NOM, Prénom :	***STROMBONI Jean-Paul***
Groupe de TD :	***Correction***

Lire attentivement les consignes suivantes :

1. **l'épreuve dure 2 heures ; les documents autorisés sont les** polycopiés de cours, les comptes-rendus de travaux dirigés, et les questionnaires de contrôle continu. **Calculatrices autorisées, téléphones mobiles et ordinateurs portables proscrits**.
2. **on répond sur cette feuille dans la zone laissée libre sous la question :**
   1. les réponses doivent tenir dans les zones prévues à cet effet (on peut écrire sur la dernière page, **en ajoutant un renvoi clair à la question concernée).**
   2. les réponses doivent correspondre aux questions posées, elles doivent être lisibles.
   3. le barème indiqué en gris à gauche est seulement indicatif.

Note sur 20 :

Remarques du correcteur :

I. Exercice : compression du signal par sous-échantillonnage (6.5 pt) :

Barème	Répondre aux questions dans l'espace laissé libre en dessous
0.5pt	**Définir en une phrase la notion de taux de compression d'un signal audio :**
	Le taux de compression est le rapport de la taille du signal (respectivement du bit rate) avant compression à la taille (ou respectivement au bit rate) du signal après compression
0.5pt	**Soit un signal audio s de taille 44Mo et de bit rate 352kbps qui compressé voit son bit rate chuter à 44kbps. Quelle est la durée du signal audio s avant compression ?**
	Le bit rate *352000 bps* multiplié par la durée D du signal exprimée en secondes fournit la tailledu signal en bits, puisque la taille vaut *44 Mo* (Mo = mégaoctet), $D = 10^3$ secondes, c'est à dire 16 minutes et 40 secondes. Ou plutôt $D = 1024s$ si on tient compte de $1koctet = 1024octets$
0.5pt	**Quelle est la taille du signal audio compressé ?**
	La taille du signal compressé est de : $44Mo \times \frac{44kbps}{352kbps} = 5{,}5Mo$
0.5pt	**Que vaut le taux de compression C du signal s ?**
	Le taux de compression vaut $C = \frac{352000}{44000} = 8$

0.5pt	**Définir en une phrase la notion de sous échantillonnage d'un signal audio dans un rapport M :**
	Sous-échantillonner un signal dans un rapport M consiste à conserver un échantillon tous les M échantillons successifs, et don à supprimer les M-1 autres échantillons, c'est donc un moyen de compression du signal dans un rapport M
0.5pt	**Le signal audio** $s_n = s(nT_e) = 0.5\cos(1000\pi nT_e)$ **, avec** $T_e = 1/8000s$ **et n entier,** $n \in [0,1023]$ **, est sous échantillonné dans un rapport** $M = 3$ **dans le signal ssech. Calculer la fréquence d'échantillonnage de ssech, que l'on notera** f_e'
	Le rapport *M=3* implique que l'on conserve un échantillon sur trois, le laps de temps qui s'écoule entre deux échantillons devient donc *3*Te*, par conséquent la fréquence d'échantillonnage du signal sous échantillonné est *fe/3*
0.5pt	**Etablir si la contrainte de Shannon est respectée pour le signal sous-échantillonné**
	La fréquence du signal est *f0=500Hz*, elle est inférieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage *fe/3* du signal sous échantillonné, soit *f0 < fe/6*, donc la contrainte de Shannon est respectée.
0.5pt	**Quel est le taux de compression appliqué au signal s pour créer ssech?**
	C'est donc un taux de compression de 3 environ
1.5pt	**On sous-échantillonne un signal sinusoïdal de fréquence** f_0 **échantillonné à la fréquence** f_e **, en respectant la contrainte de Shannon afin de compresser ce signal. Exprimer en fonction de** f_0 **et de** f_e **le taux de compression maximum prévisible.**
	La fréquence d'échantillonnage fe devient fe/M, avec M entier, si M est le taux de compression. La contrainte de Shannon impose que f0< fe/(2M) Donc, le taux de compression maximum atteignable est M < fe/(2*f0), c'est le plus grand entier inférieur à fe/(2*f0), M = int(fe/(2*f0)) $C = \text{int}(\frac{f_e}{2f_0})$
0.5pt	**Quel taux de compression peut-on prédire si** $f_0 = 440Hz$ **et** $f_e = 8000Hz$ **?**
	On applique la formule établie, c'est $C = \text{int}(\frac{8000}{880}) = 9$
0.5pt	**Discuter le cas où** $f_0 = 4400Hz$ **et** $f_e = 8000Hz$ **:**
	Dans ce cas, la contrainte de Shannon n'est pas vérifiée, et rien ne sert de sous échantillonner le signal s, car la méthode vue en cours avec le filtre de Shannon est incapable de le reconstruire (impossible d'être certain de la fréquence du signal)**.**

II. Exercice : le jeu des neuf erreurs avec les scripts Matlab (6.5 pt) :

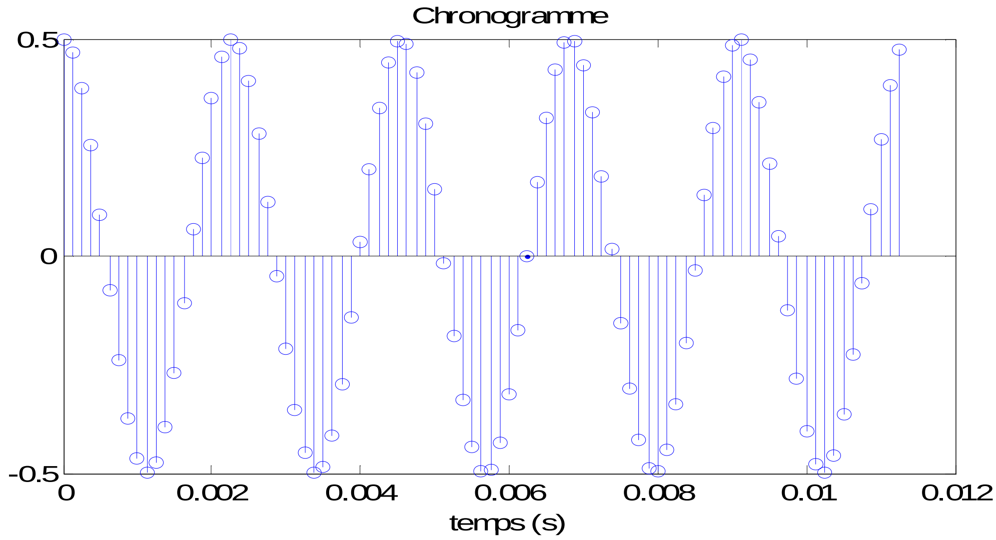
Neuf erreurs se sont glissées dans le script suivant, à raison d'une erreur ou plus par ligne :

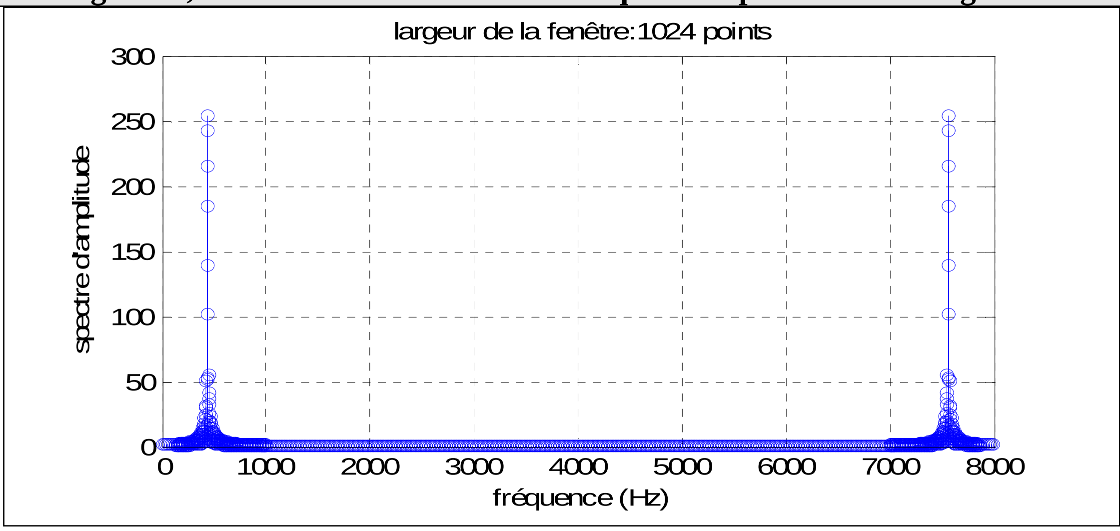
1. signaler sur le script les erreurs détectées en leur attribuant un numéro de 1 à 7,
2. corriger ensuite les erreurs détectées dans le tableau au bas de cette page

```
fe=8000 Hz;   (1)
f0=440 ;
a0= .5;
t=[0:1/fe:5/F0]; (2)
s=a0cos(2*pi*f0*t)  (3)
stem(t,s)
title(Chronogramme)    (4)
xlabel("temps (s)")    (5)
ylabel(['s(0)', num2str((s(0)))   (6) et (7)
figure(2)
N=1024
fk= [0:N]*fe/N;
stem(fk,fft(s(1:N)))    (8) et (9)
```

Barème	Répondre à chaque question dans la case laissée vide en dessous
0.5pt	**Correction de l'erreur 1:**
	fe=8000 ; % Hz
0.5pt	**Correction de l'erreur 2:**
	T=[0 :1/fe :5/f0] ;
0.5pt	**Correction de l'erreur 3:**
	s=a0*cos(2*pi*f0*t) ;
0.5pt	**Correction de l'erreur 4:**
	title('Chronogramme')
0.5pt	**Correction de l'erreur 5:**
	xlabel('temps (s)')
0.5pt	**Correction de l'erreur 6 et de l'erreur 7 :**
	`ylabel(['s(0)', num2str((s(1))])`
0.5pt	**Correction de l'erreur 8:**

	`fk=[0:N-1]*fe/N; assure un vecteur de même taille que abs(fft(s(1 :N)))`
	`stem(fk,abs(fft(s(1:N))))`
	
	En plus, il n'y a pas 1024 échantillons dans s, d'où une dixième erreur.

<table>
<tr><td></td><td>En admettant que le script est corrigé comme vous l'avez proposé ci-dessus :</td></tr>
<tr><td>0.5pt</td><td>Quel est le résultat donné par l'instruction size(t) ?</td></tr>
<tr><td></td><td>size(t) donne 1 et K, nombre de lignes et nombre de colonnes de t, avec
$K = \text{int}(\frac{5\times 8000}{440})+1$, Matlab affiche ici : 1 91</td></tr>
<tr><td>0.5pt</td><td>Quel est le résultat donné par l'instruction length(fk) ?</td></tr>
<tr><td></td><td>length(fk)=1024 (si on a corrigé fk), 1025 sinon</td></tr>
<tr><td>1pt</td><td>En exploitant le chronogramme ci-dessous tracé par Matlab, retrouver toute l'information que vous pourrez sur le signal s :</td></tr>
<tr><td></td><td>

Information sur s :
signal cosinus d'amplitude a0=0,5 et de fréquence d'un peu moins de 500Hz, car la période fait un peu plus de 2 ms (2,2 ms donne 452,5 Hz environ).</td></tr>
<tr><td>1pt</td><td>En exploitant le spectre d'amplitude ci-dessous, tracé par Matlab pour une fenêtre rectangulaire, retrouver toute l'information que vous pourrez sur le signal s :</td></tr>
<tr><td></td><td>

Information retrouvée sur s :
L'amplitude a0 vérifie $\frac{a_0}{2} \approx \frac{256}{1024}$, et la fréquence d'échantillonnage vaut 8000 Hz.
Dans la mesure où la contrainte de Shannon est respectée, on lit la fréquence f0 du signal qui vaut environ 440 Hz.</td></tr>
</table>

III. Exercice : le terme exponentiel de la TFD (7 pt) :

On étudie la quantité $w_N^{nk} = e^{2i\pi nk/N}$, où k, n et N sont des entiers naturels :

Barème	On demande de répondre dans l'espace vide laissé sous les questions :
0.5pt	**Préciser ci-dessous les parties réelle et imaginaire pure de w_N^{nk}**
	$w_N^{nk} = e^{2i\pi nk/N} = \underbrace{\cos(2\pi nk/N)}_{\text{partie réelle}} + i\underbrace{\sin(2\pi nk/N)}_{\text{Partie imaginaire pure}}$
0.5pt	**Que valent le module et l'argument de w_N^{nk} ?**
	Le module vaut *1*, et l'argument vaut $2\pi nk/N$ en radians
0.5pt	**Que vaut la quantité complexe conjuguée de w_N^{nk} ?**
	Dans la quantité complexe conjuguée de w_N^{nk}, la partie réelle reste identique et la partie imaginaire pure change de signe, c'est donc que w_N^{nk} devient $w_N^{-nk} = e^{-2\pi ink/N}$
0.5pt	**Comparer $w_N^{(n+N)k}$ et w_N^{nk}**
	$w_N^{(n+N)k} = w_N^{nk} \times w_N^{Nk} = w_N^{nk}$ **, car** $w_N^{Nk} = e^{2ik\pi} = 1$, si k est un entier
0.5pt	**Comparer w_N^{nk} et $w_N^{(N-n)k}$**
	$w_N^{(N-n)k} = w_N^{Nk} \times w_N^{-nk} = w_N^{-nk}$, l'une est la quantité complexe conjuguée de l'autre
1pt	**Calculer partie réelle et la partie imaginaire pure de $x_n = w_N^{nk} + w_N^{-nk}$**
	$x_n = w_N^{nk} + w_N^{-nk} = 2\times\cos(2\pi nk/N)$ les parties réelles s'ajoutent et les parties imaginaires pures se compensent exactement xn est égal à sa partie réelle, et la partie imaginaire est nulle.

1pt	**Exprimer la quantité** $\cos(2\pi n_0 k/N)$ **en fonction de** $w_N^{n_0 k}$
	$$\cos(2\pi n_0 k/N) = \frac{e^{2\pi i n_0 k/N} + e^{-2\pi i n_0 k/N}}{2} = \frac{w_N^{n_0 k} + w_N^{-n_0 k}}{2}$$
1pt	**Que vaut la quantité** $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{-nk}$ **en fonction de** N **et de** k **?**
	$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{-nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^{-n}$$ **avec** $\alpha = e^{2\pi i k/N}$ $$X_k = \frac{1-\alpha^{-N}}{1-\alpha^{-1}} = \frac{1-e^{-2i\pi k}}{1-e^{2i\pi k/N}} = e^{-i\pi(k-\frac{k}{N})} \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k/N)}$$
1.5pt	**Déduire des résultats précédents la valeur de** $Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi n k_0/N) w_N^{-nk}$
	En appliquant la formule $\cos(2\pi n k_0/N) = \frac{w_N^{nk_0} + w_N^{-nk_0}}{2}$, il vient $$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi n k_0/N) w_N^{-nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{w_N^{nk_0} + w_N^{-nk_0}}{2} \times w_N^{-nk}$$ $$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{w_N^{nk_0} w_N^{-nk} + w_N^{-nk_0} w_N^{-nk}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{N-1} w_N^{-n(k-k_0)} + \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{-n(k+k_0)}\right)$$ **Soit en utilisant le résultat obtenu pour le Xk précédent :** $$Y_k = \left(X_{k-k_0} + X_{k+k_0}\right)/2$$