Logique propositionnelle

- ***Syntaxe des formules logiques propositionnelles*:** un ensemble de règles à respecter pour écrire/construire toutes et uniquement les ***formules logiques propositionnelles***
- ***Sémantique d'une formule propositionnelle*:** sa table de vérité

Syntaxe

Les symboles (l'alphabet) utilisés pour écrire les formules propositionnelles:

- Deux constantes VRAI et FAUX (ou 1 et 0 ou top et bottom)
- Un ensemble de symboles appelés ***propositions*** **:** P, Q, R, ...
- Les ***connecteurs logiques :***
  $\neg$ (non), $\wedge$ (et), $\vee$ (ou), $\Rightarrow$ (implication), $\Leftrightarrow$ (équivalent)
- Les ***parentheses*** pour structurer les formules : ( )

Définition inductive d'ensemble

- L'ensemble *défini inductivement* par la ***base*** B et les ***constructeurs*** Ω est le plus petit ensemble (au sens de l'inclusion) qui contient B et qui est stable par les constructeurs
- C'est aussi l'union pour tous les entiers i des E_i où E_0=B et E_{i+1}= $\Omega(E_i)$

L'ensemble des formules propositionnelles est défini inductivement

L'objet syntaxique formule propositionnelle

Les *formules propositionnelles* sont définies inductivement par :

Base : toute *Proposition* est une formule

Constructeurs :

- Si ϕ et ψ sont des formules alors $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \Rightarrow \psi)$, $(\phi \Leftrightarrow \psi)$ *sont des formules*
- *Si* ϕ est une formule alors $(\neg\phi)$ est une formule

Logique du 1^er^ Ordre

Syntaxe des formules logiques du 1er ordre **:**
un ensemble de règles à respecter pour écrire/construire toutes et uniquement les *formules logiques du 1er ordre*

Sémantique d'une formule logique du 1er ordre **:**
comment interpréter (donner une signification à) une *formule logique du 1er ordre*, et au final, une formule vaudra Vrai ou Faux

Syntaxe

Les symboles (l'alphabet) utilisés pour écrire les formules :

- Un ensemble de symboles appelés ***variables :*** x, y, z, x_1, x_2 …
- Deux symboles pour ***vrai et faux***
- Un ensemble de symboles appelés ***fonctions***

  d'arité (i.e nombre d' arguments) quelconque : f, g, h, f_1, f_2 …

  les fonctions 0-aires sont appelées ***constantes*** **:** a, b, c, a_1, a_2 …
- Un ensemble de symboles appelés ***prédicats***

  d'arité quelconque : p, q, r, p_1, p_2 …

  les prédicats 0-aires sont les ***propositions*** **:** P, Q, R, ...

Pour écrire la liste des arguments d'une fonction ou d'un prédicat, on utilise aussi **(** *et* **)** *et* **,**

- Les ***connecteurs logiques :***

  $\neg$ (non), $\wedge$ (et), $\vee$ (ou), $\Rightarrow$ (implication), $\Leftrightarrow$ (équivalent)

- Les ***quantificateurs :*** $\forall$ (universel), $\exists$ (existentiel)

- Les ***parentheses*** pour structurer les formules : ( )

L'objet syntaxique terme

• Les ***termes*** sont les objets auxquels on applique les prédicats, ils sont définis inductivement par :

Base : toute *variable* est un terme

Constructeurs : si *t1, t2,... tn*, sont des termes et *f* un symbole de fonction d'arité n, **alors** $f\,(t_1, t_2,... t_n)$ est un terme

Exemples : *f(x,g(x,y))* ou *sin(x)*

Remarque : toute *constante* est un terme

Remarque : Les termes ne comportent que des variables et des fonctions

L'objet syntaxique atome

- Les *formules logique du 1^er^ ordre* de **base** (au sens usuel et au sens des définitions inductives) sont les prédicat appliqués à des termes, ils sont appelés ***atomes*** et définis comme suit :

si $t_1, t_2, \ldots t_n$ sont des termes et *p* un symbole de prédicat d'arité n
alors $p(t_1, t_2, \ldots t_n)$ est un atome

Exemples : *p(x,f(y))* ou *amis(x,y)*

Remarque : toute *proposition* est un atome
Remarque : un atome comporte exactement un prédicat

L'objet syntaxique formule logique du 1er ordre

Les *formules logique du 1er ordre* sont définies inductivement par :

Base : tout *atome* est une formule

Constructeurs :

- Si ϕ et ψ sont des formules alors $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \Rightarrow \psi)$, $(\phi \Leftrightarrow \psi)$ *sont des formules*
- *Si* ϕ est une formule alors $(\neg\phi)$ est une formule
- Si ϕ est une formule et si x est une variable de ϕ alors $(\forall x\ \phi)$ et $(\exists x\ \phi)$ sont des formules

Les parenthèses

Dans la définition précédente, les formules sont complètement parenthésées, ce qui est vite très indigeste ….
On peut/va se passer partiellement du parenthésage :

- l'expression complète n'est pas parenthésée :
  $(p(x, a) \vee p(x,f(x))) \wedge Q$
  à la place de
  $((p(x, a) \vee p(x,f(x))) \wedge Q)$

- règles d'associativité du $\vee$ et du $\wedge$:
  $P \vee Q \vee R$
  à la place de
  $(P \vee Q) \vee R$

Les parenthèses suite

Les règles de priorité permettent également de réduire le nombre de parenthèses utilisées, mais ça peut rendre la lecture de la formule ambiguë, donc à utiliser avec parcimonie et à bon escient.

- règles de priorité : (par ordre décroissant)
  - la négation et les quantificateurs
  - et
  - ou
  - implique
  - équivalence

Les parenthèses suite suite

Par ailleurs, toujours pour (essayer de) rendre les expressions plus lisibles par un (éventuel) lecteur, on peut/va utiliser plusieurs jeux de parenthèses : ( ) , [ ] et { }

$[p(x, a) \vee p(x,f(x))] \wedge Q$

à la place de

$(p(x, a) \vee p(x,f(x))) \wedge Q$

Exemples

Avec les symboles suivants :

fonctions : f et g d'arité 1, a d'arité 0

prédicats : p, q et r d'arité 2, Q d'arité 0

Exemples de :

termes : a, f(a), f(g(a)), f(x), x, f(f(f(x)))

atomes : p(x, y), p(x,f(x)), q(a,g(f(x))), Q

formules :

$$[\, p(x, a) \vee p(x,f(x)) \,] \wedge Q$$

$$\exists x \, [\, p(x,f(x)) \Rightarrow q(a,g(f(x))) \,]$$

$$\forall x \, [\, \exists y \; r(a,f(y)) \Leftrightarrow (\neg \, p(x, a) \wedge q(a,a)) \,]$$

Exercice

fonctions : f et g d'arité 1, a d'arité 0

prédicats : p, q et r d'arité 2, Q d'arité 0

Les expressions suivantes sont-elles des formules du 1er ordre ?

- ϕ_1 : $\forall x \; (\; p \; (f(g(x)),a) \vee q(a) \;)$
- ϕ_2 : $\forall x \; [\forall y \; (\; f(x) \vee q(x,y) \;) \;]$
- ϕ_3 : $\forall x \; [\; (q \; (x,y) \vee Q \;)\wedge r(f(x),g(a)) \;]$
- ϕ_4: $\forall f \; (\forall x \; p(f(x),f(x)) \;)$

Quels sont les termes et les atomes dans les formules ci dessus ?

Appartenance à un ensemble

- Les formules de logique du premier ordre ne permettent pas d'utiliser la syntaxe $x \in E$, où E est un ensemble.
- Chaque fois que vous souhaiteriez le faire, vous devrez utiliser un prédicat e(x) qui sera vrai si et seulement si la variable x appartient à l'ensemble E.

Règles de réécriture

- Ce que vous écrivez d'habitude

$$\exists x \in E\ p(x)$$

doit être écrit

$$\exists x(e(x) \wedge p(x))$$

- Ce que vous écrivez d'habitude

$$\forall x \in E\ p(x)$$

doit être écrit

$$\forall x(e(x) \Rightarrow p(x))$$

Exercice

- Ecrire en utilisant la syntaxe de la logique du premier ordre l'équivalent de

$$(\forall x \in E (p(x) \wedge (\exists y \in F\ q(x, y))))$$

- $(\forall x \in E (p(x) \wedge (\exists y\ f(y) \wedge q(x, y))))$
- $(\forall x\ e(x) \Longrightarrow (p(x) \wedge (\exists y\ f(y) \wedge q(x, y))))$

Variables liées

On note *$V(\phi)$* l'ensemble des variables qui apparaissent dans ϕ.
Les variables ***liées*** sont les variables qui sont "quantifiées".

$BV(\phi)$ l'ensemble des ***variables liées*** (Bounded Variables) de ϕ est défini (inductivement) par :

- si ϕ est un atome alors $BV(\phi) = \varnothing$

- si ϕ est $(\varphi \text{ op } \omega)$ (op valant $\wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow$) alors $BV(\phi) = BV(\omega) \cup BV(\varphi)$
- si ϕ est $(\neg\varphi)$ alors $BV(\phi) = BV(\varphi)$
- si ϕ est $(\forall x\ \varphi)$ ou ϕ est $(\exists\ x\ \varphi)$ alors $BV(\phi) = BV(\varphi) \cup \{x\}$

Exemple

$\phi_1 : ((x = y) \vee (x > y)) : BV(\phi_1) = \varnothing$

$\phi_2 : \forall x\ (((y < x) \vee (y=x))) : BV(\phi_2) = \{x\}$

Variables libres

Les variables ***libres*** sont les variables qui ne sont pas “quantifiées”.

FV(ϕ) l’ensemble des ***variables libres*** (Free Variables) de ϕ est défini (inductivement) par :

- si ϕ est un atome alors $FV(\phi) = V(\phi)$
- si ϕ est $(\varphi \text{ op } \omega)$ (op valant $\wedge$ $\vee$ $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$) alors $FV(\phi) = FV(\omega) \cup FV(\varphi)$
- si ϕ est $(\neg\varphi)$ alors $FV(\phi) = FV(\varphi)$
- si ϕ est $(\forall x\ \varphi)$ ou ϕ est $(\exists x\ \varphi)$ alors $FV(\phi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$

Exemples

$\phi_1 : \forall x\ (\forall\ y\ ((p(x,y)))) :\ \ FV(\phi_1)=\varnothing$

$\phi_2 : \forall x\ ((q(x) \vee p(x,y))) : FV(\phi_2)=\{y\}$

Exemples

- $\phi_1 : (p\ (x, f(y)) \vee\ (\forall z\ (r(a, z))))$
  $V(\phi_1) = \{x, y, z\}$ $BV(\phi_1) = \{z\}$ $FV\ (\phi_1) = \{x,y\}$

- $\phi_2 : ((\forall x\ (p(x,y,z))\ ) \vee \forall z\ (p(z) \Rightarrow r(z)))$
  $V(\phi_2) = \{x, y, z\}$ $BV(\phi_2) = \{x, z\}$ $FV(\phi_2) = \{y, z\}$

Remarque : dans ϕ_2 **z est à la fois libre et liée** dans ϕ_2
En fait il y a 2 variables différentes notées z dans ϕ_2

Idem portée des variables dans du code

Exercice

Langage : ?

$$\forall x \; ((p(x,y) \Leftrightarrow \forall t \; ((q(t,x) \Rightarrow r(t,y)))$$

Libres : ?

Liées : ?

$$((p(x,y) \wedge \exists y \; q(t,x)) \Rightarrow \exists x \; r(t,y))$$

Libres : ?

Liées : ?

Formules particulières

- Si $FV(\phi) = \varnothing$ alors ϕ est une ***formule close***
- Si $FV(\phi) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ alors

  $(\forall x_1, x_2, \ldots, x_n\ \phi)$ ***clôture universelle***

  $(\exists x_1, x_2, \ldots, x_n\ \phi)$ ***clôture existentielle***

- Si ϕ est $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ alors ϕ est un atome ou ***litteral positif***

- Si ϕ est $\neg\, p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ alors ϕ est un atome nié ou ***litteral négatif***

- Si ϕ est $(\forall x_1, x_2, \ldots, x_n\ (\phi_1 \vee \phi_2 \vee \ldots \vee \phi_n))$ avec ϕ_i un littéral alors ϕ est une ***clause***
- Si ϕ est $(\forall x_1, x_2, \ldots, x_n\ (\neg\, \phi_1 \vee \neg\, \phi_2 \vee \ldots \vee \neg\, \phi_n \vee \varphi))$ où les ϕ_i et φ sont des atomes, alors ϕ est une ***clause de Horn***