Preuves en calcul propositionnel

On part :

- d'un ensemble $\mathcal{H}$ de formules (parfois appelé ***théorie*** τ)
- d'une formule φ

On veut déterminer si φ est une conséquence logique de l'ensemble de formules $\mathcal{H}$, noté

$\mathcal{H} \vDash \varphi$

En calcul propositionnel

Deux approches sont possibles pour établir si une formule φ est une conséquence de $\mathcal{H}$:

1. **Table de vérité** : si $\mathcal{H}$ contient (par exemple) 3 formules, h1,h2 et h3, on fait la table de vérité de :
   $(h1 \wedge h2 \wedge h3) \Longrightarrow \varphi$ qui doit contenir VRAI (ou 1) à toutes ses cases de la dernière colonne pour que $\mathcal{H} \vDash \varphi$
   (on regarde donc tous les cas possibles)

possible en calcul propositionnel mais pas en calcul des prédicats

2. **Preuve syntaxique** : un algorithme qui va permettre de décider si $\mathcal{H} \vDash \varphi$

Preuves syntaxiques

Il existe plusieurs méthodes de preuves syntaxiques :

- Calcul des séquents
- Systèmes de réfutation

- La méthode de preuve par résolution de Robinson est une méthode par réfutation qui est fortement utilisée en informatique, en particulier à la base de prolog

Méthode par réfutation ?

Analogue à une preuve par l'absurde

Pour montrer $\mathcal{H} \models \varphi$, il suffit de montrer que :
$(h1 \wedge h2 \wedge \ldots \wedge hn) \Longrightarrow \varphi$
Où h1, h2, …, hn sont les n formules de $\mathcal{H}$

On fait une preuve par l'absurde, en supposant que l'on a :
$(h1 \wedge h2 \wedge \ldots \wedge hn) \wedge \neg\varphi$

Et on en déduit quelque chose de faux, du type $p \wedge \neg p$ où p est une proposition.

Méthode de résolution de Robinson en calcul propositionnel

Rappels de terminologie :

- Un **littéral** est une proposition ou la négation d'une proposition :

Exemple : P

Autre exemple : $\neg P$

- Une **clause** est une disjonction de littéraux :

Exemple : $Q \vee \neg R$

Remarque : dans une clause C, il n'y a pas à la fois le littéral P et le littéral $\neg P$ (sinon C est la clause VRAI)

Exemple : $Q \vee \neg R \vee \neg Q$ n'est pas une clause

- La clause vide est équivalente à la constante FAUX

(car FAUX est l'élément neutre pour $\vee$)

Méthode de résolution de Robinson en calcul propositionnel

- Toute formule peut s'écrire sous Forme Normale Conjonctive (= une conjonction de clauses)

Exemple : $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge P \wedge \neg R$

Remarque : si parmi les clauses d'une FNC, il y a la clause VRAI, on ne l'écrit pas (car VRAI est l'élément neutre pour $\wedge$, de même que l'on n'écrit pas c1 + 0 + c2, on écrit seulement c1 + c2)

- Mettre $\mathcal{H} \models \varphi$ en FNC c'est mettre :
  $(h1 \wedge h2 \wedge \ldots \wedge hn) \wedge \neg\varphi$ en FNC

Méthode de résolution de Robinson en calcul propositionnel

La méthode de résolution utilise une unique règle de réécriture dite ***règle de résolution*** :
si $F_1 \vee P$ et $F_2 \vee \neg P$ sont deux clauses (P est une proposition),
alors $F_1 \vee F_2$ est une conséquence logique de ces deux clauses.

Règle de résolution : des 2 clauses $F_1 \vee P$ et $F_2 \vee \neg P$,
on déduit la clause $F_1 \vee F_2$

Remarque : cette règle généralise la *déduction usuelle* :
de P et $P \Rightarrow F_2$ on déduit F_2

En effet : $P \Rightarrow F_2$	est égal à	$F_2 \vee \neg P$
et P	est égal à	Faux $\vee$ P

Remarque : cette *déduction usuelle* est la seule règle de résolution qui donne une clause de taille strictement inférieure à la taille de la plus grande des 2 clauses dont elle est issue ($F_2 \vee \neg P$ a un terme de plus que F_2**)**

Remarque : un cas particulier de cette *déduction usuelle* est que l'on peut déduire la clause vide (FAUX donc) de P et $\neg P$

Condition d'application de la règle de résolution

On peut appliquer la règle de résolution à deux clauses C_1 et C_2 si et seulement si il existe une proposition P qui apparaît sous forme positive dans une des deux clauses et sous forme négative dans l'autre clause.

Exemples

- C1 = P V¬**Q**
  C2 = **Q** V¬R
  on obtient (par résolution)
  P V¬R

- C1 = **P** V¬Q
  C2 = R V S V¬**P**
  on obtient
  ¬Q V R V S
- C1 = P V¬Q
  C2 = S V¬R
  on ne peut pas appliquer la règle de résolution
- C1 = P V¬Q
  C2 = S V¬Q
  on ne peut pas appliquer la règle de résolution

Méthode de résolution de Robinson en calcul propositionnel

1. Mettre $\mathcal{H} \vDash \varphi$ en FNC
2. On obtient un ensemble de clauses $\boldsymbol{C}$
3. Tant que l'on a pas obtenu la clause vide ou effectué toutes les résolutions possibles :
   - Trouver deux clauses C_1 et C_2 auxquelles on peut appliquer une règle de résolution,
     effectuer cette résolution : on obtient une clause C_3
   - Si C_3 n'est pas dans $\boldsymbol{C}$, ajouter C_3 à $\boldsymbol{C}$

Remarque1 : cet algorithme s'arrête dans tous les cas, car le nombre de clauses est fini.
En effet étant données une clause C et une proposition P :
soit P figure dans C,
soit $\neg$ P figure dans C,
soit ni l'un ni l'autre ne figure dans C,
donc si il y a n propositions, il y a 3^n clauses possibles.

Méthode de résolution de Robinson en calcul propositionnel

1. Mettre $\mathcal{H} \vDash \varphi$ en FNC
2. On obtient un ensemble de clauses $\boldsymbol{C}$
3. Tant que l'on a pas obtenu la clause vide ou effectué toutes les résolutions possibles :
   - Trouver deux clauses C_1 et C_2 auxquelles on peut appliquer une règle de résolution, effectuer cette résolution : on obtient une clause C_3
   - Si C_3 n'est pas dans $\boldsymbol{C}$, ajouter C_3 à $\boldsymbol{C}$

Remarque2 : cet algorithme ne précise pas ***comment*** trouver les 2 clauses C_1 et C_2 . Il n'y a pas unicité du choix, et selon le choix fait, la résolution peut être plus ou moins longue (= peut demander plus ou moins d'itérations, donc plus ou moins de clauses ajoutées à $\boldsymbol{C}$).
Il existe différentes stratégies de résolution, plus ou moins efficaces selon les « types » de formules manipulées.

Théorème

$\mathcal{H} \vDash \varphi$ si et seulement si on sort de la boucle de l'algorithme précédent suite à l'obtention de la clause vide.

Cas particuliers

1. Si $\mathcal{H}$ est l'ensemble vide :
   $(h1 \wedge h2 \wedge \ldots \wedge hn) \wedge \neg\varphi$ se réduit à $\neg\varphi$
   et donc

$\mathcal{H} \vDash \varphi$ si et seulement si la formule φ est vraie

2. Si la formule φ est vide :
   $(h1 \wedge h2 \wedge \ldots \wedge hn) \wedge \neg\varphi$ se réduit à $(h1 \wedge h2 \wedge \ldots \wedge hn)$
   et donc

$\mathcal{H} \vDash \varphi$ si et seulement si l'ensemble $\mathcal{H}$ de formules est inconsistant (= de cet ensemble, on peut déduire la clause vide, c'est-à-dire une proposition et son contraire)

Exemple 1

L'ensemble $\mathcal{H}$ de formules contient les deux formules :
$P \Longrightarrow Q$
$Q \Longrightarrow R$

Et soit la formule φ : $P \Longrightarrow R$

Montrer par résolution que $\mathcal{H} \models \varphi$

Application de l'algorithme

1. Mise en FNC
   $(P \Longrightarrow Q) \land (Q \Longrightarrow R) \land \neg(P \Longrightarrow R)$

   $(\neg P \lor Q) \land (\neg Q \lor R) \land \neg(\neg P \lor R)$

   $(\neg P \lor Q) \land (\neg Q \lor R) \land P \land \neg R$

Application de l’algorithme (suite)

2. On obtient un ensemble de clauses C
   C={¬P ∨ Q, ¬Q ∨ R, P, ¬R}
   Que l’on écrit :

   C1 : ¬P ∨ Q
   C2 : ¬Q ∨ R
   C3 : P
   C4 : ¬R

3. Tant que l’on a pas obtenu la clause vide ou effectué toutes les résolutions possibles
   - Trouver deux clauses C et C’ auxquelles on peut appliquer la règle de résolution , on obtient une clause C ’’
   - Si C ’’ est une nouvelle clause, Ajouter C ’’

Application de l'algorithme (suite)

2. Ensemble de clauses C :
   C1 : $\neg P \vee Q$
   C2 : $\neg Q \vee R$
   C3 : P
   C4 : $\neg R$

3. Première itération :
   C1 et C3 avec P donne la nouvelle clause
   C5 : Q

   Deuxième itération :
   C2 et C4 avec R donne la nouvelle clause
   C6 : $\neg Q$

   Troisième itération :
   C5 et C6 avec Q donne la clause vide

Donc on a montré que :

$\{P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R\} \models (P \Rightarrow R)$

Exemple 2

La théorie τ contient les trois formules :
$P \vee R \vee S$
$R \vee \neg S$
$\neg R$

Montrer par résolution que $\tau \vDash P$

A vous de jouer !!