4 Matrici a scala per righe e metodo di eliminazione di Gauss

Definizione 4.1 (Pivot) *Data una matrice* $\boldsymbol{A}$ *di tipo* $m \times n$*, si definisce* ***pivot*** *della riga* i *di* $\boldsymbol{A}$ *il primo elemento non nullo della riga* i*-esima.*

Esempio 4.1 *Nella matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{-2} & 9 \\ \mathbf{-2} & 7 & 0 \end{pmatrix},$$

i pivot di ogni riga sono evidenziati in grassetto.

Definizione 4.2 (Matrici a scala per righe) *Una matrice* $\boldsymbol{A}$ *si dice* ***a scala per righe*** *se:*

1) *tutte le eventuali righe nulle sono in fondo alla matrice;*

2) *il pivot della riga* i*-esima è strettamente "più a destra" del pivot della riga* $(i-1)$*-esima* $(i \geq 2)$ *ovvero tutti gli elementi di una colonna contenente un pivot che hanno indice di riga superiore a quello del pivot (cioè tutti gli elementi della colonna "al di sotto del pivot") sono nulli. Quindi il numero di zeri iniziali nella riga* i *è strettamente maggiore del numero di zeri iniziali della riga* $(i-1)$*-esima.*

Esempio 4.2 *La matrice* (A) *è una matrice a scala per righe:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 3 & 5 & 4 \\ 0 & \mathbf{-2} & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definizione 4.3 (Matrice a scala ridotta per righe) *Una matrice* $\boldsymbol{A}$ *si dice* ***a scala ridotta per righe*** *se essa è una matrice a scala per righe, se i pivot sono tutti uguali ad* 1 *e se, in ogni colonna contenente il pivot di una riga, tutti gli elementi diversi dal pivot sono uguali a zero.*

Esempio 4.3

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Osservazione 4.1 *Sono matrici a scala ridotta la matrice nulla e la matrice identica.*

Definizione 4.4 (Operazioni elementari sulle righe) *Si definiscono* ***operazioni elementari sulle righe*** *le seguenti operazioni (sia* R_i *la riga* i*-esima della matrice):*

i) *scambiare la riga* i *con la riga* j $(R_i \leftrightarrow R_j)$*;*

ii) *moltiplicare una riga* i *per uno scalare* λ *non nullo* $(R_i \to \lambda R_i)$*;*

iii) *moltiplicare la riga* i *per uno scalare* λ *e sommarla alla riga* j $(R_j \to R_j \lambda R_i)$*.*

Definizione 4.5 (Matrici elementari) *Si definisce* ***matrice elementare****, e si indica con* $\boldsymbol{E}$*, una matrice che si ottiene applicando un'operazione elementare alla matrice identica* $\boldsymbol{I}$*.*

Teorema 4.1 (Matrici elementari e operazioni elementari) *Sia* $\boldsymbol{A}$ *una matrice di tipo* $m \times n$, *e sia* $\boldsymbol{E}$ *una matrice elementare di ordine* m. *Il prodotto* $\boldsymbol{EA}$ *è una matrice ottenuta applicando ad* $\boldsymbol{A}$ *l'operazione elementare per righe corrispondente ad* $\boldsymbol{E}$.

Esempio 4.4 *Sia*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e si consideri la matrice elementare

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ottenuta applicando un'operazione elementare di tipo i) alle prime due righe della matrice identica $\boldsymbol{I}$ *(*$R1 \leftrightarrow R_2$. *Il prodotto righe per colonne* $\boldsymbol{EA}$ *fornisce la prima operazione elementare, infatti:*

$$\boldsymbol{EA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo un'esempio per la seconda operazione elementare, e supponiamo di voler moltiplicare la seconda riga di $\boldsymbol{A}$ *per lo scalare* $k = 2$ *(*$R_2 \rightarrow 2R_2$*). Basterà considerare la matrice*

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ottenendo

$$\boldsymbol{EA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Infine, se si vuole sommare alla terza riga di $\boldsymbol{A}$ *la prima moltiplicata per* $k = 3$ *(*$R_3 \rightarrow R_3 + 3R1$*), basta considerare*

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{EA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Definizione 4.6 (Operazioni elementari inverse) *Sia* $\boldsymbol{B}$ *una matrice ottenuta da* $\boldsymbol{A}$ *applicando un'operazione elementare. E' possibile riottenere* $\boldsymbol{A}$ *da* $\boldsymbol{B}$ *applicando un'****operazione elementare inversa****. Per le operazioni elementari di tipo i) -* $R_i \leftrightarrow R_j$ *- è immediato definire l'operazione inversa (basta scambiare di nuovo le righe). Per le operazioni elementari di tipo ii) -* $R_i \rightarrow \lambda R_i, \lambda \neq 0$ *- l'operazione inversa consiste nel moltiplicare la riga i per* $\frac{1}{\lambda}$. *Per le operazioni elementari di tipo iii) -* $R_j \rightarrow R_j + \lambda R_i$ *- l'operazione inversa è* $R_j \rightarrow R_j - \lambda R_i$.

Osservazione 4.2 *Si ha pertanto che se la matrice $\boldsymbol{B}$ è stata ottenuta da $\boldsymbol{A}$ attraverso una sequenza di operazioni elementari, è possibile riottenere $\boldsymbol{A}$ da $\boldsymbol{B}$ applicando una sequenza di operazioni elementari inverse.*

Definizione 4.7 (Equivalenza di matrici per righe) *Due matrici $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ di tipo $m \times n$ si dicono **equivalenti per righe** - e si denotano con $\boldsymbol{A} \backsim \boldsymbol{B}$ - se possono essere ottenute l'una dall'altra mediante un numero finito di operazioni elementari. Ossia, se esistono $\boldsymbol{E}_1, ..., \boldsymbol{E}_k$ matrici elementari, tali che*

$$\boldsymbol{E}_k \cdots \boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

Teorema 4.2 (Matrici equivalenti per righe) *Ogni matrice è equivalente per righe ad una matrice a scala per righe dello stesso ordine.*

La dimostrazione di questo risultato può essere ottenuta presentando l'**algoritmo di Gauss**.

Algoritmo di Gauss

Passo 1

1.1 Si individua la colonna non nulla con indice di riga più basso. Sia j l'indice di questa colonna. (Se non ci sono colonne non nulle, la matrice è nulla e dunque a scala per righe e l'algoritmo termina).

1.2 Se l'elemento a_{1j} è zero, si scambia la prima riga con una riga i tale $a_{ij} \neq 0$.

1.4 Si rendono nulli tutti gli altri elementi della colonna j con indice di riga $i \geq 2$, sommando alle varie righe opportuni multipli della prima riga.

Passo 2 Se la matrice corrente è formata da almeno una riga, si mette da parte la prima riga e si ripete il passo 1 sulla matrice restante.

Esempio 4.5 (Algoritmo di Gauss) *Sia*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Cominciamo dal passo 1*. Dobbiamo trovare la prima colonna non nulla. La colonna* 1 *è non nulla e poichè $a_{11} = 0$, scambiamo la riga* 1 *e la riga* 3 *($R_1 \leftrightarrow R_3$), ottenendo:*

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè tutti gli elementi al di sotto della prima riga nella prima colonna sono nulli, possiamo omettere temporaneamente la prima riga. A questo punto, consideriamo la matrice restante:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

la cui prima colonna non nulla è la seconda. Poichè $a_{12} \neq 0$, non occorrono scambi di righe. Va invece annullato ciò che è sotto questa riga nella stessa colonna, sommando alla terza riga la prima moltiplicata per -1 ($R_3 \to R_3 - R_1$) ed ottenendo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Trascuriamo anche la seconda riga.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice restante è costituita da una sola riga, per cui l'algoritmo termina, ottenendo così la matrice a scala S, equivalente per righe ad $\boldsymbol{A}$:

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Per ottenere una matrice a scala per righe ridotta si utilizza invece l'**algoritmo di Gauss-Jordan**.

Teorema 4.3 (Teorema di Gauss-Jordan) *Ogni matrice è equivalente per righe ad una ed una sola matrice a scala ridotta dello stesso tipo.*

La dimostrazione di questo risultato risiede nell'algoritmo presentato di seguito.

Algoritmo di Gauss-Jordan

Passo 1 Si esegue l'algoritmo di Gauss per trasformare la matrice $\boldsymbol{A}$ in una matrice a scala equivalente per righe.

Passo 2 Si moltiplica ogni riga per un opportuno scalare tale da rendere ogni pivot uguale ad 1.

Passo 3 Si considerano le righe non nulle e, a partire dall'ultima, si annullano gli elementi di ogni colonna contenente un pivot e che sono al di sopra del pivot stesso. Questo risultato si ottiene sommando alle varie righe opportuni multipli della riga in esame contenete il pivot.

Esempio 4.6 *Si vuole ridurre a scala con l'algoritmo di Gauss-Jordan la seguente matrice:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice è non nulla e per il passo 1.1 si può proseguire. La matrice ha più di una riga e dunque si considera il procedimento esposto nel passo 1.2. La colonna non nulla con indice più basso è la prima ed il suo pivot è 2. L'indice di riga corrispondente è 1. Bisogna allora moltiplicare la riga per $\frac{1}{2}$, ottenendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A questo punto vanno annullati tutti gli elementi nella prima colonna, sommando multipli della prima ottenendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Va ora considerata la matrice schermata:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

La matrice schermata possiede due righe non nulle e la colonna non nulla con indice più basso è la seconda ed il pivot è $-\frac{3}{2}$*. Ancora una volta non occorrono scambi, poichè il pivot è nella prima riga. Tale riga va moltiplicata per* $-\frac{2}{3}$ *e si ottiene:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Moltiplicando la terza riga per -1 *si ottiene:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Partendo dal basso, si annullano ora tutti gli elementi sovrastanti il pivot di ogni riga nella propria colonna. Va dunque considerata la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Alla seconda riga va sommata la terza moltiplicata per $\frac{2}{3}$*, ottenendo:*

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Infine, la prima riga va sommata alla seconda moltiplicata per $-\frac{1}{2}$*:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice così ottenuta è una matrice a scala ridotta per righe equivalente alla matrice $\boldsymbol{A}$*.*