Sémantique d’un langage du premier ordre

Sémantique d'un langage du premier ordre

Pour pouvoir donner un ***sens*** (c'est-à-dire la valeur Vrai ou la valeur Faux) aux formules, il faut se donner une interprétation/valeur/définition aux symboles du langage, c'est à dire :

- variables (dans quel ensemble sont prises leurs valeurs)
- aux fonctions (quelle est la fonction)
- aux prédicats (quel est le prédicat)

Interprétation $\boldsymbol{I}$ d'un langage

- un ensemble **non vide** D, appelé ***domaine***.
  - Exemple : D est l'ensemble des nombres réels
- pour chaque symbole de fonction f d'arité n, une fonction f_I, de $D^n \rightarrow D$
  - Exemple : f_I est la fonction sinus
- Ces fonctions peuvent ne pas être partout définies.
  - Exemple : D est l'ensemble des nombres réels, et f_I est la fonction $x \rightarrow 1/x$
- Dans le cas particulier où la fonction est une constante, son interprétation est un élément du domaine D
  - Exemple : π

Interprétation $\boldsymbol{I}$ d'un langage

- pour chaque symbole de prédicat r d'arité n, un sous-ensemble r_I, de D^n (l'ensemble des arguments qui rendent le prédicat vrai)
  - Exemple : r_I est l'ensemble des nombres réels positifs
  - Exemple : r_I est l'ensemble des couples de nombres réels (x,y) tels que x-y est positif (r est interprétée comme étant la relation ≥)
- Si l'un des arguments d'un prédicat n'est pas défini, la valeur du prédicat sur ces arguments est FAUX
  - Exemple : D est l'ensemble des nombres réels, f_I est la fonction $x \rightarrow 1/x$, zero est la constante 0, et r_I est l'ensemble des nombres réels positifs, alors r_I (f_I (zero)) est FAUX
- Dans le cas particulier où le prédicat r est une proposition, son interprétation est VRAI ou FAUX

Les quantificateurs : ils ont le sens contenu dans leur nom !

- Étant donnée une interprétation $\boldsymbol{I}$ d'un langage, il reste à préciser le fonctionnement des quantificateurs ∀ ∃ pour donner un sens (une valeur Vrai/Faux) à toute formule clause
- $\forall \mathrm{x}\ \phi(x)$: signifie que l'ensemble des valeurs x telles que $\phi(x)$ est le domaine D
- $\exists \mathrm{x}\ \phi(x)$: signifie que l'ensemble des valeurs x telles que $\phi(x)$ n'est pas l'ensemble vide :
  $\exists \mathrm{x}\ \phi(x)$ a la même valeur que $\neg$ ($\forall \mathrm{x}\ \neg\phi(x)$)
- Donc :
  $\forall \mathrm{x}\ \phi(x)$ a la même valeur que $\neg$ ($\exists \mathrm{x}\neg\phi(x)$)

Modèle pour une formule close

- Un interprétation donne une valeur de vérité (VRAI ou FAUX) à toute **formule close** du langage

- Une interprétation est un ***modèle*** pour une **formule close** si la formule est **vraie** dans cette interprétation

Exemple

Le langage L dispose de

- Deux symboles de fonctions
  - a est une constante
  - s est une fonction d’arité un
- Deux symboles de prédicats
  - p d’arité un
  - q d’arité deux

Exemple de formule 1

$$F_1 : \left(\forall x \, p(x)\right) \Longrightarrow \left(\exists y \, p(y)\right)$$

- Quelque soit l'interprétation $\boldsymbol{I}$, on est dans l'un des 2 cas suivant :
  - p_I est différent du domaine D, et donc $\left(\forall x \, p(x)\right)$ est faux et donc F_1 est vraie
  - p_I est égal au domaine D, et donc $\left(\forall x \, p(x)\right)$ est vraie et comme D est non vide, on peut prendre pour y n'importe quel objet de D pour lequel on a forcément $p(y)$ et donc la formule est vraie.

- On dit que la formule est ***valide*** ou ***universellement valide***

Exemple de formule 2

$$F_2 : \forall x \left(p(x) \Longrightarrow q(a, x)\right)$$

Interprétation I_1:

- Le domaine est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels
- a est la constante 2
- p(x) : x est pair
- q(y,z) : z est un multiple de y

Dans cette interprétation F_2 est vraie, on dit que I_1 est un ***modèle*** pour F_2

Exemple de formule 2

$$F_2 \colon \forall x \left(p(x) \Longrightarrow q(a, x) \right)$$

Interprétation I_2:

- Le domaine est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels
- a est la constante 3
- p(x) : x est impair
- q(y,z) : z est un multiple de y

Dans cette interprétation F_2 est fausse, on dit que I_1 n'est pas un modèle pour F_2

Exemple de formule 2

$$F_2 : \forall x \left(p(x) \Longrightarrow q(a,x)\right)$$

La formule F_2 est ***satisfiable*** signifie que :

- il existe au moins un modèle pour F_2

  autrement dit

- il existe au moins une interprétation dans laquelle F_2 est vraie.

La formule F2 n’est pas universellement valide, car il existe au moins une interprétation dans laquelle elle est fausse.

Exemple de formule 3

$$F_3 \text{:} \left(\forall x\ p(x)\right) \land (\exists y\ \neg p(y))$$

Cette formule est fausse :
$\forall \mathrm{x}\ p(x)$ a la même valeur que $\neg\ (\exists \mathrm{x}\ \neg p(x)\ )$

Validité des formules closes

Exemple de formule	**Véracité**	**On dit que la formule est**
$F_1 : \left(\forall x\, p(x)\right) \Longrightarrow \left(\exists y\, p(y)\right)$	Vraie dans toutes les interprétations	Valide ou Universellement valide, Noté $\Vdash F_1$
$F_2 : \forall x\, \left(p(x) \Longrightarrow q(a,x)\right)$	Il existe au moins une interprétation I qui la rend vraie	Satisfiable ou satisfaisable, Noté $I \Vdash F_2$
$F_3 : \left(\forall x\, p(x)\right) \wedge (\exists\, y\, \neg p(y))$	Fausse dans toutes les interprétations	Fausse