Problèmes NP-complets connus

Problèmes connus (1)

3-SAT

NOM : 3-SAT (3 - satisfiabilité)

DONNEES : une formule logique sous forme normale conjonctive, composée de clauses de degré *au plus* 3

QUESTION : est-ce que la formule est satisfiable ?

Problèmes connus (2)

X3-SAT

NOM : X3-SAT (exacte 3 - satisfiabilité)

DONNEES : une formule logique sous forme normale conjonctive, composée de clauses de degré *exactement* 3

QUESTION : est-ce que la formule est satisfiable ?

Problèmes connus (3)

2-SAT

NOM : 2-SAT (2 - satisfiabilité)

DONNEES : une formule logique sous forme normale conjonctive, composée de clauses de degré au plus 2

QUESTION : est-ce que la formule est satisfiable ?

Problèmes connus (4)
k-SAT

NOM : k-SAT (k - satisfiabilité)

DONNEES : une formule logique sous forme normale conjonctive, composée de clauses de degré au plus k

QUESTION : est-ce que la formule est satisfiable ?

Problèmes connus (5)

Xk-SAT

NOM : Xk-SAT (exacte k - satisfiabilité)

DONNEES : une formule logique sous forme normale conjonctive, composée de clauses de degré exactement k

QUESTION : est-ce que la formule est satisfiable ?

Problèmes connus

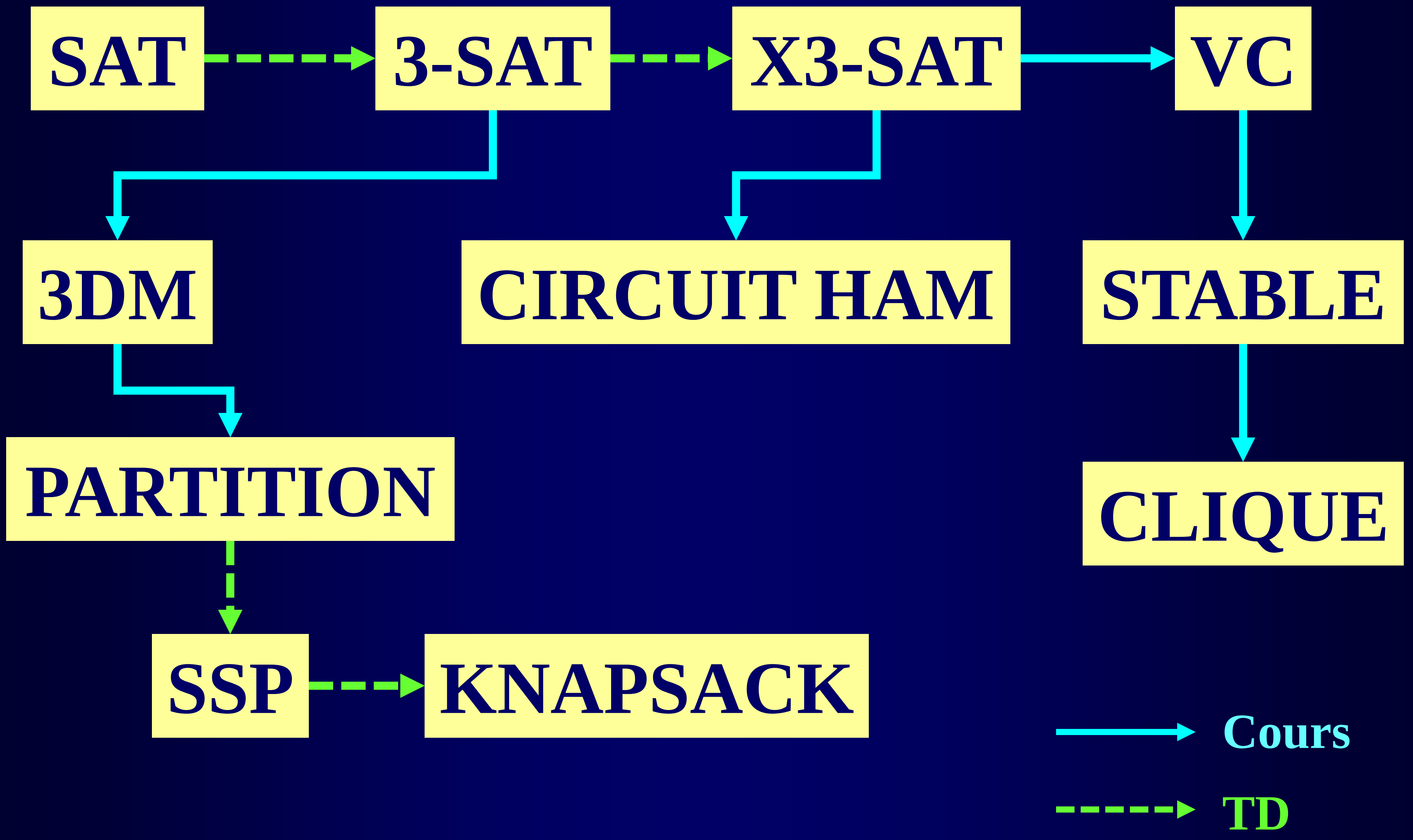
Le problème SAT

NOM : SAT (satisfiabilité)

DONNEES : une formule sous FNC

QUESTION : est-ce que la formule est satisfiable ?

Preuves de NP-complétude (schéma)



VC (1)

Théorème : **VC est NP-complet.**

Rappel

NOM : VC (transversal)

DONNEES : un graphe fini G(V,E), et un entier positif $K \leq |V|$

QUESTION : est-ce que le graphe admet un transversal (un ensemble de sommets contenant au moins une extrémité de toute arête) de cardinalité au plus K ?

VC (1)

Théorème : VC est NP-complet.

Preuve :

i) VC $\in$ NP

ii) VC est NP-difficile

nous le montrons par

X3-SAT $\propto$ VC

VC(3)

La transformation : soit $F = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_q$ une instance de X3-SAT avec $C_i = l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee l_{i,3}$, les $l_{i,j}$ étant des littéraux.

Nous construisons un graphe ayant *3q* sommets qui correspondent aux *3q* littéraux de la formule.

Le sommet (i,j), $1 \leq i \leq q$, $1 \leq j \leq 3$, qui correspond au littéral $l_{i,j}$ sera relié au sommet (m,n) si $i=m$ et $j \neq n$ ou si $i \neq m$ et $l_{i,j} = \neg l_{m,n}$.

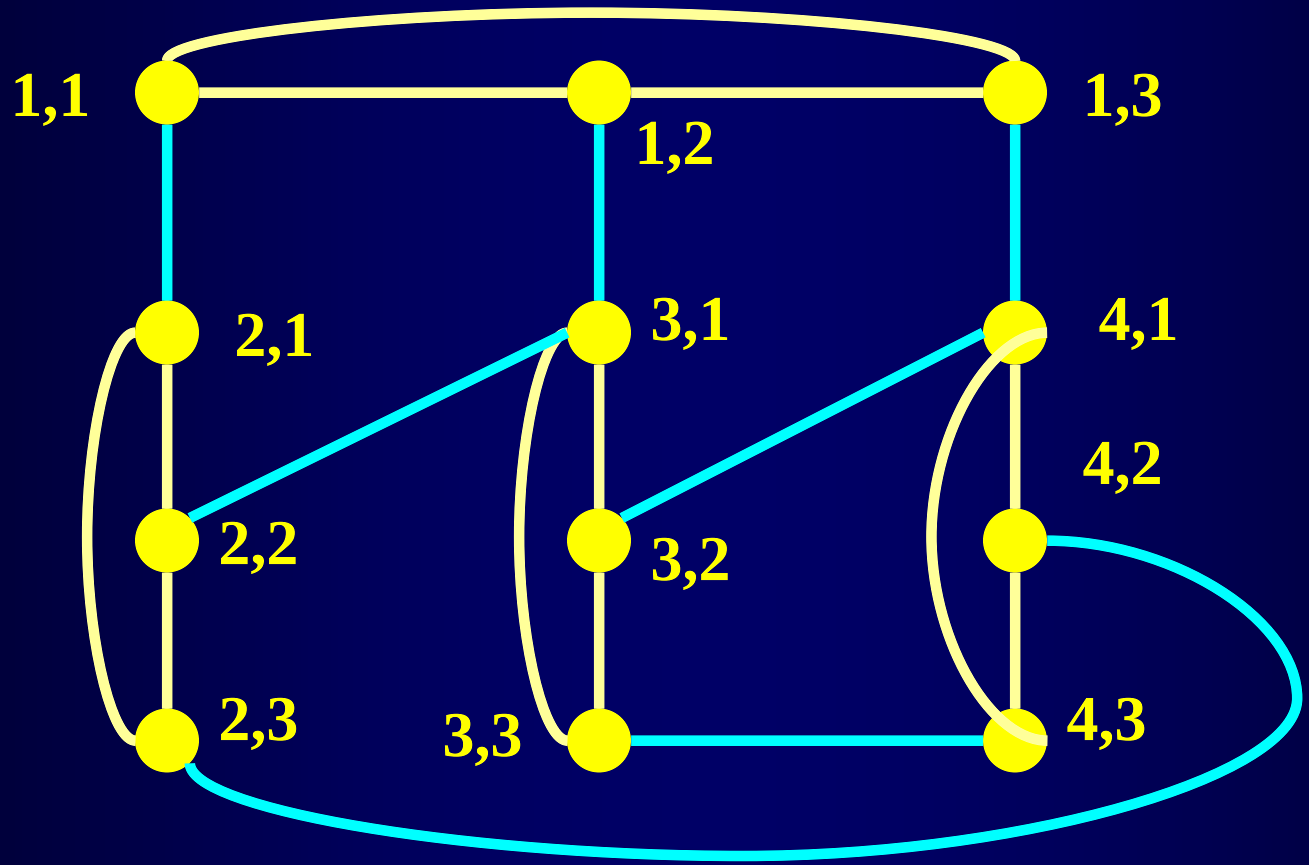
De plus la valeur attribué à K sera $2q$.

La transformation se fait en temps polynomiale.

VC(4)

Exemple : $F = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg\, x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg\, x_2 \vee x_3 \vee x_5) \wedge (\neg\, x_3 \vee \neg\, x_4 \vee \neg\, x_5)$

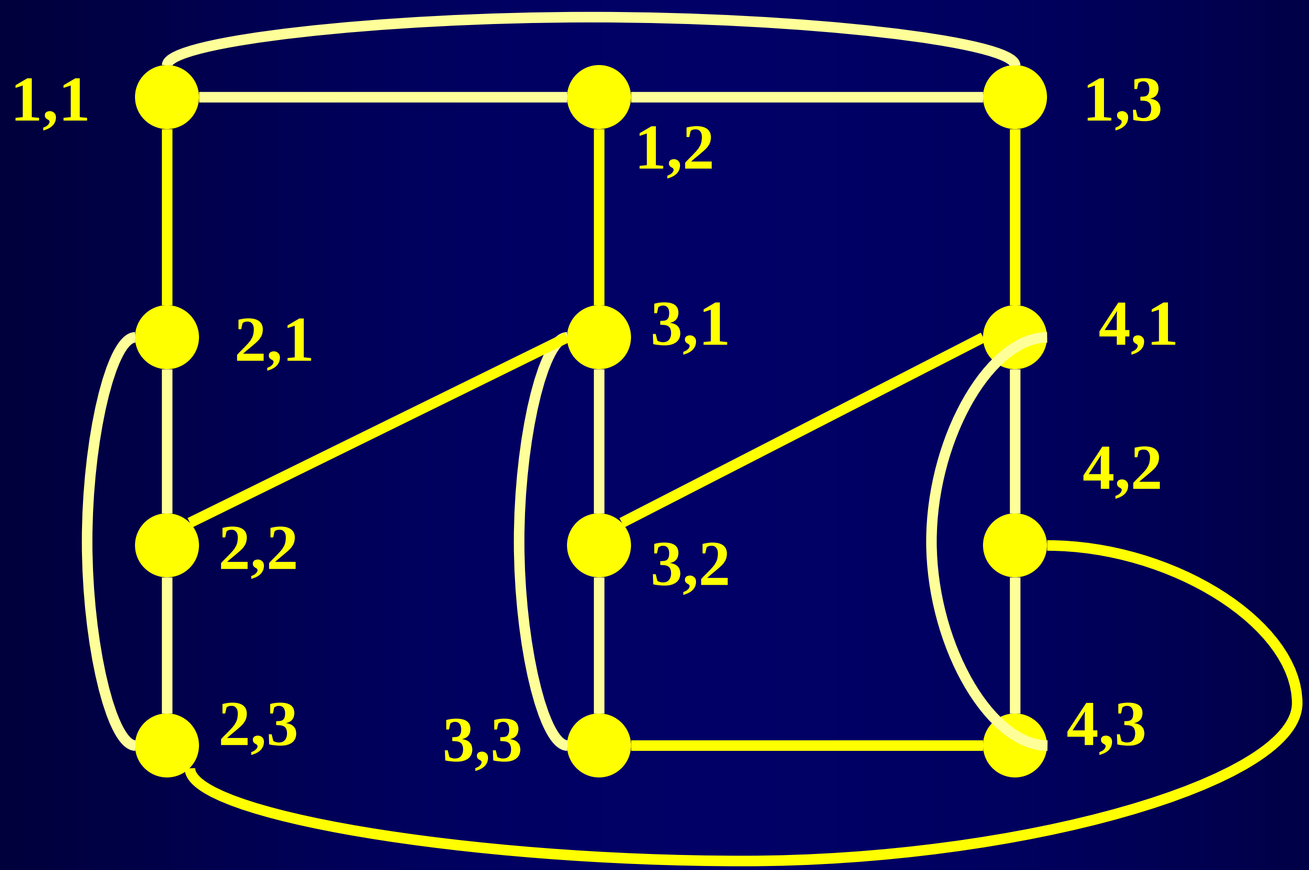
K=8



VC(5)

Exemple : $F = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee x_5) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5)$

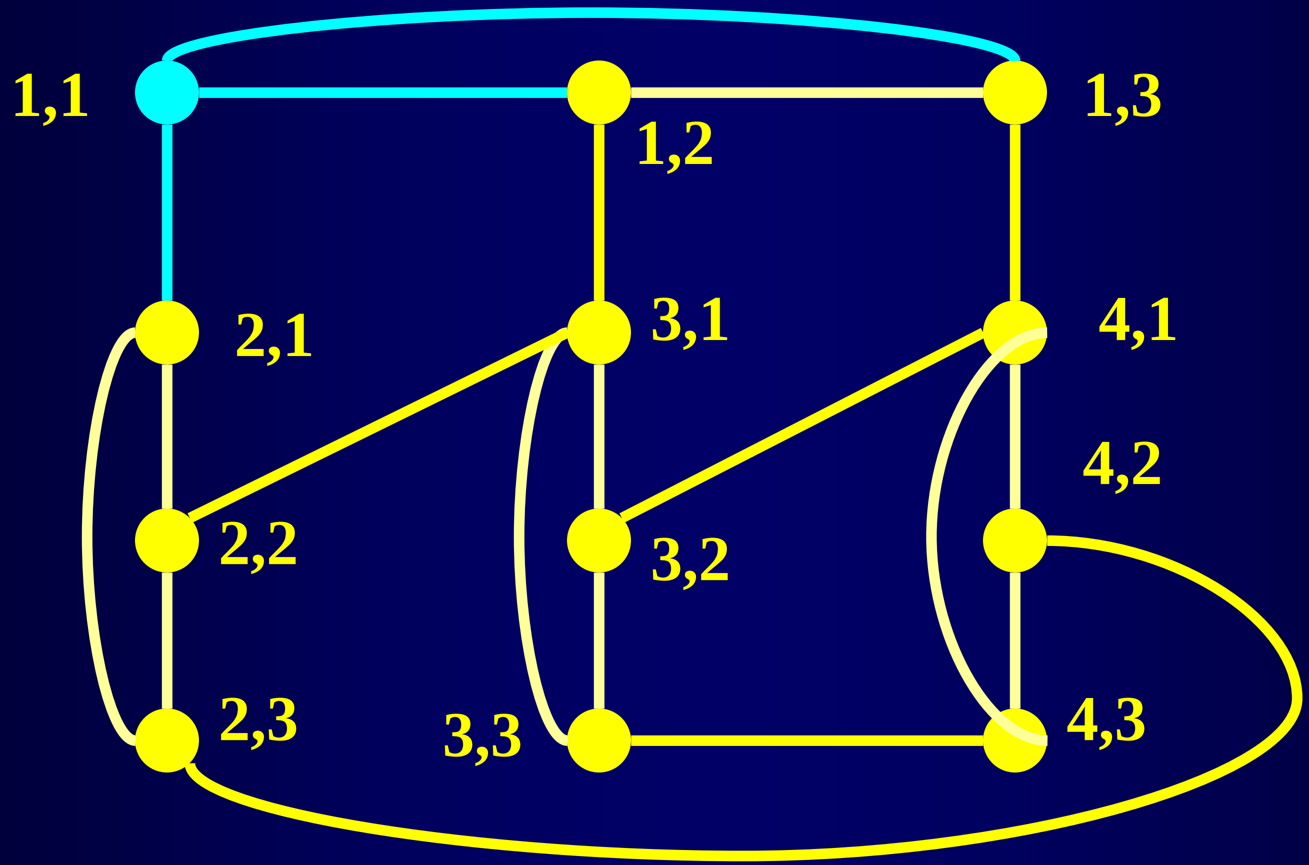
K=8



VC(6)

Exemple : $F = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg\, x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg\, x_2 \vee x_3 \vee x_5) \wedge (\neg\, x_3 \vee \neg\, x_4 \vee \neg\, x_5)$

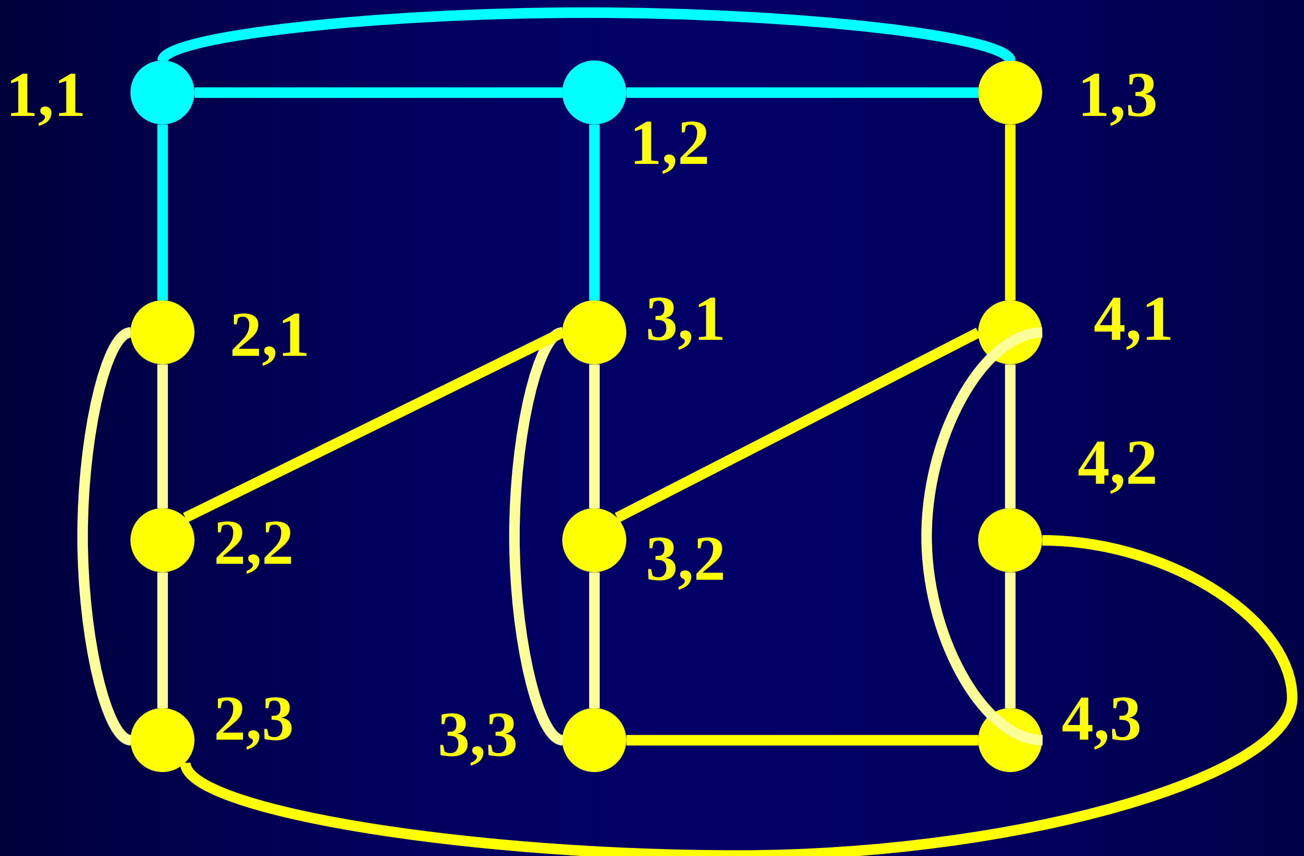
K=8



VC(7)

Exemple : $F = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee x_5) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5)$

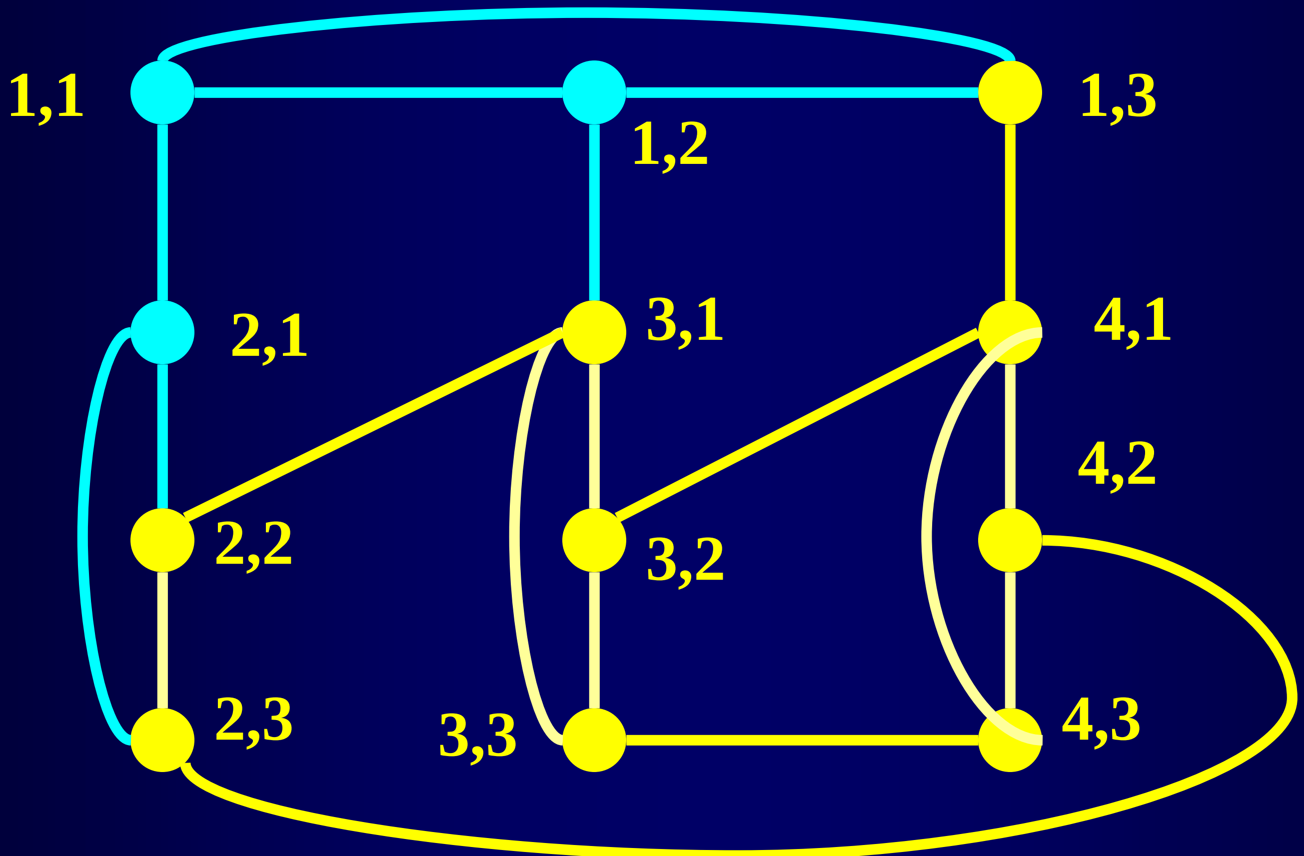
K=8



VC(8)

Exemple : $F = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg\, x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg\, x_2 \vee x_3 \vee x_5) \wedge (\neg\, x_3 \vee \neg\, x_4 \vee \neg\, x_5)$

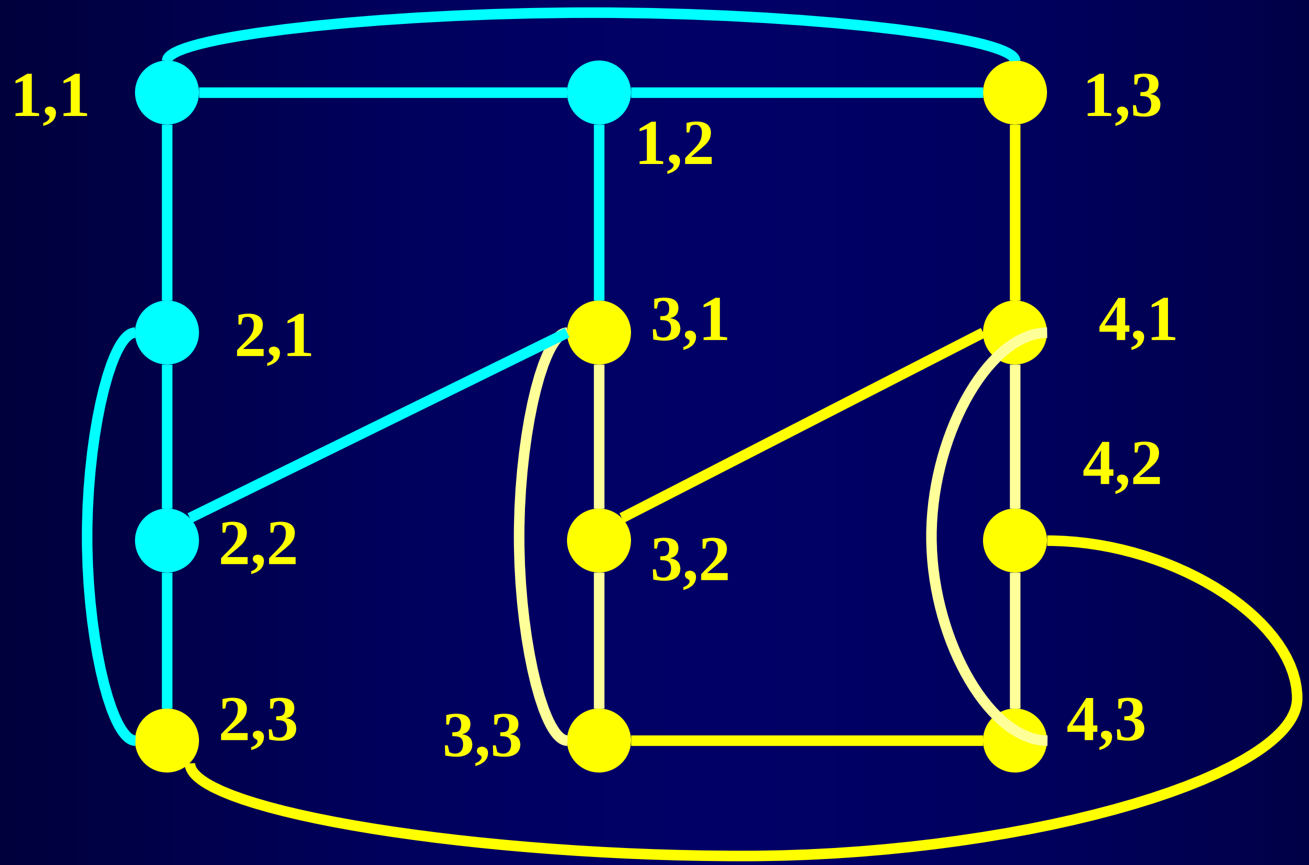
K=8



VC(9)

Exemple : $F = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg\, x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg\, x_2 \vee x_3 \vee x_5) \wedge (\neg\, x_3 \vee \neg\, x_4 \vee \neg\, x_5)$

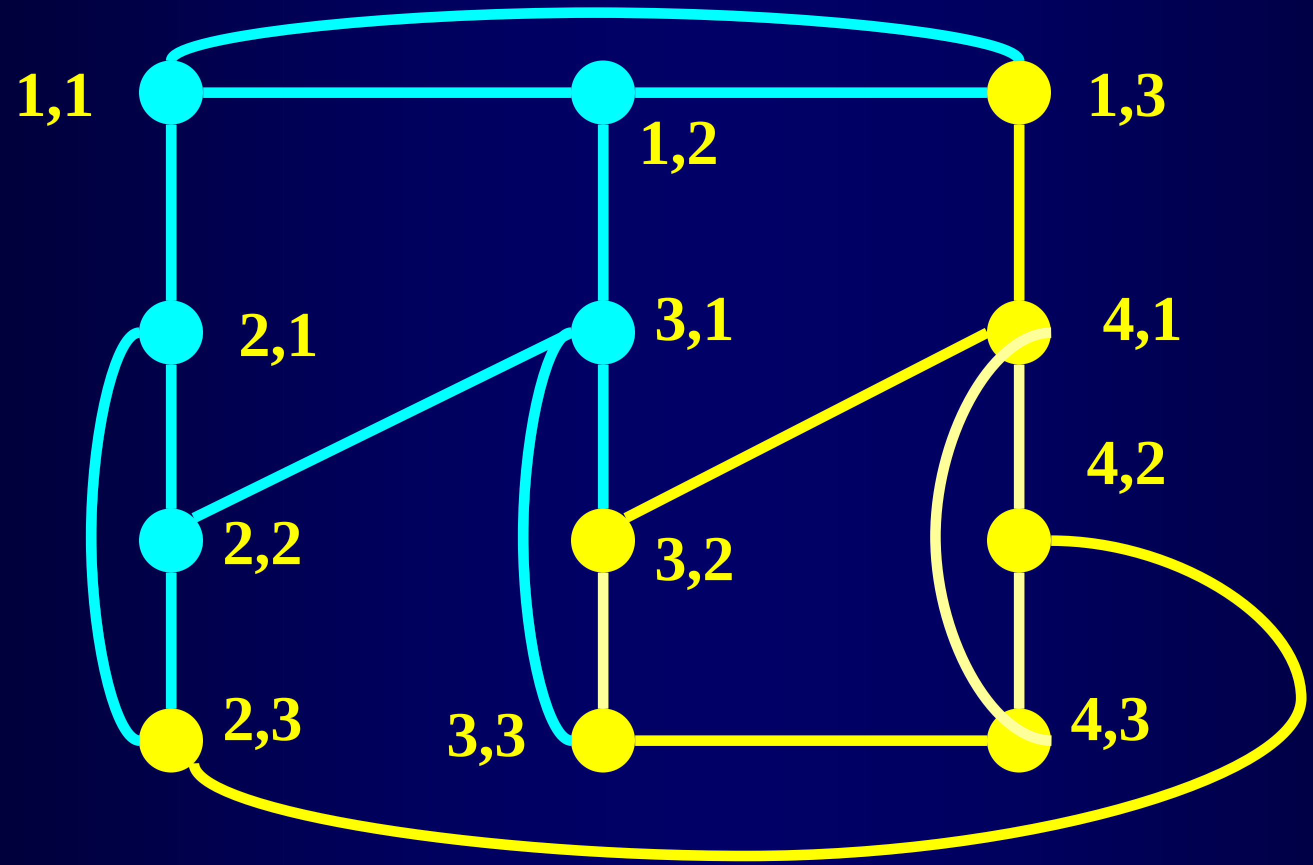
K=8



VC(10)

Exemple : $F = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg\, x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg\, x_2 \vee x_3 \vee x_5) \wedge (\neg\, x_3 \vee \neg\, x_4 \vee \neg\, x_5)$

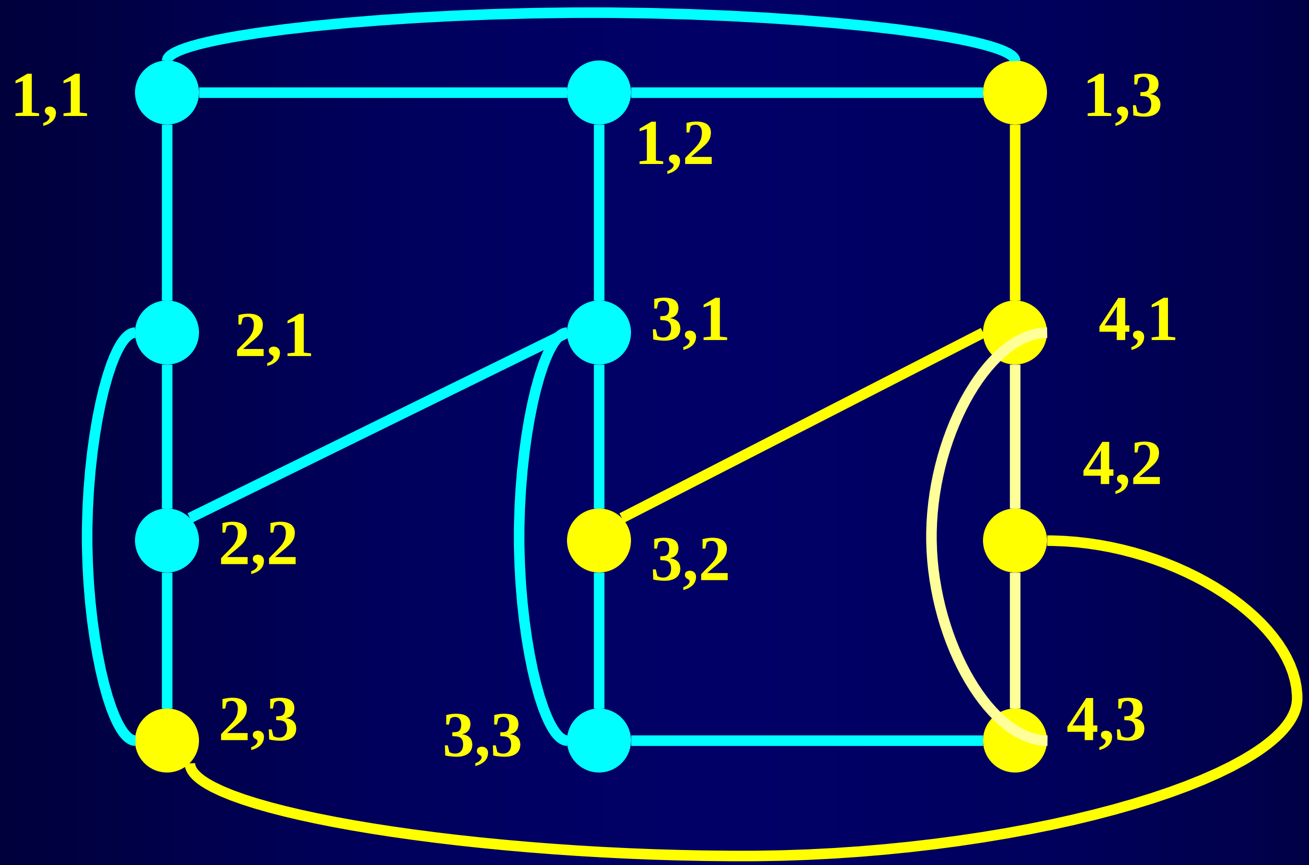
K=8



VC(11)

Exemple : $F = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg\, x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg\, x_2 \vee x_3 \vee x_5) \wedge (\neg\, x_3 \vee \neg\, x_4 \vee \neg\, x_5)$

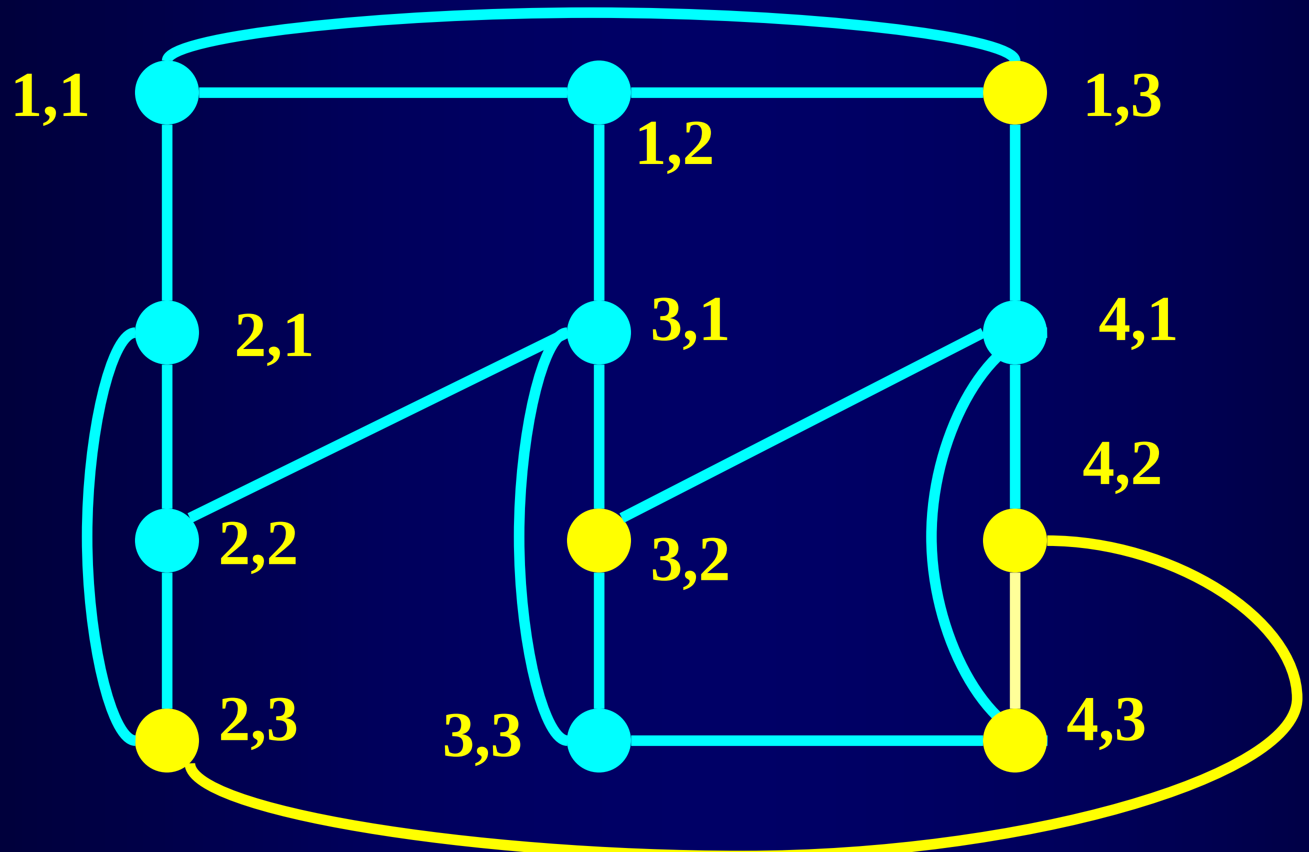
K=8



VC(12)

Exemple : $F = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg\, x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg\, x_2 \vee x_3 \vee x_5) \wedge (\neg\, x_3 \vee \neg\, x_4 \vee \neg\, x_5)$

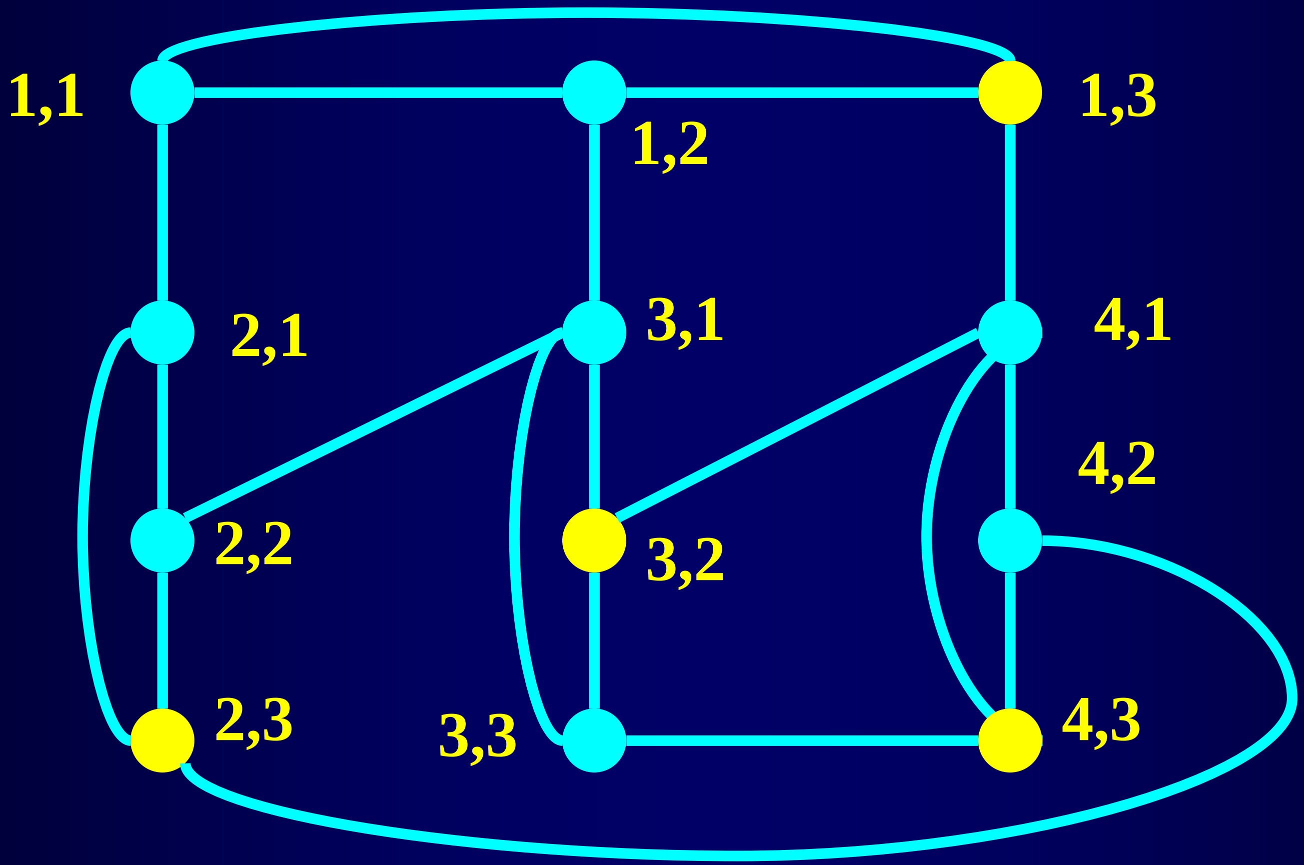
K=8



VC(13)

Exemple : $F = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg\, x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg\, x_2 \vee x_3 \vee x_5) \wedge (\neg\, x_3 \vee \neg\, x_4 \vee \neg\, x_5)$

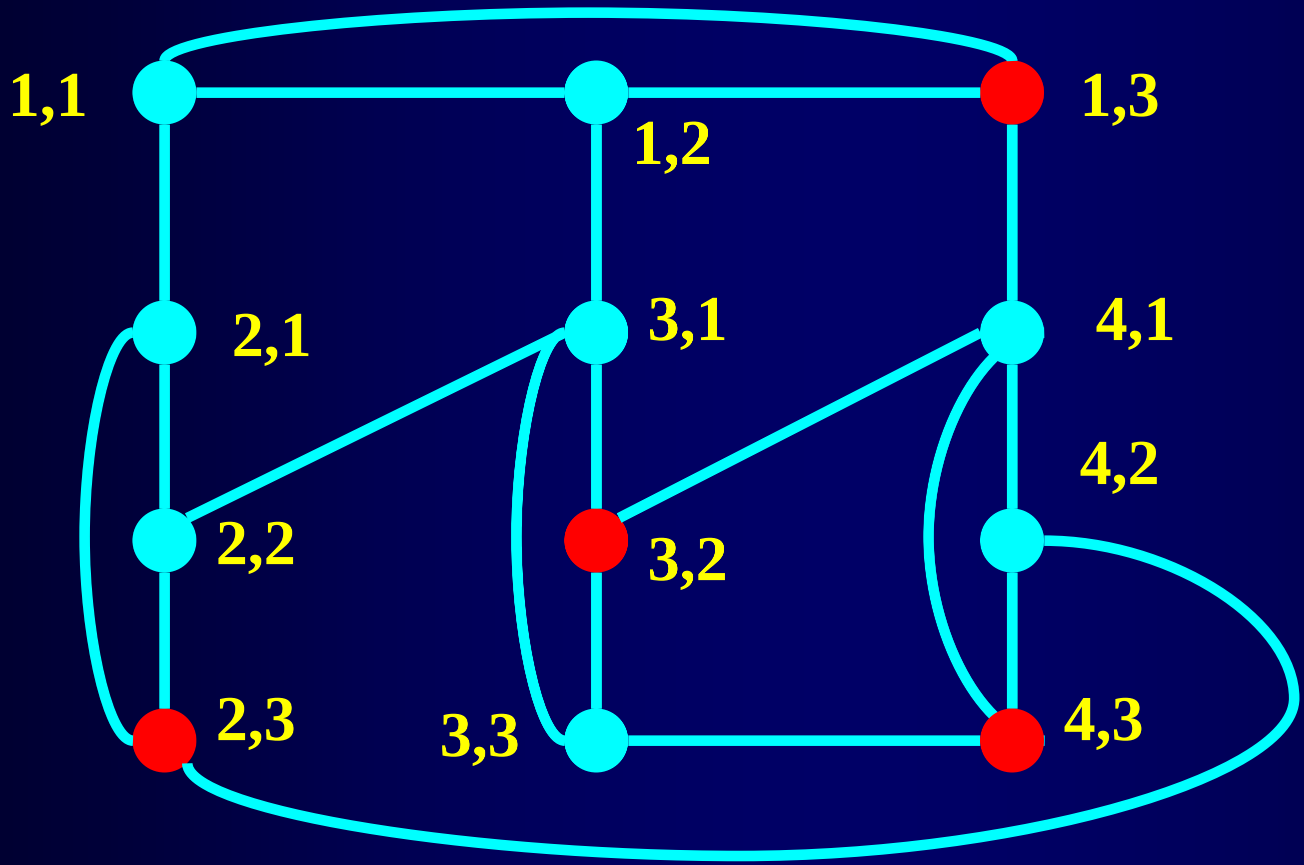
K=8



VC(14)

Exemple : $F = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee x_5) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5)$

K=8



$x_3 = V$

$x_4 = V$

$x_5 = F$

VC(15)

OUI $\Rightarrow$ OUI :

- On choisit un littéral vrai par clause, le reste dans le transversal.
- Pas de contradiction, donc c'est un transversal.

OUI $\Leftarrow$ OUI :

- S'il existe un transversal, il doit contenir au moins deux (exactement !) sommets de chaque triangle.
- Si les littéraux hors transversale sont vrais, alors la formule est satisfaite.
- Peut pas y avoir de la contradiction.

CQFD

STABLE (1)

Théorème : STABLE est NP-complet.

Rappel

NOM : STABLE

DONNEES : un graphe fini G(V,E), et un entier positif $J \leq |V|$

QUESTION : est-ce que le graphe admet un stable (sous-graphe vide) de cardinalité au moins J ?

STABLE (3)

Théorème : STABLE est NP-complet.

Preuve :

i) STABLE $\in$ NP

ii) STABLE est NP-difficile

nous le montrons par

$$VC \propto STABLE$$

STABLE(4)

La transformation : identité pour G et J $\leftarrow$ |V| - K.

Le «oui» si et seulement si «oui» se déduit de la propriété suivante : le complémentaire d'un ensemble stable est un transversal, et vice versa.

De même, toute arête doit avoir au moins une extrémité dans le complémentaire d'un stable.

CQFD

CLIQUE (1)

Théorème : CLIQUE est NP-complet.

Rappel

NOM : CLIQUE

DONNEES : un graphe fini G(V,E), et un entier positif $C \leq |V|$

QUESTION : est-ce que le graphe admet un clique (sous-graphe complet) de cardinalité au moins C ?

CLIQUE (3)

Théorème : CLIQUE est NP-complet.

Preuve :

i) CLIQUE $\in$ NP

ii) CLIQUE est NP-difficile

nous le montrons par

STABLE $\propto$ CLIQUE

CLIQUE(4)

La transformation :

la complémentation du graphe, c.a.d. on supprime les arêtes existantes et on ajoute celles qui n'existaient pas; C $\leftarrow$ J.

Le «oui» si et seulement si «oui» :

un ensemble stable est une clique dans le graphe complémentaire, et vice versa.

3DM

NOM : 3DM (Couplage en 3 dimensions)

DONNEES : un ensemble M de triplets (w,x,y), avec w, x et y des éléments de trois ensembles W, X, Y de même cardinalité q.

QUESTION : est-ce que M contient un couplage (un sous-ensemble de triplets contenant tous les éléments une fois et une seule) ?

3DM

Théorème : **3DM est NP-complet.**

Preuve :

i) 3DM $\in$ NP

ii) 3DM est NP-difficile

nous le montrons par

$$\text{3-SAT} \propto \text{3DM}$$

3DM (2)

La transformation :

Soit $F = C_0 \wedge C_1 \wedge \ldots \wedge C_{k\text{-}1}$ une instance de 3-SAT qui utilise les variables $x_1, x_2, \ldots , x_n$.

Nous construisons (données de 3DM) :

Les triplets de M seront dans trois groupes

- **le premier pour «choisir» une valeur de vérité**
- **le second pour assurer la satisfiabilité**
- **le troisième pour «arrondir les angles»**

3DM (3)

Le premier groupe : $\forall$ variable x_i, $1 \leq i \leq n$ on a $2k$ triplets :

$G_i = \{ (a_{i,j}, \mathrm{x}_{i,j}, b_{i,j}), (b_{i,j}, \neg x_{i,j}, a_{i,(j+1) \bmod k}) \mid 0 \leq j < k \}$

Pour les éléments $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ ($1 \leq i \leq n$ et $0 \leq j < k$) ce sont les seuls triplets qui les contiennent.

3DM (4)

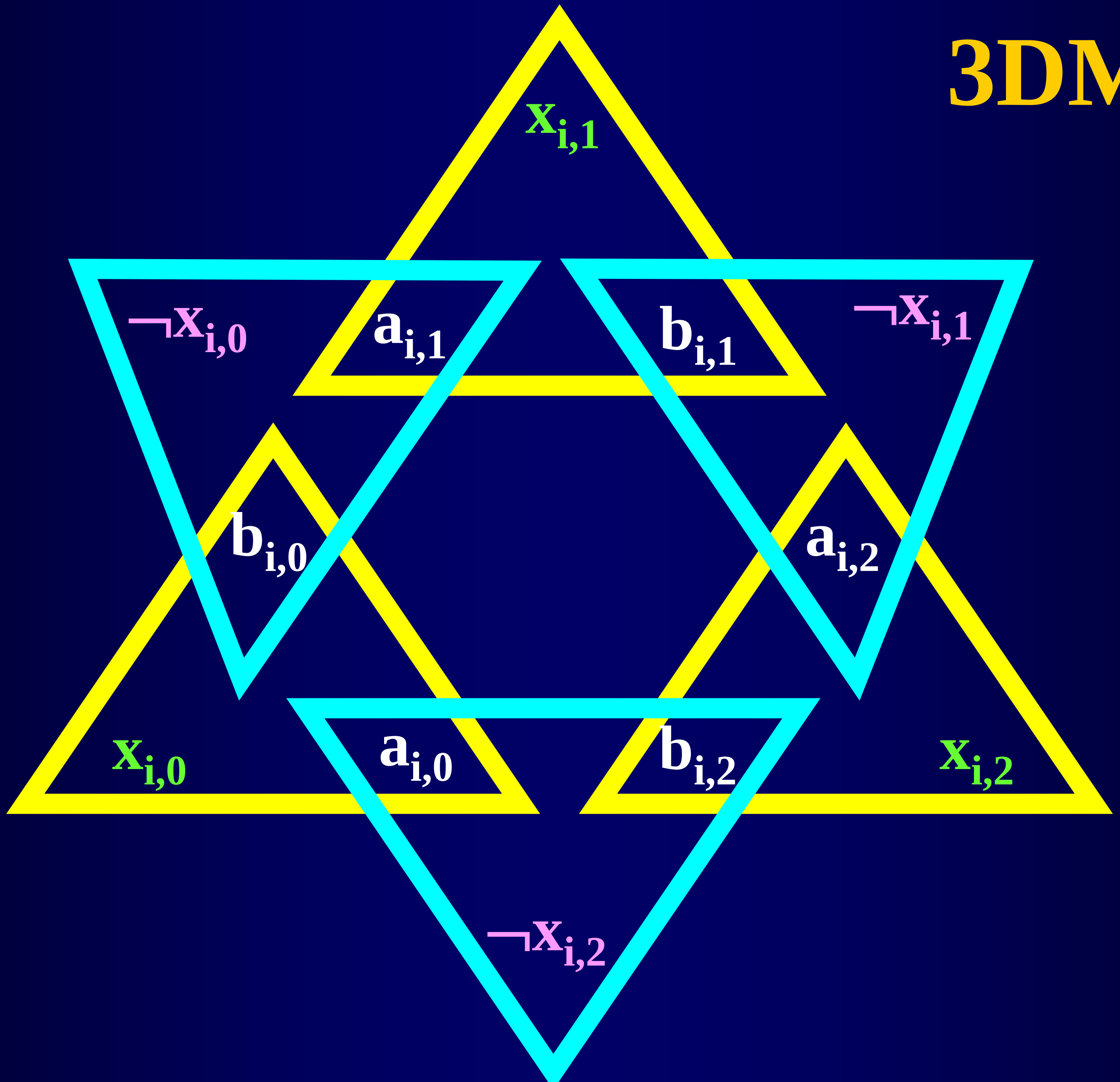
On peut remarquer qu'il y a exactement deux manières de recouvrir les éléments

$$a_{i,j} \text{ et } b_{i,j} \, (1 \leq i \leq n \text{ et } 0 \leq j < k)$$

- **soit on utilise les triplets qui contiennent les $x_{i,j}$ mais pas les $\neg x_{i,j}$, (ce qui correspond à x_i faux)**
- **soit l'inverse (ce qui correspond à x_i vrais).**

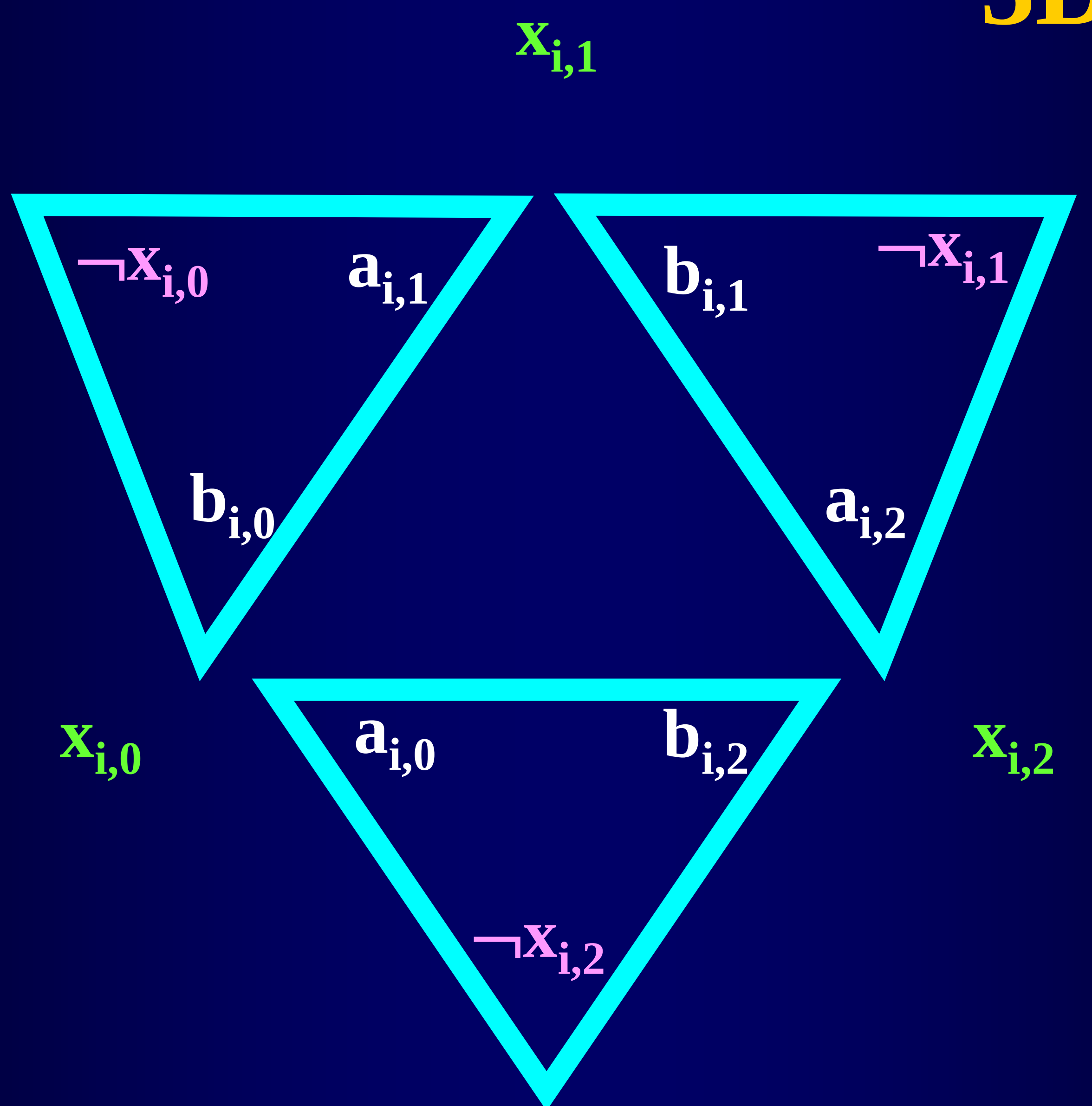
Ainsi, les triplets choisis impliquent un choix de valeur de vérité.

3DM (5)



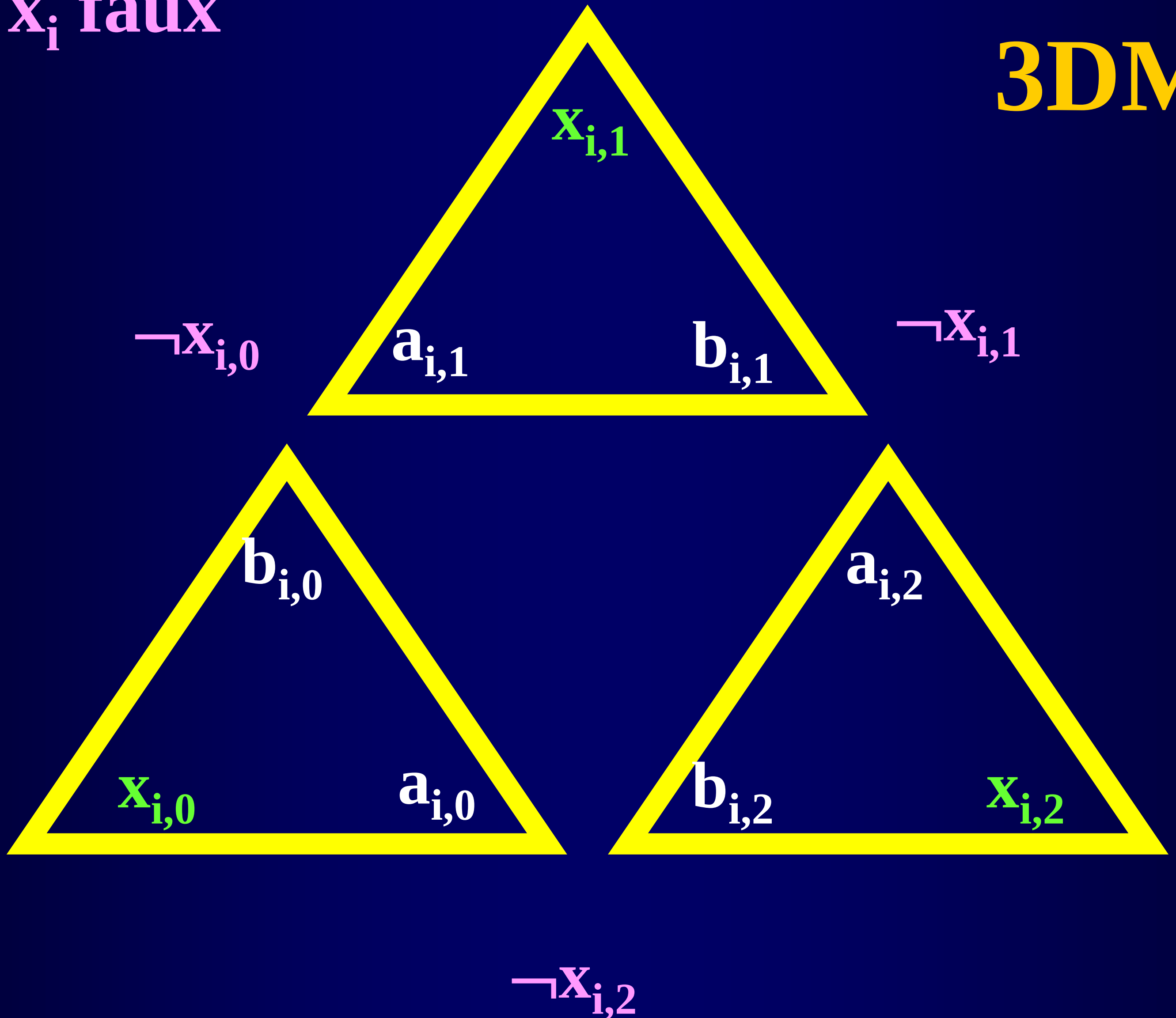
Choix x_i vrai

3DM (6)

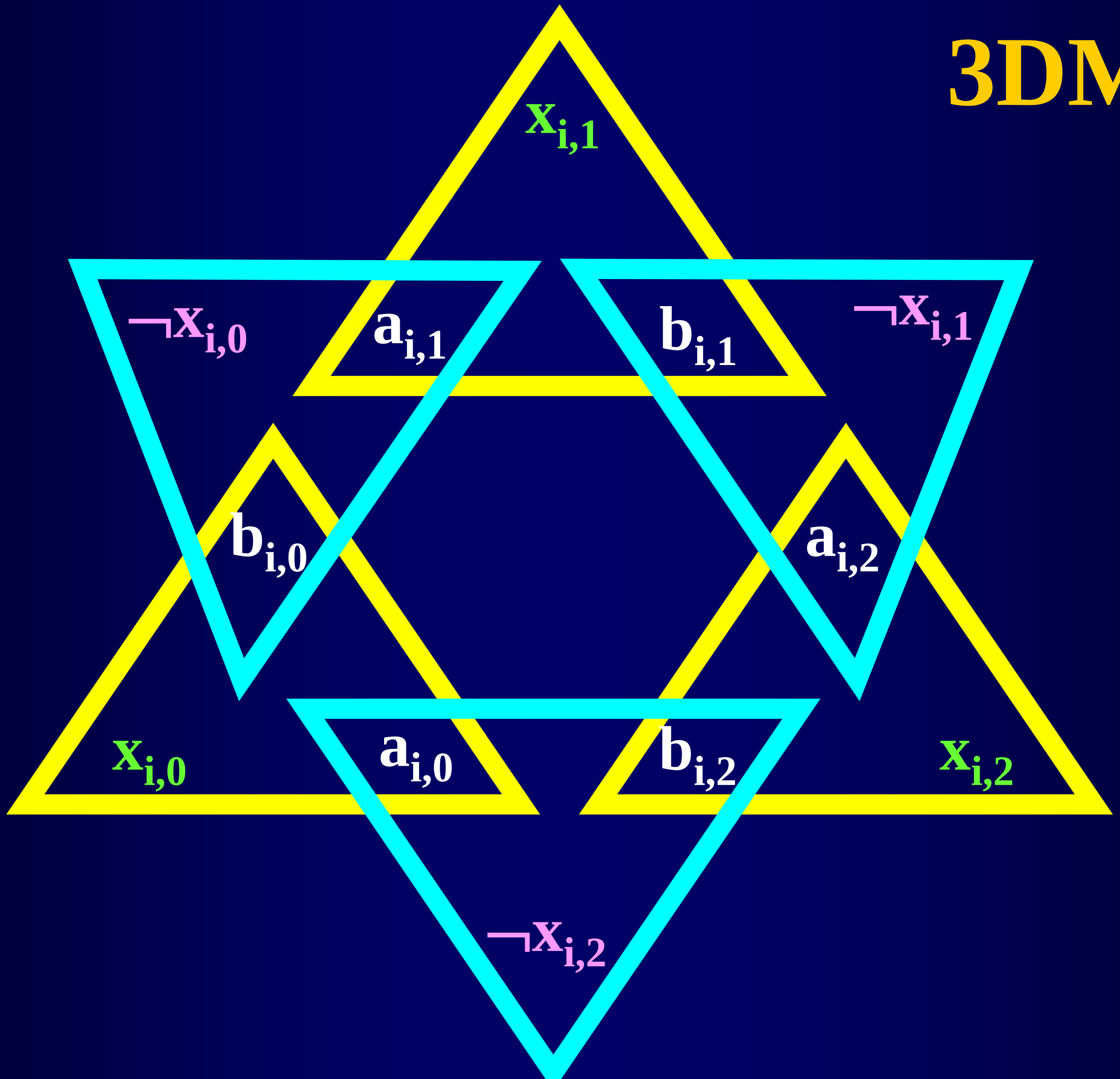


Choix x_i faux

3DM (7)



3DM (8)



3DM (9)

Le deuxième groupe : pour vérifier la satisfiabilité, on construit pour chaque clause C_j, $0 \leq j < k$, et pour chaque littéral l de C_j, un triplet $(c_{j,1}, l_j, c_{j,2})$.

Ce sont les seuls triplets contenant $c_{j,1}$ et $c_{j,2}$.

Le nombre de triplets : selon le degré de la clause.

3DM (10)

Si les triplets de type 1 sont choisis (ce qui revient à un choix de vérité des variables), alors $c_{j,1}$ et $c_{j,2}$ peuvent être couverts si $\exists x$ variable de C_j, qui n'est pas couverte par les triplets du type 1.

Ainsi $c_{j,1}$ et $c_{j,2}$ peuvent être couverts si et seulement si la clause vraie.

Pour compléter la preuve il reste à compléter avec des triplets qui permettent de couvrir les $x_{i,j}$ non encore couverts.

3DM (11)

Le troisième groupe : **on veut couvrir les $x_{i,j}$ (et $\neg x_{i,j}$) non encore couverts. Combien de tels éléments existent ?**

Nous avons *n* variables, *k* clauses, donc non couverts par des triplets de type 1 *nk* éléments, dont *k* sont couverts par des triplets de type 2.

En tout *nk-k*.

3DM (12)

On introduit les triplets :

$$\{(h_r,\ x_{i,j},\ g_r) \mid 1 \le r < nk\text{-}k,\ 1 \le i \le n,\ 0 \le j < k\}$$

$$\{(h_r,\ \neg x_{i,j},\ g_r) \mid 1 \le r < nk\text{-}k,\ 1 \le i \le n,\ 0 \le j < k\}$$

3DM (13)

Les trois ensembles contiennent chacun $q = 2nk$ éléments.

$W = \{ a_{i,j}, c_{j,1}, h_r \mid 1 \leq i \leq n, 0 \leq j < k, 1 \leq r < nk\text{-}k \}$

$X = \{ x_{i,j}, \neg x_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, 0 \leq j < k \}$

$Y = \{ n_{i,j} , c_{j,2}, g_r \mid 1 \leq i \leq n, 0 \leq j < k, 1 \leq r < nk\text{-}k \}$

3DM (14)

Le nombre de triplets est :

type 1 : $2nk$

type 2 : entre k et $3k$, en fonction des degrés

type 3 : $2n(n-1)k^2$

La transformation est donc polynomiale. Le « si et seulement si » est assuré par la construction.

3DM (15)

$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)$ $(n{=}4,\ k{=}2)$

$G_1 = \{\ (a_{1,0}, \mathrm{x}_{1,0}, b_{1,0}), (a_{1,1}, \neg x_{1,0}, b_{1,0}), (a_{1,1}, \mathrm{x}_{1,1}, b_{1,1}),$
$(a_{1,0}, \neg x_{1,1}, b_{1,1})\ \}$

$G_2 = \{\ (a_{2,0}, \mathrm{x}_{2,0}, b_{2,0}), (a_{2,1}, \neg x_{2,0}, b_{2,0}), (a_{2,1}, \mathrm{x}_{2,1}, b_{2,1}),$
$(a_{2,0}, \neg x_{2,1}, b_{2,1})\ \}$

$G_3 = \{\ (a_{3,0}, \mathrm{x}_{3,0}, b_{3,0}), (a_{3,1}, \neg x_{3,0}, b_{3,0}), (a_{3,1}, \mathrm{x}_{3,1}, b_{3,1}),$
$(a_{3,0}, \neg x_{3,1}, b_{3,1})\ \}$

$G_4 = \{\ (a_{4,0}, \mathrm{x}_{4,0}, b_{4,0}), (a_{4,1}, \neg x_{4,0}, b_{4,0}), (a_{4,1}, \mathrm{x}_{4,1}, b_{4,1}),$
$(a_{4,0}, \neg x_{4,1}, b_{4,1})\ \}$

3DM (16)

Pour la clause $C_0 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

$(c_{0,1}, x_1, c_{0,2})$,

$(c_{0,1}, x_2, c_{0,2})$,

$(c_{0,1}, x_3, c_{0,2})$

Pour la clause $C_1 = (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)$

$(c_{1,1}, \neg x_1, c_{1,2})$,

$(c_{1,1}, x_2, c_{1,2})$,

$(c_{1,1}, x_4, c_{1,2})$

3DM (17)

$(h_1, x_{1,0}, g_1)$ $(h_2, x_{1,0}, g_2)$ $(h_3, x_{1,0}, g_3)$ $(h_4, x_{1,0}, g_4)$
$(h_5, x_{1,0}, g_5)$ $(h_6, x_{1,0}, g_6)$ $(h_1, x_{1,1}, g_1)$ $(h_2, x_{1,1}, g_2)$
$(h_3, x_{1,1}, g_3)$ $(h_4, x_{1,1}, g_4)$ $(h_5, x_{1,1}, g_5)$ $(h_6, x_{1,1}, g_6)$
$(h_1, x_{2,0}, g_1)$ $(h_2, x_{2,0}, g_2)$ $(h_3, x_{2,0}, g_3)$ $(h_4, x_{2,0}, g_4)$
$(h_5, x_{2,0}, g_5)$ $(h_6, x_{2,0}, g_6)$ $(h_1, x_{2,1}, g_1)$ $(h_2, x_{2,1}, g_2)$
$(h_3, x_{2,1}, g_3)$ $(h_4, x_{2,1}, g_4)$ $(h_5, x_{2,1}, g_5)$ $(h_6, x_{2,1}, g_6)$
$(h_1, x_{3,0}, g_1)$ $(h_2, x_{3,0}, g_2)$ $(h_3, x_{3,0}, g_3)$ $(h_4, x_{3,0}, g_4)$
$(h_5, x_{3,0}, g_5)$ $(h_6, x_{3,0}, g_6)$ $(h_1, x_{3,1}, g_1)$ $(h_2, x_{3,1}, g_2)$
$(h_3, x_{3,1}, g_3)$ $(h_4, x_{3,1}, g_4)$ $(h_5, x_{3,1}, g_5)$ $(h_6, x_{3,1}, g_6)$
$(h_1, x_{4,0}, g_1)$ $(h_2, x_{4,0}, g_2)$ $(h_3, x_{4,0}, g_3)$ $(h_4, x_{4,0}, g_4)$
$(h_5, x_{4,0}, g_5)$ $(h_6, x_{4,0}, g_6)$ $(h_1, x_{4,1}, g_1)$ $(h_2, x_{4,1}, g_2)$
$(h_3, x_{4,1}, g_3)$ $(h_4, x_{4,1}, g_4)$ $(h_5, x_{4,1}, g_5)$ $(h_6, x_{4,1}, g_6)$

3DM (18)

$(h_1, \neg x_{1,0}, g_1)$ $(h_2, \neg x_{1,0}, g_2)$ $(h_3, \neg x_{1,0}, g_3)$ $(h_4, \neg x_{1,0}, g_4)$
$(h_5, \neg x_{1,0}, g_5)$ $(h_6, \neg x_{1,0}, g_6)$ $(h_1, \neg x_{1,1}, g_1)$ $(h_2, \neg x_{1,1}, g_2)$
$(h_3, \neg x_{1,1}, g_3)$ $(h_4, \neg x_{1,1}, g_4)$ $(h_5, \neg x_{1,1}, g_5)$ $(h_6, \neg x_{1,1}, g_6)$
$(h_1, \neg x_{2,0}, g_1)$ $(h_2, \neg x_{2,0}, g_2)$ $(h_3, \neg x_{2,0}, g_3)$ $(h_4, \neg x_{2,0}, g_4)$
$(h_5, \neg x_{2,0}, g_5)$ $(h_6, \neg x_{2,0}, g_6)$ $(h_1, \neg x_{2,1}, g_1)$ $(h_2, \neg x_{2,1}, g_2)$
$(h_3, \neg x_{2,1}, g_3)$ $(h_4, \neg x_{2,1}, g_4)$ $(h_5, \neg x_{2,1}, g_5)$ $(h_6, \neg x_{2,1}, g_6)$
$(h_1, \neg x_{3,0}, g_1)$ $(h_2, \neg x_{3,0}, g_2)$ $(h_3, \neg x_{3,0}, g_3)$ $(h_4, \neg x_{3,0}, g_4)$
$(h_5, \neg x_{3,0}, g_5)$ $(h_6, \neg x_{3,0}, g_6)$ $(h_1, \neg x_{3,1}, g_1)$ $(h_2, \neg x_{3,1}, g_2)$
$(h_3, \neg x_{3,1}, g_3)$ $(h_4, \neg x_{3,1}, g_4)$ $(h_5, \neg x_{3,1}, g_5)$ $(h_6, \neg x_{3,1}, g_6)$
$(h_1, \neg x_{4,0}, g_1)$ $(h_2, \neg x_{4,0}, g_2)$ $(h_3, \neg x_{4,0}, g_3)$ $(h_4, \neg x_{4,0}, g_4)$
$(h_5, \neg x_{4,0}, g_5)$ $(h_6, \neg x_{4,0}, g_6)$ $(h_1, \neg x_{4,1}, g_1)$ $(h_2, \neg x_{4,1}, g_2)$
$(h_3, \neg x_{4,1}, g_3)$ $(h_4, \neg x_{4,1}, g_4)$ $(h_5, \neg x_{4,1}, g_5)$ $(h_6, \neg x_{4,1}, g_6)$

3DM (19)

W : $a_{1,0} \rightarrow \mathrm{a}$ $a_{1,1} \rightarrow \mathrm{b}$ $a_{2,0} \rightarrow \mathrm{c}$ $a_{2,1} \rightarrow \mathrm{d}$

$a_{3,0} \rightarrow \mathrm{e}$ $a_{3,1} \rightarrow \mathrm{f}$ $a_{4,0} \rightarrow \mathrm{g}$ $a_{4,1} \rightarrow \mathrm{h}$ $c_{0,1} \rightarrow \mathrm{i}$

$c_{1,1} \rightarrow \mathrm{j}$ $h_1 \rightarrow \mathrm{k}$ $h_2 \rightarrow \mathrm{l}$ $h_3 \rightarrow \mathrm{m}$ $h_4 \rightarrow \mathrm{n}$

$h_5 \rightarrow \mathrm{o}$ $h_6 \rightarrow \mathrm{p}$

Y : $b_{1,0} \rightarrow \mathrm{A}$ $b_{1,1} \rightarrow \mathrm{B}$ $b_{2,0} \rightarrow \mathrm{C}$ $b_{2,1} \rightarrow \mathrm{D}$

$b_{3,0} \rightarrow \mathrm{E}$ $b_{3,1} \rightarrow \mathrm{F}$ $b_{4,0} \rightarrow \mathrm{G}$ $b_{4,1} \rightarrow \mathrm{H}$ $c_{0,2} \rightarrow \mathrm{I}$

$c_{1,2} \rightarrow \mathrm{J}$ $g_1 \rightarrow \mathrm{K}$ $g_2 \rightarrow \mathrm{L}$ $g_3 \rightarrow \mathrm{M}$ $g_4 \rightarrow \mathrm{N}$

$g_5 \rightarrow \mathrm{O}$ $g_6 \rightarrow \mathrm{P}$

3DM (20)

X :	$x_{1,0} \rightarrow 1$	$\neg x_{1,0} \rightarrow 2$	$x_{1,1} \rightarrow 3$	$\neg x_{1,1} \rightarrow 4$
	$x_{2,0} \rightarrow 5$	$\neg x_{2,0} \rightarrow 6$	$x_{2,1} \rightarrow 7$	$\neg x_{2,1} \rightarrow 8$
	$x_{3,0} \rightarrow 9$	$\neg x_{3,0} \rightarrow 10$	$x_{3,1} \rightarrow 11$	$\neg x_{3,1} \rightarrow 12$
	$x_{4,0} \rightarrow 13$	$\neg x_{4,0} \rightarrow 14$	$x_{4,1} \rightarrow 15$	$\neg x_{4,1} \rightarrow 16$

3DM
(21)

(a, 1,A), (b, 2,A), (b, 3,B), (a, 4,B), (c, 5,C),
(d, 6,C), (d, 7,D), (c, 8,D), (e, 9,E), (f,10,E),
(f,11,F), (e,12,F), (g,13,G), (h,14,G), (h,15,H),
(g,16,H), (i, 1,I), (i, 5,I), (i, 9,I), (j, 4,J),
(j, 7,J), (j,15,J), (k, 1,K), (l, 1,L), (m, 1,M),
(n, 1,N), (o, 1,O), (p, 1,P), (k, 3,K), (l, 3,L),
(m, 3,M), (n, 3,N), (o, 3,O), (p, 3,P), (k, 5,K),
(l, 5,L), (m, 5,M), (n, 5,N), (o, 5,O), (p, 5,P),
(k, 7,K), (l, 7,L), (m, 7,M), (n, 7,N), (o, 7,O),
(p, 7,P), (k, 9,K), (l, 9,L), (m, 9,M), (n, 9,N),
(o, 9,O), (p, 9,P), (k,11,K), (l,11,L), (m,11,M),
(n,11,N), (o,11,O), (p,11,P), (k,13,K), (l,13,L),
(m,13,M), (n,13,N), (o,13,O), (p,13,P), (k,15,K),
(l,15,L), (m,15,M), (n,15,N), (o,15,O), (p,15,P),
(k, 2,K), (l, 2,L), (m, 2,M), (n, 2,N), (o, 2,O),
(p, 2,P), (k, 4,K), (l, 4,L), (m, 4,M), (n, 4,N),
(o, 4,O), (p, 4,P), (k, 6,K), (l, 6,L), (m, 6,M),
(n, 6,N), (o, 6,O), (p, 6,P), (k, 8,K), (l, 8,L),
(m, 8,M), (n, 8,N), (o, 8,O), (p, 8,P), (k,10,K),
(l,10,L), (m,10,M), (n,10,N), (o,10,O), (p,10,P),
(k,12,K), (l,12,L), (m,12,M), (n,12,N), (o,12,O),
(p,12,P), (k,14,K), (l,14,L), (m,14,M), (n,14,N),
(o,14,O), (p,14,P), (k,16,K), (l,16,L), (m,16,M),
(n,16,N), (o,16,O), (p,16,P)

3DM
(22)

(a, 1,A), (b, 2,A), (b, 3,B), (a, 4,B), (c, 5,C),
(d, 6,C), (d, 7,D), (c, 8,D), (e, 9,E), (f,10,E),
(f,11,F), (e,12,F), (g,13,G), (h,14,G), (h,15,H),
(g,16,H), (i, 1,I), (i, 5,I), (i, 9,I), (j, 4,J),
(j, 7,J), (j,15,J), (k, 1,K), (l, 1,L), (m, 1,M),
(n, 1,N), (o, 1,O), (p, 1,P), (k, 3,K), (l, 3,L),
(m, 3,M), (n, 3,N), (o, 3,O), (p, 3,P), (k, 5,K),
(l, 5,L), (m, 5,M), (n, 5,N), (o, 5,O), (p, 5,P),
(k, 7,K), (l, 7,L), (m, 7,M), (n, 7,N), (o, 7,O),
(p, 7,P), (k, 9,K), (l, 9,L), (m, 9,M), (n, 9,N),
(o, 9,O), (p, 9,P), (k,11,K), (l,11,L), (m,11,M),
(n,11,N), (o,11,O), (p,11,P), (k,13,K), (l,13,L),
(m,13,M), (n,13,N), (o,13,O), (p,13,P), (k,15,K),
(l,15,L), (m,15,M), (n,15,N), (o,15,O), (p,15,P),
(k, 2,K), (l, 2,L), (m, 2,M), (n, 2,N), (o, 2,O),
(p, 2,P), (k, 4,K), (l, 4,L), (m, 4,M), (n, 4,N),
(o, 4,O), (p, 4,P), (k, 6,K), (l, 6,L), (m, 6,M),
(n, 6,N), (o, 6,O), (p, 6,P), (k, 8,K), (l, 8,L),
(m, 8,M), (n, 8,N), (o, 8,O), (p, 8,P), (k,10,K),
(l,10,L), (m,10,M), (n,10,N), (o,10,O), (p,10,P),
(k,12,K), (l,12,L), (m,12,M), (n,12,N), (o,12,O),
(p,12,P), (k,14,K), (l,14,L), (m,14,M), (n,14,N),
(o,14,O), (p,14,P), (k,16,K), (l,16,L), (m,16,M),
(n,16,N), (o,16,O), (p,16,P)

3DM (23)

(a, 1,A), (b, 3,B) $\rightarrow (a_{1,0},\ \ x_{1,0}, b_{1,0}), (a_{1,1},\ \ x_{1,1}, b_{1,1})$

(c, 5,C), (d, 7,D) $\rightarrow (a_{2,0},\ \ x_{2,0}, b_{2,0}), (a_{2,1},\ \ x_{2,1}, b_{2,1})$

(f,10,E), (e,12,F) $\rightarrow (a_{3,1}, \neg x_{3,0}, b_{3,0}), (a_{3,0}, \neg x_{3,1}, b_{3,1})$

(g,13,G), (h,15,H) $\rightarrow (a_{4,0},\ \ x_{4,0}, b_{4,0}), (a_{4,1},\ \ x_{4,1}, b_{4,1})$

(i, 9,I), (j, 4,J) $\rightarrow (c_{0,1},\ \ x_{3,0}, c_{0,2}), (c_{1,1}, \neg x_{1,1}, c_{1,2})$

(k, 2,K), (l, 6,L) $\rightarrow (h_1, \neg x_{1,0}, g_1), (h_2, \neg x_{2,0}, g_2)$

(m,8,M), (n,11,N) $\rightarrow (h_3, \neg x_{2,1}, g_3), (h_4,\ \ x_{3,1}, g_4)$

(o,14,O), (p,16,P) $\rightarrow (h_5, \neg x_{4,0}, g_5), (h_6, \neg x_{4,1}, g_6)$

3DM (24)

$(a_{1,0},\ \ x_{1,0}, b_{1,0}), (a_{1,1},\ \ x_{1,1}, b_{1,1}) \Rightarrow x_1 = \mathbf{F}$

$(a_{2,0},\ \ x_{2,0}, b_{2,0}), (a_{2,1},\ \ x_{2,1}, b_{2,1}) \Rightarrow x_2 = \mathbf{F}$

$(a_{3,1}, \neg x_{3,0}, b_{3,0}), (a_{3,0}, \neg x_{3,1}, b_{3,1}) \Rightarrow x_3 = \mathbf{V}$

$(a_{4,0},\ \ x_{4,0}, b_{4,0}), (a_{4,1},\ \ x_{4,1}, b_{4,1}) \Rightarrow x_4 = \mathbf{F}$

donc

$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)$$

donc

$$\Phi = \mathbf{V}$$