Soluzioni

Esercizio 1

a) $\dot{y} = -0.5y + 2u \qquad y(0) = -4$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$sY - (-4) = -0.5\,Y + 2\,U$$

$$(s + 0.5)\,Y = -4 + 2\,U$$

$$Y = -\frac{4}{s+0.5} + \underbrace{\left(\frac{2}{s+0.5}\right)}_{G(s)} U$$

Risposta alla condizione iniziale

$$y_\ell(t) = -4\,e^{-t\times 0.5} = -4\,e^{-t/2}$$

Risposta al gradino applicato all'istante $\emptyset$

$$G(s) = \frac{2}{s+0.5} = \frac{4}{1+2s} = \frac{\mu}{1+sT}$$

e dunque la risposta al gradino di ampiezza $\bar{u}$ è data da

$$y_f(t) = \mu\bar{u}\left(1 - e^{-t/T}\right)$$
$$= 4\bar{u}\left(1 - e^{-t/2}\right)$$

La risposta al gradino $\delta_{-1}(t-2)$ sarà dunque

$$y_F(t) = 4\left(1 - e^{-(t-2)/2}\right)\delta_{-1}(t-2)$$

In definitiva la risposta libera + forzata sarà

$$y(t) = -4e^{-t/2}\,\delta_{-1}(t)$$
$$+ 4\left[1 - e^{-(t-2)/2}\right]\delta_{-1}(t-2)$$

b) La risposta libera all'istante 2 vale

$$y_e(2) = -4e^{-1}$$

e da quell'istante in poi, senza altri ingressi, vale

$$y_e(t) = y_e(2)\,e^{-(t-2)/2}\,\delta_{-1}(t-2)$$
$$= \left(-4e^{-1}\right)e^{-(t-2)/2}\,\delta_{-1}(t-2)$$

La risposta a un impulso $A\delta(t)$ è data da

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\,A\right] = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2A}{s+0.5}\right) = 2Ae^{-0.5t}$$
$$= 2Ae^{-t/2}$$

Se l'impulso è applicato all'istante 2, cioè $A\delta(t-2)$ la risposta è traslata, cioè

$$2A\, e^{-(t-2)/2}\, \delta_{-1}(t-2)$$

Dunque la risposta complessiva dopo l'istante 2 è data da

$$y(t) = \left[y(2)\, e^{-(t-2)/2} + 2A\, e^{-(t-2)/2} \right] \delta_{-1}(t-2)$$

$$= \left[y(2) + 2A \right] e^{-(t-2)/2}\, \delta_{-1}(t-2)$$

e, perché sia nulla, basta scegliere

$$A = -\frac{y(2)}{2}$$

$$= \frac{4e^{-1}}{2} = 2e^{-1}$$

Esercizio 2

a) La funzione è pari per cui $b_n = 0$.
Il coefficiente a_0, il valor medio, si vede "a occhio"

$$\frac{\text{area}}{\text{periodo}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \cos\left(n\frac{\pi}{4}t\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{4}{n\pi}\,\sin\left(\frac{n\pi}{4}t\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{4} - \sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{4}$$

b

$$G(s) = \frac{\mu}{1+sT}$$

$$(\mu)_{dB} = 15\,dB \implies \mu = 10^{15/20} = 5.6$$

$$\text{polo} = -\frac{1}{T} = -20\pi \cong -63\ \frac{rad}{s}$$

$$\implies T = \frac{1}{63}\,s = 0.016\,s$$

Dunque $G(s) = \dfrac{5.6}{1+0.016s}$

la risposta armonica è data da

$$G(j\omega) = \frac{5.6}{1 + j0.016\omega},$$

Alla frequenza di 100 Hz essa avrà il valore

$$G(j\,2\pi 100) = \frac{5.6}{1 + j\,3.2}$$

(da scomporre, volendo, in modulo e fase)

Esercizio 3

a) Punti di equilibrio

$$\bar{y} = \frac{1}{4}\bar{y}^2 + \frac{1}{4}$$

da cui, risolvendo l'equazione di II grado, otteniamo

$$\bar{y} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Definendo $\delta y = y - \bar{y}$, $\delta u = u - \bar{u}$

possiamo calcolare la linearizzazione utilizzando la derivata

$$a = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{4}y^2\right)\Bigg|_{y=\bar{y}} = \frac{\bar{y}}{2}\Bigg|_{y=\bar{y}}$$

e dunque il sistema linearizzato è dato da

$$\delta y(k+1) = a\,\delta y(k) + \delta u(k)$$

con $a = \begin{cases} (2+\sqrt{3})/2 > 1 & \text{instabile} \\ (2-\sqrt{3})/2 < 1 & \text{a.s.} \end{cases}$

b

$$\delta y(k+1) = \frac{2-\sqrt{3}}{2}\,\delta y(k) + \delta u(k)$$

Calcolo fdt

$$zY = aY + U \qquad \text{con } a = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

$$Y = \frac{1}{z-a}U$$

Risposta impulsiva

$$y_i(k) = Z^{-1}\left(\frac{1}{z-a}\right) = a^{k-1}\,\delta_{-1}(k-1)$$

e dunque la risposta al segnale

$$\delta(k) + \frac{1}{2}\,\delta(k-1)$$

sarà

$$a^{k-1}\,\delta_{-1}(k-1) + \frac{1}{2}\,a^{k-2}\,\delta_{-1}(k-2)$$