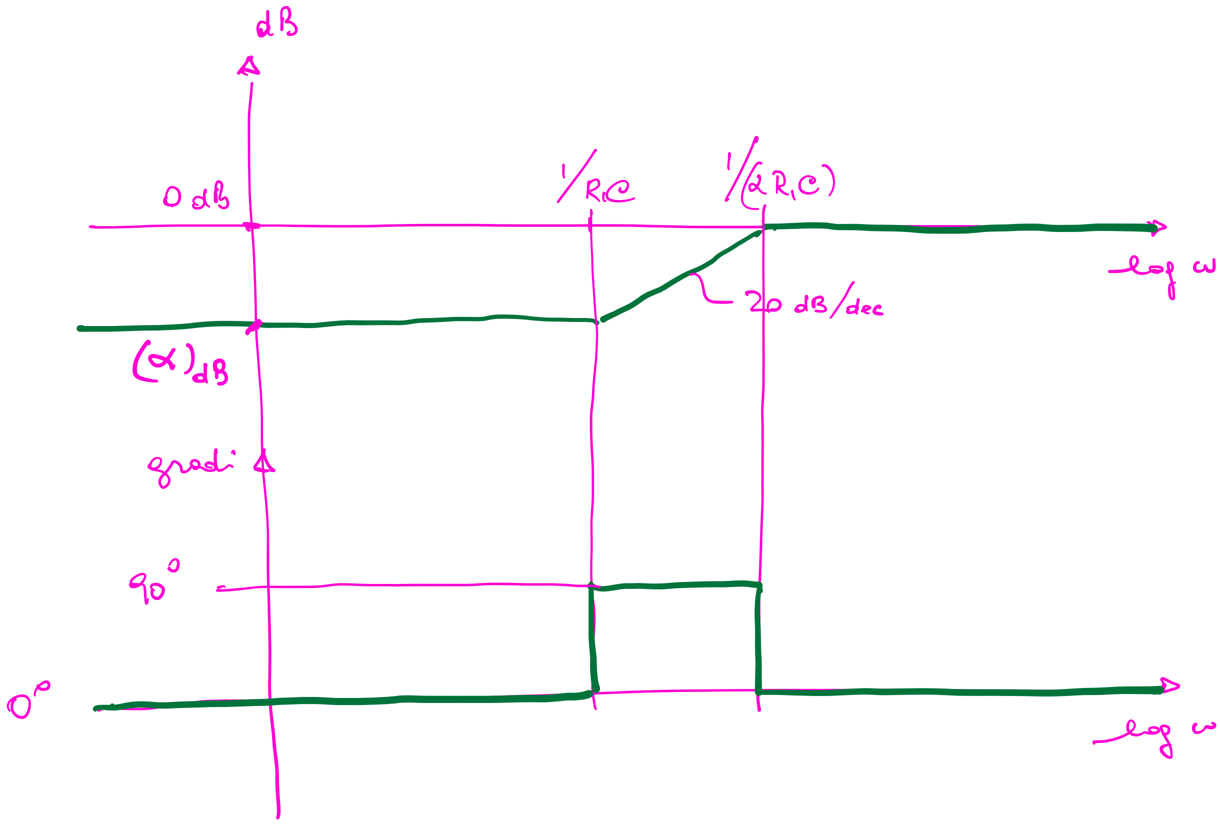
$\alpha < 1$

Questa e' la fdt richiesta

(b) Guadagno statico $= \alpha$, Guadagno ad alta frequenza $= 1$

Punto di rottura dello zero $\quad 1/(R_1 C)$

Punto di rottura del polo $\quad 1/(\alpha R_1 C) > 1/(R_1 C)$



(c) La risposta a regime al segnale

$$u(t) = \bar{u}\left[1 + \cos\frac{10}{\alpha_1 R_1 C} t\right]$$

è la somma delle risposte a regime ai due segnali

(i) $\bar{u}$

(ii) $\bar{u}\cos\left(\frac{10}{\alpha_1 R_1 C} t\right)$

La risposta a regime al segnale costante $\bar{u}$ è $\boxed{\alpha \bar{u}}$, visto che α è il guadagno statico.

La risposta a regime al segnale cosinusoidale (ii) è $\boxed{\text{eguale allo stesso segnale}}$ poiché la sua pulsazione cade una decade a destra del punto di rottura del polo dove il guadagno è pari proprio a 1 (0 dB in ampiezza, 0° in fase)

In definitiva la risposta a regime al segnale dato è

$$\alpha \bar{u} + \bar{u} \cos\left(\frac{10}{\alpha R_1 C} t\right)$$

$$= \bar{u} \left[\alpha + \cos\left(\frac{10}{\alpha R_1 C} t\right)\right]$$

Esercizio 3

(a) $$Y(z) = \frac{z^2}{z^2+0.25}U(z)$$

da cui

$$y(k+2) + 0.25\,y(k) = u(k+2)$$

o, equivalentemente,

$$\boxed{y(k) = -0.25\,y(k-2) + u(k)} \quad (*)$$

(b) Gli zeri del polinomio caratteristico

$$z^2 + 0.25$$

sono $\pm j0.5$

I modi sono $(j0.5)^k$ e $(-j0.5)^k$

Oppure, ricordando che

$$j\,0.5 = \boxed{0.5}\, e^{j\boxed{\pi/2}},$$

la combinazione di poli complessi e coniugati dà luogo al modo reale della forma

$$\boxed{0.5}^{k} \cos\left(\boxed{\frac{\pi}{2}}k\right)$$

(c) L'ingresso impulsivo è

$$u(0) = 1$$
$$u(1) = u(2) = \dots = 0$$

e dunque, dalla (*),

$$y(0) = -0.25\, y(-2) + u(0)$$
$$= 1$$

$$y(1) = -0.25\, y(-1) + u(1)$$
$$= 0$$

$$y(2) = -0.25\, y(0) + u(2)$$
$$= -0.25$$

$$y(3) = -0.25\, y(1) + u(3)$$
$$= 0$$