## Elementi di teoria della probabilità
*Introduzione*

▶ Lo scopo della teoria della probabilità è quello di fornire modelli matematici per trattare situazioni non predicibili in maniera puntuale.

▶ I primi studi sulla teoria della probabilità risalgono al 1650 quando il Cavalier de Mèrè chiese agli amici Blaise Pascal e Pierre de Fermat di sviluppare un modello matematico per descrivere alcune "ricorrenze del gioco d'azzardo".

*Italian writers of the fifteenth and sixteenth centuries, had discussed the problem of the division of a stake between two players whose game was interrupted before its close. The problem was proposed to Pascal and Fermat, probably in 1654, by the Chevalier de Mèrè, a gambler who is said to have had unusual ability "even for the mathematics". The correspondence which ensued between Fermat and Pascal, was fundamental in the development of modern concepts of probability.*

Più avanti, verso gli inizi del 1900, basandosi sulle idee di Emile Borel circa la teoria della misura, André Kolmogorov elaborò un insieme di assiomi tramite i quali la teoria della probabilità poteva essere formalizzata mediante la teoria della misura.

**Problema di De Mèrè**
*Supponiamo di disporre di dadi non truccati: è più facile realizzare un 6 su quattro lanci consecutivi oppure un doppio 6 in 24 lanci?*

De Mèrè risolse il problema nel seguente modo:

A. se il dado non è truccato, possiamo dire che le possiblità di avere un 6 sono 1 su 6.

B. Se lanciamo 4 volte l dado, queste possibilità dovrebbero essere $4*1/6 = 2/3$.

C. Se lanciamo due dadi possiamo avere 36 risultati possibili, cioè tutti gli accoppiamenti tra i valori di una faccia di un dado (che sono 6) e i valori della faccia dell'altro dado (che sono sempre 6), quindi la possibilità di avere un doppio 6 ad ogni lancio la possiamo porre uguale a $1/36$.

D. Se effettuiamo 24 lanci, la possibilità diventa $24*1/36 = 24/36 = 2/3$.

Così ragionando la risposta è che i due giochi di dadi ci danno le stesse probabilità di vittoria. De Mèrè, accanito giocatore, si accorse che uno dei due giochi era meno favorevole dell'altro.

Il sospetto di aver fatto degli errori lo indusse a scrivere a Pierre De Fermat il quale, in una serie di scambi epistolari con Blaise Pascal, giunse alla soluzione: il doppio 6 su 24 lanci è un evento più difficile a realizzarsi di un singolo 6 su 4 lanci.

## Esperimento aleatorio

*Spazio dei campioni*

▶ Ogni volta che si effettua un esperimento si osserva la risposta dell'ambiente ad una data sollecitazione e se ne ricava un risultato sperimentale. La singola esecuzione di un esperimento si chiama *prova* e ad ogni prova corrisponde un *risultato* $\omega$. Per un dato esperimento, l'insieme $\Omega$ di tutti i possibili risultati si chiama spazio dei campioni o spazio delle prove.

▶ Lo spazio dei campioni può essere finito, infinito numerabile (cioè indicizzabile mediante l'insieme degli interi positivi), o non numerabile. Se lo spazio dei campioni è finito o numerabile si dice anche discreto.

*Esempio 1: sorgente binaria*
Si consideri una sorgente che emetta simboli binari. Se l'esperimento consiste nell'emissione da parte della sorgente di un solo simbolo binario, lo spazio dei campioni è l'insieme $\Omega = \{0, 1\}$.

*Esempio 2: coppie di simboli binari*
Se l'esperimento consiste nell'emissione di due simboli binari, lo spazio dei campioni è l'insieme $\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$.

*Esempio 3: lancio di una coppia di dadi*
Lo spazio dei campioni è l'insieme

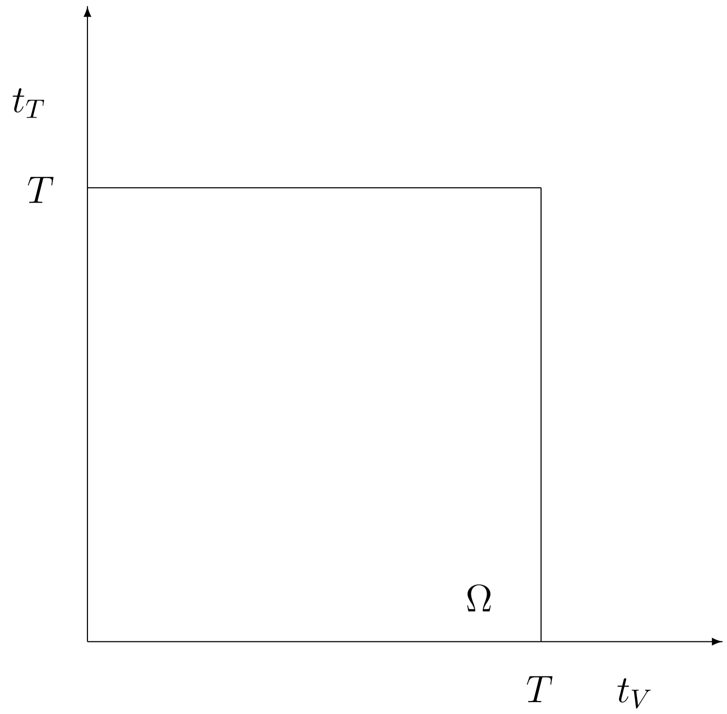
$$\begin{array}{cccccc}
(f_1, f_1) & (f_1, f_2) & (f_1, f_3) & (f_1, f_4) & (f_1, f_5) & (f_1, f_6) \\
(f_2, f_1) & (f_2, f_2) & (f_2, f_3) & (f_2, f_4) & (f_2, f_5) & (f_2, f_6) \\
(f_3, f_1) & (f_3, f_2) & (f_3, f_3) & (f_3, f_4) & (f_3, f_5) & (f_3, f_6) \\
(f_4, f_1) & (f_4, f_2) & (f_4, f_3) & (f_4, f_4) & (f_4, f_5) & (f_4, f_6) \\
(f_5, f_1) & (f_5, f_2) & (f_5, f_3) & (f_5, f_4) & (f_5, f_5) & (f_5, f_6) \\
(f_6, f_1) & (f_6, f_2) & (f_6, f_3) & (f_6, f_4) & (f_6, f_5) & (f_6, f_6)
\end{array}$$

*Esempio 4: sequenza di simboli binari. Spazio dei campioni d iscreto numerabile.*
La sorgente emette simboli binari fino a quando non si ottiene il valore 1. Il risultato dell'esperimento è del tipo $\omega = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Il corrispondente spazio dei campioni è

$$\Omega = \{1, 01, 001, \dots, \}$$

ed è infinito numerabile.

*Esempio 5: coppie di arrivi nell'intervallo [0,T]. Spazio dei campioni continuo.*
Si consideri l'arrivo di un viaggiatore e di un treno in una stazione. Il treno ed il viaggiatore arrivano in un istante di tempo nell'intervallo $[0, T]$. Il generico risultato è la coppia $\omega = (t_V, t_T)$ Lo spazio dei campioni $\Omega = [0, T]^2$ è continuo ed è rappresentato quadrato in figura.



## Esperimento aleatorio
*Eventi*

▶ Un evento è un sottoinsieme $E$ dello spazio dei campioni $\Omega$.

▶ L'evento $E$ si verifica in una generica prova dell'esperimento se il risultato $\omega$ di tale prova è contenuto in $E$, cioè se $\omega \in E$.

▶ Si noti che

1. lo spazio dei campioni $\Omega$ è un evento. L'evento $\Omega$ si verifica in ogni prova, per cui viene detto evento certo.
2. l'insieme vuoto $\varnothing$ è l'evento impossibile in quanto non si verifica in nessuna prova.
3. Gli eventi del tipo $\{\omega\}$, costituiti cioè dalle singole uscite sperimentali, sono detti eventi elementari.

*Operazioni tra due eventi $A$ e $B$*

Disgiunzione. ($A$ oppure $B$) corrisponde al caso in cui si verifica almeno uno tra i due eventi. Essa coincide quindi con l'unione dei sottoinsiemi $A$ e $B$ e viene denotata con $A \cup B$.

Congiunzione. Corrisponde al caso in cui verificano sia $A$ che $B$. Coincide con l'intersezione dei sottoinsiemi $A$ e $B$ e si denota con $A \cap B$. Due eventi $A$ e $B$ la cui intersezione è non vuota si dicono compatibili. Viceversa, se $A \cap B = \varnothing$, gli eventi si dicono mutuamente esclusivi o incompatibili.

Negazione. Corrisponde all'evento in cui non si verifica $A$. Essa è pertanto il complemento $\overline{A}$ del sottoinsieme $A$, cioè il sottoinsieme costituito da tutti i risultati di $\Omega$ che non appartengono ad $A$.

Differenza $A - B$. È l'evento che si verifica ogni volta che si verifica $A$, ma non $B$. Essa è pertanto il sottoinsieme costituito dai risultati che appartengono ad $A$ e non appartengono a $B$, cioè $A \cap \overline{B}$.

*Esempio: emissione di tre simboli binari.*

Si considerino gli eventi

$A_1 \equiv$ *"il numero di uno nel pacchetto è pari o nullo"*
$A_2 \equiv$ *"il numero di uno è minore di due"*
$A_3 \equiv$ *"il numero di uno è uguale a due"*

Calcolare
1. La disgiunzione $A_1 \cup A_2$;
2. la congiunzione $A_1 \cap A_2$;
3. La differenza $A_1 - A_2$;
4. Il complemento di $A_1$.

*Esempio: coppie di arrivi in [0,T].*

Si considerino gli eventi

$E_1 \equiv$ "il viaggiatore ed il treno arrivano contemporaneamente" $\equiv \{(t_V, t_T) \in \Omega : t_V = t_T\}$
$E_2 \equiv$ "il viaggiatore arriva prima del treno" $\equiv \{(t_V, t_T) \in \Omega : t_V < t_T\}$
$E_3 \equiv$ "il viaggiatore arriva tra $0.2T$ e $0.4T$" $\equiv \{(t_V, t_T) \in \Omega : 0.2T \leq t_V \leq 0.4T\}$

Non sempre è conveniente considerare eventi tutti i possibili sottoinsiemi dello spazio delle prove. Ad esempio, con riferimento alla sorgente binaria, se non siamo interessati all'intero pacchetto di bit ma solo alla sua parità è conveniente limitarsi a considerare solo tale evento.

## Algebra degli Eventi
*Definizione*

▶ Una famiglia non vuota $\mathcal{E}$ di sottoinsiemi di $\Omega$ è un'algebra di eventi se è chiusa rispetto alle operazioni di unione e complementazione eseguite su un numero finito di eventi.

**A1:** $A \in \mathcal{E} \implies \overline{A} \in \mathcal{E}$
**A2:** $A,\, B \in \mathcal{E} \implies A \cup B \in \mathcal{E}$

▶ Talvolta è però necessario operare dei ragionamenti al limite per cui occorre prendere in esame successioni (non finite) di eventi. Ciò porta ad imporre che $\mathcal{E}$ sia una $\sigma$-algebra, chiusa cioè rispetto alle operazioni di complementazione e unione eseguite su un numero finito o una infinità numerabile di eventi.

Dalle condizioni **A1** ed **A2** segue che sono soddisfatte anche le seguenti proprietà:

**P1:** $\Omega \in \mathcal{E}$; $\quad (\Omega = A \cup \overline{A})$
**P2:** $\varnothing \in \mathcal{E}$; $\quad (\varnothing = \overline{\Omega})$
**P3:** $A,\, B \in \mathcal{E} \implies A \cap B \in \mathcal{E}$ $\quad (A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}})$
**P4:** $A,\, B \in \mathcal{E} \implies A - B \in \mathcal{E}$ $\quad (A - B = A \cap \overline{B})$

## Assiomi della probabilità

- Ad ogni evento $A$ si associa una misura $P(A)$ che ne descrive la probabilità.
- La probabilità deve soddisfare i seguenti assiomi di Kolmogorov.

| | | |
|---|---|---|
| A1. | Non negatività | $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{E}$ |
| A2. | Normalizzazione | $P(\Omega) = 1$ |
| A3a | Finita additività | $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \forall A,\, B : A \cap B = \varnothing$ |
| A3b | Numerabile additività | $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N} :\ n \neq m \text{ e } A_n \cap A_m = \varnothing$ |

Dagli assiomi di Kolmogorov segue che la probabilità gode anche delle seguenti proprietà:

**P1:** $P(\varnothing) = 0$
**P2:** $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad \forall A \in \mathcal{E}$
**P3:** $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
**P4:** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$ (subadditività)
**P5:** $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$ (monotonicità)

**Esperimento aleatorio**

*Un esperimento aleatorio è caratterizzabile mediante la terna* $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ *dove:*

**1.** $\Omega$ *è l'insieme di tutti i possibili risultati sperimentali (spazio dei campioni).*

**2.** $\mathcal{E}$ *è la* $\sigma$*-algebra degli eventi.*

**3.** $P(\cdot)$ *è la legge di probabilità definita attraverso gli assiomi di Kolmogorov.*

*Eventi elementari*

▶ Gli eventi elementari sono mutuamente esclusivi.

▶ Ogni evento può essere costruito come unione di eventi elementari. Essendo questi mutuamente esclusivi la probabilità di un qualunque evento si può scrivere come somma delle probabilità degli eventi elementari che lo compongono.

*Esempio: Sorgente binaria*

Lo spazio dei campioni è

$$\Omega = \{0, 1\}$$

L'algebra degli eventi può essere costruita includendo gli eventi

$$\{\Omega, \varnothing, 0, 1\}$$

Per assegnare una legge di probabilità è sufficiente definire la probabilità dell'evento $\{1\}$. Posto infatti P $(1) = p$, con $0 \leq p \leq 1$, necessariamente deve aversi $P(0) = 1 - p = q$. Conseguentemente resta definita la probabilità di tutti gli eventi elementari e, quindi, la probabilità di un qualsiasi altro evento.

*Esempio: Lancio di un dado*
Si ha

$$\Omega = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$$

Come famiglia di eventi si può considerare l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di $\Omega$. Lo spazio dei campioni, e quindi anche l'insieme degli eventi, è finito ed è sufficiente assegnare le probabilità agli eventi elementari per definire la probabilità di un qualunque altro evento.
Poichè inoltre non vi è alcuna ragione per cui alcuni risultati dovrebbero verificarsi preferenzialmente rispetto agli altri (a meno che i dadi non siano truccati), gli eventi elementari possono essere assunti equiprobabili, cioè si pone:

$$P(f_i) = \frac{1}{6}\ .$$

Detta $|\cdot|$ la cardinalità di un insieme, per un qualsiasi evento si ha

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

▶ Verificare che la quantità così definita, è una probabilità.
▶ Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

$A \equiv \{$ *"faccia dispari"*$\}$
$B \equiv \{$ *"faccia minore di 4"*$\}$
$C \equiv \{$ *"faccia maggiore o uguale a 6"*$\}$

*Esempio: Coppia di arrivi in [0,T]*
Lo spazio dei campioni è il quadrato: $\Omega = [0, T]^2$, pertanto è continuo.

Come famiglia di eventi, nel caso di spazi continui si considerano gli intervalli (sottorettangoli del quadrato nel caso in esame).

Poichè gli arrivi sono casuali è ragionevole ipotizzare che la probabilità di avere arrivi in un certo intervallo non dipenda dagli estremi dell'intervallo, ma solo dalla sua durata, e quindi, più in generale, che la probabilità di un evento sia proporzionale alla sua area. Quindi, una possibile legge di probabilità è:

$$P(E) = \frac{\text{Area}(E)}{\text{Area}(\Omega)}$$

▶ Verificare che

$$\begin{aligned}
P(E_1) = \;& P\,(\text{“}\textit{viaggiatore e treno arrivano contemporaneamente}\text{”}) = 0 \\
P(E_2) = \;& P\,(\text{“}\textit{il viaggiatore arriva prima del treno}\text{”}) = 0.5 \\
P(E_3) = \;& P\,(\text{“}\textit{il viaggiatore arriva tra } 0.2T \textit{ e } 0.4T\text{”}) = 0.2 \\
P(E_4) = \;& P((\text{“}\textit{viaggiatore e treno non arrivano contemporaneamente}\text{”}\ ) = 1
\end{aligned}$$

▶ NB. L'evento $E_1$ ha probabilità nulla pur non essendo l'evento impossibile, così come l'evento $E_4$ ha probabilità 1 pur non essendo l'evento certo.

## Definizioni alternative di probabilità

▶ *Definizione classica*

Nell'esperimento del lancio di un dado non truccato la probabilità di un evento è data dal rapporto tra il numero degli eventi elementari costituenti $E$ ed il numero dei casi possibili (numero degli eventi elementari costituenti $\Omega$). La legge di probabilità così definita è nota come definizione *classica* di probabilità. Essa è applicabile solo ad esperimenti il cui spazio dei campioni è finito e, implicitamente, ipotizza che gli eventi elementari siano equiprobabili.

▶ *Definizione frequentistica*

Definisce la probabilità attraverso frequenza relativa di un evento $E$ in $N$ prove. È data dal rapporto tra il numero di volte $N(E)$ in cui si verifica l'evento $E$ ed il numero complessivo $N$ delle prove,

$$F_E(N) = \frac{N(E)}{N}$$

La probabilità di $E$ è poi definita come il limite della frequenza relativa al divergere di $N$

$$P(E) = \lim_{N \to \infty} \frac{N(E)}{N}$$

## Probabilità condizionata e indipendenza
*Definizioni*

▶ *Indipendenza*

Da un punto di vista intuitivo due eventi sono indipendenti se non si influenzano. Il concetto viene formalizzato con la seguente definizione.
Due eventi $A$ e $B$ si dicono indipendenti se:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Eventi non indipendenti sono anche detti correlati.

La definizione di indipendenza non va confusa con quella di eventi mutuamente esclusivi in cui $P(A \cap B) = 0$. Infatti se gli eventi $A$ e $B$ sono indipendenti possono essere anche mutuamente esclusivi solo se almeno uno dei due ha probabilità nulla.

▶ *Probabilità condizionata*

Nel concetto di probabilità condizionata si introduce una conoscenza a priori in merito al risultato di un esperimento. Intuitivamente la probabilità di ottenere "un due" lanciando un dado è diversa dalla probabilità che si verifichi tale evento se è noto che il risultato della prova è pari.
Tale considerazione viene formalizzata introducendo la probabilità condizionata. A tal fine, dato un evento $B$, si ha

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; \qquad P(B) \neq 0$$

▶ La probabilità condizionata soddisfa gli assiomi di Kolmogorov e, quindi, definisce una nuova legge di probabilità

**A1** $P(A|B) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{E}$

**A2** $P(\Omega|B) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = 1$

**A3** $P(A_1 \cup A_2|B) = \dfrac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} = P(A_1|B) + P(A_2|B), \quad \forall A_1, A_2 \in \mathcal{E} : A_1 \cap A_2 = \varnothing$

▶ Verificare che:

$$
\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 && \forall A \supseteq B \\
P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A) && \forall A \subseteq B \\
P(A|B) &= 0 && \forall A, B : A \cap B = \varnothing
\end{aligned}
$$

▶ Inoltre, se $A$ e $B$ sono statisticamente indipendenti ed a probabilità non nulla risulta

$$
\begin{aligned}
P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \\
P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)
\end{aligned}
$$

## Eventi correlati

Se $P(A|B) > P(A)$ si dice che $A$ è positivamente correlato a $B$,
Se $P(A|B) < P(A)$ si dice che $A$ è negativamente correlato a $B$.
Se $P(A|B) = P(A)$ gli eventi sono indipendenti.

► Interpretazione frequentistica:

$$P(A|B) \approx \frac{\frac{N_{AB}}{N}}{\frac{N_B}{N}} = \frac{N_{AB}}{N_B}$$

$N_{AB}$ e $N_B$ denotano il numero di volte che si verificano gli eventi $A \cap B$ e $B$ in $N$ prove, rispettivamente.

Pertanto la probabilità condizionata è la frazione di volte che si verifica l'evento $A$ non più in tutte le prove, ma limitatamente a quelle in cui si verifica $B$. In altri termini le prove in cui $B$ non si verifica vanno eliminate dal conteggio.

## Leggi Fondamentali

▶ *Legge della probabilità composta*
Dalla definizione di probabilità condizionata segue che:

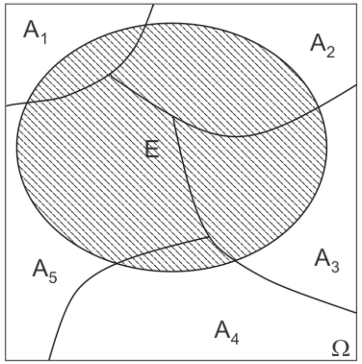
$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

▶ *Legge di Bayes*
Dalla legge della probabilità composta segue che:

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}P(B|A)$$

Tale relazione consente di scambiare i ruoli di evento condizionato e condizionante.

▶ *Legge della probabilità totale*
Si consideri una partizione $\{A_n\}$ finita o numerabile di $\Omega$, costituita da eventi a probabilità non nulla,




✷ In una partizione gli eventi $A_n$, $n \in I$, sono a due a due mutuamente esclusivi e la loro unione è $\Omega$.

Si ottiene

$$P(E) = \sum_{n \in I} P(E \cap A_n) = \sum_{n \in I} P(A_n) P(E|A_n)$$

▶ *Legge di Bayes (seconda formulazione)*
Esprimendo nella formula di Bayes la probabilità dell'evento condizionante mediante la legge della probabilità totale si ottiene

$$P(A_n|E) = \frac{P(A_n)P(E|A_n)}{\sum\limits_{i \in I} P(A_i)P(E|A_i)}$$

## Esercizi

**Ex. 1**
Si consideri l'estrazione di due carte da un mazzo di carte napoletane e gli eventi
$A = \{$"le due carte sono dello stesso seme"$\}$
$B = \{$"la prima carta è di spade"$\}$.

Calcolare la probabilità che si verifichi
1. $A$;
2. $A$ ma non $B$;
3. $B$ dato che si è verificato $A$;

Verificare inoltre se gli eventi $A$ e $B$ sono indipendenti.

**Ex. 2**
Una carta viene selezionata da un mazzo di 52 carte e messa in un secondo mazzo di carte. Successivamente, una carta viene selezionata dal secondo mazzo di carte.

1. Calcolare la probabilità che la seconda carta estratta sia un asso.
2. Se viene estratto un asso, qual è la probabilità di aver trasferito un asso dal primo al secondo mazzo di carte?
3. Verificare se i due eventi {Estrazione di un asso dal primo mazzo di carte} e {Estrazione di un asso dal secondo mazzo di carte} sono indipendenti.

**Ex. 3**
Si lanciano due dadi non truccati.
Calcolare la probabilità che il punteggio ottenuto nel lancio di un dado non truccato sia maggiore del punteggio nel lancio di un secondo dado non truccato e indipendente dal primo.

**Ex. 4**
Si consideri il lancio di due dadi non truccati. Calcolare

1. La probabilità che somma dei risultati sia un numero primo;
2. la probabilità che il prodotto dei sisultati sia uguale alla somma;
3. Sapendo che la somma dei risultati è 6, calcolare, calcolare la probabilità che i risultati siano uguali.

**Ex. 5**
Una compagnia di assicurazioni ha tre tipologie di clienti, classificati in base alla loro probabilità $P_I$ di avere almeno un incidente nel corso di un anno:
A. rischio alto, $P_I = 0.2$
B. rischio medio, $P_I = 0.5$
C. rischio basso, $P_I = 0.3$
Sapendo che il 20% dei clienti sono a rischio alto, il 30% a rischio medio e il 50% a rischio basso, determinare:
1. la probabilità che un cliente abbia almeno un incidente nel corso dell'anno;
2. la probabilità che un cliente sia a rischio alto dato che ha avuto uno o più incidenti nel corso dell'ultimo anno.

**Ex.6**
Una fabbrica di cioccolato di Paperopoli produce uova pasquali da 10 e 20 dollari. Una sorpresa speciale viene inserita nel 5% delle uova da 10 dollari e nel 10% di quelle da 20 dollari. Paperino si reca a comprare delle uova per i nipotini e trova due confezioni: la prima contiene 4 uova da 10 dollari e la seconda un uovo da 20 e due da 10 dollari.
a) Stabilire per quale delle due confezioni è maggiore la probabilità di trovare almeno una sorpresa speciale.
b) Calcolare la probabilità di trovare almeno una sorpresa speciale se si sceglie a caso una delle due confezioni.

**Ex. 7** Una coppia ha 5 figli ed il genere di ognuno è indipendente da quello degli altri. Se si assume che la probabilita‘ di generare una figlia di genere gemminile è pari a 0.55, determinare
1. la probabilità di avere 3 figli maschi;
2. la probabilità di avere almeno un figlio maschio;
3. la probabilità di avere tutti i figli dello stesso genere.

**Ex. 8** Due giocatori, A e B, lanciano alternativamente una moneta e vince chi per primo ottiene testa. Si assuma che A inizi il gioco. Determinare la probabilità che vinca A supposta la moneta ben bilanciata. Ripetere il calcolo per una moneta arbitraria.

**Ex. 9** Un giocatore disonesto trucca un dado in modo da ottenere il numero 6 in un lancio con probabilità 2/3 e un qualsiasi altro risultato con probabilità 1/15. Sfortunatamente (per lui) al momento del lancio il dado truccato si trova mescolato con altri due dadi non truccati. Il giocatore sceglie un dado a caso, lo lancia, e ottiene 6. Valutare la probabilità che sia stato lanciato il dado truccato. Ripetere il calcolo sapendo che, lanciato una seconda volta lo stesso dado, si è ottenuto ancora 6.