

Signaux, Sons et Images pour l'Informaticien: Echantillonnage - Transformations géométriques 2S

Diane Lingrand

Polytech SI3

2016 - 2017

Outline

1 Echantillonnage

2 Reconstruction

3 Interpolation

Outline

1 Echantillonnage

2 Reconstruction

3 Interpolation

Echantillonnage (*sampling*)

- passer d'un signal 2D continu à un signal discrétré dans l'espace
 - réponse technologique
 - appareil photographique numérique
 - scanner
 - réponse théorique
 - théorie de l'échantillonnage

Echantillons le Père-Noël



300x260 pixels



20x17 pixels



8x6 pixels

- Résolution verticale : nombre de lignes
- Résolution horizontale : nombre de colonnes
- Résolution spatiale = résolution verticale * résolution horizontale
- Densité de résolution : nombre de pixels par unité de longueur
 - pixels per inch (ppi)
 - ou dots per inch (dpi)

Impulsion de Dirac

- La vraie définition :

$$\int_{-A}^{+A} \delta(x)f(x)dx = f(0)$$

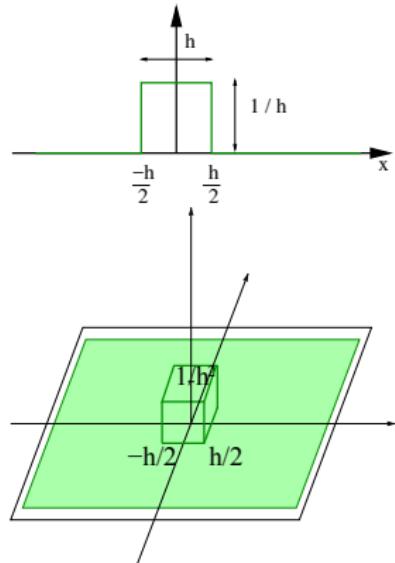
- On peut définir :

$$\begin{cases} \delta_h(x) &= \frac{1}{h} \quad \text{si } |x| \leq \frac{h}{2} \\ \delta_h(x) &= 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

- quand h tend vers 0, δ_h tend vers δ
- En 2D :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, y)f(x, y)dxdy = f(0, 0)$$

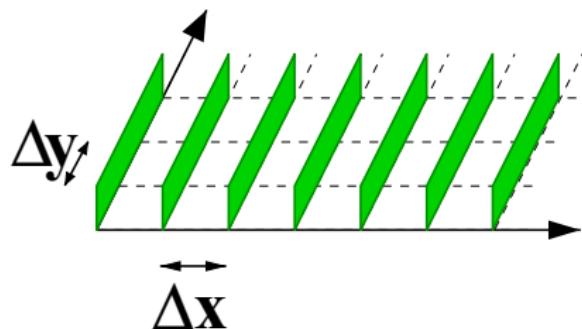
- un pixel $I(x, y)$
- une image : ensemble de pixels $I(x, y)$ pour x variant de 0 à w et y variant de 0 à h .



Peignes en dimension 2

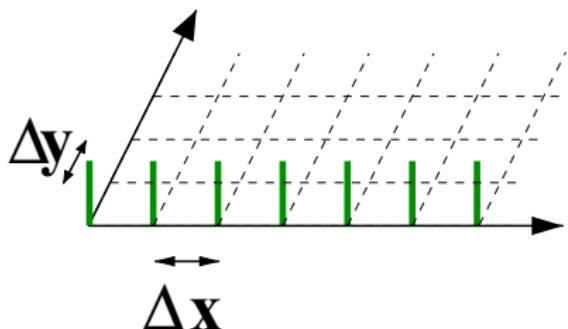
Peigne étendu, en x :

$$p_x(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\Delta x)$$



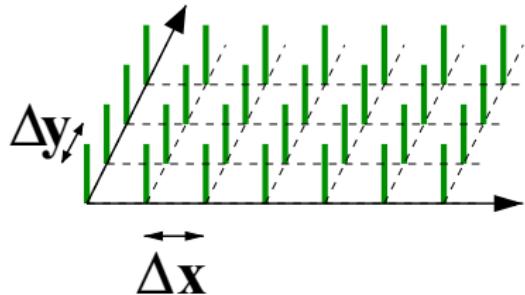
Peigne en x :

$$p_x(x, y) = \delta(y) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\Delta x)$$



La brosse est ainsi définie par le produit de 2 peignes étendus :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_x(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\Delta x) \\ p_y(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(y - n\Delta y) \\ b(x, y) = p_x(x, y)p_y(x, y) \end{array} \right.$$



Notons $f(x, y)$ un signal image continu et $g(x, y)$ le signal image correspondant échantillonné par le produit avec une brosse :

$$\begin{aligned} g(x, y) &= f(x, y).b(x, y) \\ &= f(x, y). \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\Delta x) \right) . \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(y - n\Delta y) \right) \end{aligned}$$

Outline

1 Echantillonnage

2 Reconstruction

3 Interpolation

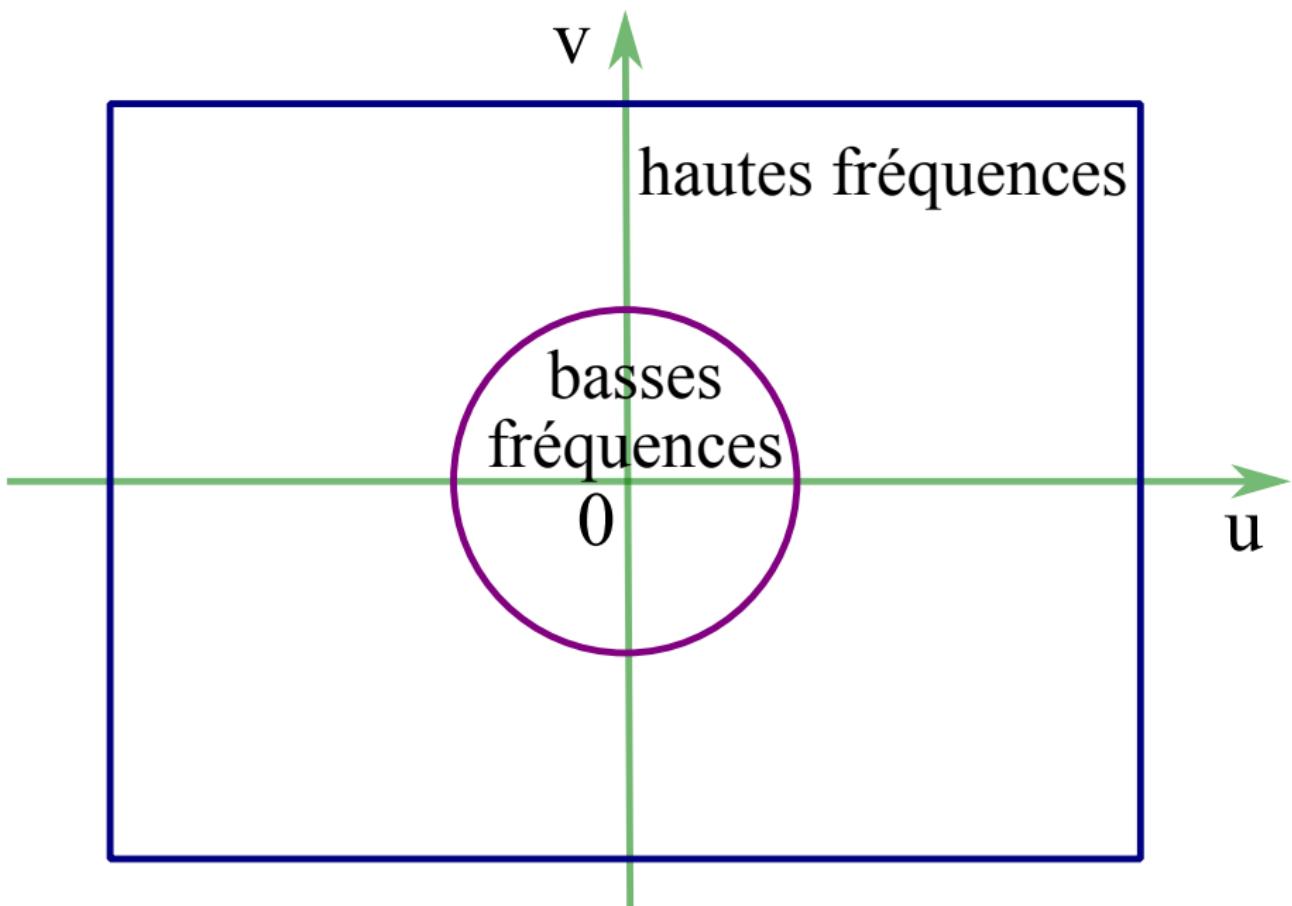
Transformée de Fourier 2D

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j(ux+vy)} dx dy$$

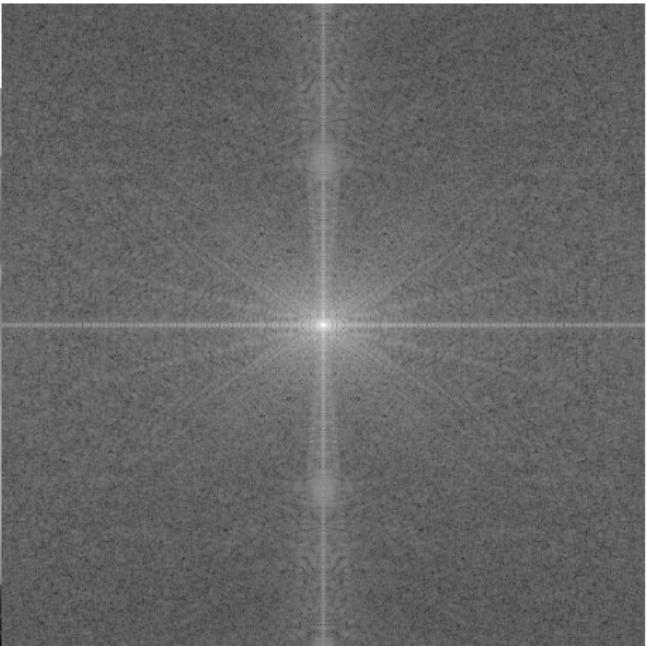
transformée de Fourier inverse :

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j(ux+vy)} dx dy$$

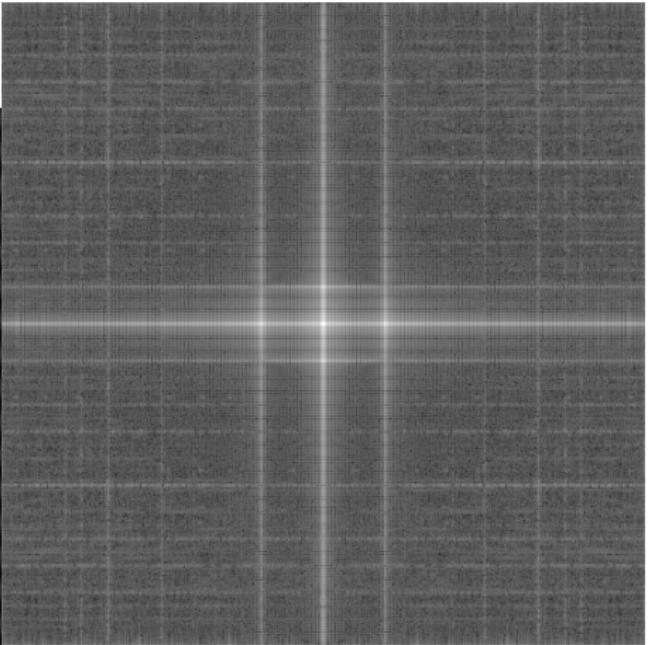
Que peut-on voir dans la transformée de Fourier ? (module)



Exemples de transformée de Fourier



Exemples de transformée de Fourier



Propriétés des convolutions 2D

$$f_2(x, y) = (f_1 * h)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s, t)h(x - s, y - t)dsdt$$

- convolution de f_1 avec impulsion de Dirac centrée en $(0; 0)$: f_1
- convolution avec impulsion de Dirac centrée en $(x_0; y_0)$:
$$f_2(x, y) = f_1(x - x_0, y - y_0)$$

- Retrouver le signal continu à partir de ses échantillons
- Méthode classique : reconstituer la transformée de Fourier du signal continu

Transformée de Fourier d'une brosse

- transformée de Fourier d'un peigne

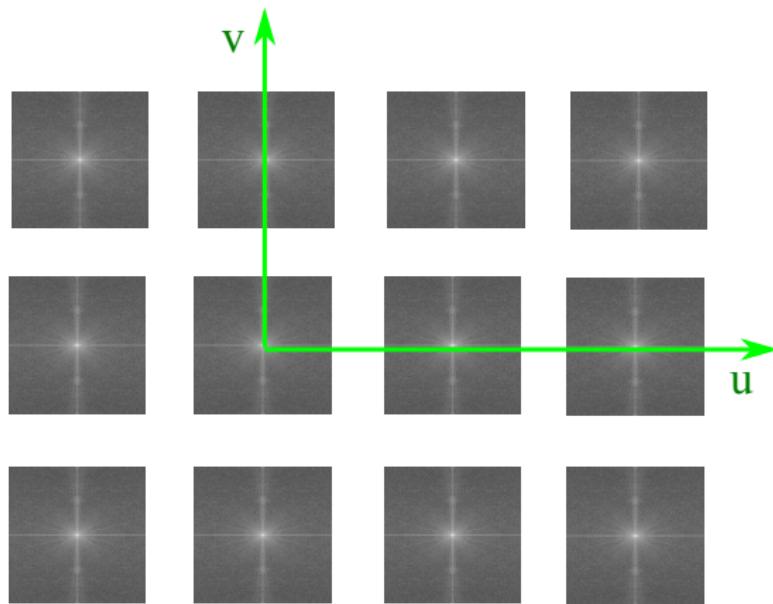
$$p_x(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\Delta x) \Rightarrow P_x(u, v) = \delta(v) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(u - \frac{k}{\Delta x}\right)$$
$$p_y(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(y - n\Delta y) \Rightarrow P_y(u, v) = \delta(u) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{l}{\Delta y}\right)$$

- transformée de Fourier d'une brosse de pas Δ_x et Δ_y : brosse de pas $\frac{1}{\Delta_x}$ et $\frac{1}{\Delta_y}$

$$b(x, y) = p_x(x, y)p_y(x, y) \Rightarrow B(u, v) = P_x(u, v) * P_y(u, v)$$

Transformée de Fourier du signal échantillonné

$$G(u, v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F(u - \frac{k}{\Delta x}, v - \frac{l}{\Delta y})$$

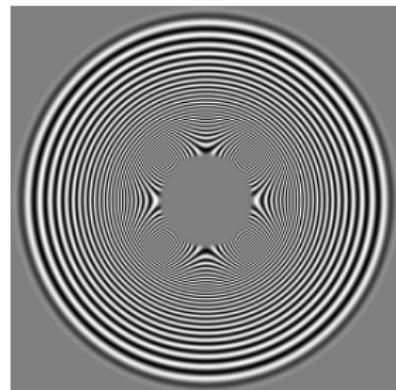


Theorème de Nyquist-Shannon

- la transformée de Fourier est bornée
- la fréquence d'échantillonnage doit être au moins égale au double de la fréquence maximale de l'image

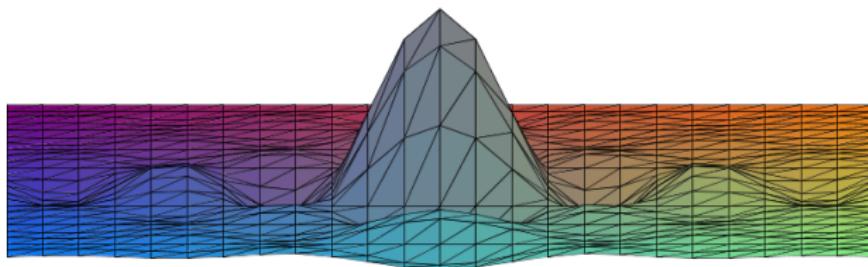
Pour être dans les conditions d'application de ce théorème :

- filtre passe-bas
- augmenter la fréquence d'échantillonnage (capteurs)



Filtre de reconstruction idéal

$$h(x, y) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \cdot \frac{\sin \pi y}{\pi y}$$

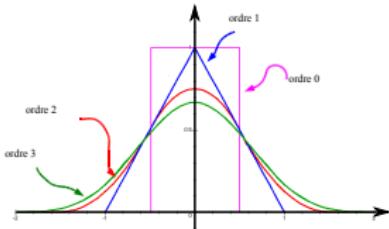


et f , la fonction reconstruite :

$$f(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(m, n) \frac{\sin \pi(x - m)}{\pi(x - m)} \cdot \frac{\sin \pi(y - n)}{\pi(y - n)}$$

Approximations du filtre idéal

$$f(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(m, n) R(x - m) R(y - n)$$



filtre d'ordre 0	$R_0(x) = 1 \quad x \leq \frac{1}{2}$
filtre d'ordre 1	$R_1(x) = \begin{cases} x + 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$
filtre d'ordre 2	$R_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x + \frac{3}{2})^2 & -\frac{3}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} - x^2 & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(x - \frac{3}{2})^2 & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$
filtre d'ordre 3	$R_3(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} + \frac{1}{2} x ^3 - x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{6}(2 - x)^3 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

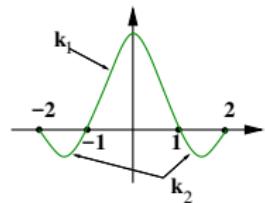
Approximation à l'ordre 3

Famille des polynômes de Mitchell :

$$k(x) = \begin{cases} k_1(x) = a_1|x|^3 + b_1x^2 + c_1|x| + d_1 & |x| \leq 1 \\ k_2(x) = a_2|x|^3 + b_2x^2 + c_2|x| + d_2 & 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & |x| \geq 2 \end{cases}$$

avec des contraintes :

- de symétrie : $k(-x) = k(x)$
- de continuité : $k_1(1) = k_2(1)$ et $k_2(2) = 0$
- de continuité de la dérivée : $k'_1(0) = 0$, $k'_1(1) = k'_2(1)$ et $k'_2(2) = 0$
- de somme des coefficients égale à 1 :
$$\sum k(x - n) = k_2(1 + \varepsilon) + k_1(\varepsilon) + k_1(\varepsilon - 1) + k_2(\varepsilon - 2) = 1 \text{ avec } 0 < \varepsilon < 1$$



En posant : $6a_2 + b_2 = -c$ et $5a_2 + b_2 = b/6$, on obtient :

$$k(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} (12 - 9b - 6c)|x|^3 + (-18 + 12b + 6c)x^2 + (6 - 2b) \\ -(b + 6c)|x|^3 + (6b + 30c)x^2 - (12b + 48c)|x| + (8b + 24c) \\ 0 \end{cases}$$

Quelques exemples :

- si $b=0$ alors $k(0)=1$ et $k(1)=0$ comme le sinus cardinal
- Cardinal splines : $b=0$; $c=-a$
- Catmull-Rom Spline : $b=0$; $c=0.5$
- Cubic B-spline : $b=1$; $c=0$

Outline

1 Echantillonnage

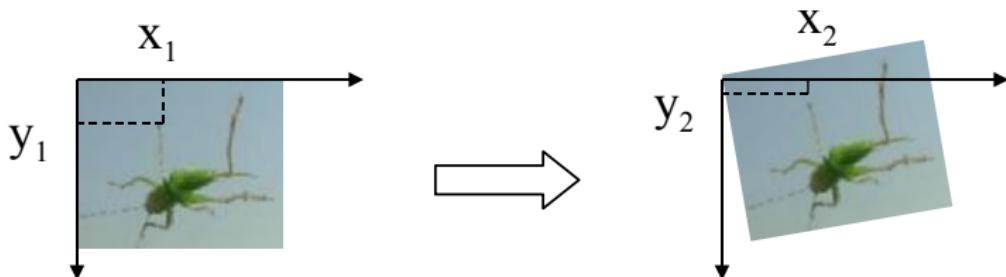
2 Reconstruction

3 Interpolation

Interpolation

```
int getPixel(double x, double y) {  
    ...  
}
```

Exemple de la rotation (angle θ)



$$\begin{cases} x_2 = \cos(\theta)x_1 + \sin(\theta)y_1 \\ y_2 = -\sin(\theta)x_1 + \cos(\theta)y_1 \end{cases} \text{ et } I_2(x_2, y_2) = I_1(x_1, y_1)$$

d'où

$$I_2(x_2, y_2) = I_1(\cos(\theta)x_2 - \sin(\theta)y_2, \sin(\theta)x_2 + \cos(\theta)y_2)$$

$$I(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I(m, n) R(x - m, y - n)$$

$R(x, y)$ filtre de reconstruction séparable : $R(x, y) = R(x).R(y)$

Interpolation au plus proche voisin

filtre de reconstruction d'ordre 0 :

$$R(x, y) = 1 \text{ pour } |x| < \frac{1}{2} \text{ et } |y| < \frac{1}{2}$$

ce qui donne

$$I(x, y) = \sum_{|x-m| \leq \frac{1}{2}} \sum_{|y-n| \leq \frac{1}{2}} I(m, n) = I(m_0, n_0)$$

avec m_0 (resp. n_0) la valeur entière la plus proche de x (resp. y).

En Java :

```
m0 = (int) (x+0.5);
```

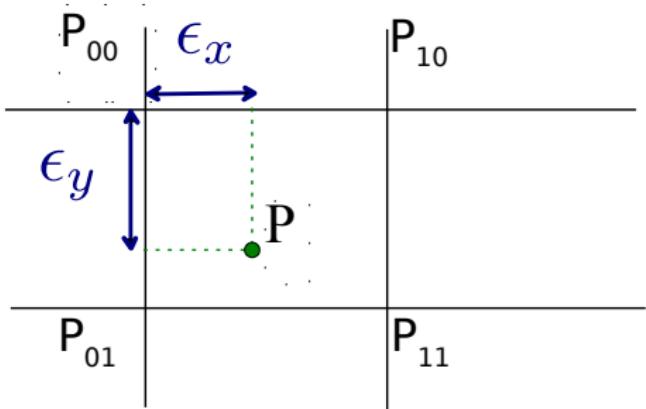
```
n0 = (int) (y+0.5);
```

Interpolation bilinéaire

$$R(x) = \begin{cases} x + 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Filtre de reconstruction 2D : 0 sauf

$$\begin{array}{lll} -1 \leq x \leq 0 & \text{et} & -1 \leq y \leq 0 \\ -1 \leq x \leq 0 & \text{et} & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 & \text{et} & -1 \leq y \leq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 & \text{et} & 0 \leq y \leq 1 \end{array} \quad : \quad \begin{array}{l} R(x, y) = (x + 1)(y + 1) \\ R(x, y) = (x + 1)(1 - y) \\ R(x, y) = (1 - x)(y + 1) \\ R(x, y) = (1 - x)(1 - y) \end{array}$$



$$\begin{aligned} I(P) = & (1 - \varepsilon_x)(1 - \varepsilon_y)I(P_{00}) \\ & +(1 - \varepsilon_x)\varepsilon_y I(P_{01}) \\ & +\varepsilon_x(1 - \varepsilon_y)I(P_{10}) \\ & +\varepsilon_x\varepsilon_y I(P_{11}) \end{aligned}$$

Interpolation à l'ordre 2

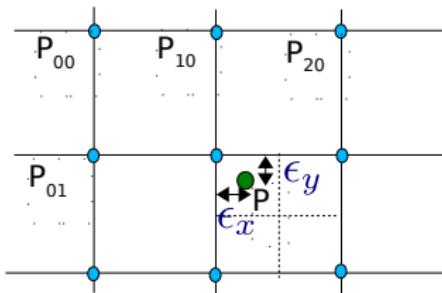
Supposons $0 \leq \varepsilon_{x,y} \leq 0.5$

$$m = x_{P_{00}} : R(x - m) = R(\varepsilon_x + 1) = \frac{1}{2}(x - m - \frac{3}{2})^2 = 0.5(\varepsilon_x - 0.5)^2$$

$$m = x_{P_{10}} : R(x - m) = R(\varepsilon_x) = \frac{3}{4} - (x - m)^2 = \frac{3}{4} - \varepsilon_x^2$$

$$m = x_{P_{20}} : R(x - m) = R(\varepsilon_x - 1) = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \frac{1}{2})^2$$

$$\begin{aligned} I(P) &= \sum_{m,n} R(x - m, y - n) I_{mn} = \sum_{m,n} R(x - m) R(y - n) I_{mn} \\ &= R(\varepsilon_x + 1) R(\varepsilon_y + 1) I_{00} + R(\varepsilon_x) R(\varepsilon_y + 1) I_{10} + R(\varepsilon_x - 1) R(\varepsilon_y + 1) I_{20} \\ &\quad + R(\varepsilon_x + 1) R(\varepsilon_y) I_{01} + R(\varepsilon_x + 1) R(\varepsilon_y - 1) I_{02} + R(\varepsilon_x) R(\varepsilon_y) I_{11} \\ &\quad + R(\varepsilon_x) R(\varepsilon_y - 1) I_{12} + R(\varepsilon_x - 1) R(\varepsilon_y) I_{21} + R(\varepsilon_x - 1) R(\varepsilon_y - 1) I_{22} \end{aligned}$$

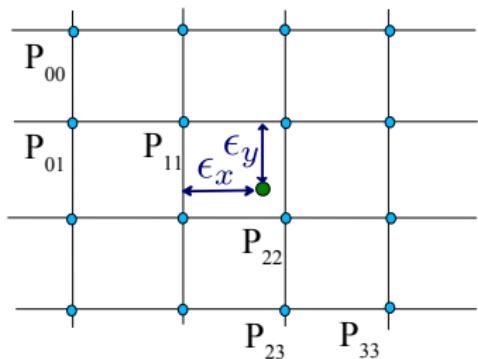


● : point intervenant
dans le calcul de
la couleur du point ●

Interpolation à l'ordre 3

Polynômes de Mitchell

$$k(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} (12 - 9b - 6c)|x|^3 + (-18 + 12b + 6c)x^2 + (6 - 2b) \\ -(b + 6c)|x|^3 + (6b + 30c)x^2 - (12b + 48c)|x| + (8b + 24c) \\ 0 \end{cases}$$



• : point intervenant dans le calcul de la couleur du point

- $B=1 ; C=0$ (B-spline cubique)
- $B=0 ; C=1$ (+ proche \sin_c)

Exemple : rotation de 10 degrés



Exemple : rotation de 10 degrés : ordre 0



Exemple : rotation de 10 degrés : ordre 1



Exemple : rotation de 10 degrés : ordre 2



Exemple : rotation de 10 degrés : ordre 3 ($B=1$; $C=0$)



Exemple : rotation de 10 degrés : ordre 3 ($B=0$; $C=1$)



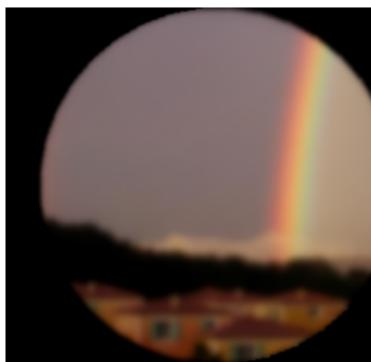
Exemple : 9 rotations de 40 degrés



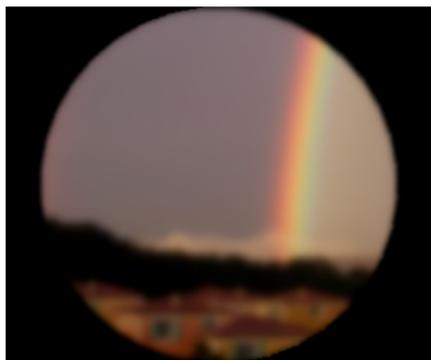
ordre 0



ordre 1



ordre 2



ordre 3 ($B=1$; $C=0$)



ordre 3 ($B=0$; $C=1$)

Exemple : 36 rotations de 10 degrés



ordre 3 ($B=1$; $C=0$)



ordre 3 ($B=0$; $C=1$)

Exemple : zoom de facteur 2.4



Exemple : zoom de facteur 2.4 : ordre 0



Exemple : zoom de facteur 2.4 : ordre 1



Exemple : zoom de facteur 2.4 : ordre 2



Exemple : zoom de facteur 2.4 : ordre 3 (B=1 ; C=0)



Exemple : zoom de facteur 2.4 : ordre 3 (B=0 ; C=1)



Exemple : zoom de facteur 1.4

