SI3

Informatique Théorique — 1 heure — 12 Décembre 2017

> Si vous manquez de place pour répondre à une question, poursuivez à la fin de la copie.

Nom et Groupe: ____________________

Question	Points	Note
Preuve par résolution	7	
Algorithme de Quine McCluskey	7	
Mots et langages	6	
Total:	20	

Question 1: Preuve par résolution . . . .

Dans cet exercice, a et b sont deux symboles de prédicat d'arité deux, i et e sont deux symboles de prédicat d'arité un.

On veut utiliser la résolution pour montrer que

$$\exists x\ \neg[\exists y\ b(y,x)]$$

est une conséquence de

- $\exists x\ (i(x) \wedge \neg e(x))$
- $\forall x\ (i(x) \Rightarrow [(\exists y b(y,x)) \Rightarrow e(x)])$
- $\forall x \exists y\ a(x,y)$
- $\exists x \exists y\ [a(x,y) \wedge\ a(y,x)]$
- $\forall x \forall y\ [b(x,y) \Rightarrow \neg b(y,x)]$

(a) $\boxed{\text{2 points}}$ Mise sous forme prénexe

Solution:

- Négation de la conclusion : $\forall x \exists y\ b(y,x)$
- $\exists x (i(x) \wedge \neg e(x))$
- $\forall x \forall y [i(x) \Rightarrow (b(y,x) \Rightarrow e(x))]$
- $\forall x \exists y\ a(x,y)$
- $\exists x \exists y\ a(x,y) \wedge a(y,x)$
- $\forall x \forall y (b(x,y) \Rightarrow \neg b(y,x))$

(b) $\boxed{\text{2 points}}$ Skolémisation

Solution:
On introduit:

- deux nouveaux symboles de fonction d'arité un : f et g
- trois nouvelles constantes x_0,x_1,x_2

- $\forall x \; b(f(x),x)$
- $i(x_0) \wedge \neg e(x_0)$
- $\forall x \forall y \; [(i(x) \Rightarrow (b(y,x) \Rightarrow e(x))]$
- $\forall x \; a(x,g(x))$
- $a(x_1,x_2) \wedge a(x_2,x_1)$
- $\forall x \forall y (b(x,y) \Rightarrow \neg b(y,x))$

(c) $\boxed{\text{1 point}}$ Mise sous forme de clauses

Solution:

- $C_1 : \; b(f(x),x)$
- $C_2 : \; i(x_0)$
- $C_3 : \; \neg e(x_0)$
- $C_4 : \; \neg i(x) \vee \neg b(y,x) \vee e(x)$
- $C_5 : \; a(x,g(x))$
- $C_6 : \; a(x_1,x_2)$
- $C_7 : \; a(x_2,x_1)$
- $C_8 : \; \neg b(x,y) \vee \neg b(y,x))$

(d) $\boxed{\text{2 points}}$ Résolution. A chaque application de la règle de résolution vous préciserez l'éventuelle unification utilisée.

Solution:

- de C_2 et C_4 avec l'unificateur $\sigma[x|x_0]$ on déduit $C_9 : \neg b(y,x_0) \vee e(x_0)$
- de C_9 et C_3 on déduit $C_{10} : \neg b(y,x_0)$
- de C_1 et C_{10} on déduit la clause vide en utilisant l'unificateur $\sigma[x|x_0; y|f(x_0)]$

Question 2: Algorithme de Quine McCluskey . . . .

Le but de cet exercice est de simplifier par la méthode Quine McCluskey la fonction logique

$$f = (\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D)$$

$$\vee (A \wedge \neg B \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (A \wedge B \wedge \neg C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge D)$$

(a) $\boxed{\text{2 points}}$ Lister dans le tableau ci dessous tous les minterms de f en les convertissant en mot de $\{0{,}1\}*$ et en les regroupant par poids

poids	minterm	nom
0		
1		
2		
3		
4		

Solution:

poids	minterm	
1	0100	4
	1000	8
2	1001	9
	1010	10
	1100	12
3	1011	11
	1101	13
4	1111	15

(b) $\boxed{\text{2 points}}$ Trouver les implicants premiers

Solution:
A partir du tableau précédent, on procède à une première union des implicants

poids	minterm	
1	~~0100~~	4
	~~1000~~	8
2	~~1001~~	9
	~~1010~~	10
	~~1100~~	12
3	~~1011~~	11
	~~1101~~	13
4	~~1111~~	15

unions	minterm
4,12	x100
8,9	100x
8,10	10x0
8,12	1x00
9,11	10x1
10,11	101x
9,13	1x01
12,13	110x
11,15	1x11
13,15	11x1

On recommence

unions	minterm
4,12	x100
8,9	~~100x~~
8,10	~~10x0~~
8,12	~~1x00~~
9,11	~~10x1~~
10,11	~~101x~~
9,13	~~1x01~~
12,13	~~110x~~
11,15	~~1x11~~
13,15	~~11x1~~

unions	minterm
8,9,10,11	10xx
8,9,12,13	1x0x
9,11,13,15	1xx1

On obtient 4 implicants premiers : $x100$, $10xx$ $1x0x$ et $1xx1$

(c) $\boxed{\text{1 point}}$ Construire la table de la couverture des minterms par les implicants premiers dans le tableau ci dessous

Solution:

	0100	1000	1001	1010	1100	1011	1101	1111
x100	(x)				x			
10xx		x	x	(x)		x		
1x0x		x	x		x		x	
1xx1			x			x	x	(x)

(d) $\boxed{\text{2 points}}$ En déduire une solution de cout minimal (à exprimer en fonction de A, B,C et D)

Solution: Il y a donc trois implicants essentiels :$x100$, $10xx$ et $1x1x$ et l'on constate que les trois implicants essentiels couvrent tous les minterms

	0100	1000	1001	1010	1100	1011	1110	1111
x100	x				x			
10xx		x	x	x		x		
1xx1			x			x	x	x

Une solution de coût minimal est donc

$$f = (B \wedge \neg C \neg D) \vee (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge D)$$

Question 3: Mots et langages . . . .

Dans cet exercice on travaille sur l'alphabet $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ On considère le mot $m = 1134$

(a) $\boxed{\text{½ point}}$ Déterminer Pref(m), l'ensemble des préfixes de m

Solution:
$Pref(m) = \{\epsilon,1,11,113,1134\}$

(b) $\boxed{\text{½ point}}$ Déterminer Suff(m), l'ensemble des suffixes de m

Solution:
$Suff(m) = \{\epsilon,4,34,134,1134\}$

(c) $\boxed{\text{½ point}}$ Déterminer Fact(m), l'ensemble des facteurs de m

Solution:
$Fact(m) = \{\epsilon,1,3,4,11,13,34,113,134,1134\}$

(d) $\boxed{\text{½ point}}$ Déterminer SM(m), l'ensemble des sous-mots de m

Solution:
$SM(m) = \{\epsilon,1,3,4,11,13,14,34,113,114,134,1134\}$

(e) $\boxed{\text{1 point}}$ Quelles relations générales (c'est à dire vraies pour tout mot m) de type $E(m) \subset F(m)$ avec $E(m)$ et $F(m)$ différents et égaux à $Pref(m)$ ou $Suff(m)$ ou $Fact(m)$ ou $SM(m)$ peut on écrire [pas de démonstration demandée]?

Solution:

- $Pref(m) \subset Fact(m)$
- $Suff(m) \subset Fact(m)$
- $Fact(m) \subset SM(m)$
- $Pref(m) \subset SM(m)$
- $Suff(m) \subset SM(m)$

(f) $\boxed{\text{½ point}}$ Donner un mot de longueur 5 ayant un nombre minimum de facteurs différents

Solution:
11111

(g) $\boxed{\text{½ point}}$ Donner un mot de longueur 5 ayant un nombre maximum de facteurs différents

Solution:
12345

(h) $\boxed{\text{1 point}}$ M et N sont deux langages quelconques inclus dans A^*.
A-t-on $(M \cap N)^* \subset M^* \cap N^*$? [preuve demandée]

Solution:
oui. Car d'une part $M \cap N \subset M$ et $M \cap N \subset N$ et d'autre par $E \subset F$ implique $E^* \subset F^*$

(i) $\boxed{\text{1 point}}$ M et N sont deux langages quelconques inclus dans A^*.
A-t-on $(M^* \cap N^*) \subset (M \cap N)^*$? [preuve demandée]

Solution:
Non . Prenons $M = \{a\}$ et $N = \{aa\}$. Le mot aa n'est pas dans $M \cap N$ qui est vide, mais est bien dans M^* et dans N^*