

# Simplification logique par l'algorithme de Quine-MacCluskey

D'après le cours de B. Miramond  
Polytech Nice Sophia Antipolis

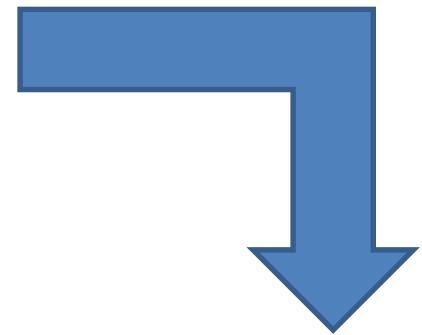
# Exemple de fonction booléenne

a	b	c	s
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

# Ecriture de la fonction booléenne : table de vérité = forme normale disjonctive

a	b	c	s
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

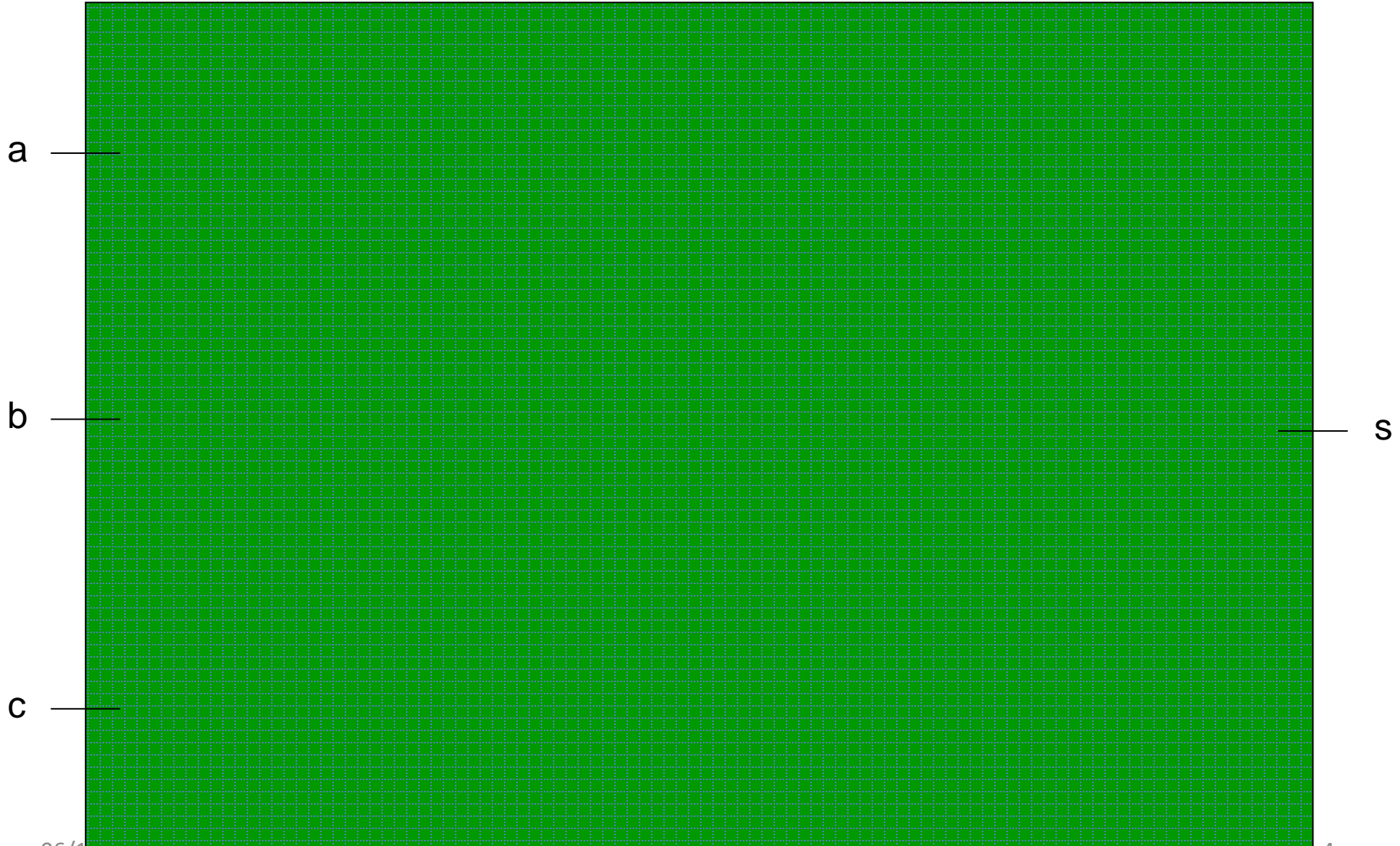
$\bar{a}bc$   
 $a\bar{b}\bar{c}$   
 $abc$   
 $abc$



Forme somme de produits :  $s = \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c} + abc$

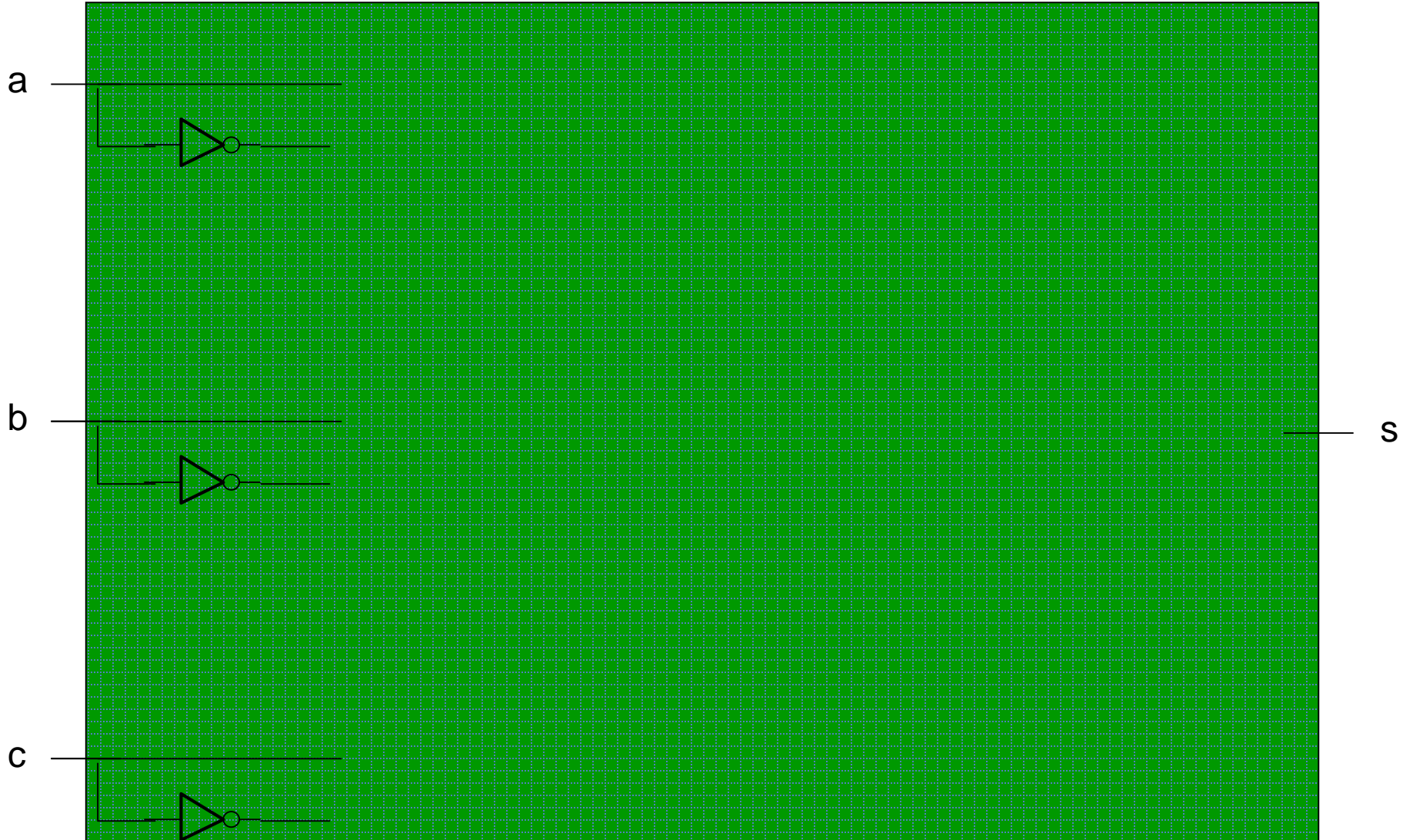
# Implantation matérielle de

$$s = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$



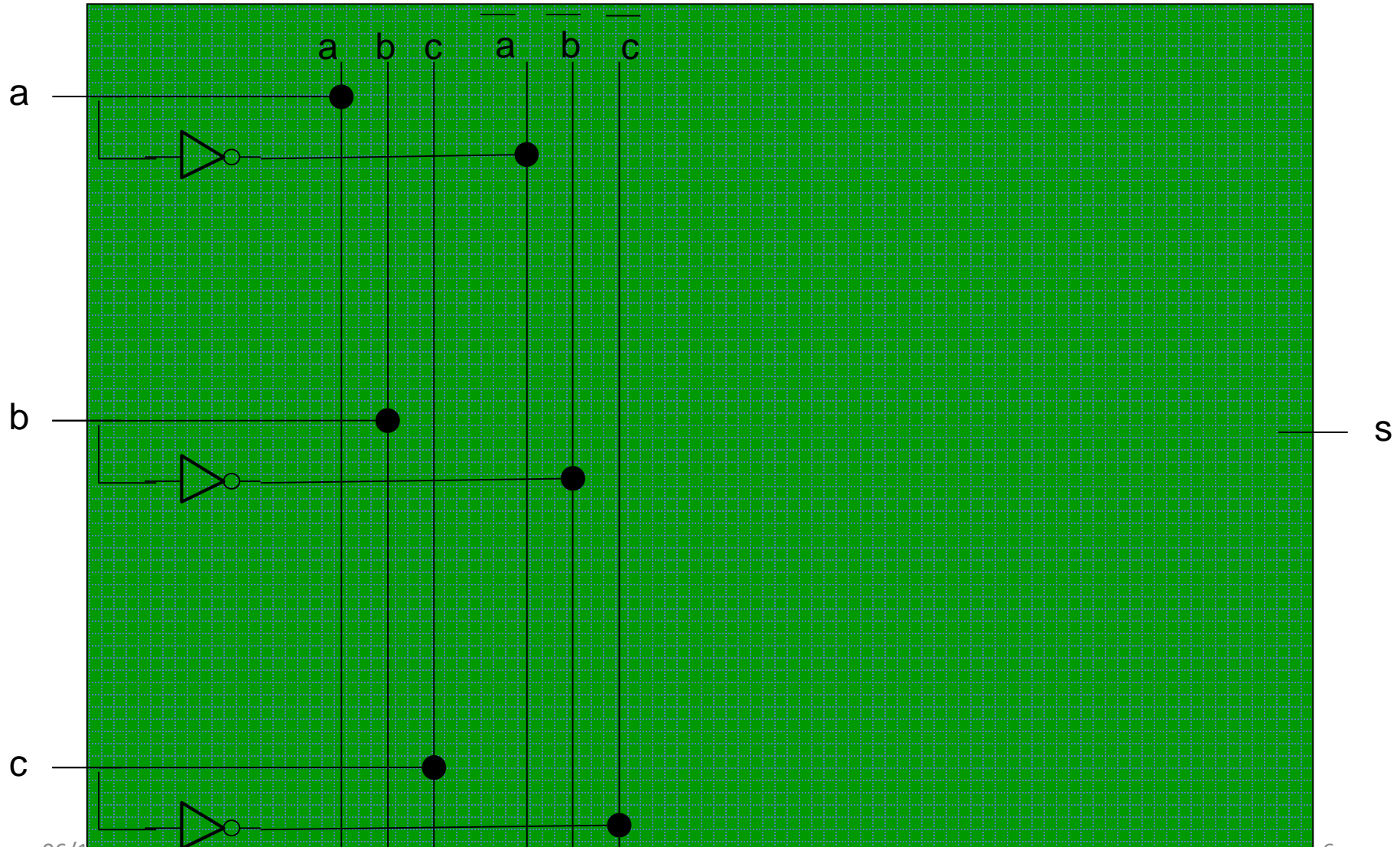
# Implantation matérielle de

$$s = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$



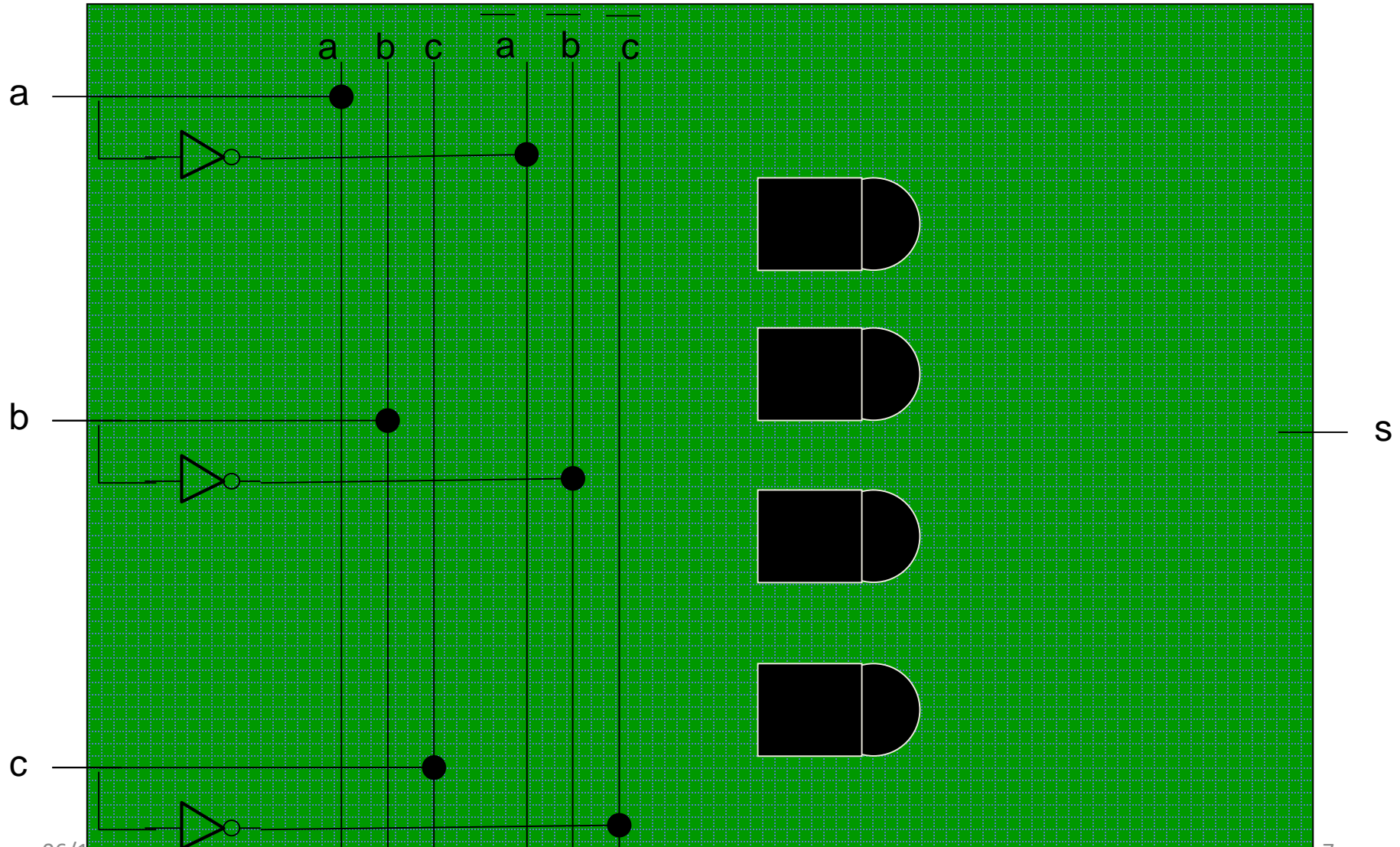
# Implantation matérielle de

$$s = \overline{a}bc + a\overline{b}c + ab\overline{c} + abc$$



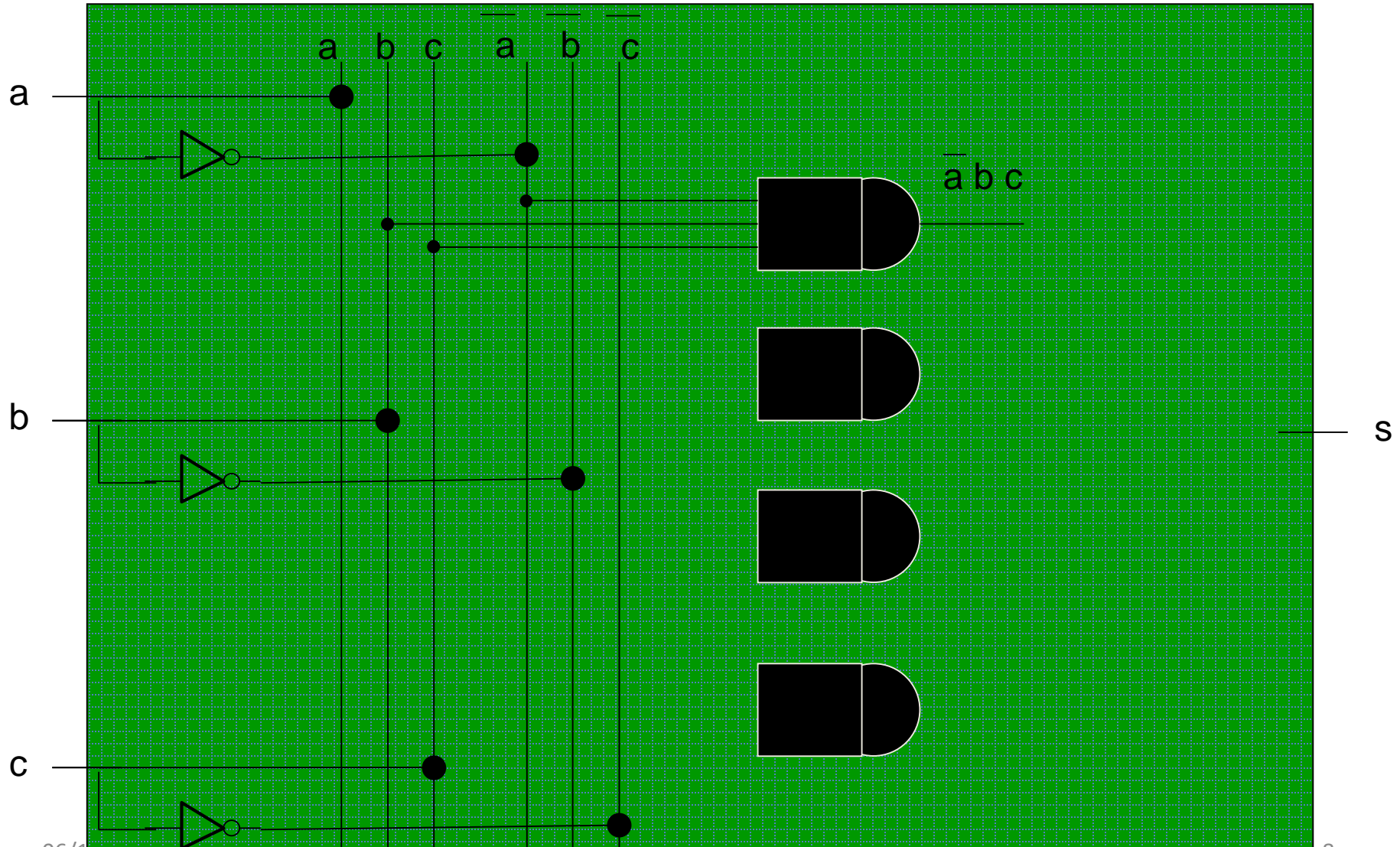
# Implantation matérielle de

$$s = \overline{a}bc + a\overline{b}c + ab\overline{c} + abc$$



# Implantation matérielle de

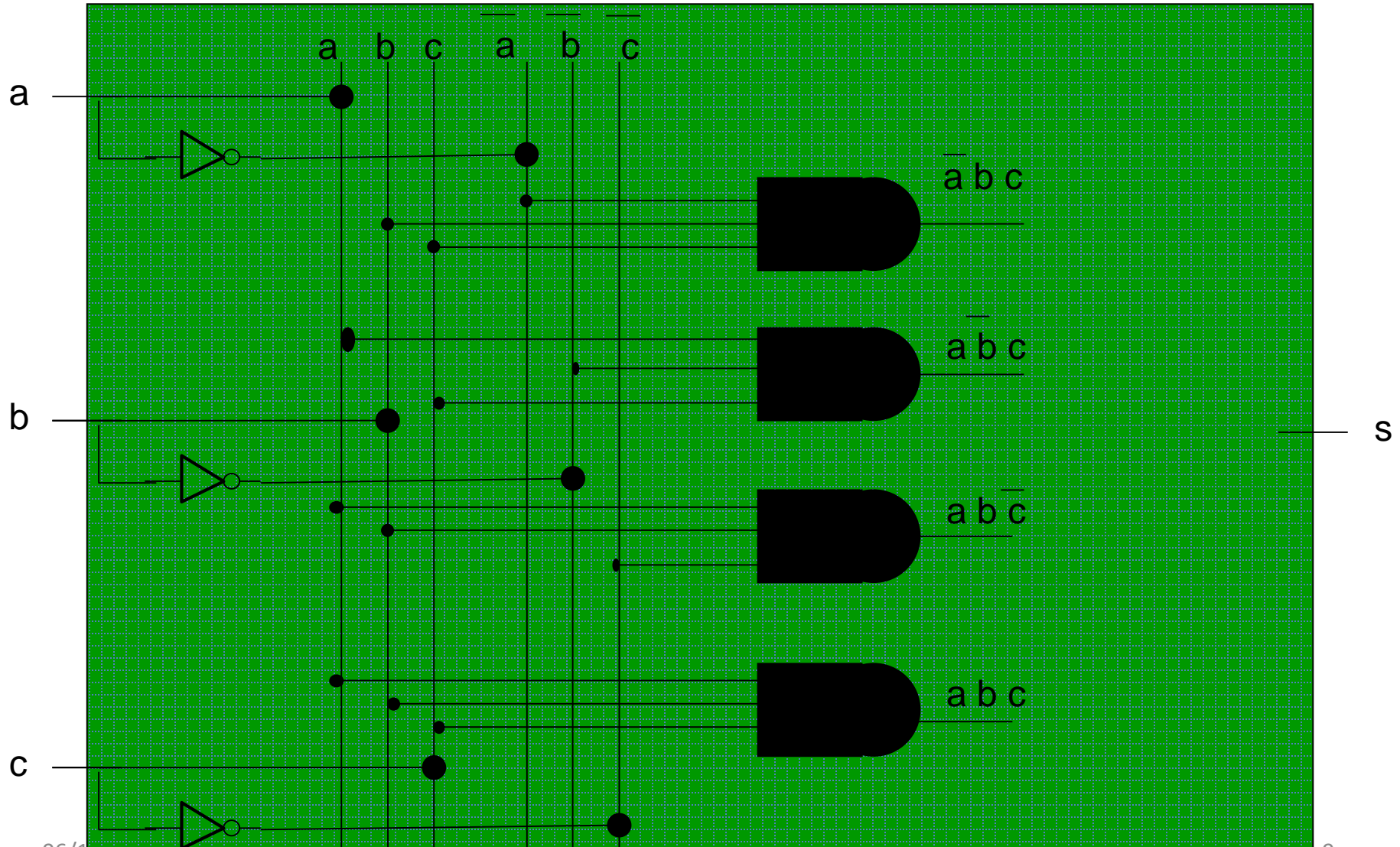
$$s = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$





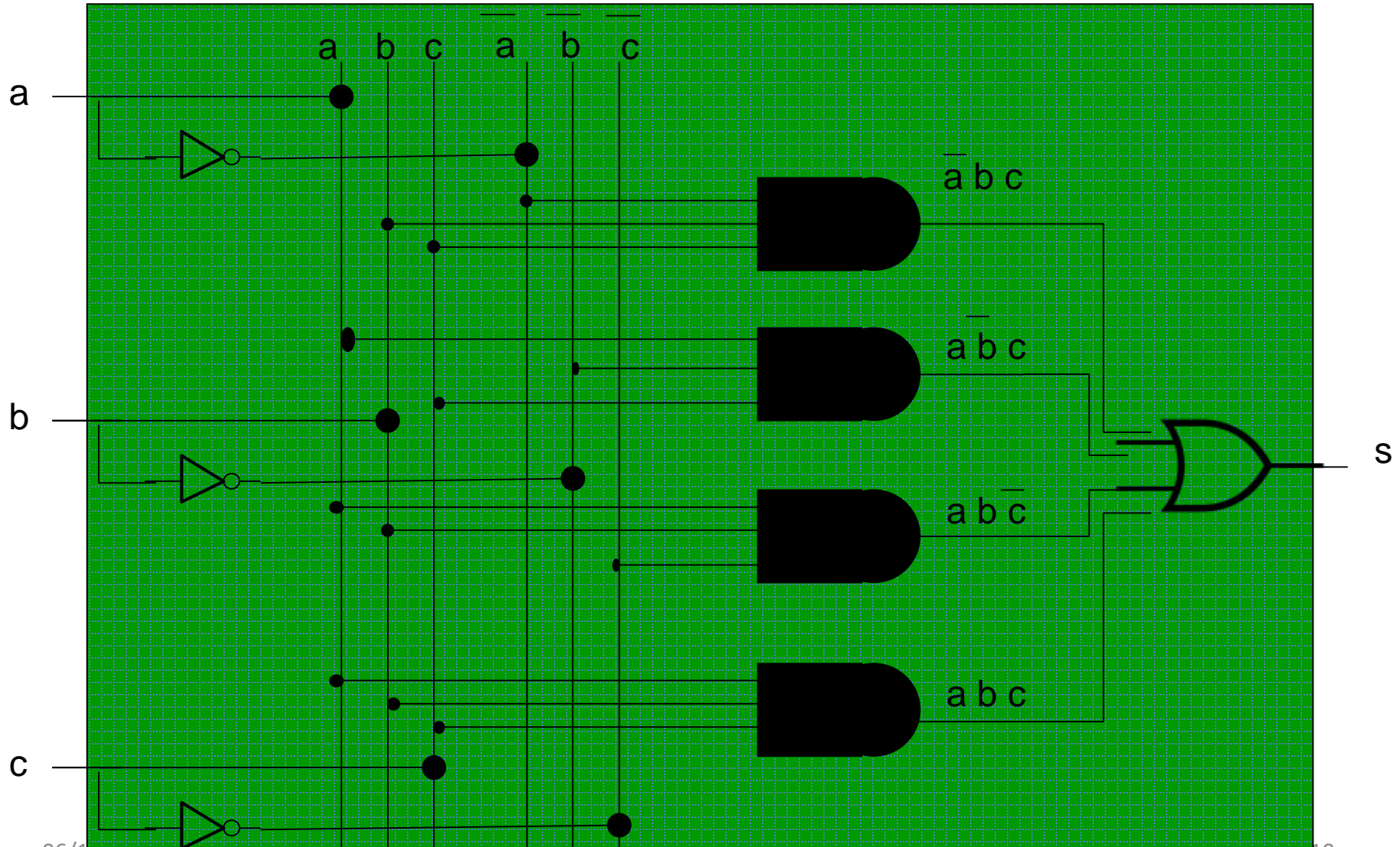
# Implantation matérielle de

$$s = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$



# Implantation matérielle de

$$s = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$



# Implantation d'une fonction booléenne

1. Ecrire l'équation de la fonction à partir de sa table de vérité
2. Réaliser l'inversion de toutes les variables d'entrées pour disposer de leur complément
3. Construire une porte ET pour chacun des termes égal à 1 dans la colonne de sortie
4. Etablir le câblage des portes ET avec les entrées
5. Réunir l'ensemble des portes ET vers une porte OU dont la sortie est le résultat de la fonction

# Implantation d'une fonction booléenne

**Objectif** : réduire la taille de l'expression booléenne

Taille de l'expression = nombre d'opérateurs et/ou utilisés

**Méthode 1** : tables de **Karnaugh**

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Table de Karnaugh](https://fr.wikipedia.org/wiki/Table_de_Karnaugh)

**Méthode 2** : algorithme de **Quine-Mac Cluskey**

[https://en.wikipedia.org/wiki/Quine%E2%80%93McCluskey algorithm](https://en.wikipedia.org/wiki/Quine%E2%80%93McCluskey_algorithm)

# ***Simplification d'expressions logiques***

- Il n'est pas toujours évident de savoir si on a atteint une expression logique minimale
- La méthode de Karnaugh le permet mais pour un nombre réduit de variables (au plus 4 ou 5)
- L'algorithme de Quine-Mac Cluskey :
  - fonctionne quelque soit le nombre de variables
  - est programmé.

Par exemple :

<https://www.mathematik.uni-marburg.de/~thormae/lectures/ti1/code/qmc/>

# ***Vocabulaire***

- **Mintermes, termes ou impliquant** : ce sont les produits logiques d'une expression F
  - $F = \bar{X} \bar{Y} Z + \bar{X} Y Z + X \bar{Y} Z + X Y Z + \bar{X} Y \bar{Z}$
- Un terme que l'on ne peut simplifier en supprimant une de ses variables et qui implique la fonction logique considérée est dit **impliquant premier**
  - $F = Z + \bar{X} Y$

# ***Principe de la méthode de QMC***

- Démarrer par l'expansion en mintermes de la fonction  $F$  à minimiser
- Trouver la liste des impliquants premiers
- Sélectionner un ensemble minimal d'impliquants premiers

# Algorithme

1. Lister tous les mintermes de  $f$  dans une table
  - Les grouper par le nombre de 1 dans chaque minterme
2. Comparer les termes d'un groupe avec le groupe adjacent pour essayer de les combiner
  - Créer une nouvelle table avec les combinaisons trouvées  
exemple :  $0100 + 0101 = 010-$
  - Rayer chaque minterme utilisé pour la combinaison et passer à la table suivante
3. Répéter la procédure dans la nouvelle colonne jusqu'à ce qu'il n'y ai plus de simplification possible
4. Les ***impliquants premiers*** correspondent aux mintermes non rayés
5. Sélectionner les ***impliquants premiers essentiels***
6. Choisir les impliquants restant formant un ensemble minimal



# Représentation d'une fonction logique.

## Identification des termes actifs

w	x	y	z		f	
0	0	0	0		0	
0	0	0	1		0	
0	0	1	0		1	- 2
0	0	1	1		0	
0	1	0	0		1	- 4
0	1	0	1		1	- 5
0	1	1	0		1	- 6
0	1	1	1		1	- 7
1	0	0	0		0	
1	0	0	1		1	- 9
1	0	1	0		0	
1	0	1	1		0	
1	1	0	0		0	
1	1	0	1		1	- 13
1	1	1	0		1	- 14
1	1	1	1		1	- 15

		y z				
		\	00	01	11	10
w	x		+---+---+---+---+			
	00					1
		+---+---+---+---+				
	01		1	<b>1</b>	1	<b>1</b>
		+---+---+---+---+				
	11			1	1	1
		+---+---+---+---+				
	10			<b>1</b>		
		+---+---+---+---+				

$$\sum(2,4,5,6,7,9,13,14,15)$$

Somme de termes

# Impliquants – étape 1

2		0	0	1	0
---	--	---	---	---	---

4		0	1	0	0
---	--	---	---	---	---

-----

5		0	1	0	1
---	--	---	---	---	---

6		0	1	1	0
---	--	---	---	---	---

9		1	0	0	1
---	--	---	---	---	---

-----

7		0	1	1	1
---	--	---	---	---	---

13		1	1	0	1
----	--	---	---	---	---

14		1	1	1	0
----	--	---	---	---	---

-----

15		1	1	1	1
----	--	---	---	---	---

# Trouver les impliquants premiers

## Etape 2

2		0	0	1	0	√
4		0	1	0	0	√
-----						
5		0	1	0	1	√
6		0	1	1	0	√
9		1	0	0	1	√
-----						
7		0	1	1	1	√
13		1	1	0	1	√
14		1	1	1	0	√
-----						
15		1	1	1	1	√

(2, 6)		0	–	1	0
(4, 5)		0	1	0	–
(4, 6)		0	1	–	0
-----					
(5, 7)		0	1	–	1
(5, 13)		–	1	0	1
(6, 7)		0	1	1	–
(6, 14)		–	1	1	0
(9, 13)		1	–	0	1
-----					
(7, 15)		–	1	1	1
(13, 15)		1	1	–	1
(14, 15)		1	1	1	–

# Trouver les impliquants premiers

## Etape 3

(2, 6)		0	–	1	0		(4, 5, 6, 7)		0	1	–	–
(4, 5)		0	1	0	–	√	(4, 6, 5, 7)		0	1	–	–
(4, 6)		0	1	–	0	√	(5, 7, 13, 15)		–	1	–	1
-----							(5, 13, 7, 15)		–	1	–	1
(5, 7)		0	1	–	1	√	(6, 7, 14, 15)		–	1	1	–
(5, 13)		–	1	0	1	√	(6, 14, 7, 15)		–	1	1	–
(6, 7)		0	1	1	–	√						
(6, 14)		–	1	1	0	√						
(9, 13)		1	–	0	1							
-----												
(7, 15)		–	1	1	1	√						
(13, 15)		1	1	–	1							
(14, 15)		1	1	1	–	√						

# *Trouver les impliquants premiers*

## Etape 3

(4, 5, 6, 7)		0	1	–	–
(4, 6, 5, 7)		0	1	–	–
(5, 7, 13, 15)		–	1	–	1
(5, 13, 7, 15)		–	1	–	1
(6, 7, 14, 15)		–	1	1	–
(6, 14, 7, 15)		–	1	1	–

Etape 4 : les impliquants premiers

(2,6) (9,13) (4,5,6,7)

(5,7,1,15) (6,7,14,15)

$$\bar{a}c\bar{d} + a\bar{c}d + \bar{a}b + bd + bc$$

# Sélectionner les impliquants premiers *essentiels*

## Etape 5

$$\bar{a}c\bar{d} + a\bar{c}d + \bar{a}b + bd + bc$$

Mintermes	2	4	5	6	7	9	13	14	15
→ 2,6	#			X					
→ 9,13						#	X		
→ 4,5,6,7		#	X	X	X				
5,7,13,15			X		X		X		X
→ 6,7,14,15				X	X			#	X

# premiers *essentiels*

Etape 6 :

couverture ou pas de tous les  
mintermes de l'expression initiale ?

Mintermes	2	4	5	6	7	9	13	14	15
-> 2,6	#			X					
-> 9,13						#	X		
-> 4,5,6,7		#	X	X	X				
5,7,13,15			X		X		X		X
-> 6,7,14,15				X	X			#	X
Couvert :	O	O	O	O	O	O	O	O	O

Tous les mintermes sont couverts par les impliquants  
premiers essentiels, donc (unique ici) expression  
minimale :

$$\bar{a}c\bar{d} + a\bar{c}d + \bar{a}b + bc$$

***Et pour voir comment ça marche***

<https://www.mathematik.uni-marburg.de/~thormae/lectures/ti1/code/qmc/>