Introduzione
Classificazione di segnali

La natura fisica dei segnali può essere molto diversa, ma la loro caratteristica essenziale è comune: il segnale descrive le variazioni di una grandezza misurabile. Pertanto un segnale può essere rappresentato matematicamente da una funzione di una o più variabili indipendenti. Esempi di segnali sono il segnale vocale, l'uscita di un circuito elettrico, o un'immagine.

I segnali sono classificabili nel seguente modo.

► *Segnali a tempo continuo.* Definiti su un insieme continuo; ad esempio un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ o tutto $\mathbb{R}$. La variabile indipendente viene di norma indicata con la lettera t.

► *Segnali a tempo discreto o sequenze.* Definiti in un insieme discreto; ad esempio un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ o tutto $\mathbb{N}$. La variabile indipendente viene di norma indicata con la lettera n.

► *Segnali reali e complessi.* I valori assunti da un segnale a tempo continuo o a tempo discreto possono appartenere a un sottoinsieme dei numeri reali per cui il segnale si dirà *reale* oppure ad un sottoinsieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ per cui il segnale si dirà *complesso*. Nel seguito del corso tratteremo sia segnali reali che complessi.

► *Segnali numerici.* Una ulteriore tipologia di segnali sono quelli a tempo discreto che assumono un numero finito di valori; tali segnali si dicono numerici.

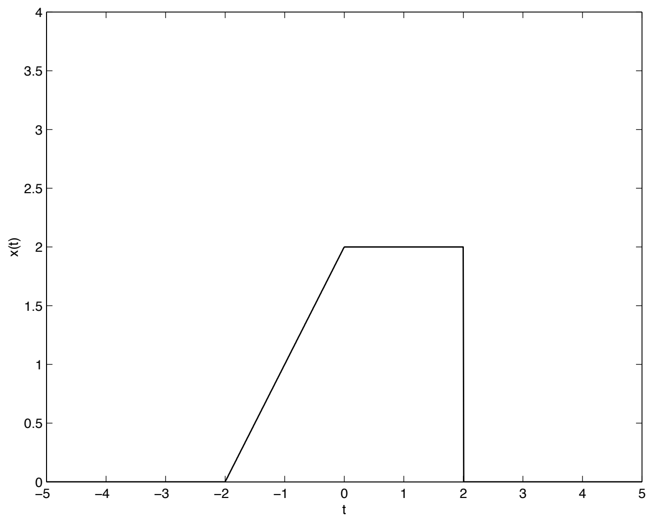
Trasformazioni della variabile dipendente (ampiezza).

► Le trasformazioni elementari della variabile dipendente consistono nella somma e nel prodotto di due segnali e nella moltiplicazione di un segnale per una costante. La somma di due segnali si costruisce sommando punto a punto le ordinate dei due segnali. Similmente, il prodotto tra due segnali si realizza effettuando il prodotto punto a punto delle ordinate dei due segnali. Infine, la moltiplicazione di un segnale per una costante corrisponde al prodotto di due segnali di cui uno è costante.

Trasformazioni della variabile indipendente (tempo)

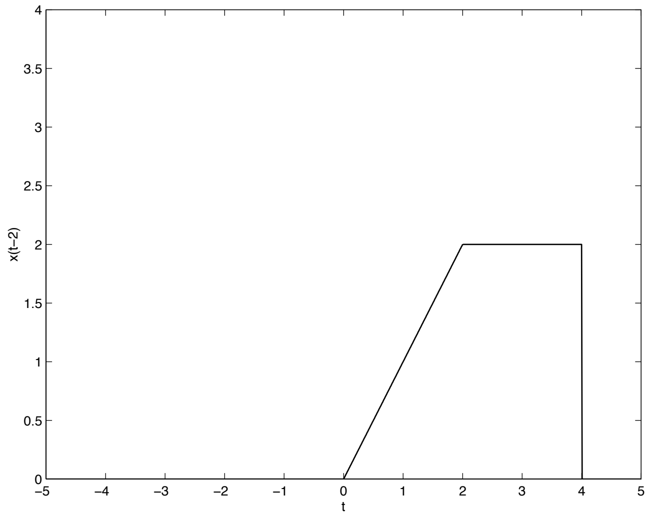
Le trasformazioni elementari della variabile indipendente consistono nella traslazione temporale, nella riflessione temporale, e nel cambiamento di scala.

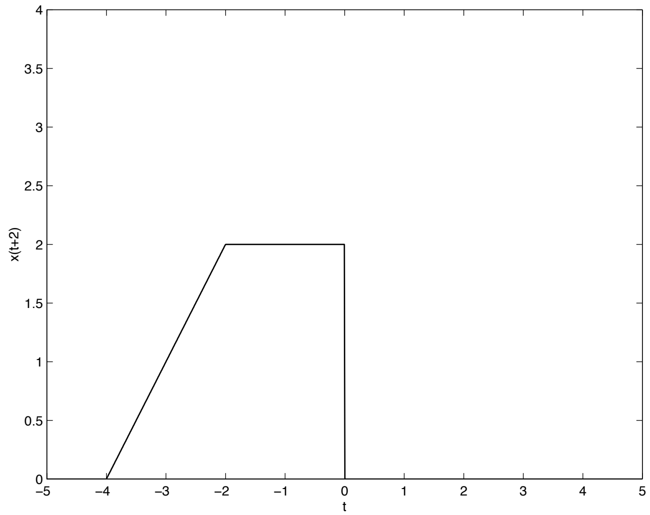
Si consideri il segnale $x(t)$ in figura, che assume valori non nulli nell'intervallo $(-2,2)$ di $\mathbb{R}$.
L'insieme, eventualmente non connesso, dei valori in cui un segnale è non nullo si dice *supporto* del segnale.



Traslazione temporale

La traslazione temporale consiste nella trasformazione $y(t) = x(t-T)$ con T costante. Il segnale $x(t-2)$, rappresentato nel primo grafico della figura successiva risulta traslato positivamente rispetto all'asse dei tempi, cioè ritardato. Analogamante, il secondo grafico mostra il segnale anticipato $x(t+2)$ che risulta traslato negativamente rispetto all'asse dei tempi. In generale, il valore $x(t_0$ che il segnale assume nell'istante di tempo t_0 viene assunto nell'istante di tempo t_1 soluzione dell'equazione $t_0 = t_1 - T$, che nel nostro caso è l'istante $t_1 = t_0 + T$; per cui il segnale è traslato nel verso positivo dei tempi di T.

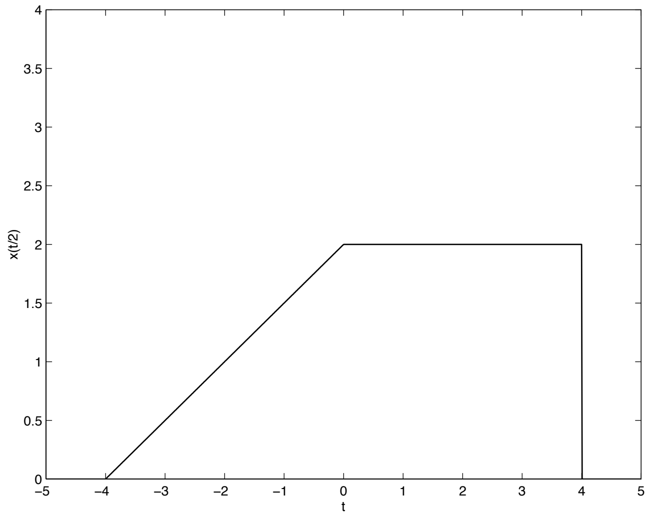


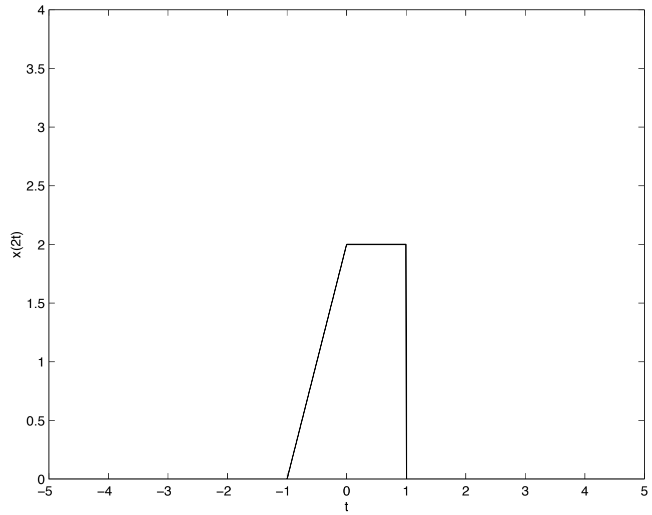


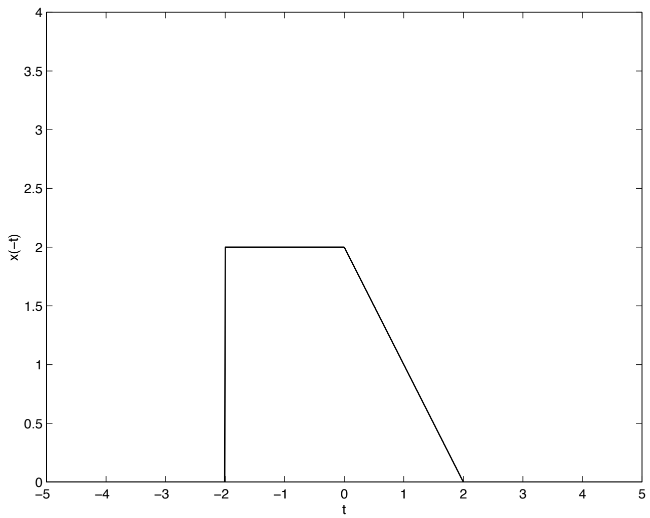
Cambiamento di scala
Il cambiamento di scala consiste nella trasformazione $y(t) = x(t/a)$ con a costante positiva.

► Per $a > 1$ Il segnale è espanso.
► Per $0 < a < 1$ Il segnale è compresso.

In figura è rappresentato il grafico di $x(t/2)$ (a sinistra) e di $x(2t)$ (a destra). In questo caso, il valore $x(t_0$ che il segnale assume nell'istante di tempo t_0 viene assunto nell'istante di tempo t_1 soluzione dell'equazione $t_0 = t_1/a$, che nel nostro caso è l'istante $t_1 = at_0$; per cui il l'asse dei tempi è espanso di un fattore a. Se $a < 1$ si ha ovviamente una compressione.



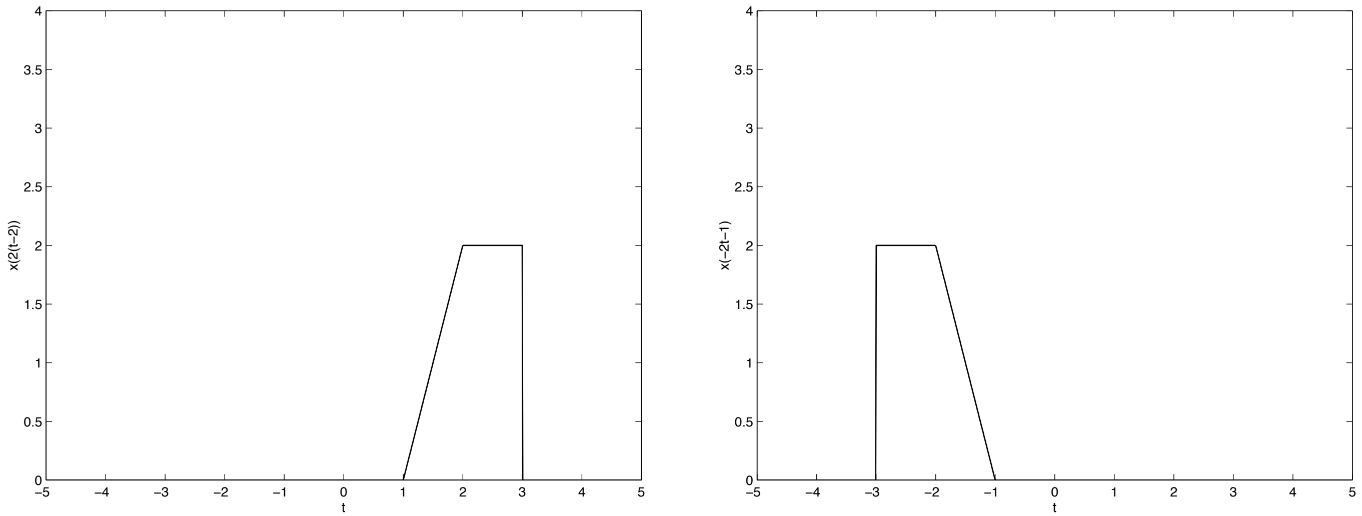




Riflessione

Consiste nella trasformazione $y(t) = x(-t)$ che comporta un'inversione dell'asse dei tempi, mostrata in figura.

Le operazioni sulla variabile temporale possono essere composte. In tal caso va sempre effettuata prima la trasformazione più esterna. Ad esempio $x(2t-4) = x(2(t-2))$ presenta una compressione pari a due e una traslazione di due unità e $x((3-2t)/4)$ può essere riscritta come $x(-2(t-3/2)/4)$ a cui corrisponde, nell'ordine una riflessione, un cambiamento di scala di un fattore 2 (espansione) ed una traslazione di 3/2.
In figura sono rappresentati i segnali $y(t) = x(2(t-2))$ ed $y(t) = x(-2(t-1))$.



Segnali elementari

► *Impulso rettangolare a tempo continuo*
L'impulso rettangolare continuo di ampiezza e durata unitaria è definito da

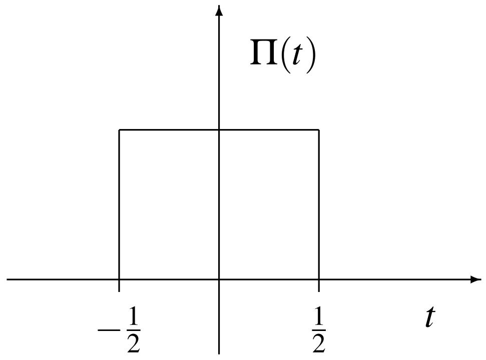
$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad -0.5 < t < 0.5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

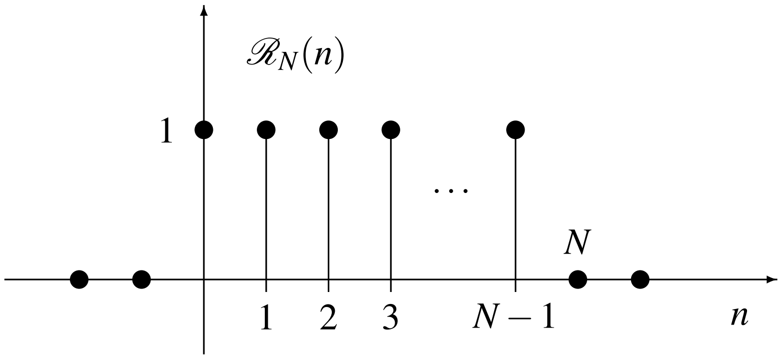
Conseguentemente, l'impulso rettangolare di ampiezza A, centrato in t_0, e di durata T, è l'impulso

$$x(t) = A\,\Pi\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$$

► *Impulso rettangolare a tempo discreto*
L'impulso rettangolare discreto di durata N è definito da

$$\mathscr{R}_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$





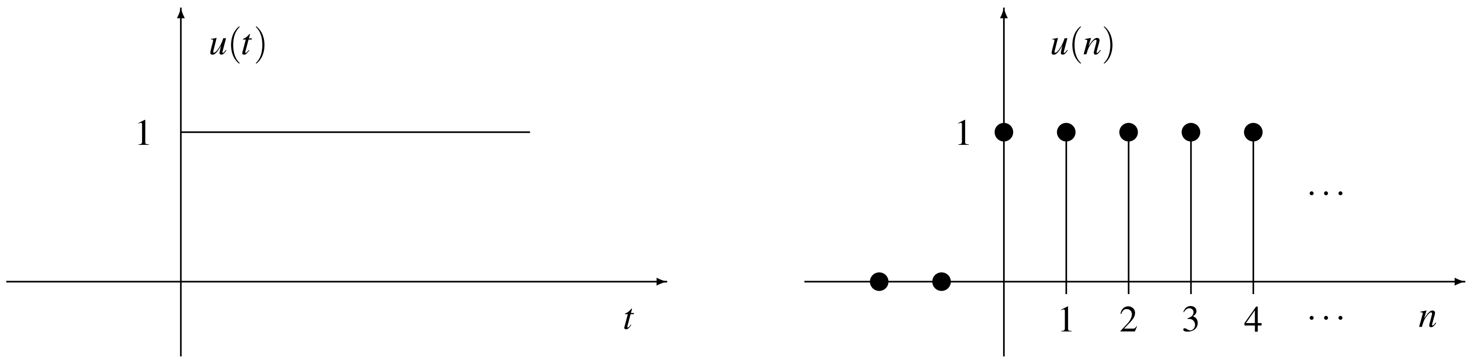
Impulso rettangolare a tempo continuo e a tempo discreto

► *Gradino unitario a tempo continuo*
Il gradino unitario continuo è definito da

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t > 0 \\ 0 & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}$$

► *Gradino unitario a tempo discreto*
Il gradino unitario discreto è definito da

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad n < 0 \end{cases}$$



Gradino unitario a tempo continuo e a tempo discreto

Combinando opportunamente due gradini di uguale ampiezza si ottengono impulsi rettangolari. Ad esempio l'impulso rettangolare di durata T si può ottenere come

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \ .$$

► *Fasore (tempo continuo)*

$$x(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi)} = Ae^{j(2\pi f t + \varphi)}$$

con A ampiezza, ω pulsazione, f frequenza e φ fase iniziale del fasore. Il segnale è rappresentato, nel piano complesso, da un vettore rotante con velocità angolare ω rad/s. Si noti che il fasore è un segnale periodico di periodo

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

► *Segnale sinusoidale (tempo continuo)*
La sinusoide di ampiezza $A > 0$, fase iniziale φ e pulsazione ω è il segnale

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Utilizzando le formule di Eulero è immediato verificare che

$$A\cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}Ae^{j(\omega t+\varphi)} + \frac{1}{2}Ae^{-j(\omega t+\varphi)}$$

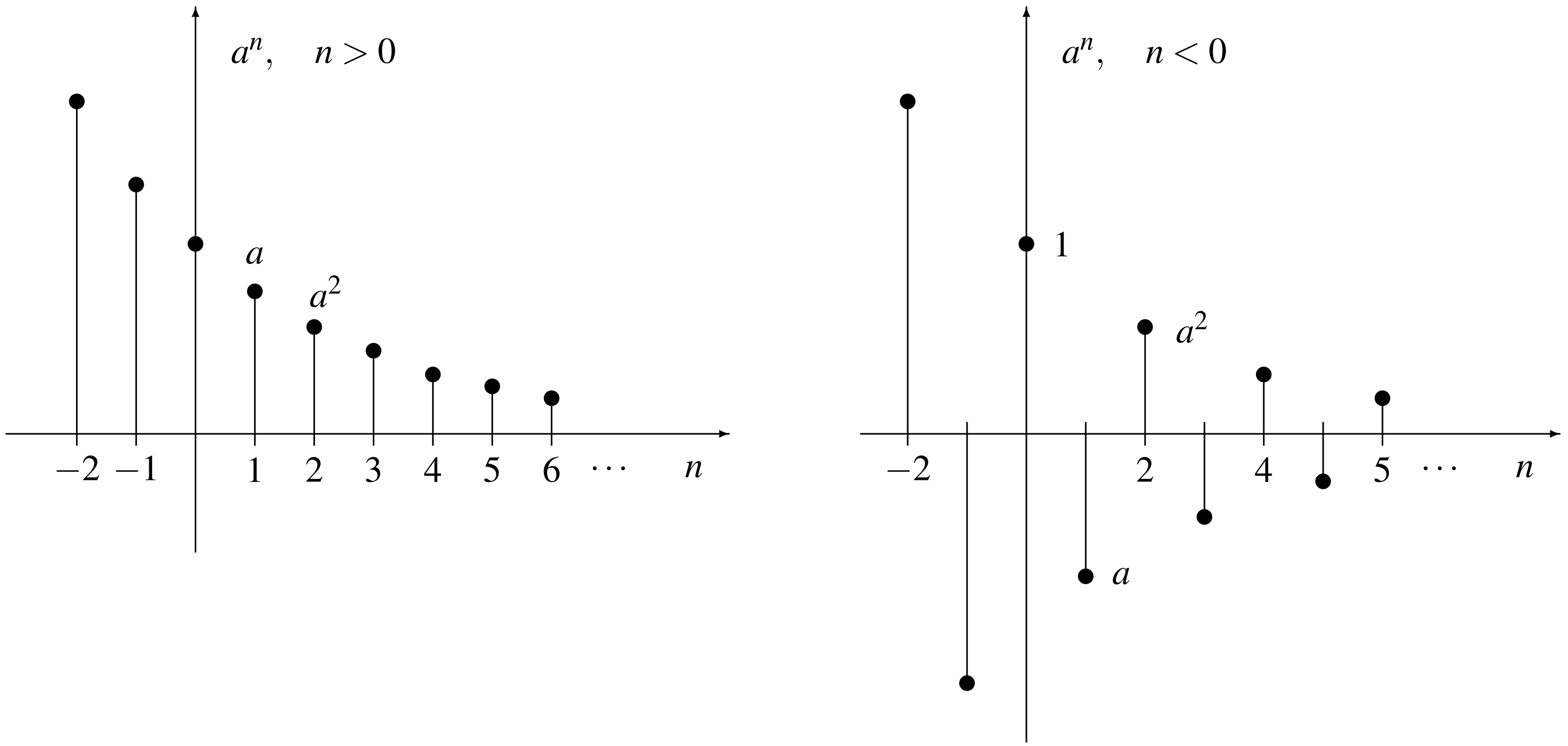
In alternativa è possibile rappresentare la sinusoide come la parte reale di un fasore, cioè

$$A\cos(\omega t + \varphi) = \Re e\left\{Ae^{j(\omega t+\varphi)}\right\}$$

► *Sequenza esponenziale (tempo discreto)*
La sequenza esponenziale è definita come

$$x(n) = Az^n$$

dove A ed z sono in generale complessi. Se sono entrambi reali si ha la sequenza esponenziale reale o semplicemente sequenza esponenziale.



► *Fasore a tempo discreto*

$$x(n) = Ae^{j(\theta n+\varphi)} = Ae^{j(2\pi\nu n+\varphi)}$$

Come nel caso continuo esso legato alla sequenza sinusoidale dalla relazione

$$\Re e\{x(n)\} = A\cos(\theta n+\varphi) = A\cos(2\pi\nu n+\varphi)$$

Sussistono importanti differenze fra fasore continuo e discreto riguardo alle proprietà di periodicità del segnale.

1. Non è vero che $e^{j2\pi\nu n}$ oscilla sempre più velocemente al crescere della frequenza ν. Infatti, risultando

$$e^{j2\pi(\nu+k)n} = e^{j2\pi\nu n}$$

due fasori le cui frequenze differiscono per un numero intero sono indistinguibili. Ad esempio, posto $\nu_1 = 0.1$ e $\nu_2 = 1.1$, il fasore $e^{j0.2\pi n}$ è indistinguibile dal fasore $e^{j2.2\pi n}$. Dato che i fasori sono indistinguibili se le loro frequenze differiscono di un numero intero, basta scegliere un intervallo di ampiezza unitaria nel quale convenzionalmente definire la frequenza. Le scelte più naturali sono

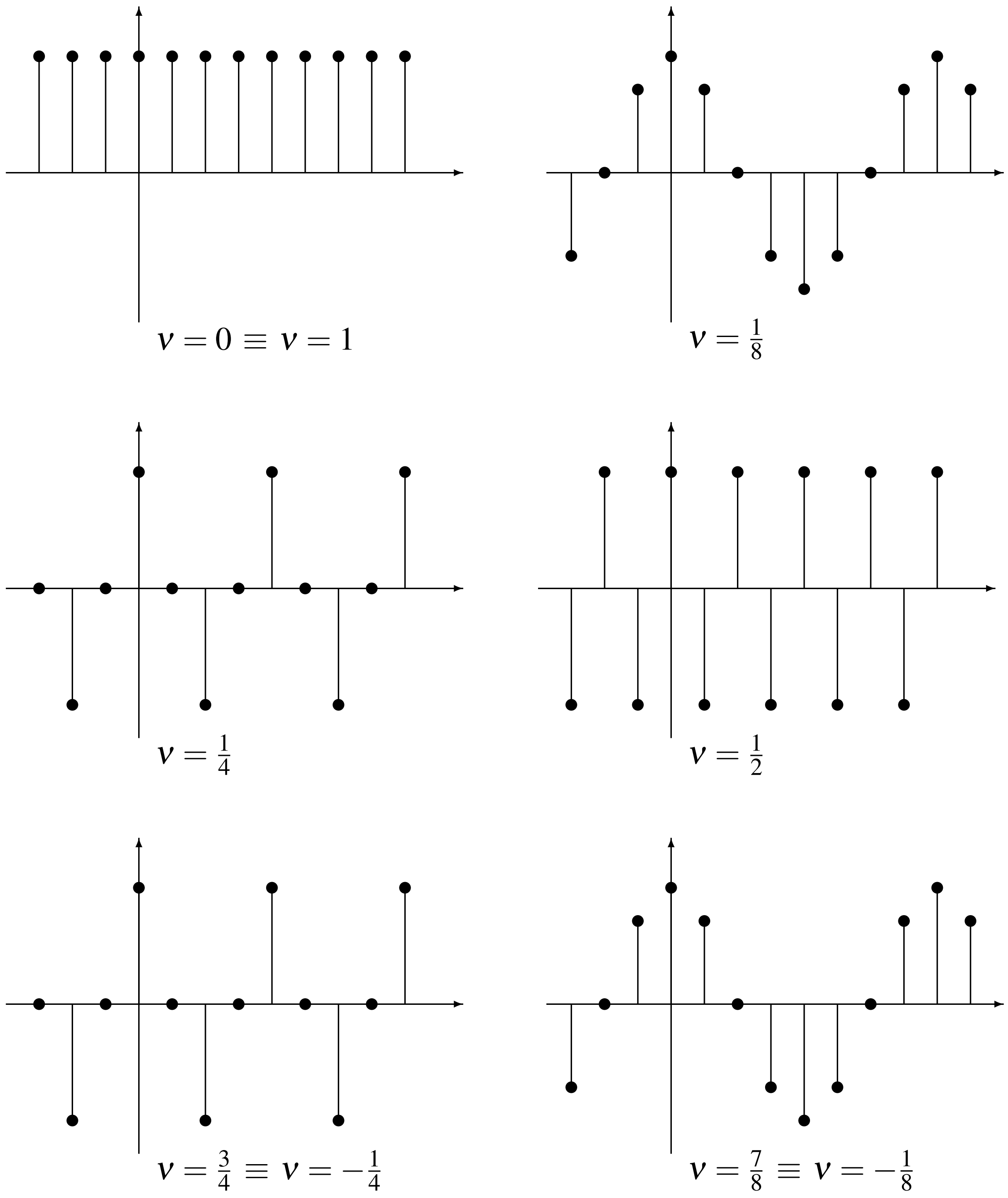
$$-\frac{1}{2} \leq \nu < \frac{1}{2} \quad e \quad 0 \leq \nu < 1,$$

corrispondentemente, in termini di pulsazione, l'intervallo di definizione ha ampiezza 2π con $-\pi \leq \theta < \pi$ e $\quad 0 \leq \theta < 2\pi$.

2. Non è vero che $e^{j2\pi\nu n}$ è sempre periodico rispetto a n. Infatti, per la periodicità deve esistere un numero N tale che

$$e^{j2\pi\nu(n+N)} = e^{j2\pi\nu n}$$

Per cui è necessario e sufficiente che $\nu N = k$, cioè che la sua frequenza sia un numero razionale. In tale ipotesi, se $\nu = k/N$, e assumiamo che k e N siano primi fra loro, allora il periodo è N. Così per esempio la sequenza $x_1(n) = \cos(\pi n/6)$ è periodica di periodo $N = 12$, la sequenza $x_2(n) = \cos(8\pi n/31)$ è periodica di periodo $N = 31$, mentre il segnale $x_3(n) = \cos(n/6)$ non è periodico.



Sequenze sinusoidali per diversi valori della frequenza.

A causa della periodicità, la rapidità di variazione delle sinusoidi discrete non cresce costantemente all'aumentare di ν. Come è evidenziato in figura, le sequenze sinusoidali variano sempre più rapidamente al crescere di ν da 0 a $\frac{1}{2}$, mentre, al crescere di ν da $\frac{1}{2}$ a 1 variano sempre meno rapidamente. Per $\nu = 0$ e per $\nu = 1$ si ottiene un segnale costante. Quindi nel caso dei segnali discreti, le basse frequenze si trovano nell'intorno di 0 mentre le alte frequenze nell'intorno di $\pm\frac{1}{2}$.

► *Segnale sinc*

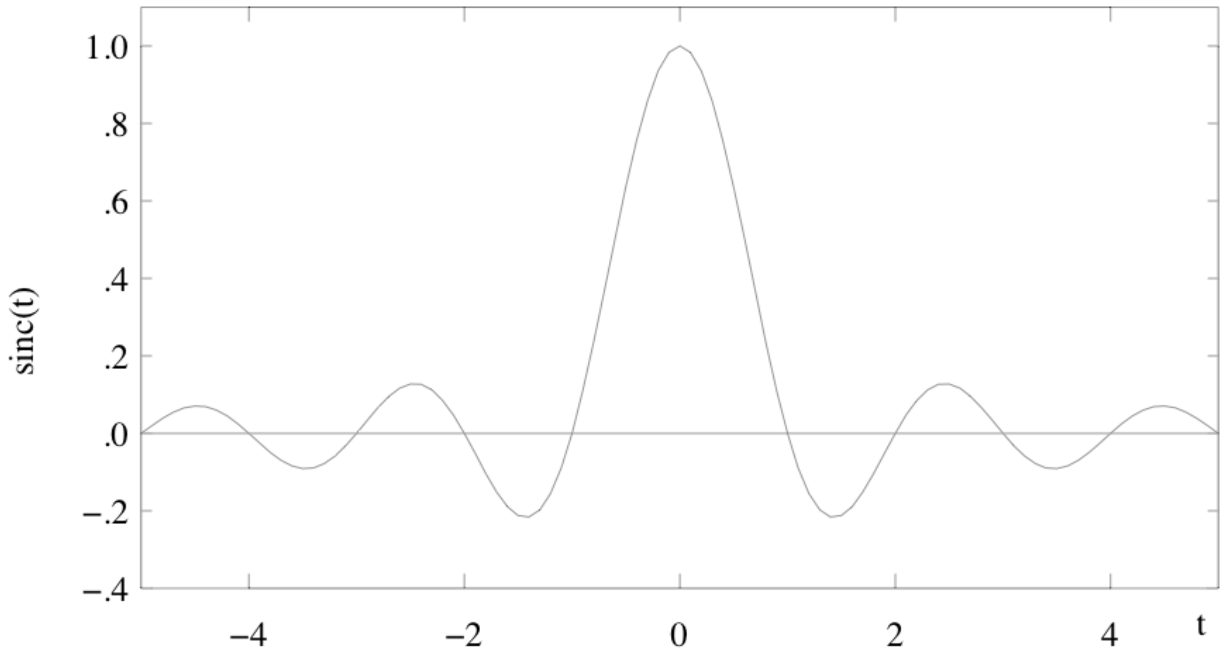
È definito come

$$x(t) = \mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Il segnale presenta una serie di lobi laterali di durata 1, salvo il lobo centrale che ha durata 2. I lobi hanno ampiezza decrescente. Il primo lobo laterale (negativo) ha ampiezza $0,207$ volte quella del lobo centrale e risulta

$$\alpha_1 = 20 \log_{10} \frac{|x(0)|}{|x(t_1)|} = 13.26$$

cioè si trova a $-13.26\,\mathrm{dB}$. L'ampiezza dei lobi laterali decade come $1/t$ ovvero di 6 dB/ottava = 20 dB/decade.



N.B. Si dice ottava l'intervallo di frequenze (f_1, f_2) in cui $f_2 = 2f_1$, mentre se $f_2 = 10f_1$ tale intervallo si dice decade.

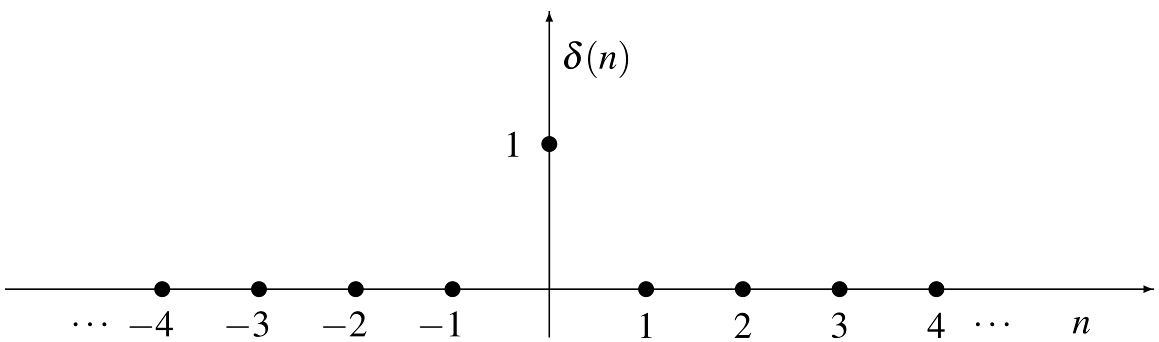
► *Impulso triangolare*

L'impulso triangolare unitario è $\Lambda(t)$ è il segnale

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{se} \quad |t| \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad |t| > 1 \end{cases}$$

► *Impulso a tempo discreto*
L'impulso unitario discreto $\delta(n)$ è la sequenza

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n = 0 \\ 0 & \text{se} \quad n \neq 0 \end{cases}$$



Proprietà di campionamento e di riproducibilità
L'impulso unitario $\delta(n-k)$, locato in k, è uguale a 1 per $n = k$ e 0 altrove. È immediato verificare che, data una sequenza

$x(n)$, si ottiene la seguente proprietà di campionamento

$$x(n)\delta(n-k) = x(k)\delta(n-k) \ .$$

Sommando su tutti i valori di k si ha

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

in cui si osserva che il segnale $x(n)$ può essere riguardato come combinazione lineare, con coefficienti $x(k)$, di impulsi unitari locati nei vari istanti k (proprietà di riproducibilità). Si noti che, nella sommatoria, $x(k)$ è l'ambiezza dell'impulso $\delta(n-k)$ locato in k.

Esempio
Utilizzando la proprietà di riproducibilità, si ha

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)\delta(n-k)$$

e quindi, tenuto conto che $u(k)$ è nullo per $k < 0$, con il cambio di indice $m = n-k$ si ottiene

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m)$$

Da tale equazione segue che il gradino unitario è la somma corrente, cioè la somma tra $-\infty$ ed n, dei valori dell'impulso unitario.

Inversamente l'impulso unitario è la differenza prima $\nabla_1[\cdot]$ del gradino unitario

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) = \nabla_1[u(n)]$$

► *Impulso continuo (impulso di Dirac)*
L'impulso continuo $\delta(t)$ è una funzione generalizzata. Viene definito dalla condizione che, per ogni funzione $x(t)$ continua in $t = 0$, si ha

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t)dt = \begin{cases} x(0) & \text{se} \quad 0 \in (t_1, t_2) \\ 0 & \text{se} \quad 0 \notin (t_1, t_2) \end{cases}$$

Utilizzando le proprietà dell'integrale, si possono ricavare le proprietà dell'impulso di Dirac.

Proprietà 1 - Normalizzazione.
Posto $x(t) = 1$, $t_1 = -\infty$ e $t_2 = +\infty$, risulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

ciò si esprime dicendo che l'impulso $\delta(t)$ ha area unitaria.

Proprietà 2 - Campionamento.
Sempre dalla definizione, per $y(t)$ e $x(t)$ continui in $t = 0$, si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)x(t)\delta(t)dt = y(0)x(0)$$

ma anche

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)x(0)\delta(t)dt = y(0)x(0)$$

e quindi

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

Proprietà 3 - Cambiamento di scala.
Per un qualsiasi $x(t)$ continuo in 0

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(at)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|a|} x\left(\frac{t}{a}\right)\delta(t)dt$$

e ciò è equivalente a

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

che esprime la cosidetta *proprietà di cambiamento della scala*; in particolare da tale relazione, ponendo $a = -1$, segue che $\delta(t)$ è pari.

Proprietà 4 - Riproducibilità.
Considerando un impulso di Dirac applicato nell'istante di tempo τ

$$x(t)\delta(t-\tau) = x(\tau)\delta(t-\tau)$$

e integrando ad ambo i menbri dell'equazione si ottiene, per ogni segnale $x(t)$ continuo in t

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t)$$

Dalla proprietà di riproducibilità segue che il gradino unitario è l'integrale dell'impulso ideale, cioè

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$$

conseguentemente risulta anche

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t).$$

Dalle proprietà precedentemente viste, si intuisce che l'impulso unitario sia zero ovunque fuorché per $t = 0$, dove è infinito, e che la sua area sia unitaria. Chiaramente nessuna funzione ordinaria soddisfa tale requisiti, ma è possibile trovare opportune famiglie di funzioni ordinarie che approssimano $\delta(t)$. Precisamente, una famiglia $\delta_T(t)$ di funzioni ordinarie converge (in senso generalizzato) a $\delta(t)$ se vale la proprietà:

$$\lim_{T\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta_T(t)dt = x(0)$$

per ogni $x(t)$ continuo in $t = 0$; in tal caso si scrive semplicemente:

$$\lim_{T\to 0} \delta_T(t) = \delta(t)$$

Ad esempio, la proprietà precedente è soddisfatta per la famiglia di rettangoli

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

Più in generale una famiglia di impulsi $\delta_T(t)$ converge alla $\delta(t)$ se, al tendere a zero di T, il singolo impulso tende a concentrarsi sull'origine, la sua ampiezza diverge, mentre l'area converge ad un valore unitario.

Medie temporali

La media temporale di un segnale $x(t)$ nell'intervallo $t_1 \leq t_2$ è la quantità

$$< x(t) >_{(t_1,t_2)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt$$

mentre per una sequenza $x(n)$ nell'intervallo $N_1 \leq n \leq N_2$ è

$$< x(n) >_{(N_1,N_2)} = \frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \sum_{n=N_1}^{N_2} x(n)$$

► Per le sequenze, la media temporale coincide con la media aritmetica dei campioni, mentre per le forme d'onda è l'altezza del rettangolo avente area uguale a quella sottesa dal segnale $x(t)$ nell'intervallo (t_1, t_2) e base $(t_2 - t_1)$.

Se si fa tendere all'infinito l'ampiezza dell'intervallo si ha la media temporale (senza menzione dell'intervallo)

$$< x(t) > = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) dt$$

nel caso continuo, mentre nel caso discreto si ha

$$< x(n) > = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)$$

La media temporale prende anche il nome di componente continua di un segnale e la si denota con x_{dc}.

Potenza di un segnale

► *La media temporale di $x^2(\cdot)$, (di $|x(\cdot)|^2$ se si tratta di segnali complessi), si definisce valore quadratico medio o potenza media. Si ha, quindi,*

$$\mathscr{P}_x = < |x(\cdot)|^2 >$$

La radice quadrata del valore quadratico medio è il valore efficace, o sinteticamente valore rms, e verrà denotato con x_{rms}

$$x_{\mathrm{rms}} = \sqrt{< |x^2(\cdot)| >}$$

Per una vasta classe di segnali la potenza è nulla. È questo, ad esempio, il caso dei segnali a durata limitata come l'impulso rettangolare $x(t) = \Pi(t)$ e l'impulso triangolare $x(t) = \Lambda(t)$ o non limitata come l'impulso esponenziale $x(t) = e^{-at}u(t)$ $a > 0$.

Energia di un segnale

► *L'energia di un segnale si definisce come*

$$\mathscr{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

per i segnali a tempo continuo, oppure, per le sequenze

$$\mathscr{E}_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

► L’energia di un segnale non può essere negativa e i segnali di energia hanno media necessariamente nulla, mentre i segnali di potenza hanno necessariamente energia infinita.

I segnali vengono distinti in segnali di potenza, che sono i segnali con potenza finita e strettamente maggiore di zero e segnali di energia che sono i segnali con potenza nulla ma energia finita. Il caso di segnali con potenza infinita non ha invece alcuna rilevanza pratica.

Segnali periodici

I segnali periodici sono segnali di potenza. È possibile dimostrare che la media temporale coincide con la media calcolata su di un periodo, si ha cioè

$$< x(t) > = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt \qquad\qquad < x(n) > = \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1} x(n)$$

dove T e L denotano il periodo di $x(t)$ e $x(n)$, rispettivamente.

► Proprietà della media temporale

Proprietà 1 - Linearità

Per ogni coppia (a_1, a_2) di numeri reali o complessi e per ogni coppia di segnali $(x_1(\cdot), x_2(\cdot))$ risulta

$$< a_1 x_1(\cdot) + a_2 x_2(\cdot) >= a_1 < x_1(\cdot) > + a_2 < x_2(\cdot) >$$

Proprietà 2 - Invarianza temporale

La media temporale di un segnale $x(\cdot)$ è invariante per traslazioni: cioè, comunque si scelga il ritardo Δ (o M se trattasi di sequenze), risulta:

$$< x(t-\Delta) >=< x(t) > \qquad\qquad < x(n-M) >=< x(n) >$$

Esempio 1: Componente continua e potenza di un fasore
Si consideri un fasore di pulsazione ω

$$x(t) = Ae^{j\omega t}$$

Se $\omega = 0$, il segnale si riduce alla costante A e risulta $< x(t) >= A$. Per $\omega \neq 0$ il fasore è periodico di periodo $\Delta = \frac{2\pi}{\omega}$ e si ha

$$< Ae^{j\omega t} >= \frac{A\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{j\omega t} dt = 0$$

Passando alla potenza si ha:

$$< |Ae^{j\omega t}|^2 > = A^2$$

Esempio 2: Media temporale e potenza di una sinusoide
Consideriamo il segnale sinusoidale

$$x(t) \; = A\cos(\omega t + \varphi)$$

con $\omega \neq 0$. Utilizzando la rappresentazione di una sinusoide in termini di fasori e la linearità della media, si ha

$$< A\cos(\omega t + \varphi) >= \frac{1}{2}Ae^{j\varphi} < e^{j\omega t} > + \frac{1}{2}Ae^{-j\varphi} < e^{-j\omega t} >= 0$$

Per la potenza, si ha invece

$$< |A\cos(\omega t + \varphi)|^2 >= \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A^2 < \cos[2(\omega t + \varphi)] >= \frac{1}{2}A^2$$

Quindi la sinusoide è un segnale di potenza periodico a media nulla.

Potenza ed energia della somma di due segnali
La potenza e l'energia sono invarianti per traslazione, ma non sono operatori lineari

Per la somma di due segnali, la potenza si calcola come

$$< |x(\cdot)+y(\cdot)|^2 > = < |x(\cdot)|^2 > + < |y(\cdot)|^2 > + < x(\cdot)y^*(\cdot) > + < y(\cdot)x^*(\cdot) >$$

Definendo $\mathscr{P}_{xy} = < x(\cdot)y^*(\cdot) >$ potenza mutua tra $x(\cdot)$ e $y(\cdot)$, si ottiene

$$\mathscr{P}_{x+y} = \mathscr{P}_x + \mathscr{P}_y + \mathscr{P}_{xy} + \mathscr{P}_{yx} = \mathscr{P}_x + \mathscr{P}_y + 2\Re e\{\mathscr{P}_{xy}\}$$

Le potenze mutue $\mathscr{P}_{xy}$ e $\mathscr{P}_{yx}$ danno conto dell'interazione in termini energetici dei segnali. Se la potenza mutua è nulla i segnali si dicono ortogonali e vale l'additività delle potenze.

Analogamente a quanto si verifica per le potenze, è immediato verificare che l'energia $\mathscr{E}_{x+y}$ della somma di due segnali è data da

$$\mathscr{E}_{x+y} = \mathscr{E}_x + \mathscr{E}_y + \mathscr{E}_{xy} + \mathscr{E}_{yx} = \mathscr{E}_x + \mathscr{E}_y + 2\Re e\{\mathscr{E}_{xy}\}$$

ove, $\mathscr{E}_{xy}$ e $\mathscr{E}_{yx} = \mathscr{E}_{yx}^*$ denotano rispettivamente l'energia mutua tra $x(\cdot)$ e $y(\cdot)$ e quella tra $y(\cdot)$ e $x(\cdot)$ definite da:

$$\mathscr{E}_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt \qquad \mathscr{E}_{yx} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)x^*(t)dt$$

nel caso di segnali a tempo continuo e da

$$\mathscr{E}_{xy} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) \qquad \mathscr{E}_{yx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x^*(n)$$

per i segnali a tempo discreto.
Se $\mathscr{E}_{xy} = 0$ (e quindi anche $\mathscr{E}_{yx} = 0$) allora vale l'additività per l'energia ed i segnali si dicono ortogonali.

Rappresentazione dei segnali

I segnali di energia e di potenza possono essere interpretati come elementi di uno spazio lineare (funzionale).

► Operazioni

Se x e y sono due segnali di energia, una combinazione lineare di segnali di energia è ancora un segnale di energia. La stessa proprietà vale per i segnali di potenza.
I segnali a tempo continuo e a tempo discreto di energia finita e i segnali a tempo continuo e a tempo discreto di potenza finita sono quindi, rispettivamente, elementi di quattro distinti spazi vettoriali.

► Prodotto scalare

Per i segnali di energia il prodotto scalare $< x, y >$ di x e y è l'energia mutua $\mathscr{E}_{xy}$, mentre, nel caso dei segnali di potenza il prodotto scalare è la potenza mutua $\mathscr{P}_{xy}$.
Si definisce, quindi

$$< x, y > = \begin{cases} \mathscr{E}_{xy} & x, y \text{ segnali di energia} \\ \mathscr{P}_{xy} & x, y \text{ segnali di potenza} \end{cases}$$

N.B. Nella relazione precedente va utilizzata l'appropriata definizione della potenza mutua a seconda del tipo di segnale di potenza, tempo continuo o tempo discreto.

► Norma di un segnale

Attraverso il prodotto scalare si può introdurre anche la norma di un segnale, data da

$$\| x \| = < x, x >^{1/2}$$

In termini energetici $\| x \|^2$ è l'energia o la potenza di x, a seconda della natura dello spazio considerato.

► Distanza tra segnali

Utilizzando la norma è anche possibile introdurre una distanza $d(x,y)$ tra due segnali definita come

$$d(x,y) = \| x - y \|$$

Il prodotto scalare è indicativo del grado di similitudine (proporzionalità) fra due segnali. In particolare due segnali vengono detti perfettamente simili se il loro prodotto scalare è massimo, mentre sono completamente dissimili se ortogonali.
Lo spazio dei segnali, dotato di prodotto scalare, è uno *spazio di Hilbert*.

Per verificare se un segnale è di energia non è necessario eseguire il calcolo dell'integrale o della sommatoria ma basta verificare se il segnale è di quadrato sommabile, cioè se l'integrale o la sommatoria sono finiti. A tal fine è sufficiente applicare uno dei criteri di sommabilità delle funzioni, tenendo in conto che la sommabilità deve sussistere per il quadrato del modulo anzichè per il modulo della funzione.

Funzioni di correlazione

La funzione di correlazione $r_{xy}(\tau)$ tra due segnali è definita come prodotto scalare tra il segnale $x(t)$ ed il segnale ritardato $y(t-\tau)$ al variare del ritardo τ

$$r_{xy}(\tau) = < x(t), y(t-\tau) > .$$

Analogamente, nel caso di sequenze, la definizione è

$$r_{xy}(m) = < x(n), y(n-m) > .$$

Nel caso particolare in cui il secondo segnale coincida col primo, si ottiene la *funzione di autocorrelazione* di $x(\cdot)$, che pertanto è definita da

$$r_x(\tau) = < x(t), x(t-\tau) >$$

nel caso di forme d'onda e da

$$r_x(m) = < x(n), x(n-m) >$$

nel caso di sequenze.
Si noti che, per la funzione di autocorrelazione, il doppio pedice viene eliminato in quanto ridondante.

Nel caso di segnali di potenza, la mutua correlazione è la media temporale

$$r_{xy}(\tau) = \lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) y^*(t-\tau) dt$$

mentre per segnali di energia si ha

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t-\tau) dt.$$

Analoghe considerazioni valgono per i segnali a tempo discreto.

L'interpretazione del prodotto scalare come indice di similitudine comporta che la funzione di mutua correlazione è un indice della similitudine tra i segnali $x(t)$ ed $y(t-\tau)$ al variare del ritardo τ. Analogamente, la funzione di autocorrelazione, confrontando un segnale con se stesso al variare del ritardo, indica la rapidità di variazione del segnale stesso, ovvero la predicibilità (lineare) del valore attuale in base al valore assunto al tempo $(t-\tau)$.

Autocorrelazione di un impulso rettangolare
Consideriamo l'impulso rettangolare

$$x(t) = A\,\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

Trattandosi di un segnale di energia ($\mathscr{E}_x = A^2 T$), la sua funzione di autocorrelazione si ottiene come

$$\begin{aligned} r_x(\tau) = &\ < x(t), x(t-\tau) > = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t-\tau) dt = \\ = &\ A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \Pi\left(\frac{t-\tau}{T}\right) dt = A^2 T \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right) = \mathscr{E}_x \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right) \end{aligned}$$

Autocorrelazione del segnale costante
Il segnale costante

$$x(t) = A$$

è un segnale di potenza; conseguentemente la sua funzione di autocorrelazione si calcola come

$$r_x(\tau) = < x(t), x(t-\tau) > = < x(t)x^*(t-\tau) > = A^2 = \mathscr{P}_x.$$

Pertanto un segnale costante ha un'autocorrelazione costante, come è intuitivo, dal momento che il segnale $x(t)$ ed il segnale ritardato $x(t-\tau)$ sono identici.

Mutua corelazione tra due fasori
I fasori

$$x(t) = A_1 e^{j\varphi_1} e^{j2\pi f_1 t} \qquad y(t) = A_2 e^{j\varphi_2} e^{j2\pi f_2 t}$$

sono entrambi segnali di potenza; la loro funzione di mutua correlazione è data da

$$\begin{aligned} r_{xy}(\tau) = & < x(t), y(t-\tau) > = < x(t)y^*(t-\tau) > = \\ = & \; A_1 A_2 e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} < e^{j2\pi(f_1 - f_2)t} > e^{j2\pi f_2 \tau} \end{aligned}$$

Ricordando che la media di un fasore è nulla a meno che la sua frequenza non sia zero segue che la mutua correlazione di due fasori a frequenza diversa è identicamente nulla.
Se i due fasori sono isofrequenziali, cioè $f_1 = f_2 = f_0$, la mutua correlazione è non nulla ed è data da

$$\begin{aligned} r_{xy}(\tau) &= A_1 A_2 e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} < e^{j2\pi(f_1 - f_2)t} > e^{j2\pi f_2 \tau} = \\ &= A_1 A_2 e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} e^{j2\pi f_0 \tau} = \mathscr{P}_{xy} e^{j2\pi f_0 \tau}. \end{aligned}$$

Pertanto la mutua correlazione tra due fasori isofrequenziali è un fasore della stessa frequenza, ma con ampiezza pari alla loro potenza mutua. Se i due fasori isofrequenziali sono identici, la relazione fornisce l'autocorrelazione del fasore

$$r_x(\tau) = < x(t), x(t-\tau) > = < x(t) x^*(t-\tau) > = A^2 e^{j2\pi f_0 \tau} = \mathscr{P}_x e^{j2\pi f_0 \tau}$$

Pertanto l'autocorrelazione di un fasore è un fasore della stessa frequenza, con fase iniziale nulla e con ampiezza pari alla potenza del segnale.

Proprietà della funzione di mutua correlazione

Le proprietà discendono dal fatto che essa è un prodotto scalare.

P1 - Valore nell'origine

$$r_{xy}(0) = < x(\cdot), y(\cdot) > = \begin{cases} \mathscr{E}_{xy} \\ \mathscr{P}_{xy} \end{cases}$$

P2 - Simmetria coniugata (Hermitianità)

$$r_{xy}(\cdot) = r^*_{yx}(-(\cdot))$$

P3 - La funzione di mutua correlazione è limitata

$$|r_{xy}(\cdot)| \leq \| x(\cdot) \| \| y(\cdot) \| \,.$$

► Approfondimenti

La proprietà P1 è una immediata conseguenza della definizione e fornisce un'interpretazione in termini energetici del valore nell'origine della mutua correlazione.

La proprietà P2 è anch'essa di immediata dimostrazione, invero, supposto per fissare le idee i segnali a tempo continuo, si ha

$$r_{xy}(\tau) = < x(t), y(t-\tau) > = < y(t-\tau), x(t) >^* = r_{yx}^*(-\tau)$$

Tale proprietà evidenzia che la mutua correlazione dipende dall'ordine in cui si considerano i due segnali, ma le due funzioni di mutua correlazione $r_{xy}(\cdot)$ e $r_{yx}(\cdot)$ sono tra loro legate dalla relazione di simmetria espressa dalla P2.

La proprietà P3 segue dalla disuguaglianza di Schwartz per i segnali e dall'invarianza della norma per traslazioni.

Per la funzione di autocorrelazione si hanno le seguenti proprietà.

P1 - Valore nell'origine

$$r_x(0) = \| x(\cdot) \|^2 = \begin{cases} \mathscr{E}_x \\ \mathscr{P}_x \end{cases}$$

P2 - Simmetria coniugata

$$r_x(\cdot) = r_x^*(-(\cdot))$$

P3 - La funzione di autocorrelazione è limitata ed ha un massimo nell'origine

$$|r_x(\cdot)| \leq \| x(\cdot) \|^2$$

► Osserviamo che la funzione di mutua correlazione compare naturalmente quando si combinano tra loro più segnali. Ad esempio, l'autocorrelazione del segnale somma $z(t) = x(t) + y(t)$, dove $x(t)$ e $y(t)$ sono dello stesso tipo, è data da:

$$r_z(\tau) = r_x(\tau) + r_y(\tau) + r_{xy}(\tau) + r_{yx}(\tau) = r_x(\tau) + r_y(\tau) + r_{xy}(\tau) + r_{xy}^*(-\tau)$$

Quindi la condizione $r_{xy}(\tau) = 0 \, \forall \tau$, è condizione sufficiente per l'additività della funzione di autocorrelazione.

► La condizione $r_{xy}(\tau) = 0 \, \forall \tau$ è più restrittiva di $r_{xy}(0) = 0$ (condizione per l'additività dell'energia, o della potenza). Essa comporta che non solo deve essere nullo il prodotto scalare fra $x(t)$ e $y(t)$, ma anche quello fra $x(t)$ e una qualsiasi versione ritardata o anticipata di $y(t)$. Due segnali la cui mutua correlazione sia identicamente nulla, cioè $r_{xy}(\tau) = 0 \, \forall \tau$, si dicono *incoerenti*. L'incoerenza è condizione sufficiente per l'additività dell'autocorrelazione oltre che per l'additività della potenza.

► Due fasori a frequenza diversa sono, dunque, incoerenti e l'autocorrelazione della somma di più fasori è uguale alla somma delle singole autocorrelazioni.

Esercizi di ricapitolazione

Ex. 1 Calcolare il risultato delle seguenti espressioni, usando le proprietà della delta, e rappresentarne il grafico:

1. $x_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(3t-1)\delta(4t-1)dt + 5\mathrm{sinc}(t) * \delta(t-1)$
2. $x_2(t) = [e^{(-2t)}u(t)] * [\delta(t-2) + \delta(t+3)]$
3. $x_3(t) = \mathrm{sinc}(t/2)\delta(t-1) + \mathrm{sinc}((t-1)/4)\delta(t-3)$
4. $x_4(t) = \delta(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda(t-3k)$

Ex. 2 Il segnale $x(t) = A\ e^{-t/\tau}\ \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$ rappresenta una versione troncata del segnale originario $x_0(t) = A\ \exp^{-t/\tau} u(t)$. Calcolare il valore da assegnare a T affinchè il 95% dell'energia del segnale originario sia conservata.

EX. 3 Dati i due segnali

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sin(2\pi 10t) \\ x_2(t) &= \Pi\left(\frac{t}{10}\right) \end{aligned}$$

verificare se sono ortogonali e calcolarne la funzione di mutua correlazione $r_{xy}(\tau)$.