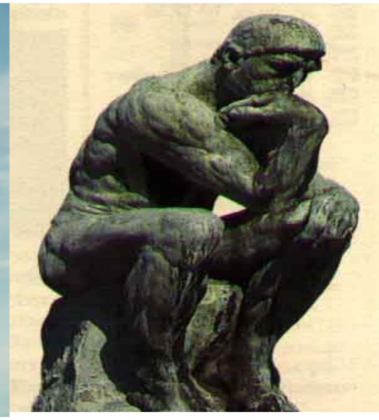
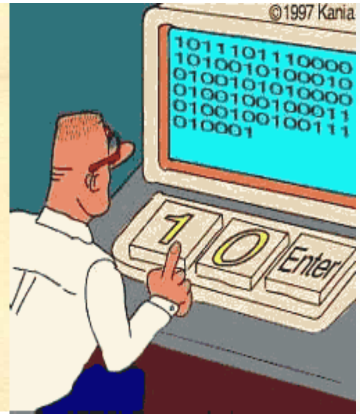
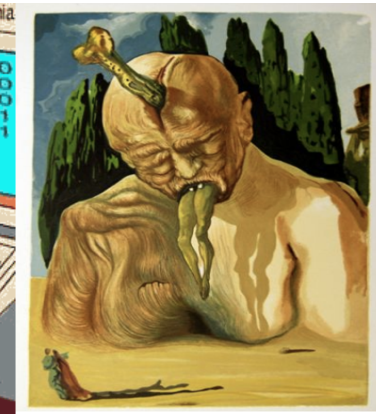
Introduction à la logique

Michel Rueher

SI3

Qu’est ce que la logique ?




- Etre Logique ?
- Formaliser le raisonnement ?
- Automatiser le raisonnement ?
- Un art paradoxal ?

A quoi peut servir la logique ?

- Formaliser le **raisonnement** humain (philosophie, ...)
- Formaliser les **sciences** (mathématiques, ...)
- **Démontrer** (mathématiques, preuves de propriétés de programmes, ...)

Aristote (385-322) : syllogisme

Tous les hommes sont mortels.
Socrate est un homme.
Donc Socrate est mortel.

Toutes les poules ont trois pattes.
Bécassine est une poule.
Donc Bécassine a trois pattes.

Ce qui est rare est cher.
Un 4x4 bon marché est rare.
Donc un 4x4 bon marché est cher.

Le BDE a organisé une grande soirée dansante étudiants/enseignants. Mais les disques de -M- ont disparu !

Les SI3 déclarent:
si nous sommes coupables alors les professeurs sont coupables ou les SI5 sont coupables ou les SI4 sont innocents

Les SI4 déclarent:
les SI3 sont coupables et si les SI5 sont coupables alors les SI4 sont innocents

Les étudiants SI5 déclarent:
si les SI4 sont innocents alors les professeurs sont coupables

On formalisera ce problème en logique du premier ordre
(calcul propositionnel)

Axiomes :

A1: $S3 \Rightarrow \neg S4 \vee S5 \vee P$

A2 : $S3$

A3 : $S5 \Rightarrow \neg S4$

A4 : $\neg S4 \Rightarrow P$

$\Rightarrow$ implication, $\neg$ négation, $\vee$ ou

On appliquera un procédé de **démonstration syntaxique déductif** noté $\vdash$

Procédé de déduction syntaxique :

$$\frac{P \vee T,\ P \Rightarrow Q}{Q \vee T}$$

"$Q \vee T$ se déduit syntaxiquement de $P \vee T$ et $P \Rightarrow Q$"

Autre notation : $P \vee T,\ \ P \Rightarrow Q \ \vdash\ Q \vee T$

Axiomes :

A1: $S3 \Rightarrow \neg\ S4 \vee S5 \vee P$

A2 : $S3$

A3 : $S5 \Rightarrow \neg\ S4$

A4 : $\neg\ S4 \Rightarrow P$

On peut déduire de ces axiomes :

A1 et A2 : $S3, (S3 \Rightarrow \neg\ S4 \vee S5 \vee P) \vdash \neg\ S4 \vee S5 \vee P$

Les SI4 sont innocents ou les SI5 ou les professeurs sont coupabless

A3 et $\neg\ S4 \vee S5 \vee P$: $S5 \Rightarrow \neg\ S4, \neg\ S4 \vee S5 \vee P$ **(A3)** $\vdash \neg S4 \vee P$

Les SI4 sont innocents ou les professeurs sont coupables

A4 et $\neg\ S4 \vee P$: $\neg\ S4 \Rightarrow P, \neg\ S4 \vee P \vdash P$

Les professeurs sont coupables

On ne peut rien déduire sur SI4 et SI5 (ni sur MAM)

Considérons les formules

A1 : $\forall x \forall y \forall z\ (x + (y + z) = (x + y) + z)$

A2 : $\forall x\quad (x + 0 = x)$

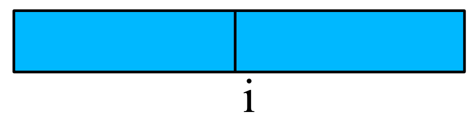
A3 : $\forall x\ \exists y\quad (x + y) = 0$

- Que représentent-elles ?
- La formule suivante peut-elle être prouvée à partir de A1, A2, A3 ?

$\phi : \forall x\ \forall z\ \exists y\quad x + y = \qquad z$

La méthode triInsertion est-elle **correcte** ?

```
/*@ public normal_behavior
@ ensures (\forall int i; 0 <= i && i < t.length-1; t[i] <= t[i+1])
@*/
static void triInsertion(int [] t) {
for (int i = 1; i < t.length; i++) {
   int x = t[i];
   int j = i - 1;
   while ((j >= 0) && (x < t[j])) {
        t[j + 1] = t[j];
        j--;
   }
   t[j] = x;
}
```



Le défi de la logique

Un monde réel

Des faits, des données,..

Une façon de raisonner

PROUVER

sémantique

Le monde logique

Un écrit

Des règles pour transformer l'écrit

DEMONTRER

syntaxe

PROUVER ?=? DEMONTRER

Démontrer $\stackrel{?}{=}$ Prouver

Démontrer :

- une théorie τ (langage + axiomes)

- une formule Φ

Φ est-elle une conséquence logique de la théorie τ ?

- Etant donné un monde réel, existe-t-il une théorie pour le décrire?
- Une formule prouvée (sémantiquement) peut-elle être démontrée (syntaxiquement) ?
- Quand on démontre syntaxiquement une formule, dans quels domaines sémantiques est-elle vraie ?

Ingénieur informaticien

- le programme termine ou boucle
- si le programme termine alors il affiche « don't worry »
- si le programme boucle ou affiche « don't worry » alors l'ingénieur informaticien est bien payé

Montrer que l'ingénieur informaticien est bien payé.

sémantique

On peut formaliser ces énoncés par :

- A1 : $P \vee Q$
- A2 : $P \Rightarrow R$
- A3 : $Q \vee R \Rightarrow T$

On peut déduire T par la règle de déduction syntaxique

$$X \vee Y, X \Rightarrow Z \;\vdash\; Z \vee Y$$

- $A1, A2 \;\vdash\; Q \vee R$
- $Q \vee R, A3 \;\vdash\; T$

syntaxe

Si on pose :

P : l'eau est potable

Q : l'eau est abondante

R : les hommes sont heureux

T : la paix règne sur terre

On obtient :

- L'eau est potable ou abondante
- Si l'eau est potable alors les hommes sont heureux
- Si l'eau est abondante ou les hommes sont heureux, alors la paix règne sur terre

Peut-on en déduire que la paix règne sur terre ?

On a démontré que T se déduit de :

- A1 : $P \vee Q$
- A2 : $P \Rightarrow R$
- A3 : $Q \vee R \Rightarrow T$

syntaxe

en appliquant la règle de déduction $\vdash$

On peut conclure que la paix règne sur terre
si deux conditions sont vérifiées :

sémantique

- le domaine sémantique est un ***modèle*** de {A1, A2, A3}

  A1, A2 et A3 sont vrais quand on interprète P par « l'eau est potable », Q par « l'eau est abondante », R par « les hommes sont heureux » et T par « la paix règne sur terre »

- la règle de déduction $\vdash$ a la propriété :

  « si A $\vdash$ T, alors T est valide dans tous les modèles de A »,

Tous les modèles de ***A :***
quel que soit le domaine des variables, quel que soit le sens des fonctions et des prédicats, qui valident A

Questions à se poser sur les procédés de démonstration syntaxique :

- **Question 1** :

  Quand on déduit une formule Φ d'un ensemble d'axiomes $\mathcal{A}$ par un procédé de démonstration syntaxique, peut-on en conclure que Φ est valide dans tous les domaines sémantiques qui sont des modèles de $\mathcal{A}$?

correction

- **Question 2 :**

  Quand une formule Φ se déduit d'un ensemble d'énoncés $\mathcal{A}$ dans un domaine sémantique, le procédé de déduction syntaxique permet-t-il de démontrer Φ ?

complétude

Où il faut être prudent avant d'énoncer une vérité

Monde syntaxique S

A1: $f(\perp, x) = x$

A2 : $f(g(x), y) = g(f(x, y))$

Monde sémantique M1

domaine : les entiers naturels

opérations :

f : + (addition)

g : s (successeur)

$\perp$: 0 (la constante 0)

M1 est un « modèle » de S :

A1 et A2 sont valides dans le monde M1

$0+x = x$ et $s(x) + y = s(x+y)$ sont vrais

Monde syntaxique S (rappel)
A1: $f(\perp, x) = x$
A2 : $f(g(x), y) = g(f(x, y))$

Monde sémantique M2

domaine : les listes de a et b

opérations :

f : append (concaténation)

g : $cons_a$ (rajoute *a* en tête de liste)

$\perp$: null (la constante liste vide)

M2 est un « modèle » de S : A1 et A2 sont vrais dans le monde M2

append(null,l) = l et append($cons_a$ (l1),l2) = $cons_a$ (append(l1,l2)) sont vrais

Monde sémantique M3

domaine : les entiers naturels

opérations :

f : * (multiplication)

g : s (successeur)

$\perp$: 0 (la constante 0)

M3 n'est pas un « modèle » de S : x * 0 = x est faux dans M3

On suppose connus deux procédés syntaxiques qui permettent de faire des démonstrations dans S:

Déduction syntaxique : utiliser les égalités des axiomes de gauche à droite

Induction syntaxique : utiliser les égalités des axiomes de gauche à

droite puis la formule à prouver

- On peut démontrer avec ***la déduction syntaxique*** que

$$f(g(g(x)), y) = g(g(f(x, y)))$$

- On peut démontrer avec ***l'induction syntaxique*** que

$$f(x, y) = f(y, x)$$

D’un point de vue sémantique

Validité de f (g (g (x)) , y) = g (g (f (x , y)))

- Dans M1 : s (s (x)) + y = s (s (x + y)) est vrai
- Dans M2 : append($cons_a$ ($cons_a$ (l1)) , l2) = $cons_a$ ($cons_a$ (append (l1, l2))) est vrai

Validité de f (x , y) = f (y , x)

- Dans M1 : x + y = y + x est vrai

MAIS

- Dans M2 : append (l1, l2) = append (l2, l1) est faux!!!!!

contre-exemple: - append (aaaba , baa) vaut aaababaa

- append (baa , aaaba) vaut baaaaaba

Où est la faille ?

- Les axiomes A1 et A2 permettent « de construire de façon unique » tout entier (i.e toute donnée du monde M1).

M1 est un modèle particulier « *modèle initial* » de S

- Les axiomes A1 et A2 **ne disent rien** sur les listes contenant des b!!! (i.e certaines données du monde M2 **ne sont pas représentées** par S)

Exemple : les éléments aaaba et aab ne peuvent pas être dérivés à partir de null, $cons_a$ et append.

M2 est un modèle quelconque

Ce qui est démontré avec *la déduction syntaxique* est vrai dans *tous_les_modèles*

f (g (g (x)) , y) = g (g (f (x , y))) est donc valide dans M1 et M2

Ce qui est démontré avec *l'induction syntaxique* est vrai dans les *modèles_initiaux*

f (x, y) = f (y , x) est donc valide dans M1

L'induction syntaxique ne nous dit rien sur la validité de

f (x, y) = f (y , x) dans M2

Remarque :

Cf cours utilisation des schémas d'induction libres pour faire des preuves inductives

Dans quels types de modèles le procédé de démonstration syntaxique assure-t-il la validité des formules déduites ?

Dans ce cours nous verrons trois procédés de démonstration syntaxique : la résolution et le remplacement d'égaux (déduction) et l'induction.

Les deux premiers assurent la validité dans tous les modèles, l'induction assure la validité dans les modèles initiaux

Syntaxe et sémantique : que nous apporte la logique (du premier ordre) ?

- Des méthodes de démonstration (syntaxique) qui assurent :
  - **ce qui est démontré est vrai dans *tous les modèles***
  - **ce qui est vrai dans *tous les modèles* est démontrable**

  (théorème de complétude de Gödel 1930)

Les formules qui sont vraies dans ***tous les modèles*** ne sont pas les plus intéressantes pour l'informatique.

Ce sont les formules qui correspondent à un raisonnement logique.
Par exemple, la formule « M(a) » est vraie dans *tous les modèles* de
A1 : $\forall$ x (H(x) $\Rightarrow$ M(x))
A2 : H(a)

Les formules qui nous intéressent le plus en informatique, sont les formules qui sont vraies dans les ***modèles initiaux***

Ces formules nécessitent une connaissance de la structure des éléments.

Par exemple, la formule « x + y = y + x » est vraie dans les ***modèles_initiaux*** de
A1 : 0 + x = x
A2 : s(x) + y = s(x+y)

Elle n'est pas vraie dans ***tous les modèles*** de {A1,A2}
(on a vu que l'interprétation M2 dans les listes de a et b est un modèle de {A1,A2}mais que x + y = y + x est fausse dans M2)

Synthèse

- Il existe des méthodes de démonstration (syntaxique) qui assurent que ***ce qui est démontré est vrai dans le modèle initial***

- Il n'existe pas de procédé de démonstration qui permette de démontrer ***n'importe quelle formule vraie du modèle initial***

- Quel que soit le système finiment axiomatisé cohérent et capable de formaliser l'arithmétique, on peut toujours construire une formule vraie de l'arithmétique que l'on ne peut pas démontrer (***théorème d'incomplétude de Gödel,*** 1931, basé sur l'autoréférence)

Autoréférences et Paradoxes

- « *Le barbier rase tous ceux et seulement ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes* »

- **« Cette phrase est un mensonge »** (paradoxe du Crétois)
- **« La phrase suivante est fausse. La phrase précédente est vraie. »**
- **« Jésus-Christ, un autonomiste palestinien mort en 33 après lui-même»**

  Pierre Desproges

Plan du cours

Une théorie est la donnée d'un langage et d'un ensemble d'axiomes

Théorie : syntaxe

- langage
- axiome

Théorie : sémantique

- interprétation
- validité

Théorie : preuves

- déductives
- inductives

Cas particulier des théories dont le langage est propositionnel (algèbre de boole)

Calcul des prédicats

Cadre de la logique équationnelle

Bibliographie

Zohar Manna: Mathematical Theory of Computation, Dover, 2003.

J. P. Delahaye : Outils logiques pour l'intelligence artificielle, Eyrolles

R. Lassaigne, M. de Rougemont : Logique et fondements de l'informatique Traité des nouvelles technologies, série informatique, Hermes

E. Burke, E. Foxley : Logic and its applications, Prentice hall int.

Open free courses:

https://class.coursera.org/intrologic-005

http://oli.cmu.edu/courses/free-open/logic-proofs-course-details/