Applications des flots

Couplages

Couplages dans les graphes bipartis

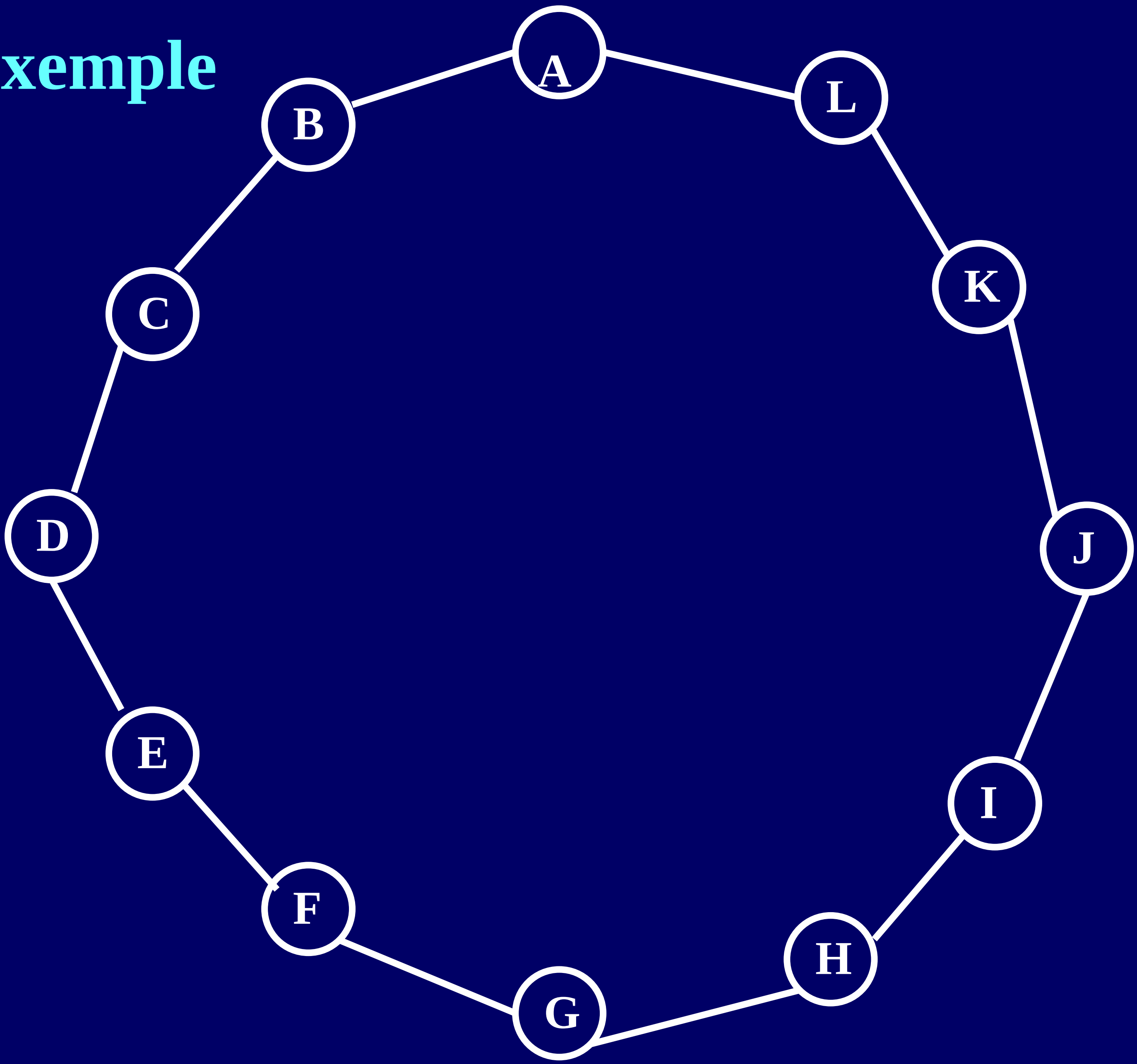
Définition : **un couplage est un ensemble d'arêtes deux à deux indépendantes.**

On peut parler en particulier de

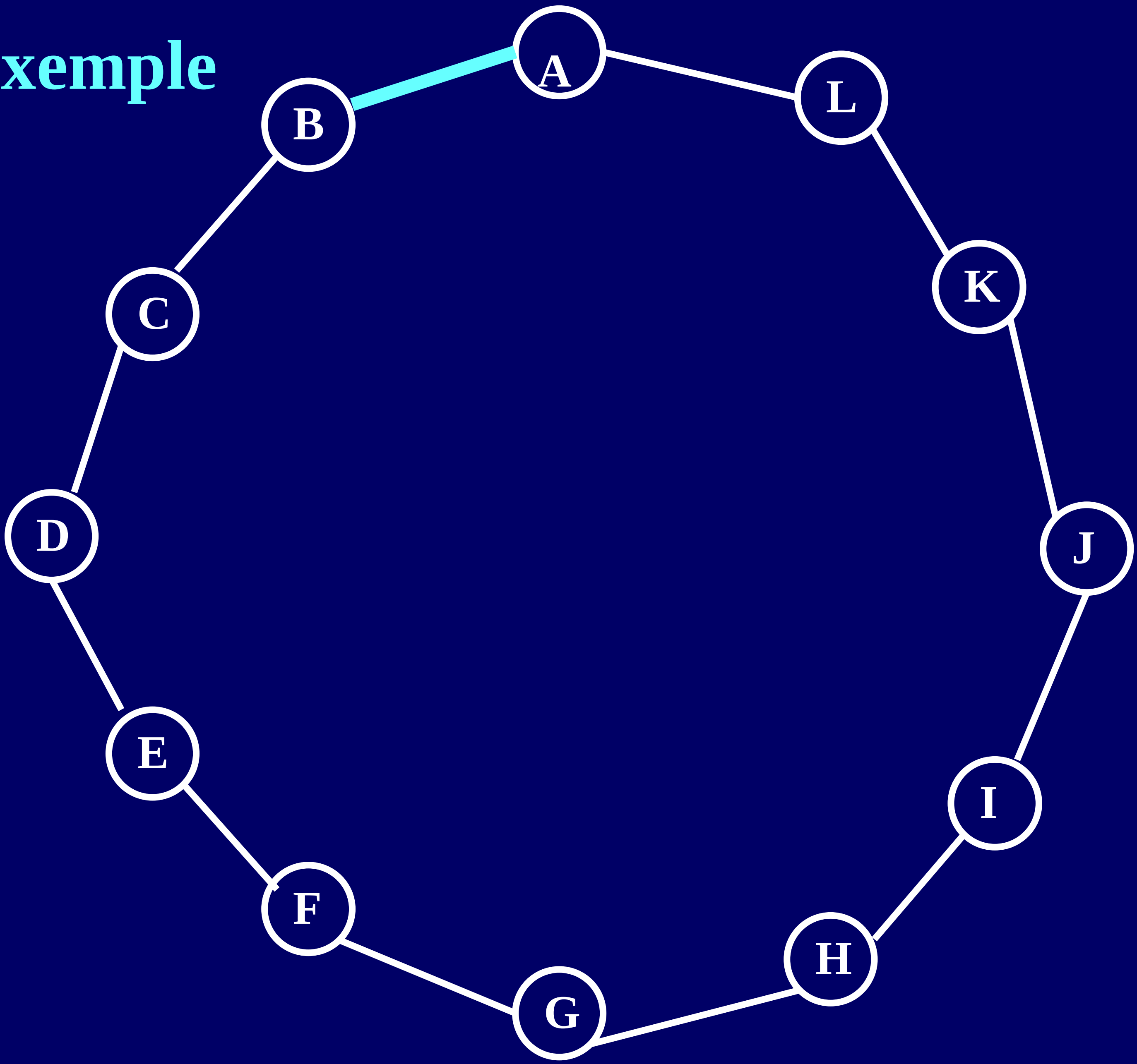
- **couplage maximal** (***pour l'inclusion***)
- **couplage maximum** (***de cardinalité maximum***)
- **couplage parfait** (***tous les sommets sont couplés***)

Le problème de la recherche de couplage maximal est polynomial, et très facile dans tout graphe.

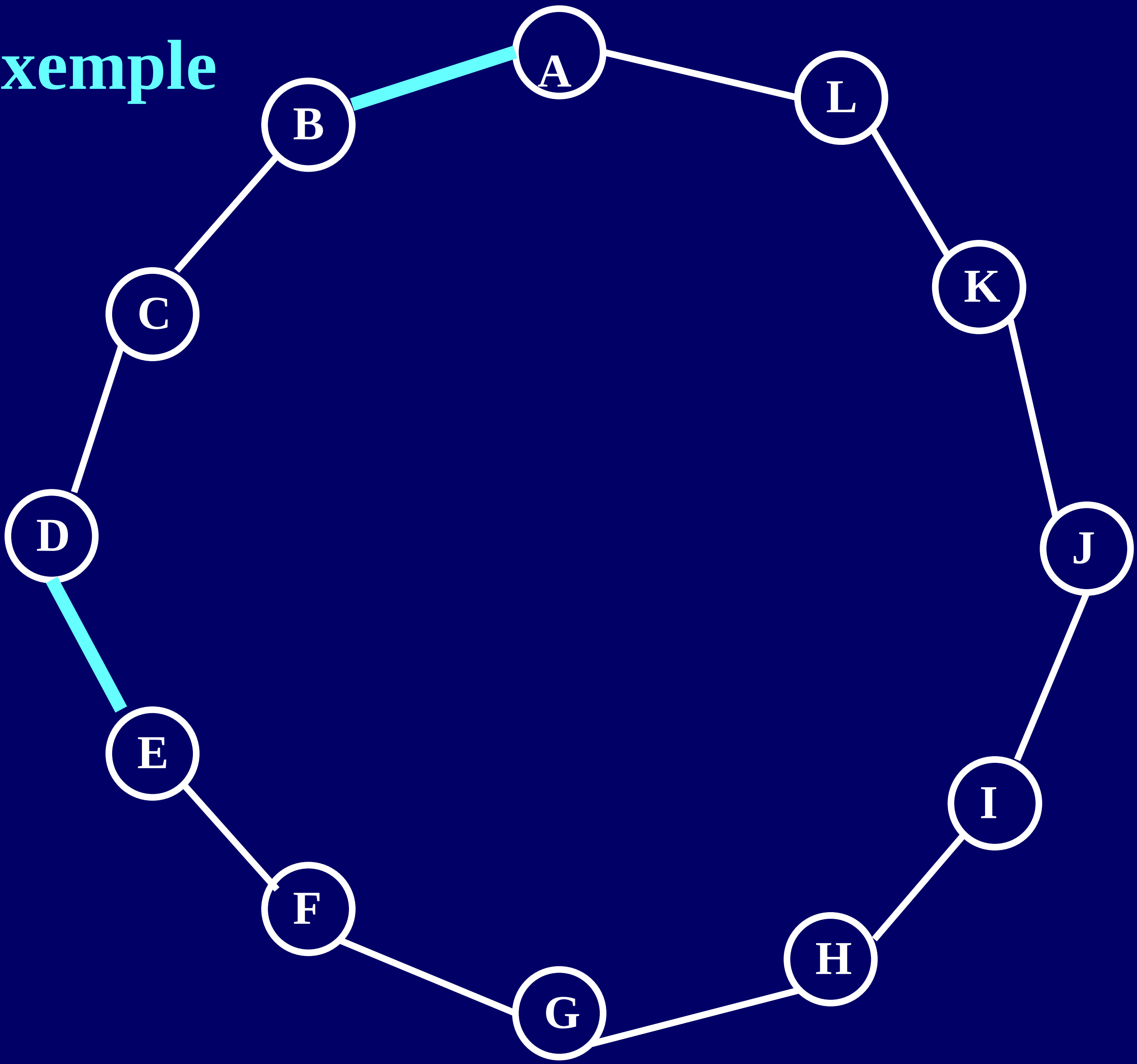
Un exemple



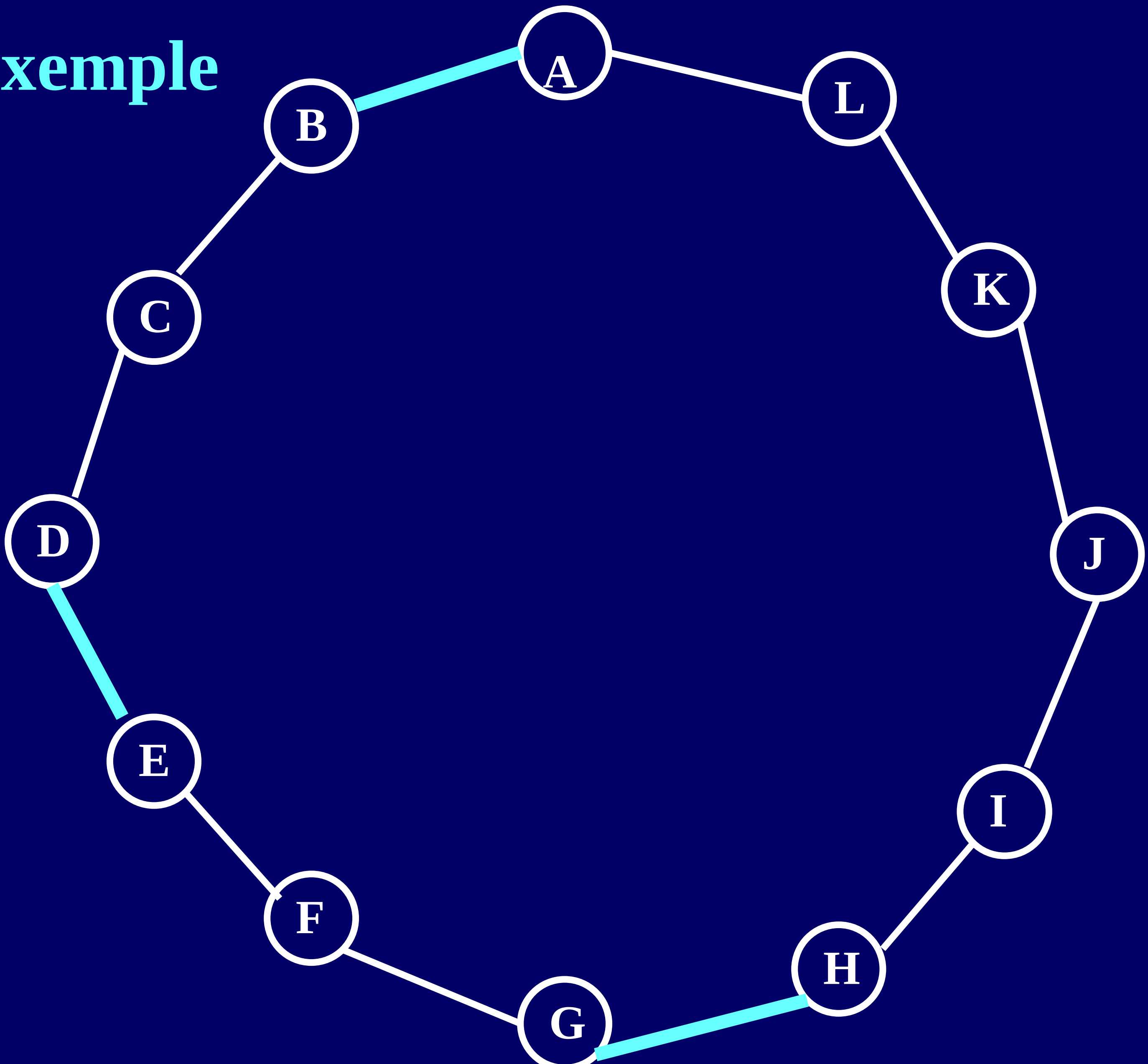
Un exemple



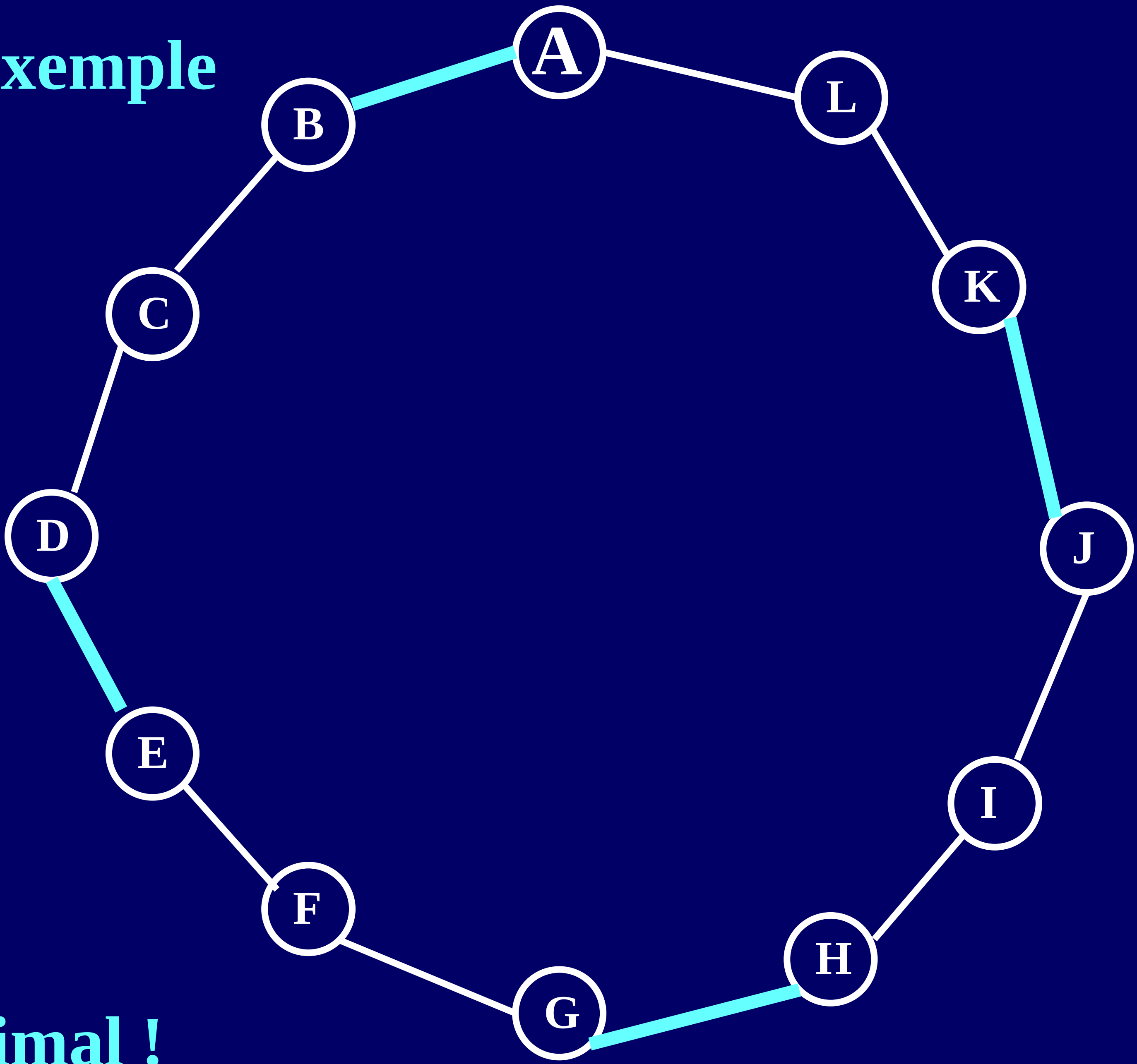
Un exemple



Un exemple

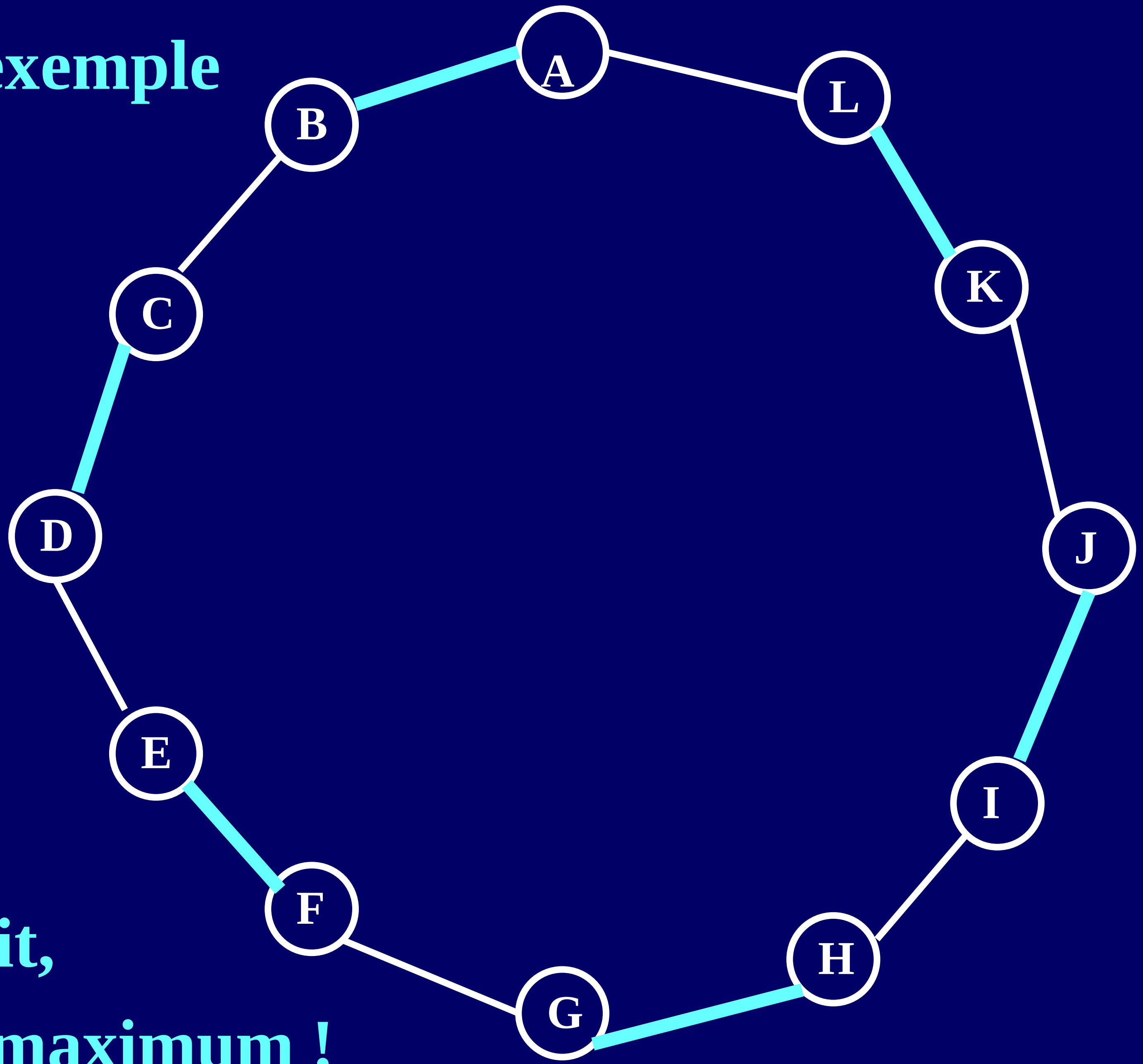


Un exemple



maximal !

Un exemple



Parfait,

donc maximum !

Couplages dans les graphes bipartis

Définition : un couplage est un ensemble d'arêtes deux à deux indépendantes.

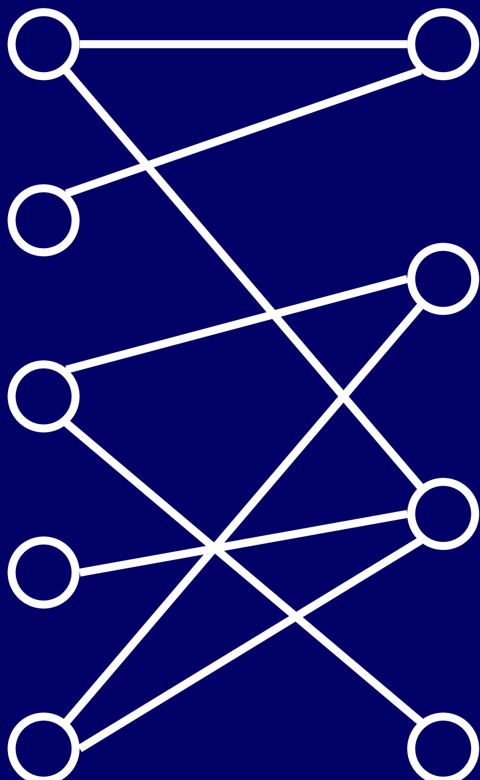
On peut parler en particulier de

- **couplage maximal** (*pour l'inclusion*)
- **couplage maximum** (*de cardinalité maximum*)
- **couplage parfait** (*tous les sommets sont couplés*)

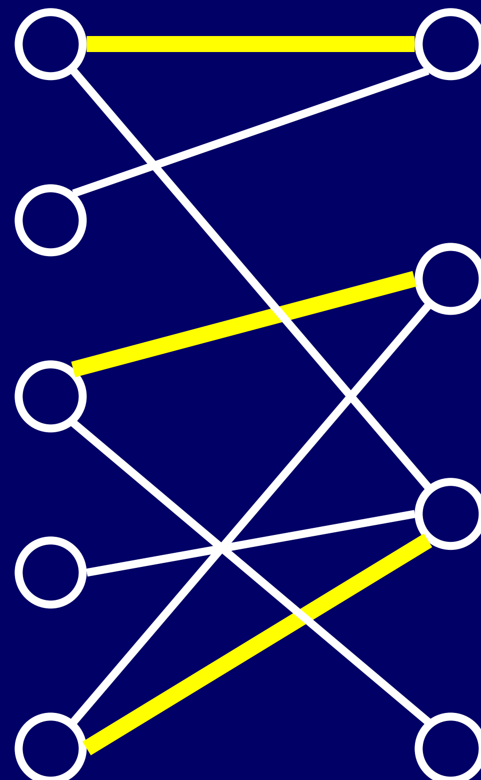
Le problème de la recherche de **couplage maximal** est polynomial, et très facile dans tout graphe.

Le problème de la recherche de **couplage maximum** est polynomial, et plutôt facile si le graphe est biparti.

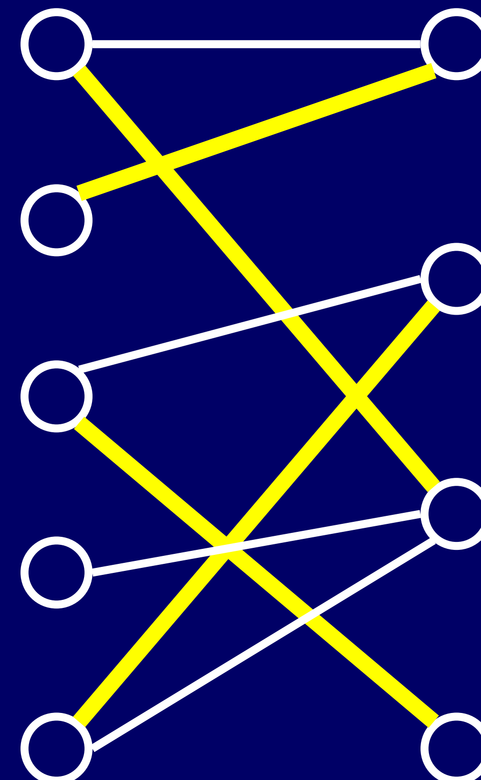
Exemple



graphe

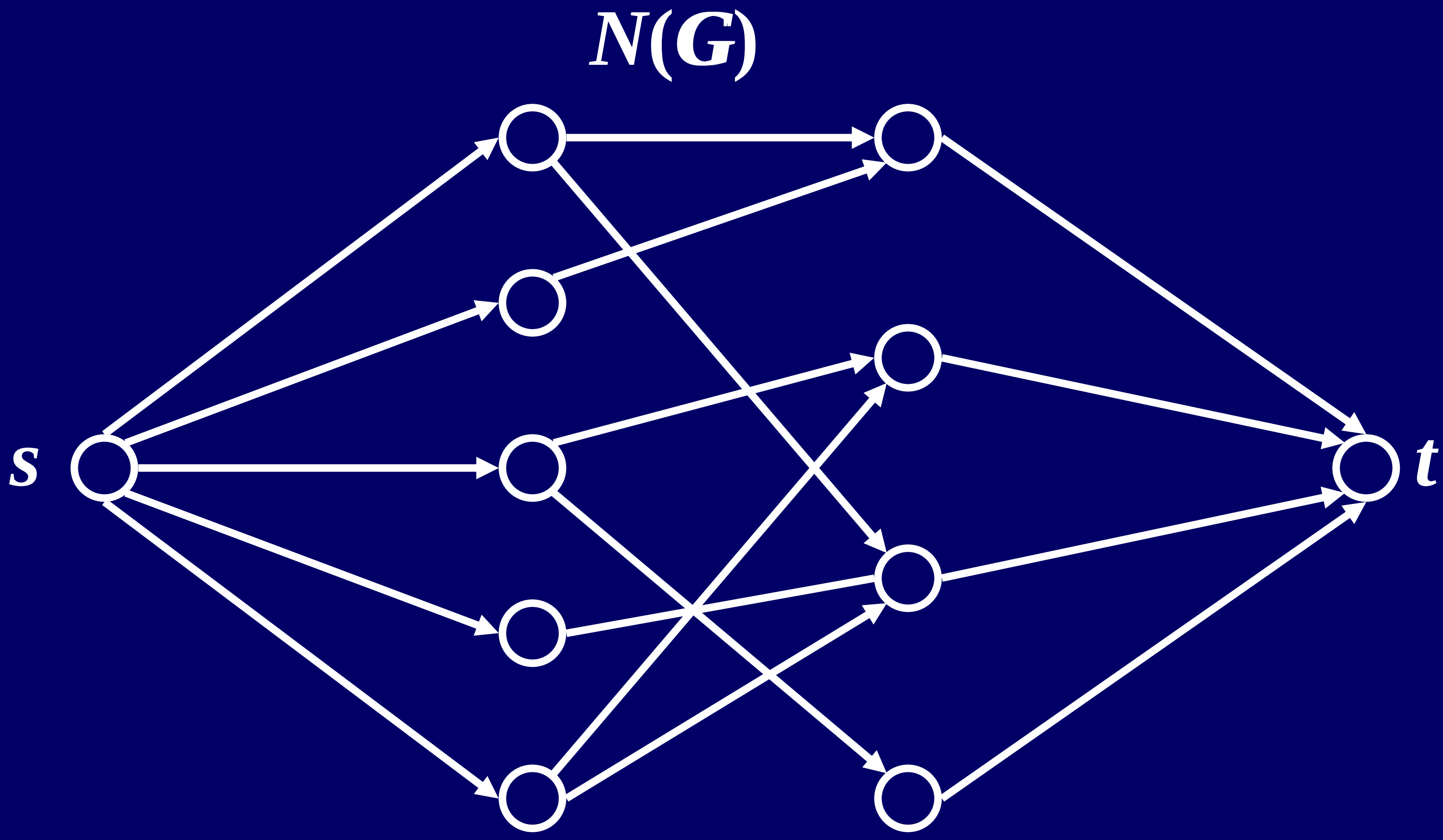


couplage maximal



couplage maximum

Solution par les flots



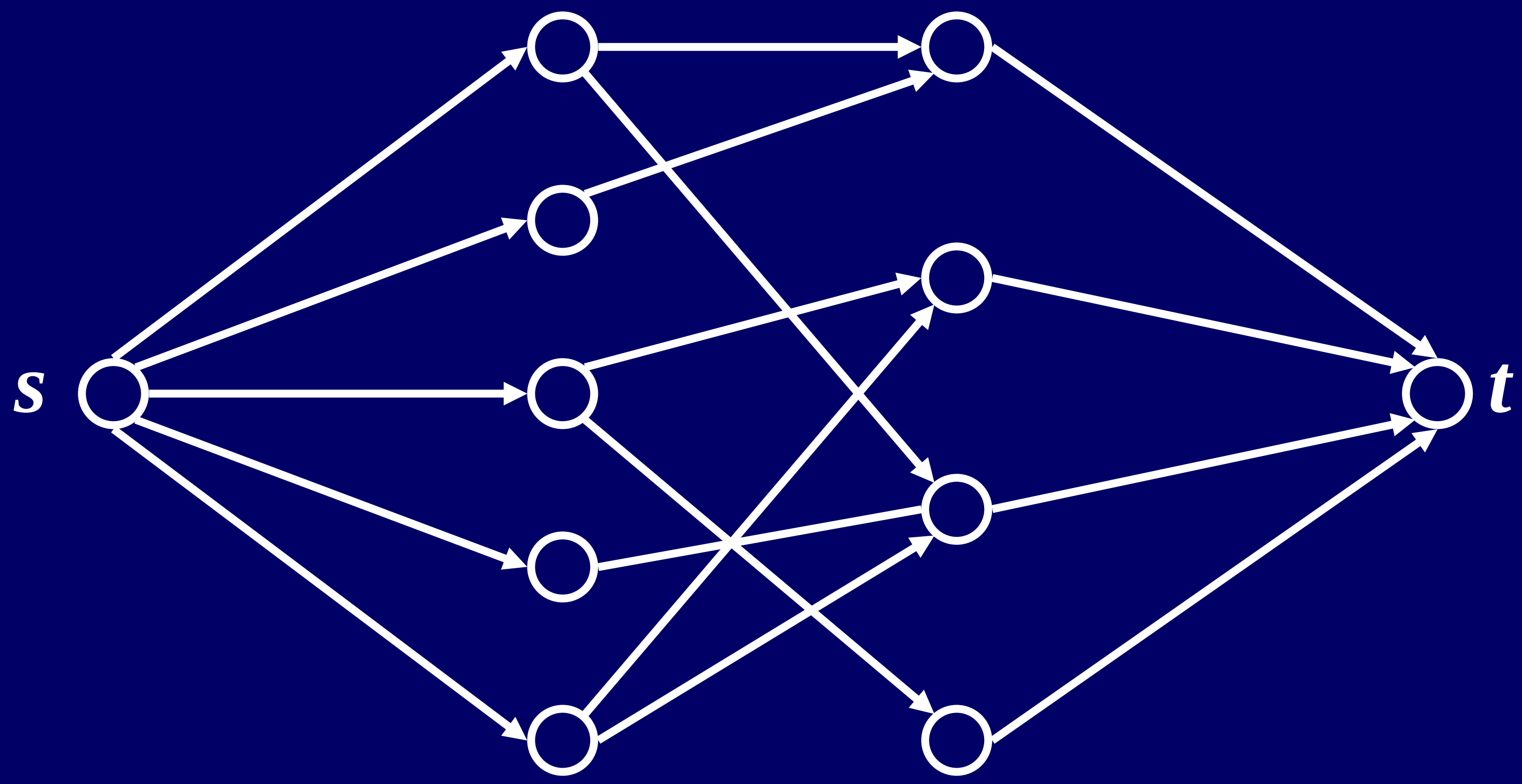
Tous les arcs sont de capacité 1.

Le théorème

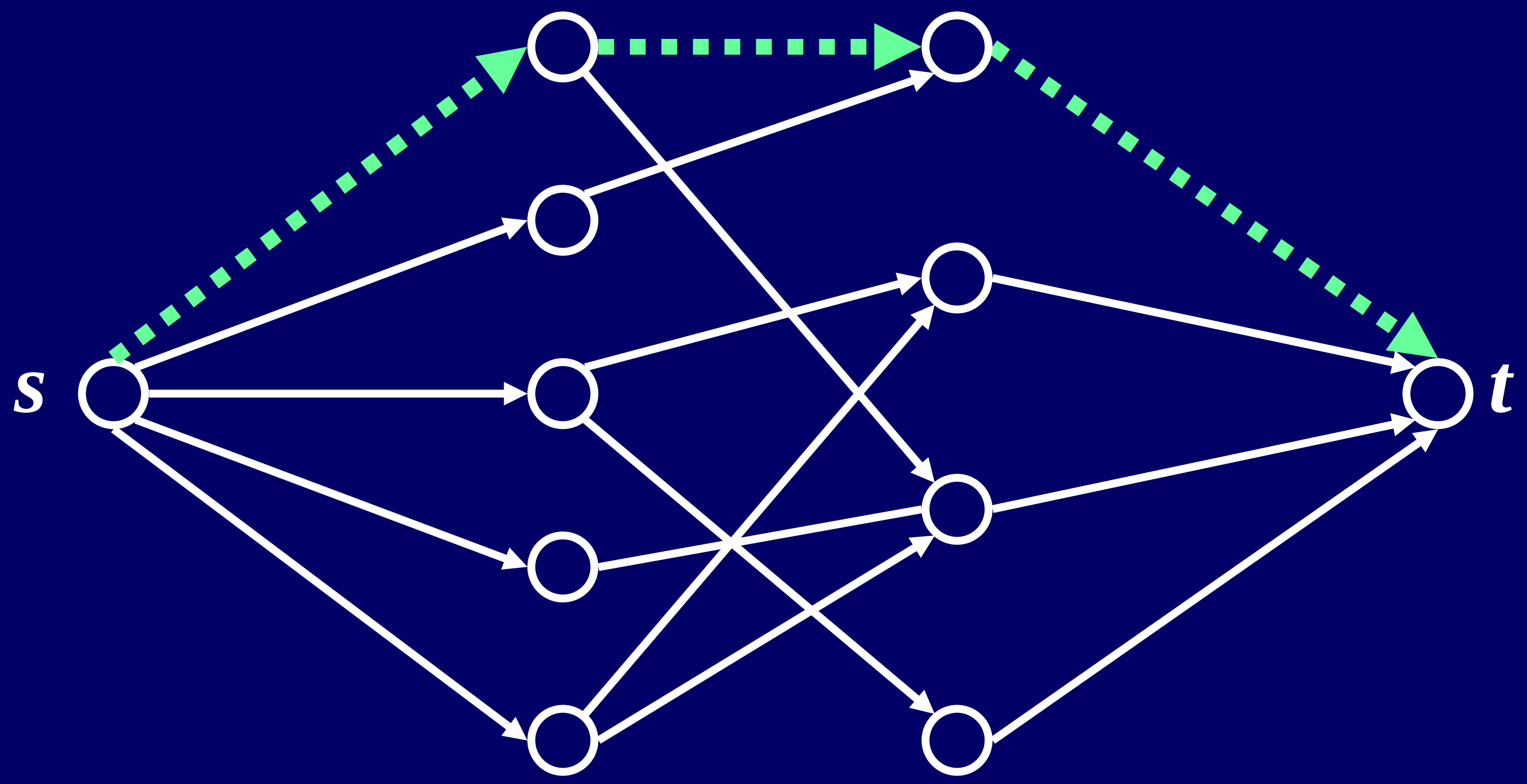
Théorème :

La cardinalité d'un couplage maximum dans le graphe biparti *G* est égale à la valeur d'un flot maximum dans le réseau correspondant.

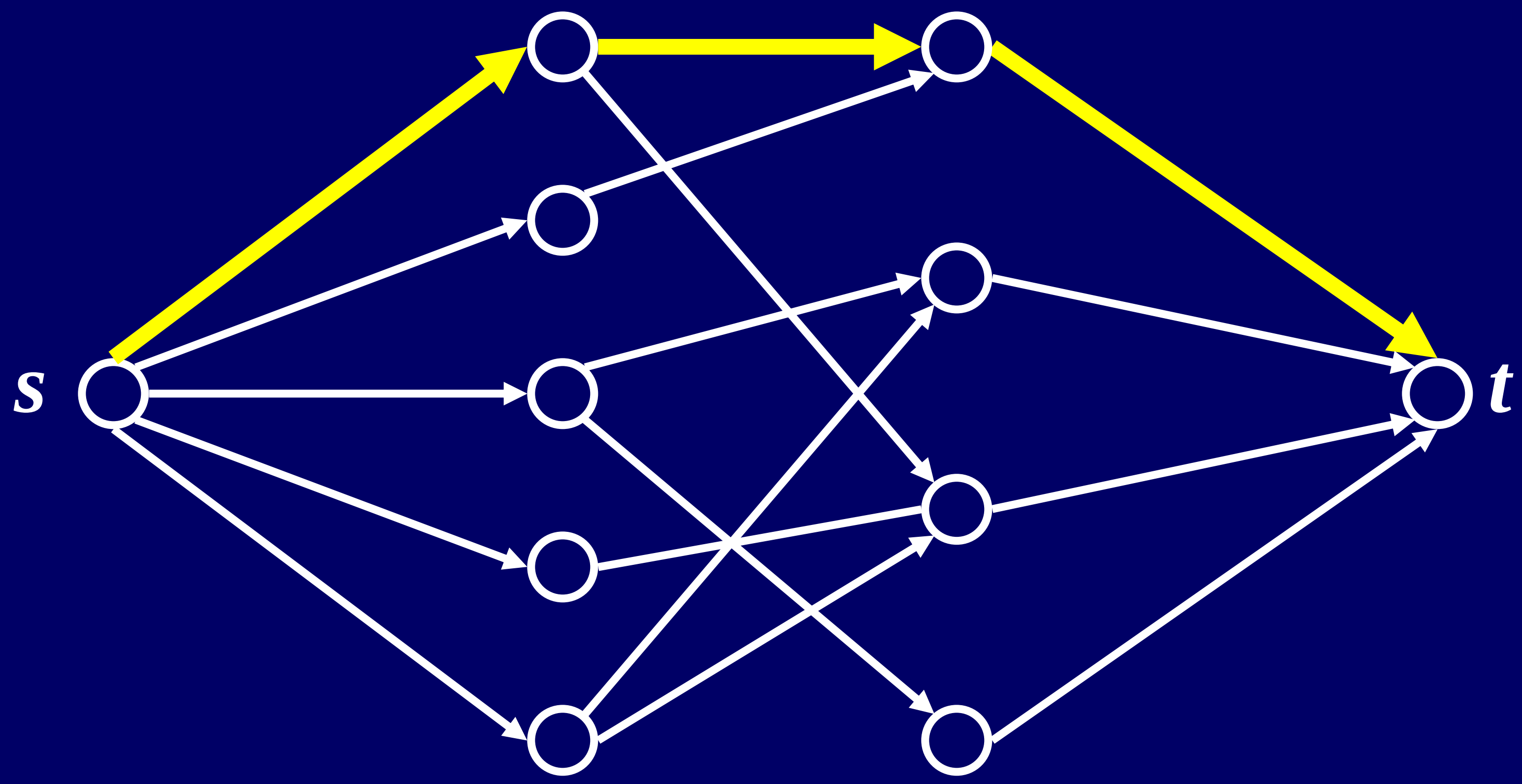
L'exemple



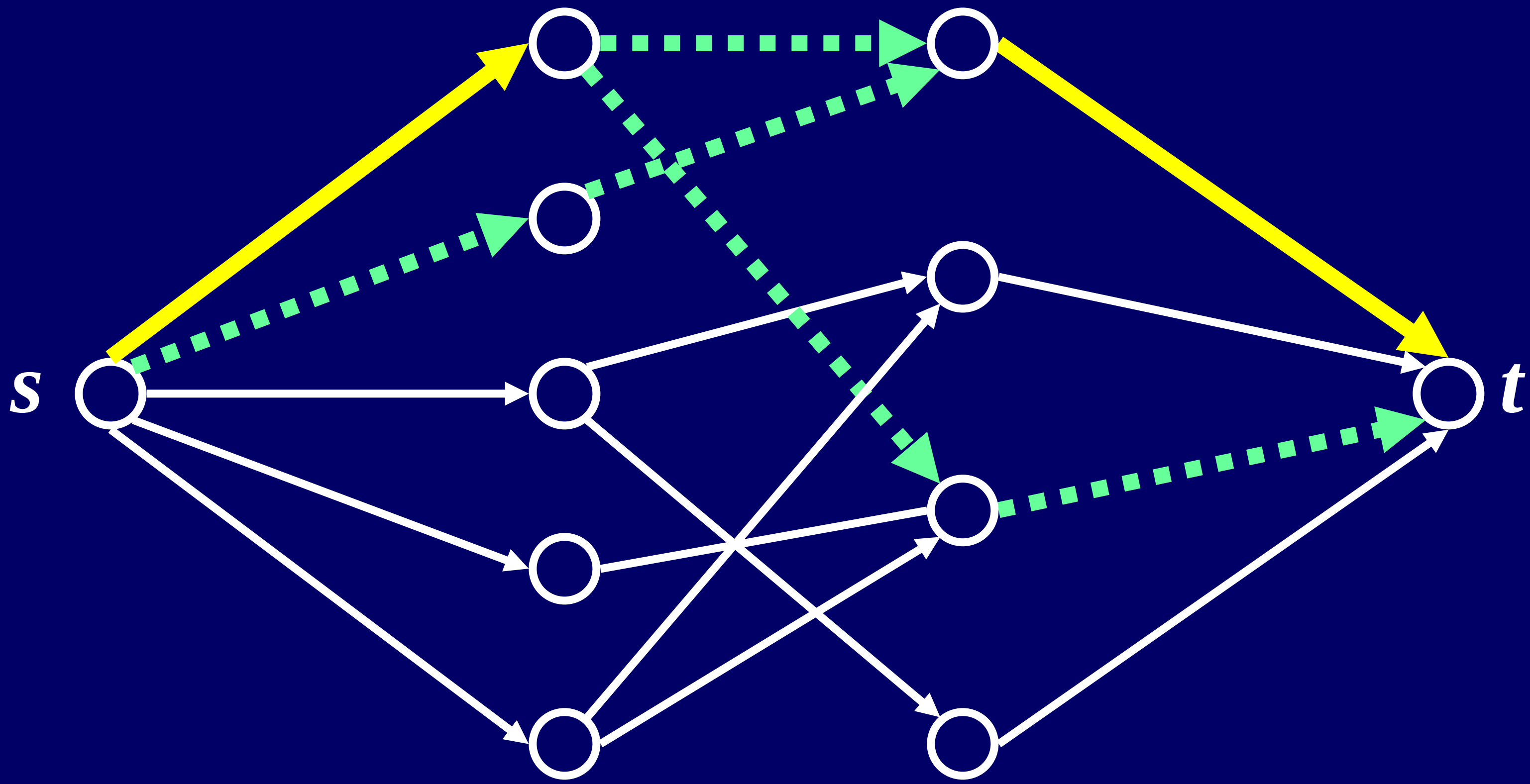
L'exemple



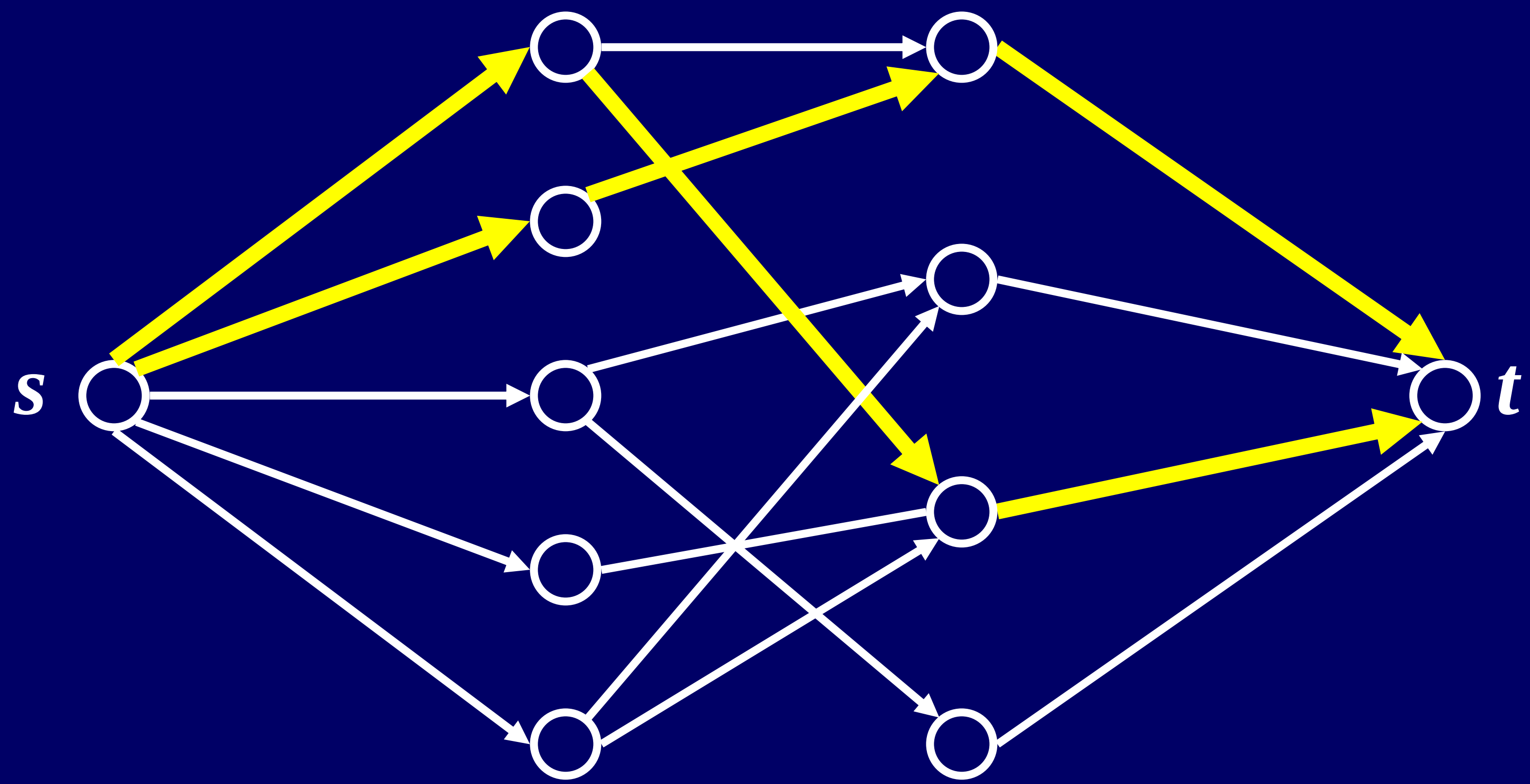
L'exemple



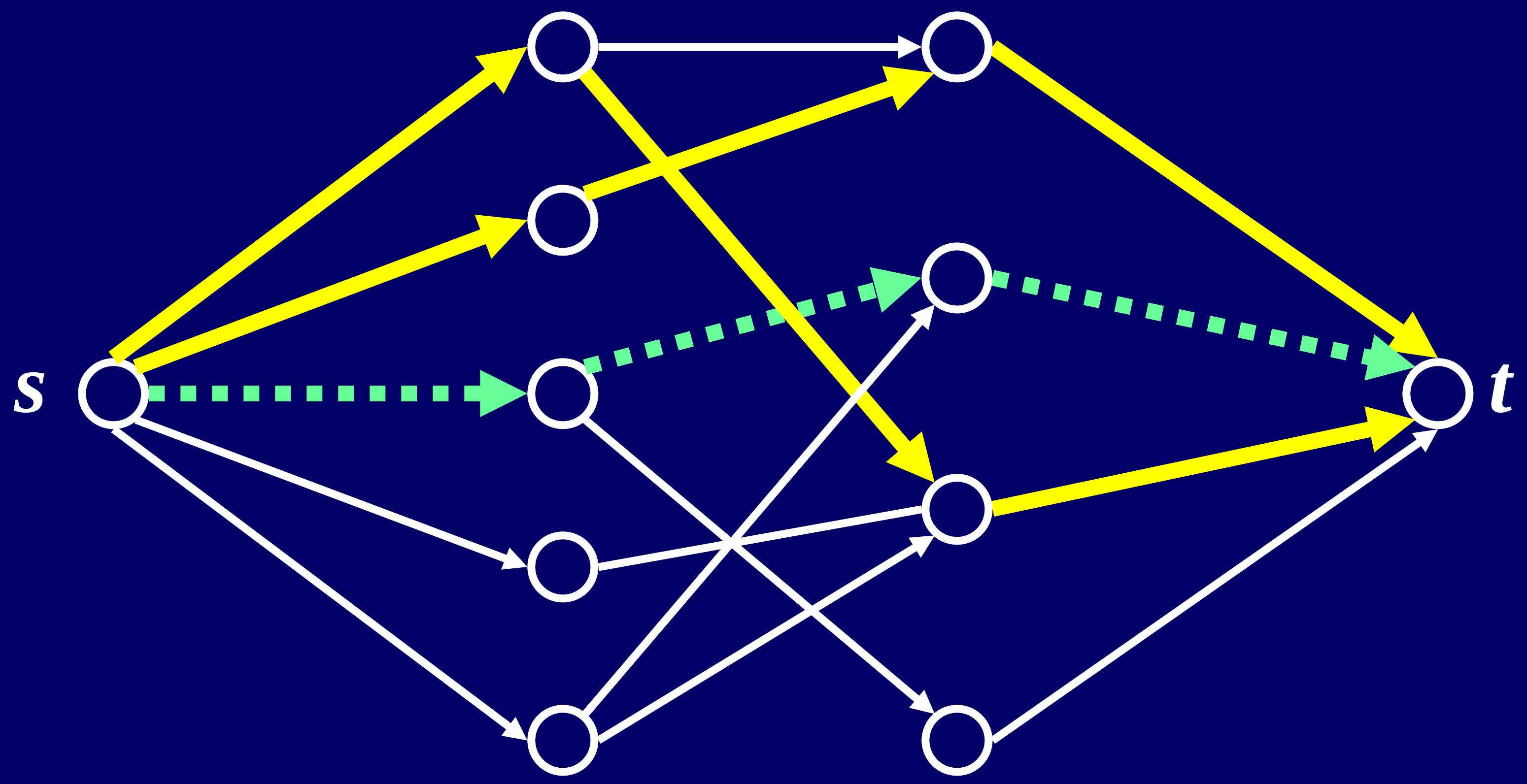
L'exemple



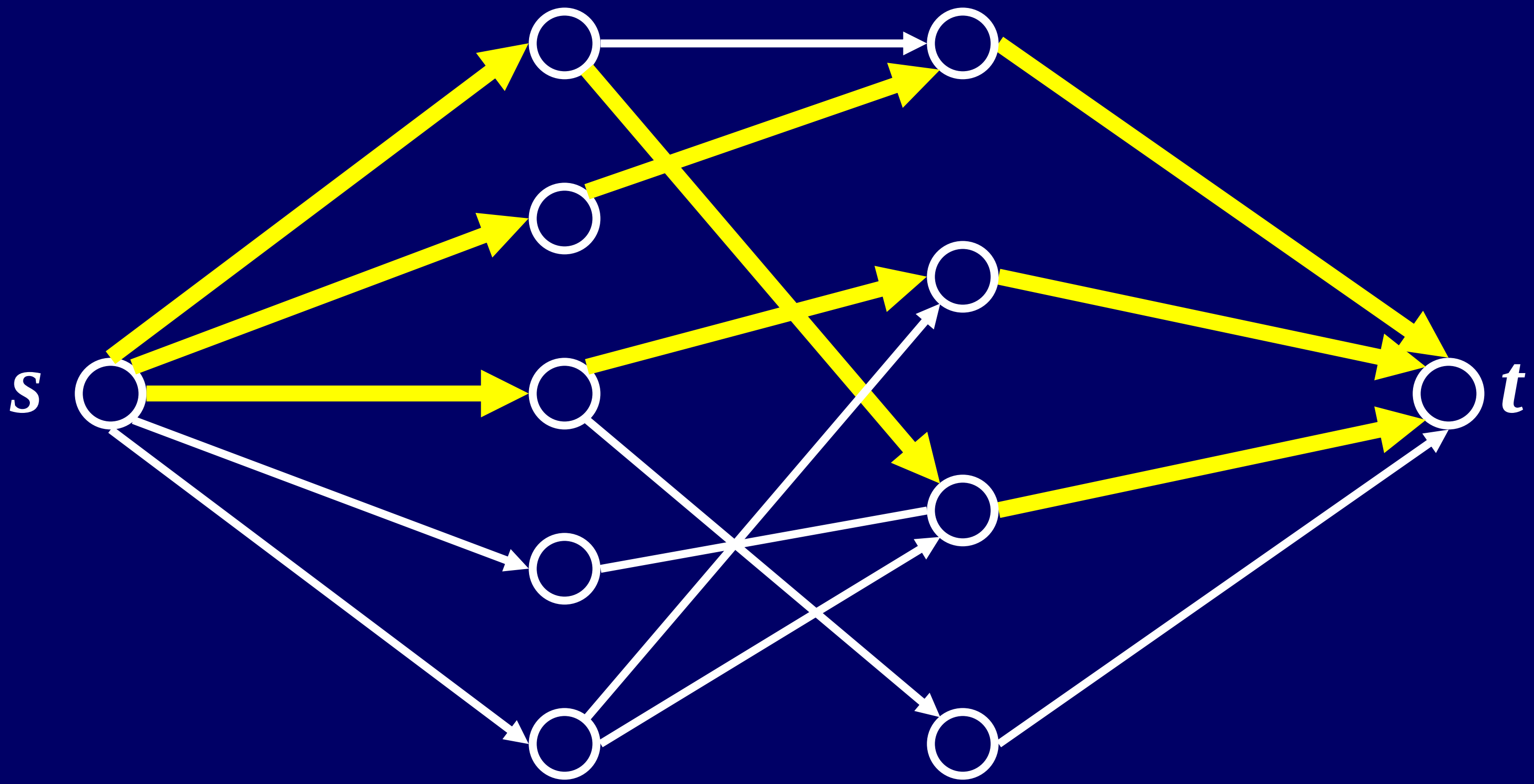
L'exemple



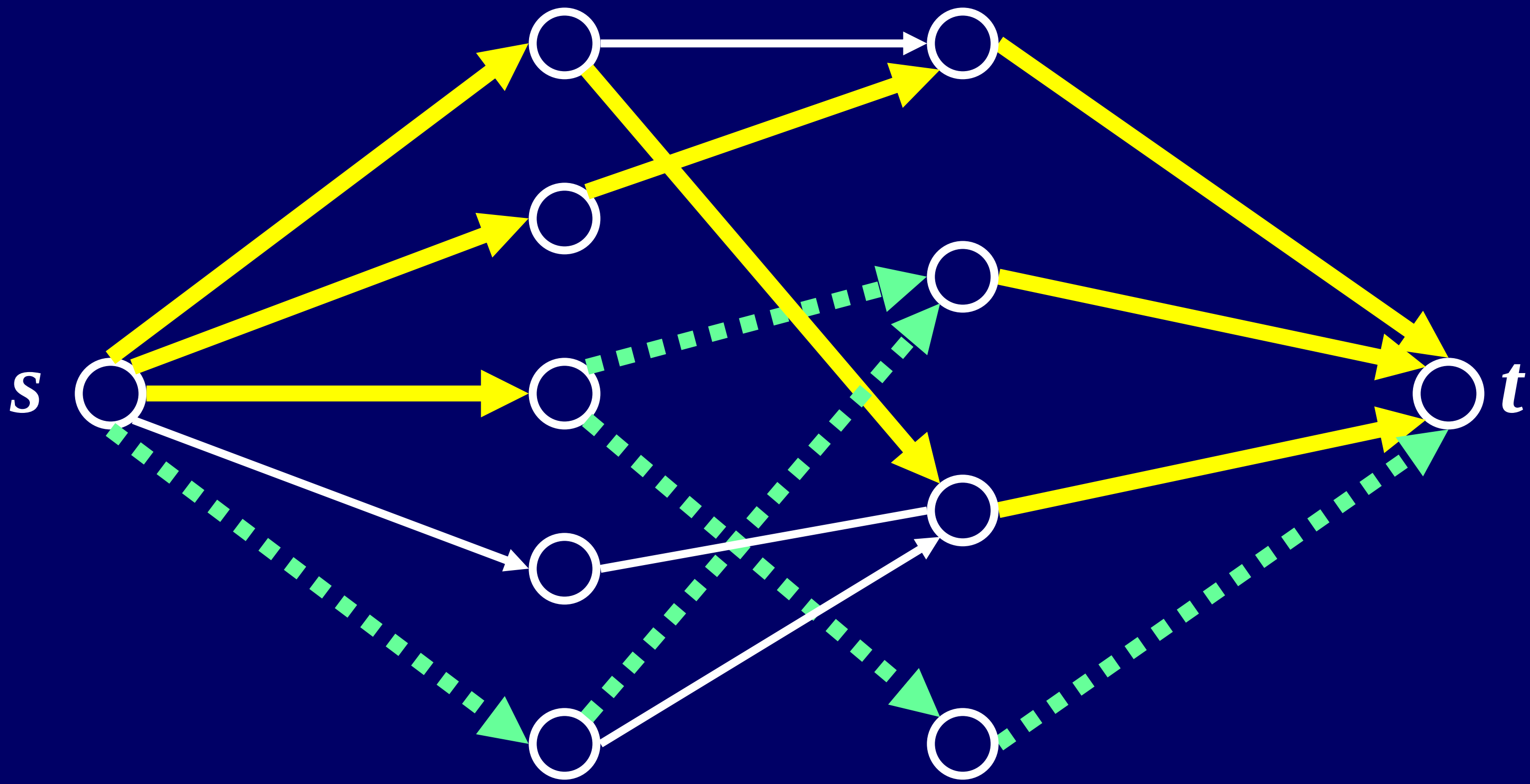
L'exemple



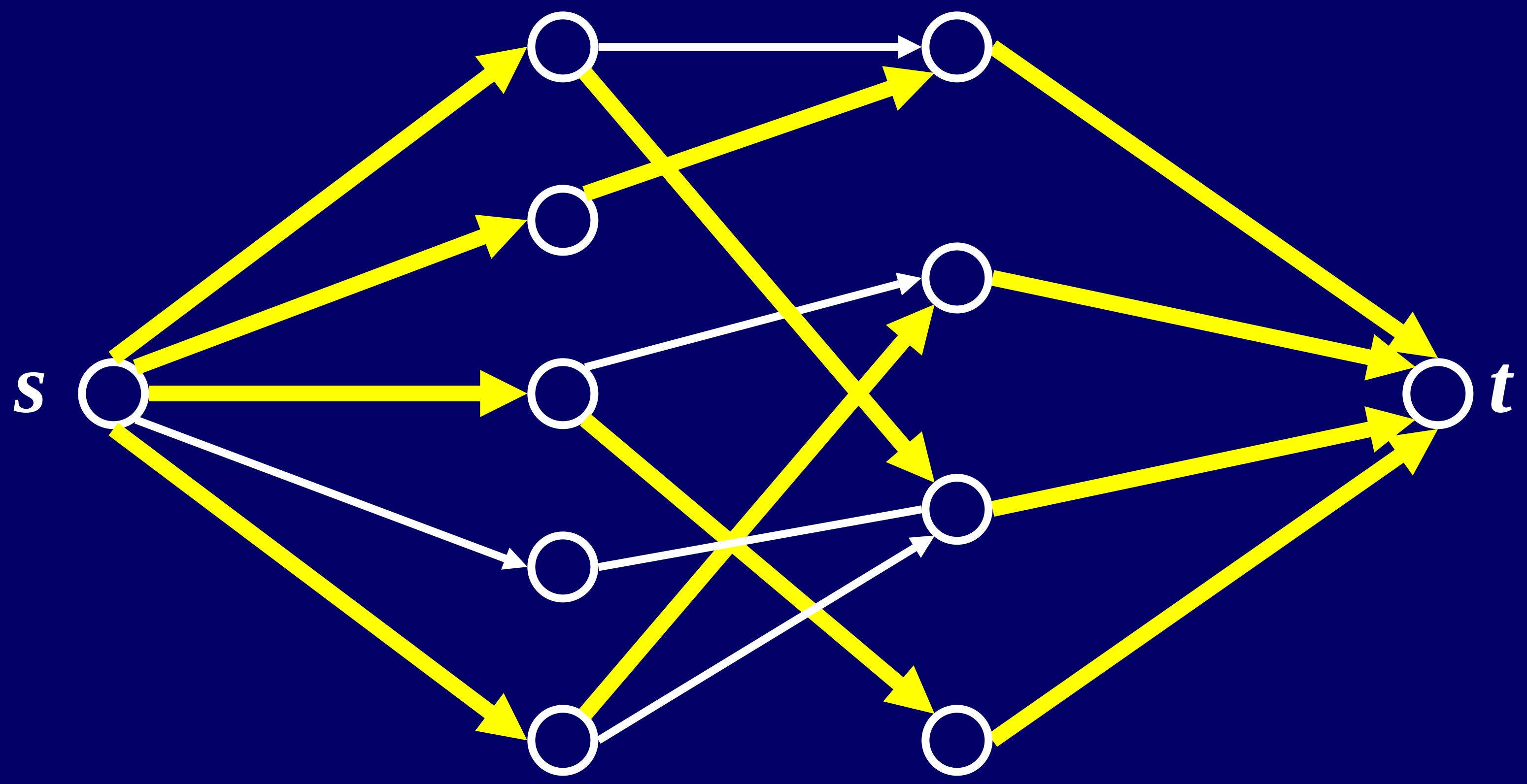
L'exemple



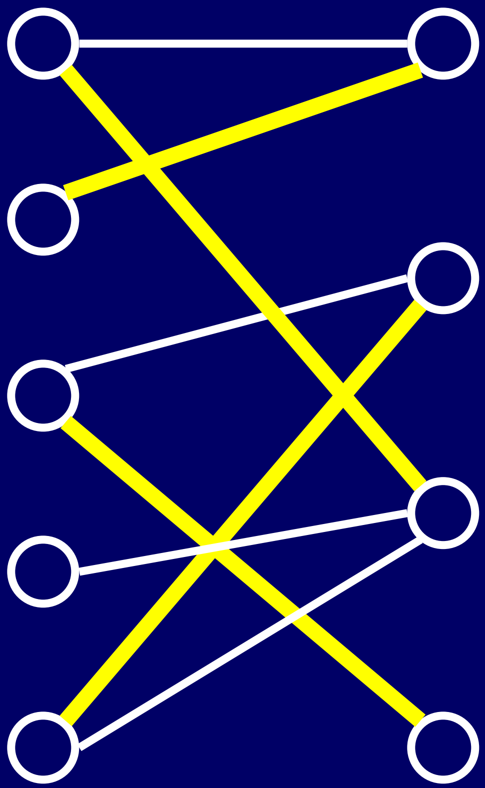
L'exemple



L'exemple



L'exemple



La preuve

Soit *f* la valeur d'un flot maximum et *c* la cardinalité d'un couplage maximum.

$f \geq c$

En effet, comme les arêtes d'un couplage maximum sont indépendantes, les arcs issus sont aussi. On peut donc obtenir un flot 1 sur tous ces arcs.

La preuve (suite)

$c \geq f$

Comme toutes les capacités sont entières, on peut trouver un flot maximum ou toutes les valeurs sont entières, c.à.d. 0 ou 1.

Tout 0-1 flot permet obtenir une couplage de cardinalité égale à sa valeur.

CQFD

Complexité

Une augmentation : O(m)

comme la valeur du flot est en O(n)

O(n) augmentations

total O(mn)

Un problème sportif

Le problème de l'élimination en Baseball

- Voici l'état du tournois à un instant t :

	w(i)	g(i)	g(i,j)			
Equipe	*Victoires*	*Reste*	*Y*	*H*	*C*	*B*
Yale	33	8		1	6	1
Harvard	29	4	1		0	3
Cornell	28	7	6	0		1
Brown	27	5	1	3	1	

Remarque : tous les rencontres se soldent par une victoire. Chaque victoire rapporte un point.

- Est-ce que l'équipe de Harvard est éliminée ou non ?

  (Une équipe est éliminée si elle ne peut pas être la première ou première ex-aequo à la fin du tournois).

Analyse du problème

T	w	g	*Y*	*H*	*C*	*B*
Y	33	8		1	6	1
H	29	4	1		0	3
C	28	7	6	0		1
B	27	5	1	3	1	

- **Le nombre maximum de points que Harvard peut obtenir est :**

  $$W = 29 + 4 = 33$$

  (*en gagnant toutes les rencontres qui restent*)

Analyse du problème

T	w	g	*Y*	*H*	*C*	*B*
Y	33	8		1	6	1
H	29	4	1		0	3
C	28	7	6	0		1
B	27	5	1	3	1	

Supposons que Harvard gagne tous ses rencontres restants. Elle ne sera pas éliminée *si et seulement si*

- **Brown ne gagne plus que**

  $u(B) = W\text{-}w(B) = 33\text{-}27 = 6$

  rencontres de ce qui lui restent;

Analyse du problème

T	w	g	*Y*	*H*	*C*	*B*
Y	33	8		1	6	1
H	29	4	1		0	3
C	28	7	6	0		1
B	27	5	1	3	1	

Supposons que Harvard gagne tous ses rencontres restants. Elle ne sera pas éliminée *si et seulement si*

- **Cornell ne gagne plus que**

  u(C) = **W-w(C) = 33-28 =** 5

  rencontres de ce qui lui restent;

Analyse du problème

T	w	g	*Y*	*H*	*C*	*B*
Y	33	8		1	6	1
H	29	4	1		0	3
C	28	7	6	0		1
B	27	5	1	3	1	

Supposons que Harvard gagne tous ses rencontres restants. Elle ne sera pas éliminée *si et seulement si*

- **Yale ne gagne plus que**

  u(Y) = **W-w(Y) = 33-33 =** 0

  rencontres de ce qui lui restent.

Analyse du problème

T	w	g	*Y*	*H*	*C*	*B*
Y	33	8		1	6	1
H	29	4	1		0	3
C	28	7	6	0		1
B	27	5	1	3	1	

- **Soit P l'ensemble de toutes les équipes (différentes de Harvard) : P = {Y, C, B}**
- **Soit Q l'ensemble de tous les couples de P :**

  Q = { (Y,C), (Y,B), (C,B) }
- **Le nombre total de rencontres entre ces équipes est :**

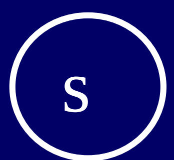
  G = 6+1+1 = 8 .

Solution utilisant les flots maximum

Le problème peut être traité en passant par un pb. de flot :

- **on crée un nœud source s (tous les rencontres débutent ici).**

Solution utilisant les flots maximum

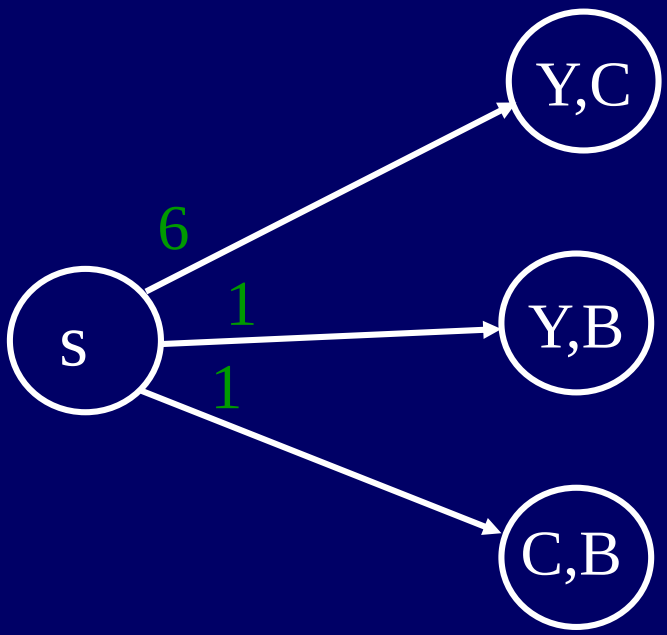


Solution utilisant les flots maximum

Le problème peut être traité en passant par un pb. de flot :

- **on crée un nœud source s (tous les rencontres débutent ici).**
- **on crée un nœud pour chaque couple de Q ; pour chaque couple (i,j) on ajoute un arc de s vers (i,j), de capacité égale au nombre de rencontres restants entre i et j.**

Solution utilisant les flots maximum

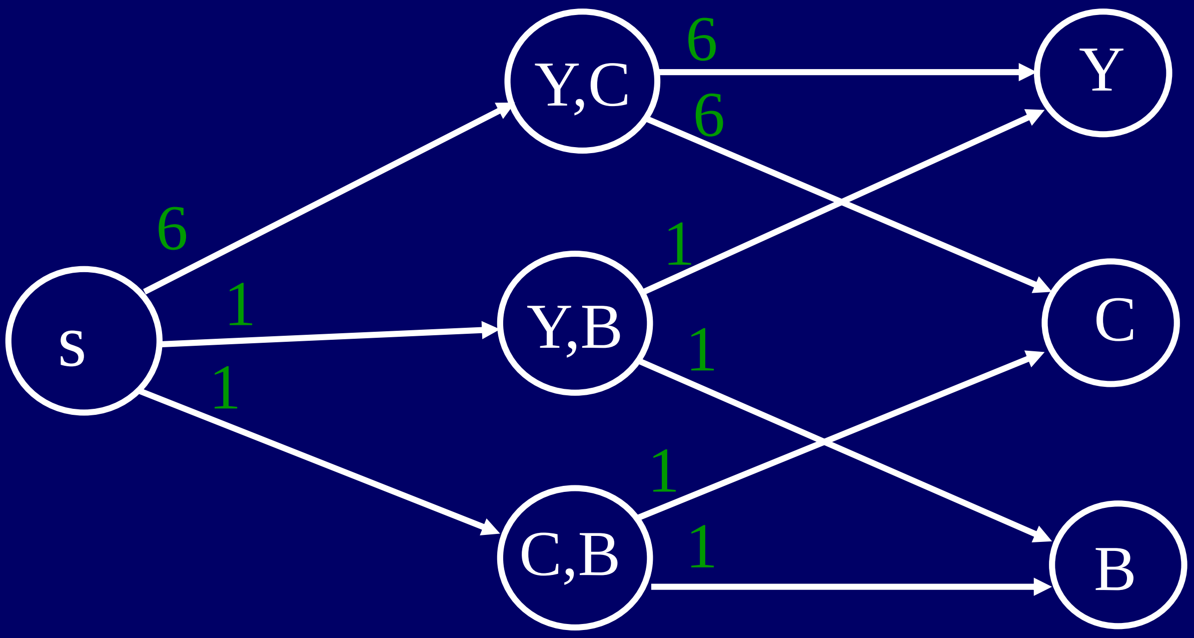


Solution utilisant les flots maximum

Le problème peut être traité en passant par un pb. de flot :

- on crée un **nœud source s** (tous les rencontres débutent ici).
- on crée **un nœud pour chaque couple de Q** ; pour chaque couple (i,j) on ajoute **un arc de s vers (i,j)**, de capacité égale au nombre de rencontres restants entre i et j.
- pour **chaque équipe de P on crée un nœud** ; pour chaque couple (i,j) de Q un arc de (i,j) vers les nœuds i et j, de capacité égale au nombre de rencontres restants entre i et j.

Solution utilisant les flots maximum

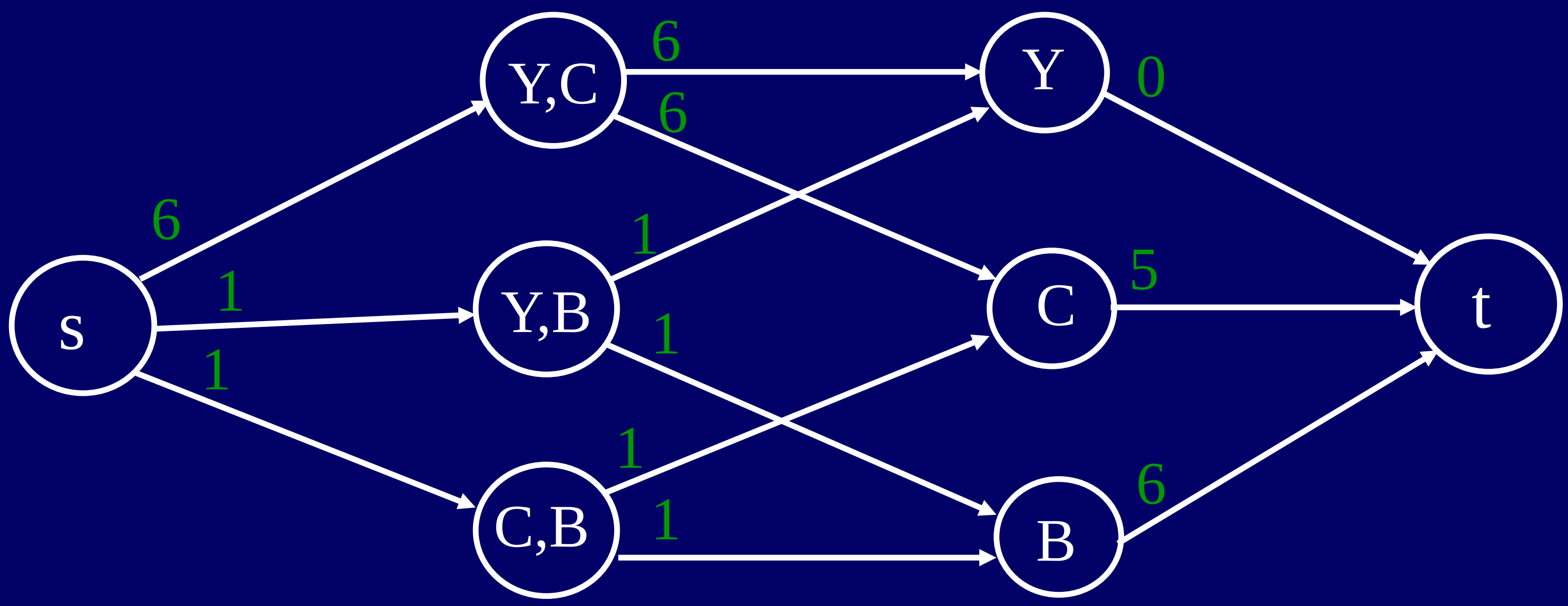


Solution utilisant les flots maximum

Le problème peut être traité en passant par un pb. de flot :

- **on crée un nœud source s (tous les rencontres débutent ici).**
- **on crée un nœud pour chaque couple de Q ; pour chaque couple (i,j) on ajoute un arc de s vers (i,j), de capacité égale au nombre de rencontres restants entre i et j.**
- **pour chaque équipe de P on crée un nœud ; pour chaque couple (i,j) de Q un arc de (i,j) vers les nœuds i et j, de capacité égale au nombre de rencontres restants entre i et j.**
- **on crée un nœud puits t, qui sert pour enregistrer les gains; on ajoute un arc de chaque nœud j de P vers t, de capacité u(j).**

Solution utilisant les flots maximum



Solution utilisant les flots maximum

- **Recherche d'un flot maximum de s vers t.**

- ***Si la valeur du flot max est G*** **(le nombre de rencontres entre les équipes de P)**

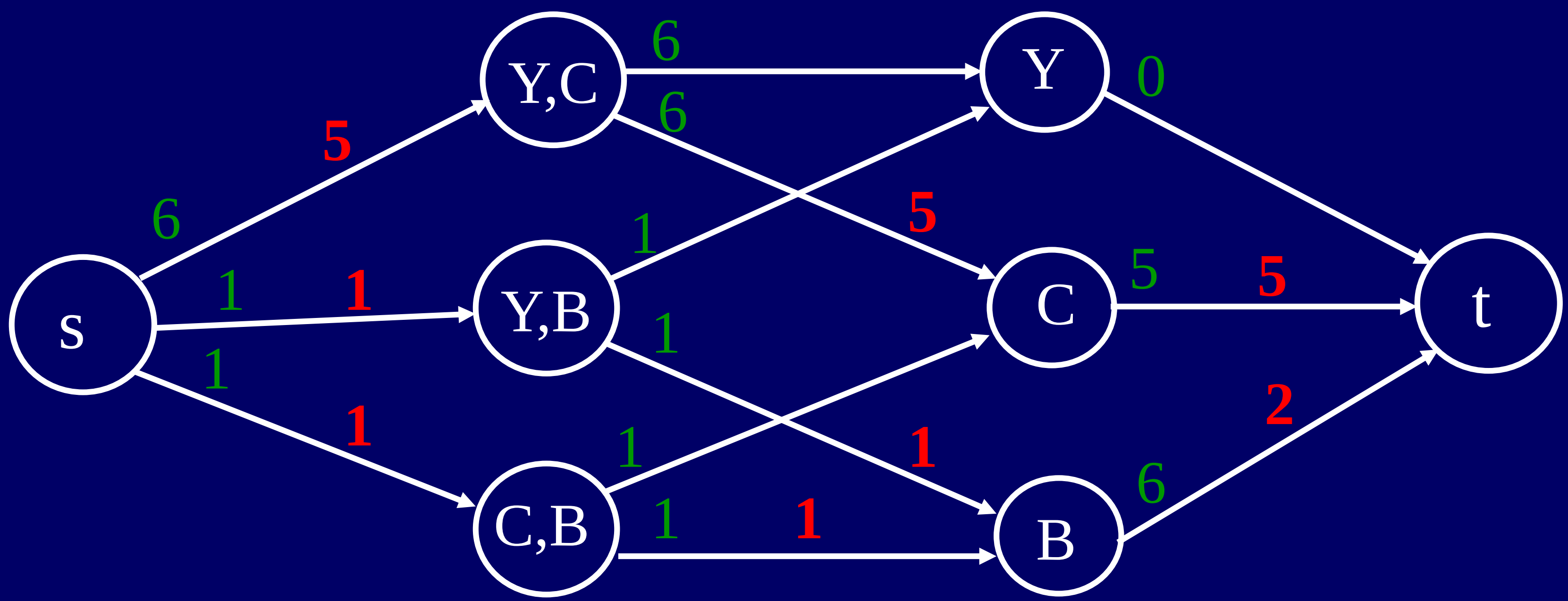
  alors **Harvard a encore une chance,**

  sinon **Harvard est éliminée.**

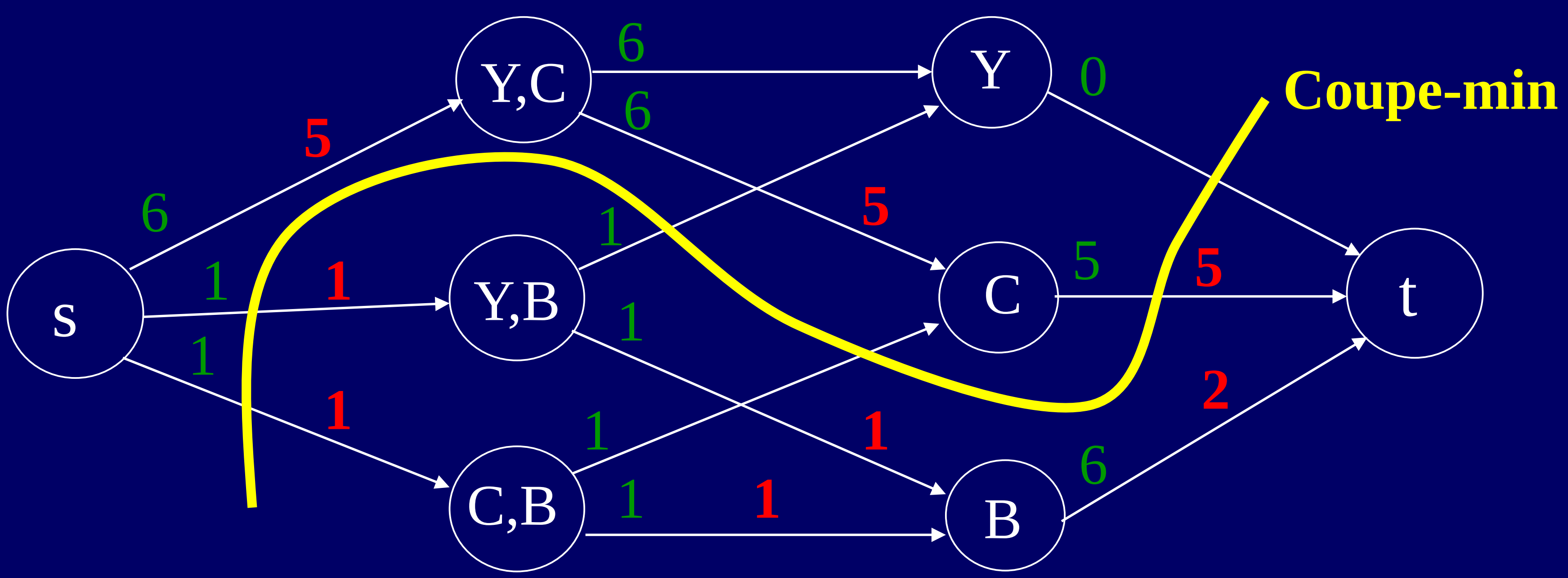
(c.a.d. si tous les rencontres peuvent se terminer d'une manière que les équipes Y, C, B aient pas plus de u(Y), u(C), u(B) gagnés respectivement, ***alors*** **Harvard peut encore être première).**

Solution utilisant les flots maximum

- **Dans notre exemple le flot maximum est 7 < 8 = G, donc Harvard est éliminée.**

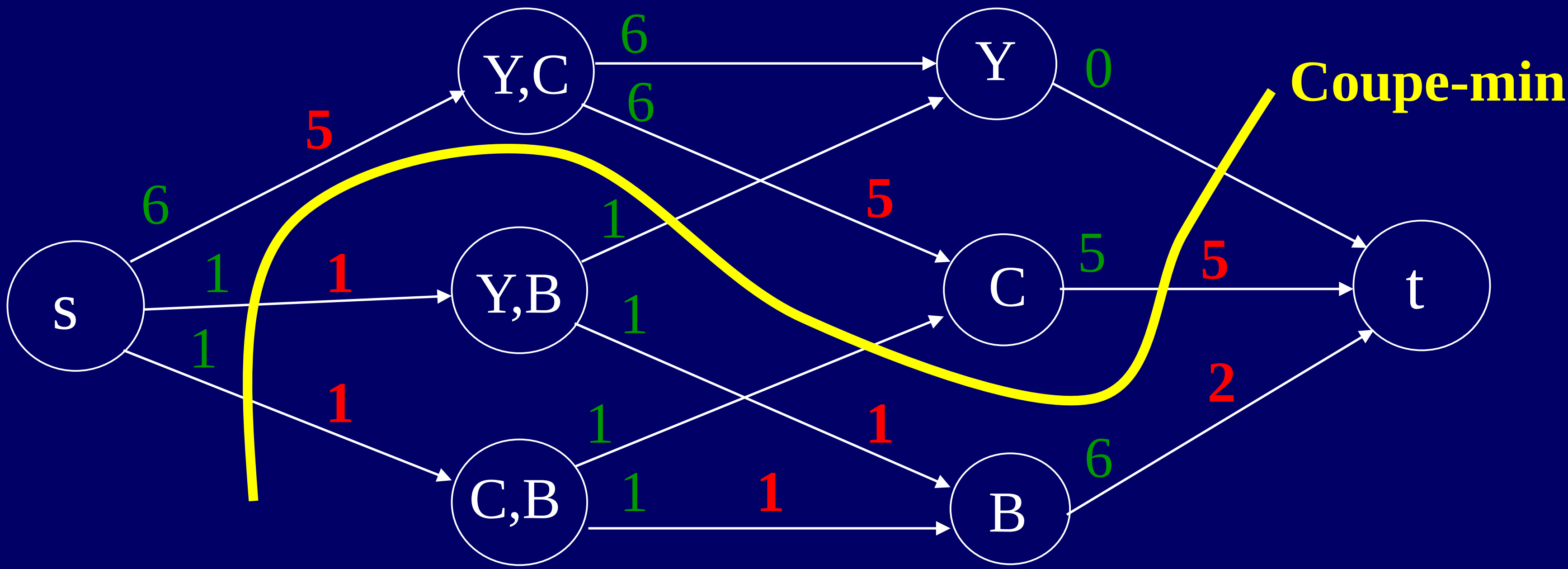


Preuve de l'élimination de Harvard par la coupe minimum



Preuve de l'élimination de Harvard par la coupe minimum

- La partie contenant s de la coupe est {s, (Y,C), Y, C}
- Les équipes du coté de s sont Y et C.
  Le nombre de rencontres restants entre Y et C est 6.
  Le nombre total de gains de Y et C, qui permet à Harvard de devenir première est 0+5 = 5. Donc, Harvard est éliminée.



Preuve de l'élimination de Harvard par la coupe minimum

Autre manière de montrer l'élimination de Harvard :

Les équipes du coté de s sont Y et C.

Le total des points de Y et C est (33+28)+6=67.

Le nombre moyen de gains est 67 / 2 = 33.5 .

Ainsi l'un ou l'autre parmi Y et C aura au moins 34 points.

Donc Harvard est éliminée avec ses au plus 33 points.

Preuve de l'élimination de Harvard par la coupe minimum

- Dans le cas général nous avons les équipes 0, 1,…, n.

S'il existe **un ensemble d'équipes R$\subseteq$\{1,…,n\} t.q.**

$$\boxed{\frac{\sum_{i \in R} w(i) + g(R)}{|R|} > W}$$

(*g(R) = le nombre de rencontres restants à l'équipe R*)

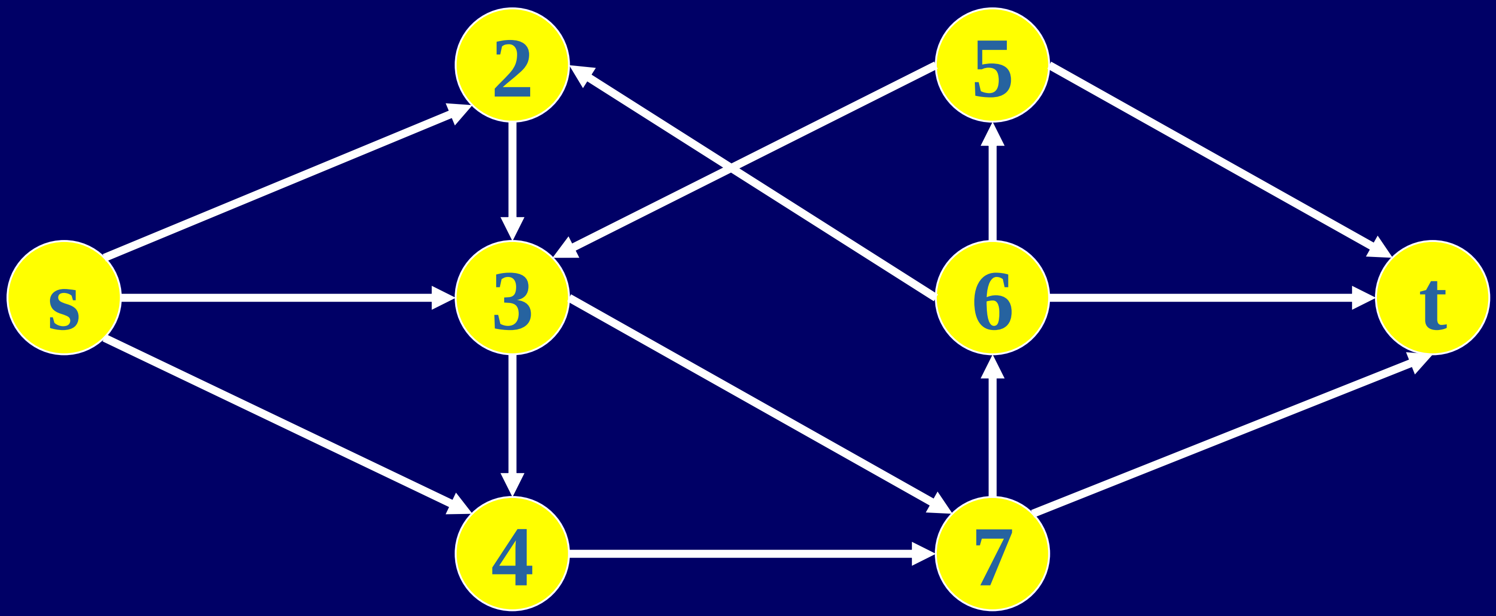
alors **l'équipe 0 est éliminée.**

Propriété : **si l'équipe 0 est éliminée, alors R = les nœuds des équipes du coté source de la coupe-min.**

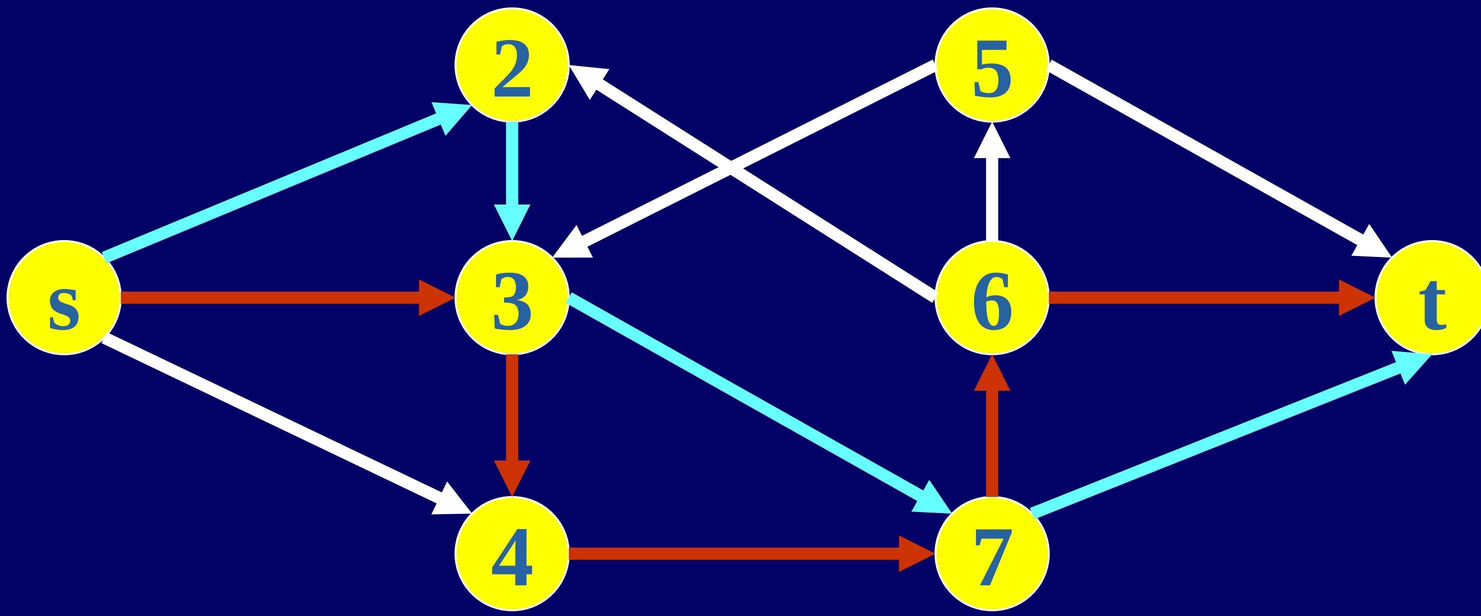
Connexité

Chemins arc-disjoints

- **Problème des chemins arc-disjoints : un graphe orienté G = (V, E) et deux sommets s et t sont donnés, il faut trouver le nombre maximum de chemins arc-disjoints de s vers t.**

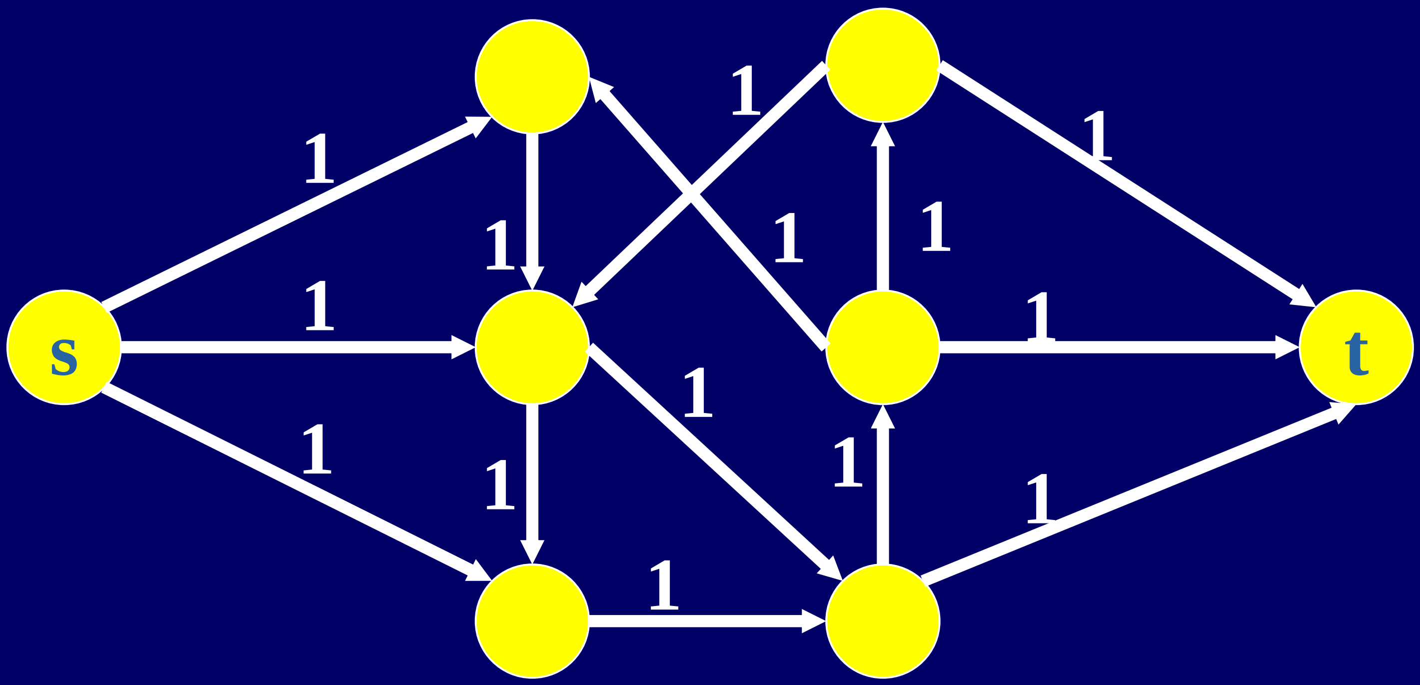


Chemins arc-disjoints



Chemins arc-disjoints

- **Formulation flot maximum : une capacité unité à chaque arc.**



Chemins arc-disjoints

- **Théorème :** Le nombre maximum de chemins arc-disjoints de s vers t est égale au flot max.

- Preuve $\leq$
  - Supposons avoir k chemins arc-disjoints $P_1, \ldots, P_k$.
  - Soit $f(e) = 1$ if e appartient à un chemin P_i ; $f(e) = 0$ sinon.
  - Comme les chemins sont arc-disjoints, f est un flot de valeur k.

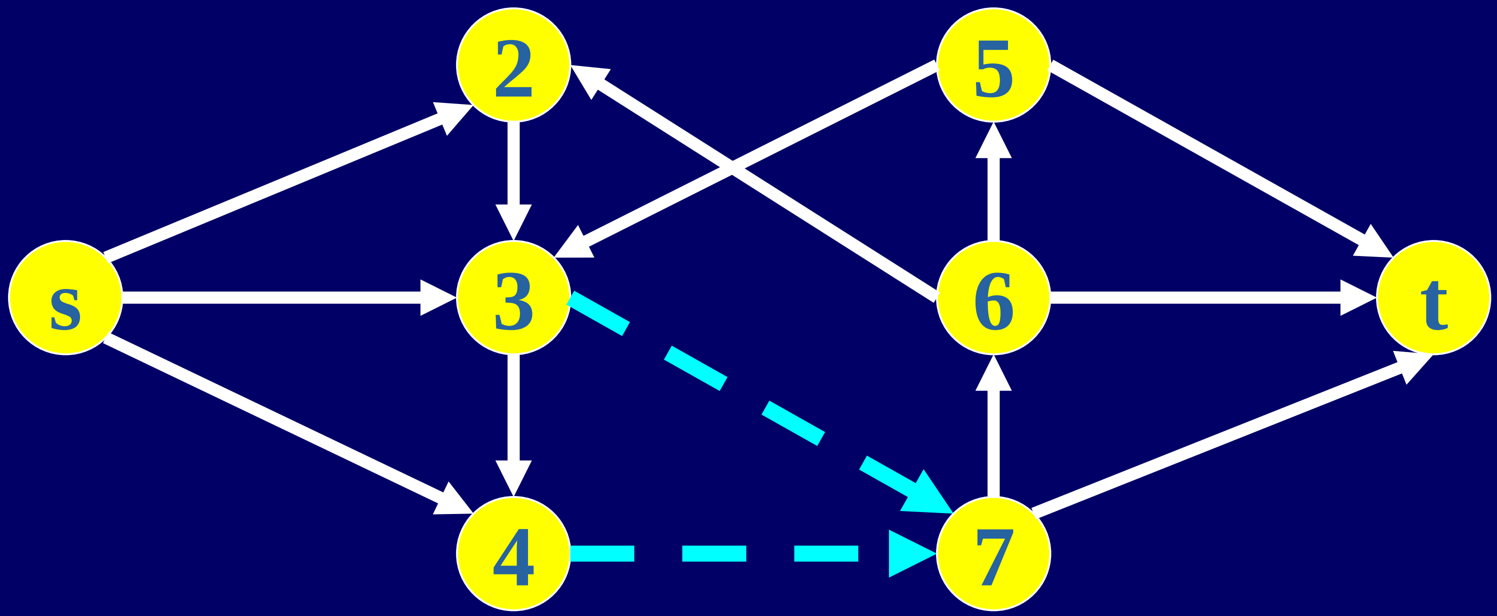
Chemins arc-disjoints

Preuve : ≥

- Supposons que la valeur du flot maximum est k.
- Comme toutes les augmentations sont entières il existe un 0-1 flot de valeur k.
- Considérons un arc (s, u) avec f(s, u) = 1.
  - par conservation, il existe un arc (u, v) avec f(u, v) = 1
  - on continue jusqu'à l'arrivée en t.
- Ainsi nous obtenons k chemins arc-disjoints (pas forcément simples …).

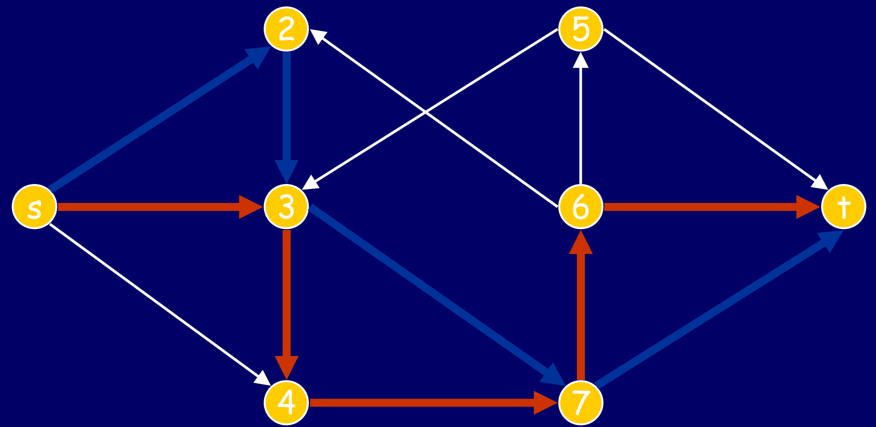
Connectivité

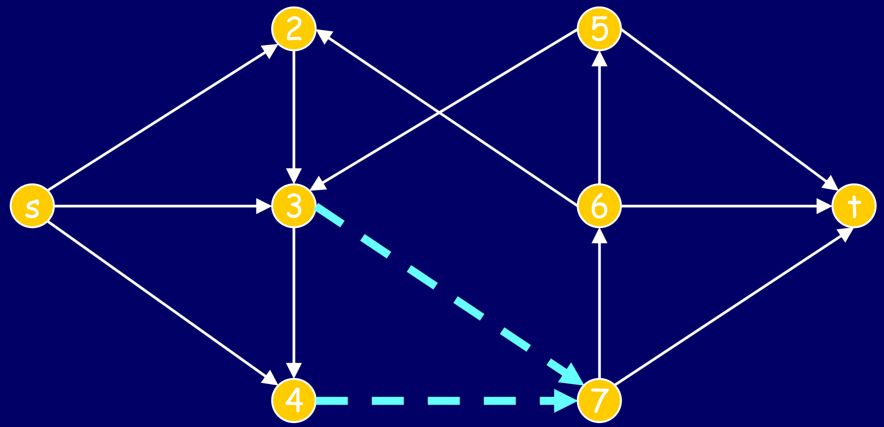
- **Connectivité : étant donné un graphe orienté G = (V, E) et deux sommets s et t, trouver le nombre minimum d'arcs dont la suppression déconnecte t de s.**



Chemins arc-disjoints et Connectivité

Théorème : [Menger 1927] Le nombre maximum de chemins arc-disjoints de s vers t est égal au nombre minimum d'arcs dont la suppression déconnecte t de s.

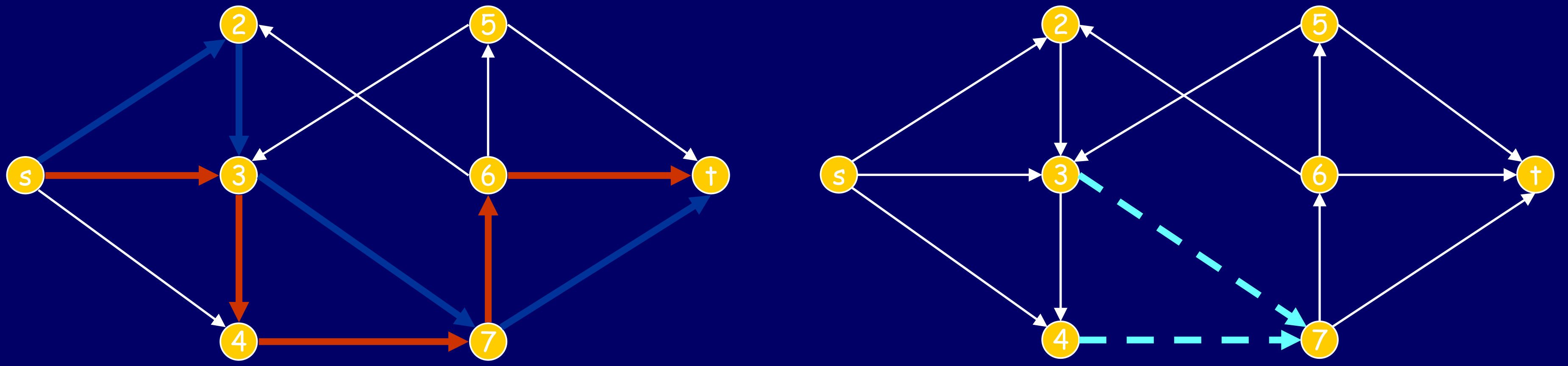




Chemins arc-disjoints et Connectivité

Preuve : ≤

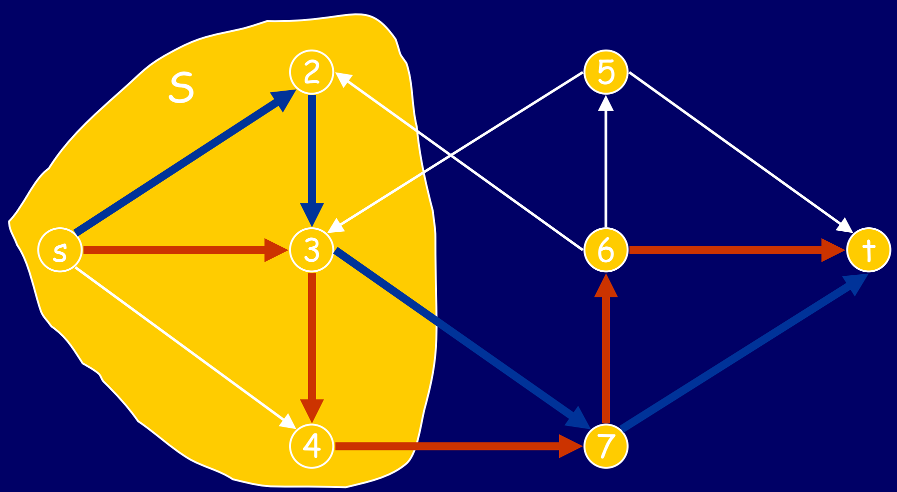
- **Supposons que la suppression de F ⊆ E déconnecte t de s, et |F| = k.**
- **Tous les chemins de s vers t utilisent au moins un arc de F. Ainsi le nombre de chemins est au plus k.**

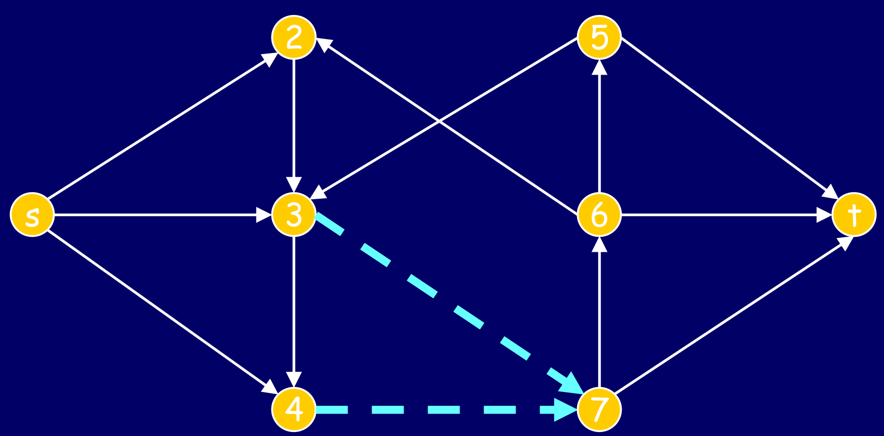


Chemins arc-disjoints et Connectivité

Preuve $\geq$

- **Soit k le nombre maximum de chemins arc-disjoints.**
- **Alors la valeur du flot maximum est k.**
- **Flot-max, coupe-min $\Rightarrow \exists$ coupe $(S,\underline{S})$ de capacité k.**
- **Soit F l'ensemble des arc de S vers $\underline{S}$.**
- **$|F|$ = k et F déconnecte t de s.**





Et si on cherche la connexité du graphe ?

Un graphe est **k-arc-fortement connexe** si pour tout couple de sommets s et t il existent k chemins arc-disjoints de s vers t.

Le pb. est de trouver le plus grand k t.q. le graphe est k-arc-fortement connexe !

Et si on cherche la connexité du graphe ?

Au lieu de tester les n^2 couples il suffit de tester n

En effet, si on a k chemins de x_1 vers x_2 et k chemins de x_2 vers x_3 c'est qu'on a k chemins de x_1 vers x_3

(plus facile à voir sous la forme : la suppression de k-1 arcs laisse un chemin de x_1 vers x_2 et de x_2 vers x_3 donc de x_1 vers x_3.)

Et la sommet-connexité ?

Même problème, sauf qu'il faut chercher des chemins sommet-disjoints au lieu de chemins arc-disjoints !

Dans la pratique, cela revient à mettre une capacité sur les sommets = couper les sommets en deux, avec un sommet arrivée et un sommet départ !

Et si on s’amusait un peu …*

** De gustibus et coloris non est disputandum*

Un pb. d’arrondi de matrice

- Donnée : une matrice $p \times q$ de réels $D = \{d_{ij}\}$, avec sommes des lignes l_i et des colonnes c_j.

- Arrondi consistant : arrondir chaque d_{ij} (vers le haut ou le bas) à des entiers, de manière à ce que les sommes des lignes et des colonnes deviennent des arrondis des sommes originales.

Exemple

1,2	2,2	3,2	6,6
2,8	3,8	4,8	11,4
3,5	4,5	5,5	13,5
7,5	10,5	13,5	

devient

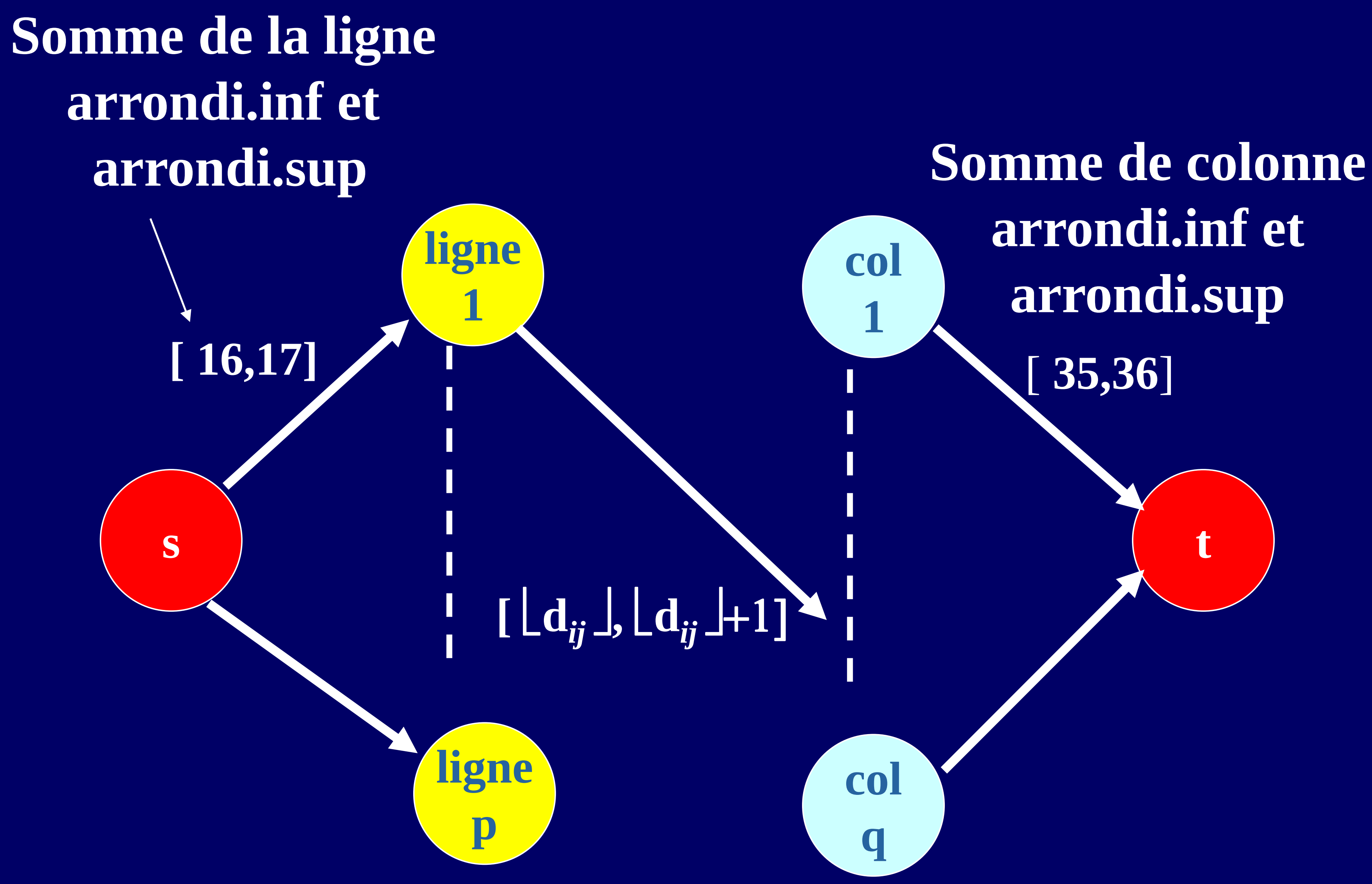
1	2	4	7
3	4	5	12
4	5	5	14
8	11	14	

Un pb. d'arrondi de matrice

- Donnée : une matrice $p \times q$ de réels $D = \{d_{ij}\}$, avec sommes des lignes l_i et des colonnes c_j.

- Arrondi consistant : arrondir chaque d_{ij} (vers le haut ou le bas) à des entiers, de manière à ce que les sommes des lignes et des colonnes deviennent des arrondis des sommes originales.

- Peut être représenté comme un problème de flot avec des bornes inférieures sur les capacités


Somme de la ligne arrondi.inf et arrondi.sup
[16,17]
ligne 1
ligne p
s
$[\lfloor d_{ij} \rfloor, \lfloor d_{ij} \rfloor + 1]$
col 1
col q
Somme de colonne arrondi.inf et arrondi.sup
[35,36]
t

et donc …

Le problème admet une solution

si et seulement si

le réseau ainsi obtenu admet un flot admissible !