Dipartimento di Ingegneria
Università del Sannio

Corso di Sistemi Dinamici

A.A. 2020/2021

Tempo a disposizione: 90 min. È consentita la consultazione di testi e appunti.

19 Aprile 2021 Matricola: .... Candidato(a): ....

1. Dato il sistema descritto da:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2u \\ y = x - u. \end{cases}$$

   (a) Tracciare uno schema realizzativo con integratori;

   (b) Calcolare la risposta forzata ad una sola semionda di un segnale sinusoidale di pulsazione $\frac{\pi}{2}$;

   (c) Qual è la rappresentazione i-u del sistema?

2. Data la f.d.t.:

$$G(s) = \frac{1-s}{1+s}$$

   (a) Tracciare i diagrammi di Bode e discuterli;

   (b) Avvalendosi di essi calcolare la risposta a regime al segnale d'ingresso

$$u(t) = \cos\left(\frac{t}{10}\right) + \sin(10t).$$

3. Una versione tempo discreto del modello logistico è data da dall'equazione

$$p(k+1) = \rho p(k)\big[1 - p(k)\big].$$

   (a) Calcolare i punti di equilibrio e determinare la condizione su ρ per cui essi non sono negativi;

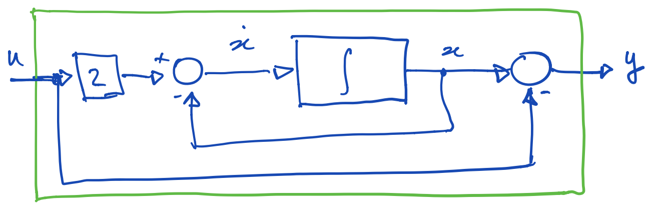
   (b) Per $\rho = 1.1$ calcolare le linearizzazioni attorno ai punti di equilibrio, determinare i modi naturali e discutere la stabilità.

Soluzioni

1

$$\dot{x} = -x + 2u$$
$$y = x - u$$

a)

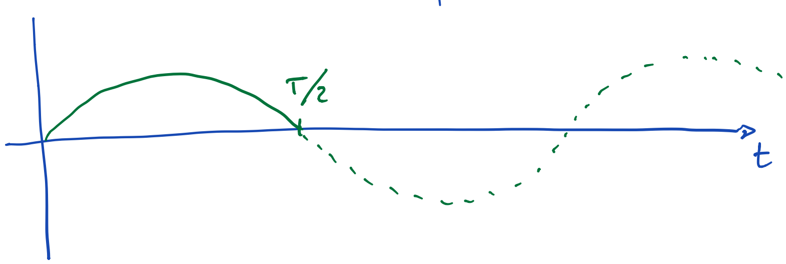


b)

Calcoliamo prima la fdt

$$sX = -X + 2U \implies X(s) = \left[\frac{2}{s+1}\right] U(s)$$

$$Y = X - U = \frac{2}{s+1} U - U$$
$$= \frac{2 - s - 1}{s+1} U$$
$$= \underbrace{\left(\frac{1-s}{1+s}\right)}_{\text{fdt}} U$$



Un segnale sinusoidale di pulsazione $\omega = \frac{\pi}{2}$ rad/s

ha periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \frac{2}{\pi} = 4$ s

Per ottenere una sola semionda basta sottrarre al segnale sinusoidale $\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ lo stesso segnale dall'istante $\frac{T}{2} = 2s$ in poi, e cioè l'ingresso $u(t)$ si esprime come

$$u(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-2)\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-2)\left[\sin\frac{\pi}{2}(t-2+2)\right]$$

$$= \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\delta_{-1}(t) + \delta_{-1}(t-2)\sin\frac{\pi}{2}(t-2)$$

In altri termini la semionda si può ottenere come somma del segnale seno con lo stesso segnale ritardato di 2s.

Per la proprietà di stazionarietà del sistema in esame la risposta a $u(t)$ sarà data dalla somma della risposta al segnale $\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\delta_{-1}(t)$ e della stessa risposta traslata di 2s. In altri termini:

$$u(t) = \underbrace{\sin\frac{\pi t}{2}\,\delta_{-1}(t)}_{\text{risposta}} + \underbrace{\sin\left[\frac{\pi}{2}(t-2)\right]\delta_{-1}(t-2)}_{\text{risposta}}$$

$$y(t) = y_r(t) + y_r(t-2) \qquad (*)$$

Occorre dunque calcolare $y_r(t)$, cioè la risposta a $\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\delta_{-1}(t)$

Ricordiamo che $\mathcal{L}\left(\sin \omega t\right) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

e dunque $\mathcal{L}\left(\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right) = \dfrac{\pi/2}{s^2 + \pi^2/4}$

Dunque

$$y_r(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1-s}{1+s} \; \frac{\pi/2}{s^2+\pi^2/4}\right)$$

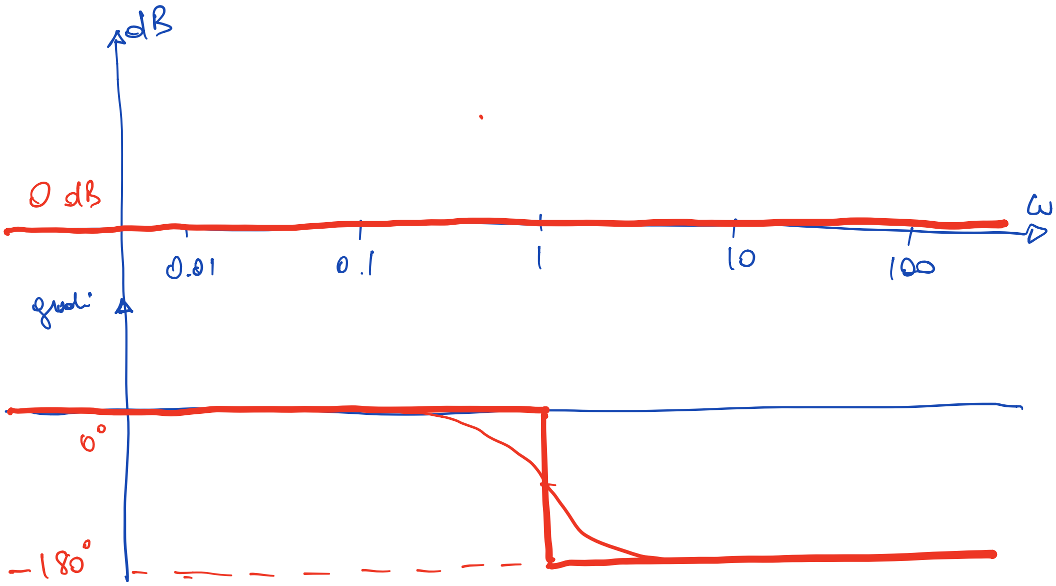
Noto $y_r(t)$ si può applicare la formula $(*)$ sopra detta.

(c) $$Y = \frac{1-s}{1+s}\,U \implies sY + Y = U - sU$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{y} + y = u - \dot{u}$$

② $G(s) = \dfrac{1-s}{1+s}$



Il guadagno d'ampiezza è sempre 0dB = 1 a tutte le frequenze, in altri termini l'ampiezza dei segnali sinusoidali non subisce modifiche al passaggio attraverso il sistema. Lo sfasamento è nullo a frequenze basse rispetto a 1 rad/s, è 180° a frequenze alte rispetto a 1 rad/s

Dunque il segnale $\cos\left(\frac{t}{10}\right)$ non viene sfasato "attraversando" il sistema, né modificato in ampiezza. Il segnale $\sin(10t)$ viene sfasato di 180° senza subire modifiche d'ampiezza.

In definitiva in uscita, a regime, si avrà

$$\cos\left(t/10\right) + \sin\left(10t - \pi\right)$$

$$= \cos\left(t/10\right) - \sin 10t$$

③ $$p(k+1) = \rho\, p(k)\left[1 - p(k)\right]$$

ⓐ Punti di equilibrio

$$\bar{p} = \rho\, \bar{p}\left(1 - \bar{p}\right) \qquad (*)$$

Un punto di equilibrio è $\bar{p}^{(1)} = 0$.

Per calcolare gli altri punti di equilibrio, supponiamo $\bar{p} \neq 0$ e quindi posso dividere la $(*)$ per $\bar{p}$ ottenendo

$$1 = \rho\left(1 - \bar{p}\right)$$

$$1 = \rho - \rho\bar{p}$$

$$\bar{p}^{(2)} = \frac{\rho - 1}{\rho}$$ che è non negativo

per $\rho > 1$

oppure $\rho < 0$

(b) Per $\rho = 1.1$ i punti di equilibrio saranno

$$\bar{p}^{(1)} = 0$$

$$\bar{p}^{(2)} = \frac{\rho - 1}{\rho} = \frac{1.1 - 1}{1.1} = \frac{0.1}{1.1} \approx 0.091$$

Per calcolare la linearizzazione dobbiamo derivare il lato destro delle equazioni del sistema rispetto alla variabile p:

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[\rho p(1-p)\right] = \rho(1-p) - \rho p$$

$$= \rho - 2\rho p$$

$$= \rho(1-2p)$$

Nel punto $\bar{p}^{(1)} = 0$ la derivata vale ρ e dunque la linearizzazione è data da

$$\delta p(k+1) = \rho\, \delta p(k)$$

$$= 1.1\, \delta p(k)$$

con $\delta p(k) = p(k) - \bar{p}^{(1)} = p(k)$

Il modo naturale del sistema è $(1.1)^k$, divergente. Il sistema è dunque instabile.

Nel punto $\bar{p}^{(2)} = 0.091$ la derivata è data da

$$p(1-2p) = 1.1\left(1 - 2 \times 0.091\right)$$
$$= 0.90$$

e dunque la linearizzazione è

$$\delta p(k+1) = 0.90\, \delta p(k)$$

con $\delta p(k) = p(k) - \bar{p}^{(2)}$
$$= p(k) - 0.091$$

Il modo di evoluzione è $(0.90)^k$, convergente. Il sistema è a.s.