3 Matrici

Definizione 3.1 (Definizione di matrice)**.** *Si definisce* ***matrice di numeri reali di tipo*** $n \times m$ *una tabella a doppia entrata con* m *righe ed* n *colonne:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dove $a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn} \in \mathbb{R}$.
Le matrici vengono indicate con lettere maiuscole in grassetto. Si indica con a_{ij} *il generico elemento della matrice* $\boldsymbol{A}$ *individuato dalla riga* i *e dalla colonna* j.

Le n*-ple* $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $(a_{21}, a_{22}, \dots a_{2n})$, *ecc. sono dette* ***righe*** *o* ***vettori riga*** *della matrice* $\boldsymbol{A}$ *e si denotano con* $\boldsymbol{A}_i$, $i = 1, \dots, m$ *se la matrice ha* m *righe.*

Le m*-ple di numeri reali* $(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})$, *ecc. si dicono* ***colonne*** *o* ***vettori colonna*** *della matrice* $\boldsymbol{A}$ *e si indicano con* $\boldsymbol{A}^j$, $j = 1, \dots, n$ *se la matrice ha* n *colonne.*

Una matrice si dice ***quadrata*** *se il numero di righe è uguale al numero delle colonne, ovvero se* $m = n$. *Ia questo caso* $\boldsymbol{A}$ *si dice* ***matrice quadrata di ordine*** n.

Esempio 3.2. *La matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

è una matrice di tipo 2×3. *L'elemento* a_{23} *è* 5.

La matrice

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 9 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

è una matrice quadrata di ordine 3.

Definizione 3.3 (Diagonale principale di una matrice)**.** *Se* $\boldsymbol{A}$ *è una matrice quadrata di ordine* n, *si definisce* ***diagonale principale*** *la* n*-upla* $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

Esempio 3.4. *La diagonale principale della matrice* $\boldsymbol{B}$ *dell'esempio 3.2 è* $(-1, -2, 6)$.

Definizione 3.5 (Sottomatrice di una matrice $\boldsymbol{A}$)**.** *Data una matrice* $\boldsymbol{A}$ *di tipo* $m \times n$, *si definisce* ***sottomatrice di*** $\boldsymbol{A}$ *di tipo* $p \times q$ *ogni matrice che si ottiene da* $\boldsymbol{A}$ *cancellando* $m - p$ *righe ed* $n - q$ *colonne.*

Definizione 3.6 (Uguaglianza tra matrici)**.** *Due matrici* $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B}$ *si dicono uguali se hanno lo stesso numero di righe* m *e di colonne* n *e se* $a_{ij} = b_{ij}$, *per* $i = 1, \dots, m$ *e* $j = 1, \dots, n$.

Definizione 3.7 (Trasposta di una matrice)**.** *Data la matrice* $\boldsymbol{A}$ *di tipo* $m \times n$, *si definisce* ***trasposta di*** $\boldsymbol{A}$ *e si indica con* $\boldsymbol{A}^T$ *la matrice di tipo* $n \times m$ *che ha per righe le colonne di* A *e per colonne le righe di* A*.Evidentemente si ha* $(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$.

Esempio 3.8. *Data la matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

la sua trasposta è

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Definizione 3.9 (Matrice simmetrica)**.** *Una matrice quadrata* $\boldsymbol{A}$ *si dice* ***simmetrica*** *se* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$. *In una matrice simmetrica si ha* $a_{ij} = a_{ji}$ *per ogni scelta degli indici* i, j.

Esempio 3.10. *La matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 9 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

è una matrice simmetrica.

Definizione 3.11 (Matrice antisimmetrica)**.** *Una matrice quadrata è detta* ***antisimmetrica*** *se* $-bsA^T = bsA$*, ovvero se* $a_{ij} = -a_{ji}$*,per ogni scelta degli indici* i, j*. Si noti che quest'ultima implica che* $a_{ii} = 0, \forall i$*.*

Esempio 3.12. *La matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -6 \\ -1 & 0 & 7 & -9 \\ 3 & -7 & 0 & 4 \\ 6 & 9 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

è una matrice antisimmetrica.

Definizione 3.13 (Matrici triangolari)**.** *Una matrice quadrata* $\boldsymbol{A}$ *si dice* ***triangolare inferiore*** *se gli elementi al di sopra della diagonale principale sono nulli. La matrice quadrata* $\boldsymbol{A}$ *si dice* ***triangolare superiore*** *se gli elementi al di sotto della diagonale principale sono nulli; i.e.*

$$A \text{ è triangolare inferiore se } a_{ij} = 0, \text{ per } i < j$$

$$A \text{ è triangolare superiore se } a_{ij} = 0, \text{ per } i > j.$$

Esempio 3.14. *La matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

è una matrice triangolare inferiore.

La matrice

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

è una matrice triangolare superiore.

Definizione 3.15 (Matrice diagonale)**.** *Una matrice quadrata* $\boldsymbol{A}$ *si dice* ***diagonale*** *se* $a_{ij} = 0$ *per ogni* $i \neq j$ *cioè ogni elemento al di fuori della diagonale principale è nullo.*

Esempio 3.16. *La matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

è una matrice diagonale.

Definizione 3.17 (Matrice identità)**.** *Si definisce matrice identità di ordine* n *e si indica con* $\boldsymbol{I}$ *o con* $\boldsymbol{I}_n$*, la matrice diagonale che ha* $a_{ii} = 1$*, con* $i = 1, \ldots, n$ *e* $a_{ij} = 0$ *con* $i = 1, \ldots, n$ $j = i, \ldots, n$ *e* $i \neq j$*.*

Esempio 3.18.

$$\boldsymbol{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definizione 3.19 (Matrice nulla)**.** *Si definisce matrice nulla di tipo* $n \times m$ *e si indica con* $\mathbf{0}$*, la matrice che ha tutti gli elementi nulli* ($a_{ij} = 0$*, per* $i = 1, \ldots, m$ *e* $j = 1, \ldots n$)*.*

Esempio 3.20.

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è una matrice nulla di tipo 3×4

Operazioni sulle matrici

Definizione 3.21 (Somma di matrici)**.** *Siano* $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B}$ *due matrici a coefficienti reali aventi la stessa dimensione* $m \times n$.

Si definisce ***somma delle matrici A e B****, la matrice* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ *il cui generico elemento* c_{ij} *è dato da* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. *La somma di matrici gode delle seguenti proprietà:*

- *associativa* $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$
- *commutativa* $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$
- *esistenza dell'elemento neutro* $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$
- *esistenza dell'opposto* $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$ *(*$-\boldsymbol{A} := [-a_{ij}]$*).*

Esempio 3.22.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1+1 & 3+5 & 2+2 \\ 2+1 & 2+2 & 0+3 \\ 5+7 & 9+0 & 4+4 \end{pmatrix}$$

Definizione 3.23 (Prodotto di una matrice per uno scalare)**.** *Data la matrice* $\boldsymbol{A}$ *e uno scalare* $\lambda \in \mathbb{R}$, *si definisce prodotto della matrice* $\boldsymbol{A}$ *per lo scalare* λ, *la matrice*

$$\lambda\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esempio 3.24.

$$\lambda = 2$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 2 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 5 & 2\cdot 9 & 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \\ 10 & 18 & 8 \end{pmatrix}$$

Osservazione 3.25. *Siano* $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B}$ *due matrici ed* h *e* k *due numeri reali, valgono le seguenti proprietà:*

i) $(h + k)\boldsymbol{A} = h\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{A}$,

ii) $(h \cdot k)\boldsymbol{A} = h(k\boldsymbol{A})$,

iii) $h(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = h\boldsymbol{A} + h\boldsymbol{B}$,

iv) $1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$,

Pertanto l'insieme delle matrici $m \times n$ *costituisce* ***uno spazio vettoriale reale sul campo reale*** *rispetto alle operazioni di somma e prodotto per uno scalare.*

Definizione 3.26 (Prodotto righe per colonne)**.** *Siano date $\boldsymbol{A}$ matrice $m \times n$ e $\boldsymbol{B}$ matrice $n \times t$. Il prodotto righe per colonne di $\boldsymbol{A}$ per $\boldsymbol{B}$ è la matrice $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ del tipo $m \times t$, i cui elementi sono dati dalla seguente formula:*

$$\boldsymbol{C} = [c_{ij}] = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Per capire bene quali sono gli elementi della matrice $\boldsymbol{C}$, proviamo a descrivere ciascun elemento. Ad esempio, l'elemento della riga i e della colonna j è il prodotto scalare della i-esima riga di $\boldsymbol{A}$ per la j-esima colonna di $\boldsymbol{B}$.

Osservazione 3.27. *Si noti che il prodotto tra due matrici è definito se e solo se il numero di colonne di $\boldsymbol{A}$ è pari al numero di righe di $\boldsymbol{B}$, cioè se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ sono **conformabili**. Inoltre risulta che $\boldsymbol{AB}$ ha tante righe quante ne ha $\boldsymbol{A}$ e tante colonne quante ne ha $\boldsymbol{B}$. Si osservi infine che il prodotto righe per colonne in generale non è commutativo; può accadere che il prodotto $\boldsymbol{AB}$ sia ben definito, mentre $\boldsymbol{BA}$ non lo sia. In generale si ha $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.*

Esempio 3.28 (Prodotto righe per colonne)**.** *Il prodotto righe per colonne di*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ -6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

per

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$$

è la matrice $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ di tipo 2×2 così ottenuta:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -87 & 6 \\ 54 & -8 \end{pmatrix}.$$

Definizione 3.29 (Proprietà del prodotto righe per colonne)**.** *Per il prodotto righe per colonne valgono le seguenti proprietà:*

i) proprietà associativa: se $\boldsymbol{A}$ è moltiplicabile a destra per $\boldsymbol{B}$ e il prodotto $\boldsymbol{AB}$ è moltiplicabile a destra per $\boldsymbol{C}$, allora $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$,

ii) proprietà di esistenza dell'elemento neutro (a destra e a sinistra): Se $\boldsymbol{A}$ è una matrice di tipo $m \times n$, allora $\boldsymbol{A}$ è moltiplicabile a destra per la matrice identica di ordine n: $\boldsymbol{I}_n$ e a sinistra per la matrice identica di ordine m : $\boldsymbol{I}_m$, e risulta $\boldsymbol{AI}_n = \boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

Osservazione 3.30. *Vale anche la **proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto**, i.e. se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ sono due matrici di tipo $m \times n$ e C è una matrice di tipo $n \times t$, risulta che $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$. Analogamente se $\boldsymbol{D}$ è una matrice di tipo $s \times m$, si ha $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{DA}+\boldsymbol{DB}$.*

Esempio 3.31. *Eseguire tutti i prodotti possibili tra le seguenti matrici:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Dal momento che $\boldsymbol{A}$ è una matrice 3×3, $\boldsymbol{B}$ è una matrice 3×1, $\boldsymbol{C}$ è una matrice 1×3, $\boldsymbol{D}$ è una matrice 2×2, $\boldsymbol{E}$ è una matrice 3×2, i prodotti possibili sono:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{AE} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 10 & 3 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}, \boldsymbol{BC} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{CA} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{CE} = \begin{pmatrix} 10 & 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{ED} = \begin{pmatrix} -20 & -10 \\ 12 & 20 \\ 10 & 26 \end{pmatrix}, \boldsymbol{CB} = 3.$$

Esempio 3.32. *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

verificare che è

$$A^2 - A^T + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1/2 \\ -1 & 2 & 5/2 \\ 1 & -5/2 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrici a blocchi

Definizione 3.33. *Sia $\boldsymbol{A}$ una matrice di tipo $m \times n$ e sia $a_{i,j}$ il generico elemento della riga i e della colonna j. Comunque si scelgano dei numeri interi positivi p, q, r e s tali che $n = p + q$ e $m = r + s$, si possono considerare le matrici $\boldsymbol{B}$ di tipo $p \times r$, $\boldsymbol{C}$ di tipo $p \times s$, $\boldsymbol{D}$ di tipo $q \times r$ e $\boldsymbol{E}$ di tipo $q \times s$, definite come segue:*

$$\begin{array}{llll} b_{i,j} = a_{i,j} & \textit{per} & i = 1, ..., p & j = 1, ..., s \\ c_{i,j} = a_{i,j} & \textit{per} & i = 1, ..., p & j = s + 1, ..., m \\ d_{i,j} = a_{i,j} & \textit{per} & i = p + 1, ..., n & j = 1, ..., s \\ e_{i,j} = a_{i,j} & \textit{per} & i = p + 1, ..., n & j = s + 1, ..., m. \end{array}$$

Pertanto la matrice $\boldsymbol{A}$ risulterà partizionata nel modo seguente

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$$

e viene definita ***matrice a blocchi****, mentre le sottomatrici $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ ed $\boldsymbol{E}$ si dicono* ***blocchi*** *della matrice $\boldsymbol{A}$.*

Si osservi che il numero di blocchi in cui si può suddividere una matrice non deve essere necessariamente 4; quindi sia la definizione precedente che i risultati che seguono valgono per tutte le scelte del numero di blocchi in cui si suddivide la matrice.

Esempio 3.34. *Sia data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \\ 4 & -4 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Si possono definire, ad esempio, i blocchi nel modo seguente:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

L'utilizzo delle matrici a blocchi consente di semplificare le operazioni tra matrici in quanto sussistono le seguenti proprietà.

Osservazione 3.35. *Siano $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} B' & C' \\ D' & E' \end{pmatrix}$ due matrici a blocchi del tipo $m \times n$ e supponiamo che i blocchi corrispondenti abbiano le stesse dimensioni. Dalle definizioni di somma di matrici e di prodotto di una matrice per uno scalare λ segue banalmente che*

$$A + A' = \begin{pmatrix} B + B' & C + C' \\ D + D' & E + E' \end{pmatrix} \quad e \quad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda B & \lambda C \\ \lambda D & \lambda E \end{pmatrix}.$$

Proposizione 3.36. *Siano* $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$ *una matrice a blocchi del tipo* $m \times n$ *e* $\boldsymbol{A'} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B'} & \boldsymbol{C'} \\ \boldsymbol{D'} & \boldsymbol{E'} \end{pmatrix}$ *una matrice a blocchi del tipo* $n \times l$. *Si supponga che i blocchi corrispondenti delle due matrici abbiano le dimensioni compatibili con l'operazione di prodotto tra matrici. Allora risulta*

$$\boldsymbol{AA'} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{BB'} + \boldsymbol{CD'} & \boldsymbol{BC'} + \boldsymbol{CE'} \\ \boldsymbol{DB'} + \boldsymbol{ED'} & \boldsymbol{DC'} + \boldsymbol{EE'} \end{pmatrix}.$$

Esempio 3.37. *Siano* $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $\boldsymbol{A'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *matrici; si noti che il numero di colonne della matrice* $\boldsymbol{A}$ *è uguale al numero di righe della matrice* $\boldsymbol{A'}$, *per cui ha senso considerare il prodotto* $\boldsymbol{AA'}$ *delle due matrici. Introduciamo in modo opportuno delle partizione in blocchi delle due matrici. A tal proposito definiamo*

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E'} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

ossia in definitiva risulta $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$ *e* $\boldsymbol{A'} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B'} & \boldsymbol{C'} \\ \boldsymbol{D'} & \boldsymbol{E'} \end{pmatrix}$.

Utilizzando la proposizione precedente, si ha che $\boldsymbol{AA'} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{BB'} & \boldsymbol{BC'} \\ \boldsymbol{DB'} & \boldsymbol{DC'} + \boldsymbol{EE'} \end{pmatrix}$.

Calcoliamo i seguenti prodotti con l'usuale prodotto riga per colonna:

$$\boldsymbol{BB'} = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ 11 & 15 \\ 12 & 17 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{BC'} = \begin{pmatrix} 15 & 19 \\ 12 & 17 \\ 13 & 19 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{DB'} = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{DC'} = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{EE'} = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Risulta infine $\boldsymbol{AA'} = \begin{pmatrix} 13 & 17 & 15 & 19 \\ 11 & 15 & 12 & 17 \\ 12 & 17 & 13 & 19 \\ 7 & 12 & 19 & 24 \\ 8 & 13 & 19 & 19 \end{pmatrix}$.