Université de Nice-Sophia Antipolis — Polytech Nice Sophia

2018–2019

Examen Complexité et Calculabilité
23 novembre 2018

Durée : 2 heures

1 Compréhension

Soient P_1 et P_2 deux problèmes de décision, et supposons qu'on connaisse une réduction polynomiale de P_1 en P_2. Répondre aux sept questions suivantes avec un maximum de trois lignes de justification par question. Les mauvaises réponses auront des points négatifs mais le total sera positif ou nul.

1. Si $P_1 \in \mathsf{P}$, a-t-on $P_2 \in \mathsf{P}$?

   Non. Comme $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$ tout problème polynomial peut être réduit à tout problème NP-complet.

   ---
2. Si $P_2 \in \mathsf{P}$, a-t-on $P_1 \in \mathsf{P}$?

   Oui, puisque pour trouver la réponse à une donnée de P_1 il suffit de faire la transformation en une donnée de P_2 (temps polynomial), puis résoudre le problème ainsi obtenu.

   ---
3. Si P_1 est NP-complet, P_2 est-il NP-complet ?

   Non. Cela prouve uniquement que P_1 est NP-difficile.

   ---
4. Si P_2 est NP-complet, P_1 est-il NP-complet ?

   Non. Tout problème dans NP(et donc dans P) peut être réduit à tout problème NP-complet.

   ---
5. Si on connaît une réduction polynomiale de P_2 en P_1, P_1 et P_2 sont-ils NP-complets ?

   Non. Par contre cela prouve qu'ils sont polynomialement équivalents.

   ---
6. Si P_1 et P_2 sont NP-complets, existe-t-il une réduction polynomiale de P_2 en P_1 ?

   Oui. Tout problème dans NP(et donc dans P) peut être réduit à tout problème NP-complet.

   ---
7. Si $P_1 \in \mathsf{NP}$, P_2 est-il NP-complet ?

   Non. P_1 peut être polynomial et P_2 aussi...

   ---

2 Hamiltonisme dans les graphes bipartis

Énoncez le problème de la Chaîne hamiltonienne dans un graphe biparti ayant un nombre impair de sommets (CHHGBI) et le problème du Cycle hamiltonien dans un graphe biparti (CHGB). Donnez une réduction polynomiale de CHHGBI en CHGB.

Rappel : un graphe $G(V,E)$ est biparti si l'ensemble des sommets V peut être partitionné en deux ensembles V_1 et V_2 et toutes les arêtes ont une extrémité dans V_1 et une dans V_2.

Nom : Chaîne hamiltonienne dans un graphe biparti ayant un nombre impair de sommets (CHHGBI)
Instance : $G(V_1,V_2,E)$ un graphe biparti tel que $|V_1|+|V_2|$ est impair, donné sous forme de liste de voisins.
Question : Est-ce que G admet une chaîne hamiltonienne ?

Nom : Cycle hamiltonien dans un graphe biparti (CHGB)
Instance : $G(V_1,V_2,E)$ un graphe biparti, donné sous forme de liste de voisins.
Question : Est-ce que G admet un cycle hamiltonienne ?

Tout d'abord il est naturel de se poser la question pourquoi un nombre impair de sommets ? On remarque facilement que dans toute chaîne (et cycle) d'un graphe biparti on alterne les sommets de V_1 et les sommets de V_2. Ainsi une chaîne contient soit le même nombre de sommets de chaque côté (si ses deux extrémités sont de côtés différents) soit un sommet de lus d'un côté de l'autre (si ses deux extrémités sont de ce côté). Ainsi une condition nécessaire (mais insuffisante) pour l'existence d'une chaine hamiltonienne dans un graphe biparti $G(V_1,V_2,E)$ est $-1 \leq |V_1| - |V_2| \leq 1$. Et si le nombre de sommets est impaire alors $|V_1| - |V_2|$ vaut 1 ou -1. De même, une condition nécessaire (mais insuffisante) pour qu'il existe un cycle hamiltonien dans un graphe biparti est $|V_1| = |V_2|$.

La transformation : Si on a $|V_1| = |V_2| + 1$ on ajoute un nouveau sommet à V_2 relié à tous les sommets de V_1. Cette transformation est polynomiale. Ainsi si G admet une chaîne hamiltonienne, ses extrémités sont dans V_1 (comme mentionné ci-dessus) et on obtient un graphe admettant un cycle hamiltonien. Et si on a un cycle hamiltonien dans le graphe obtenu, alors il y avait une chaîne hamiltonienne dans G.

---

3 Machine de Turing

Soit L le langage $\{b^n\ (ab)^{2n} \mid n \geq 0\}$. Décrivez (sans entrer dans les détails de la table de transitions ou d'un schéma) une Machine de Turing déterministe *efficace* à une bande qui accepte les mots de L. Quel est la complexité de votre machine?

Une solution simple consiste à ajouter d'abord un séparateur c pour avoir un mot de $\{b^n\ c\ (ab)^{2n} \mid n \geq 0\}$. Ensuite en un passage un marque un coupe ab sur deux, tout en vérifiant qu'on termine avec un nombre paire. Les lettres non marquées forment un mot $\{b^n\ c\ (ab)^n \mid n \geq 0\}$. Ensuite on peut marquer d'abord un b sur deux dans la "première partie" et puis un sur deux pour les ab dans la "deuxième partie", en s'assurant de nouveau de terminer avec la même parité des deux cotés. Ainsi les lettres non marquées forment un mot de $\{b^n\ c\ (ab)^n \mid n \geq 0\}$, on peut donc recommencer jusqu'à ce que il ne reste non marqué qu'un c. On peut donc dire que qu'à chaque aller-retour (à part l'initialisation) à chaque passage le nombre de b est divisé par deux, donc on fait $\log n$ fois aller-retour, donc si on a un mot de L de longueur N alors la complexité en cas d'acceptation sera $O(N \log N)$.

---

4 Ensembles disjoints

Étant donnés un ensemble E et une liste de m sous-ensembles S_1, S_2, $\ldots$,S_m et un entier k on se demande s'il y a k ensembles dans liste qui sont deux à deux disjoints. Énoncez le problème comme un problème de décision et prouvez que c'est NP-complet.

Tout d'abord l'énoncé du problème :

Nom : Ensembles disjoints (SP - set packing)
Instance : E un ensemble fini, k un entier, S_1, S_2, $\ldots$,S_m des sous-ensembles de E.
Question : Existent-t-il k sous-ensembles S_{i_1}, S_{i_2}, $\ldots$,S_{i_k} deux à deux disjoints.

Pour montrer que le problème est dans NP, il suffit de donner une machine non-déterministe M qui accepte les données.

Dans un premier temps la machine va constituer de manière Par la suite il suffit de vérifier que cette liste est de longueur au moins k, et elle que les ensembles correspondants sont deux à deux disjoints.

Pour la NP-difficulté il suffit de réduire le problème STABLE à SP. Soit G un graphe, avec les sommets s_1, s_2, $\ldots$,s_n. On construit une donnée de SP : L'ensemble E sera l'ensemble des arêtes et à chaque sommet s_i on associe le sous-ensemble S_i des arêtes incidentes à s_i. Ainsi un stable dans G donne lieu à un ensemble de sous-ensembles deux à deux disjoints.

Une autre réduction consiste à réduire le problème 3DM à SP. Il suffit de remarquer que 3DM est le cas particulier de SP où E est l'union de trois ensembles de même cardinalité p avec les sous-ensembles S_i qui contiennent tous un élement de chacun des trois ensembles et $k = p$.
