11 Determinanti

Ad ogni matrice quadrata è possibile associare un numero reale, chiamato **determinante**, che esprime alcune proprietà della matrice stessa, fra cui la sua invertibilità.

Definizione 11.1 (Definizione classica di determinante) *Sia $\boldsymbol{A}$ una matrice quadrata. Si definisce **determinante di $\boldsymbol{A}$** e si indica con $\det((\boldsymbol{A})$, il numero reale così definito:*

$$\det(\boldsymbol{A}) := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{\sigma \in S_n} a_{i\sigma(i)}, \tag{1}$$

dove la somma è estesa a tutte le permutazioni σ di $\{1, \ldots, n\}$.

In altri termini, possiamo dire che $\det(\boldsymbol{A})$ si calcola sommando tutti i possibili prodotti di n elementi (con un opportuno segno), in modo che i fattori di ciascun prodotto non appartengano a due a due alla stessa riga o alla stessa colonna.

Per il determinante valgono le seguenti proprietà:

i) Se $\boldsymbol{A}$ è una matrice di ordine 1, allore $\det(\boldsymbol{A}) = a$.

ii) Se $\boldsymbol{A}$ è una matrice di ordine 2, allora $\det(\boldsymbol{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

iii) Se una matrice $\boldsymbol{T}$ è triangolare, allora il determinante, per sua definizione, è dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale principale, i.e.

$$\det(\boldsymbol{T}) = t_{11} \cdot t_{22} \cdot \ldots \cdot t_{nn}.$$

iv $\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A})^T$.

Da un punto di vista computazionale per il calcolo del determinante può essere utilizzata la tecnica di **espansione in cofattori**.

Definizione 11.2 (Calcolo del determinante con l'espansione in cofattori) *Sia $\boldsymbol{A}$ una matrice quadrata di ordine n e sia $\boldsymbol{A}_{ij}$ la sottomatrice di $\boldsymbol{A}$ ottenuta cancellando la riga i e la colonna j. Il termine $C_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ è detto **complemento algebrico** o **cofattore** dell'elemento a_{ij}.*

Con l'espansione in cofattori, $\det(\boldsymbol{A})$ può essere calcolato rispetto alla riga i:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

o rispetto alla colonna j:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Esempio 11.1 (Calcolo del determinante con l'espansione in cofattori) *Si voglia calcolare il determinante della matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

con l'espansione in cofattori rispetto alla riga 1*. Si ha dunque:*

$$\det(\boldsymbol{A}) = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + 0 \cdot (-1) \det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + (-1) \cdot 1 \det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$1 \cdot (-1 \cdot 4) + 0 - 1 \cdot (-1) \cdot (-1 \cdot 3) = -7.$$

Nel caso $n = 3$ pu essere per il calcolo del determinante può essere utilizzata la **regola di Sarrus**.

Definizione 11.3 (Regola di Sarrus) *Sia* $\boldsymbol{A}$ *una matrice quadrata di ordine* 3*. La regola di Sarrus consiste nel costruire una nuova matrice* $\boldsymbol{B}$ *con* n *righe e* $n+2$ *colonne, copiando le prime due colonne di* A *alla destra di* A*. Si calcola la somma dei prodotti degli elementi sulle diagonali principali e si sottrae la somma degli elementi sulle diagonali secondarie.*

Esempio 11.2 (Regola di Sarrus) *Si vuole calcolare il determinante della matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Si applica la regola di Sarrus e si costruisce la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & \vdots & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & \vdots & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Si calcolano i prodotti sulle prime tre diagonali discendenti con il segno positivo e quelli sulle tre diagonali ascendenti con il segno positivo, ottenendo:

$$1(-1)(-2) + 0(-1)0 + 3(2)(2) - [0(-1)(3) + 2(-1)(1) + (-2)(2)0] = 2 + 12 + 2 = 16$$

Nel seguito presentiamo alcune importanti proprietà del determinante.

Osservazione 11.1 (Proprietà del determinante rispetto alle operazioni elementari)

Operazioni elementari di tipo I *Se* $\boldsymbol{A}'$ *è una matrice ottenuta da* $\boldsymbol{A}$ *scambiando due righe, allora* $det(\boldsymbol{A}') = -det(\boldsymbol{A})$;

Operazioni elementari di tipo II *Se* $\boldsymbol{A}'$ *è una matrice ottenuta da* $\boldsymbol{A}$ *moltiplicando una riga per uno scalare* $k \neq 0$*, allora* $\det(\boldsymbol{A}) = k \det(\boldsymbol{A})$*;*

Operazioni elementari di tipo III *Se* $\boldsymbol{A}'$ *è una matrice ottenuta da* $\boldsymbol{A}$ *sommando ad una riga un'altra moltiplicata per uno scalare, allora* $\det(\boldsymbol{A}') = \det(\boldsymbol{A})$*.*

Osservazione 11.2 (Determinante di una matrice mediante l'algoritmo di Gauss) *Sia* $\boldsymbol{B}$ *una matrice a scala, equivalente per righe ad* $\boldsymbol{A}$*, ottenuta con l'algoritmo di Gauss (che, ricordiamo, utilizza solo operazioni elementari di tipo I e di tipo II). Dalle proprietà dei determinanti segue che*

$$\det(\boldsymbol{B}) = (-1)^s \det(\boldsymbol{A}), \tag{2}$$

dove s è il numero di scambi di righe effettuati per passare da $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$.

Osserviamo inoltre che, essendo la matrice $\boldsymbol{B}$ ottenuta con Gauss, essendo quadrata è necessariamente triangolare superiore, il cui determinante dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale principale. Ne segue il determinante di una matrice $\boldsymbol{A}$, può essere agevolmente calcolato attraverso la riduzione a scala attraverso l'algoritmo di Gauss, memorizzando il numero di scambi righe effettuati.

Teorema 11.1 *Il determinante di una matrice quadrata $\boldsymbol{A}$ di ordine n è diverso da zero se e solo se $rk(\boldsymbol{A}) = n$.*

Dimostrazione Applichiamo l'algoritmo di eliminazione di Gauss alla matrice quadrata $\boldsymbol{A}$ di ordine n.

Se $rk(\boldsymbol{A}) = n$ si otterrà una matrice $\boldsymbol{B}$ triangolare superiore, con tutte righe non nulle. Ne segue che tutti i pivot corrispondono agli elementi sulla diagonale principale e pertanto $\det(\boldsymbol{B} \neq 0$. Ma per l'osservazione precedente, si avrà anche $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$, in quanto $\det(\boldsymbol{A})$ e $\det(\boldsymbol{B})$ possono differire al più per il segno.

Se invece $rk(\boldsymbol{A}) < n$, la matrice finale $\boldsymbol{B}$ avr almeno una riga nulla. Pertanto almeno uno degli elementi sulla diagonale principale sarà pari a zero e quindi $\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{B}) = 0$.

Corollario 11.1 (Relazione tra determinante e invertibilità) *Una matrice $\boldsymbol{A}$ è invertibile se e solo se* $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$.

Dimostrazione Una matrice $\boldsymbol{A}$ è invertibile se e solo se $rk(\boldsymbol{A}) = n$. Ma dal teorema **??** sappiamo che $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ se e solo se $rk(\boldsymbol{A}) = n$.

Definizione 11.4 (Matrici singolari) *Una matrice si dice* ***non singolare*** *se* $\det(A) \neq 0$*, mentre si dice* ***singolare*** *se* $\det(\boldsymbol{A}) = 0$.

Il determinante è anche alla base di un metodo alternativo per il calcolo dell'inversa di una matrice A.

Infatti, è possibile verificare che

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{C_{11}}{\det A} & \frac{C_{12}}{\det A} & \cdots & \frac{C_{1n}}{\det A} \\ \frac{C_{21}}{\det A} & \frac{C_{22}}{\det A} & \cdots & \frac{C_{2n}}{\det A} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{C_{n1}}{\det A} & \frac{C_{n2}}{\det A} & \cdots & \frac{C_{nn}}{\det A} \end{bmatrix}^T . \tag{3}$$

Un altro risultato assai utile per il calcolo del determinante è il teorema di Binet, il quale si enuncia come segue

Teorema 11.2 (Teorema di Binet) *Siano A e B due matrici quadrate di ordine n, allora*

$$\det(A \times B) = \det A \cdot \det B. \tag{4}$$

Dalla formula (4) si può calcolare il determinante della matrice A^{-1} noto il determinante di A.

Corollario 11.2 (Determinante di A^{-1}) *Se A è una matrice quadrata invertibile, allora*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}. \tag{5}$$

11.1 Calcolo del rango utilizzando i determinanti

Il concetto di rango di una matrice non quadrata può essere espresso anche attraverso il determinante. Infatti, data una matrice mxn, il suo rango può essere calcolato attraverso il determinante delle sottomatrici quadrate della matrice considerata.

Allo scopo premettiamo la seguente definizione

Definizione 11.5 (minore) *Sia* $\boldsymbol{A}$ *una matrice di tipo* $m \times n$*, si dice* **minore di $\boldsymbol{A}$ di ordine p, con** $p \leq \min\{m, n\}$ *una qualunque sottomatrice quadrata di* $\boldsymbol{A}$ *di ordine* p*.*

Esempio 11.3 (minori) *Se*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 4 & -7 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

i suoi minori di ordine 2 *sono le seguenti matrici:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -7 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vale poi il seguente teorema per il calcolo del rango.

Teorema 11.3 (Calcolo del rango con i minori) *Il rango di una matrice è uguale all'ordine massimo dei suoi minori non singolari.*

In altre parole, una matrice $\boldsymbol{A}$ ha rango p se e solo se esiste un minore non singolare di ordine p e tutti i minori di $\boldsymbol{A}$ di ordine $p+1$ (se esistono) sono singolari.

Definizione 11.6 (orlato) *Sia* $\boldsymbol{A}$ *una matrice di tipo* $m \times n$*, e sia* $\boldsymbol{M}$ *un minore di* $\boldsymbol{A}$ *di ordine* p*. Si dice* ***orlato di M*** *un qualunque minore* $\boldsymbol{N}$ *di* $\boldsymbol{A}$ *di ordine* $p+1$ *che ammetta* $\boldsymbol{M}$ *come sua sotto matrice (in altri termini* $\boldsymbol{N}$ *si ottiene da* $\boldsymbol{M}$ *cancellando una riga ed una colonna).*

Esempio 11.4 (orlati) *Se* $\boldsymbol{A}$ *è la matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ -8 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ed M *è il suo minore di ordine* 2*, ottenuto da* A *cancellando la terza riga e la seconda e quarta colonna, cioè*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 1 \end{bmatrix},$$

i suoi orlati sono i minori

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -8 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -8 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per il calcolo del determinante vale il seguente teorema.

Teorema 11.4 (Teorema degli orlati di Kronecker) *Sia* $\boldsymbol{A}$ *una matrice mxn. Il rango di* $\boldsymbol{A}$ *è pari a* p *se e solo se esiste un minore di ordine* p *non singolare e tutti i suoi orlati sono tutti singolari.*

Esempio 11.5 (Calcolo del rango con gli orlati) *Si vuole calcolare il rango della matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 18 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & -6 \\ 8 & 2 & 40 & 4 \end{bmatrix}$$

Il minore del secondo ordine

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

è non singolare poichè $\det(M) = 1$*. Tutti gli orlati di ordine* 3 *sono*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 18 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 18 \\ 8 & 2 & 40 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Poichè tutti questi minori hanno determinante nullo se ne deduce che $rk(\boldsymbol{A}) = 2$.