

Simplification logique par l'algorithme de Quine-MacCluskey

B. Miramond

Polytech Nice Sophia Antipolis

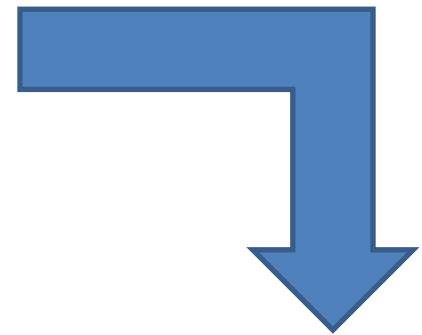
Exemple de fonction booléenne

a	b	c	s
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Ecriture de la fonction booléenne

a	b	c	s
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$\bar{a}bc$
 $a\bar{b}c$
 $abc\bar{c}$
 abc



Forme somme de produits : $s = \bar{a}bc + a\bar{b}c + abc\bar{c} + abc$

Implantation matérielle de

$$s = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$



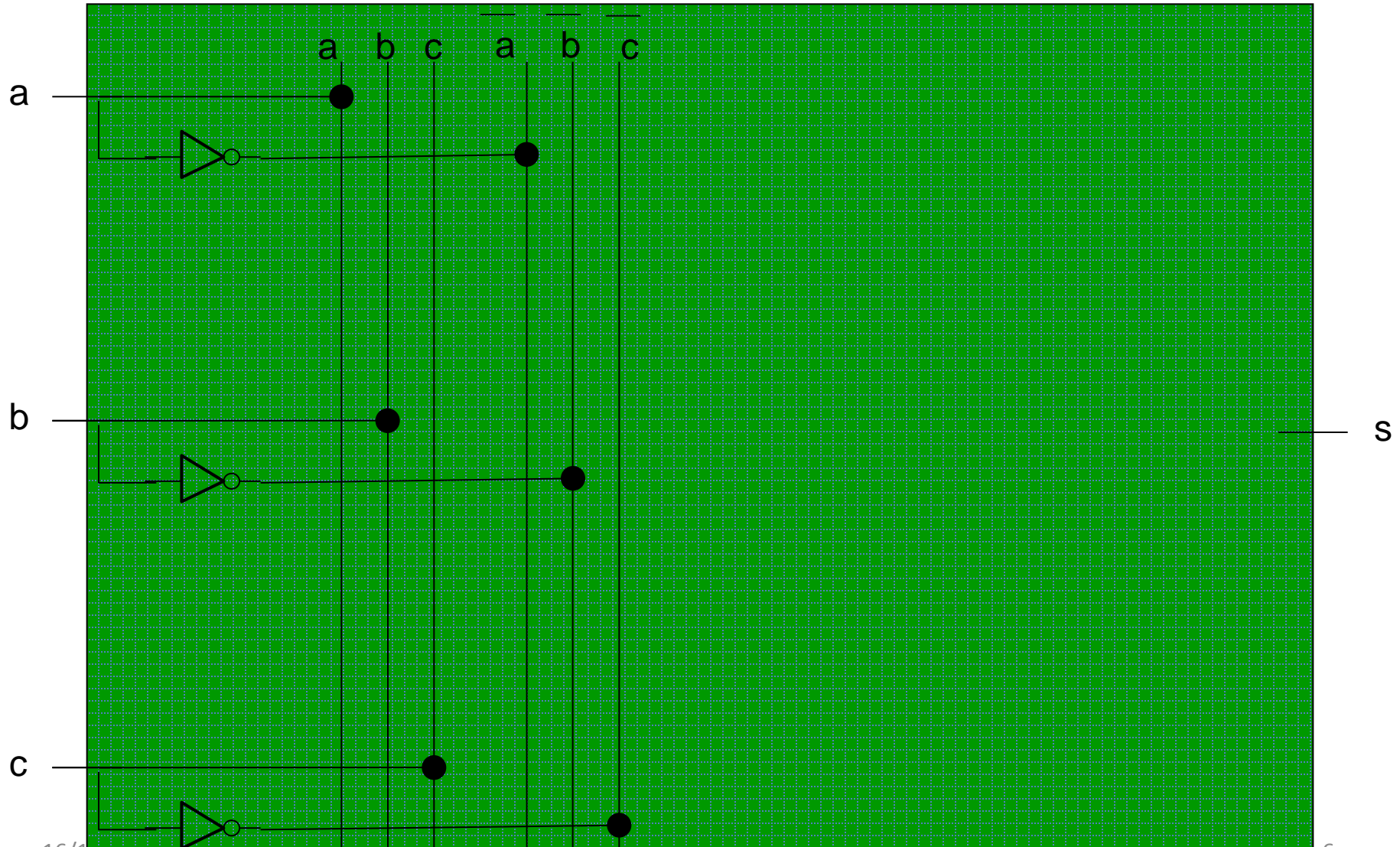
Implantation matérielle de

$$s = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$



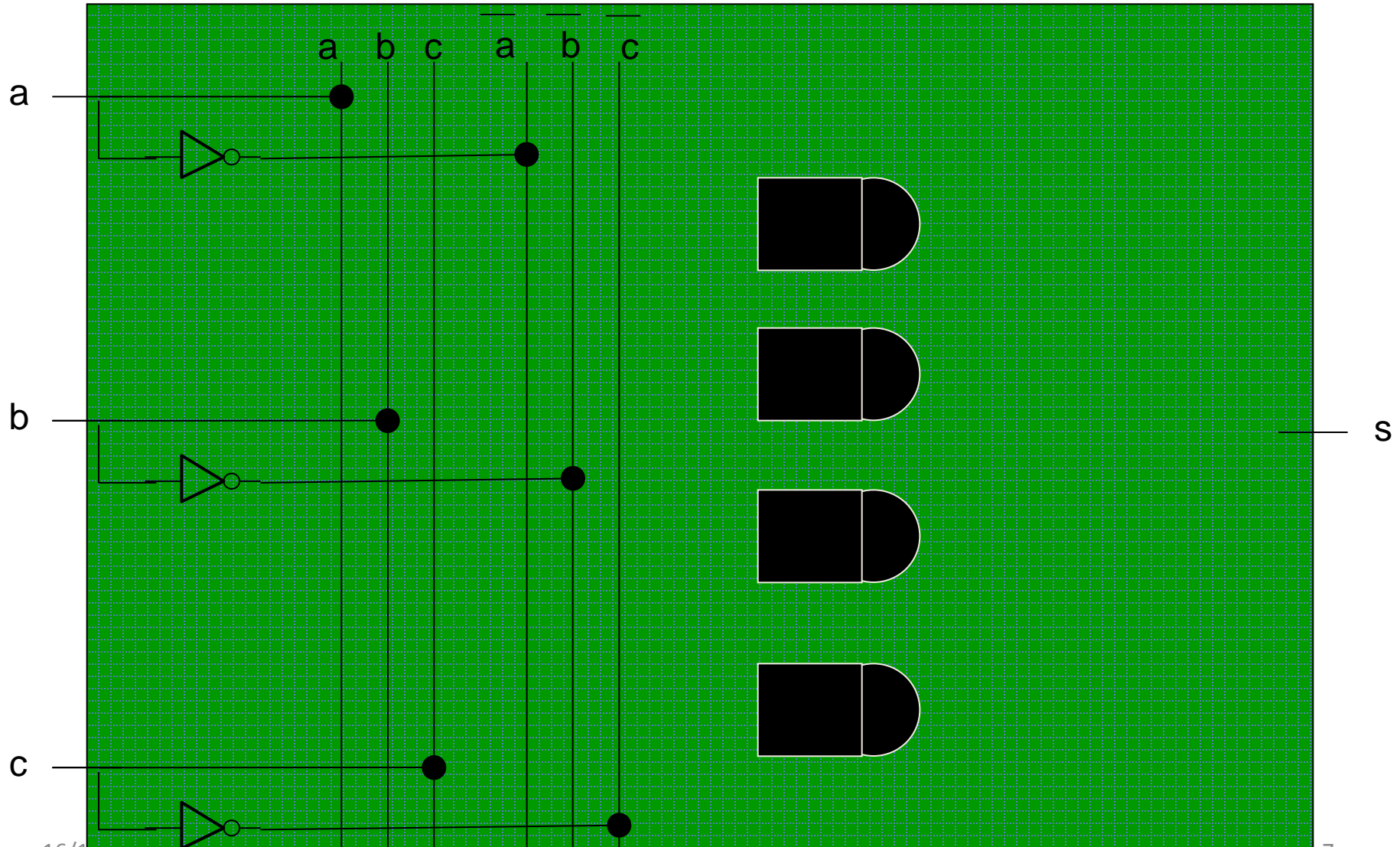
Implantation matérielle de

$$s = \overline{a}bc + a\overline{b}c + ab\overline{c} + abc$$



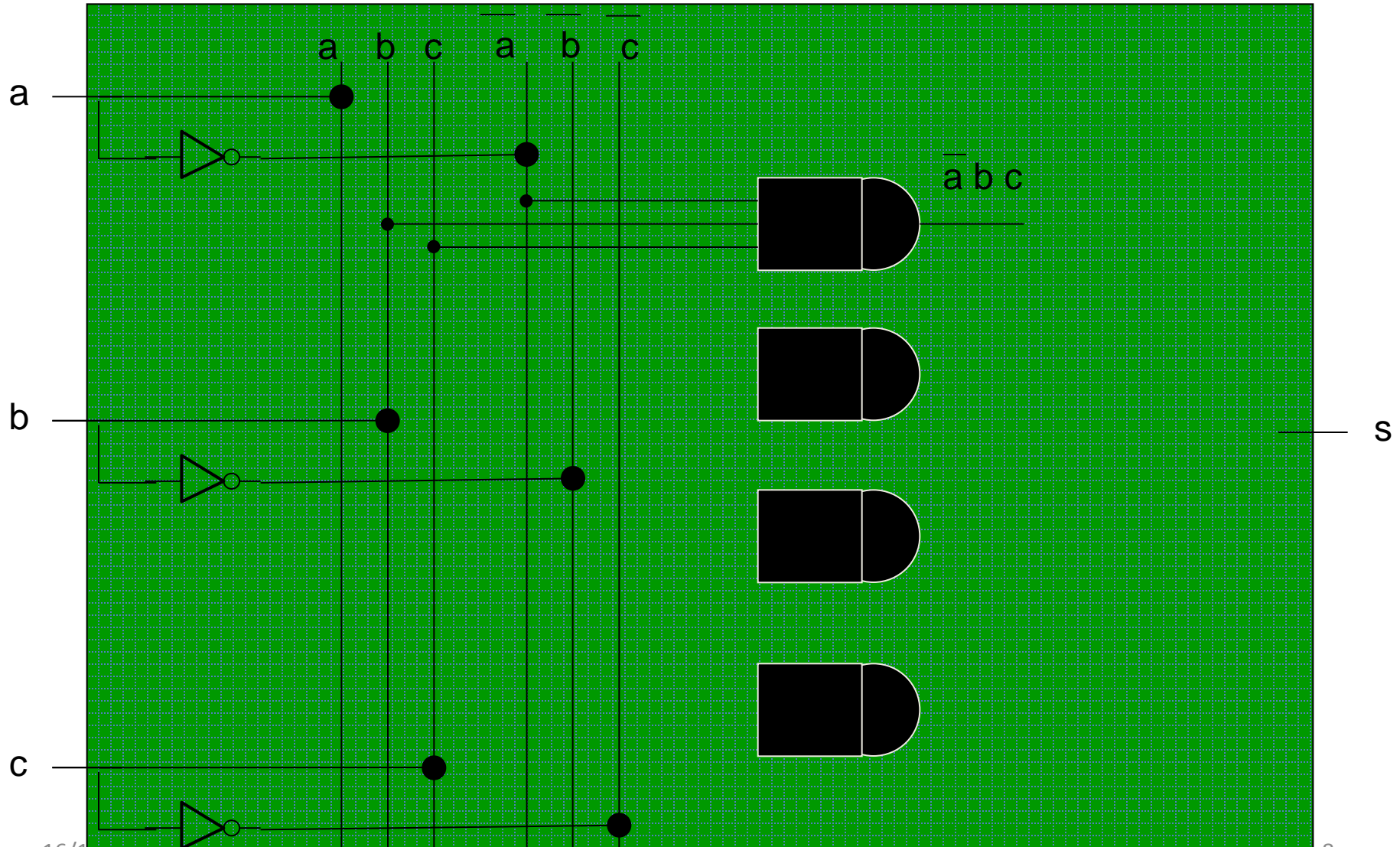
Implantation matérielle de

$$s = \overline{a}bc + a\overline{b}c + ab\overline{c} + abc$$



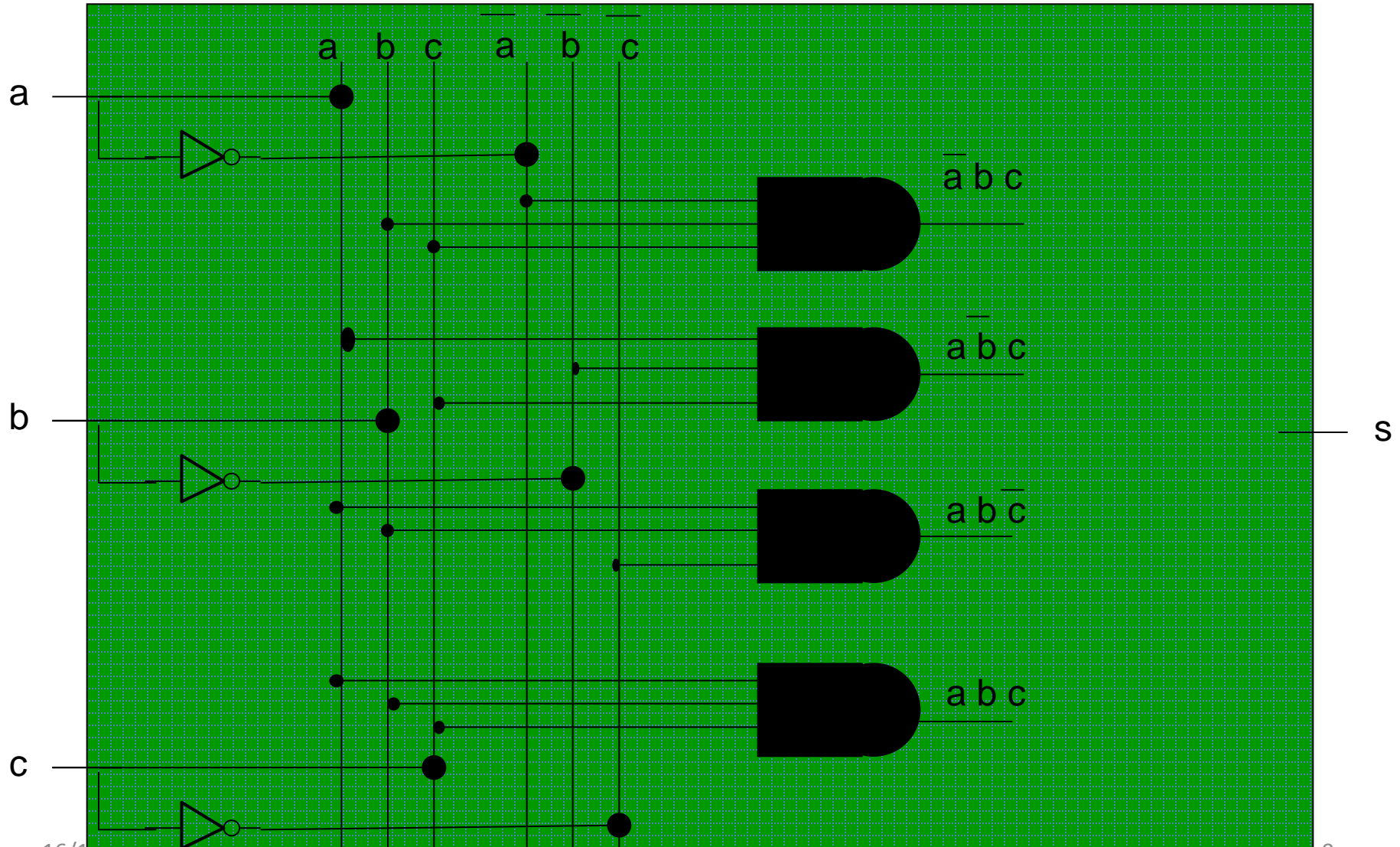
Implantation matérielle de

$$s = \overline{a}bc + a\overline{b}c + ab\overline{c} + abc$$



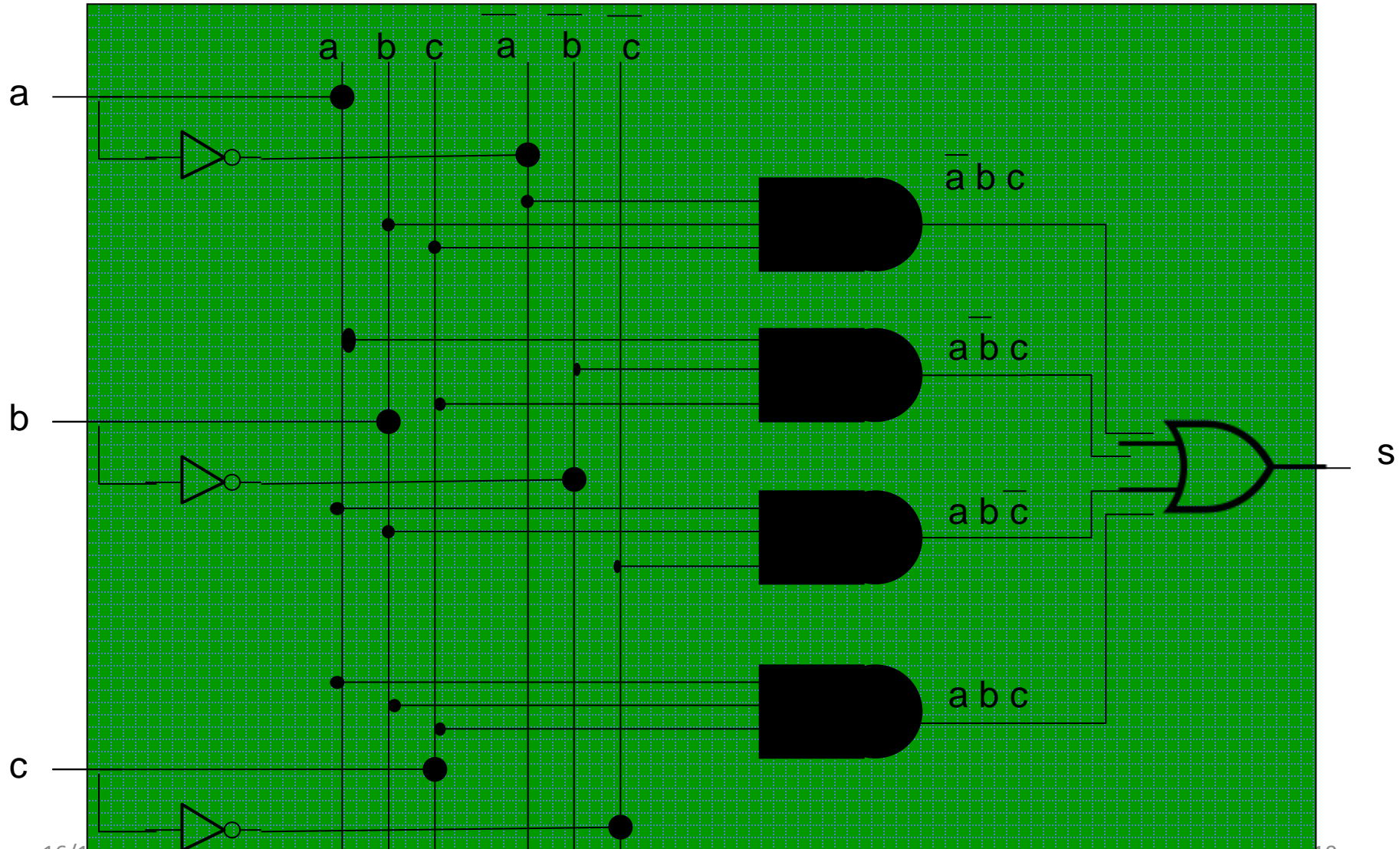
Implantation matérielle de

$$s = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$



Implantation matérielle de

$$s = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$



Implantation d'une fonction booléenne

1. Ecrire l'équation de la fonction à partir de sa table de vérité
2. Réaliser l'inversion de toutes les variables d'entrées pour disposer de leur complément
3. Construire une porte ET pour chacun des termes égal à 1 dans la colonne de sortie
4. Etablir le câblage des portes ET avec les entrées
5. Réunir l'ensemble des portes ET vers une porte OU dont la sortie est le résultat de la fonction

Simplification d'expressions logiques

- L'algorithme de Quine-Mac Cluskey est une méthode
 - systématique fonctionnant quelque soit le nombre de variables logiques
 - et pouvant être programmée

Vocabulaire

- **Mintermes, termes ou impliquant** : ce sont les produits logiques d'une expression F
- $F = X\bar{Y}\bar{Z} + X\bar{Y}Z + XY\bar{Z} + XYZ + \bar{X}Y\bar{Z}$
- Un terme que l'on ne peut simplifier en supprimant une de ses variables et qui implique la fonction logique considérée est dit **impliquant premier**

$$F = X + Y\bar{Z}$$

Principe de la méthode de QMC

- Démarrer par l'expansion en mintermes de la fonction F à minimiser (écrire la fonction en forme normale disjonctive)
- Trouver la liste des impliquants premiers
- Sélectionner un ensemble minimal d'impliquants premiers

Algorithme

1. Lister tous les minterms de f dans une table
 - Les grouper par poids (le nombre de 1 dans chaque minterm)
2. Comparer les termes d'un groupe avec le groupe adjacent pour essayer de les combiner
 - Créer une nouvelle table avec les combinaisons trouvées : $0100 + 0101 = 010-$
 - Rayer chaque terme utilisé pour la combinaison et passer à la table suivante
3. Répéter la procédure dans la nouvelle colonne jusqu'à ce qu'il n'y ai plus de simplification possible
4. Les **impliquants premiers** correspondent aux termes non rayés
5. Sélectionner les impliquants premiers essentiels
6. Choisir les impliquants restant formant l'ensemble minimal

Exemple d'exécution

$$F(A,B,C)=A\bar{B}+\bar{A}B+\bar{A}C + BC$$

Mise sous forme canonique disjonctive

$$F(A,B,C)=A\bar{B}C+A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C + ABC$$

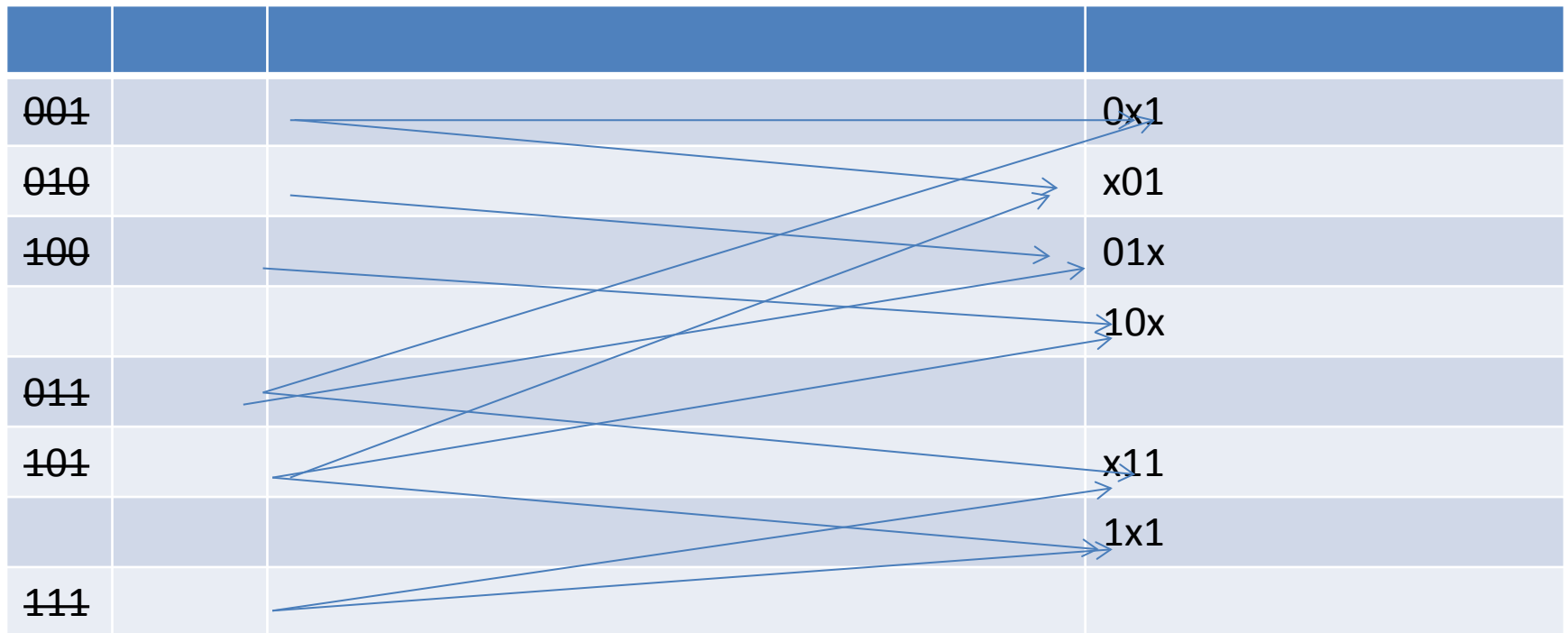
Mise sous forme binaire

$$F(A,B,C)=101+100+011+010+001+111$$

Grouper les termes selon leur poids

Poids 1	Poids2	Poids 3
001	011	111
010	101	
100		

Unir les termes deux à deux



Recommencer

001	0x1	xx1	
010	x01		
100	01x		
	10x		
011			
101	x11		
	1x1		
111			

A diagram illustrating a recommendation or transition process. Four blue arrows originate from the following cells in the second column: 0x1 (row 1), ~~x01~~ (row 2), ~~101~~ (row 6), and ~~1x1~~ (row 7). All four arrows converge and point to the cell containing 'xx1' in the third column, row 1.

Identifier les impliquants premiers

- On ne peut plus unir d'impliquants
- Les impliquants premiers sont les impliquants non rayés : 01x, 10x et xx1

Identifier les impliquants essentiels

	001	010	100	011	101	111
01x		(x)		x		
10x			(x)		x	
xx1	(x)			x	x	(x)

Les trois impliquants premiers sont des impliquants essentiels.
La fonction est donc entièrement exprimée par ses impliquants essentiels

On a donc simplifié F en $\bar{A}B + A\bar{B} + C$

Un exemple plus complet:

A	B	C	D	
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1

A	B	C	D	
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

0010+0100+0101+0110+0111+1001+1101

Classement par poids

- $0010+0100+0101+0110+0111+1001+1101$
- Poids 1:
 - 0010
 - 0100
- Poids 2
 - 0101
 - 0110
 - 1001
- Poids 3
 - 0111
 - 1101

Unir les termes 2 à 2

0010		
0100		

0101		
0110		
1001		

0111		
1101		

Unir les termes 2 à 2


0010		0x10
0100		

0101		
0110		
1001		

0111		
1101		

The diagram illustrates the process of grouping terms in a Karnaugh map. A blue arrow originates from the term ~~0010~~ in the first column and points to the term 0x10 in the third column. Another blue arrow originates from the term ~~0110~~ in the first column and points to the same 0x10 term in the third column. This indicates that these two terms are being combined to form the value 0x10.

Unir les termes 2 à 2

0010		0x10
0100		010x

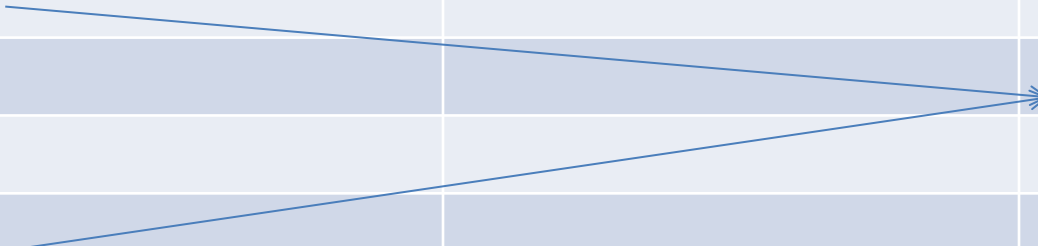
0101		
0110		
1001		

0111		
1101		

Unir les termes 2 à 2

0010		0x10
0100		010x
-----		01x0
0101		
0110		
1001		

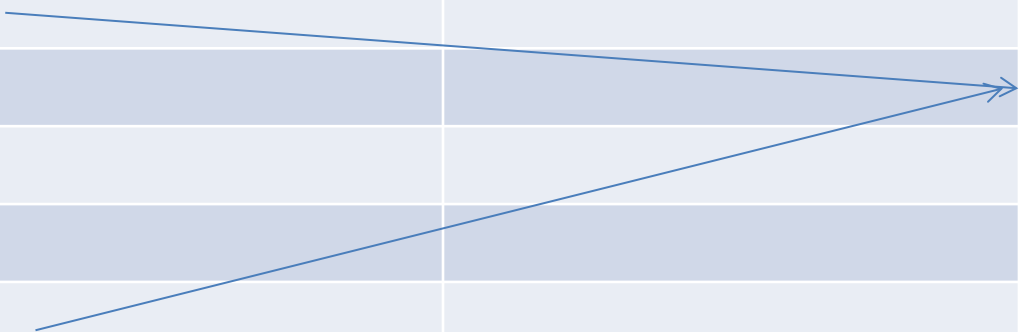
0111		
1101		



Unir les termes 2 à 2

0010		0x10
0100		010x
-----		01x0
0101		
0110		01x1
1001		

0111		
1101		



Unir les termes 2 à 2

0010		0x10
0100		010x
-----		01x0
0101		
0110		01x1
1001		x101

0111		
1101		

The diagram illustrates the process of combining terms in a Karnaugh map. Two blue arrows originate from the terms '0101' and '1101' in the first column. These arrows converge towards the term 'x101' in the third column, indicating that these two terms are grouped together to form the simplified term 'x101'.

Unir les termes 2 à 2

0010		0x10
0100		010x
-----		01x0
0101		
0110		01x1
1001		x101
-----		011x
0111		
1101		

The diagram illustrates the process of combining terms. Two blue arrows originate from the left side of the table. The first arrow starts at the row containing '0110' and points to the row containing '011x'. The second arrow starts at the row containing '0111' and also points to the row containing '011x'. This visualizes the combination of the two terms into a single expression with a common factor.

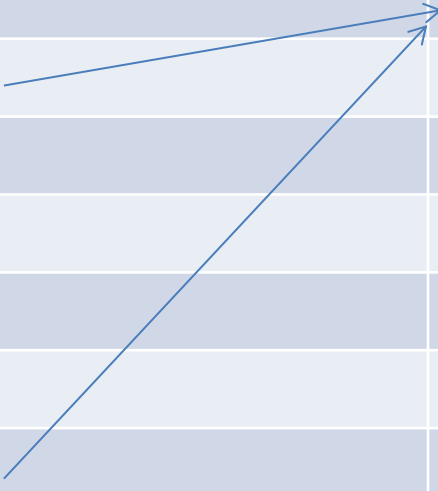
Unir les termes 2 à 2

0010		0x10
0100		010x
-----		01x0
0101		
0110		01x1
1001		x101
-----		011x
0111		1x01
1101		

The diagram illustrates the process of combining terms in a Karnaugh map. Two blue arrows originate from the terms '1001' and '1101' in the first column. Both arrows point towards the term '1x01' in the third column, indicating that these two terms are grouped together to form the simplified term '1x01'.


Recommencer à Unir les termes 2 à 2

0010	0x10	01xx
0100	010x	
-----	01x0	
0101		
0110	01x1	
1001	x101	
-----	011x	
0111	1x01	
1101		



Recommencer à Unir les termes 2 à 2

0010	0x10	01xx
0100	010x	
-----	01x0	
0101		
0110	01x1	
1001	x101	
-----	011x	
0111	1x01	
1101		



Trouver les impliquants premiers

0010	0x10	01xx
0100	010x	
-----	01x0	
0101		
0110	01x1	
1001	x101	
-----	011x	
0111	1x01	
1101		

$0x10 + x101 + 1x01 + 01xx$

Trouver les impliquants essentiels

	0010	0100	0101	0110	0111	1001	1101
0x10	(x)			x			
x101			x				x
1x01						(x)	x
01xx		(x)	x	x	(x)		

3 des 4 impliquants sont des impliquants essentiels

Vérifier si les impliquants essentiels suffisent

	0010	0100	0101	0110	0111	1001	1101
0x10	(x)			x			
1x01						(x)	x
01xx		(x)	x	x	(x)		

Ici les impliquants essentiels suffisent !

Rappel de l'algorithme

1. Lister tous les minterms de f dans une table
 - Les grouper par le nombre de 1 dans chaque minterm
2. Comparer les termes d'un groupe avec le groupe adjacent pour essayer de les combiner
 - Créer une nouvelle table avec les combinaisons trouvées : $0100 + 0101 = 010-$
 - Rayer chaque terme utilisé pour la combinaison et passer à la table suivante
3. Répéter la procédure dans la nouvelle colonne jusqu'à ce qu'il n'y ai plus de simplification possible
4. Les **impliquants premiers** correspondent aux termes non rayés
5. Sélectionner les impliquants premiers essentiels
6. Si nécessaire choisir dans les impliquants restant un ensemble minimal