Ingegneria Elettronica per l'Automazione e le Telecomunicazioni
MATEMATICA 2   A.A. 2021/2022
ESAME   24 Gennaio 2022

Nome e Cognome	N. Matricola

Problema	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

Note: Non si possono utilizzare calcolatori o appunti. Il valore in punti (su 100) di ogni esercizio è indicato sul margine sinistro.

Formule per la trasformata di Laplace

$y = f(t)$	$Y(p) = \mathcal{L}(y) = F(p)$	
1	$\frac{1}{p}$	$\text{Re } p > 0$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	$\text{Re } (p+a) > 0$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Im } a\rvert$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Im } a\rvert$
$\sinh at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Re } a\rvert$
$\cosh at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Re } a\rvert$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\text{Re } p > 0, \quad n \geq 0$
te^{at}	$\frac{1}{(p-a)^2}$	$\text{Re } (p+a) > 0$
$e^{-at}(1-at)$	$\frac{p}{(p+a)^2}$	$\text{Re } (p+a) > 0$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$	$\text{Re } (p-a) > \lvert\text{Im } \omega\rvert$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$	$\text{Re } (p-a) > \lvert\text{Im } \omega\rvert$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Im } \omega\rvert$
$t \cos \omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Im } \omega\rvert$
$\frac{\sin \omega t}{t}$	$\arctan \frac{\omega}{p}$	$\text{Re } p > \lvert\text{Im } \omega\rvert$

Operazioni di trasformazione di Laplace

Operazioni	
1. Trasformata di Laplace	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$
2. Trasformata di una derivata	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$
3. Sostituzione	$\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\} = F(p-a)$
4. Traslazione	$\mathcal{L}\{f(t-b)\} = F(p)e^{-bp}$

(8) 1.a (MB 1.13.33, p.32) Trovare la serie di Maclaurin, fino al sesto ordine incluso, della funzione

$$f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 - x}$$

(4) **1.b** Determinare per quali valori di x essa converge.

(8) 1.c (MB 2.10.28, p. 67) Usando la formula di Eulero e il fatto che una equazione complessa rappresenta in realtà due equazioni reali trovare le formule per $\sin 3\theta$ e $\cos 3\theta$

(14) **2.a** (MB 14.4.3) Trovare i primi termini di ciascuna delle serie di Laurent attorno all'origine, cioè una serie per ogni regione anulare tra i punti singolari, della seguente funzione

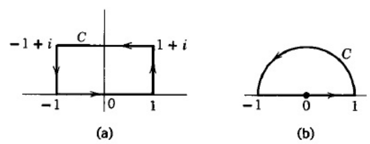
$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

(6) **2.b** Trovare il residuo in ognuno dei poli della funzione data in **2.a**.

(4) 2.a (MB 14.3.3, p. 676) Trovare la parte reale e la parte immaginaria $u(x, y)$ e $v(x, y)$ della funzione z^2

(4) 2.b Stabilire se la funzione è analitica

(8) 2.c Calcolare $\oint_C z^2 dz$ lungo il solo percorso (b) indicato in figura per integrazione diretta nel piano complesso, cioè, come un integrale di linea in uno spazio a due dimensioni, *senza* usare teoremi sull'integrazione di funzioni complesse di variabili complesse.



(4) 2.d Commentare il risultato ottenuto con l'aiuto del teorema di Cauchy

(MB 7.8.12a, p. 363) È data la funzione, periodica di periodo 2π e definita per $x \in (-\pi, \pi)$ da:

$$f(x) = e^x$$

(6) **3.a** Disegnare schematicamente diversi periodi della funzione.

(14) **3.b** Sviluppare nella appropriata serie di Fourier

(8) 4.a (MB, 8.4.5, p. 406) Trovare la soluzione generale della seguente equazione differenziale

$$(x - y)dy + (y + x + 1)dx = 0$$

(4) 4.b Siete in grado di riconoscere la curva soluzione?

(8) 4.c (MB, 8.8.10, p. 439) Trovare la funzione $y(t)$ la cui trasformata di Laplace è la seguente funzione

$$Y(p) = \frac{2p - 1}{p^2 - 2p + 10} e^{-\pi p}$$

(MB, 8.10.14, p. 448) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y'' + 5y' + 6y = e^{-2t}, \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

(10) **5a.** Trovando l'integrale generale e quindi applicando le condizioni iniziali

(10) **5b.** Usando l'integrale di convoluzione