Informatique Théorique

Informatique Théorique 5

(MAM3-SI3)

20 novembre 2017

1 Gammes

Soit $x = abbcc$ un mot sur l'alphabet $V = \{a,b,c\}$.

1. Quelle est la valeur de $|x|$?
2. Donner un mot de V^3 qui n'est pas un facteur de x.
3. Donner tous les facteurs de x qui appartiennent à V^3.
4. Donner l'ensemble $Pref(x)$ des préfixes de x.
5. Donner l'ensemble $Suff(x)$ des suffixes de x.

2 un peu, beaucoup, passionnément,.....

1. Déterminez un mot de longueur 7 sur un alphabet à trois lettres ayant le plus petit nombre possible de facteurs différents.
2. Déterminez un mot de longueur 7 sur un alphabet à trois lettres ayant le plus grand nombre possible de facteurs différents.

3 Distributivité

Soit Σ un alphabet et L,M,N trois langages sur cet alphabet. Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $$L.(M \cup N) = (L.M) \cup (L.N)$$

2. $$L.(M \cap N) = (L.M) \cap (L.N)$$

4 Langages

1. Soient trois langages L_1, L_2, L_3 sur l'alphabet $\Sigma = \{a,b\}$ définis par
   - $L_1 = \{\epsilon,a,b,ab,ba,aba,aaba,abba,abaa\}$
   - $L_2 = \{w \in \Sigma^\star \mid 0 < |w|_b < |w|_a\}$
   - $L_3 = \{w \in \Sigma^\star \mid \exists n,m \in N, n < m \ w = a^n b a^m\}$

   Calculer $L_1 \cap L_2$, $L_1 - L_3$.
2. Soient L_1, L_2, deux langages. Si ϵ appartient à $L_1.L_2$ que peut on dire de L_1 et L_2 ?

5 Union étoilée

1. Montrer qu'il existe des langages L_1 et L_2 sur le même alphabet V, tels que $(L_1 \cup L_2)^\star \neq L_1^\star \cup L_2^\star$.
2. De façon similaire, trouver des langages L_1 et L_2 tels que $(L_1.L_2)^\star \neq L_1^\star.L_2^\star$.
3. L étant un langage quelconque, $L^\star$ est-il toujours un langage infini ?
4. Avec $L = \{00,01,10,11\}$, montrer que $L^\star$ est l'ensemble des mots de longueur paire. Peut-on trouver un langage X tel que $X^\star$ soit l'ensemble des mots de longueur impaire ?

6 Simplification ?

On considère un alphabet A, une lettre a de A et deux langages L et M sur l'alphabet A

1. Si $\{a\}.L = \{a\}.M$ alors a-t-on $L = M$?
2. Peut-on avoir $L^\star = M^\star$ quand $L \neq M$?

7 Echiquiers

On suppose que n est un entier non nul. Soit un échiquier ayant 2^n cases par coté. Un trimino est un morceau d'échiquier de 3 cases non alignées.

1. Prouvez que l'on peut recouvrir par des triminos, un échiquier ayant 2^n cases par coté et auquel on a enlevé une case de coin.
2. Prouvez que le recouvrement est possible quel que soit l'emplacement de la case que l'on enl ève à l'échiquier. En déduire que $\forall n \in N$ $2^{2n} - 1$ est divisible par 3.
3. Conclure que la condition de divisibilité est une condition nécessaire mais pas suffisante.

8 Palindromes

1. Donnez et prouvez une définition inductive pour l'ensemble des mots binaires palindromes. Est-ce que la définition est libre ?
2. Donner un exemple de schéma inductif, ne comportant qu'une règle et qui cependant n'est pas libre.

9 Equilibre

Soit M le sous ensemble de $\{a, b\}^\star$ constitué des mots ayant autant de a que de b.
Soit E l'ensemble défini de manière inductive par

- Base : $B = \{\epsilon\}$
- Règles : $\Omega = \{\omega_g,\omega_d\}$ avec $\omega_g(m) = amb$ et $\omega_d(m) = bma$.

1. Le schéma définissant E est-il libre ?
2. A-t-on $M \subset E$?
3. A-t-on $E \subset M$?
4. Déterminez et prouvez une définition inductive pour M.
5. Donnez une définition non inductive de E.

10

Soit LP le langage défini sur l'alphabet $\{(,)\}$ par

- Base : $B = \{\epsilon\}$

– Règle : $\Omega = \{\omega\}$ avec $\omega(u,v) = (u)v$.

Montrer par induction structurelle que les mots de LP ont exactement autant de (que de).

11

Donner et prouver une définition inductive pour l'ensemble des mots sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ ne comportant pas deux a consécutifs. Votre schéma est-il libre ?

12

Considérons LBP l'ensemble des mots m sur l'alphabet $\Sigma = \{(,)\}$ tels que $|m|_(= |m|_)$ et dans tout pr éfixe u de m, $|u|_(\geq |u|_)$.

1. Montrez que $LBP = LP$
2. Montrez que le schéma définissant LP est libre

13

$LP2$ est définit inductivement par

– Base : $B = \{\epsilon\}$

– Règles : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ avec $\omega_1(u) = (u)$ et $\omega_2(u,v) = uv$.

1. Montrez que $LP = LP2$.
2. Le schéma définissant $LP2$ est-il libre ?

14

Soit A l'alphabet $\{(,)\}$ et soit L le sous ensemble de $A^\star$ formé des mots dont tous les préfixes contiennent au moins autant de (que de).

1. Donnez une définition inductive de L et prouvez-la.
2. Montrez que L n'est pas égal à l'ensemble des mots bien parenthésés. Comment peut-on associer à un mot de L, un mot bien parenthésé ?
3. Le schéma que vous avez donné à la première question est-il libre ou ambigu ?