FLOTS

Définitions

Un réseau est un graphe orienté G(V,E) dans lequel chaque arc (u,v) dispose d'une capacité $c(u,v) \geq 0$.

Un réseau est doté de deux nœuds spéciaux :

s – source

t – puits

Nous supposerons par la suite que pour tout sommet x du réseau il existe un chemin de s vers x et un de x vers t.

Définitions (suite)

Un flot dans G est une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{R}$

qui vérifie :

- **contrainte de capacité**

$$\forall\, e \in \mathrm{E} : 0 \leq f(e) \leq c(e)$$

- **conservation des flots (lois de Kirchhoff)**

Soit In(v) l'ensemble des arcs entrants en v et Out(v) l'ensemble des arcs sortants de v. Alors

$$\forall\, v \in \mathrm{V}\text{-}\{ s, t \} : \Sigma_{e\, \in \mathrm{In}(v)}\, f(e) - \Sigma_{e\, \in \mathrm{Out}(v)}\, f(e) = 0$$

Définitions (suite)

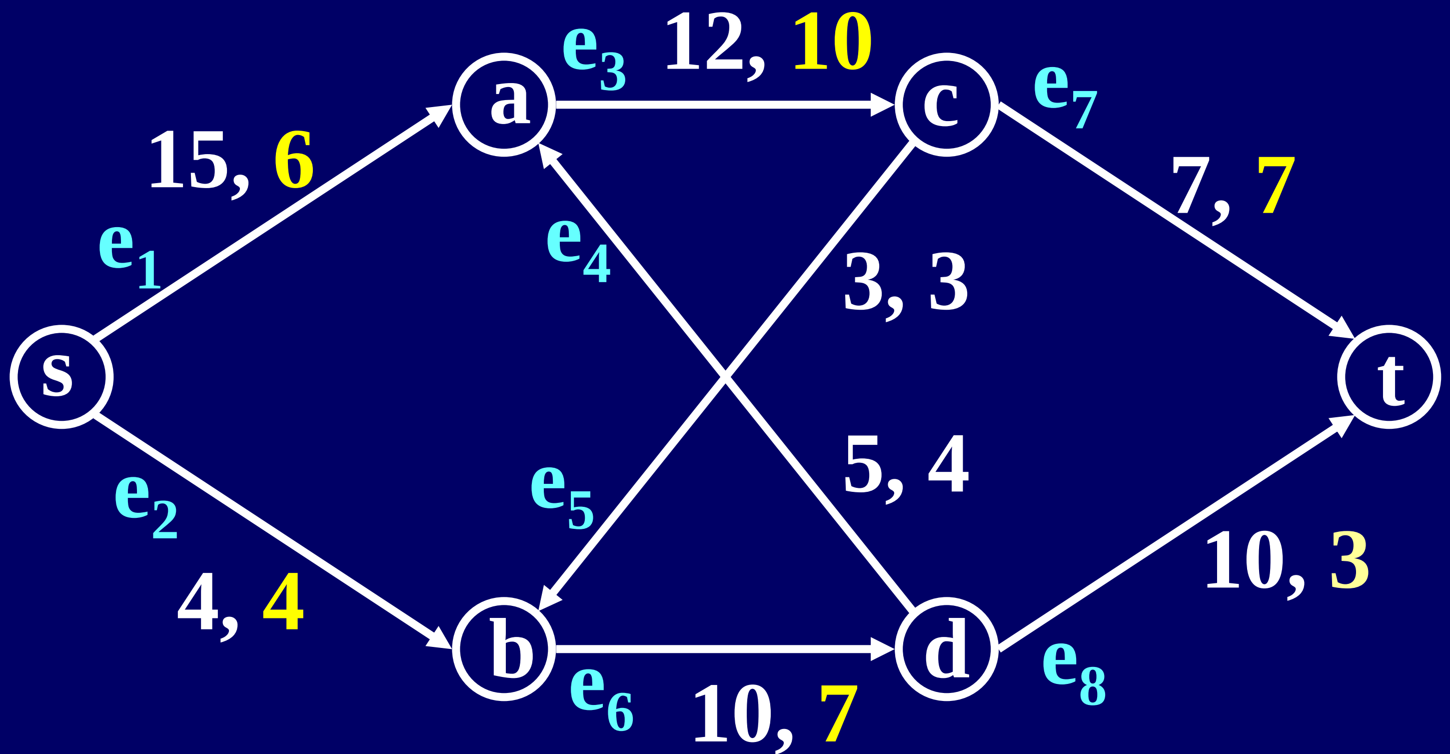
La valeur d'un flot

$$| f | = \Sigma_{e \in \mathrm{In}(t)} f(e) - \Sigma_{e \in \mathrm{Out}(t)} f(e)$$

Le problème du flot maximum :

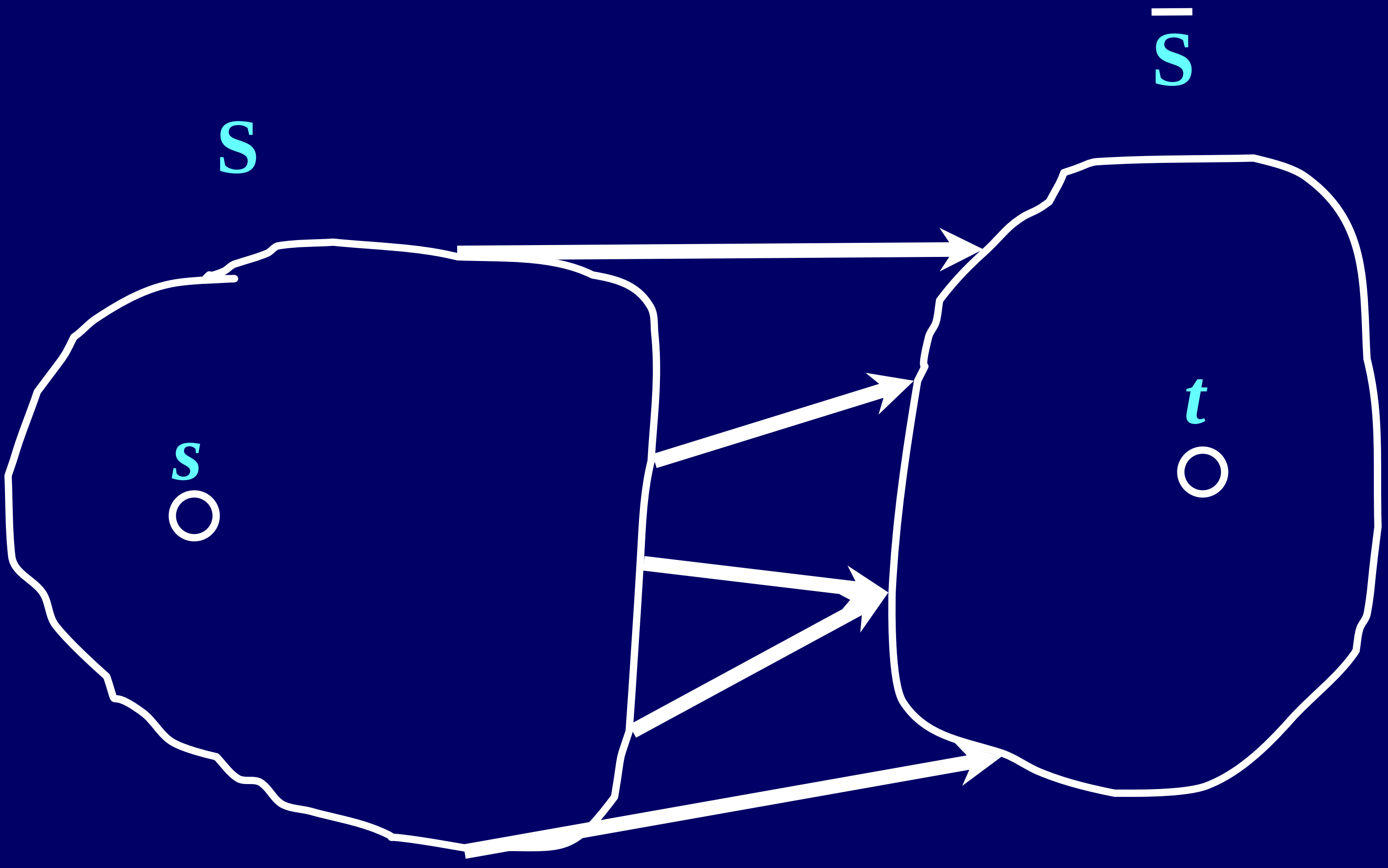
trouver un flot de valeur maximum.

Exemple



c, *f*

Une coupe



Definition

Soient S, T $\subset$ V. (S,T) désigne l'ensemble des arcs ayant l'origine dans S et l'extrémité terminale dans T.

Soit S $\subset$ V, t.q. s $\in$ S et t $\notin$ S. L'ensemble des arcs entre S et son complémentaire S’ s'appelle une coupe (ou une s-t coupe). Il est noté (S;S’)

Une propriété

Propriété : Pour tout s-t coupe (S,S'),

$$|f| = \Sigma_{e \in (S;S')} f(e) - \Sigma_{e \in (S';S)} f(e)$$

Preuve : Il suffit de sommer les équations

$$\Sigma_{e \in \mathrm{In}(v)} f(e) - \Sigma_{e \in \mathrm{Out}(v)} f(e) = 0$$

pour les sommets v ∈ S' ($v \neq t$)

et

$$|f| = \Sigma_{e \in \mathrm{In}(t)} f(e) - \Sigma_{e \in \mathrm{Out}(t)} f(e)$$

La capacité d'une coupe

On définit

$$c(S) = \Sigma_{e \in (S;S')} c(e)$$

Une borne

Propriété : pour tout flot f et pour toute coupe S

$$|\, f \,| \leq c(\mathrm{S})$$

Preuve : par la propriété précédente nous avons

$$|\, f \,| = \Sigma_{e\, \in (\mathrm{S};\mathrm{S}')}\, f\,(e) - \Sigma_{e\, \in\, (\mathrm{S}';\mathrm{S})}\, f\,(e)$$

et par ailleurs $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pour toute arête e.

Donc

$$|\, f \,| \leq \Sigma_{e\, \in (\mathrm{S};\mathrm{S}')}\, c(e) - 0 = c(\mathrm{S})$$

Un corollaire

Corollaire : **Si $|\, f \,| = c(S)$ alors le flot est maximum et la coupe S est de capacité minimum.**

Chaîne augmentante

Une chaîne augmentante est un chaîne entre *s* et *t* sur laquelle on peut augmenter le flot,

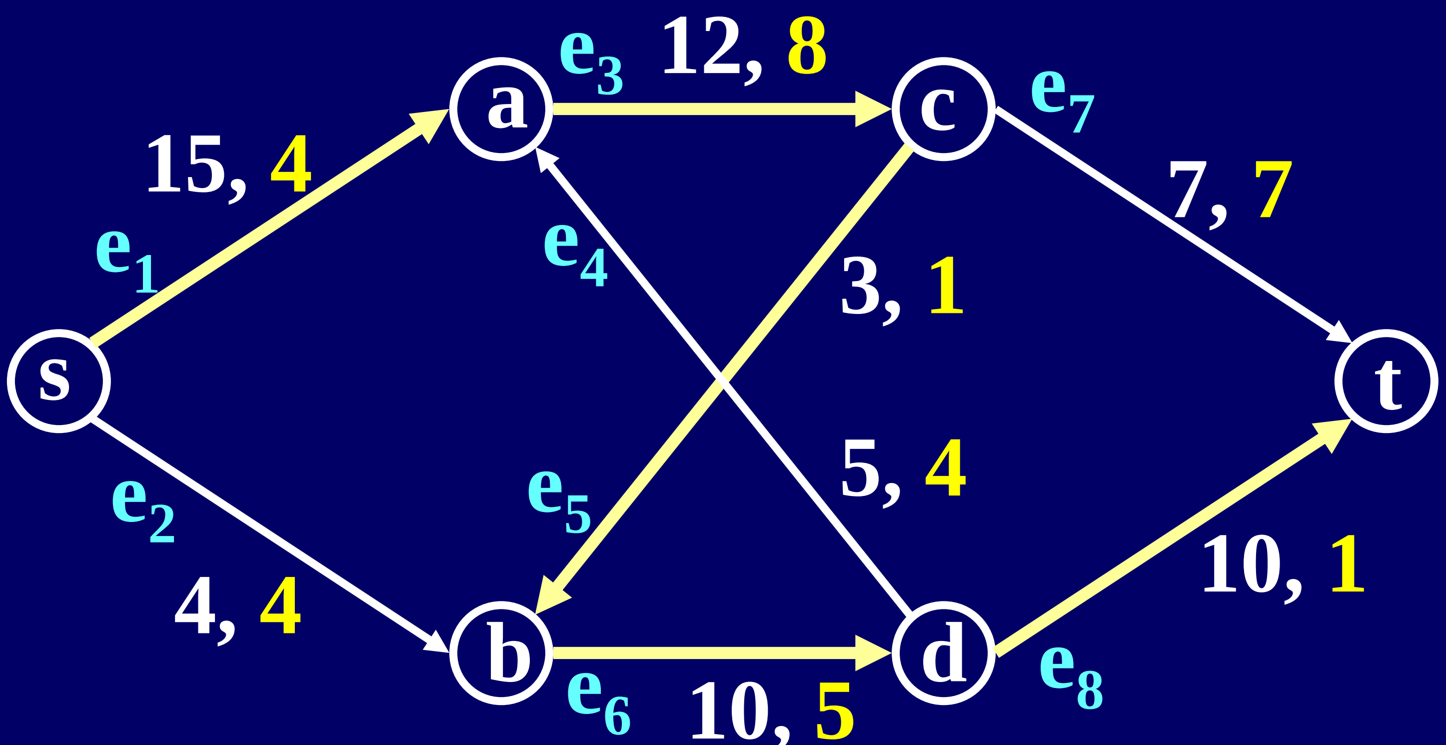
c.a.d. une chaîne sur laquelle les arcs "avant" vérifient

$$f\,(\mathrm{e}) < c(e)$$

et les arcs "arrière" vérifient

$$f\,(e) > 0$$

Chaîne augmentante - exemple



c, *f*

Méthode Ford & Fulkerson

tant qu'il existe une chaîne augmentante

faire

- chercher une chaîne augmentante
- augmenter le flot sur la chaîne

fait

A préciser : comment chercher, de combien augmenter

Réseau résiduel

Si on a un arc de *u* vers *v*, alors

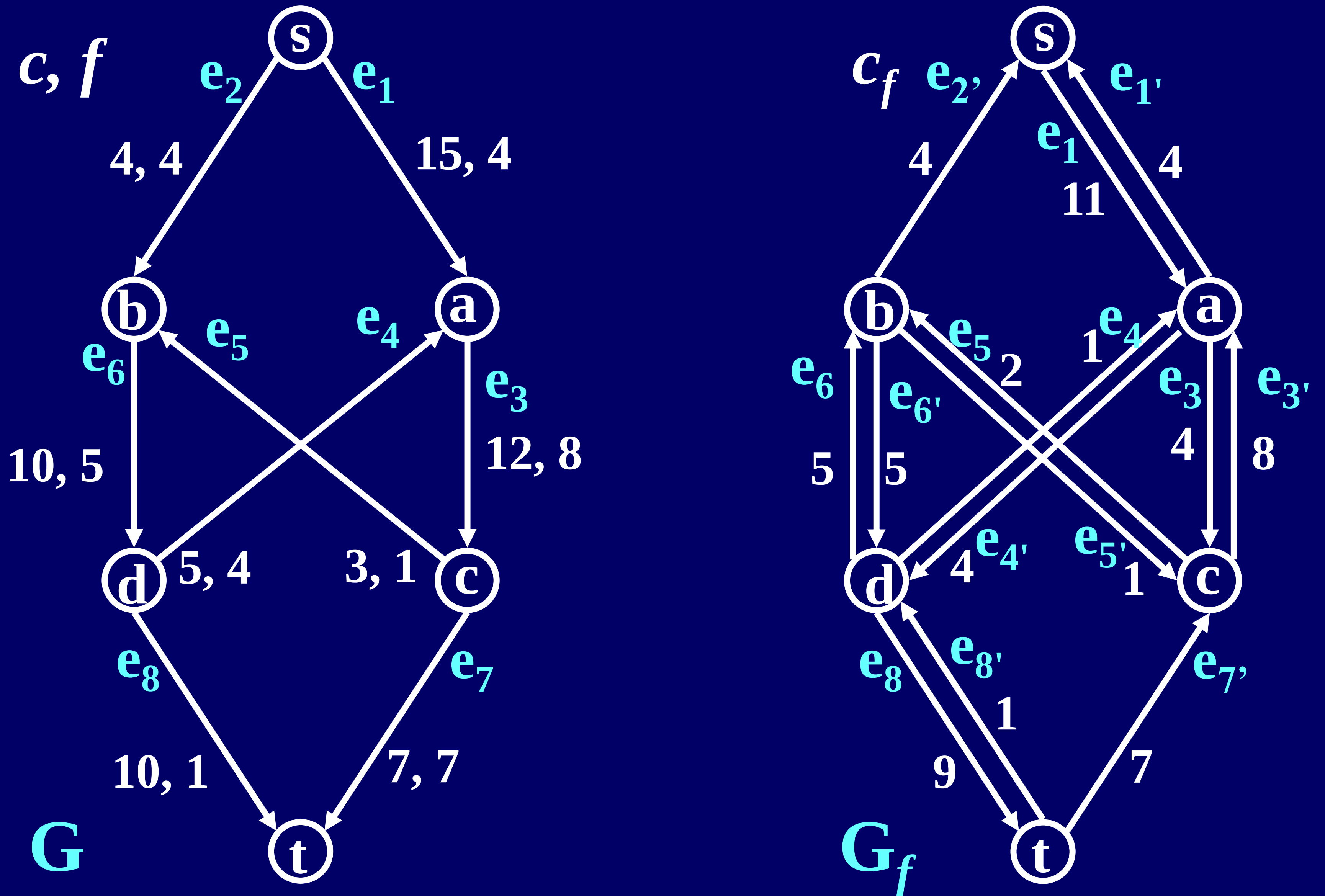
on met dans G_f un arc de *u* vers *v* de capacité

$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$

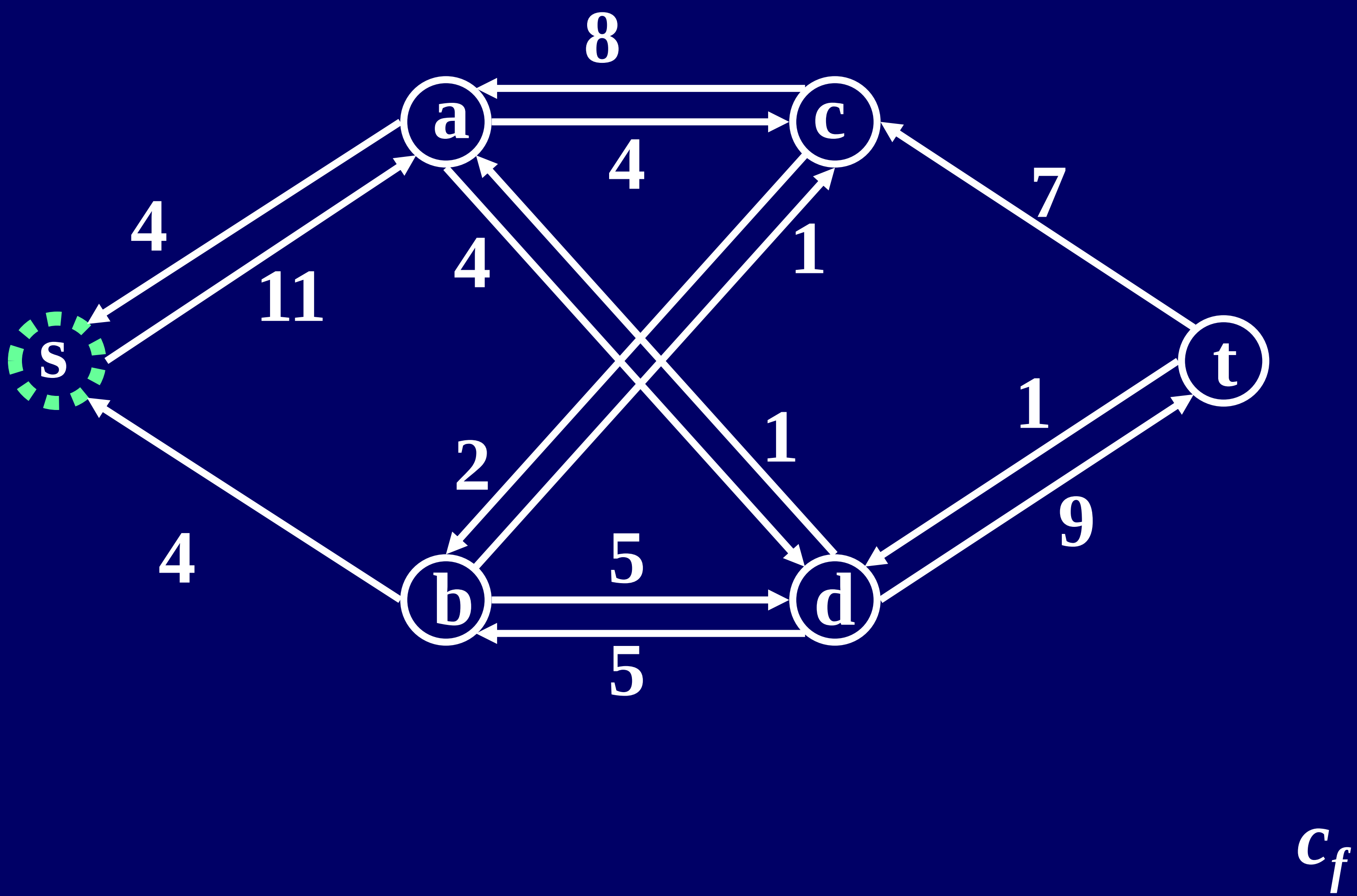
on met dans G_f un arc de *v* vers *u* de capacité

$$c_f(v,u) = f(u,v)$$

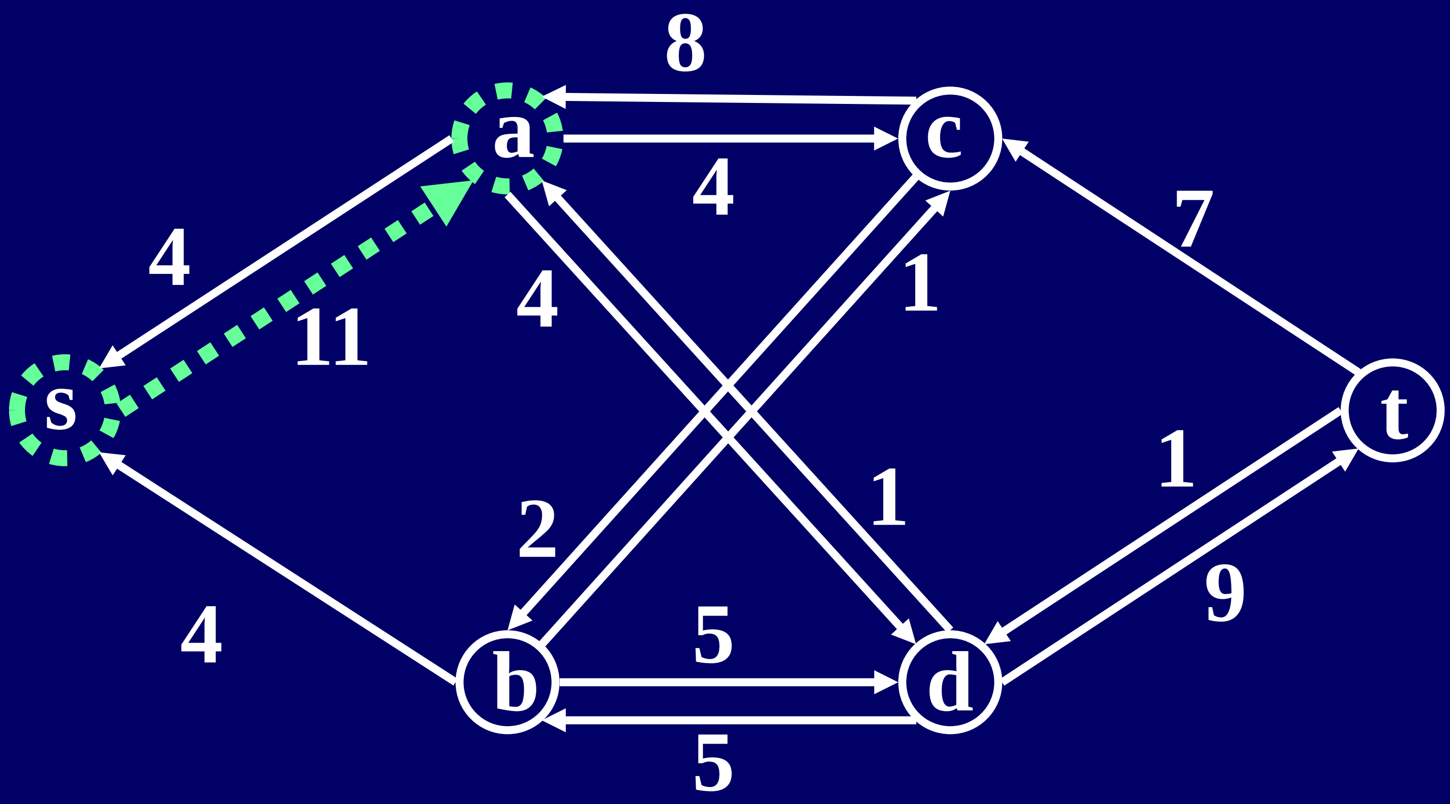
Le réseau résiduel



Recherche de chaîne augmentante

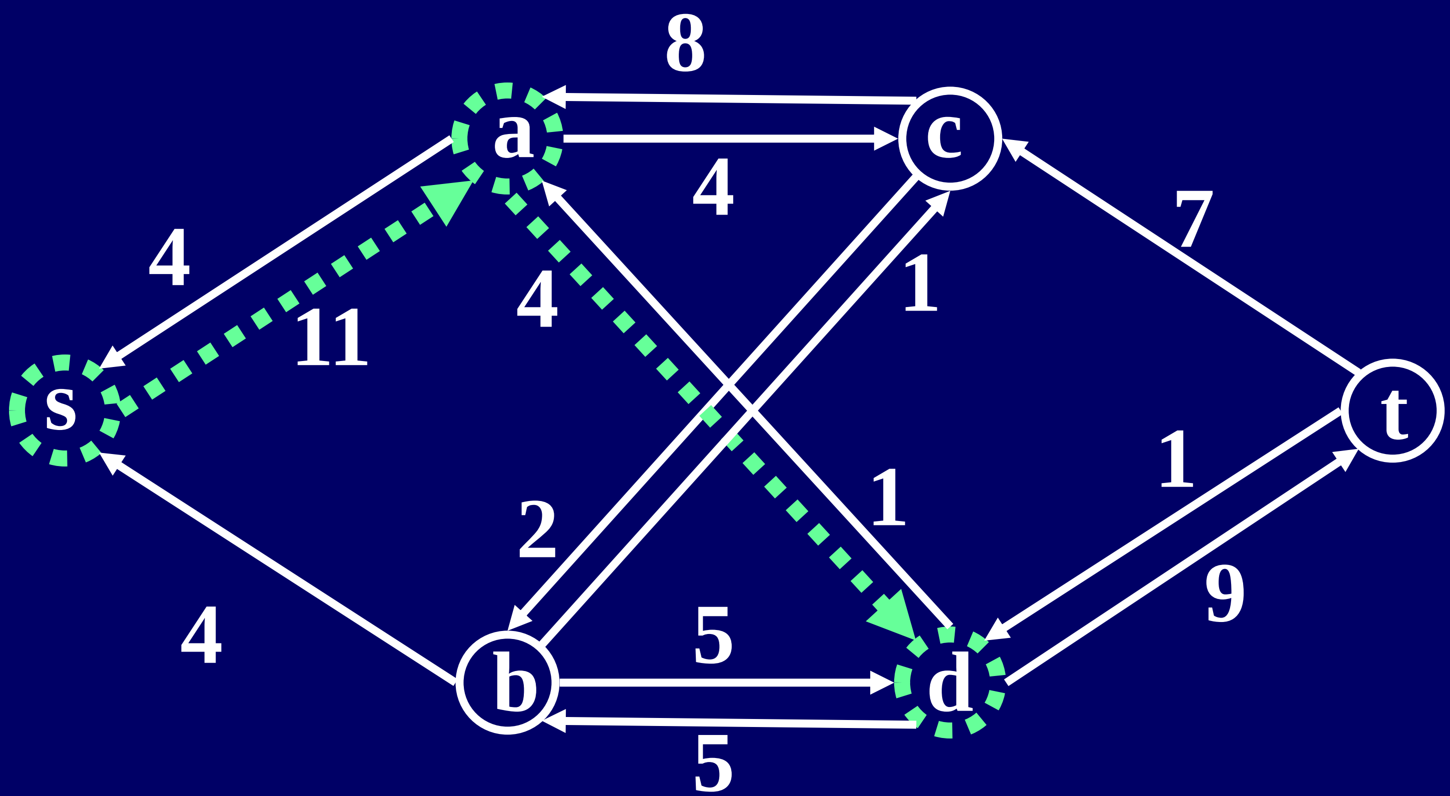


Recherche de chaîne augmentante

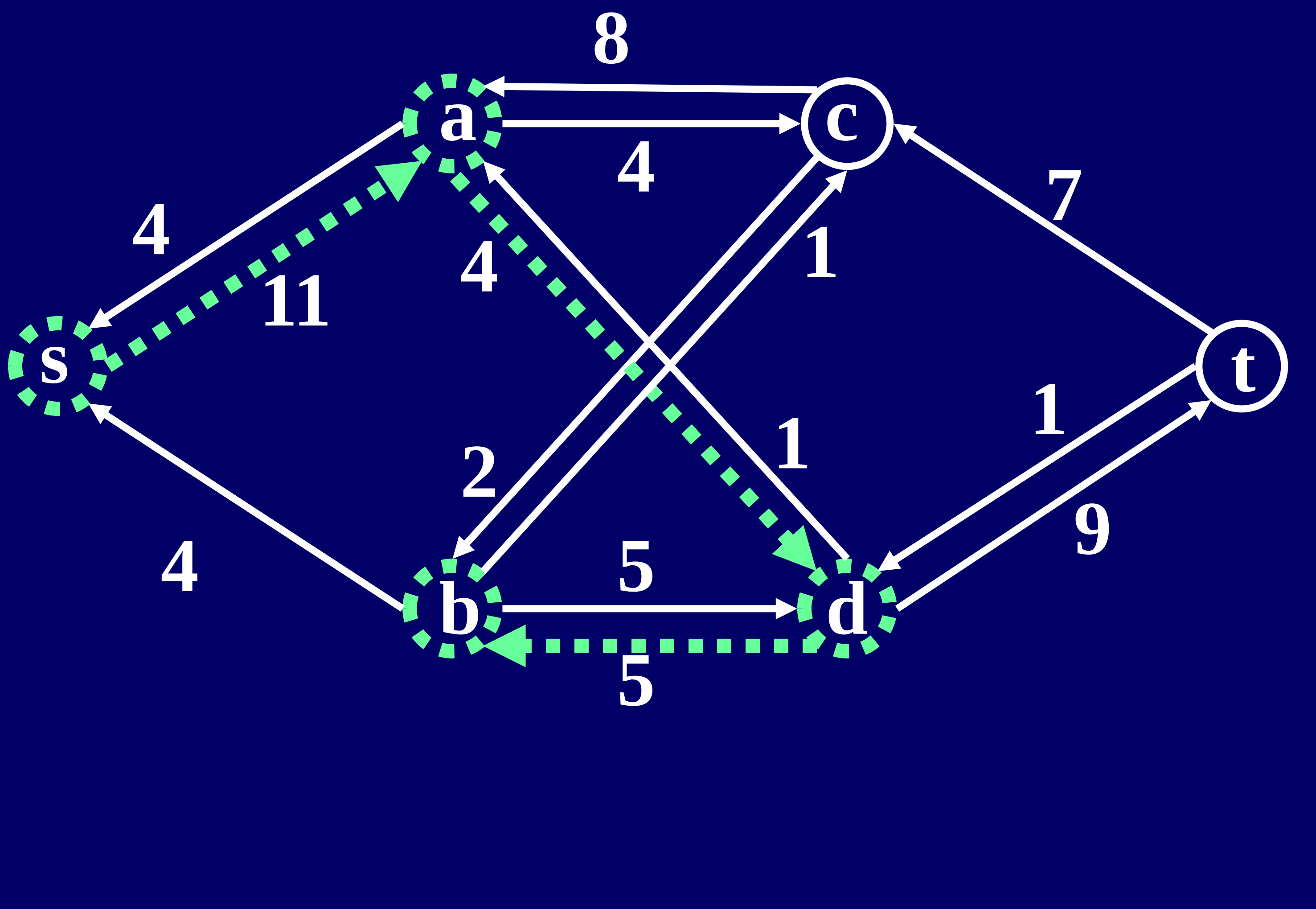


c_f

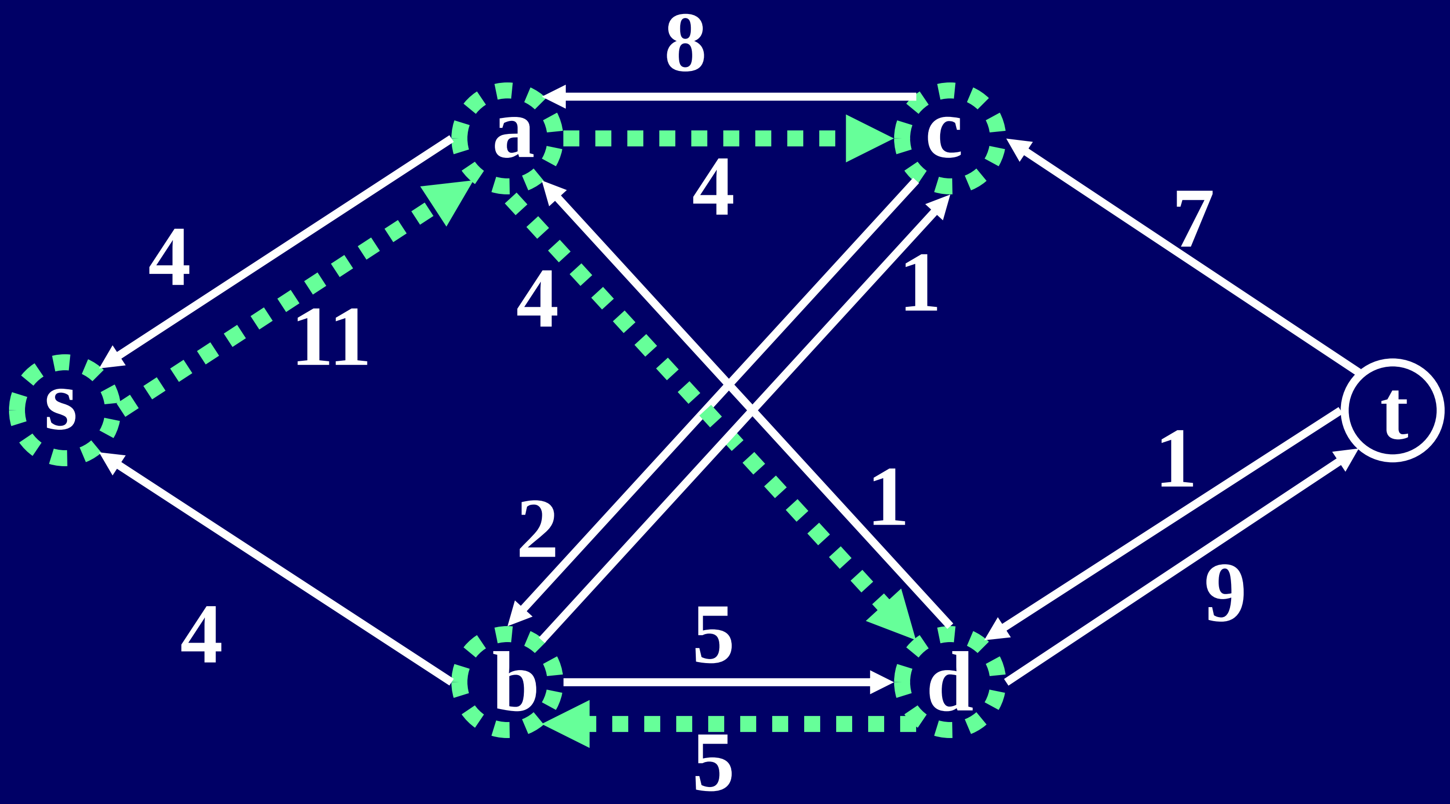
Recherche de chaîne augmentante



Recherche de chaîne augmentante

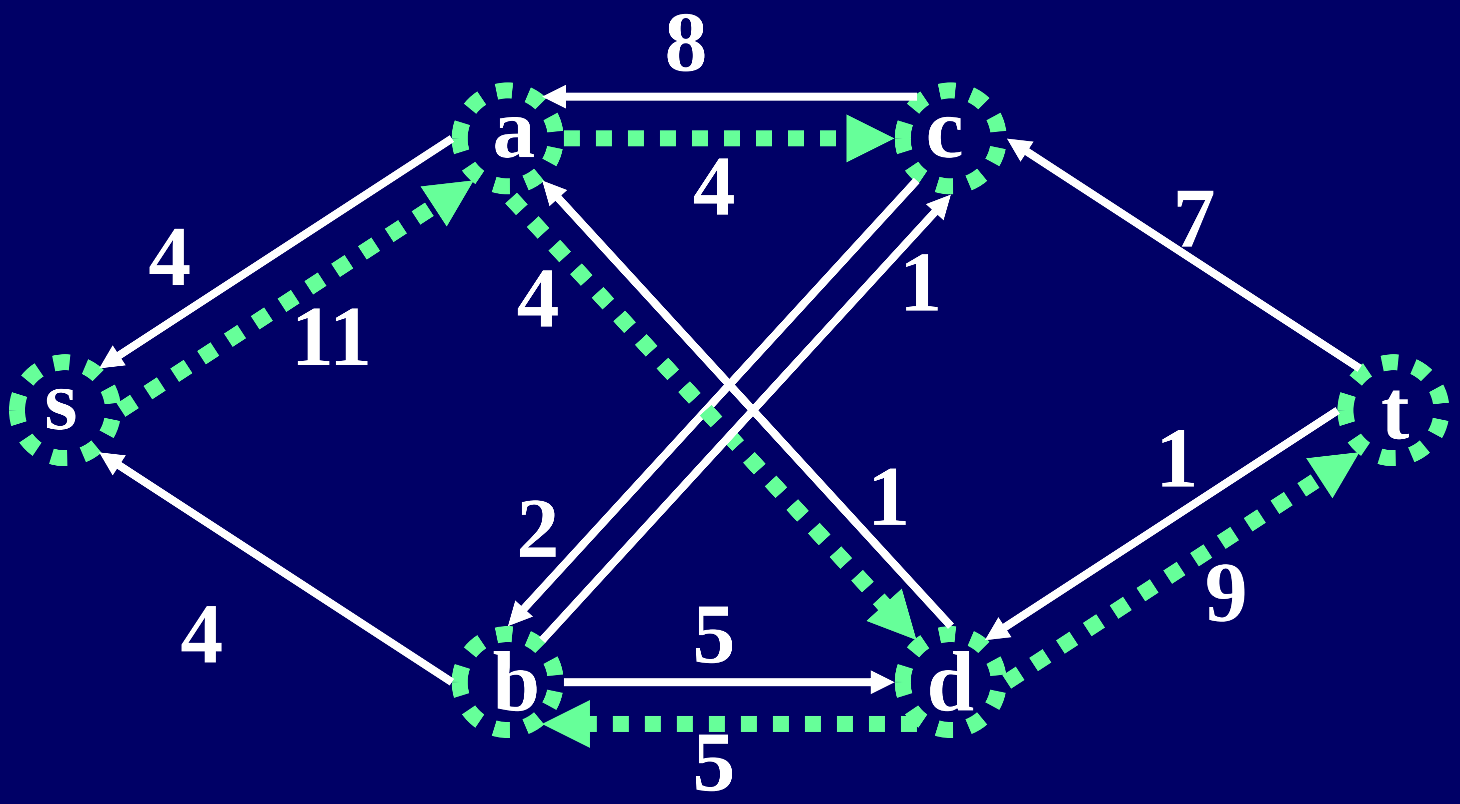


Recherche de chaîne augmentante



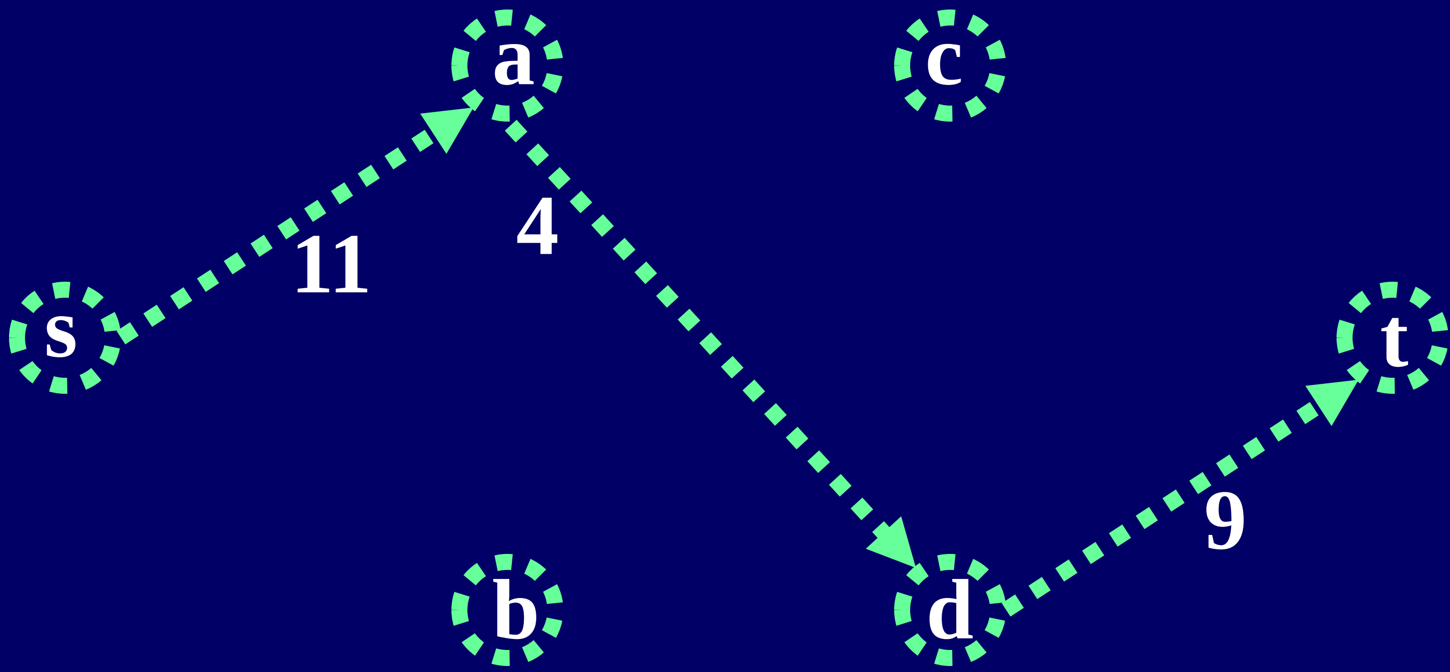
c_f

Recherche de chaîne augmentante



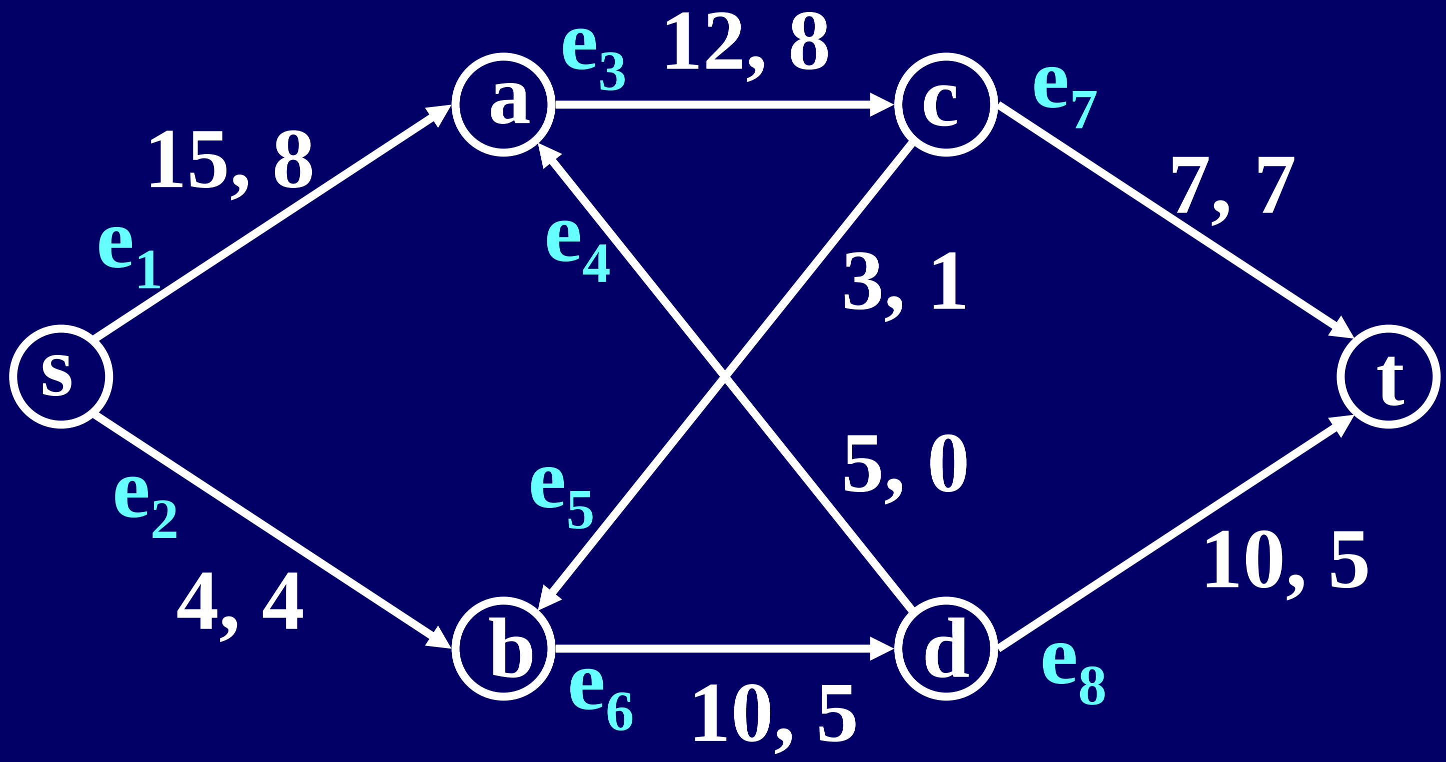
c_f

La chaîne augmentante



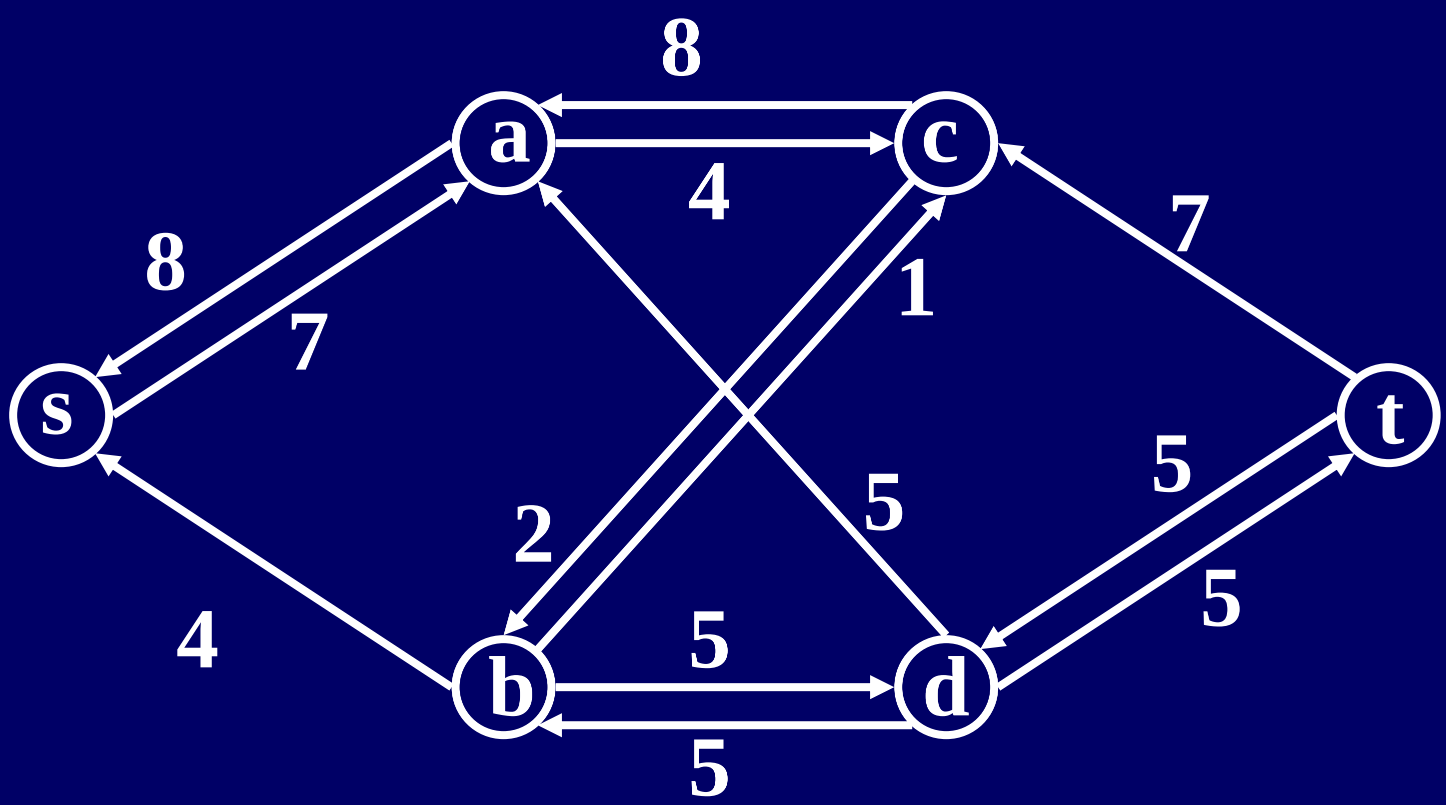
On peut faire une augmentation de min{11,4,9}=4.

Le résultat



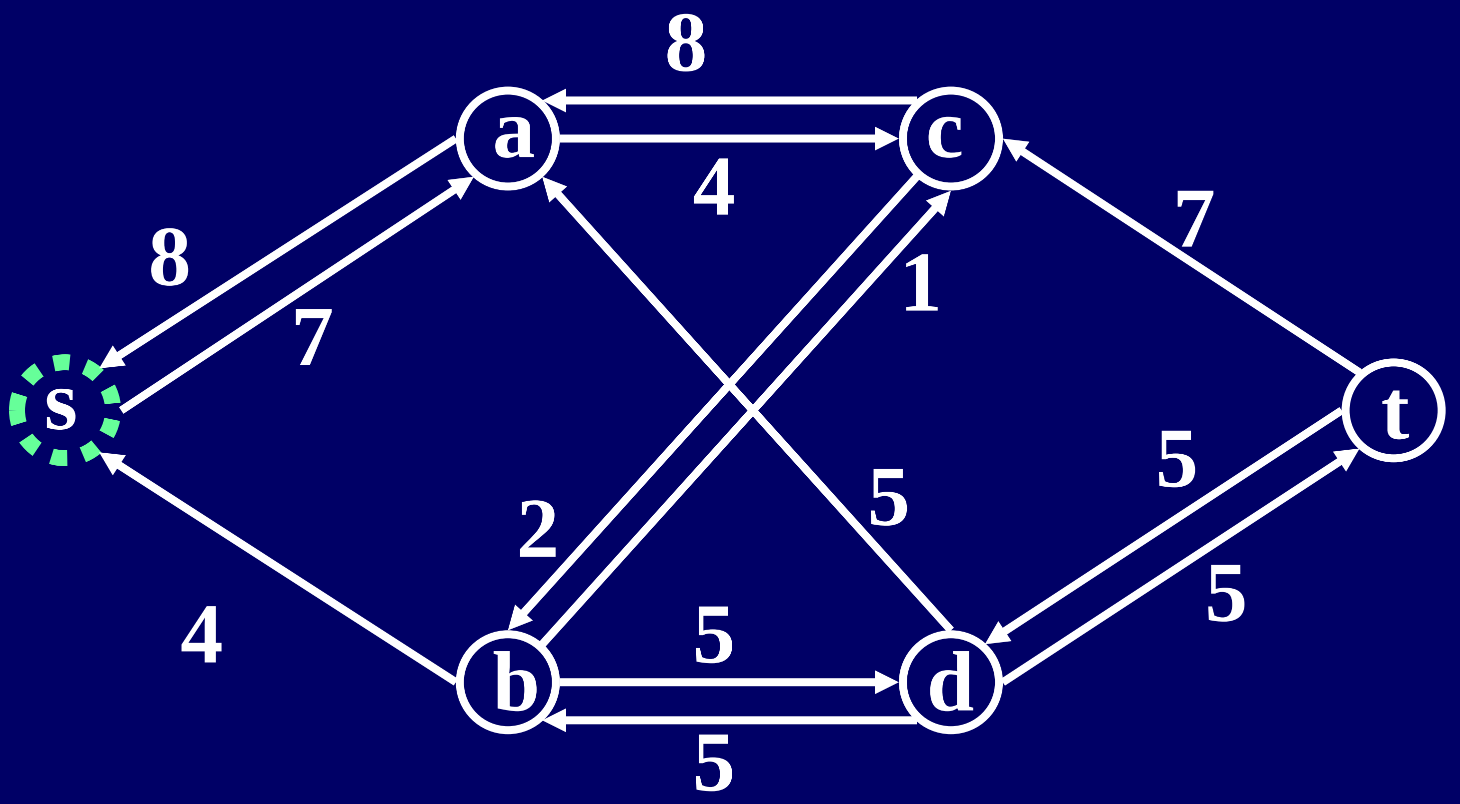
c, *f*

Le réseau résiduel



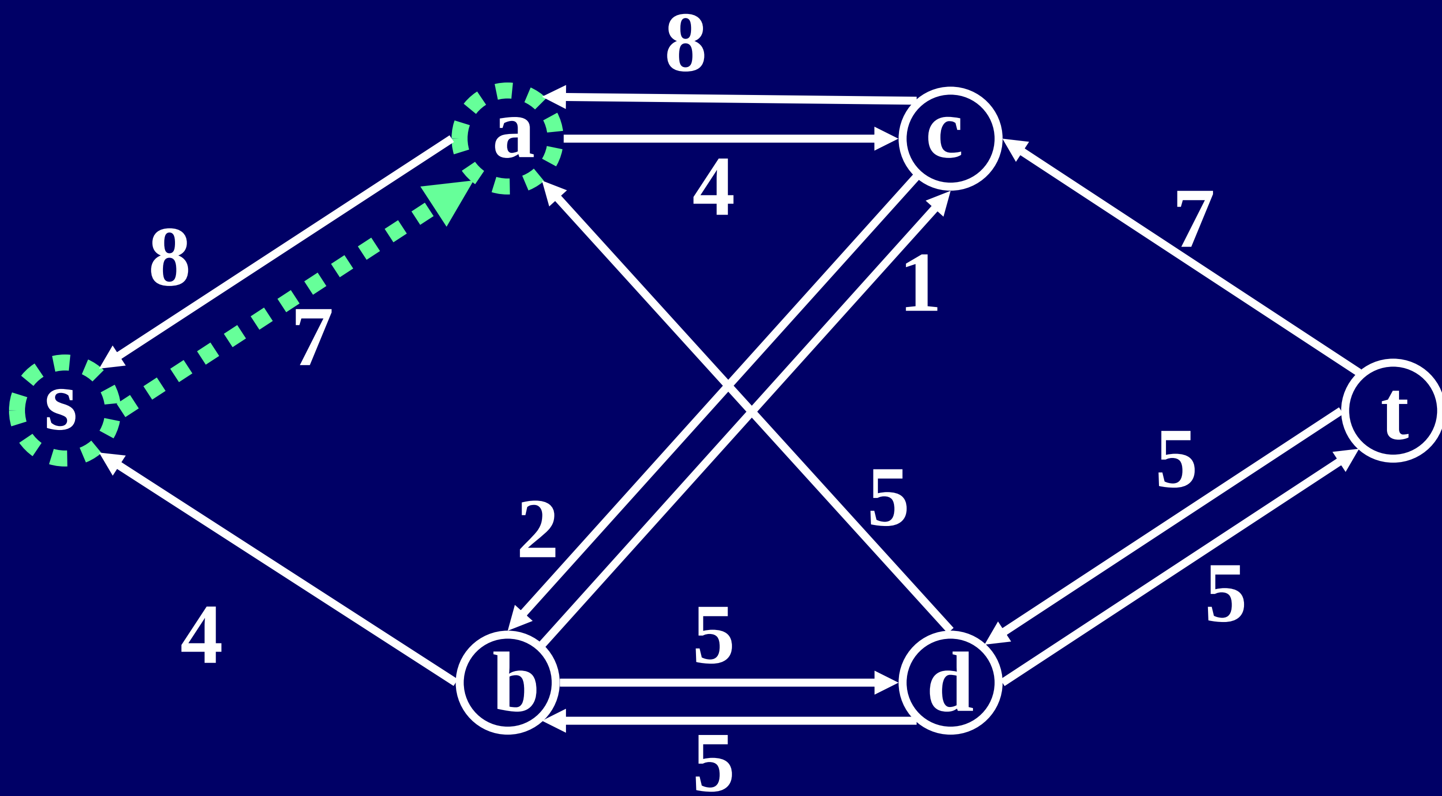
c_f

Recherche de chaîne augmentante



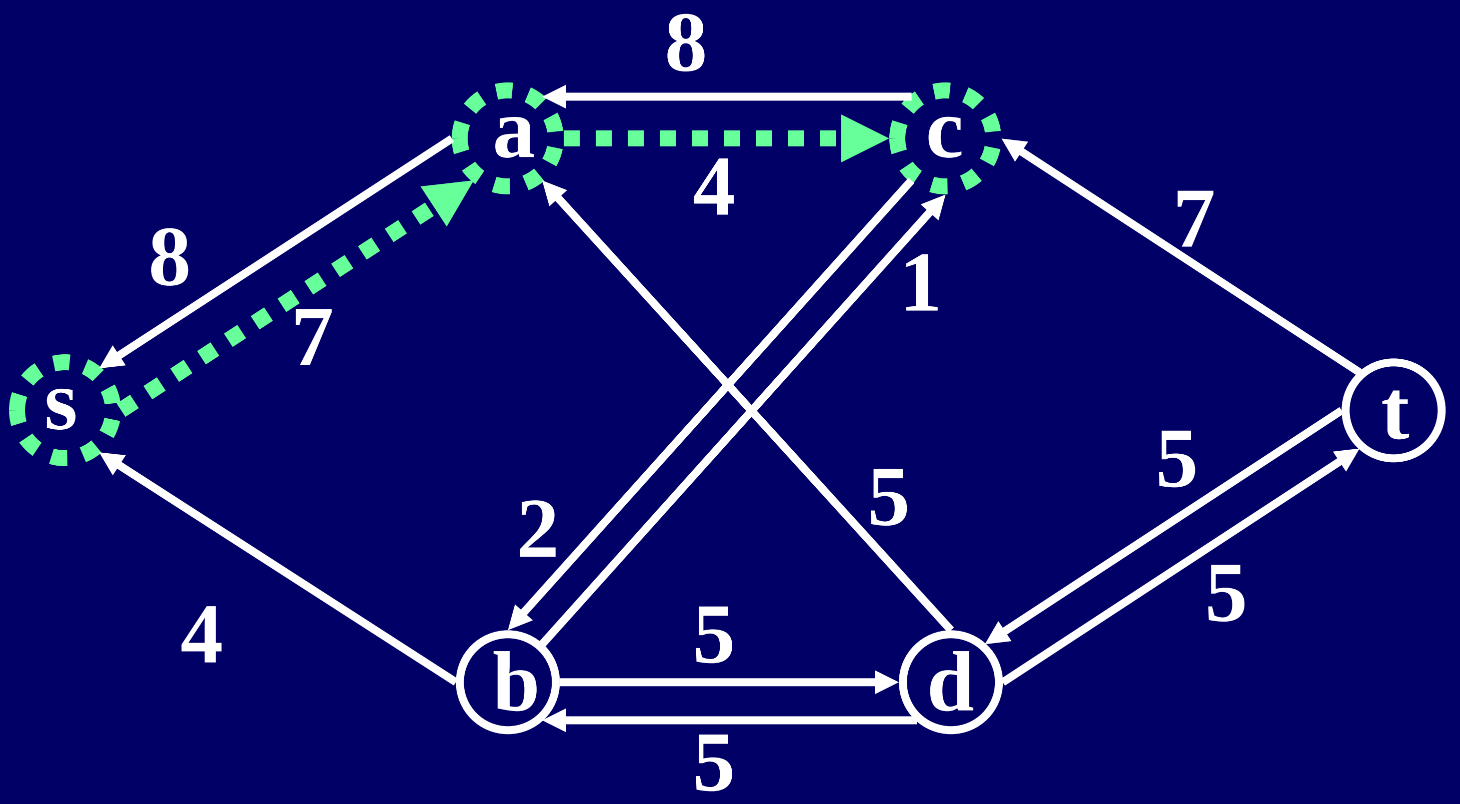
c_f

Recherche de chaîne augmentante



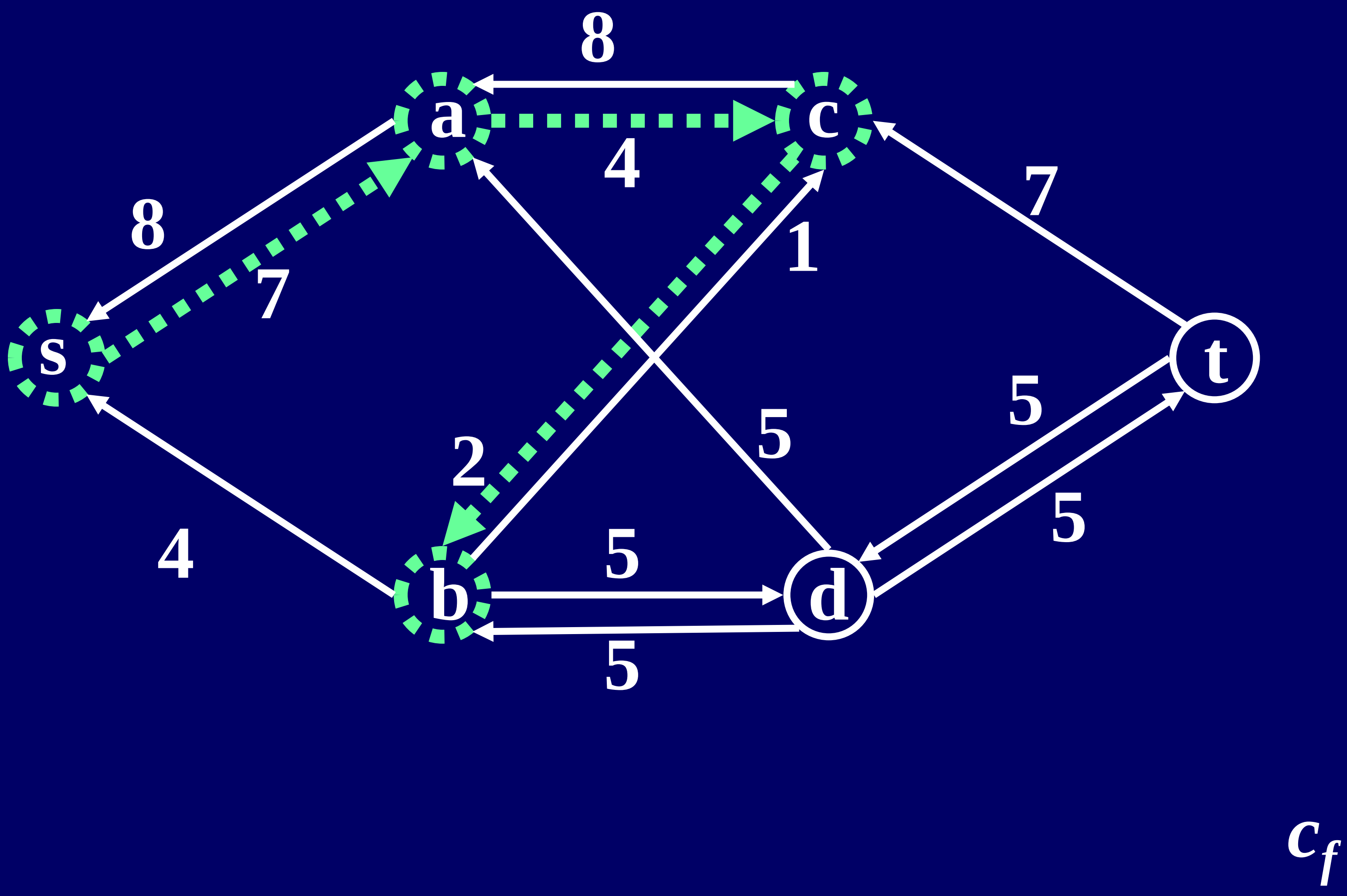
c_f

Recherche de chaîne augmentante

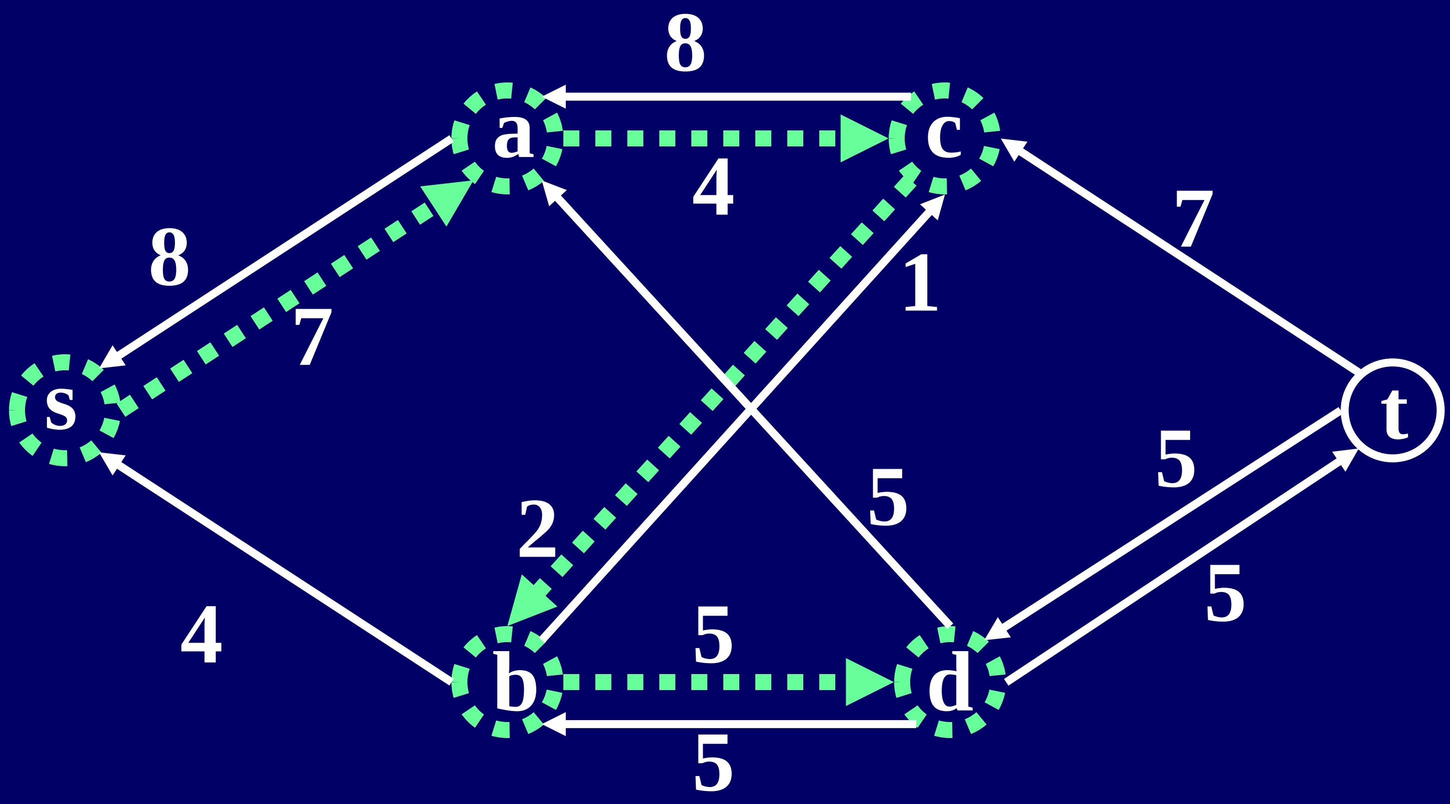


c_f

Recherche de chaîne augmentante

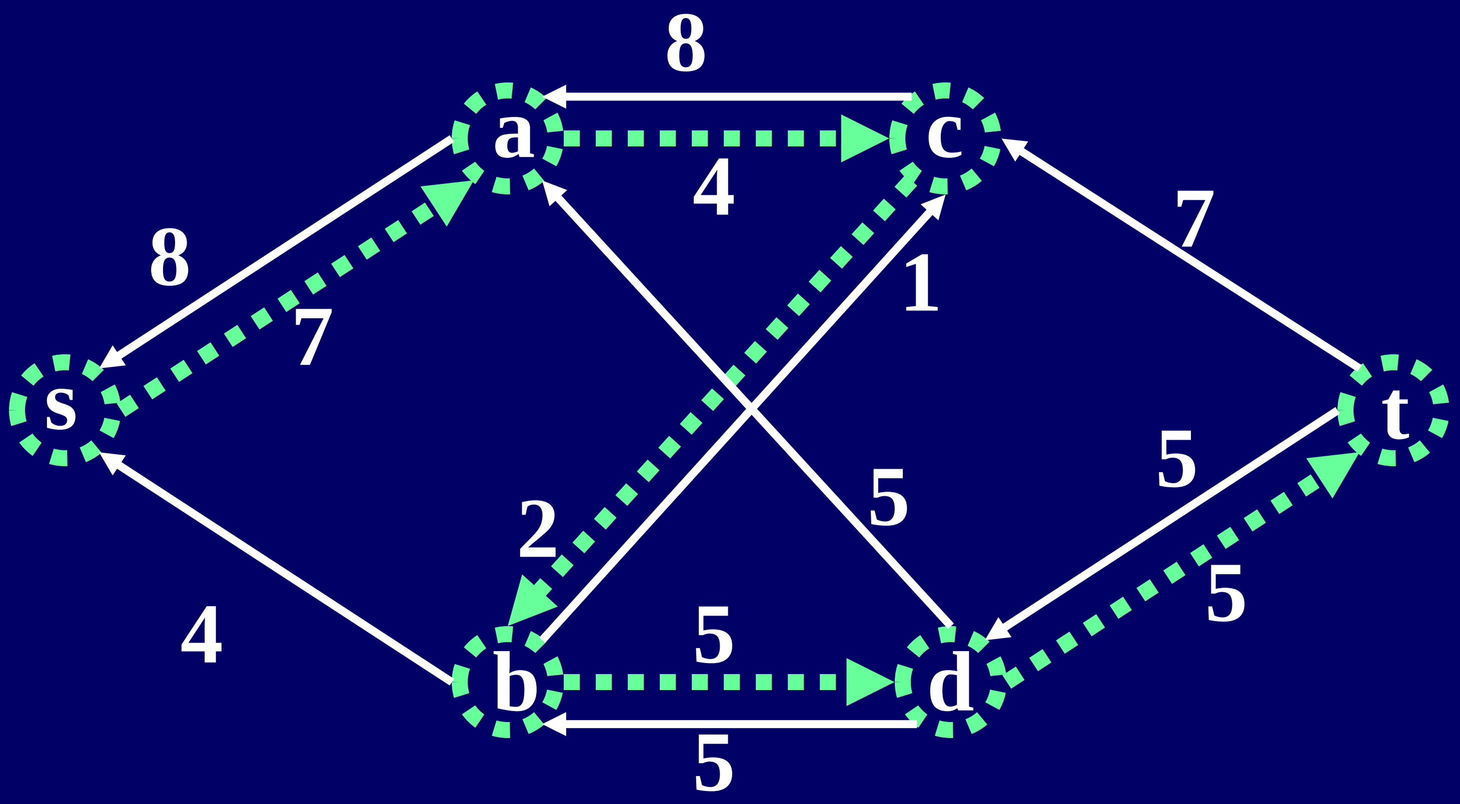


Recherche de chaîne augmentante



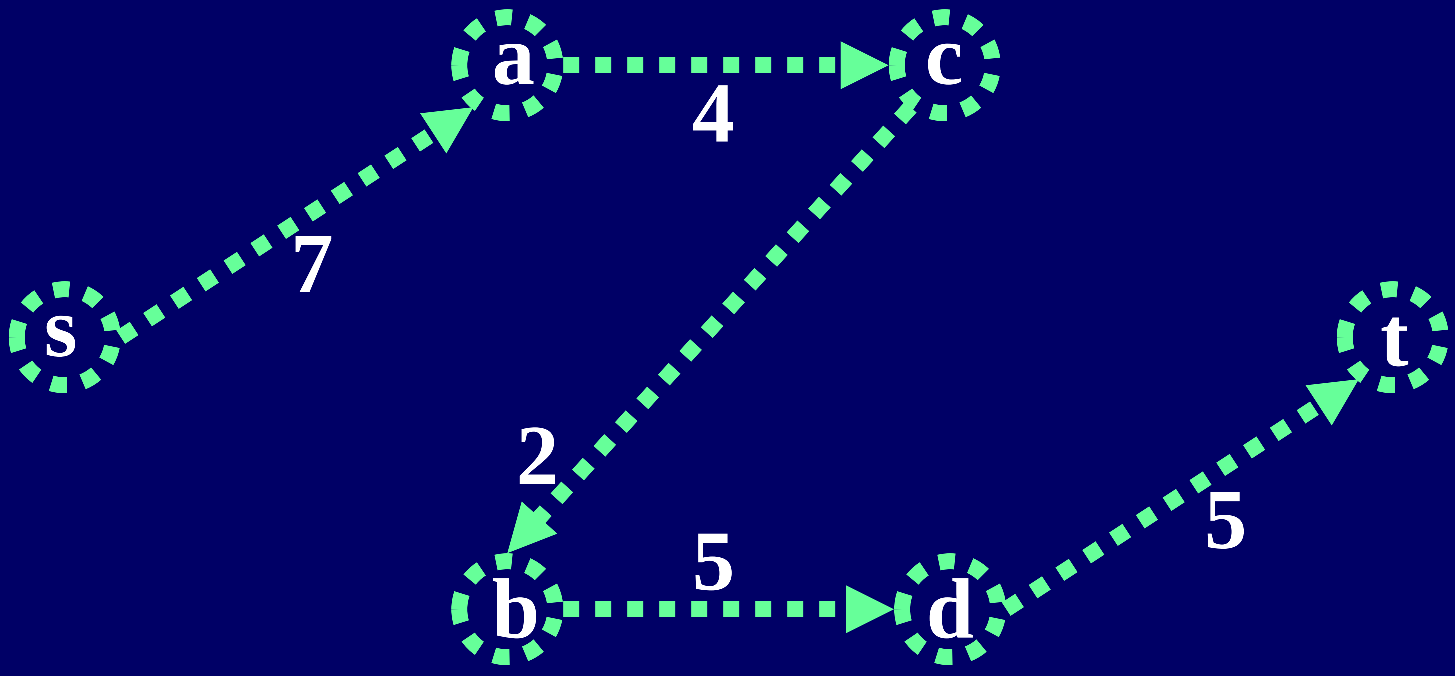
c_f

Recherche de chaîne augmentante



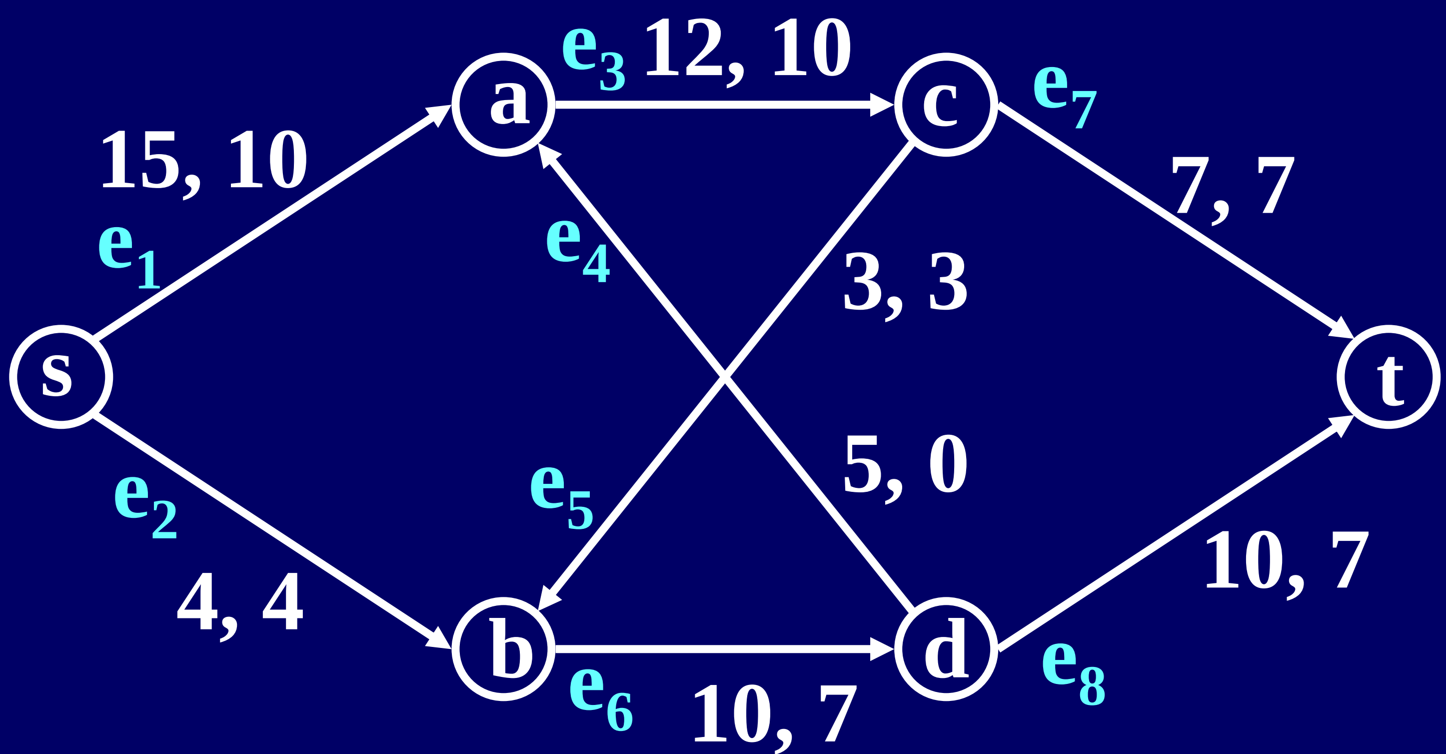
c_f

La chaîne augmentante



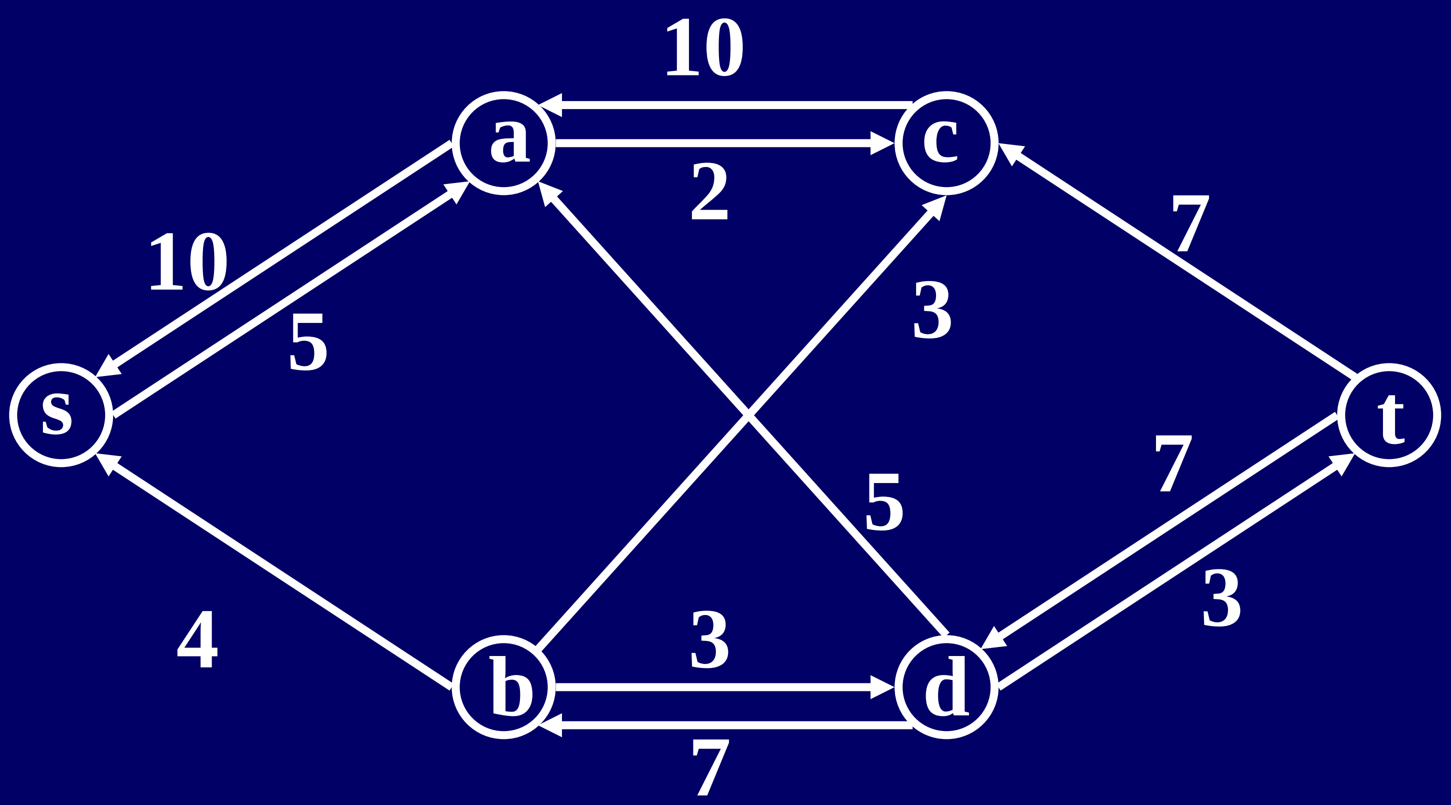
On peut faire une augmentation de min{7,4,2,5,5}=2.

Le résultat



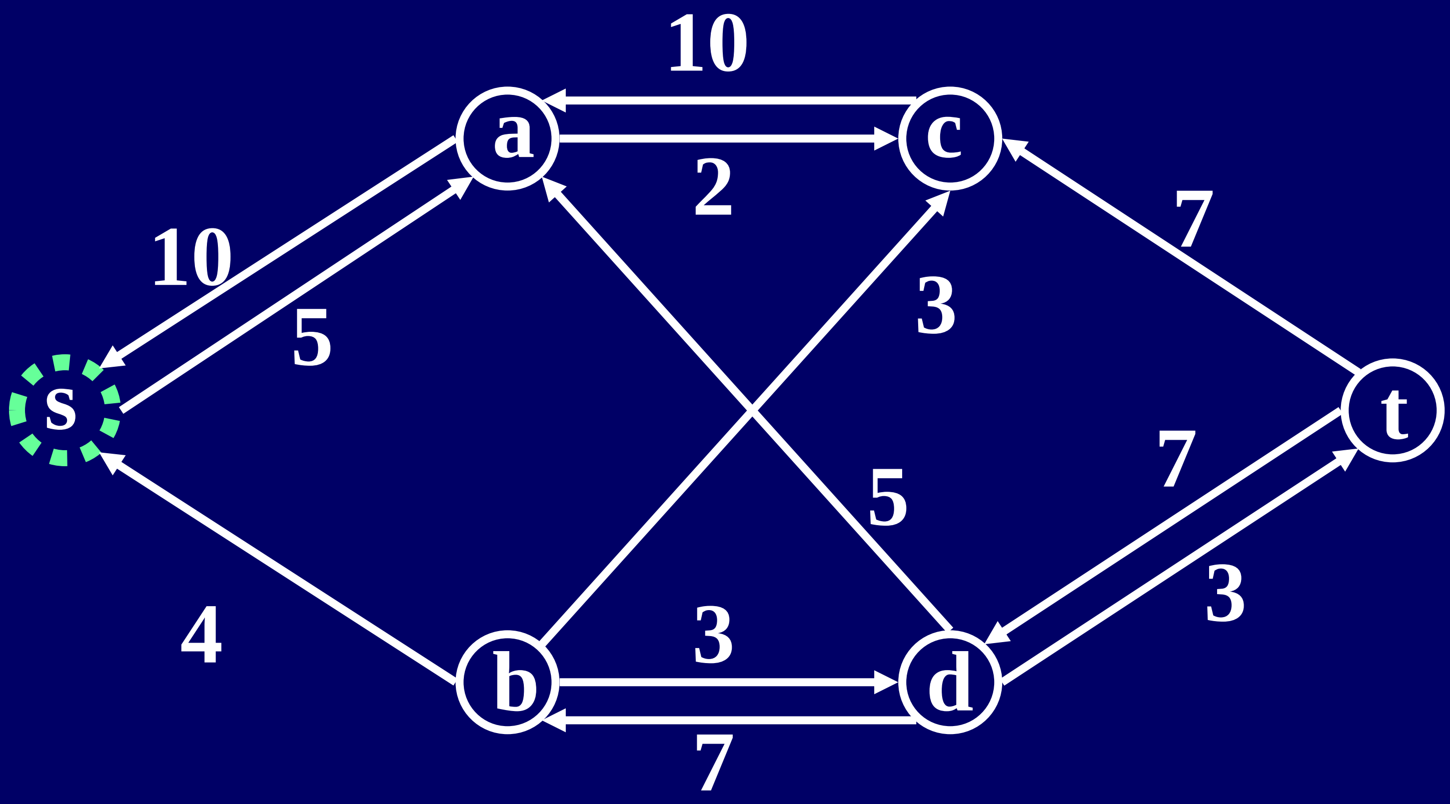
c, *f*

Le réseau résiduel



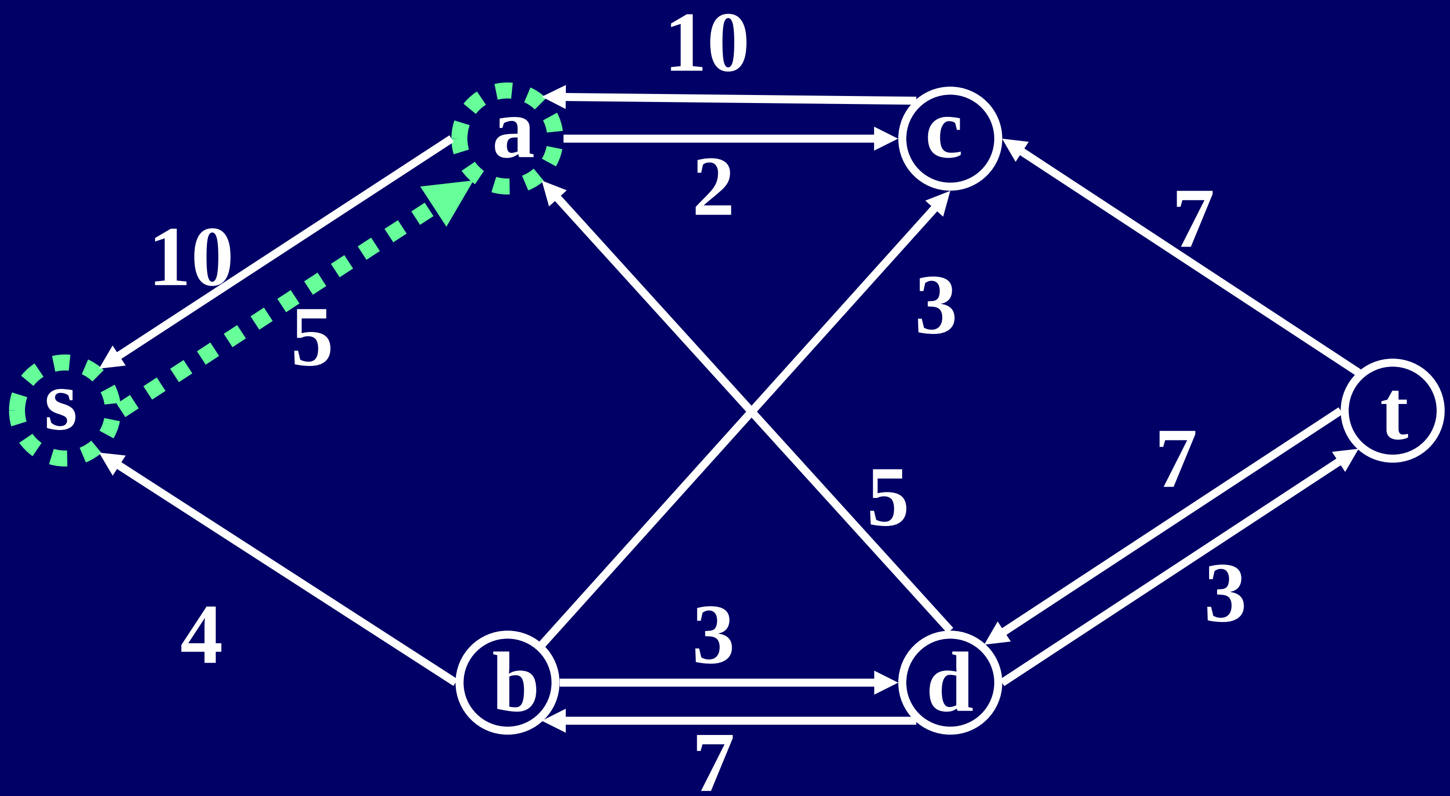
c_f

Recherche de chaîne augmentante



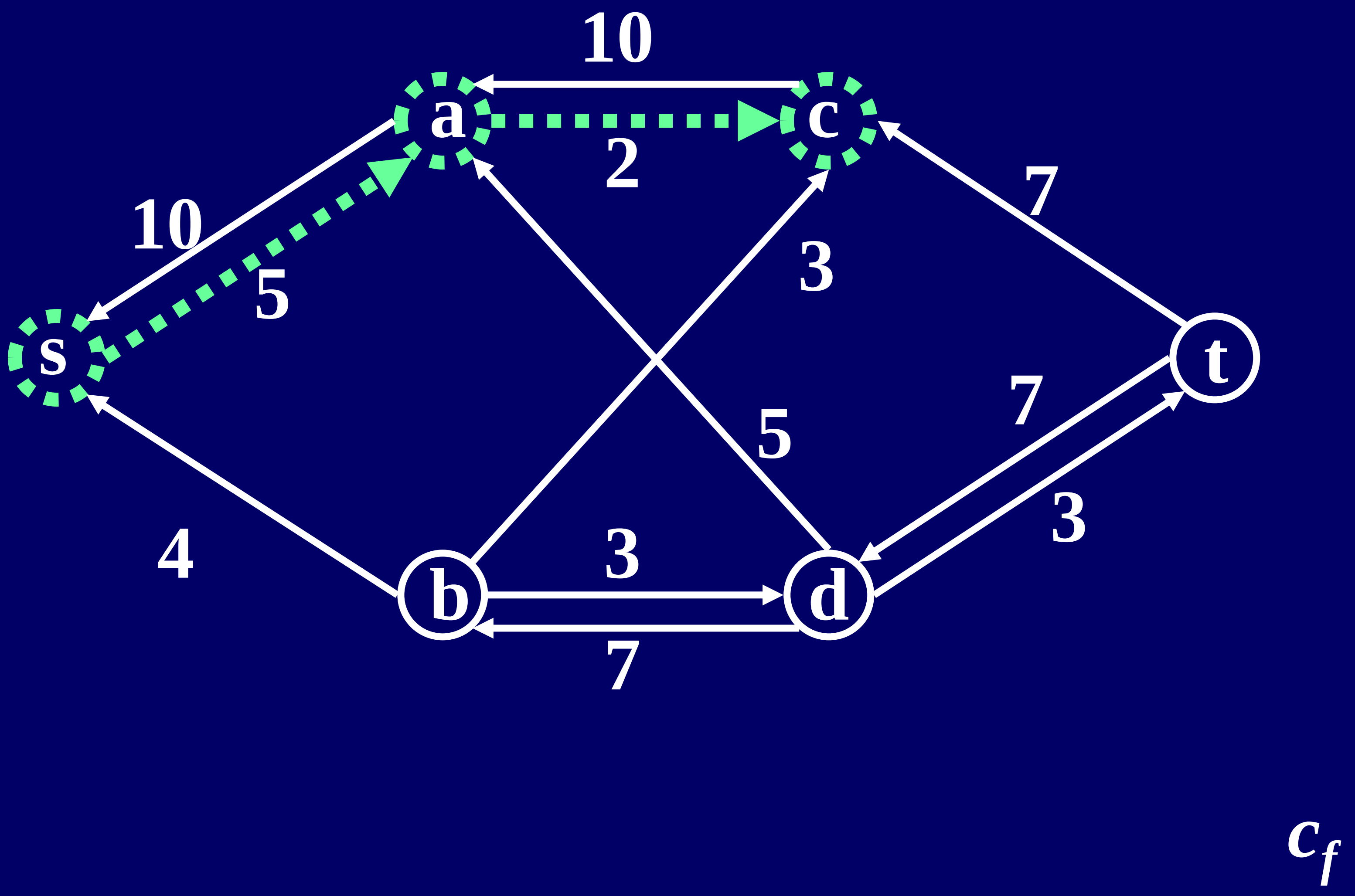
c_f

Recherche de chaîne augmentante



c_f

Recherche de chaîne augmentante



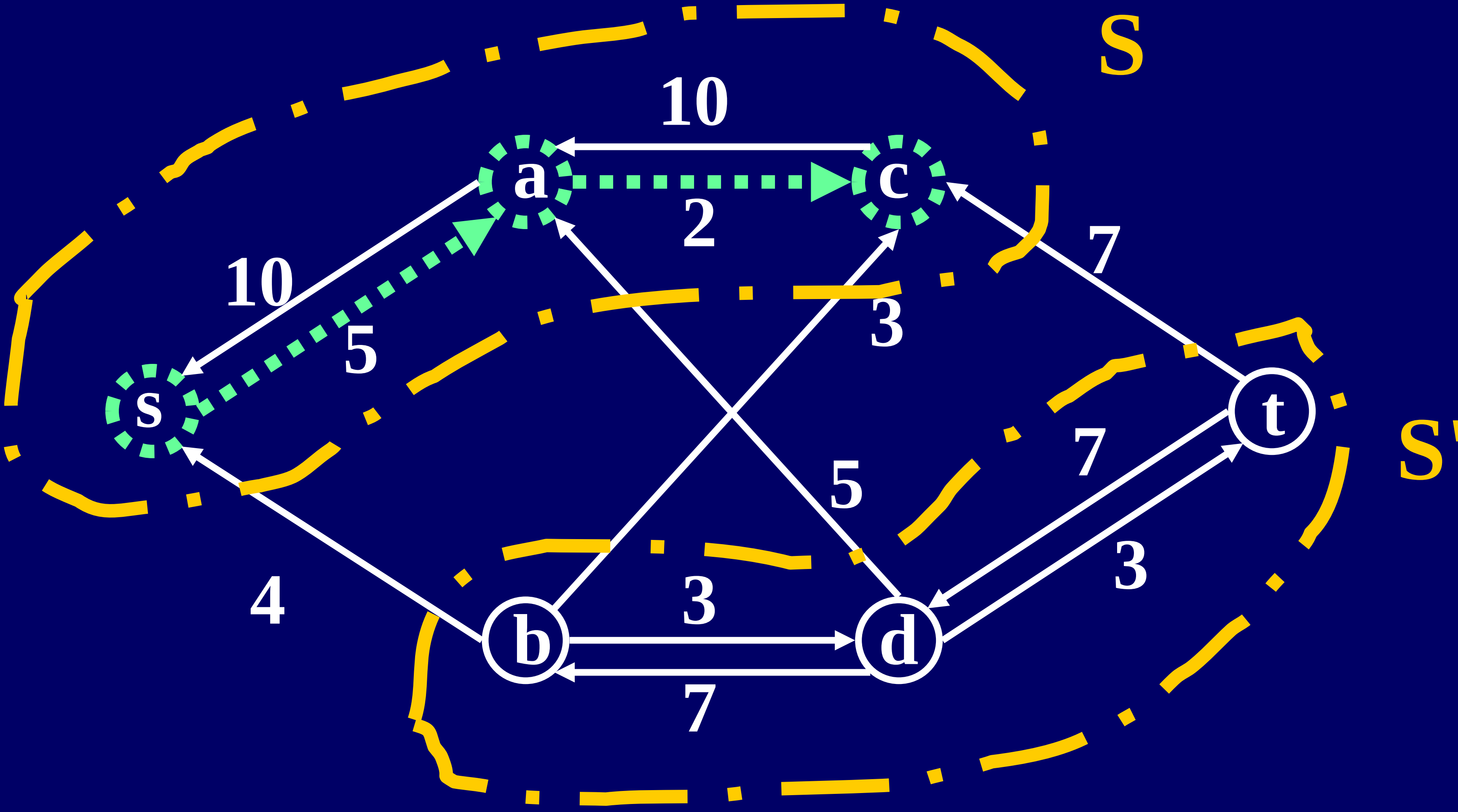
Recherche de chaîne augmentante

Mais comment continuer ?

Recherche de chaîne augmentante

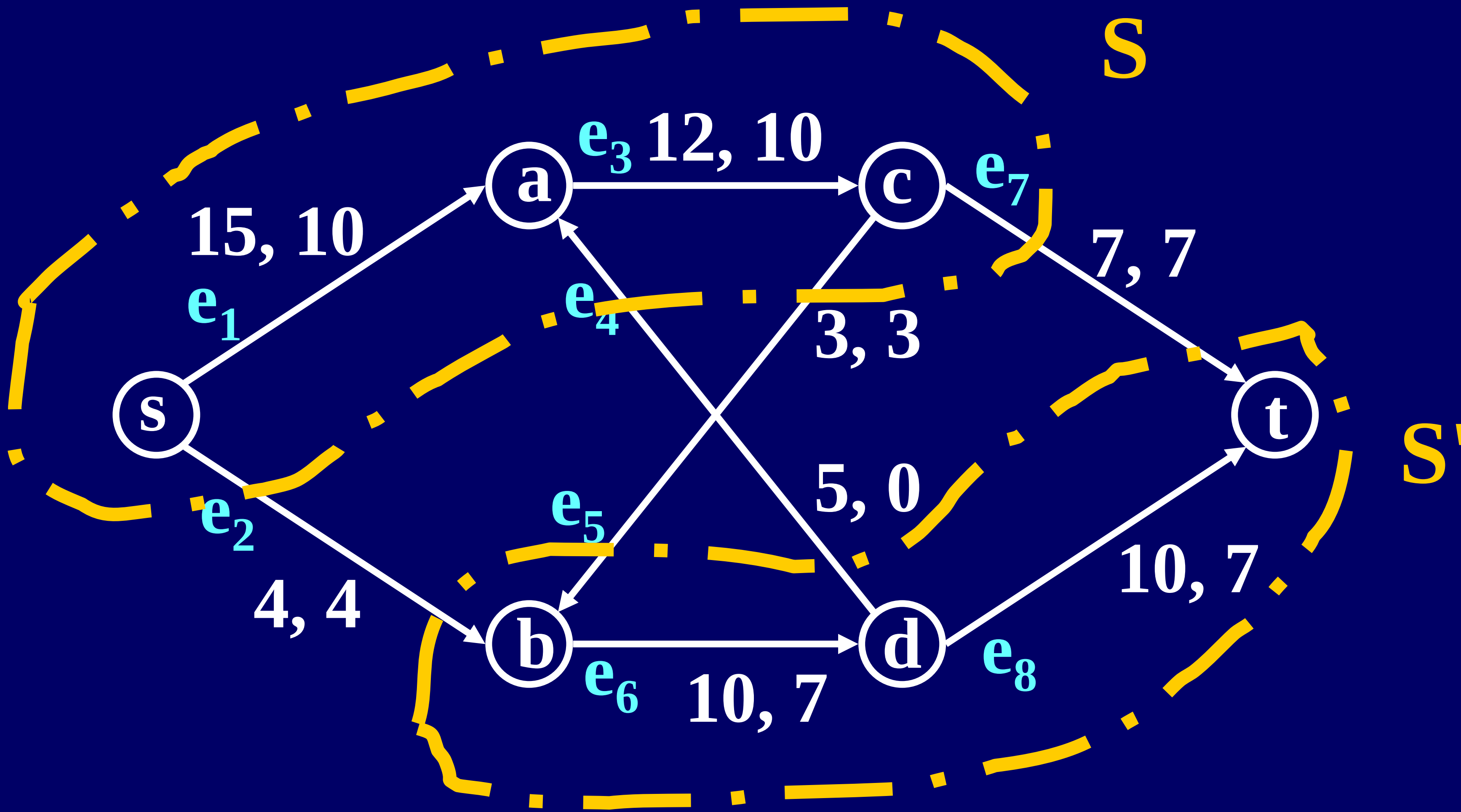
On ne peut pas !

Recherche de chaîne augmentante



Et toutes les arcs sont dans le sens S' → S.

La coupe dans le résultat



Les arcs S'→S sont de flot nul et les arcs S→S' sont saturés.

Conclusion

Le flot est maximum !

L'algorithme est terminé !

Méthode Ford & Fulkerson

tant qu'il existe une chaîne augmentante

faire

- **chercher une chaîne augmentante**
- **augmenter le flot sur la chaîne**

fait

A préciser :

- **comment chercher**
- **de combien augmenter**

Le théorème Flot-max Coupe-min

Théorème :

Soit f un flot dans un réseau G(V,E) de source s et puits t. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. **f est un flot maximum**
2. **le réseau résiduel G_f ne contient pas de chaîne augmentante**
3. **$|f| = c(S,S')$ pour une coupe (S,S') de G**

Preuve :

$3 \Rightarrow 1$

Comme $| f | \leq c(S,S')$ pour toute coupe (S,S') de G, si on a égalité, c’est un flot maximum.

$1 \Rightarrow 2$

ou plus exactement $\neg 2 \Rightarrow \neg 1$

Supposons que G_f contient une chaîne augmentante.

Ainsi, on peut augmenter f et donc f n'est pas un flot maximum.

$2 \Rightarrow 3$

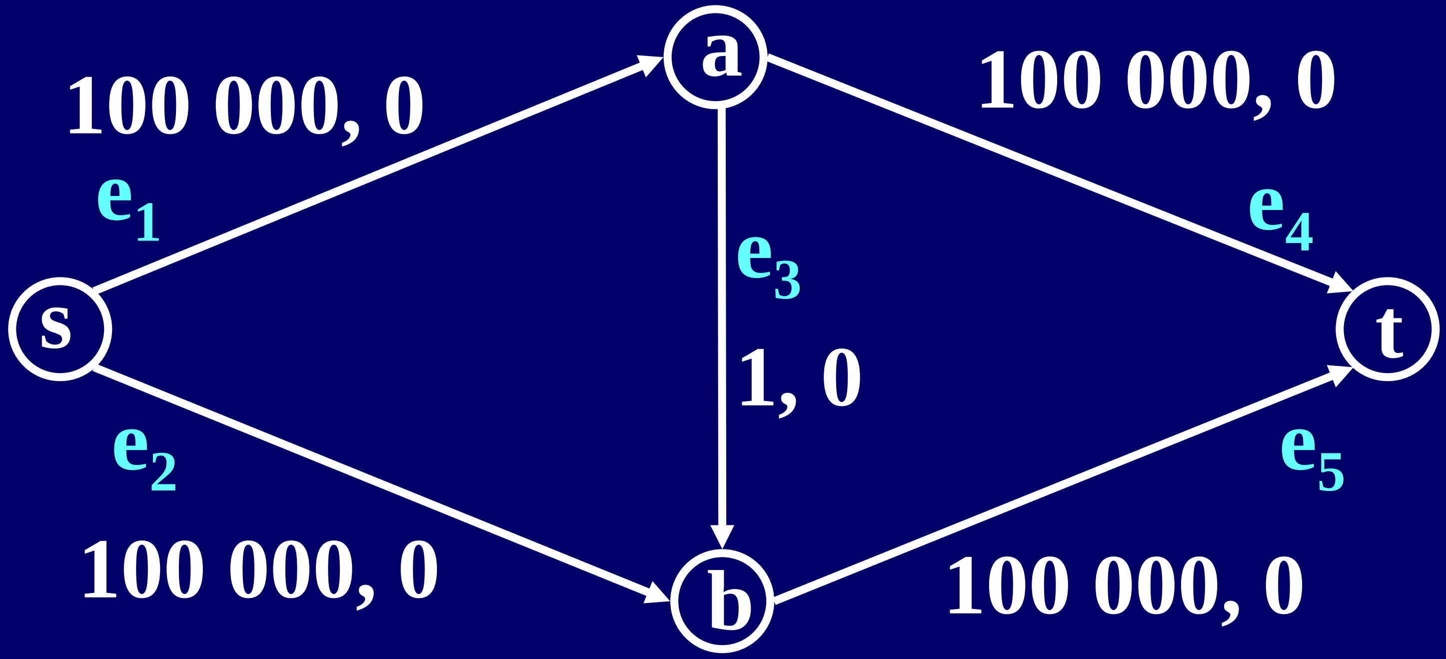
Si G_f ne contient pas de chaîne augmentante, c'est que G_f ne contient pas de chemin de *s* vers *t*. Soit $S=\{x \in V \mid \text{il existe un chemin dans } G_f \text{ de } s \text{ vers } x\}$ et soit S' = V-S.

Ainsi (S, S') est une coupe qui sépare *s* de *t* ($s \in S$ et $t \notin S$) .

Soit *uv* un arc de G, avec $u \in S$ et $v \in S'$. Comme *uv* n'est pas dans G_f, nous devons avoir $f(uv)=c(uv)$.

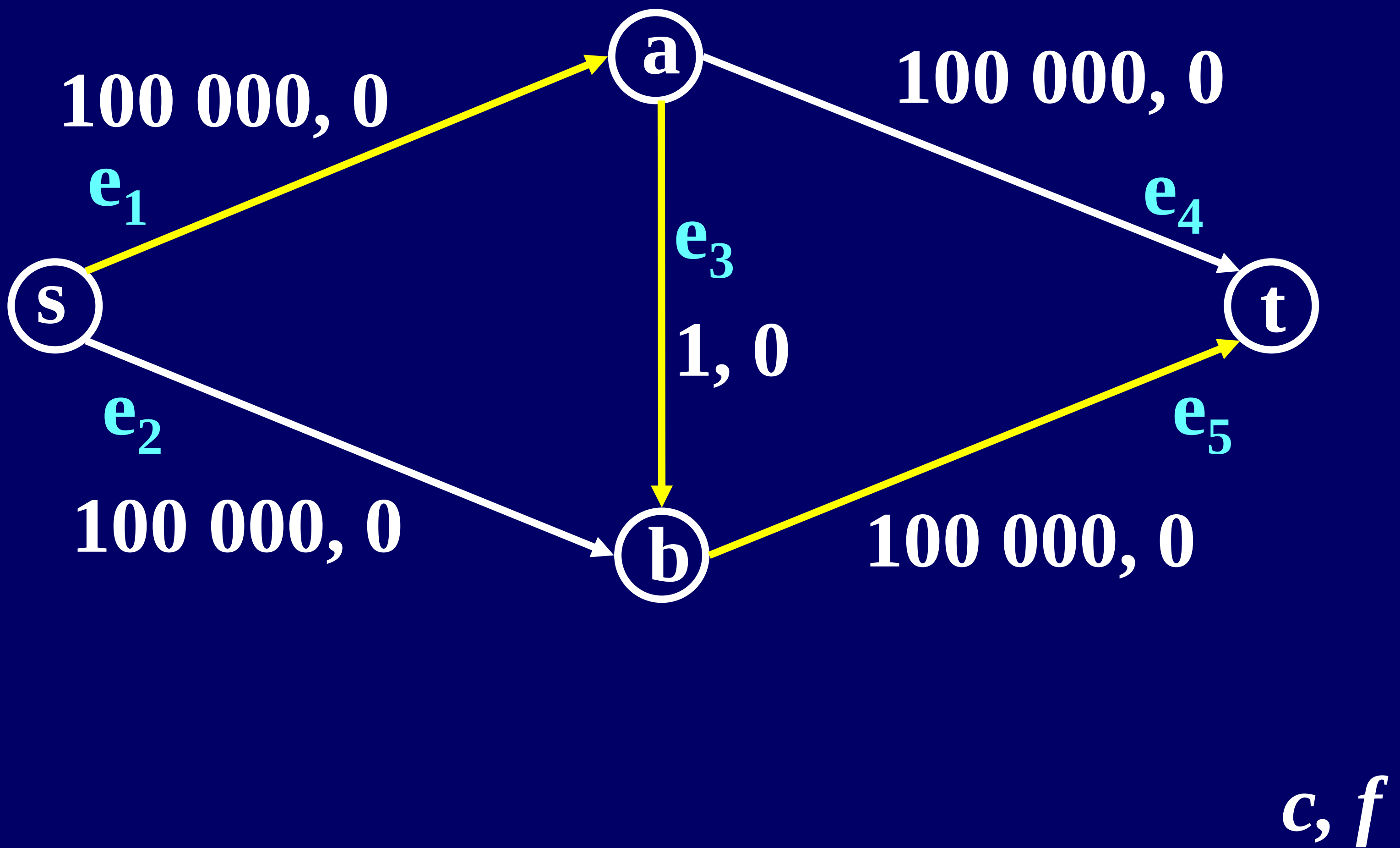
Ainsi $|f| = c(S,S')$. **CQFD**

Un petit problème (due à Karp)

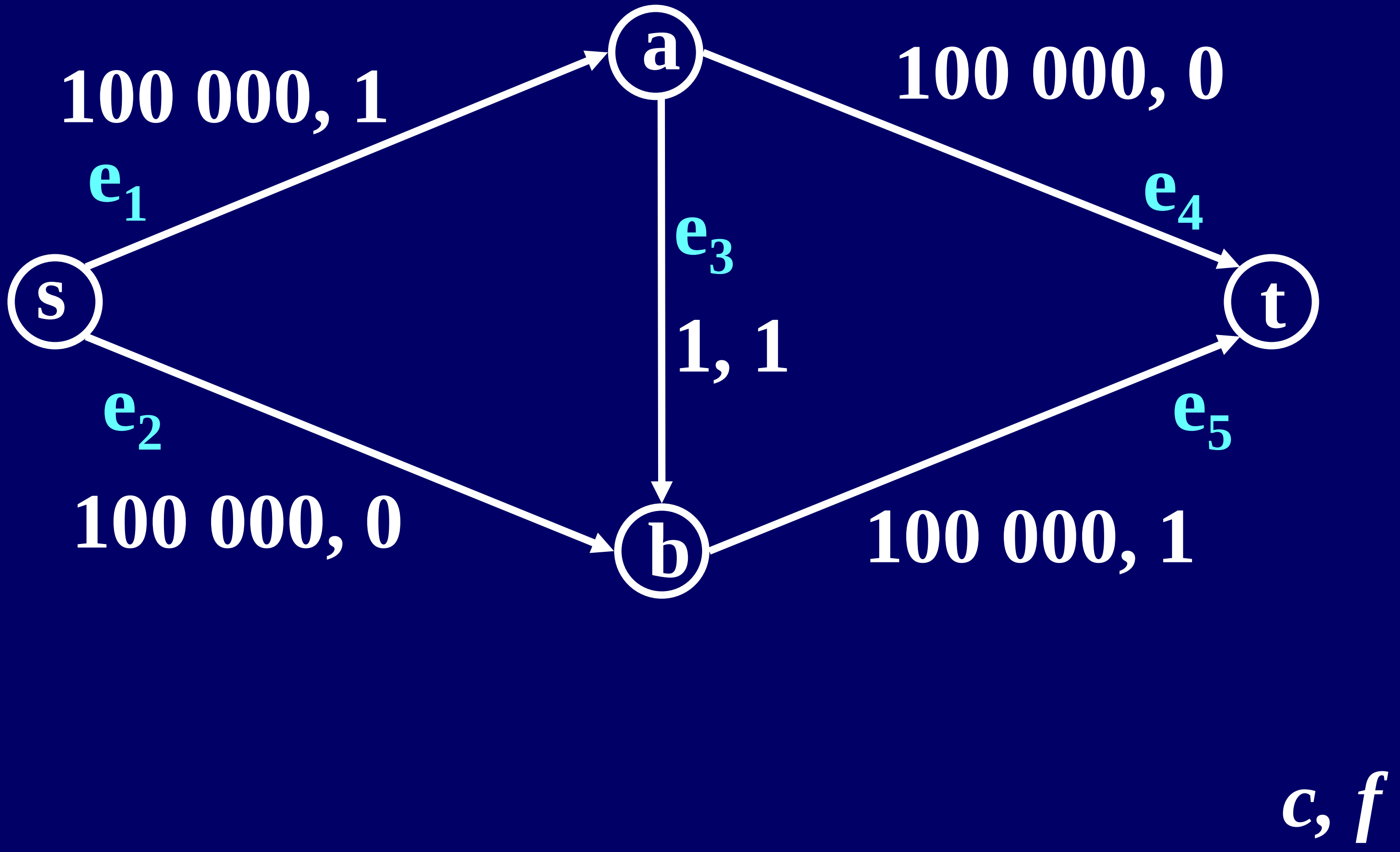


c, *f*

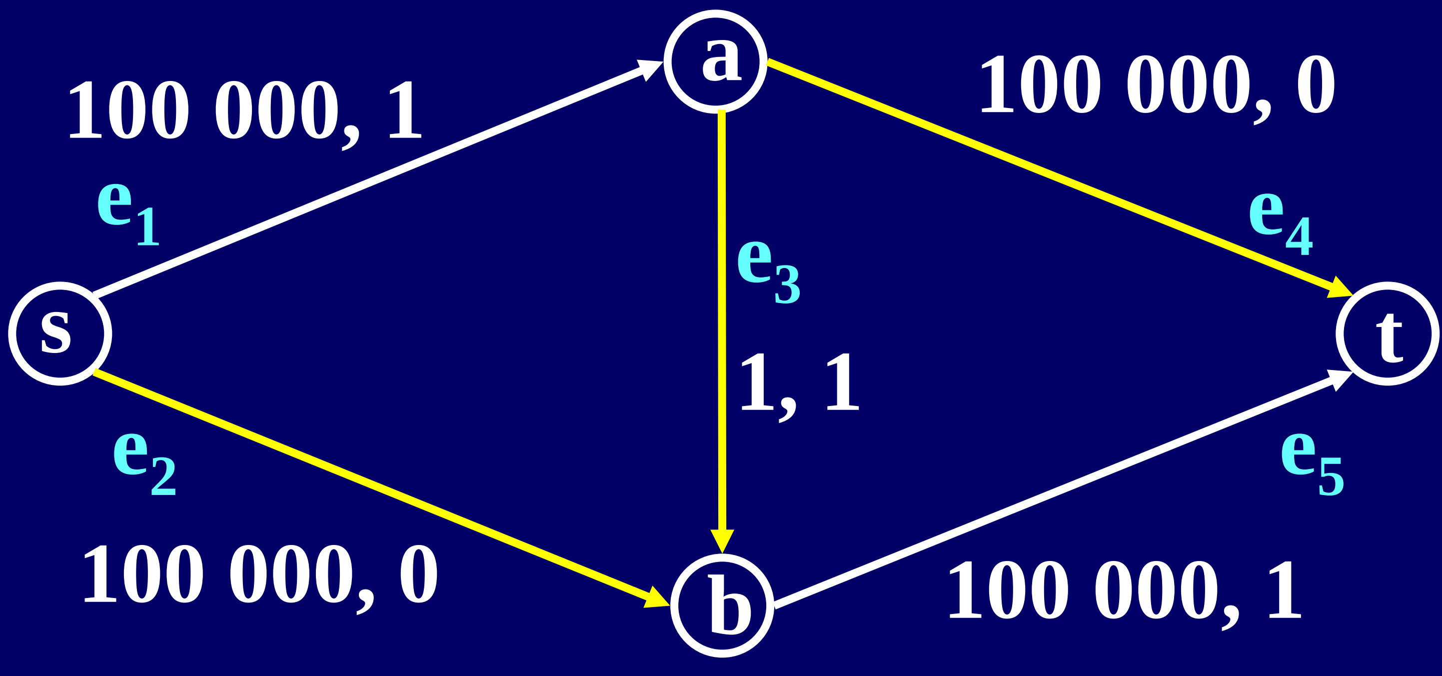
Un petit problème (due à Karp)



Un petit problème (due à Karp)

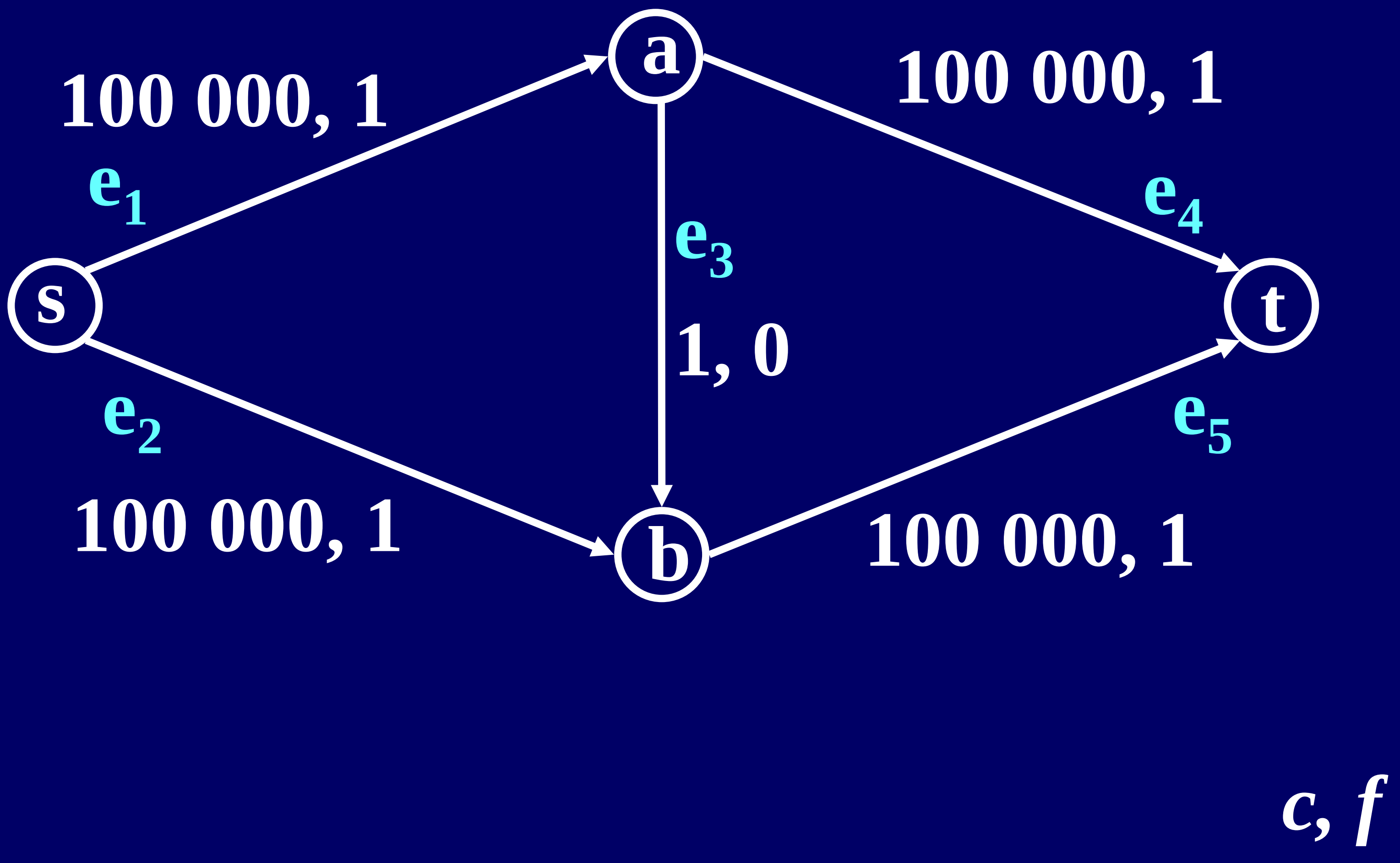


Un petit problème (due à Karp)

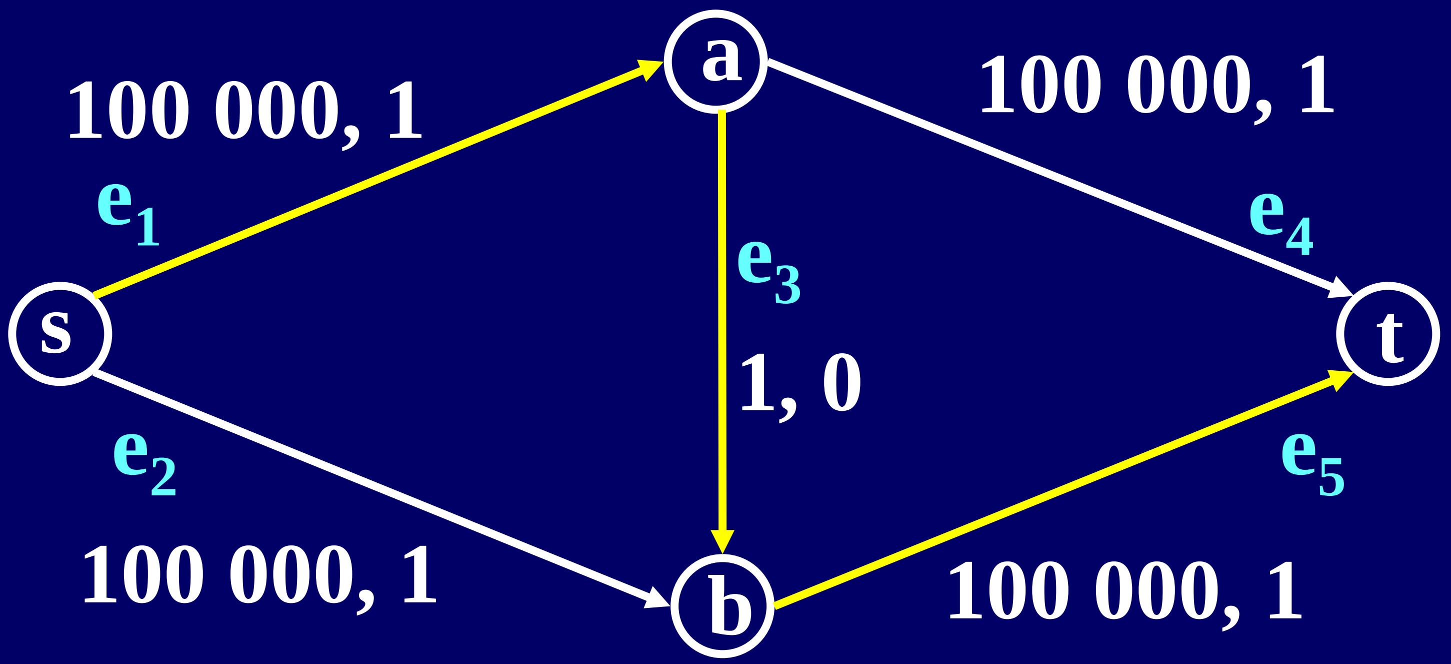


c, *f*

Un petit problème (due à Karp)

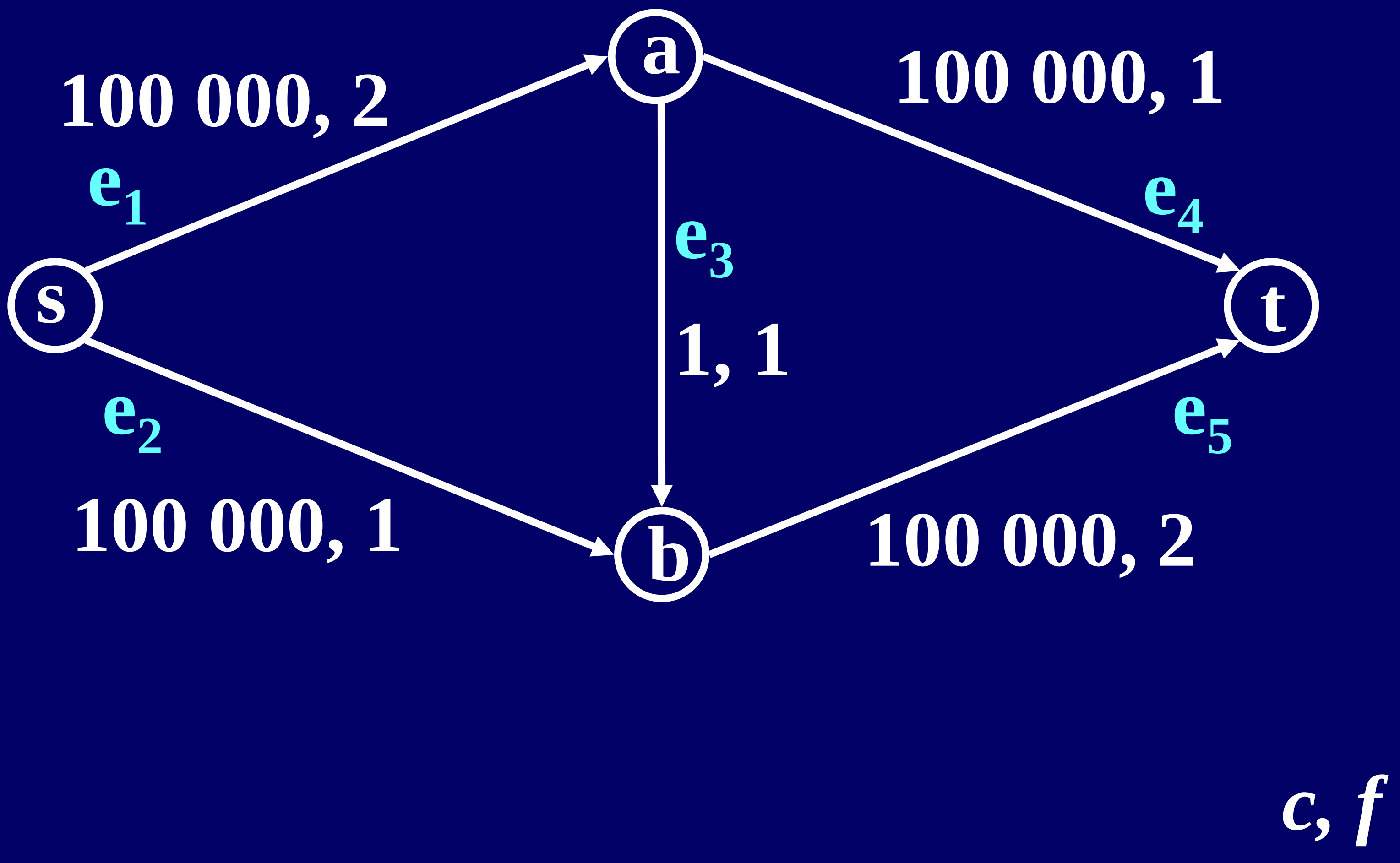


Un petit problème (due à Karp)

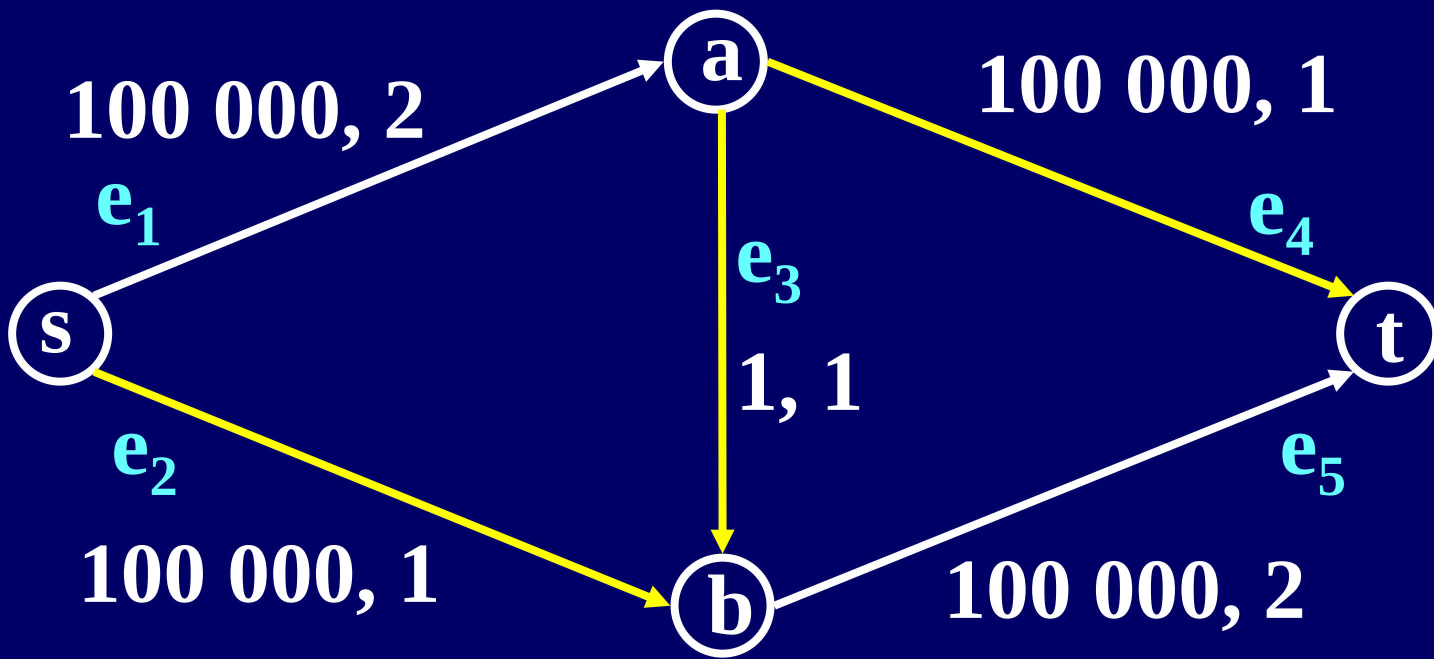


c, *f*

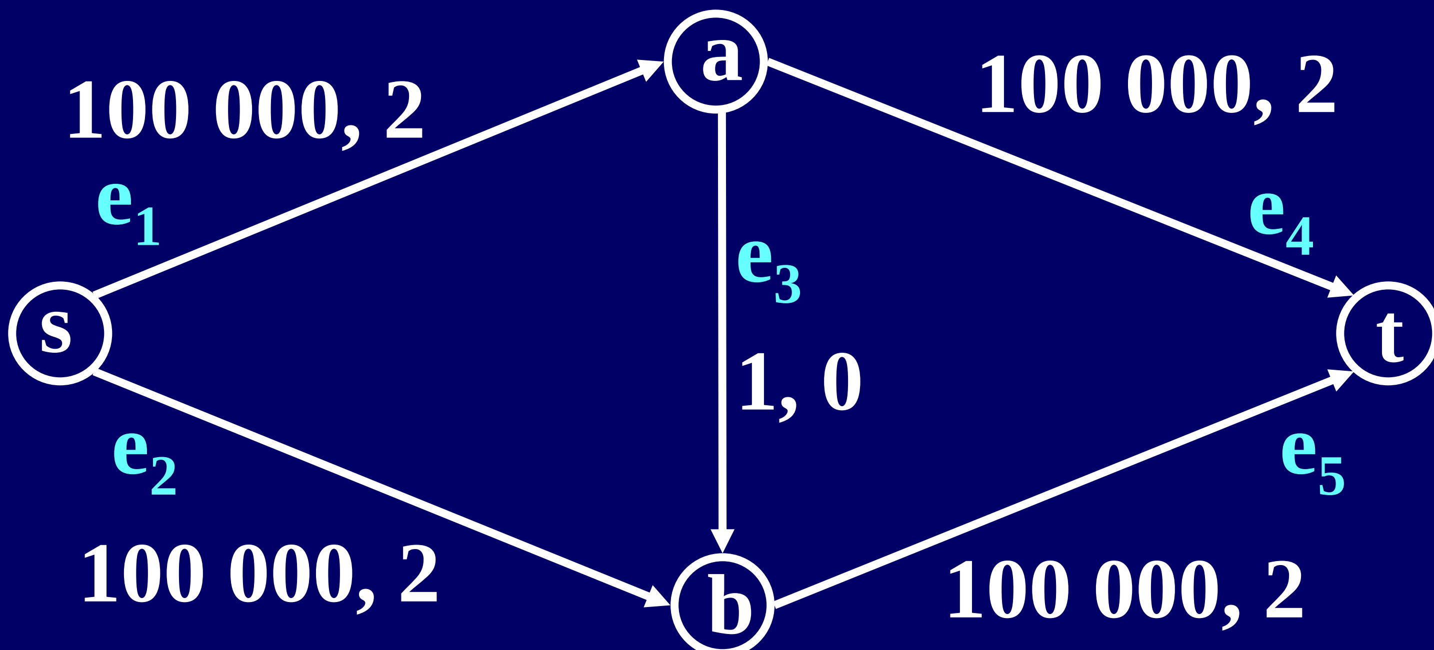
Un petit problème (due à Karp)



Un petit problème (due à Karp)

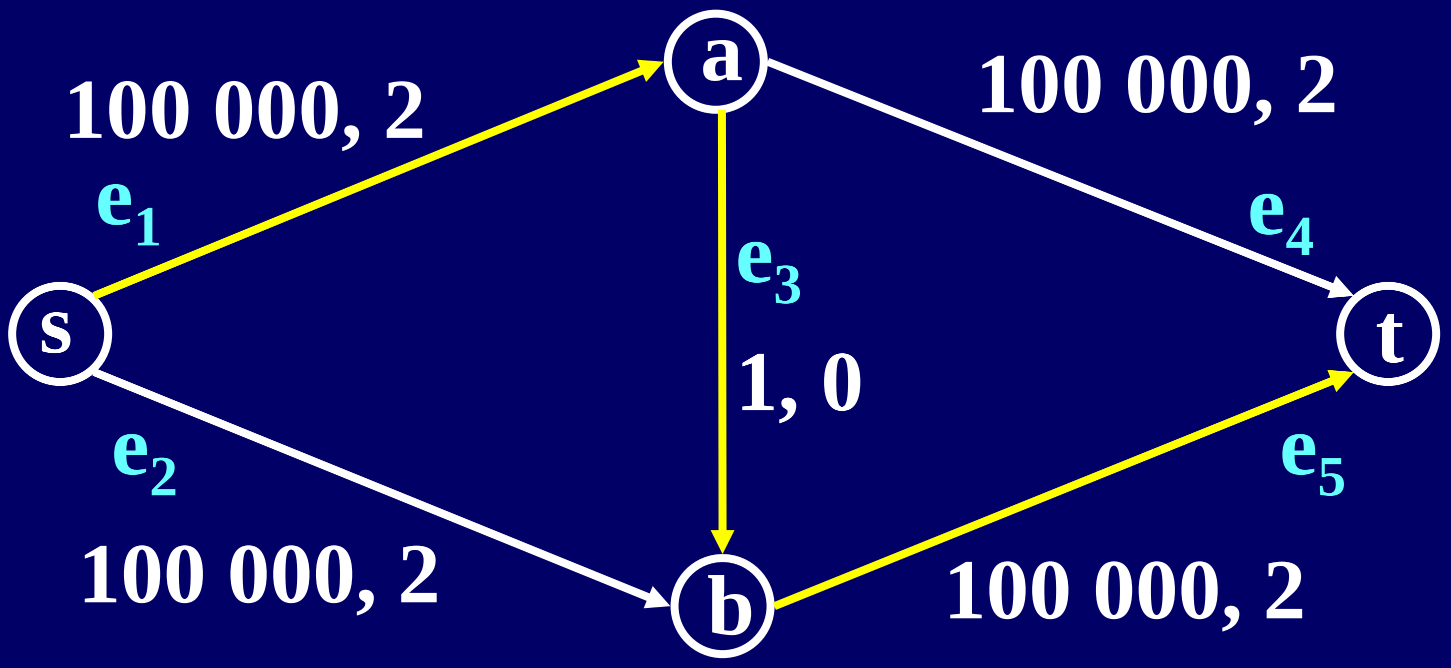


Un petit problème (due à Karp)

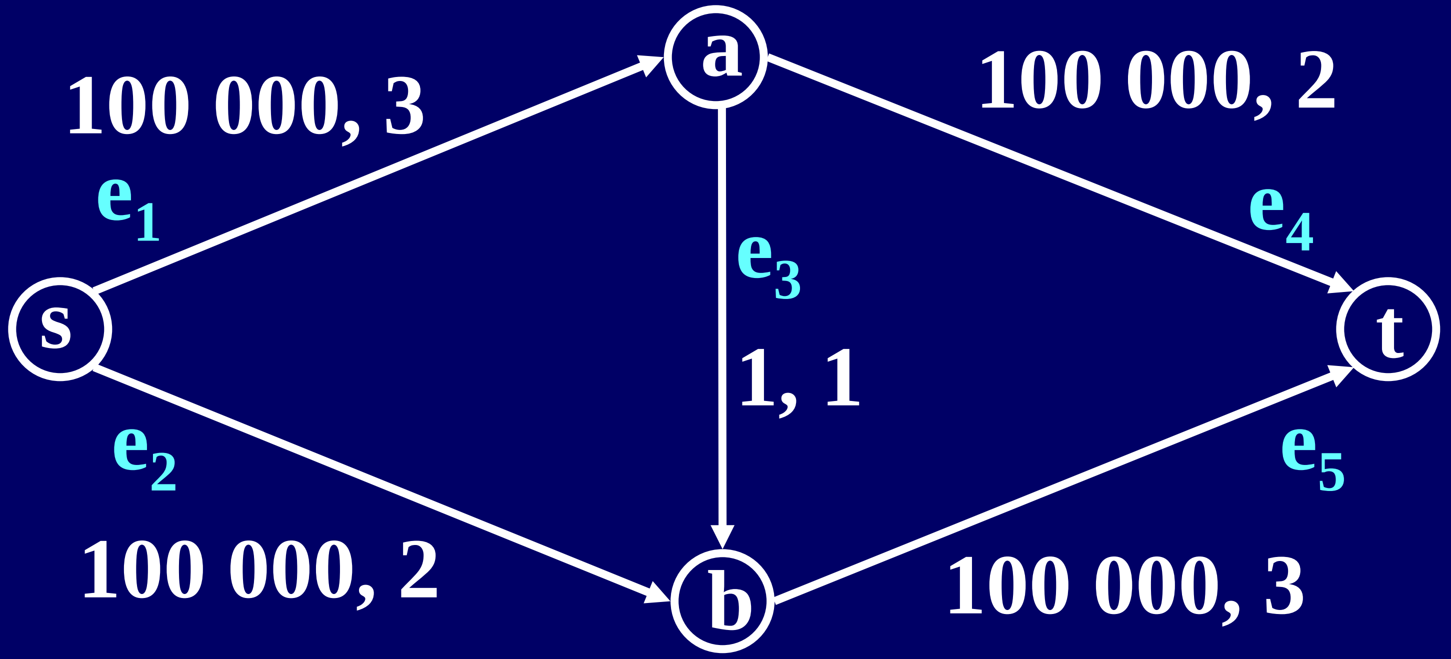


c, *f*

Un petit problème (due à Karp)

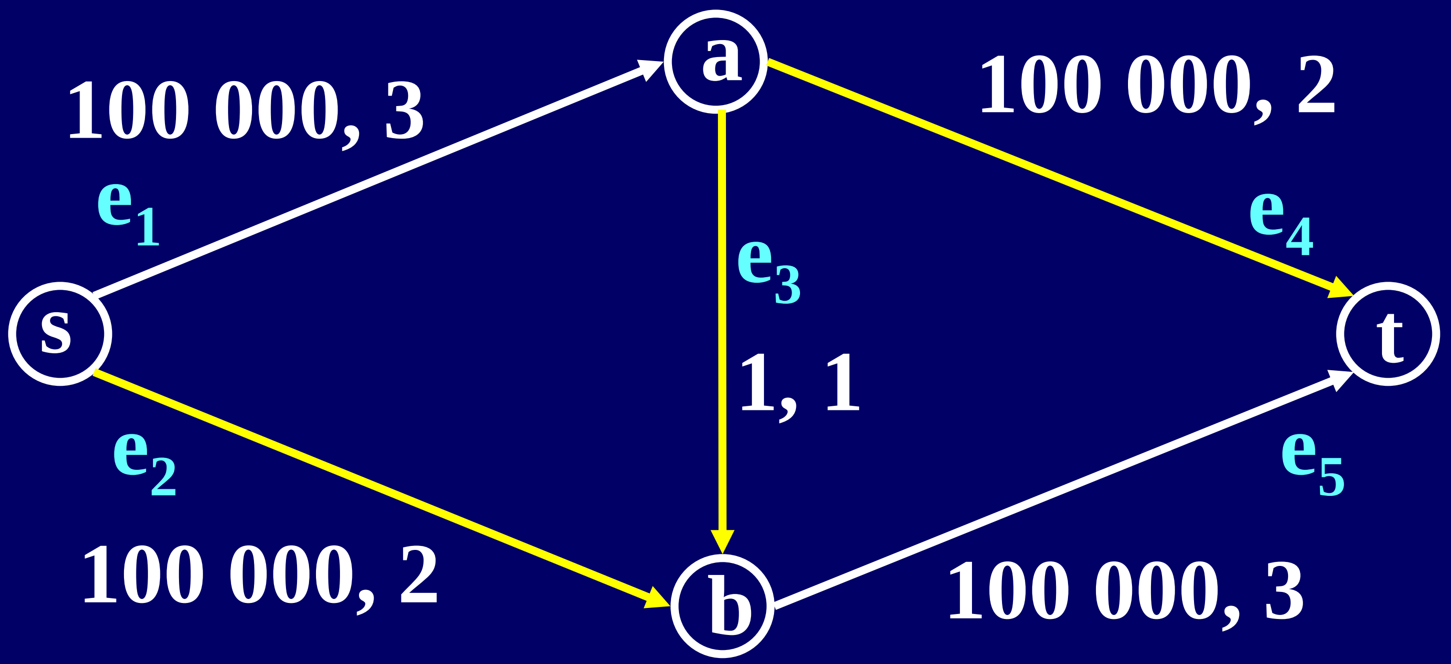


Un petit problème (due à Karp)



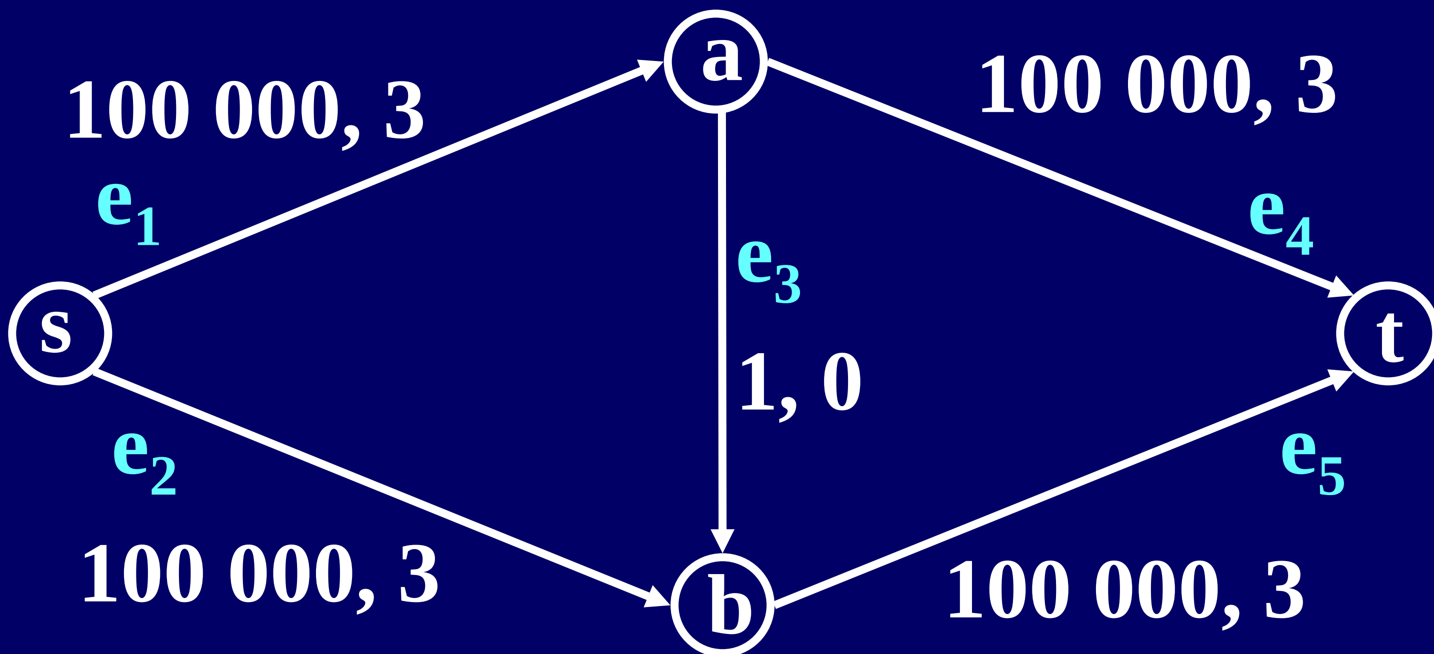
c, *f*

Un petit problème (due à Karp)



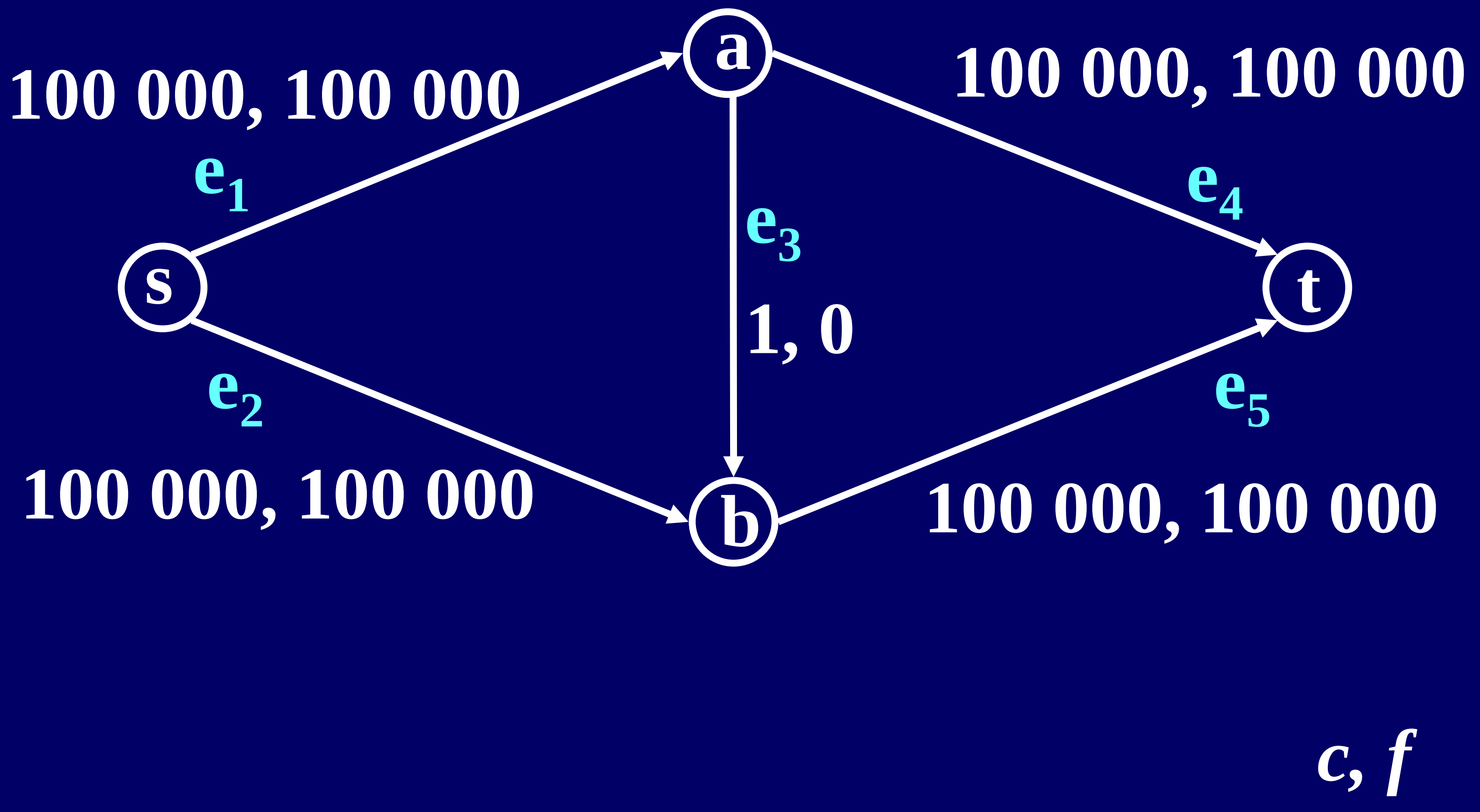
c, *f*

Un petit problème (due à Karp)



c, *f*

Le résultat final
(après 200 000 augmentations)



Conclusion

Tel quel l'algorithme n'est pas polynomial !

Que pouvons nous dire quand même ?

$$O(f_{max} |E|)$$

Pourquoi ?

Car si les capacités sont entières, alors toutes les valeurs sont toujours entières !

Version Edmonds-Karp

Il s'agit de choisir une plus courte chaîne augmentante.

Intérêt ?

Complexité en $O(n\, m^2)$

avec $n=|V|$ et $m=|E|$

Idée de la preuve

Notons $\text{dist}_f(x,y)$ la distance du sommet x au sommet y dans G_f.

Remarque (non triviale) :

la fonction $\text{dist}_f(s,t)$ est croissante (non décroissante) en f.

Corollaire :

On a au plus $O(n\ m)$ augmentations

La méthode Ford & Fulkerson avec des capacités réelles

Si les capacités sont réelles, avec la méthode de Ford & Fulkerson sont réelles on peut rencontrer deux problèmes :

- la méthode peut conduire à une suite infinie d'augmentation ;
- pire : cette suite infinie d'augmentation peut converger vers une valeur de flot plus petite que le flot maximum.

Si le temps le permet, on verra un exemple en fin de cours.

Réseaux avec bornes inf et sup

Dans les réseaux que nous avons vu précédemment,

$$f(e) \geq 0.$$

Dans un cas plus général : toute arête e dispose de deux bornes, $b(e)$ et $c(e)$ et on exige

$$b(e) \leq f(e) \leq c(e)$$

Ford & Fulkerson ?

Peut-on adapter

l'algorithme de Ford & Fulkerson ?

OUI …. mais …..

Réseau résiduel

Si on a un arc de *u* vers *v*, alors

on met dans G_f un arc de *u* vers *v* de capacité

$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$

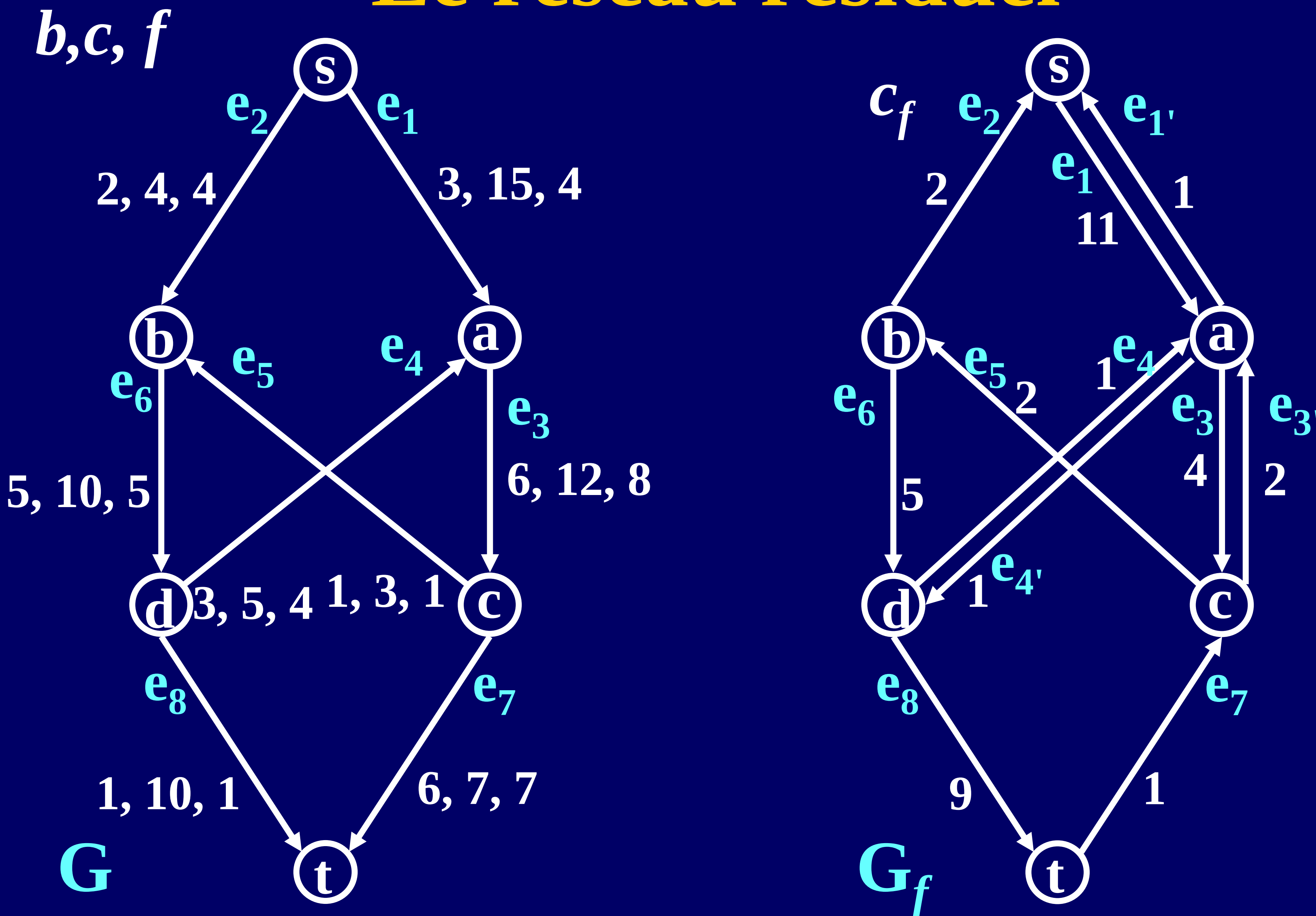
(si $c(u,v) > f(u,v)$)

on met dans G_f un arc de *v* vers *u* de capacité

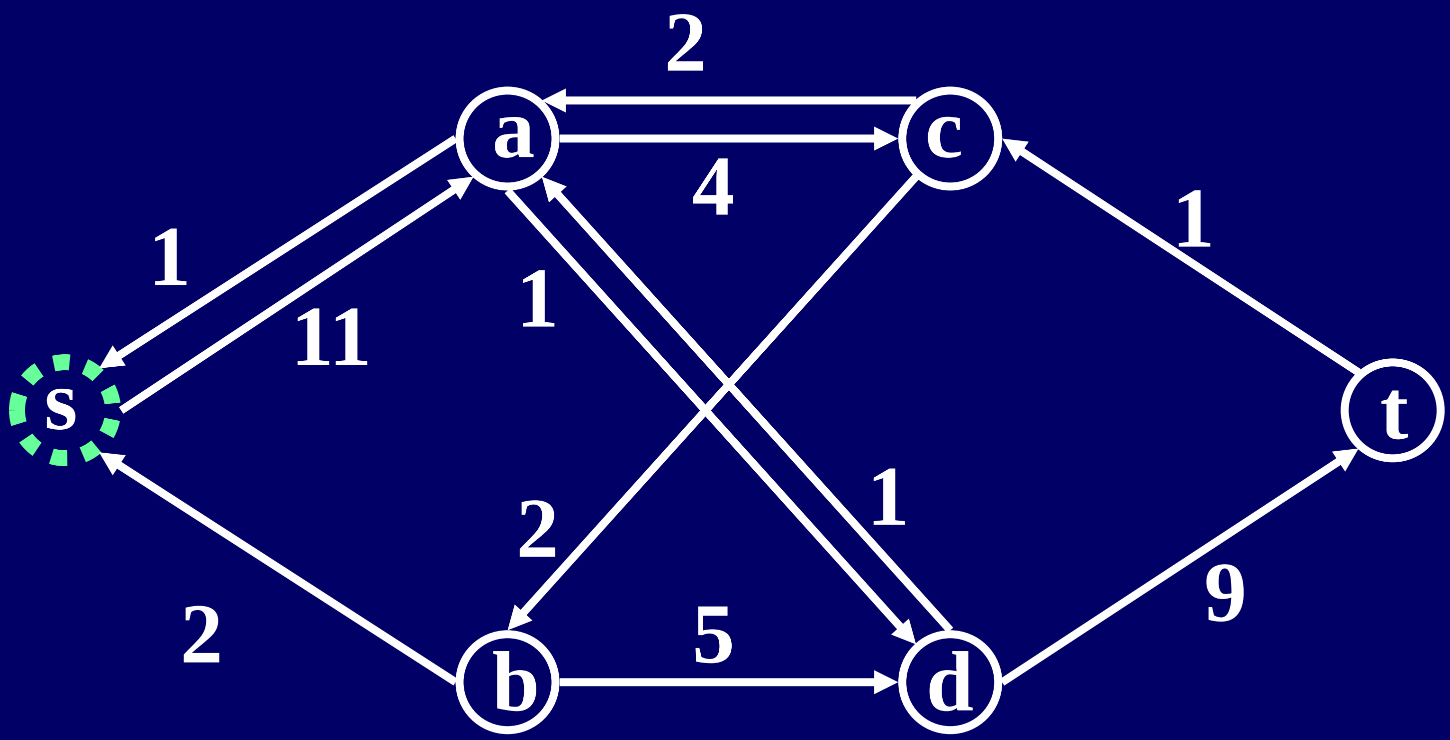
$$c_f(v,u) = f(u,v) - b(u,v)$$

($f(u,v) > b(u,v)$)

Le réseau résiduel

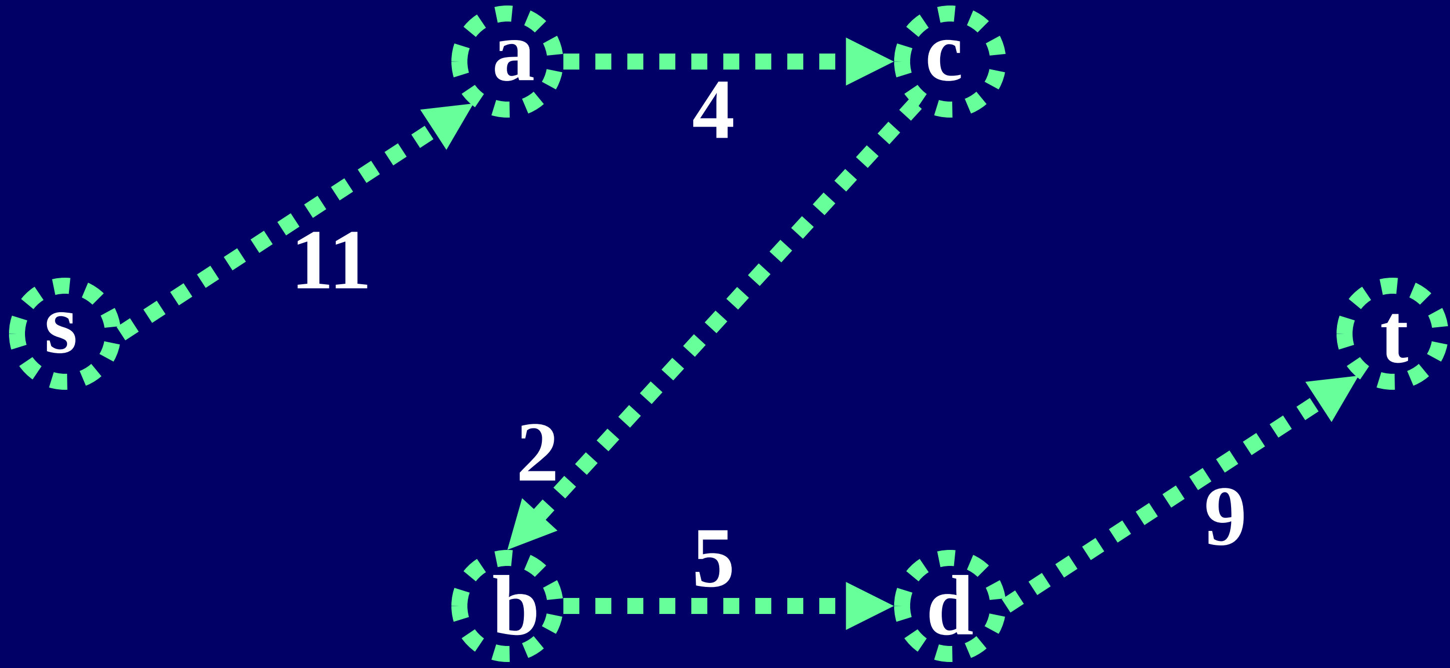


Recherche de chaîne augmentante



c_f

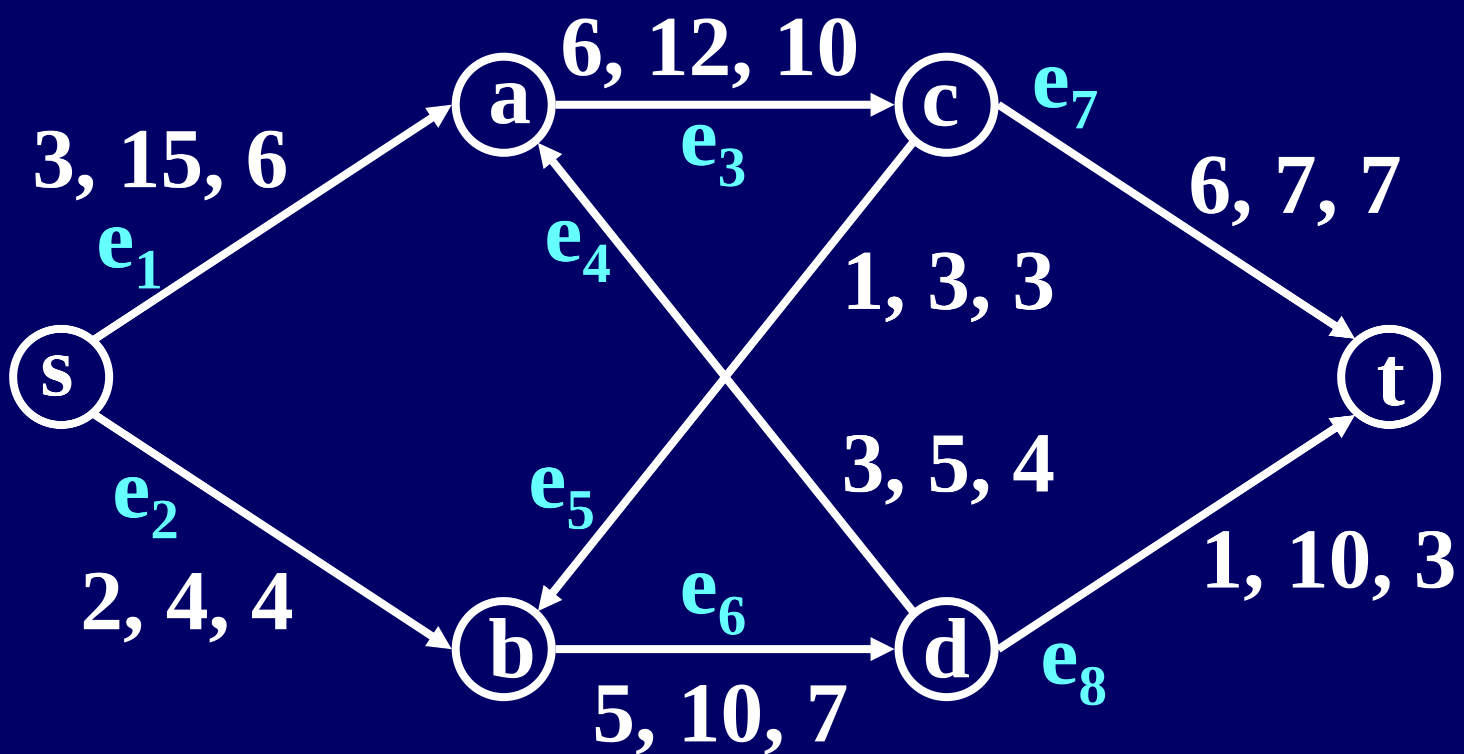
La chaîne augmentante



c_f

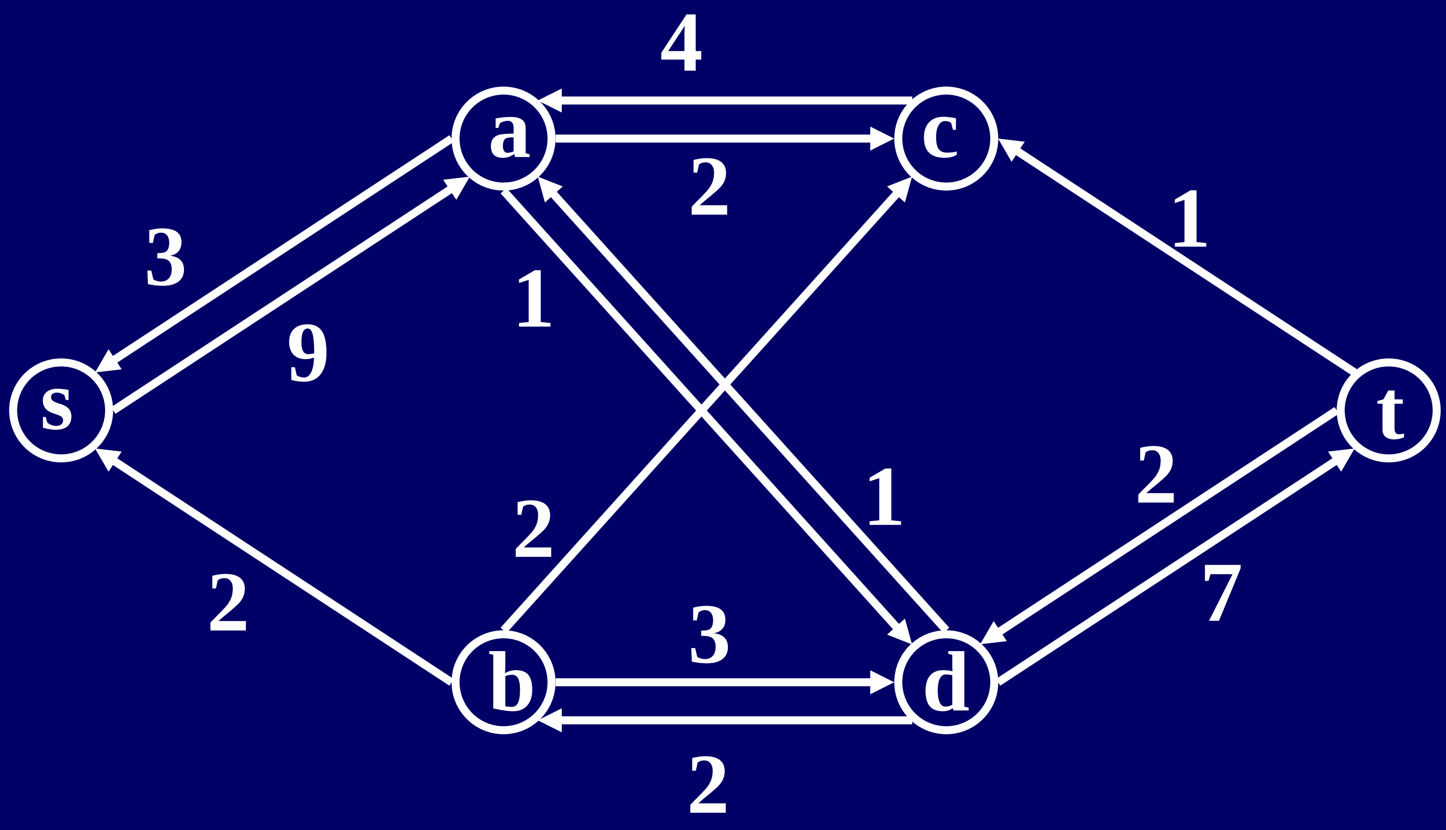
On peut faire une augmentation de min{11,4,2,5,9}=2.

Le flot résultant



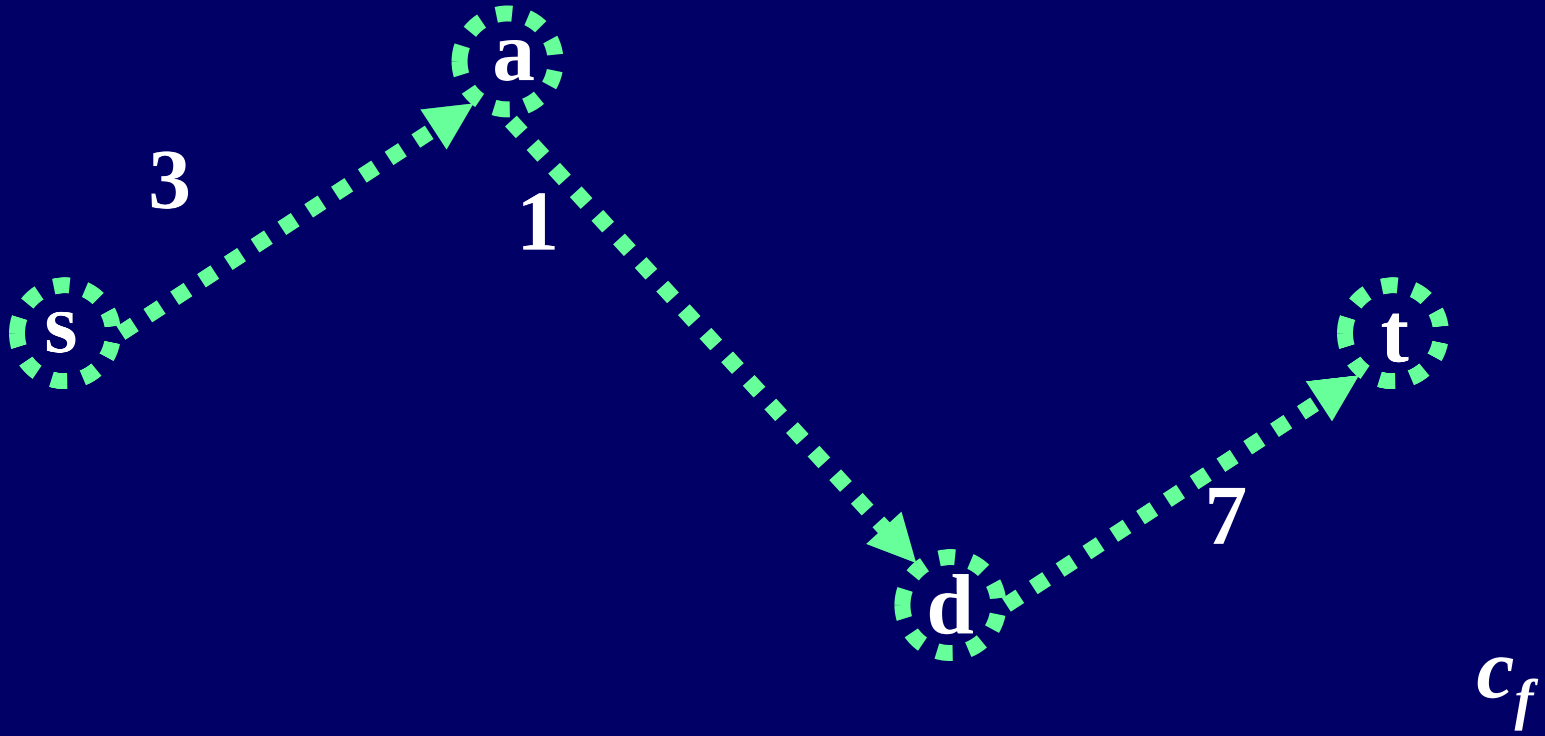
b, *c*, *f*

Le réseau résiduel



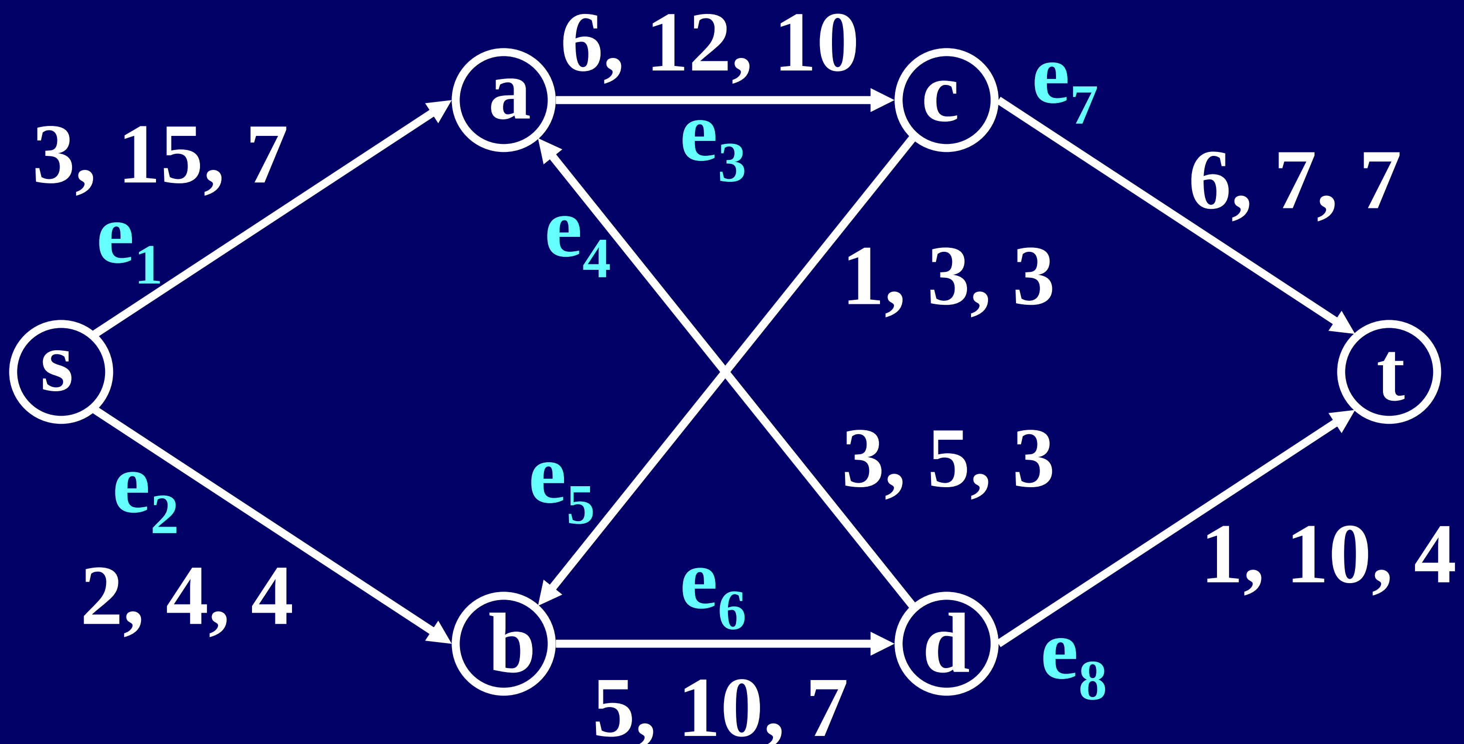
c_f

La chaîne augmentante



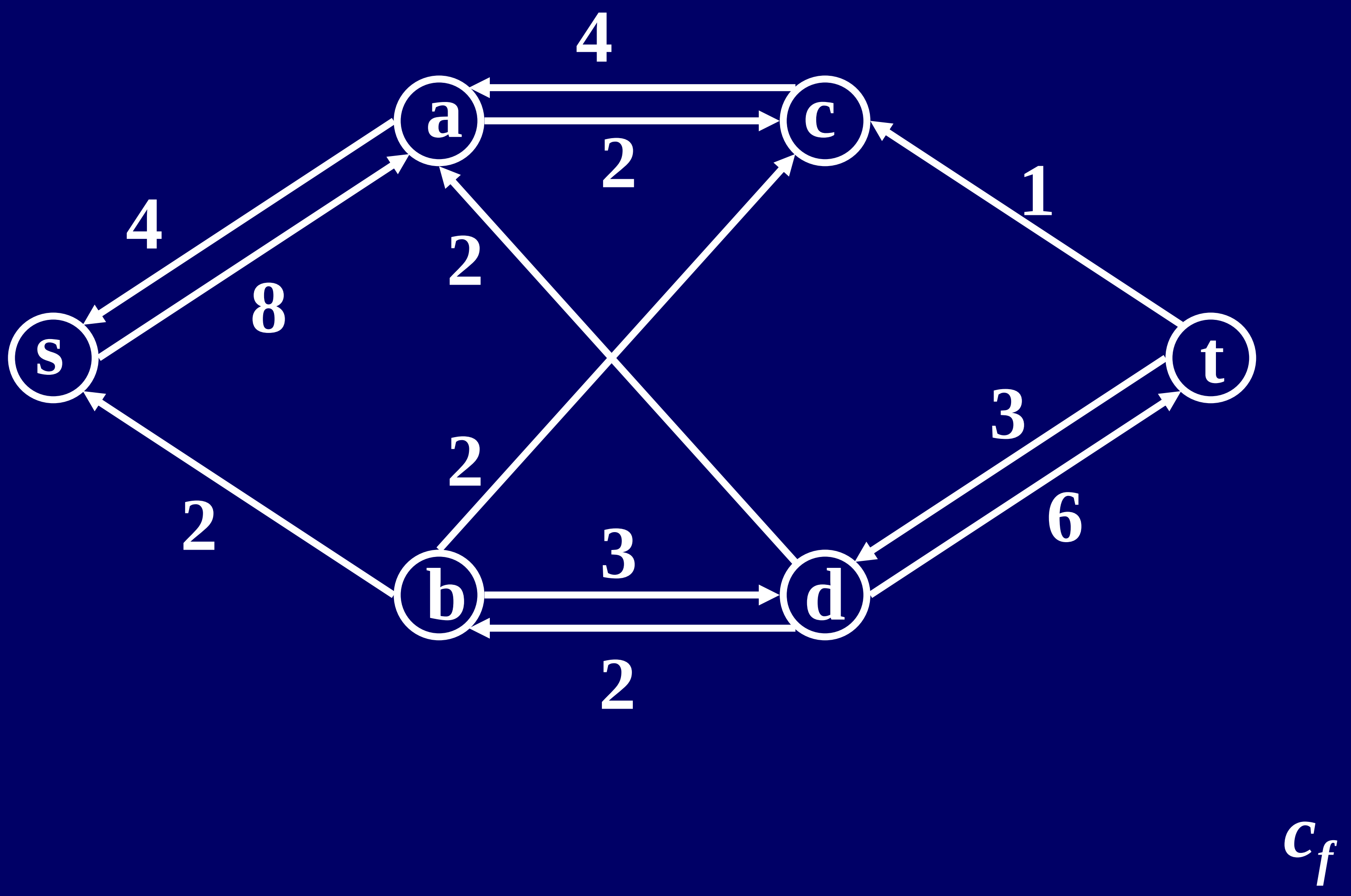
On peut faire une augmentation de min{3,1,7}=1.

Le flot résultant

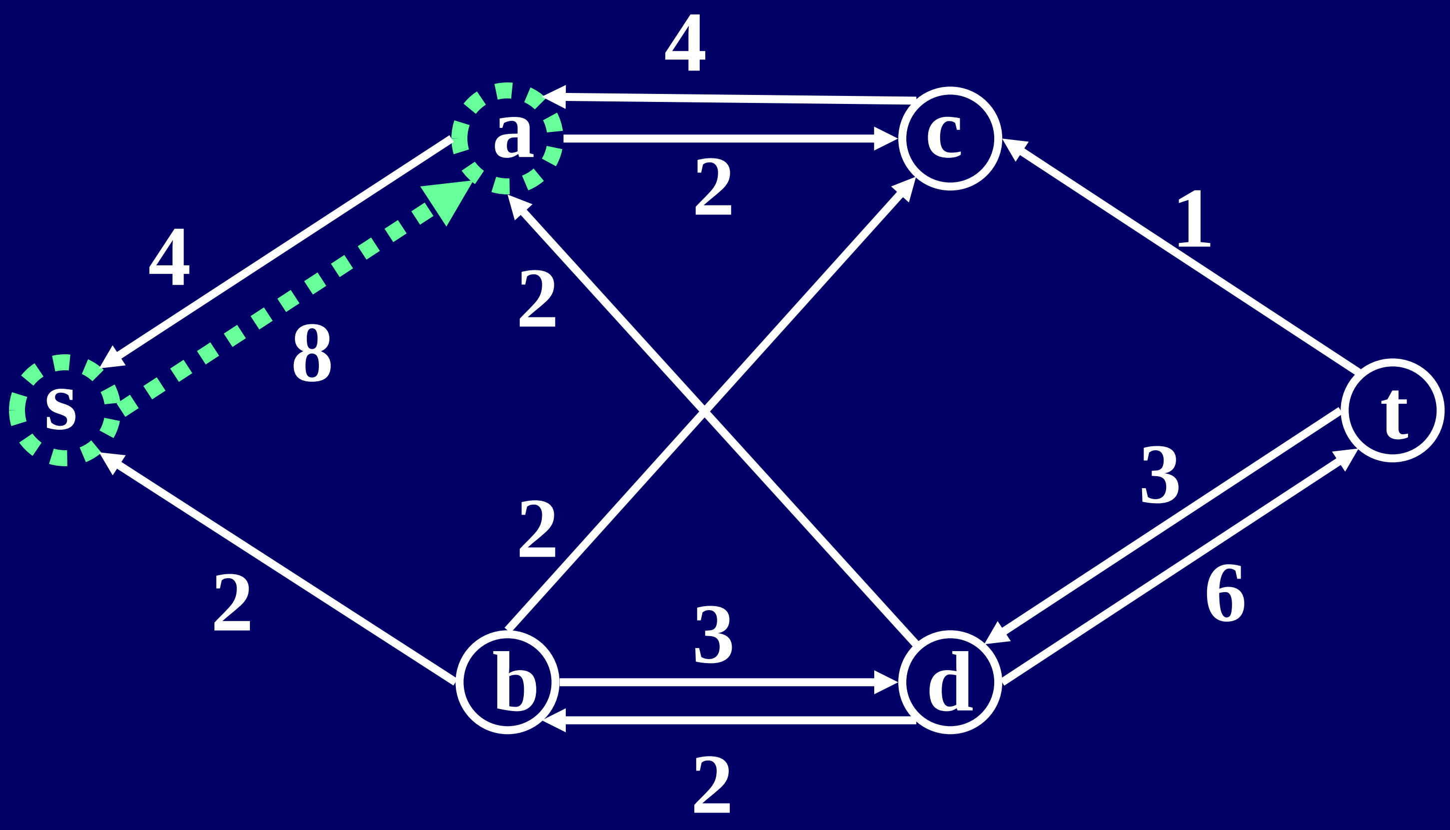


b, *c*, *f*

Le réseau résiduel

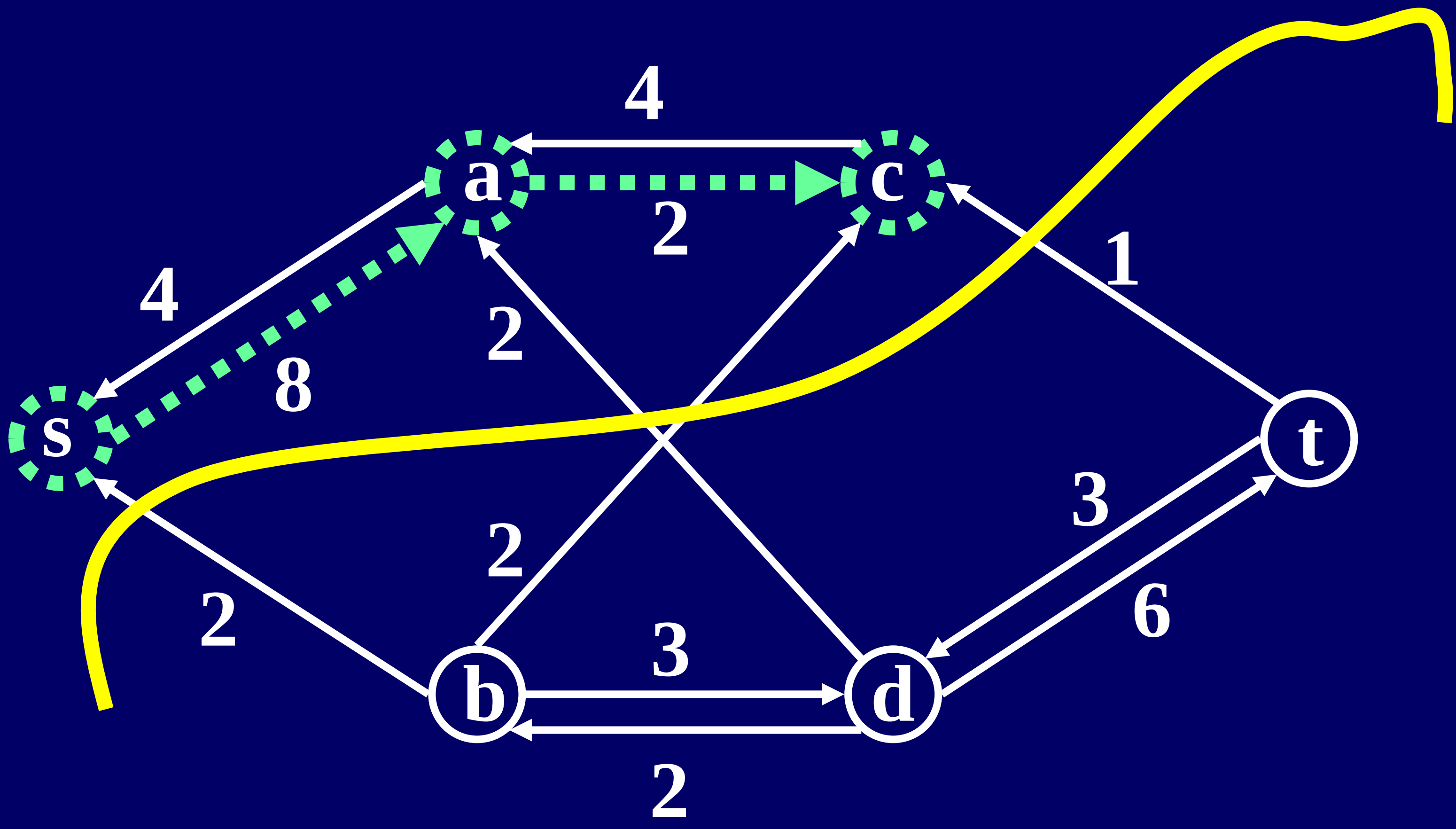


Recherche de chaîne augmentante



c_f

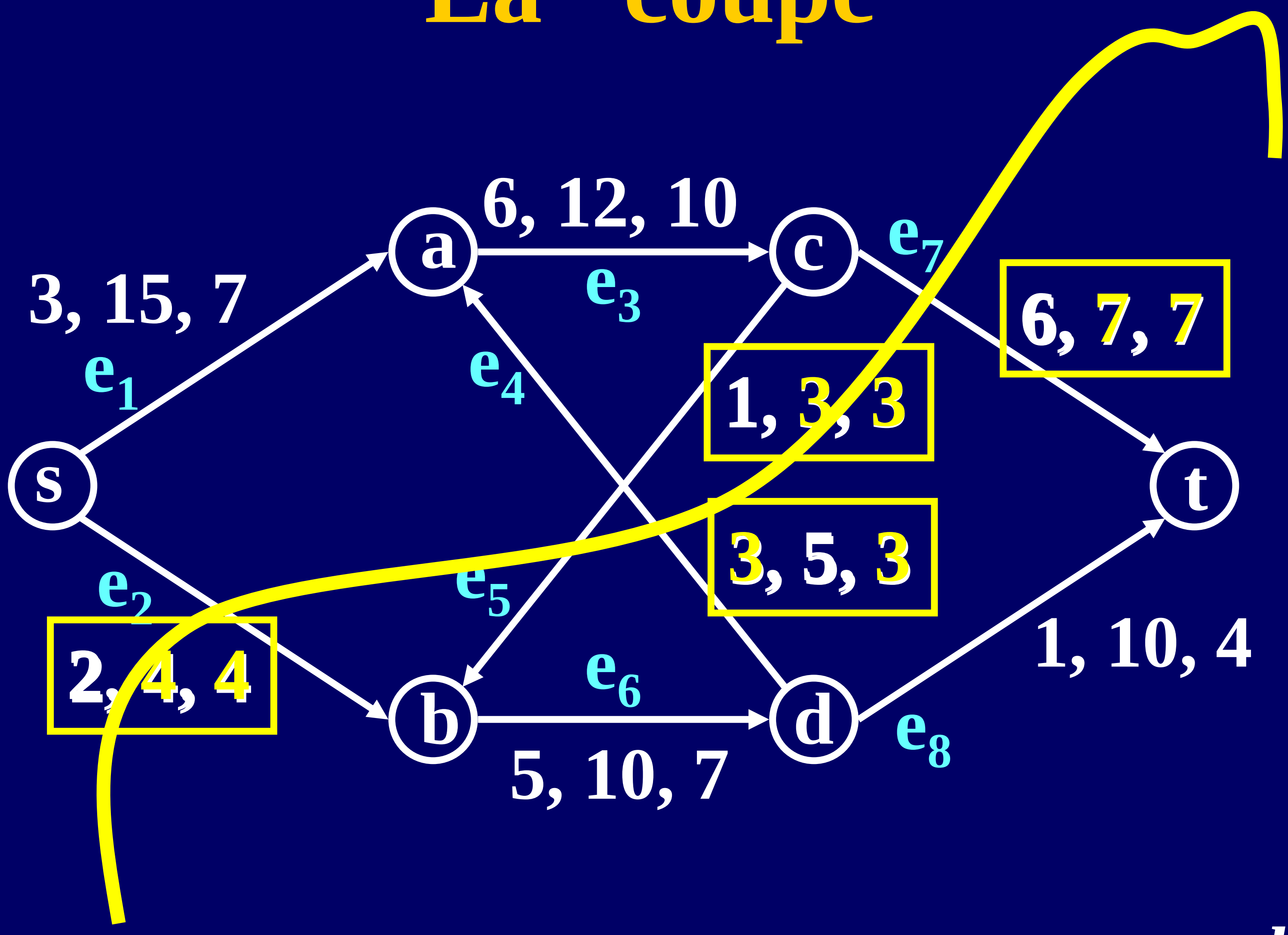
Recherche de chaîne augmentante



Et on ne peut plus continuer !

c_f

La "coupe"


6, 12, 10
a
c
e7
e3
3, 15, 7
6, 7, 7
e4
e1
1, 3, 3
s
t
3, 5, 3
e5
e2
1, 10, 4
2, 4, 4
e6
b
d
e8
5, 10, 7

b, *c*, *f*

La coupe

Définition : $c(S) = \Sigma_{e \in (S;S')} c(e) - \Sigma_{e \in (S';S)} b(e)$

Propriété : **pour tout flot f et pour toute coupe S**

$$| f | \leq c(S)$$

Corollaire : **Si** $| f | = c(S)$ **alors le flot est maximum et la coupe S est de capacité minimum.**

La coupe (suite)

Le théorème du flot max – coupe min se déduit exactement comme dans le cas précédent;

Mais …

Il reste un seul problème …

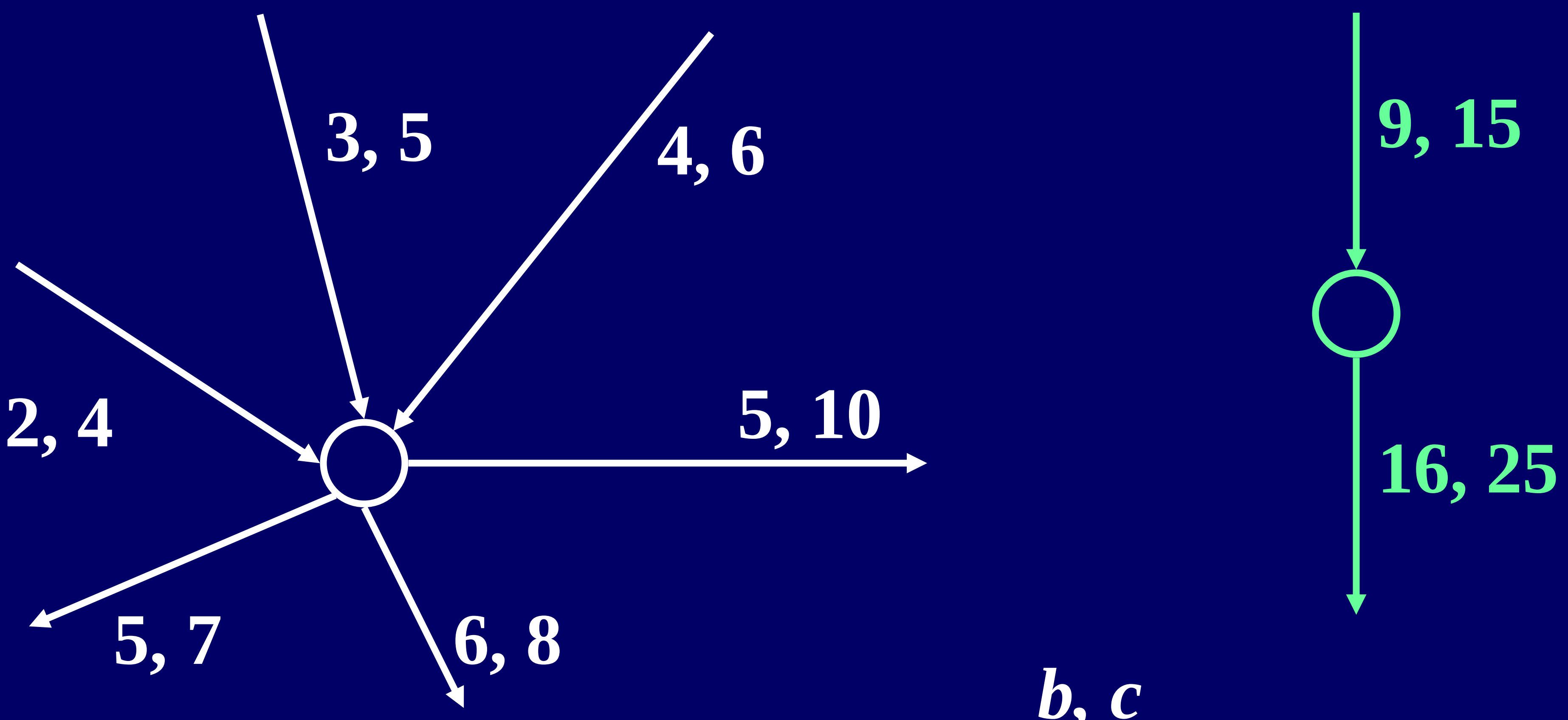
Dans le cas classique, nous avons commencé avec un flot nul, puis augmenté

Mais ici un flot nul n'est pas un flot "correcte" (ne respecte pas $b(e) \leq f(e)$)

Un flot "correcte" on appelle un flot admissible.

Recherche de flot admissible

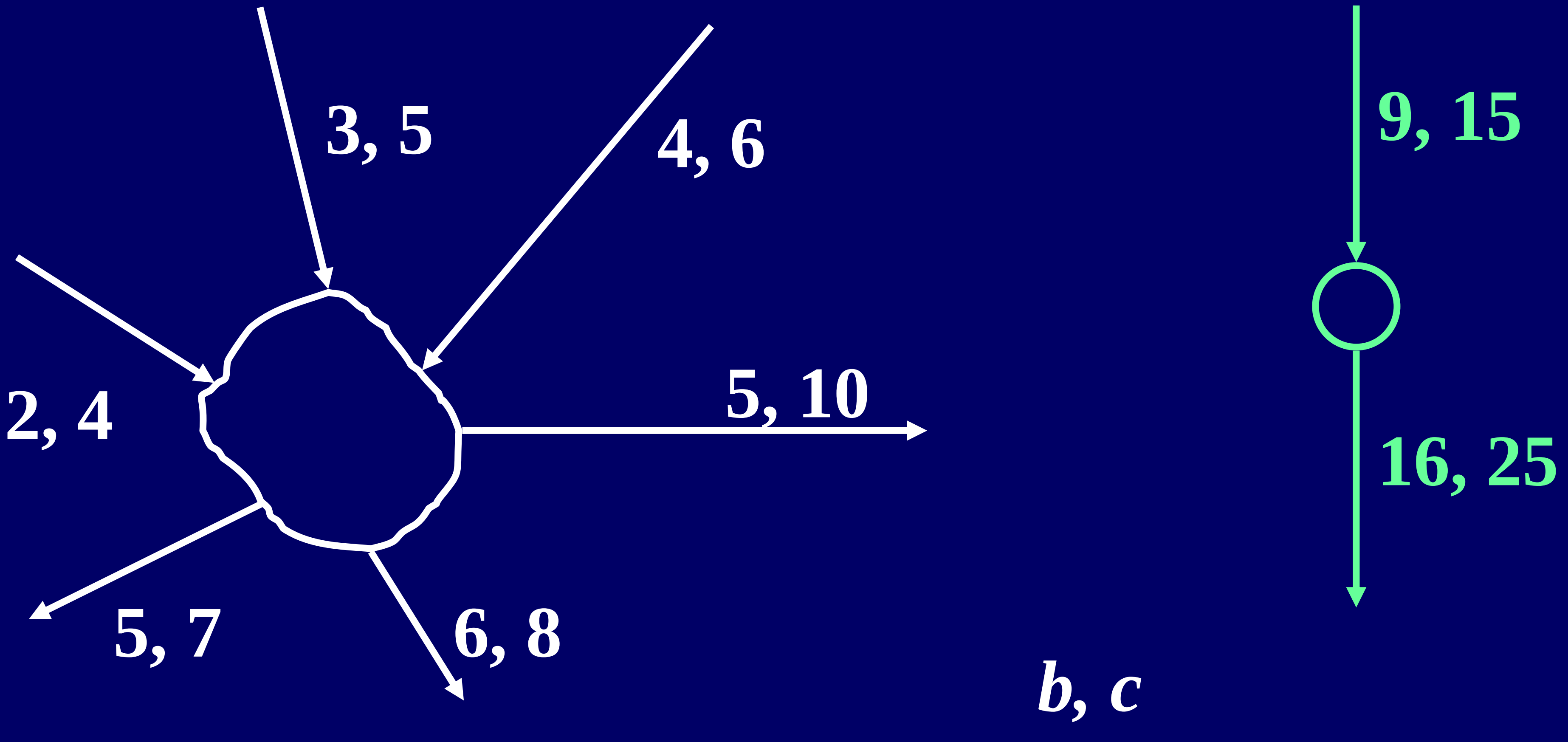
Cas simple où il n'en existe pas :



b*, *c

Recherche de flot admissible

Cas plus compliqué où il n'en existe pas :



Recherche de flot admissible

On rajoute une "source" $\underline{s}$, et un "puits" $\underline{t}$.

On construit un réseau "classique" avec borne inférieure 0 et borne supérieure $\underline{c}$.

Pour chaque nœud v on rajoute

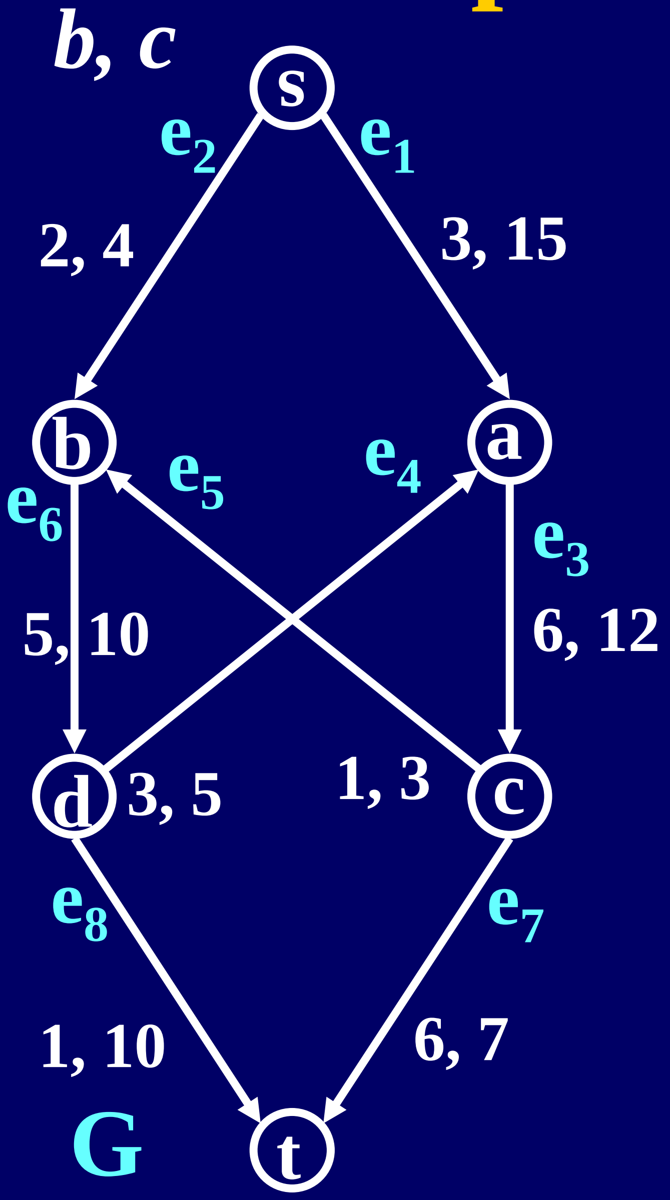
- **un arc (v, $\underline{t}$) avec** $\underline{c}(v, \underline{t}) = \Sigma_{e \in \mathrm{Out}(v)} b(e)$
- **un arc ($\underline{s}$, v) avec** $\underline{c}(\underline{s}, v) = \Sigma_{e \in \mathrm{In}(v)} b(e)$

Pour toute les autres arcs on définit

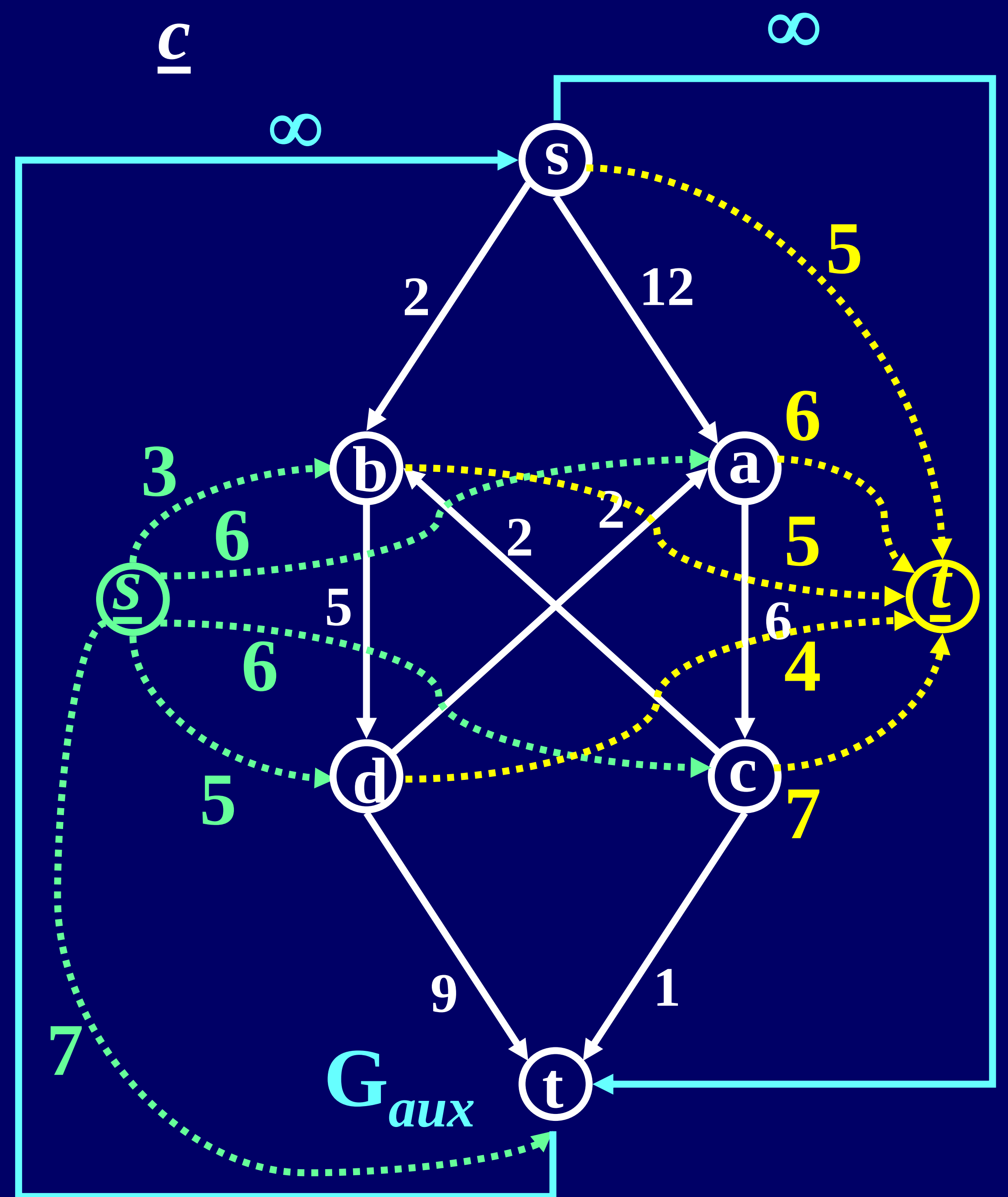
$$\underline{c}(e) = c(e) - b(e)$$

On rajoute deux arcs : $\underline{c}(s, t) = \infty$ et $\underline{c}(t, s) = \infty$.

Exemple



b, c
s
e2
e1
2, 4
3, 15
b
a
e6
e5
e4
e3
5, 10
6, 12
d
3, 5
1, 3
c
e8
e7
1, 10
6, 7
G
t



c
∞
∞
s
5
2
12
6
3
b
a
6
2
2
5
s
5
6
6
4
6
d
c
5
7
9
1
7
G aux
t

La caractérisation

Théorème : **Le réseau original admet un flot admissible** **si et seulement si** **le flot maximum du réseau modifié sature toutes les arêtes sortants de $\underline{s}$.**

Remarque : **dans ce cas les arcs entrants en $\underline{t}$ sont aussi saturés.**

La preuve

SI :

Supposons avoir un flot maximum $\underline{f}$ dans le réseau modifié.

Pour le réseau original on défini pour toutes les arcs $f(e) = \underline{f}(e) + b(e)$.

Comme nous avons $0 \le \underline{f}(e) \le \underline{c}(e) = c(e) - b(e)$

on obtient $b(e) \le f(e) \le c(e)$

La preuve (suite)

La conservation des flots : soit v un sommet, $v \neq s, t$

nous avons dans G_{aux}

$$\Sigma_{e \in \mathrm{In}(v)} \underline{f}(e) + \underline{f}(\underline{s},v) = \Sigma_{e \in \mathrm{Out}(v)} \underline{f}(e) + \underline{f}(v,\underline{t})$$

mais comme

$$\underline{f}(\underline{s},v) = \underline{c}(\underline{s}, v) = \Sigma_{e \in \mathrm{In}(v)} b(e)$$

et

$$\underline{f}(v,\underline{t}) = \underline{c}(v, \underline{t}) = \Sigma_{e \in \mathrm{Out}(v)} b(e)$$

on a

$$\Sigma_{e \in \mathrm{In}(v)} f(e) = \Sigma_{e \in \mathrm{Out}(v)} f(e)$$

et ainsi le flot f est admissible.

La preuve (3)

Seulement si :

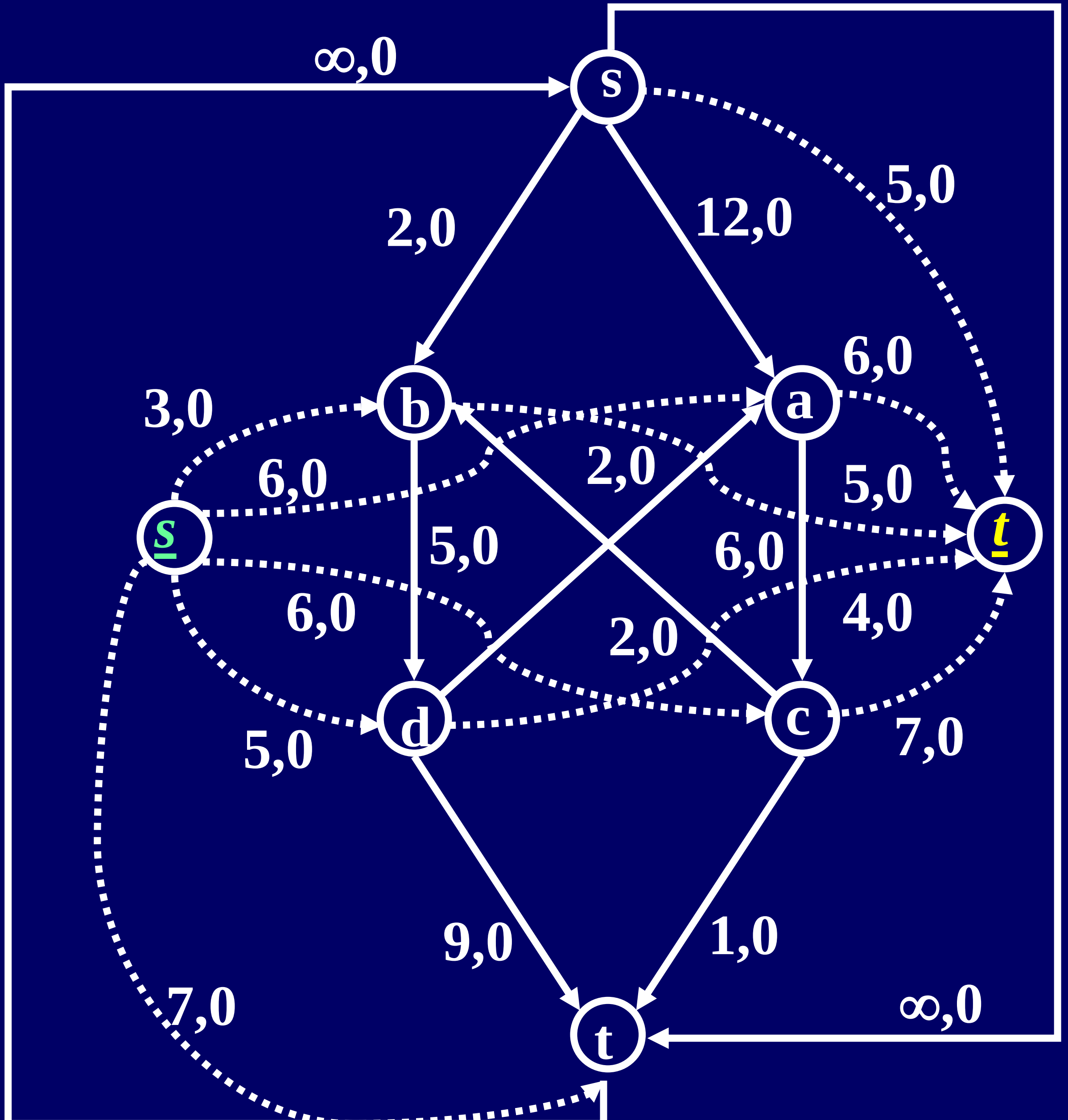
En fait la preuve est "réversible".

En effet, si on a un flot admissible, on peut en déduire un flot $\underline{f}$ dans G_{aux}.

Le résultat vérifie la conservation des flots dans tous les sommets, sauf éventuellement *s* et *t*.

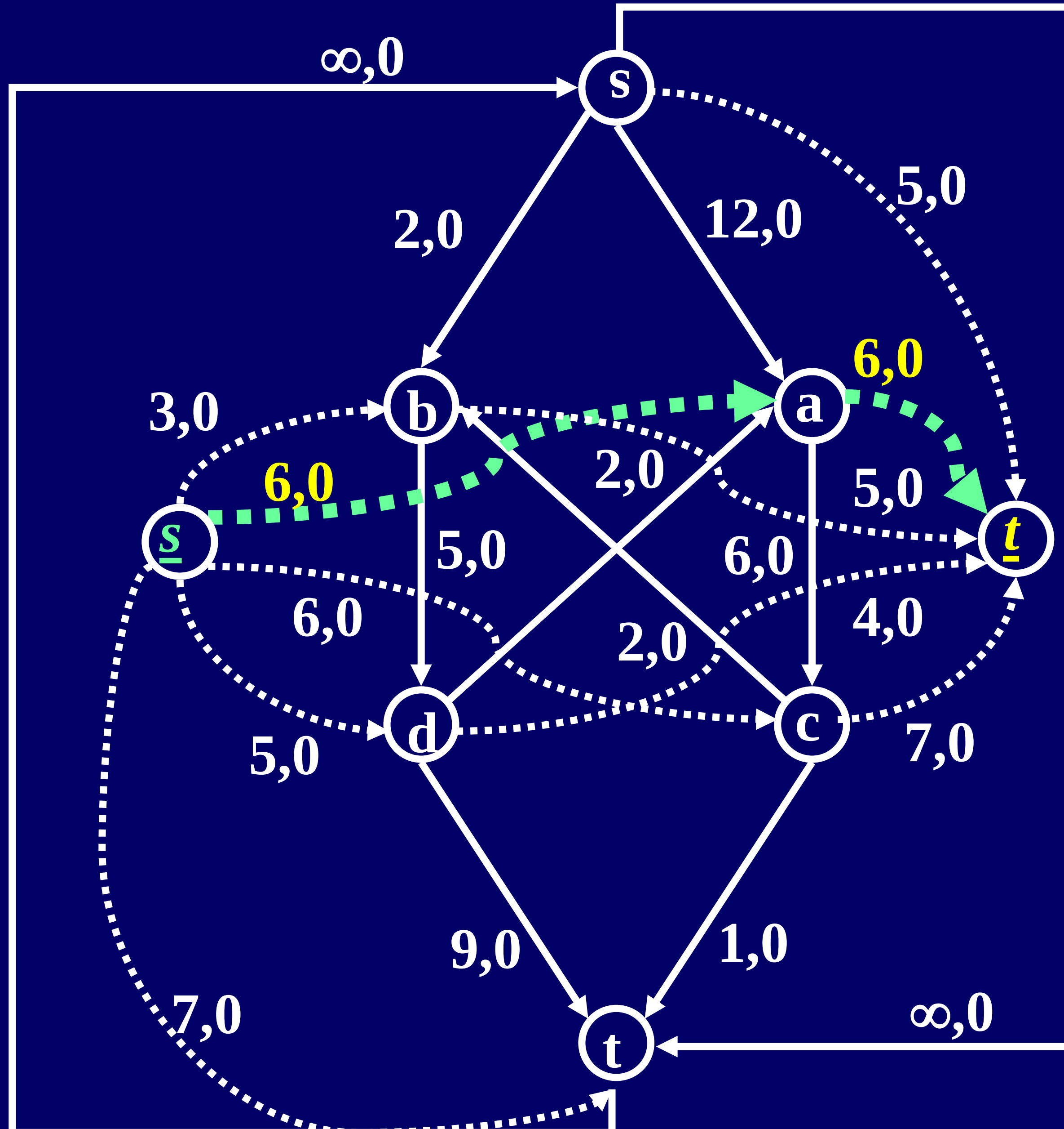
Mais ceci peut être assuré, en utilisant les arcs de capacité infinie entre elles.

L'exemple



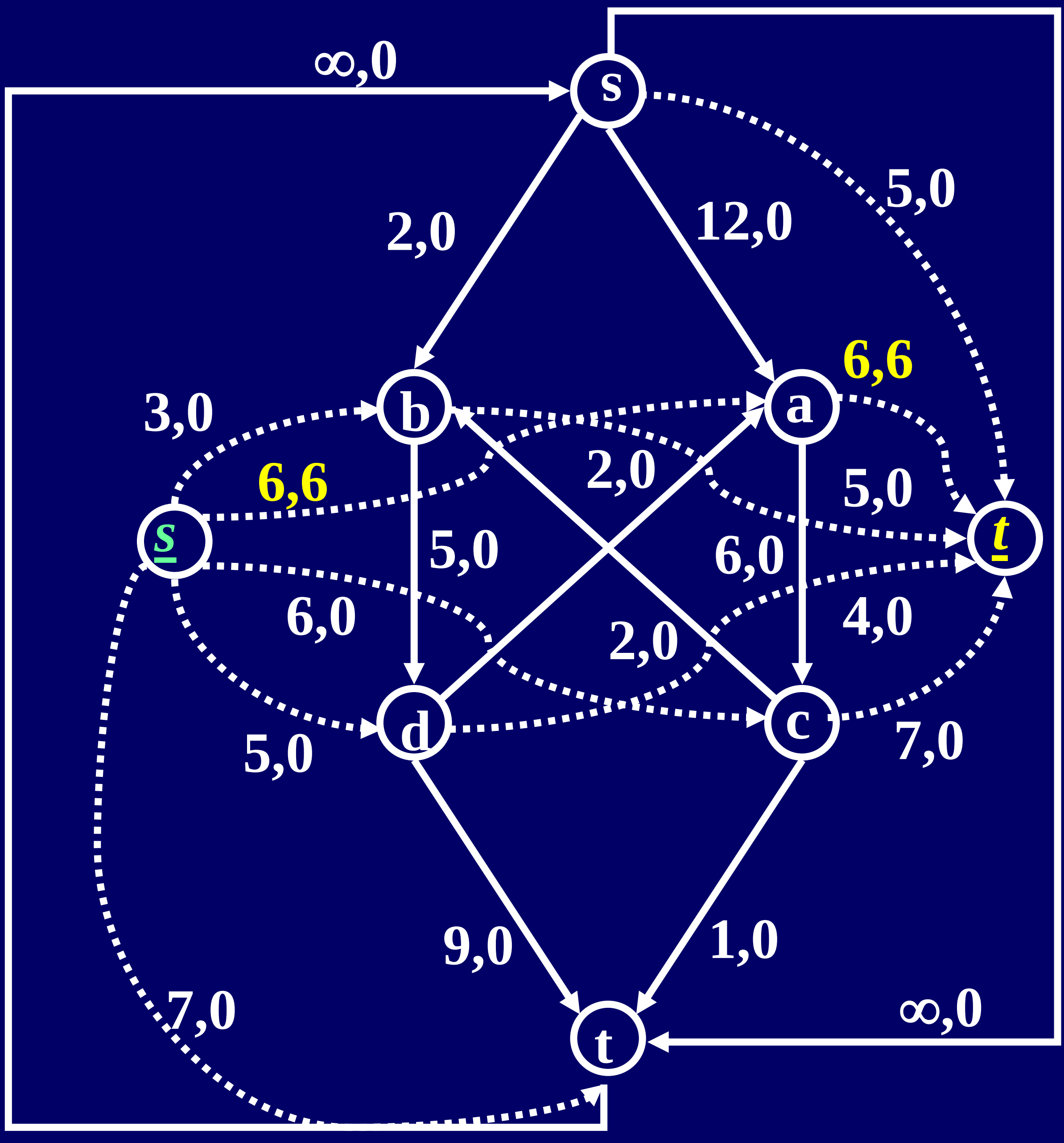
G_{aux}

L'exemple
(2)



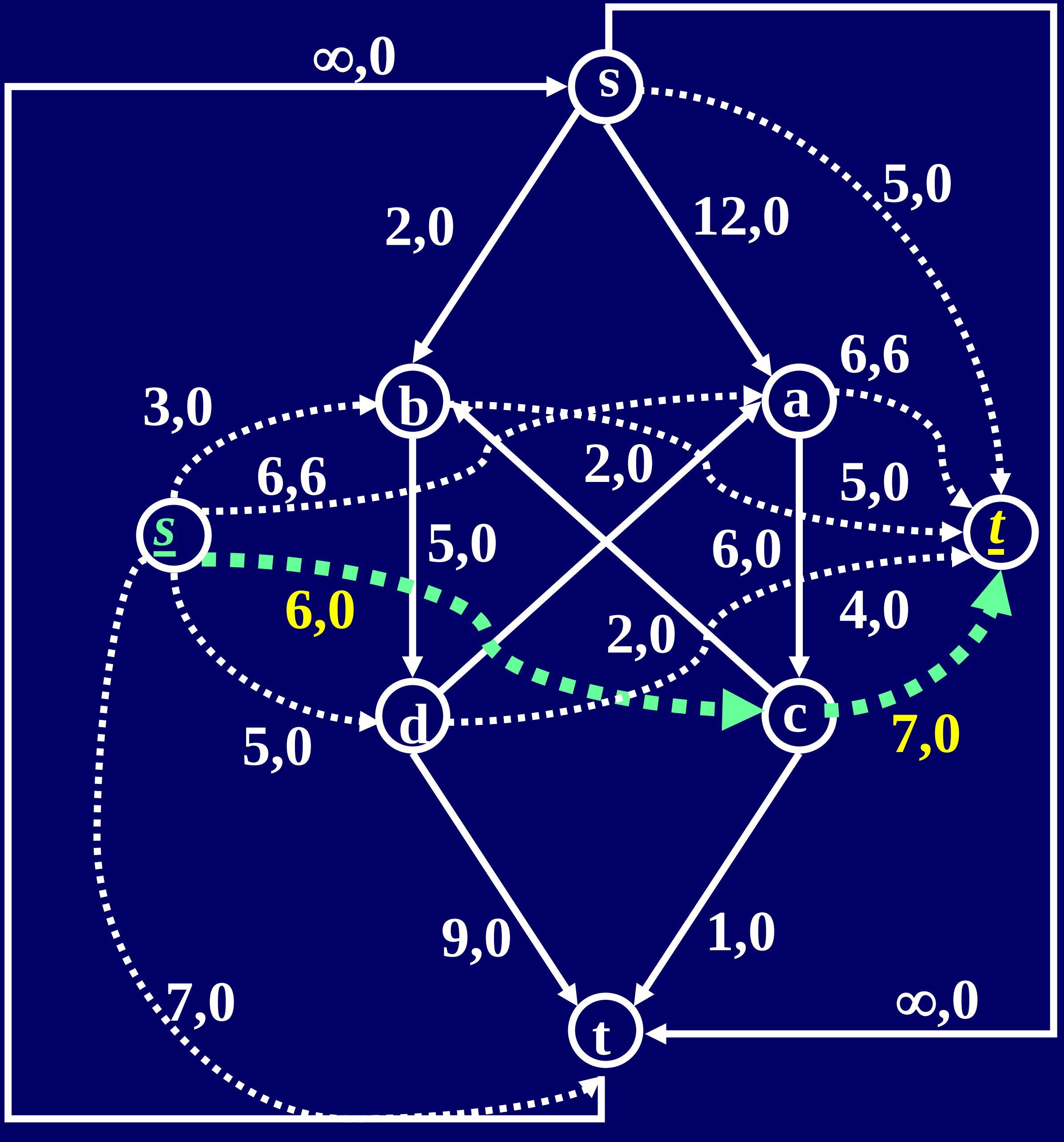
G_{aux}

L'exemple
(3)



G_{aux}

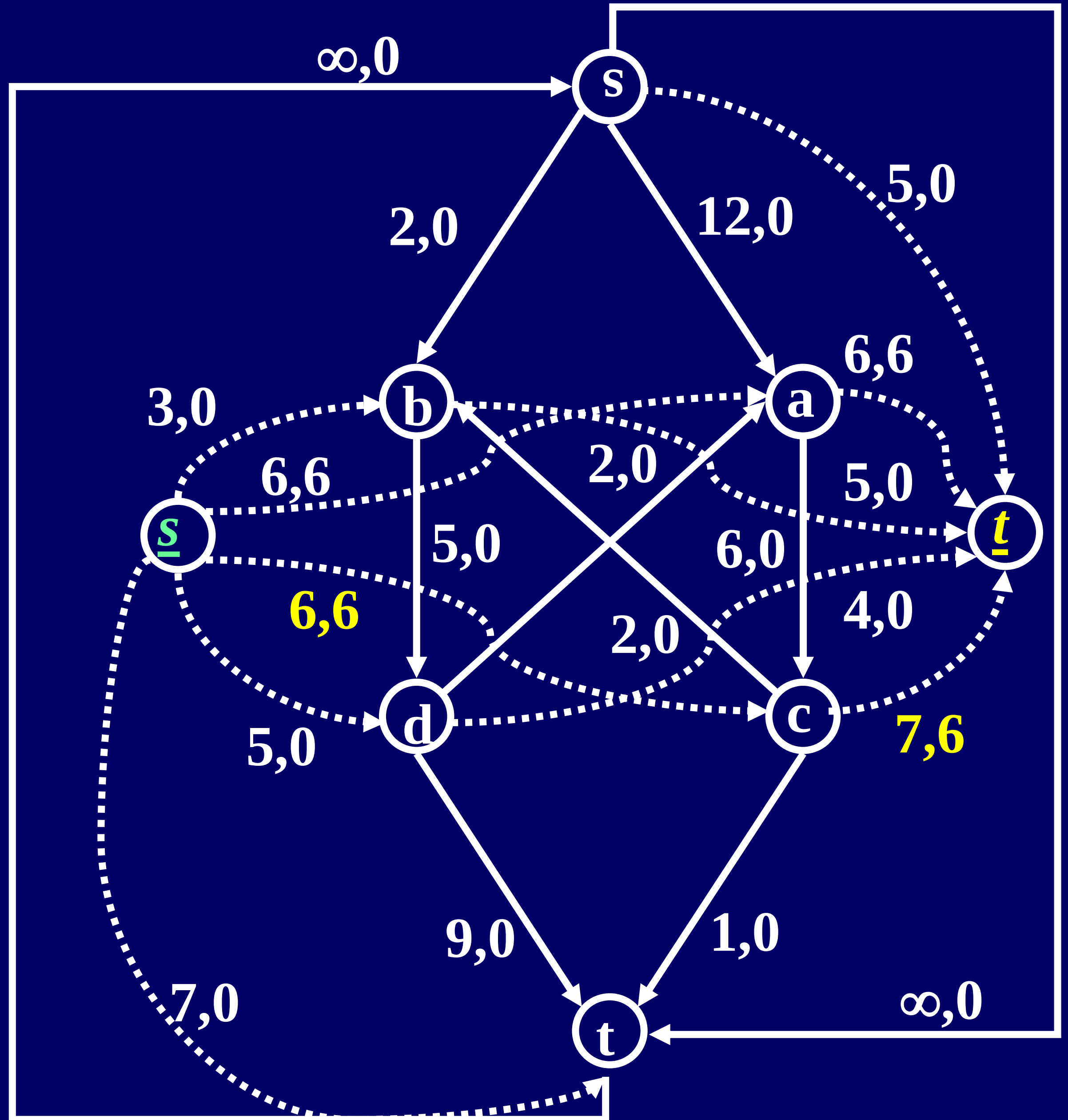
L'exemple
(4)



G_{aux}

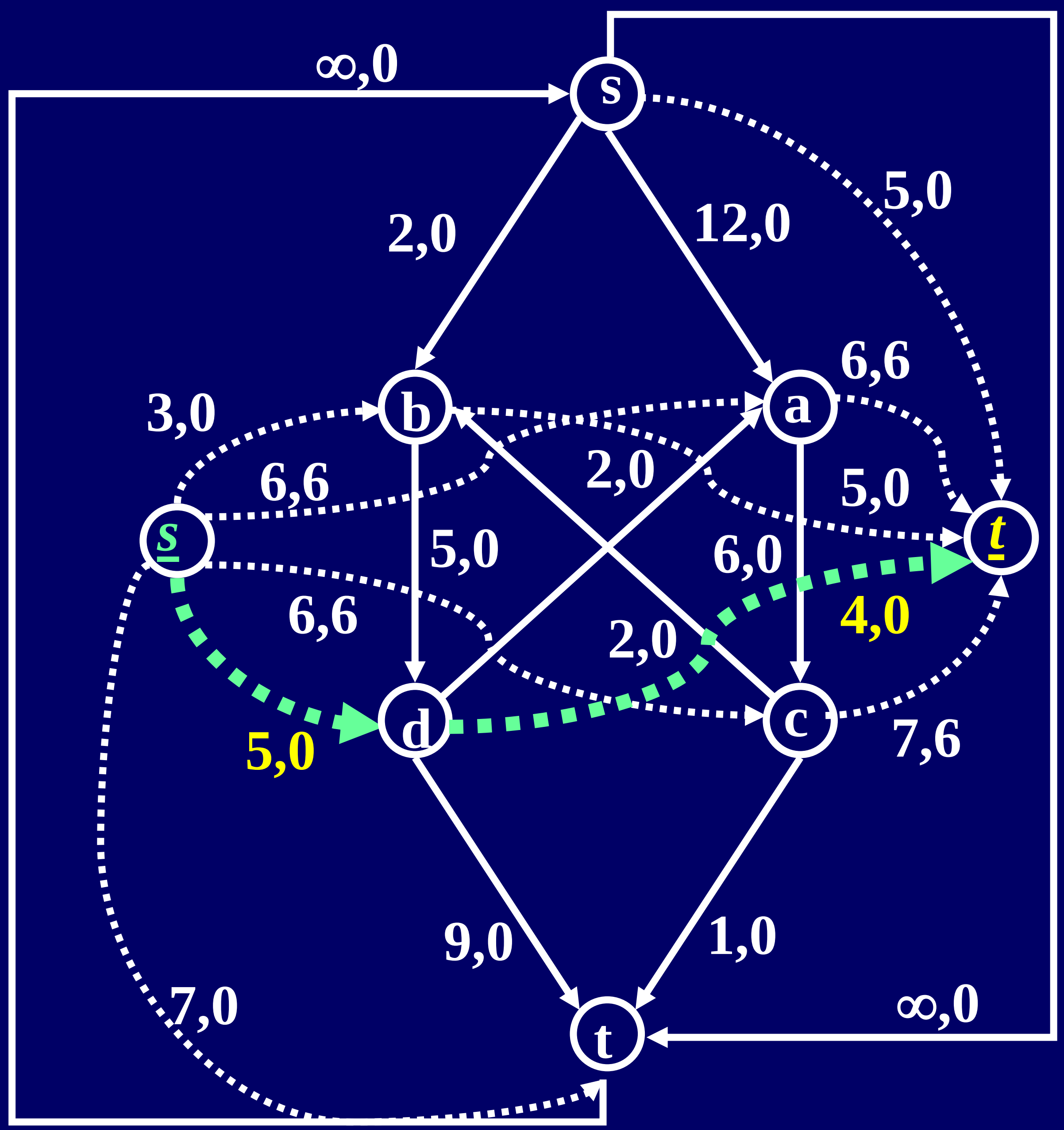
L'exemple

(5)



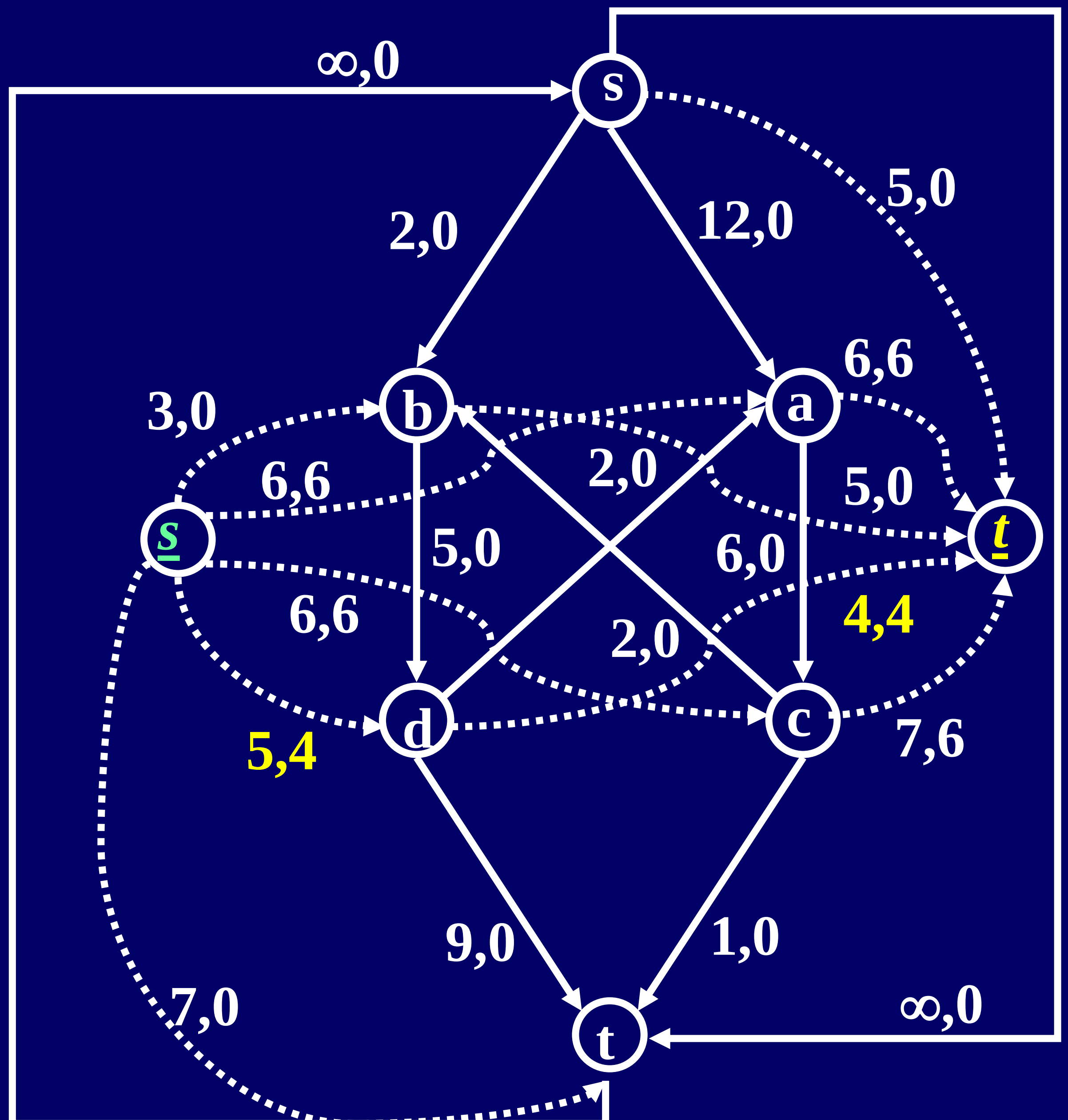
G_{aux}

L'exemple
(6)



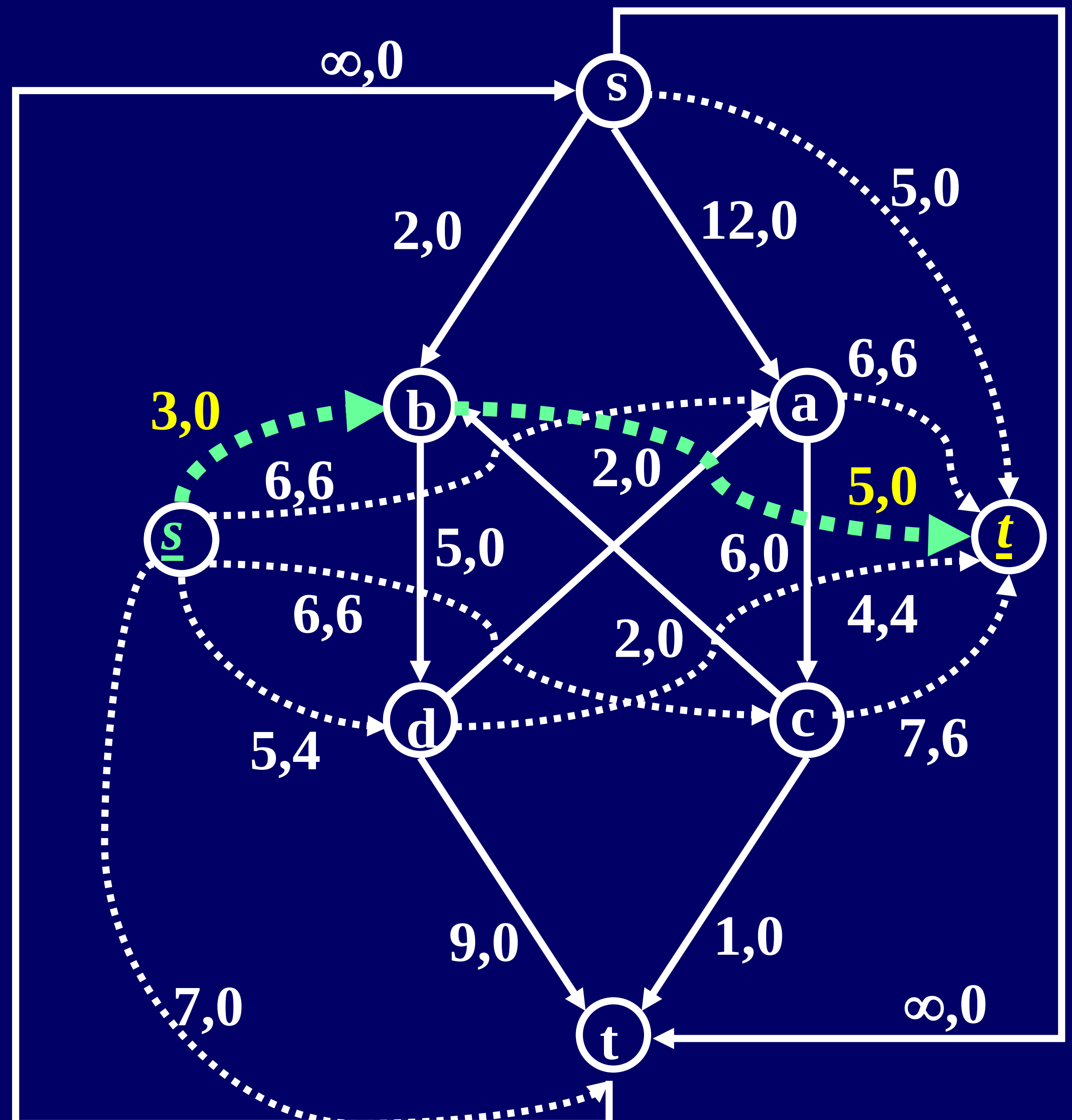
G_{aux}

L'exemple
(7)



G_{aux}

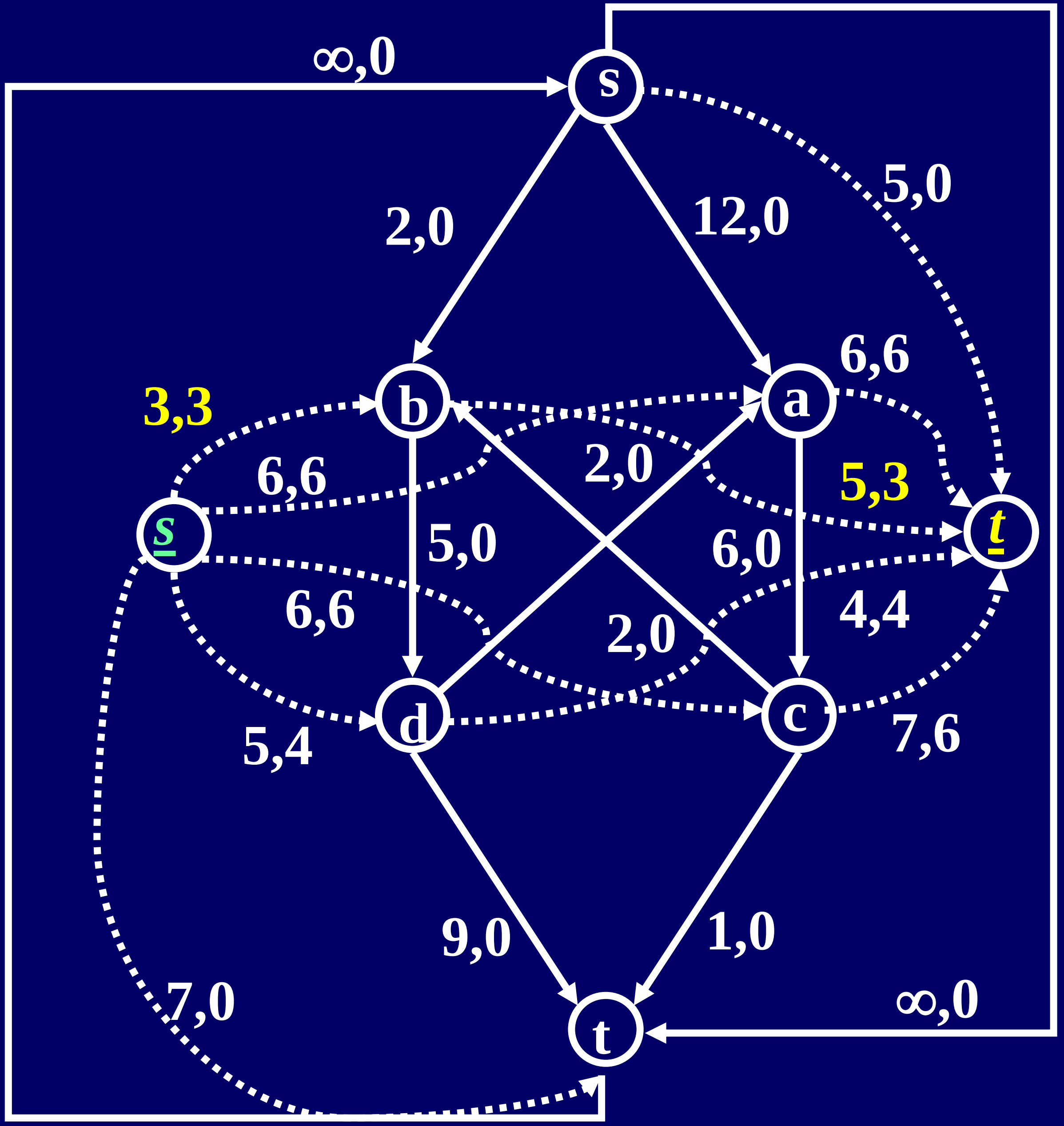
L'exemple
(8)



G_{aux}

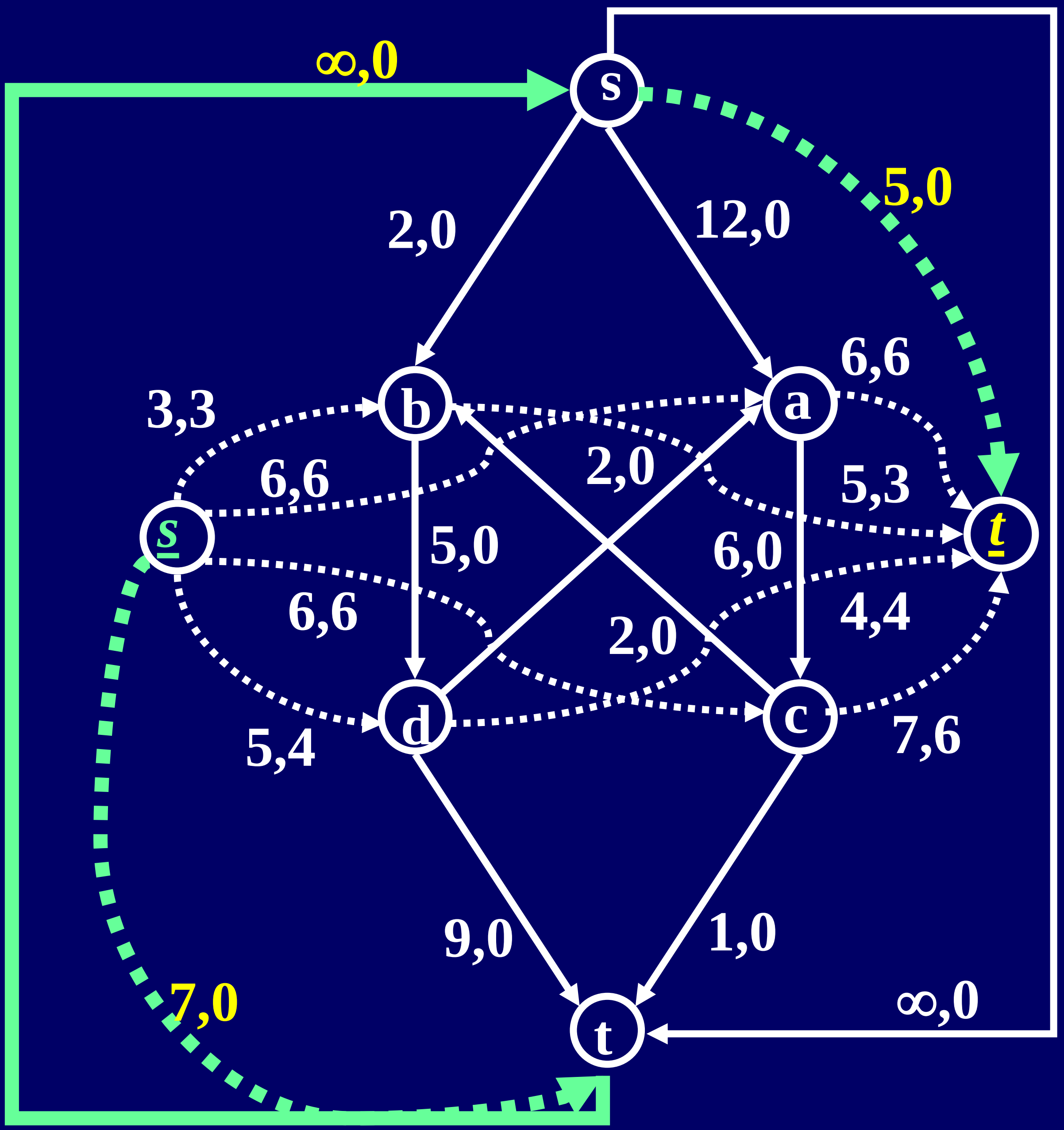
L'exemple

(8)



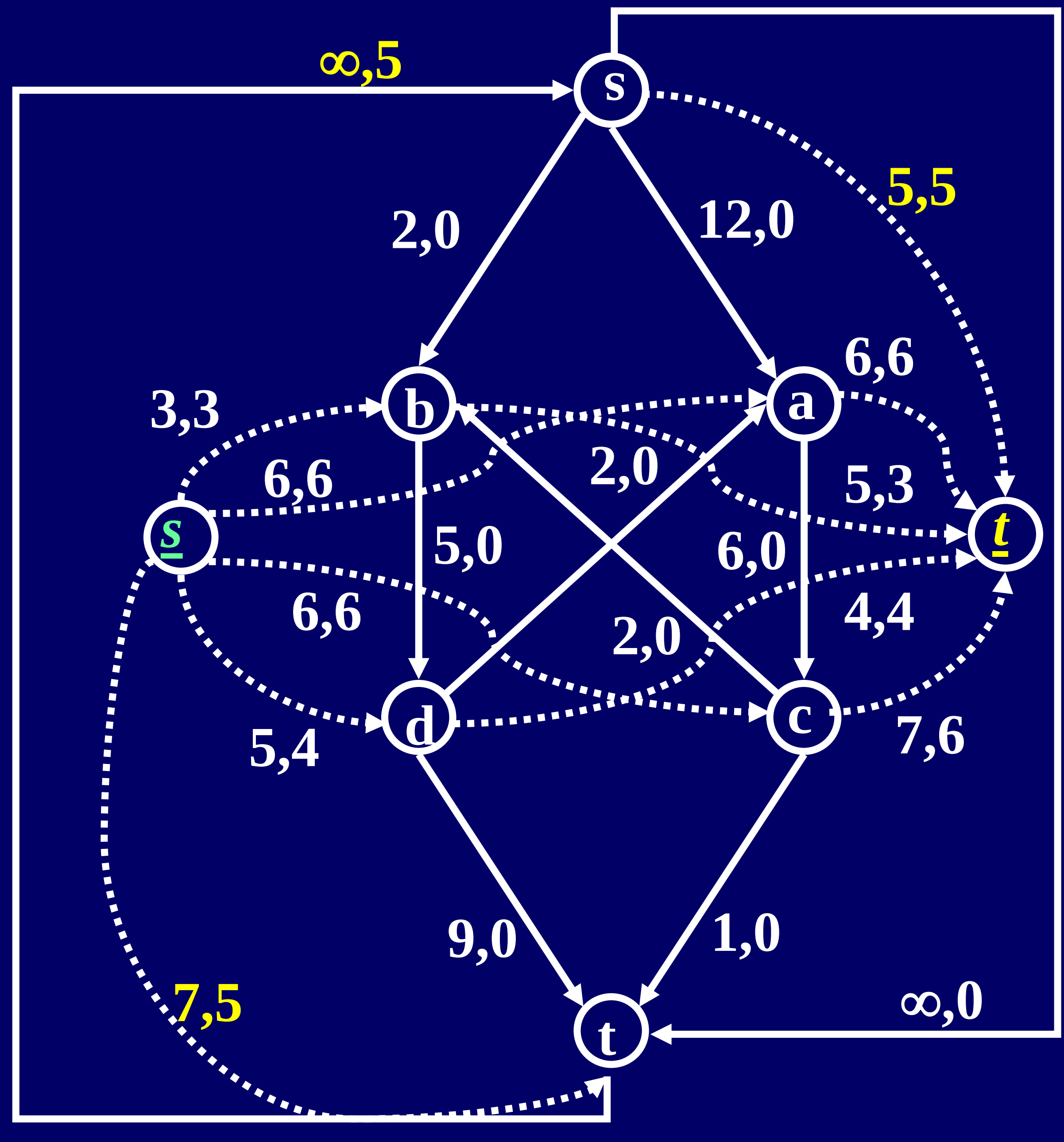
G_{aux}

L'exemple
(9)



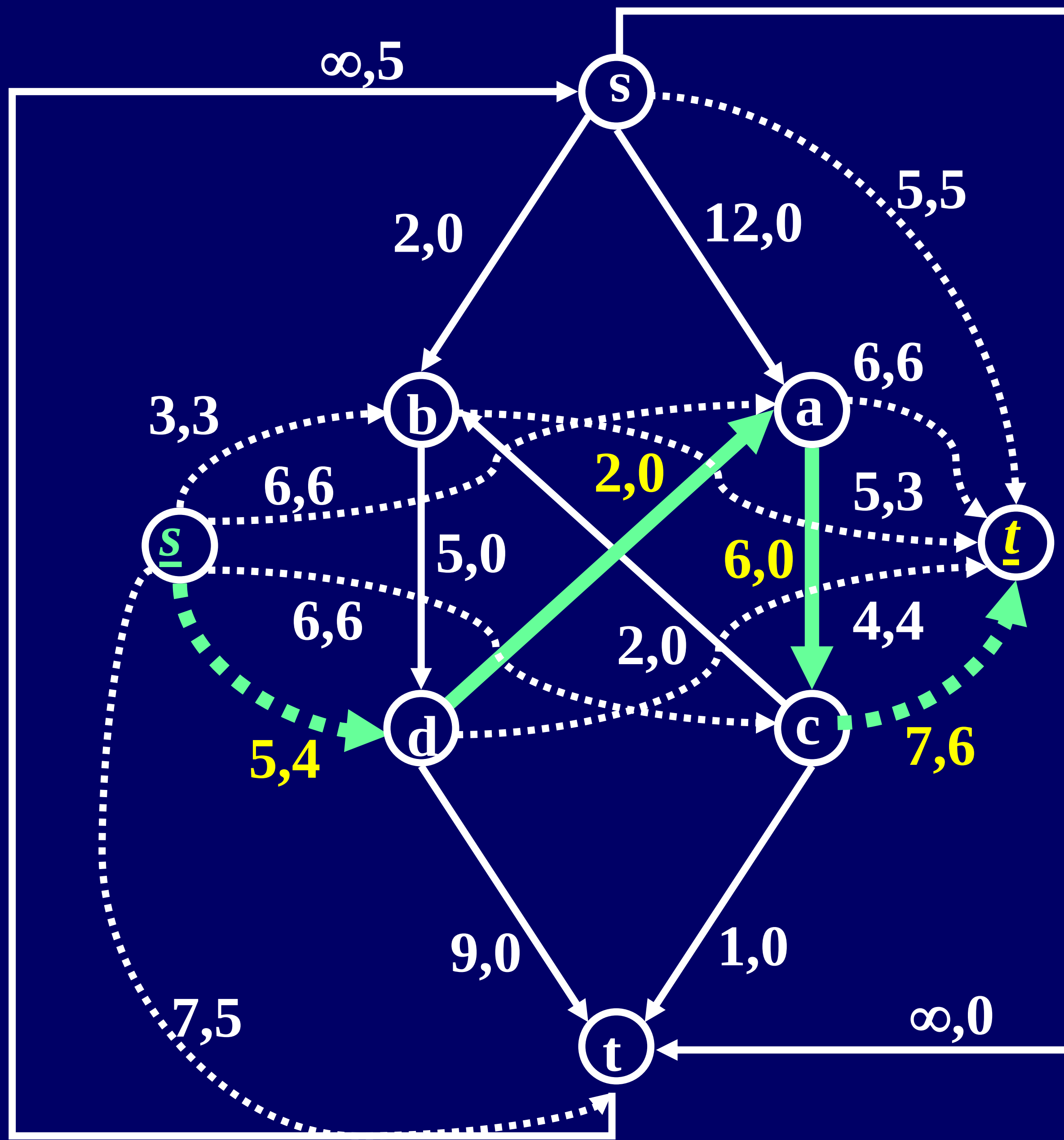
G_{aux}

L'exemple
(10)



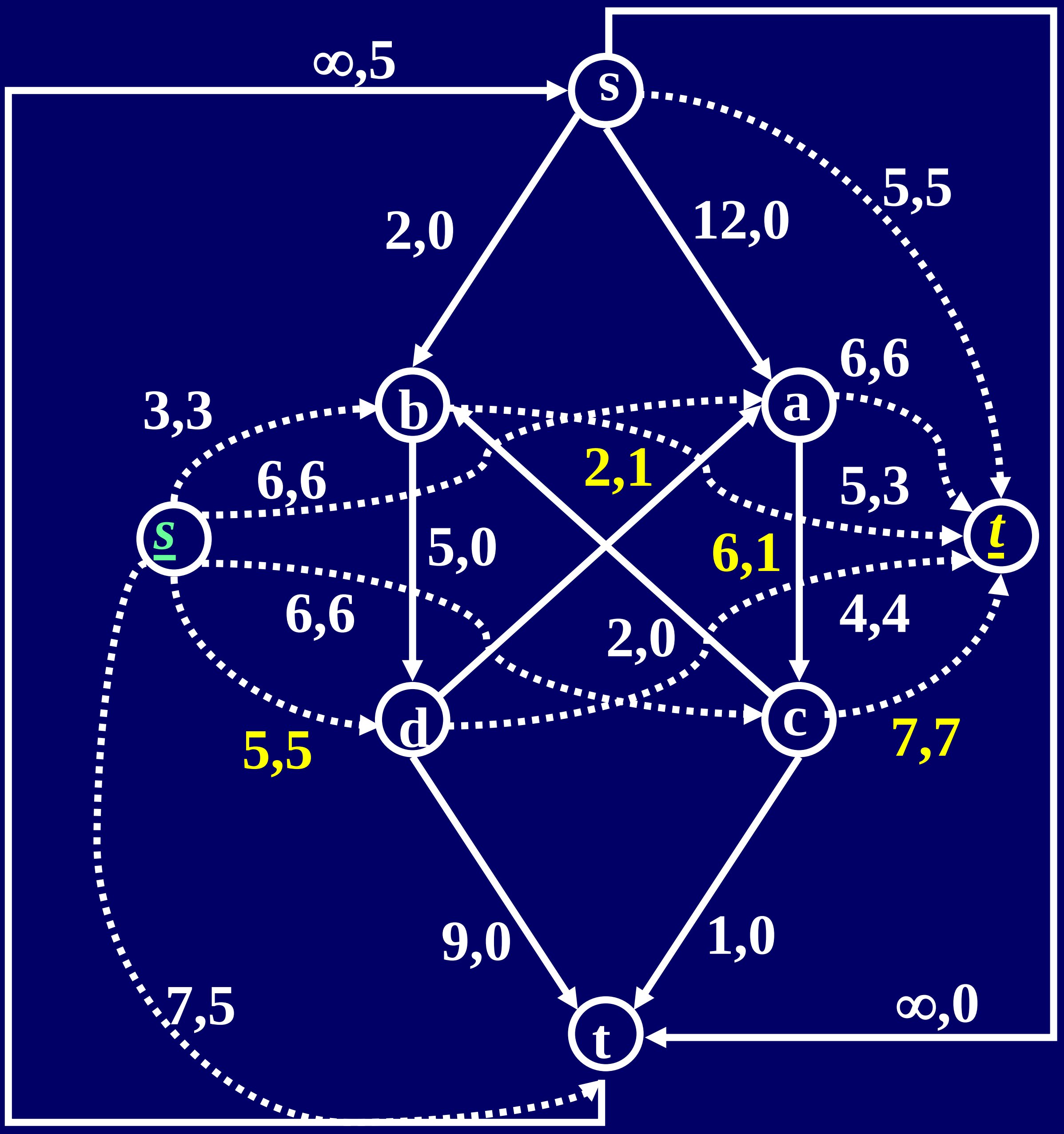
G_{aux}

L'exemple
(11)



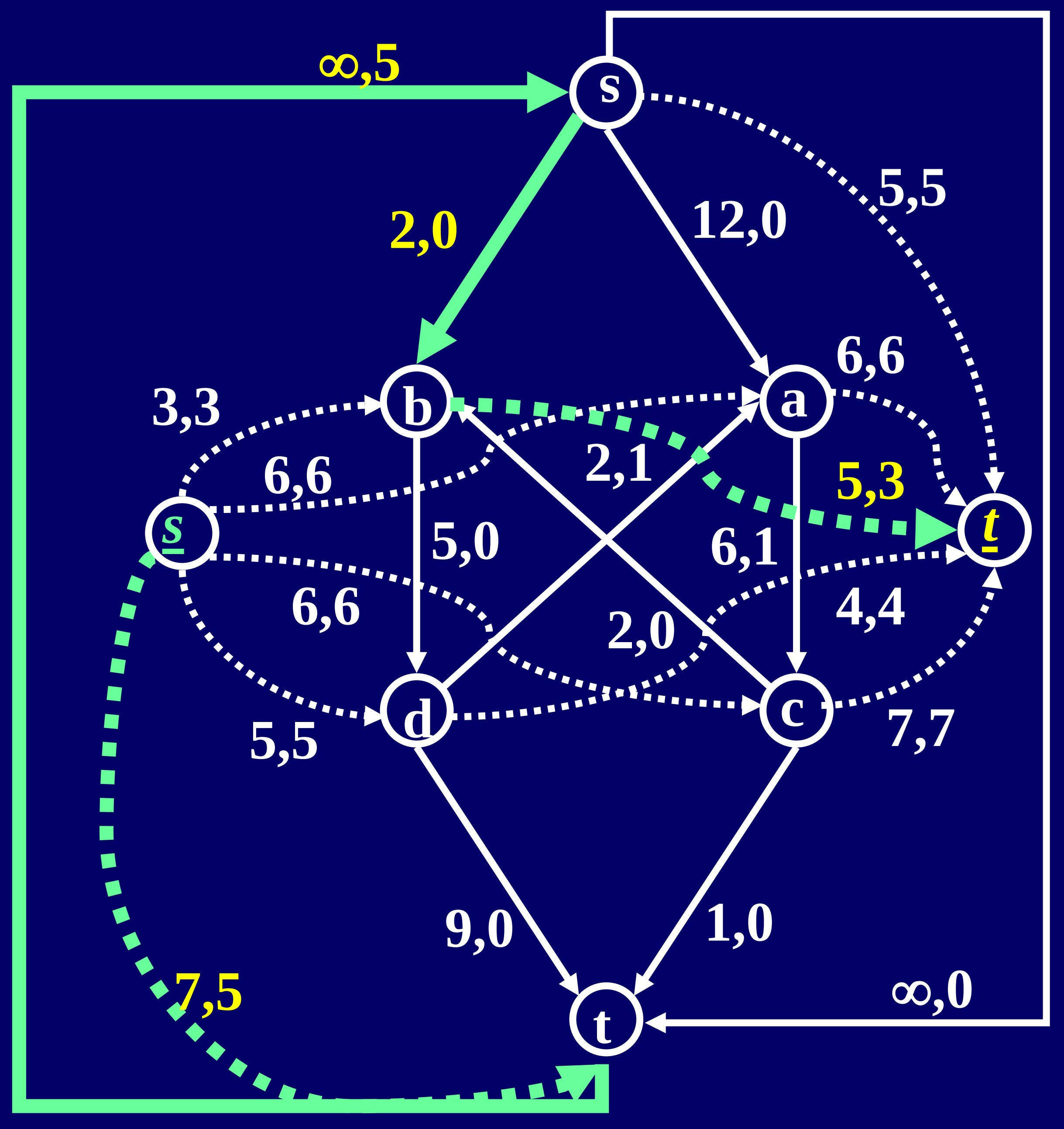
G_{aux}

L'exemple
(12)



G_{aux}

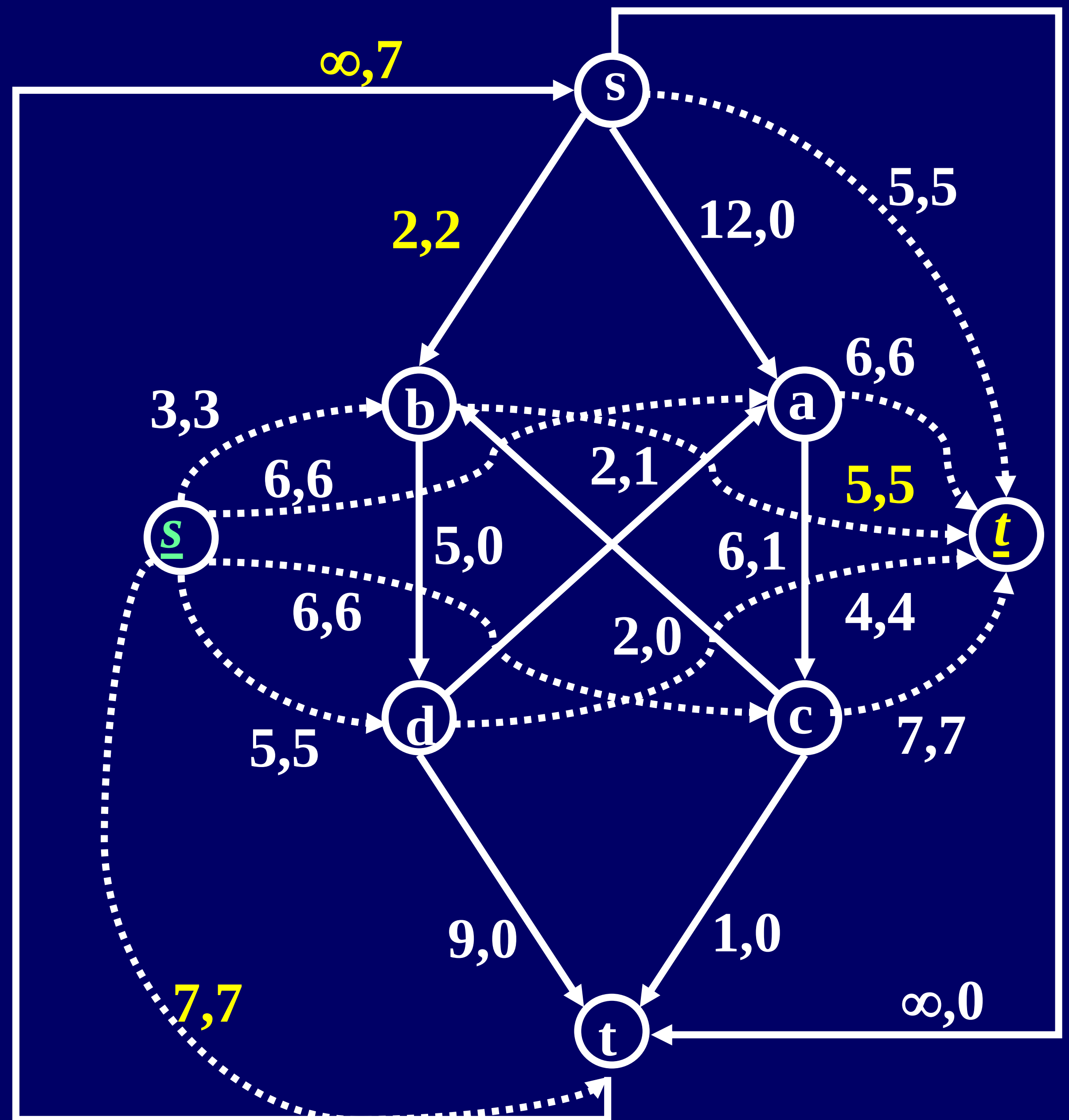
L'exemple
(13)



G_{aux}

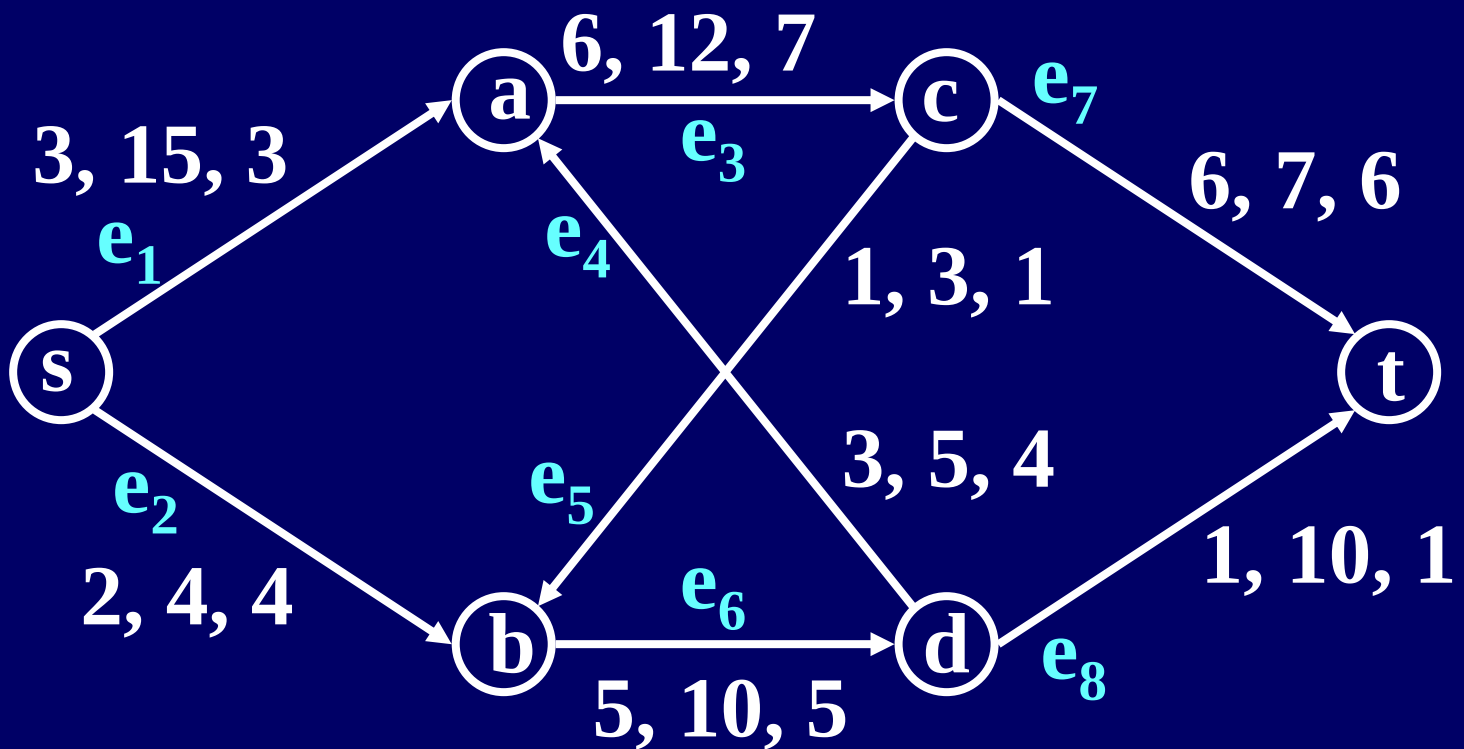
L'exemple

(14)



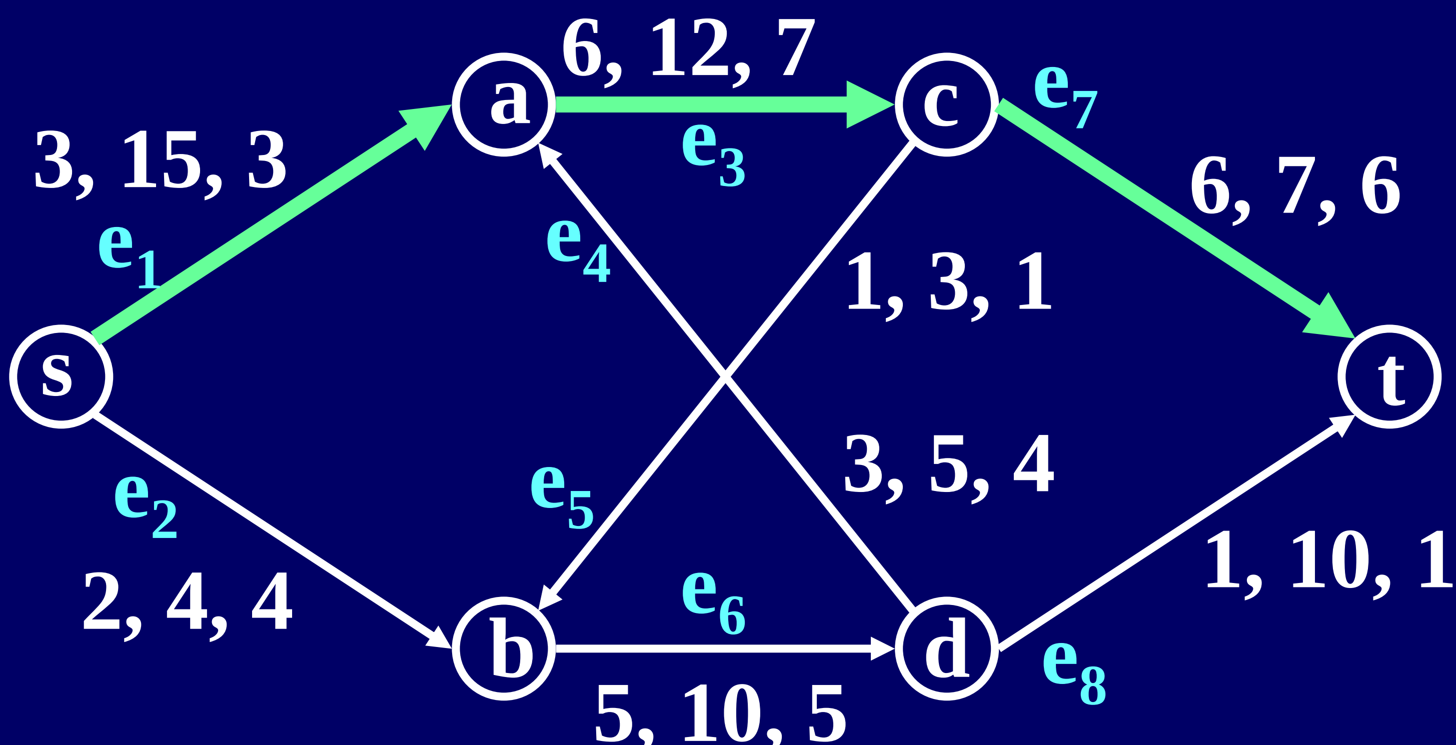
G_{aux}

Et le flot admissible



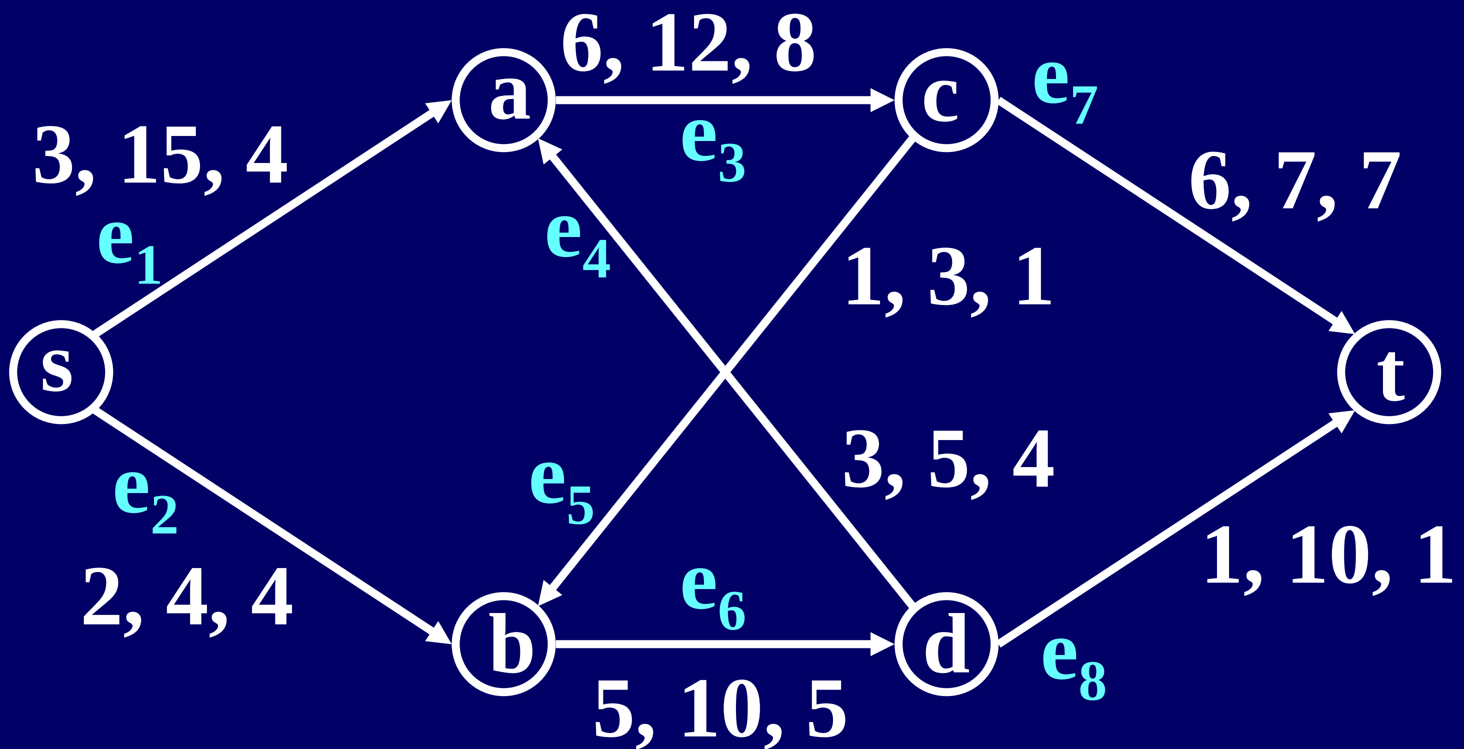
b, *c*, *f*

Une augmentation



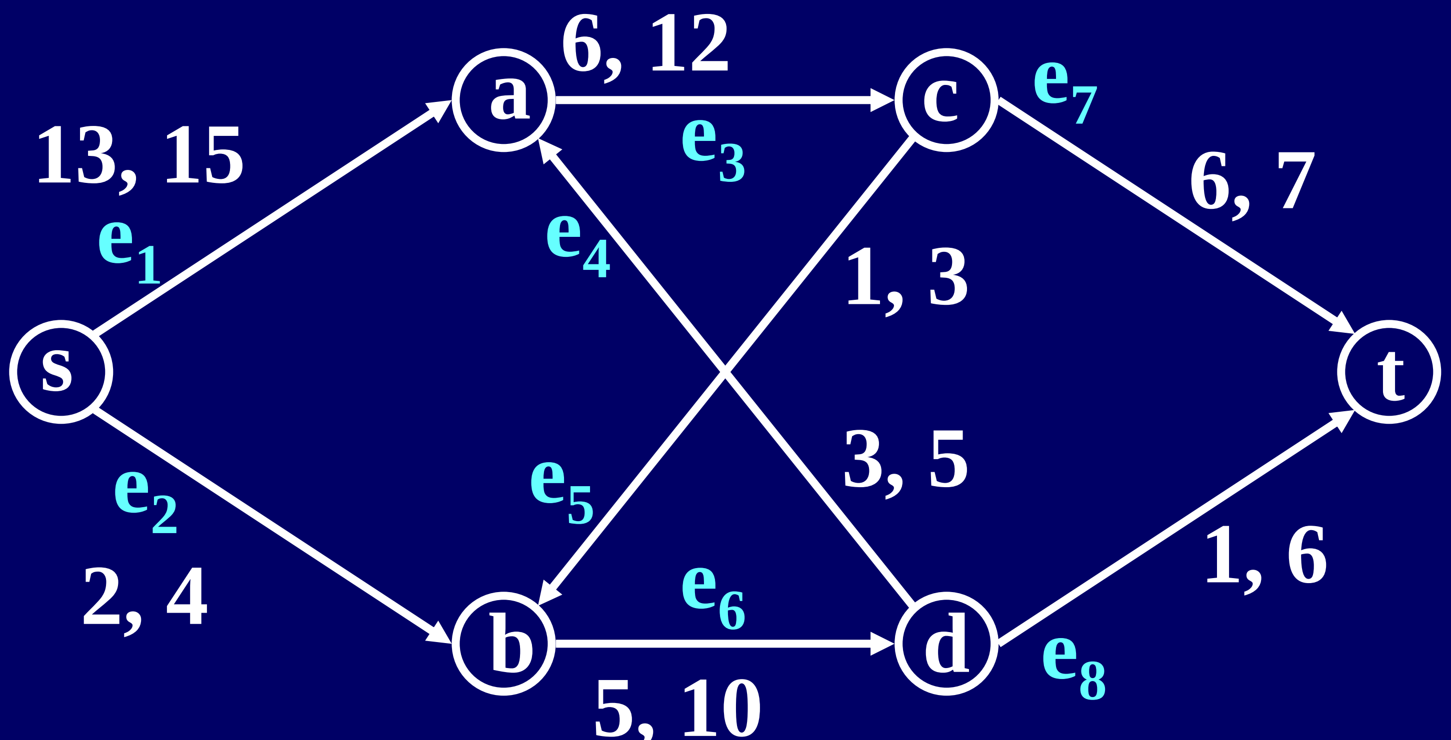
b*, *c*, *f

Et nous voici au point de départ



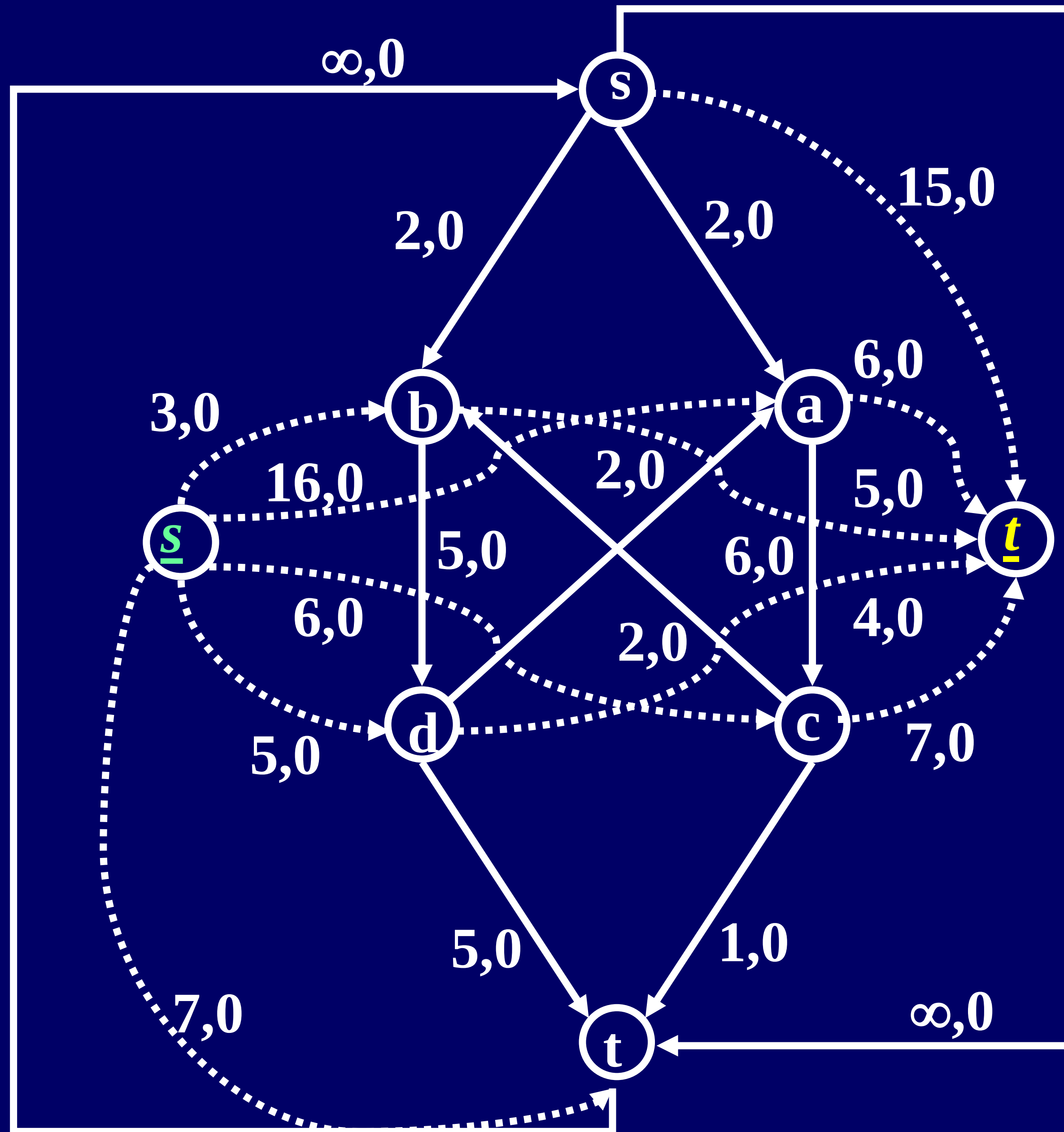
b, *c*, *f*

Un cas négative



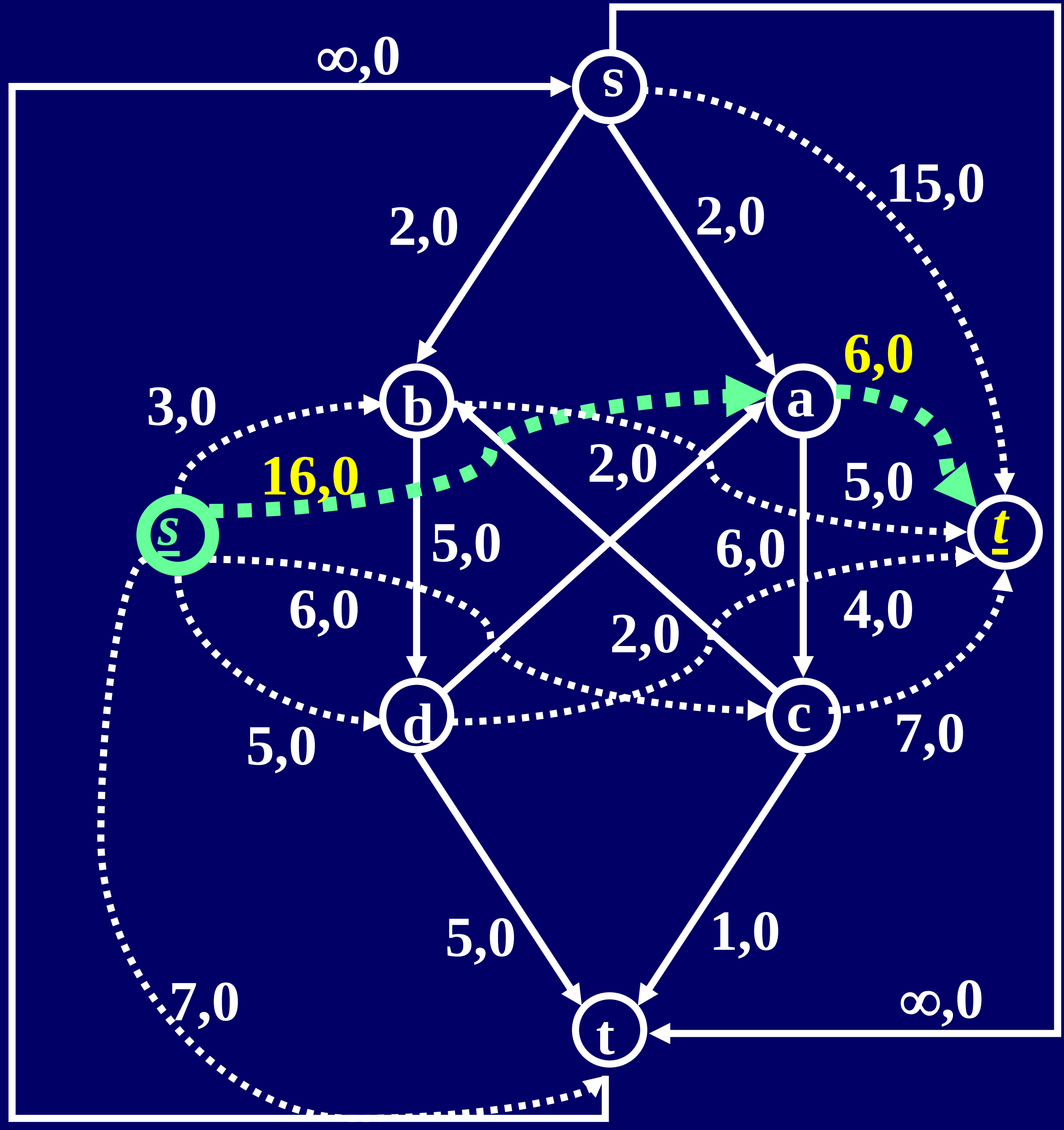
b, *c*

G_{aux}



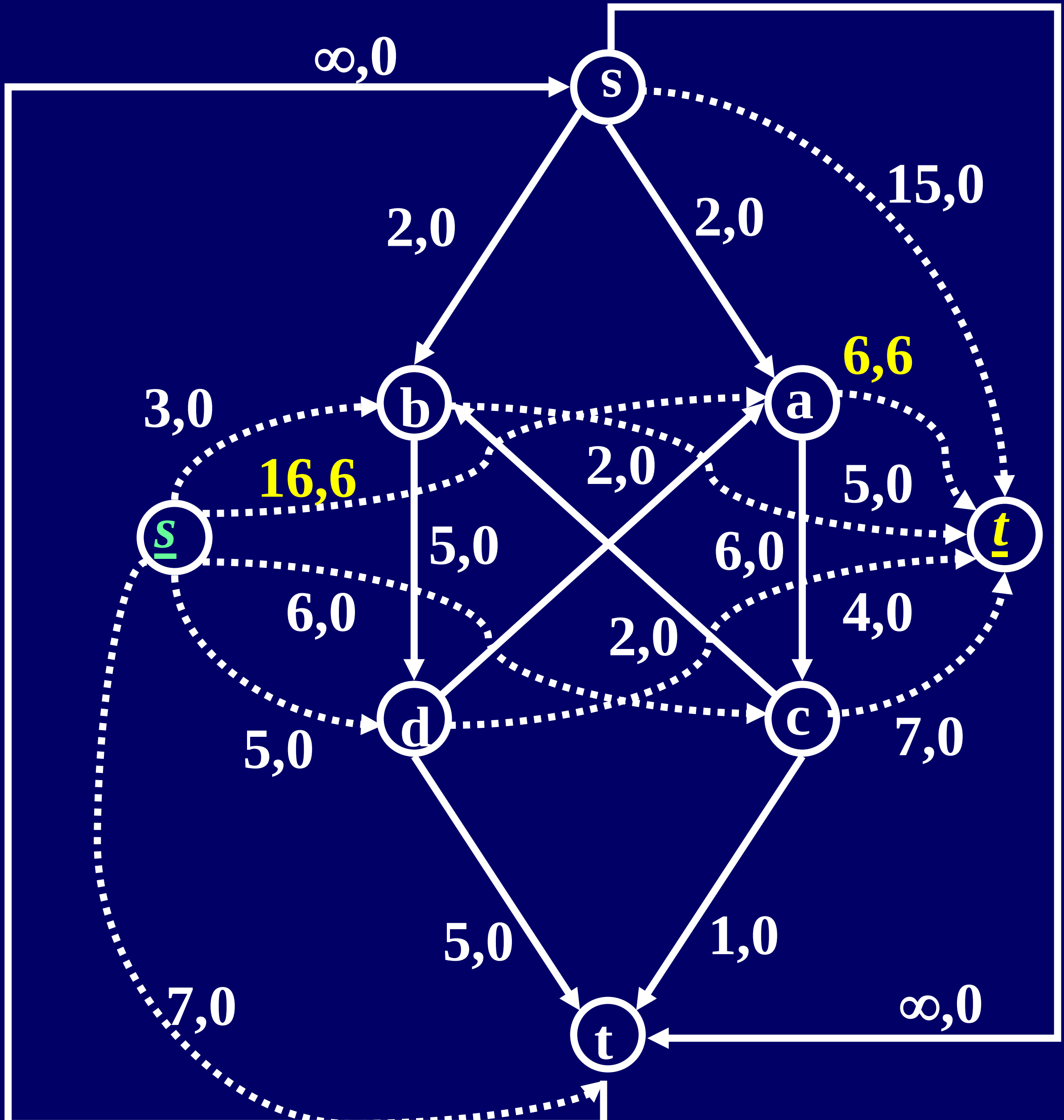
G_{aux}

G_{aux}



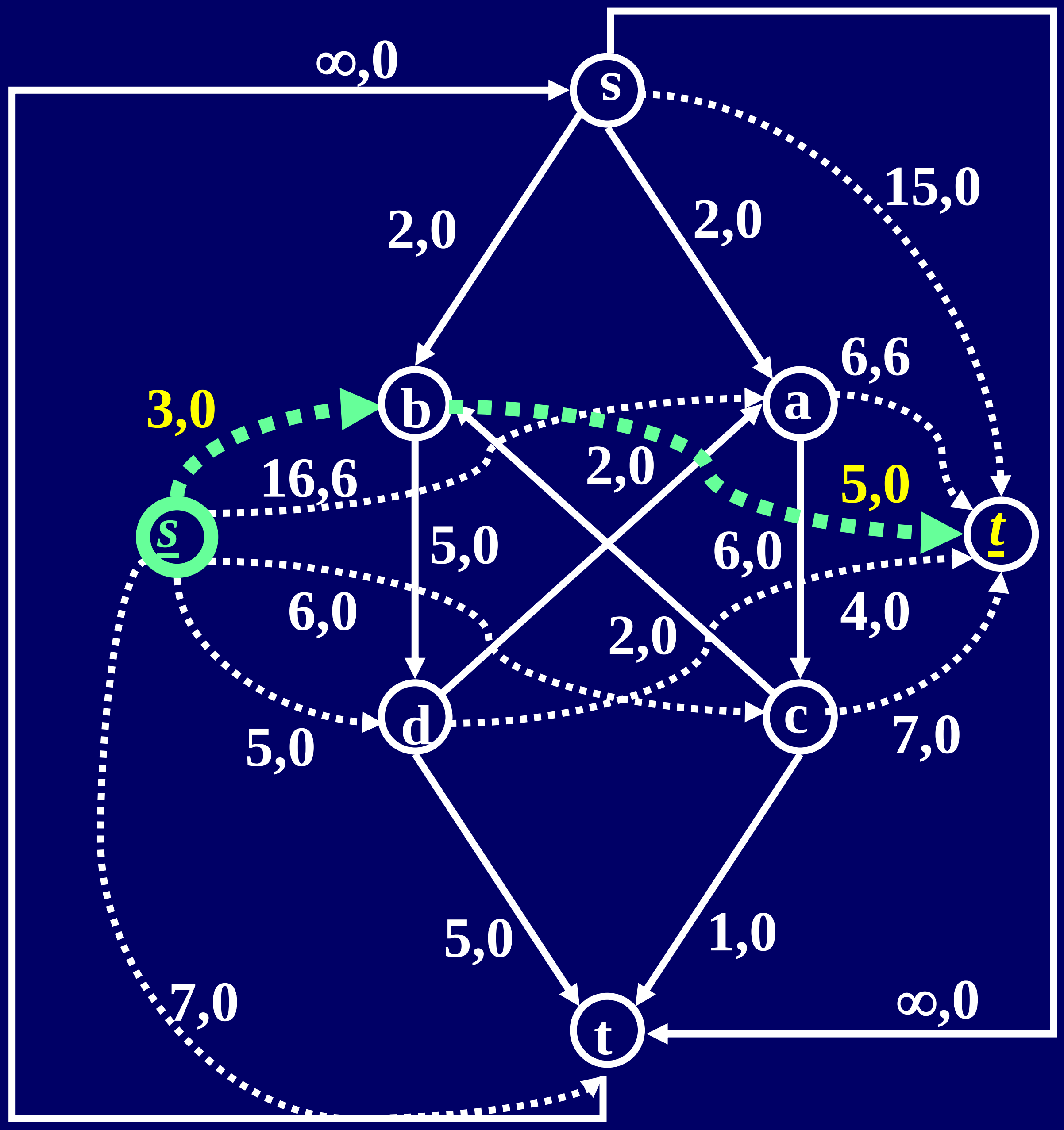
G_{aux}

G_{aux}



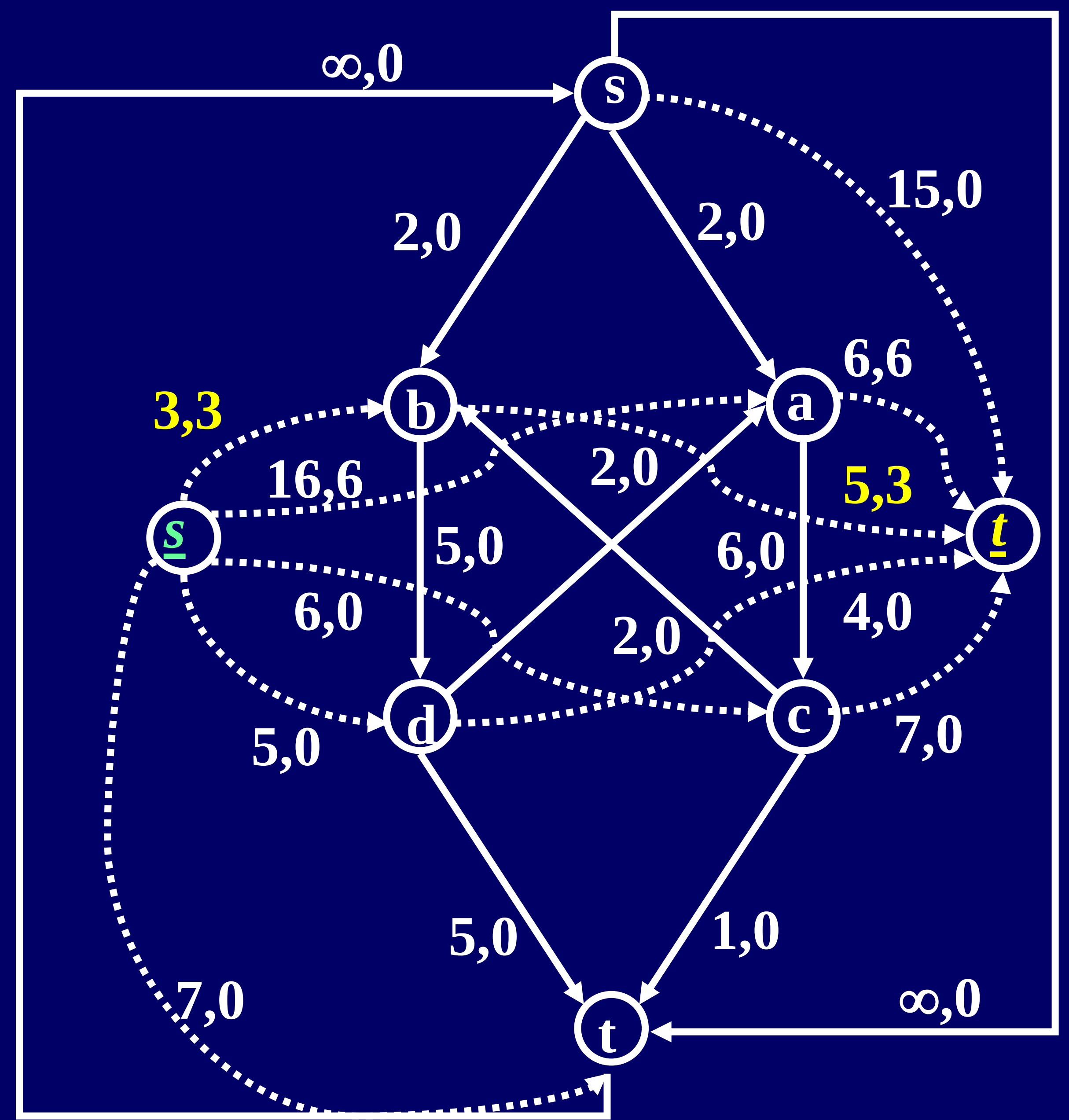
G_{aux}

G_{aux}



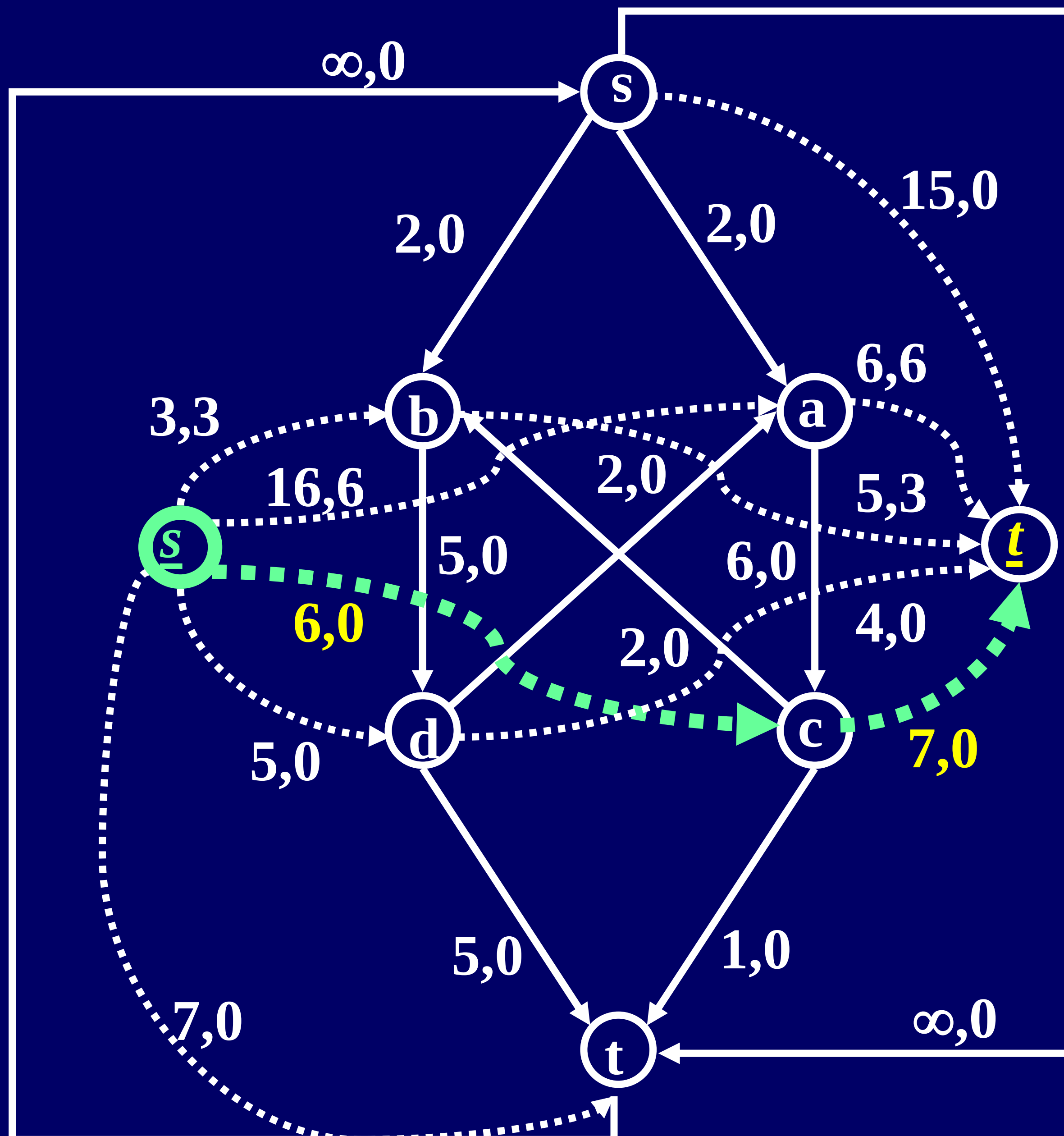
G_{aux}

G_{aux}



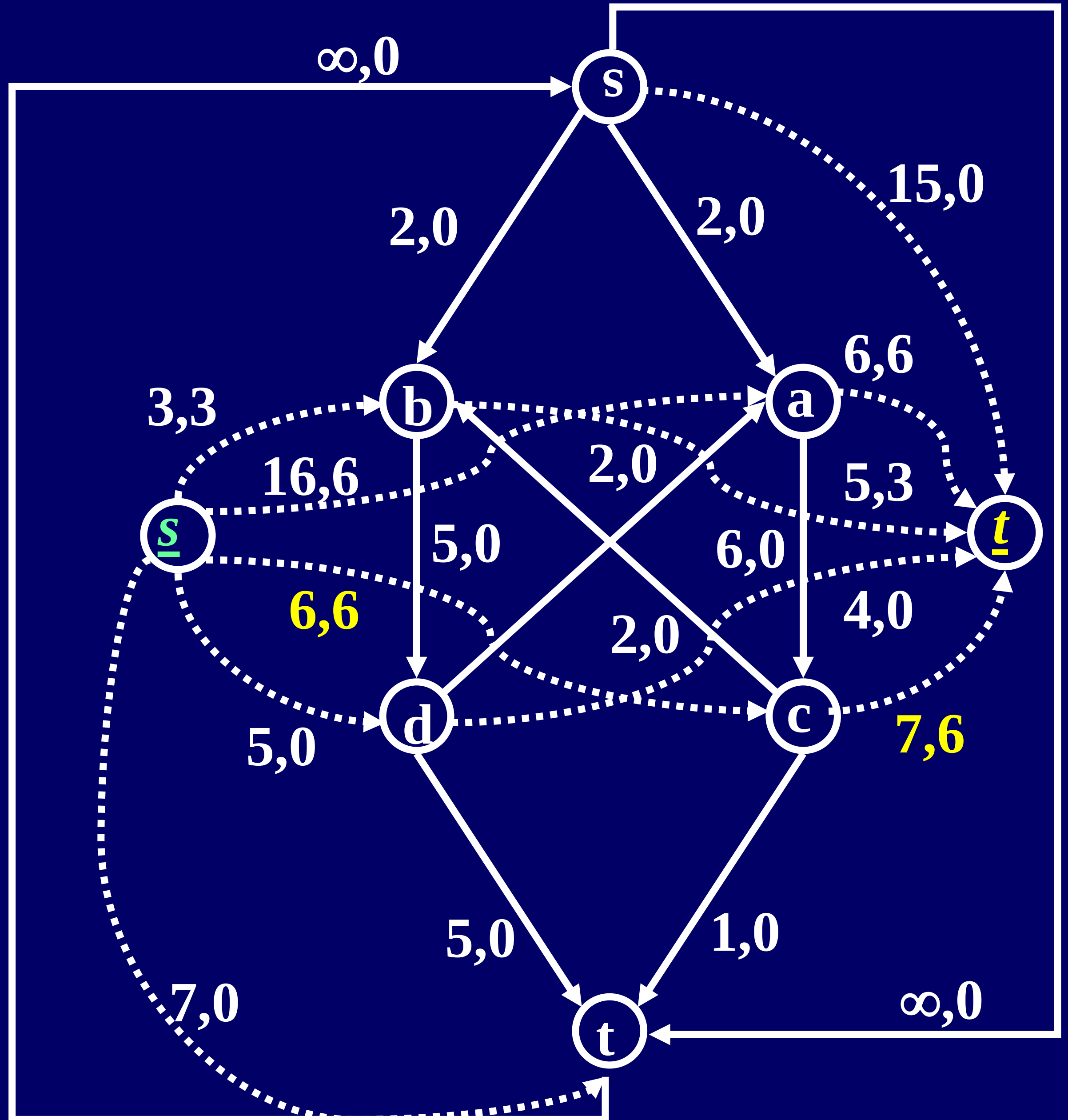
G_{aux}

G_{aux}



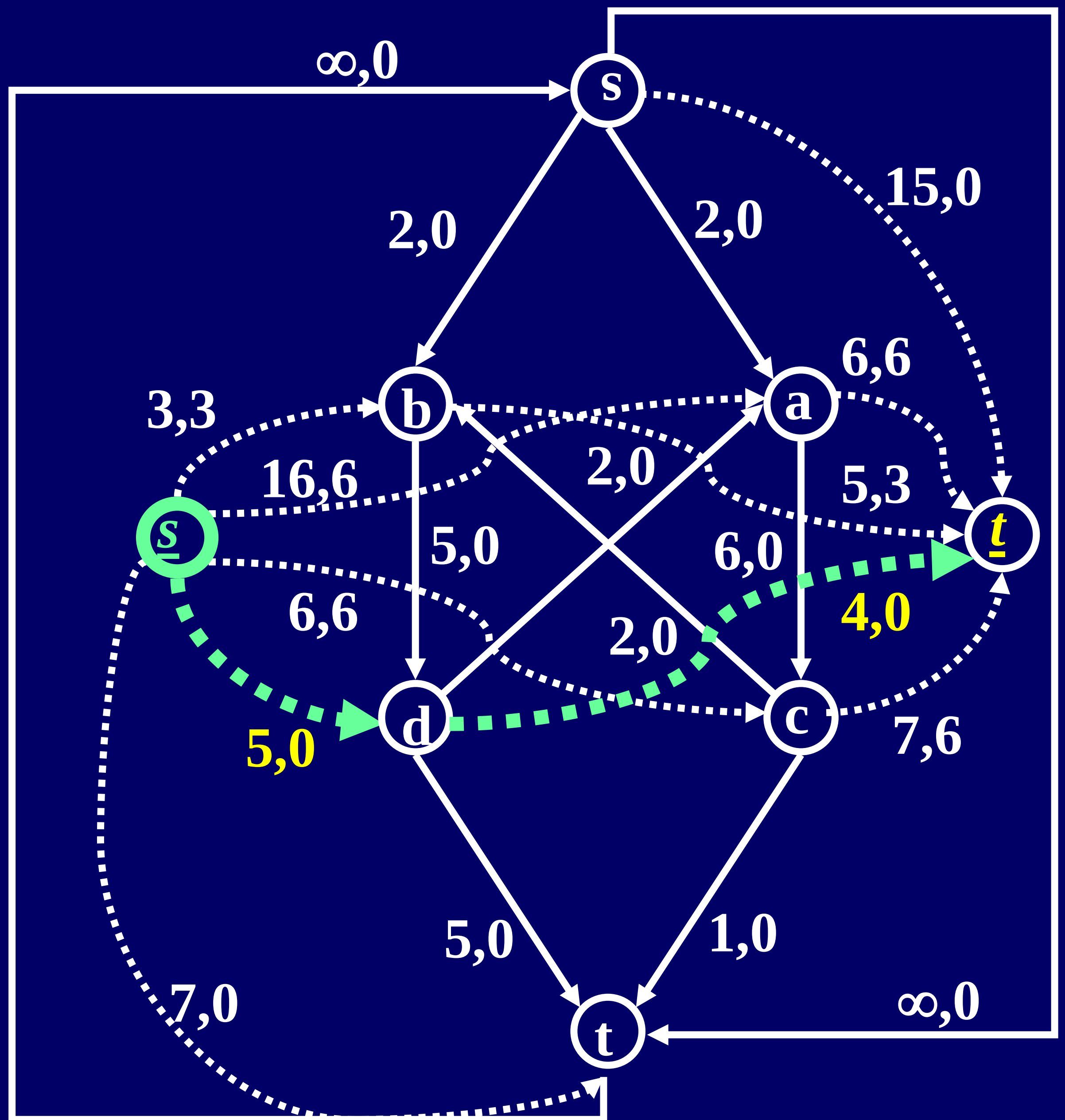
G_{aux}

G_{aux}



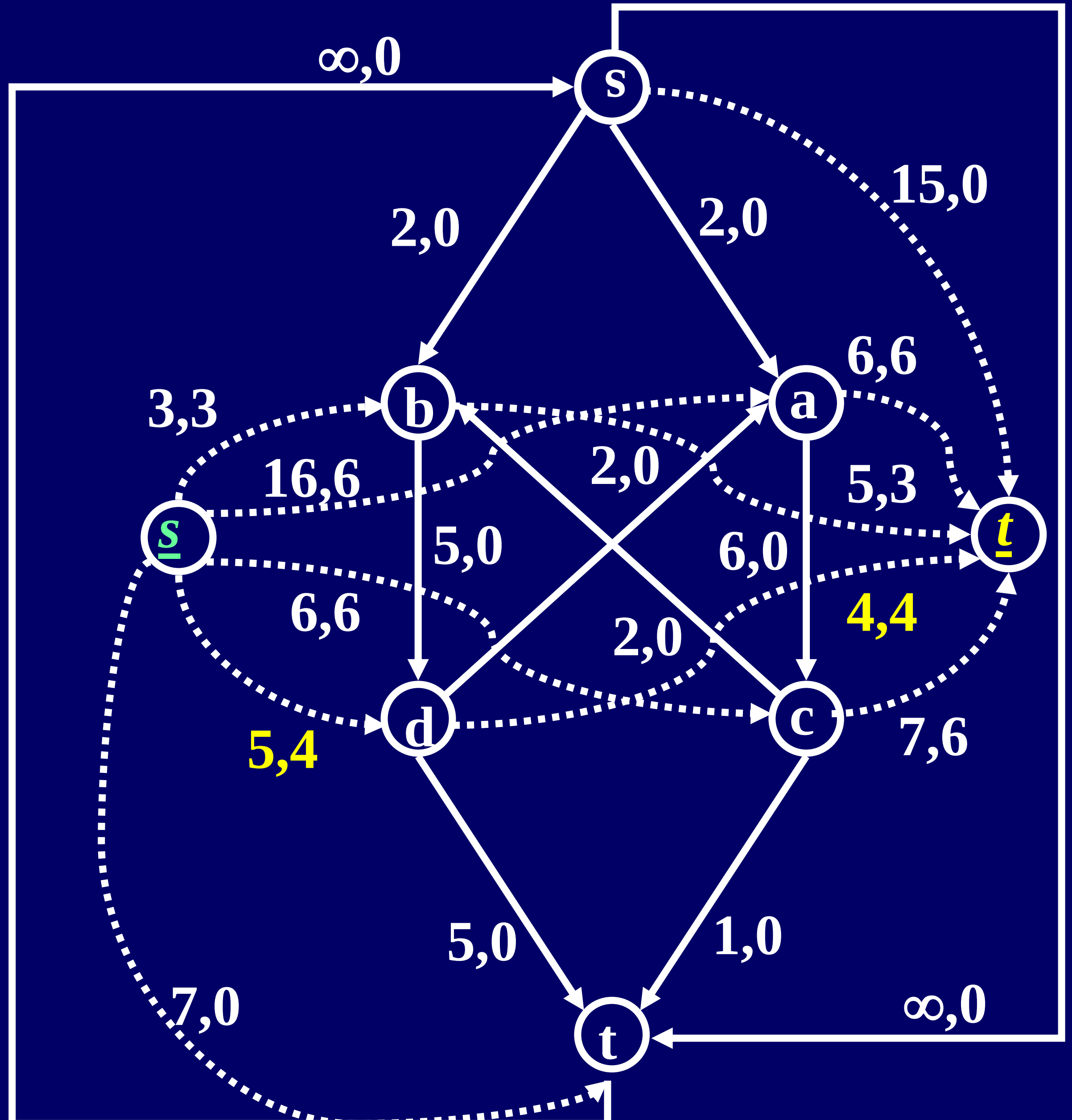
G_{aux}

G_{aux}



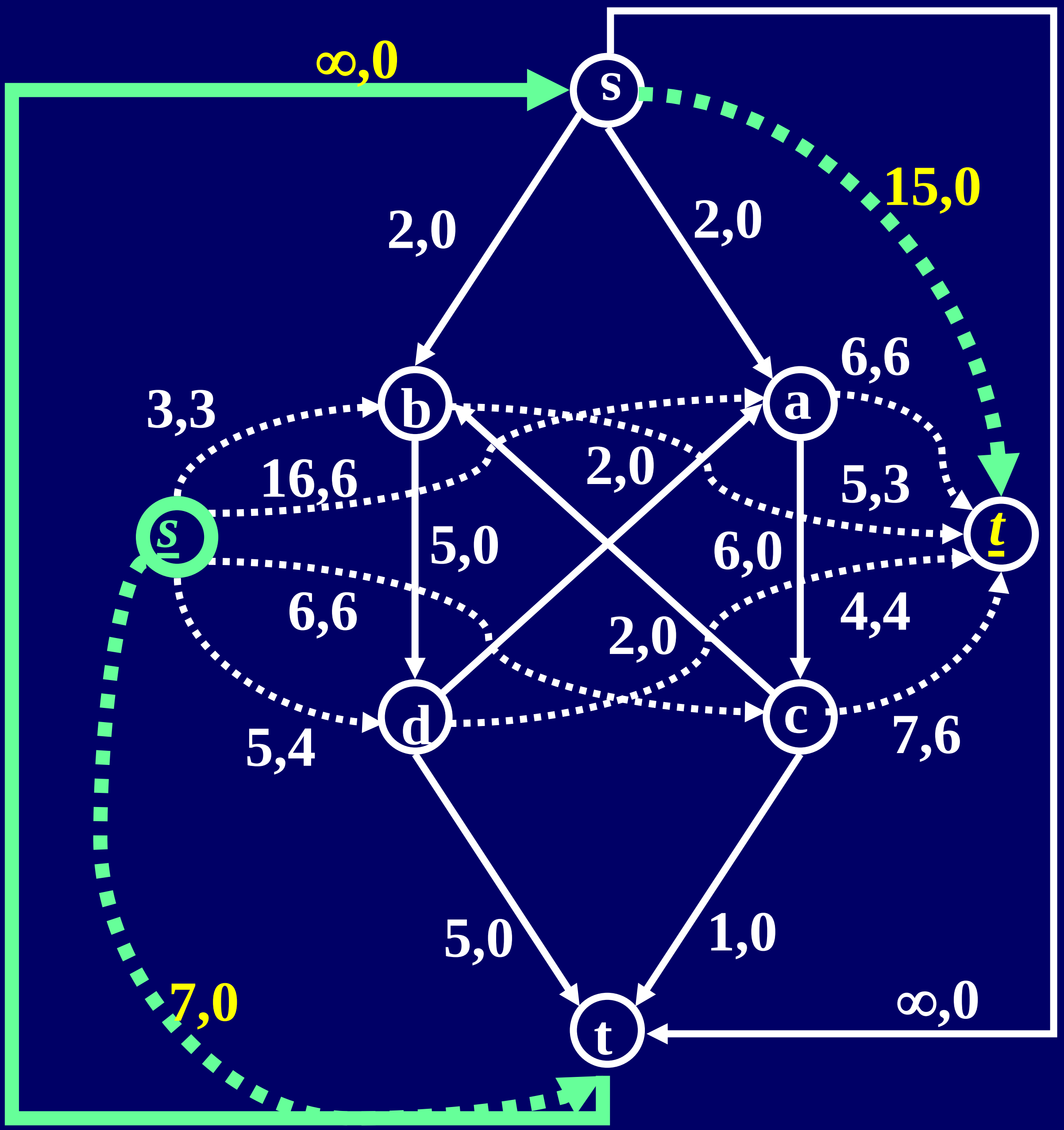
G_{aux}

G_{aux}



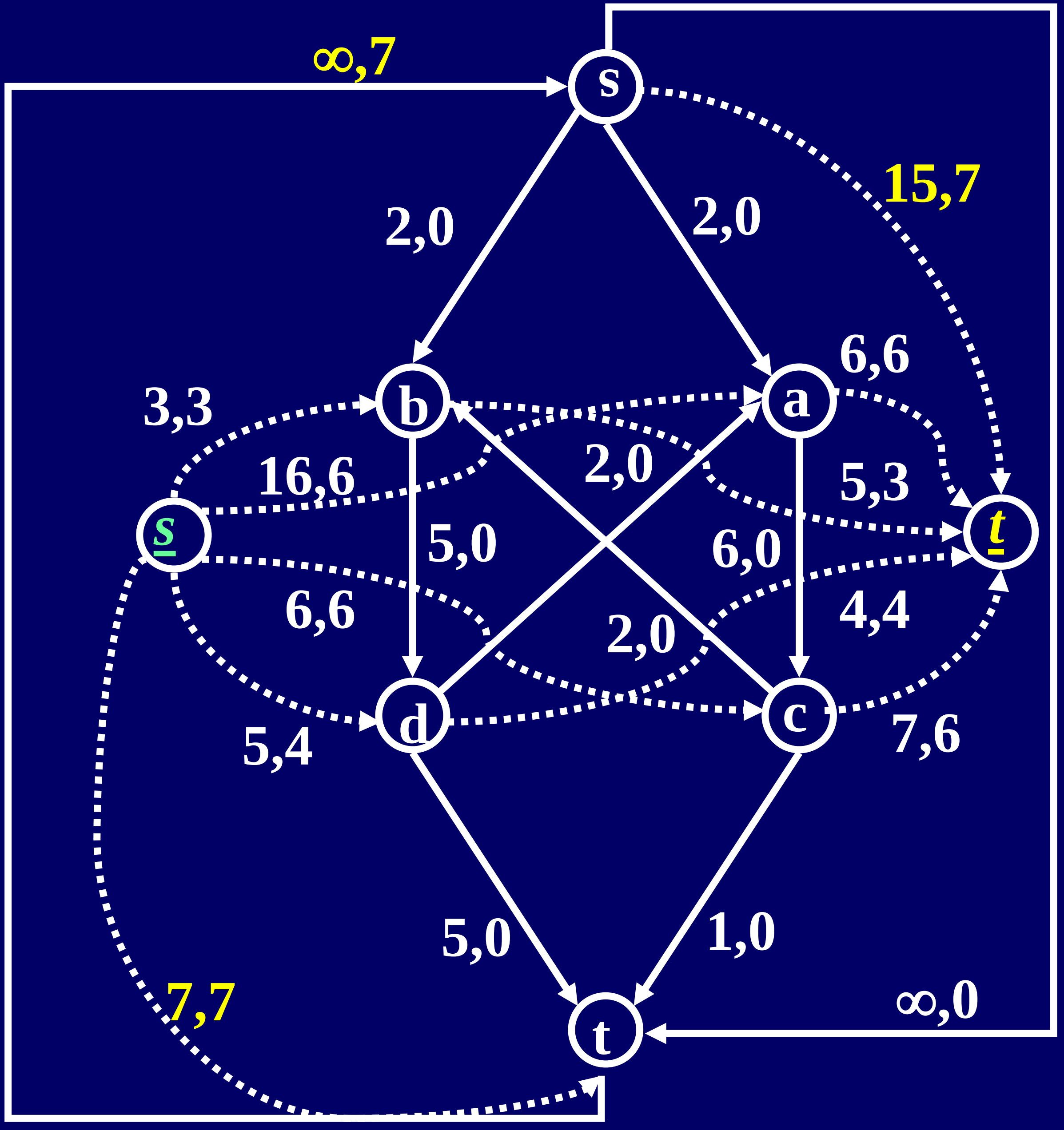
G_{aux}

G_{aux}



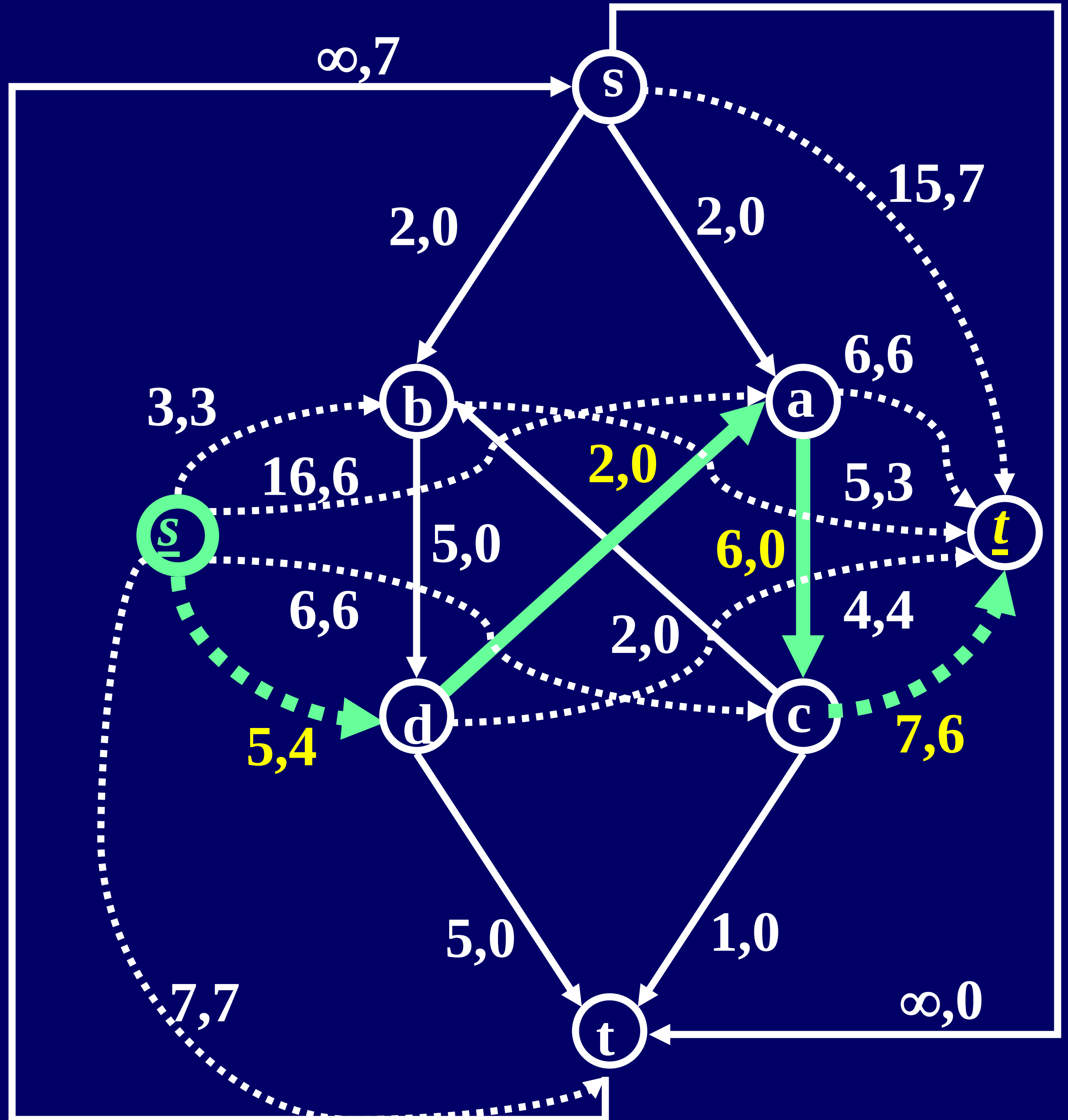
G_{aux}

G_{aux}



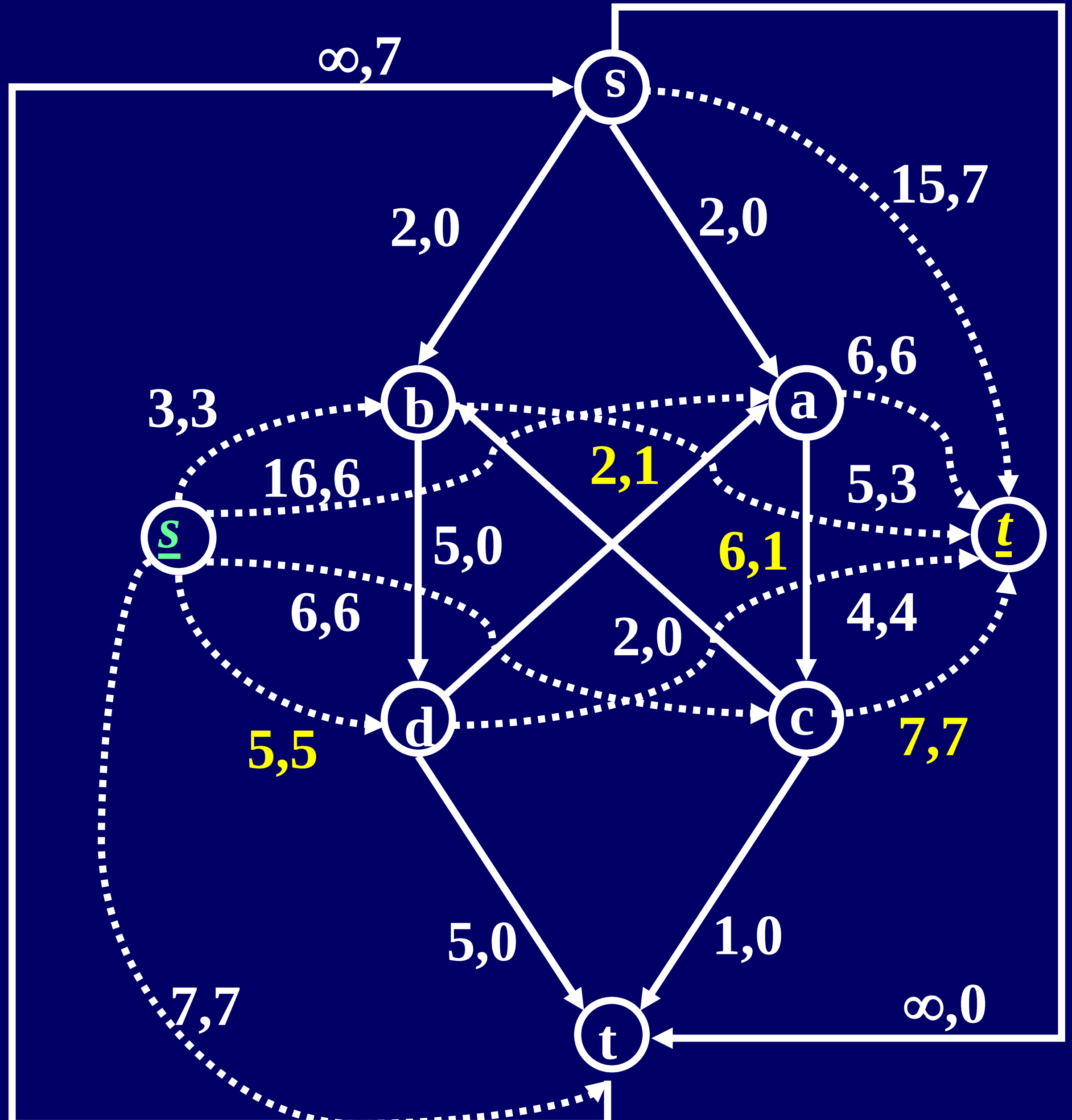
G_{aux}

G_{aux}



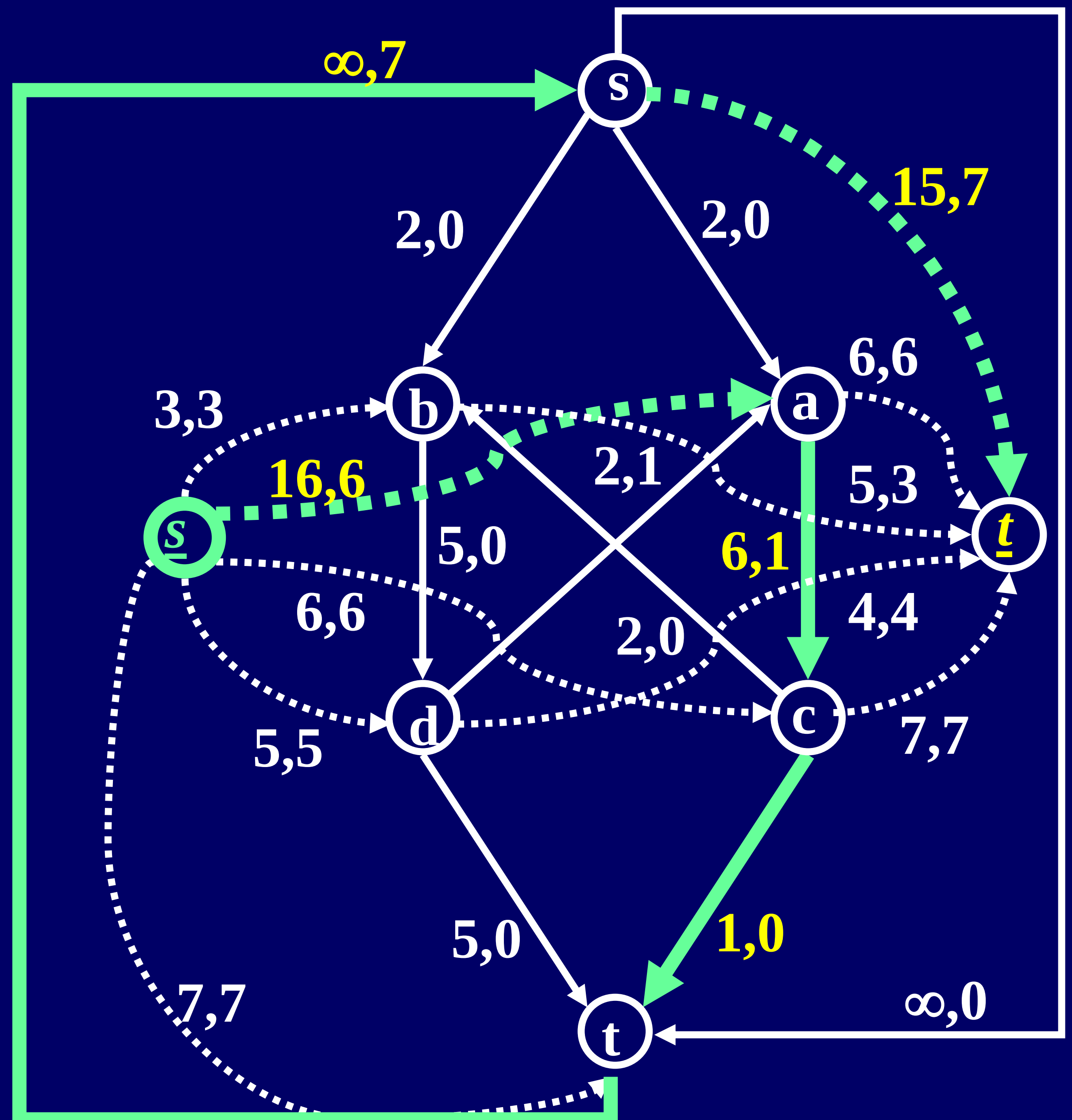
G_{aux}

G_{aux}



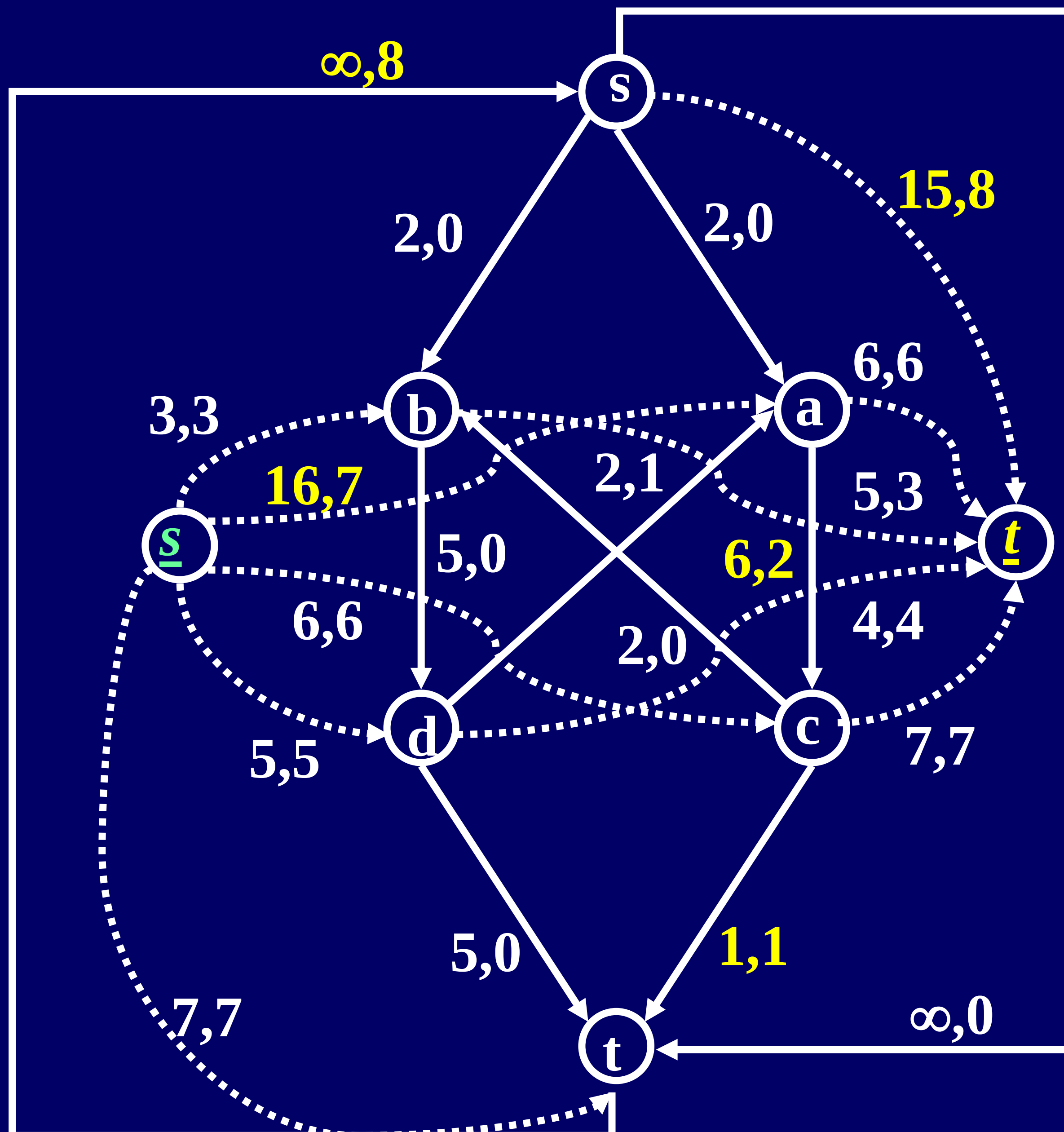
G_{aux}

*G*_aux_



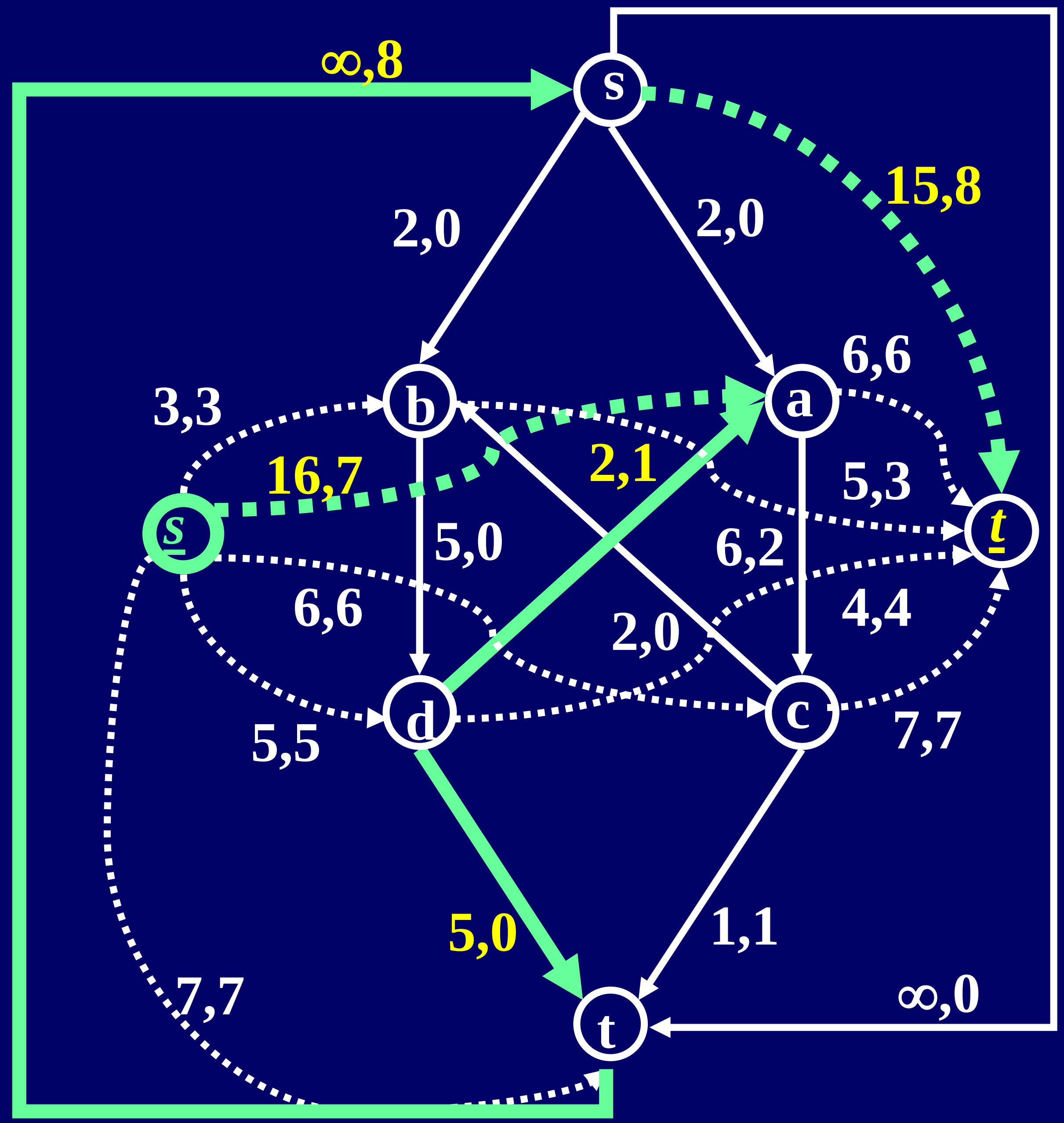
G_aux_

G_{aux}



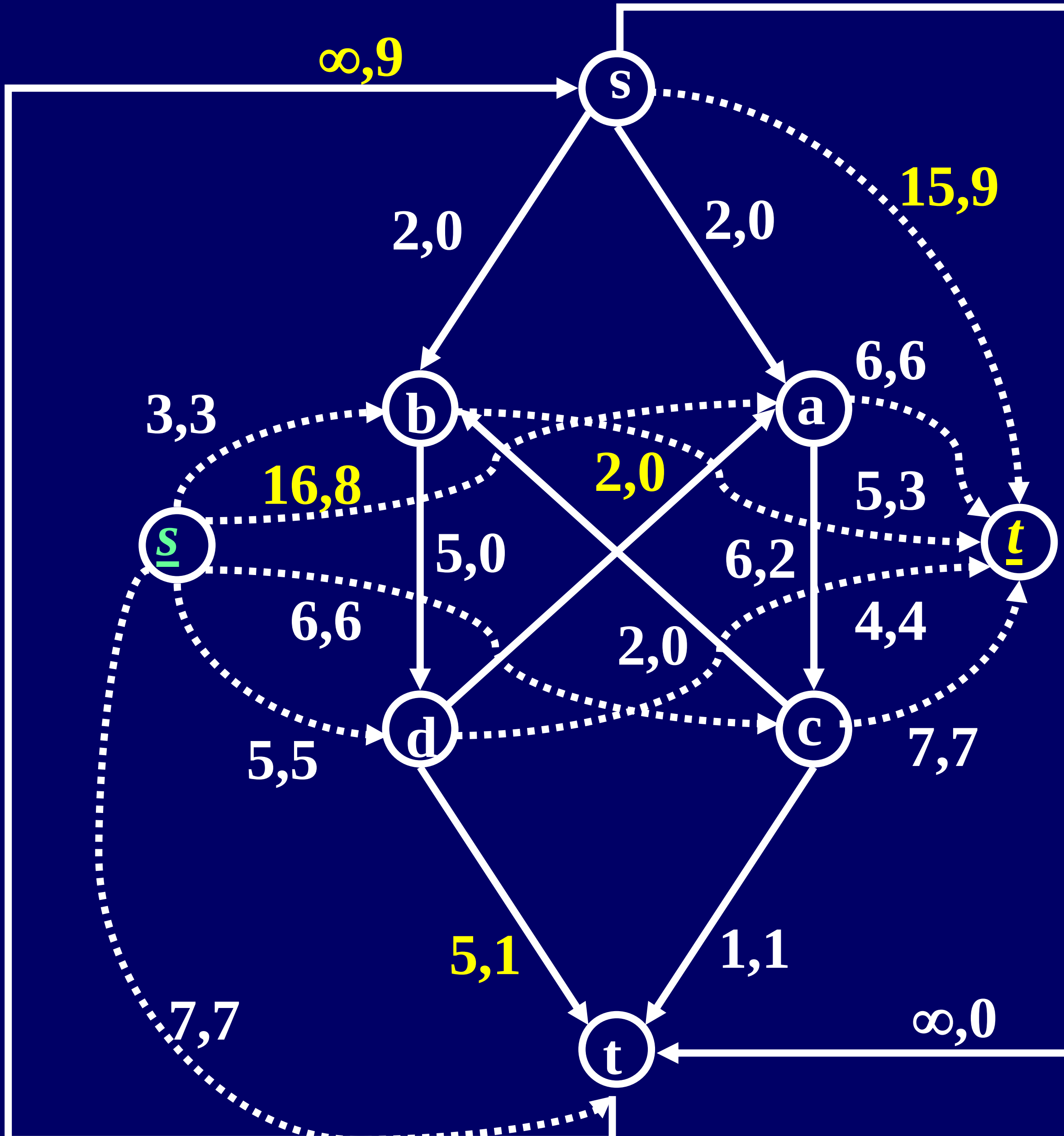
G_{aux}

G_{aux}



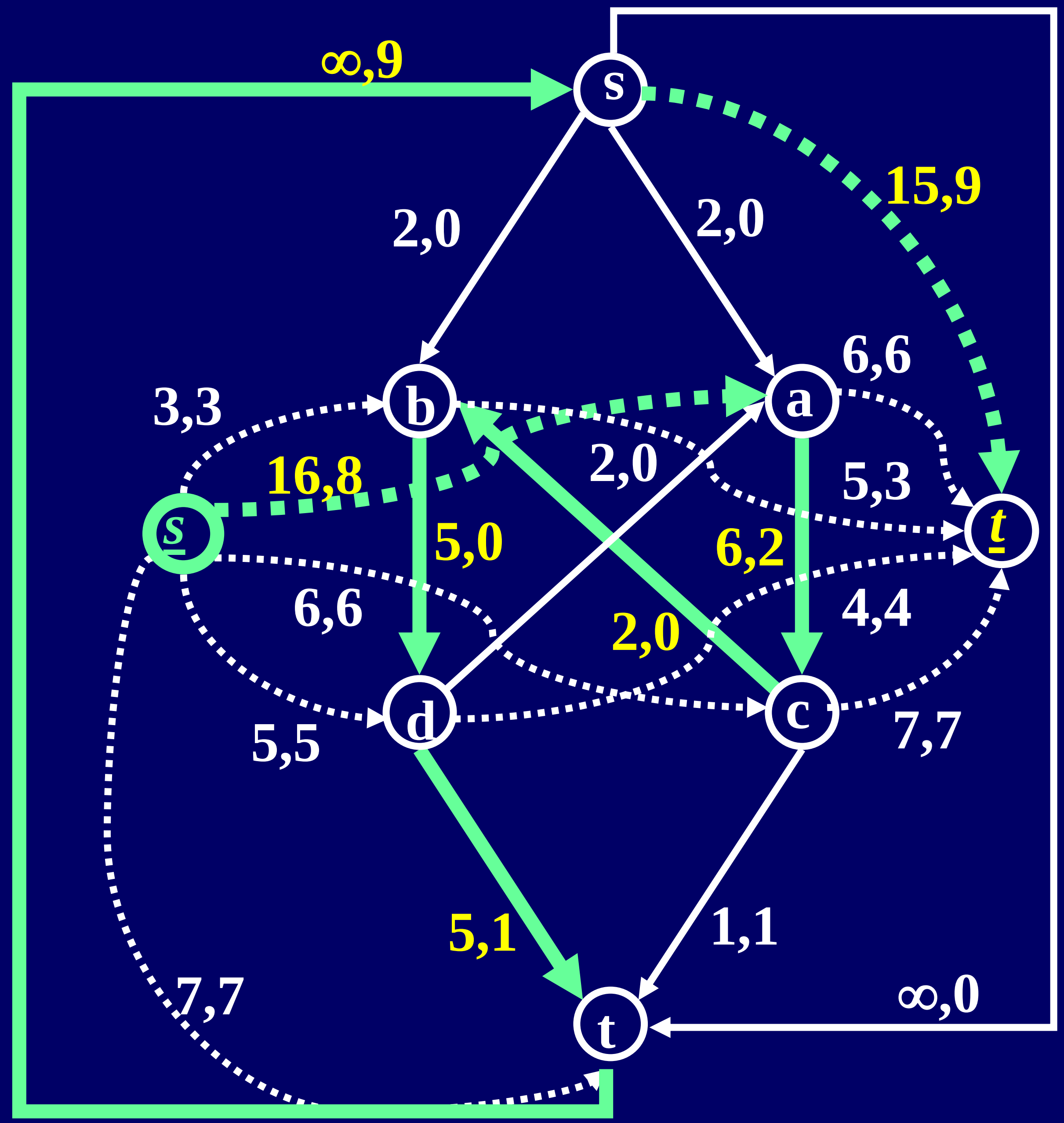
G_{aux}

G_{aux}



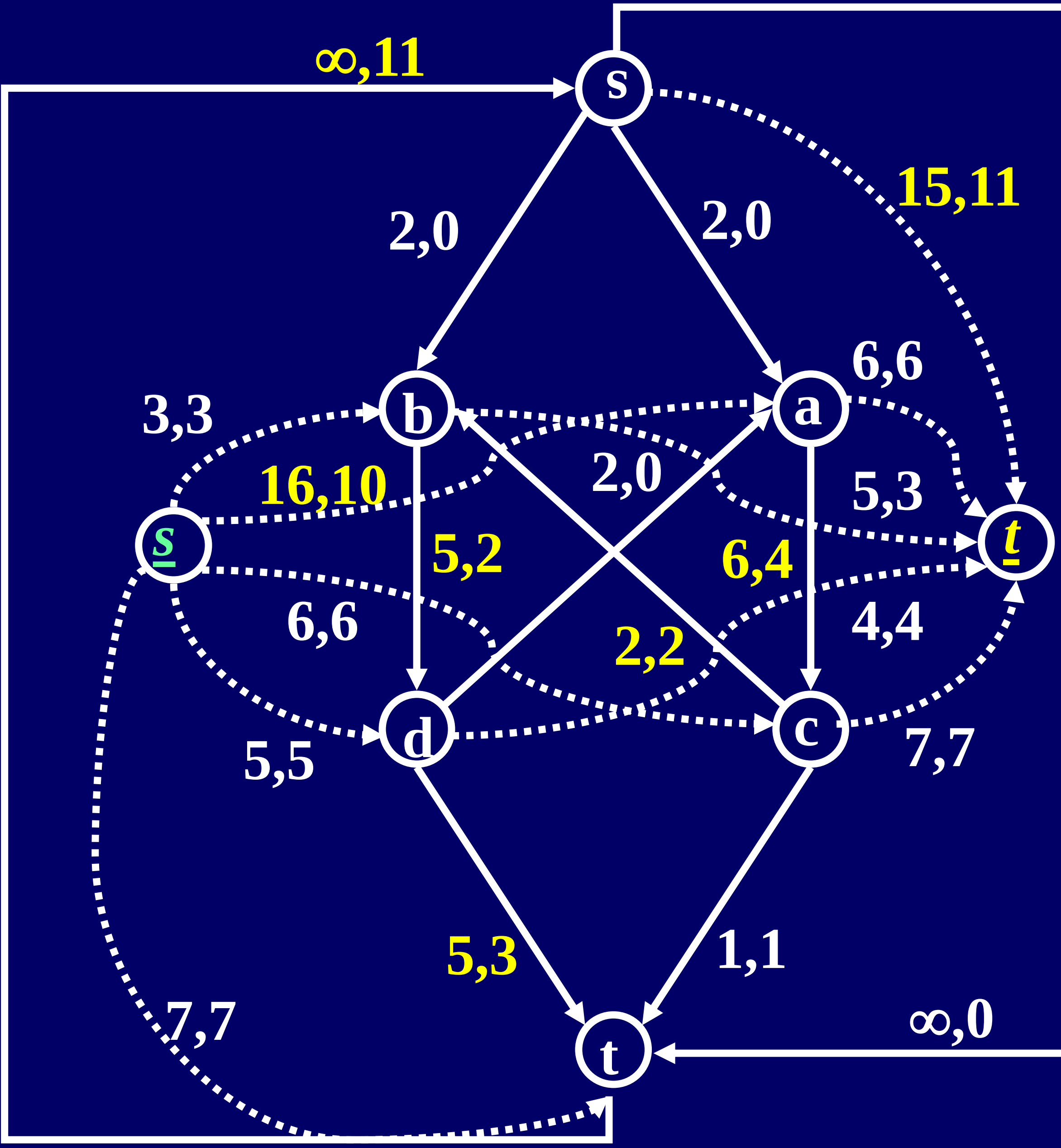
G_{aux}

G_{aux}



G_{aux}

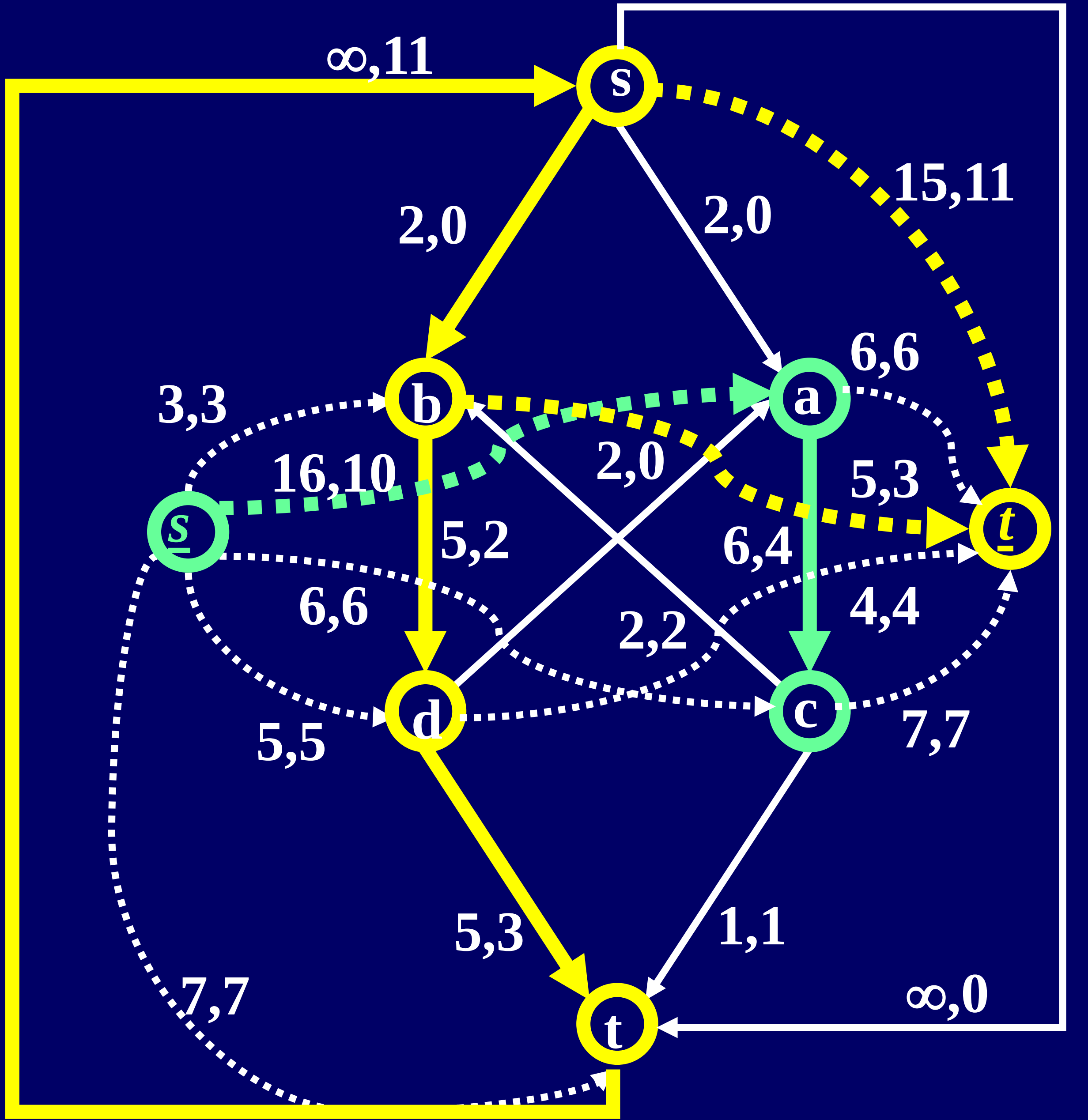
G_{aux}



∞,11
s
2,0
2,0
15,11
6,6
3,3
b
a
16,10
2,0
5,3
s
t
5,2
6,4
6,6
2,2
4,4
d
c
5,5
7,7
5,3
1,1
7,7
∞,0
t

G_{aux}

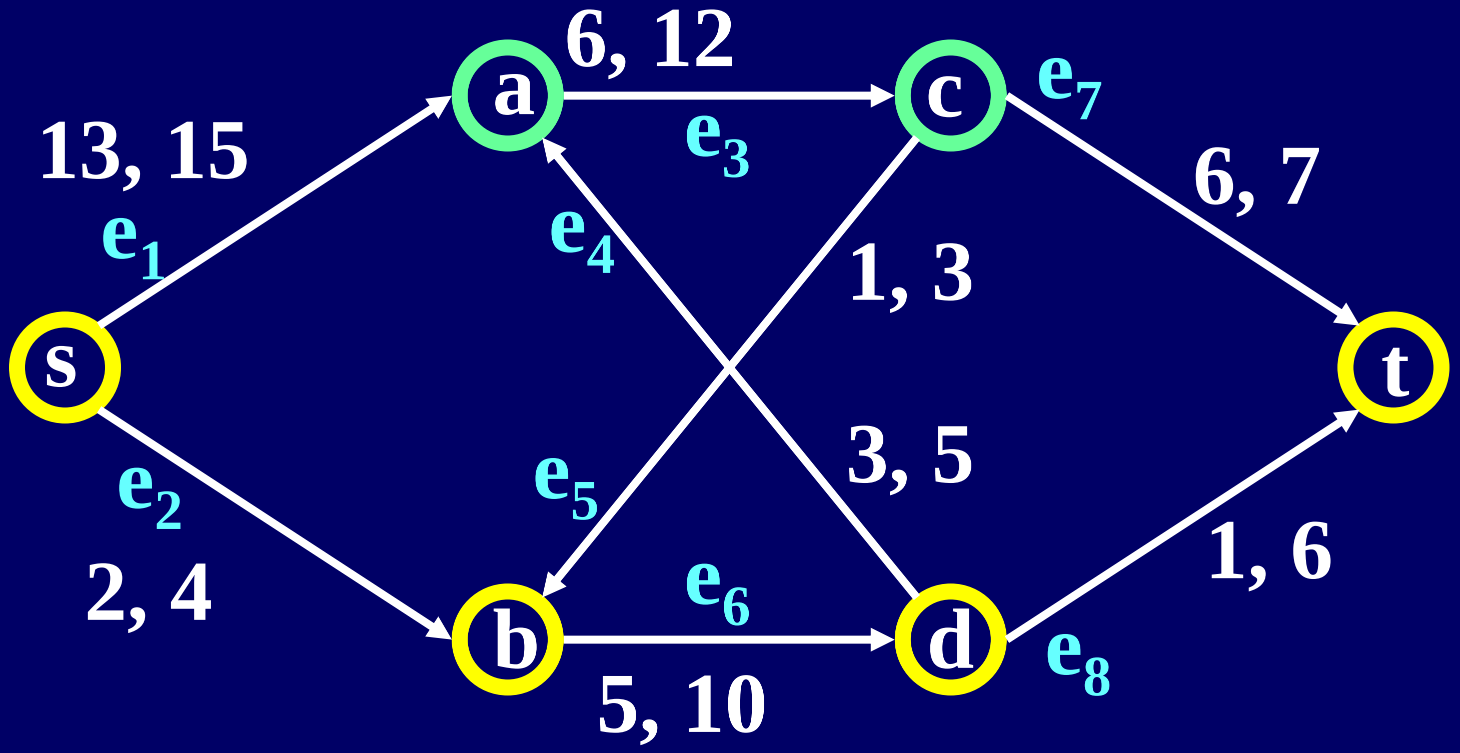
G_{aux}



∞,11
s
2,0
2,0
15,11
6,6
3,3
b
a
16,10
2,0
5,3
s
5,2
6,4
t
6,6
2,2
4,4
d
c
5,5
7,7
5,3
1,1
7,7
∞,0
t

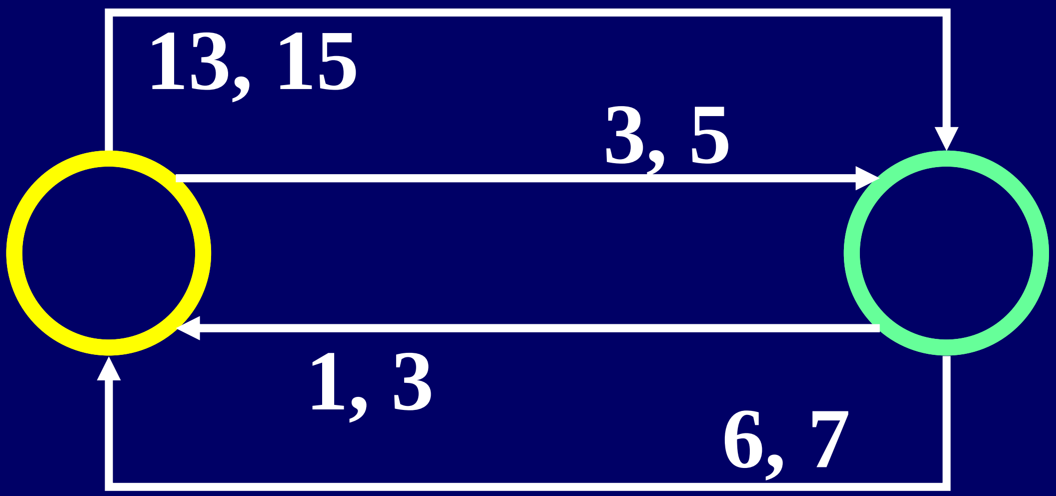
G_{aux}

Conclusion



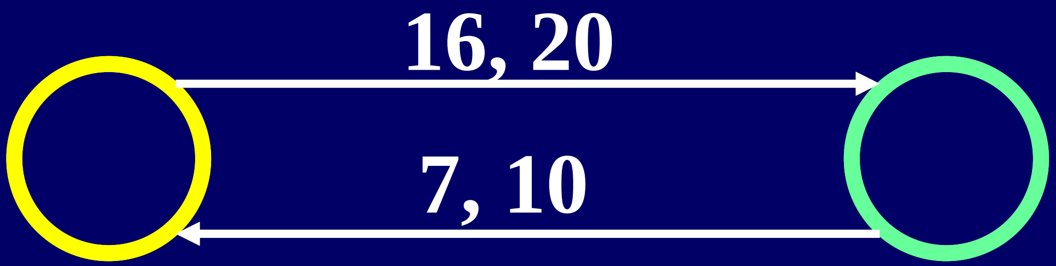
b, *c*

Conclusion



b*, *c

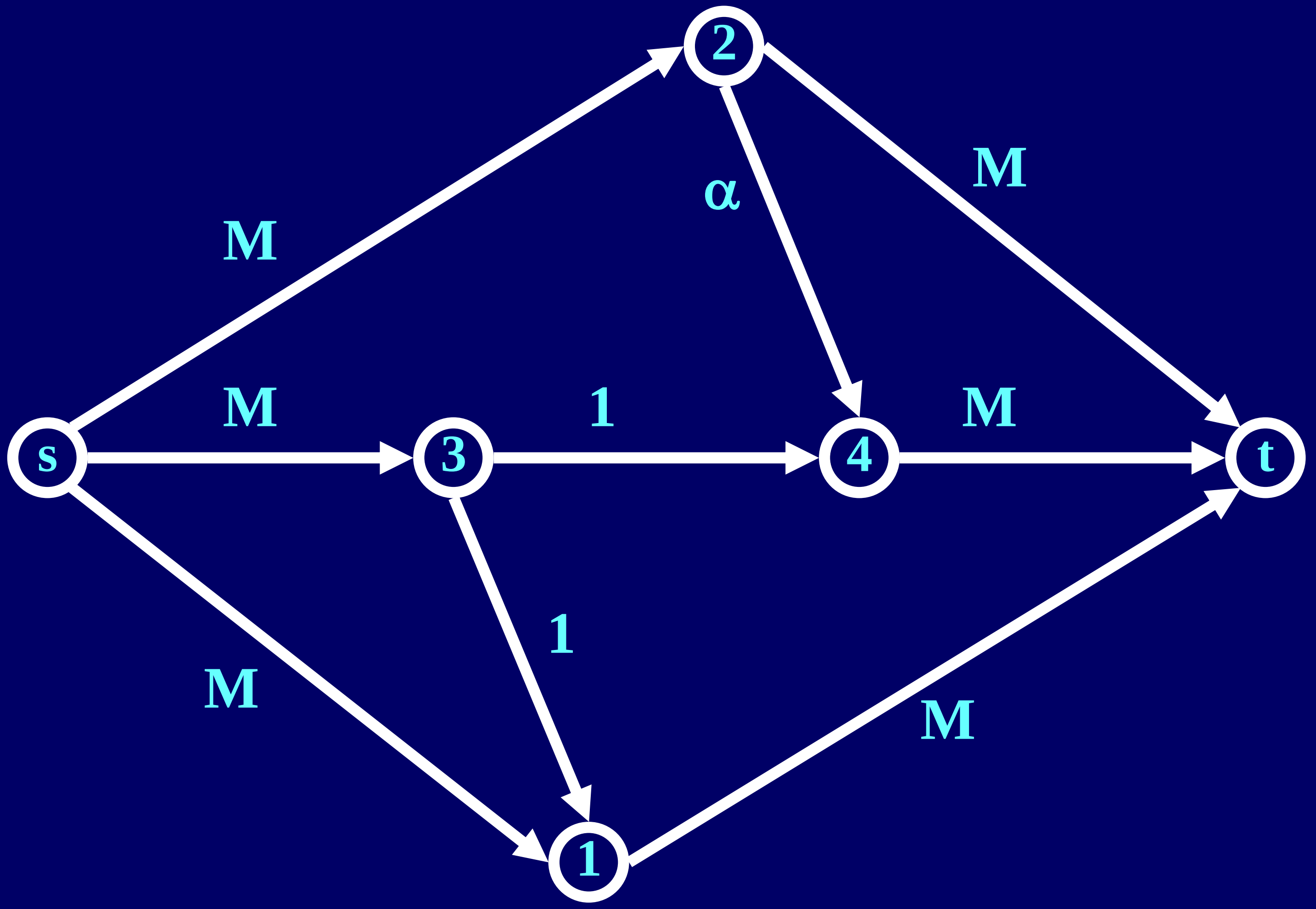
Conclusion



b*, *c

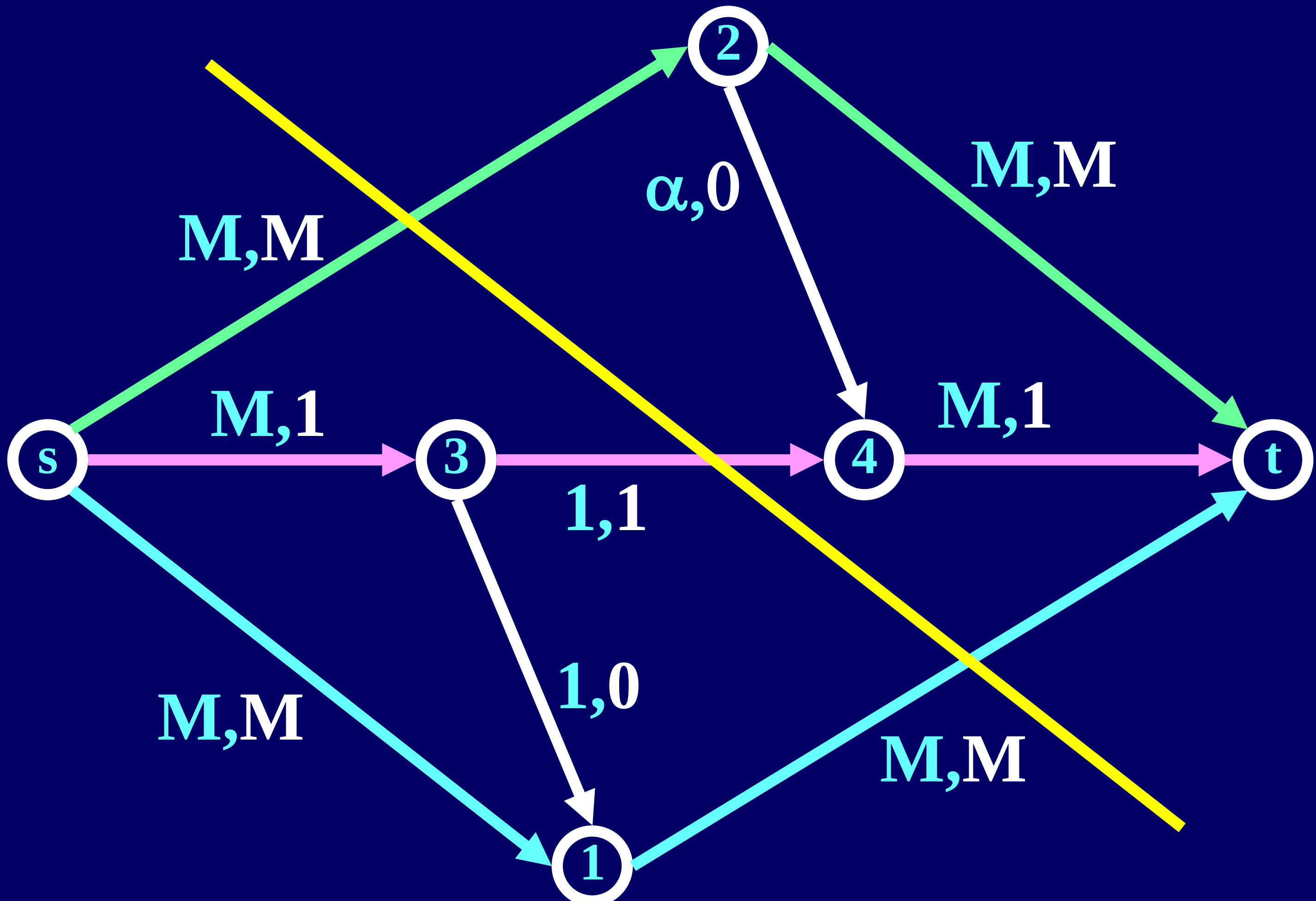
La méthode
Ford & Fulkerson
avec capacités réelles

Exemple de pb. avec Ford & Fulkerson



$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618033988749895\ldots$$

Le flot maximum (trivial …)



$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618033988749895\ldots$$

Une propriété

Soit α = (sqrt(5)-1)/2 ≈ 0,618

On définit

$$a_n = \alpha^n$$

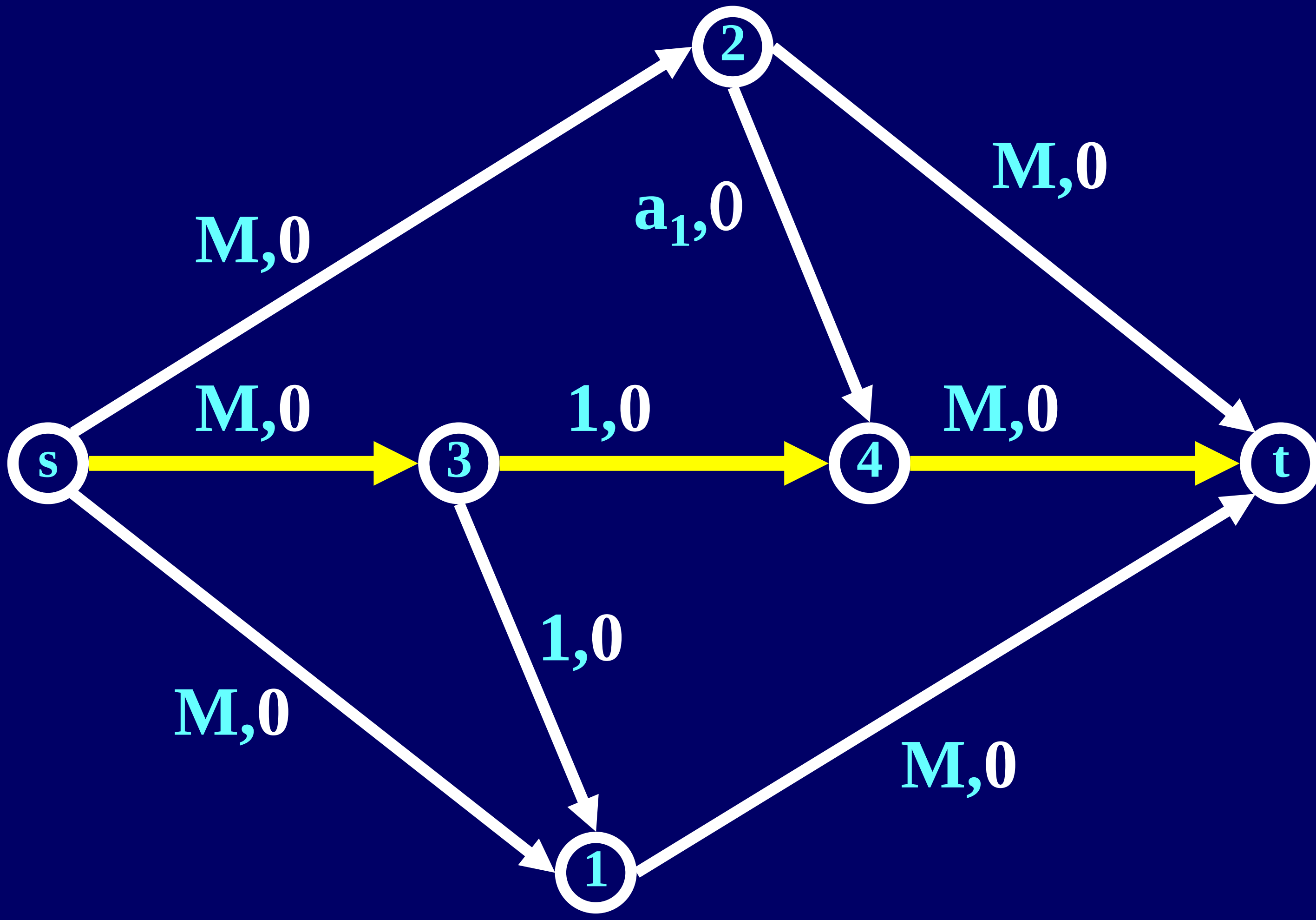
Et on obtient

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \alpha$$

$$a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$$

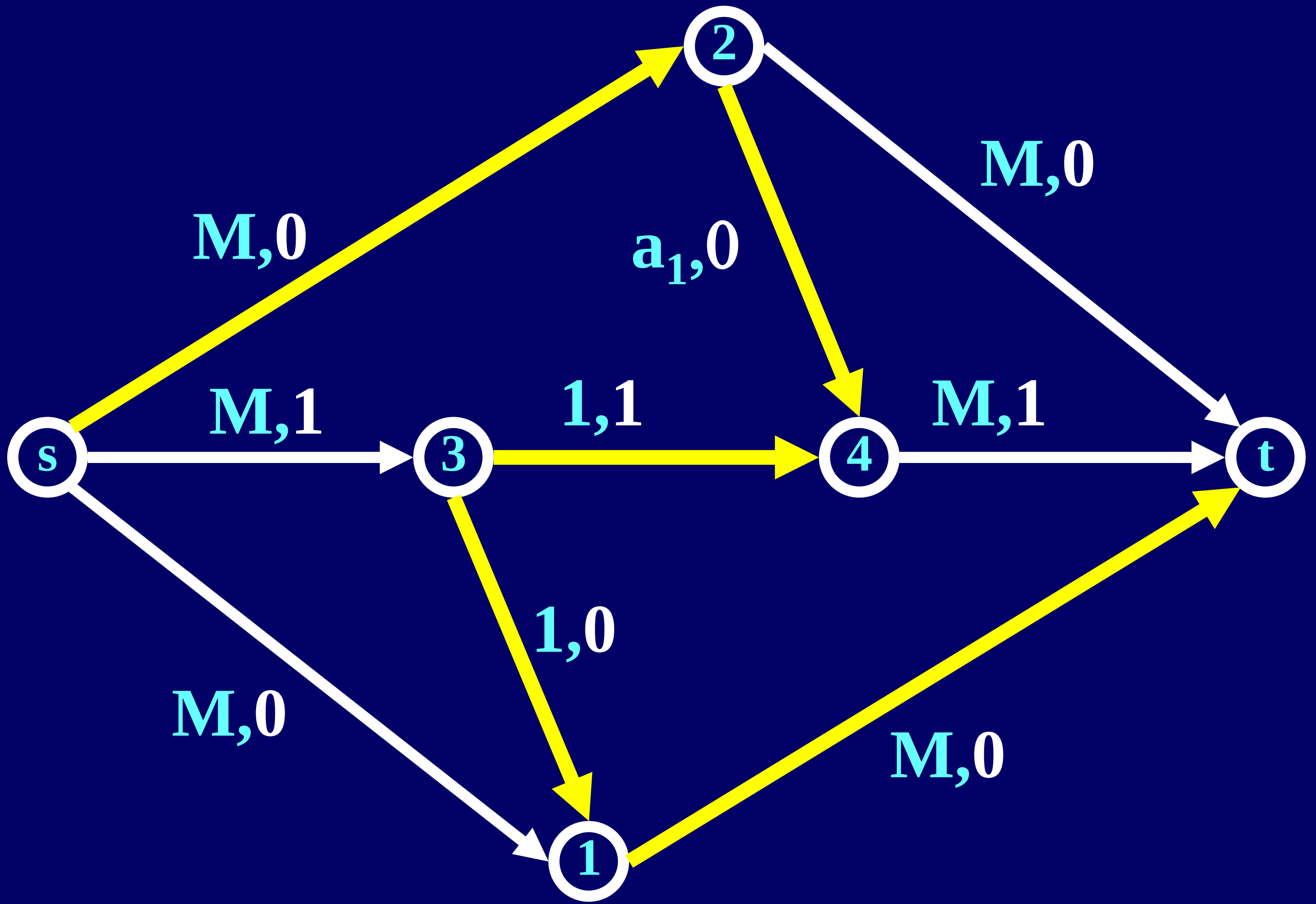
Les augmentations (1)



augmentation : 1

chaîne : s,3,4,t

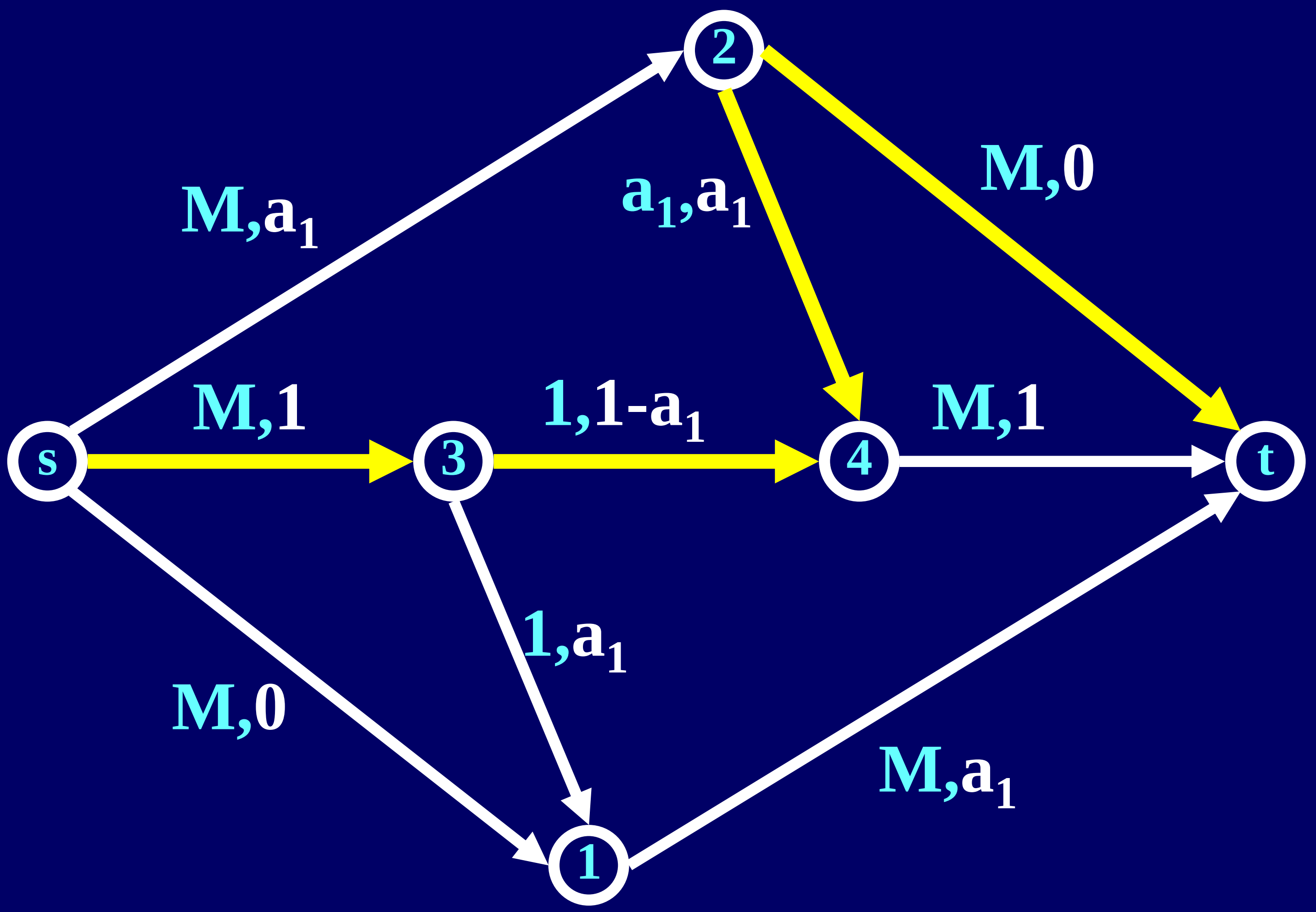
Les augmentations (2)



augmentation : a_1

chaîne : s,2,4,3,1,t

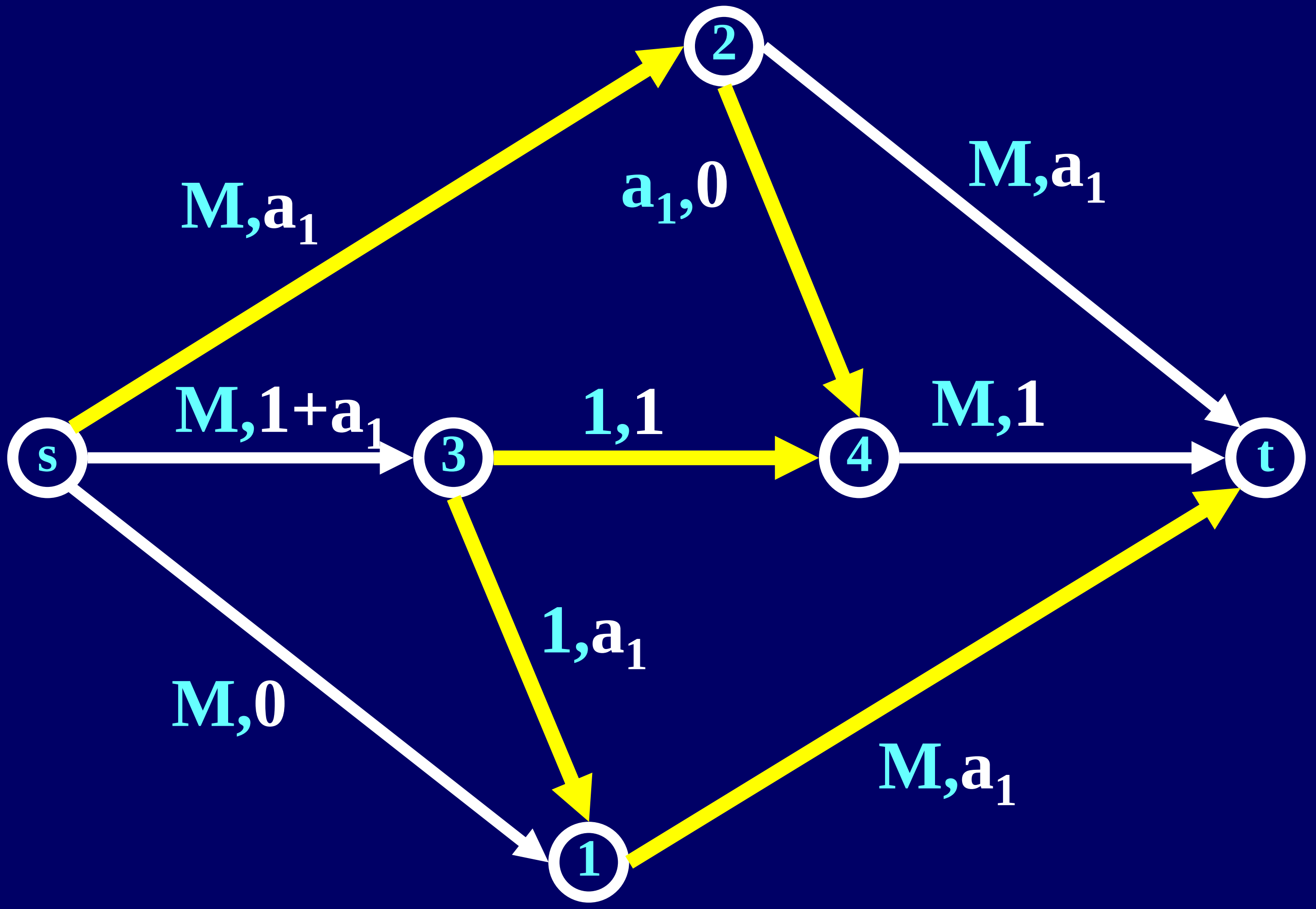
Les augmentations (3)



augmentation : a_1

chaîne : s,3,4,2,t

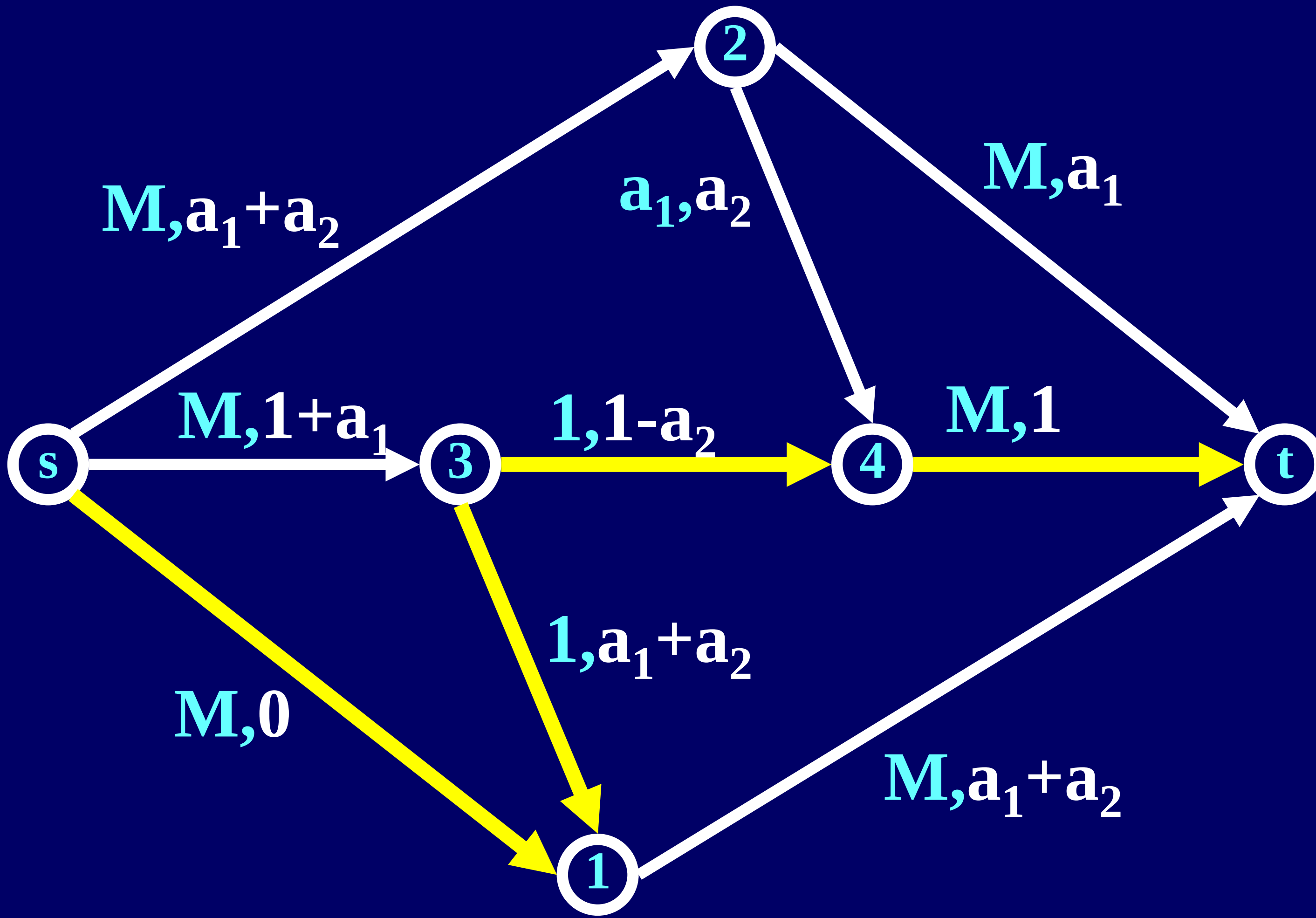
Les augmentations (4)



augmentation : a_2

chaîne : s,2,4,3,1,t

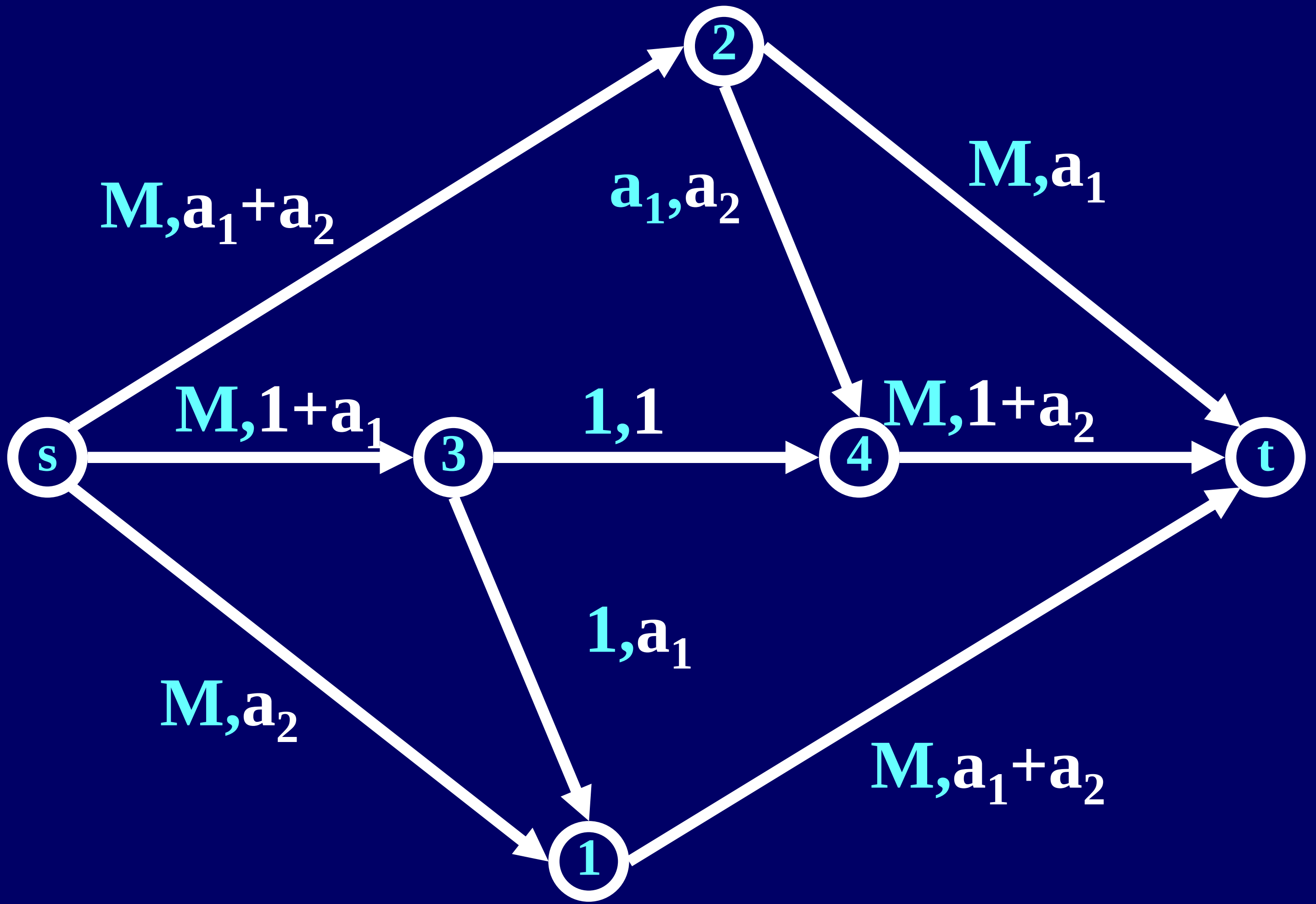
Les augmentations (5)



augmentation : a_2

chaîne : s,1,3,4,t

Les augmentations (6)



augmentation : a_3

	s,1	s,2	s,3	3,1	2,4	3,4	2,t	4,t	1,t
cap	M	M	M	1	α	1	M	M	M
1			1			1		1	
2		a_1	1	a_1	a_1	$1-a_1$		1	a_1
3		a_1	$1+a_1$	a_1	0	1	a_1	1	a_1
4		a_1+a_2	$1+a_1$	a_1+a_2	a_2	$1-a_2$	a_1	1	a_1+a_2
5	a_2	a_1+a_2	$1+a_1$	a_1	a_2	1	a_1	$1+a_2$	a_1+a_2
•									
•									
•									

	flot $3 \to 1$	flot $2 \to 4$	flot $3 \to 4$
$4k+1$	a_{2k}	a_{2k+1}	0
$4k+2$	a_{2k+2}	0	a_{2k+1}
$4k+3$	a_{2k+2}	a_{2k+1}	0
$4k+4$	0	a_{2k+3}	a_{2k+2}
$4k+5$	a_{2k+2}	a_{2k+3}	0

Le problème …

Le problème est que la suite des augmentations est 1, a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, a_4, a_4, …

Ce qui nous fait converger vers

$$1+2\sum_{i=1}^{\infty}\alpha^{i}=2\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^{i}-1=2\frac{1}{1-\alpha}-1=\frac{2-1+\alpha}{1-\alpha}=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

Ce qui est inférieur à 5, donc on est bien loin de 2M+1 !