Langages, Compilation, Automates.
Partie 2: minimisation, AFI et déterminisation

Florian Bridoux

Polytech Nice Sophia

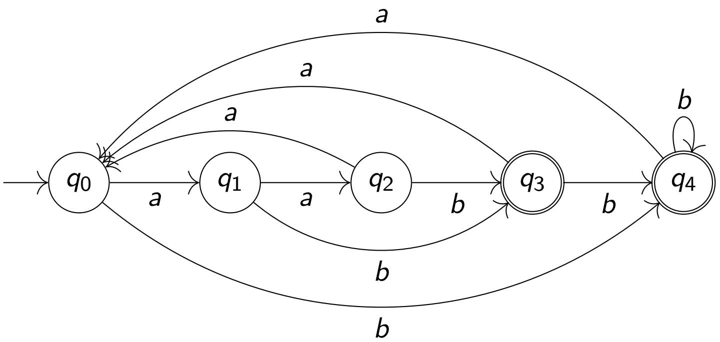
2022-2023

Table des matières

Table des matières

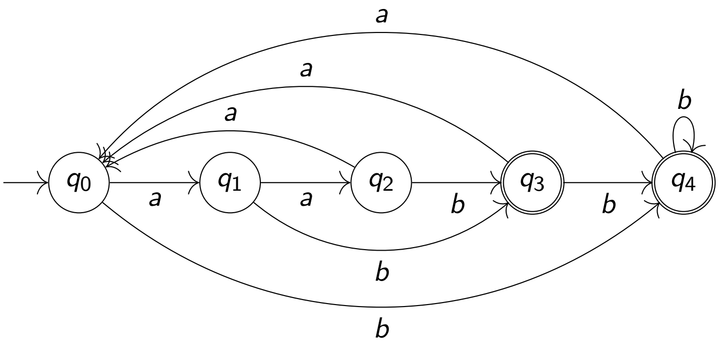
Minimisation d'AFD

Exemple d'AFD non minimisé:



Minimisation d'AFD

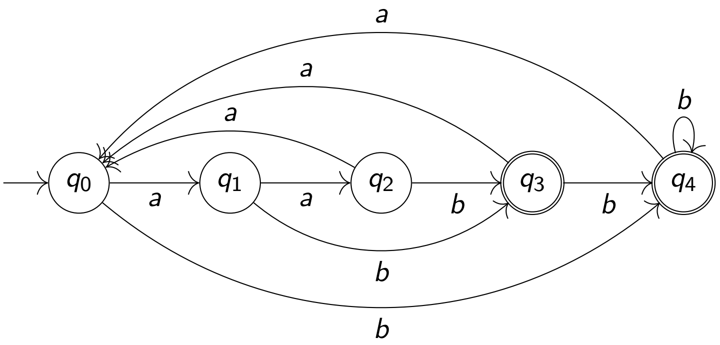
Exemple d'AFD non minimisé:



On remarque que q_3 et q_4 sont des états acceptant, que $\delta(q_3, a) = \delta(q_4, a)$ et que $\delta(q_3, b) = \delta(q_4, b)$.

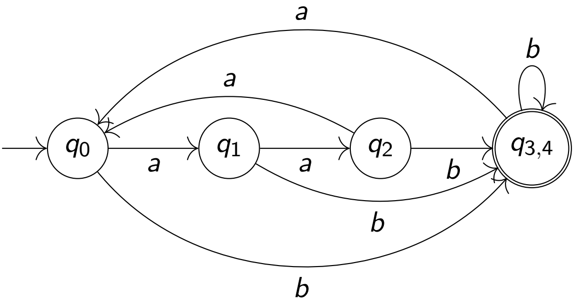
Minimisation d'AFD

Exemple d'AFD non minimisé:

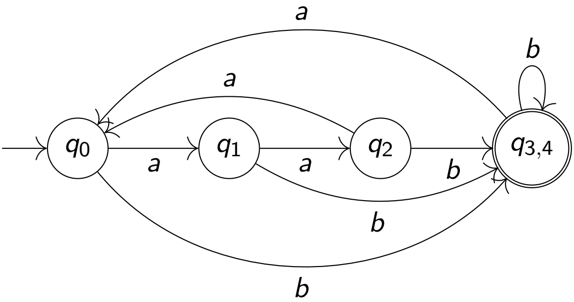


On remarque que q_3 et q_4 sont des états acceptant, que $\delta(q_3, a) = \delta(q_4, a)$ et que $\delta(q_3, b) = \delta(q_4, b)$.
Les deux états sont donc équivalents et on peut donc les fusionner.

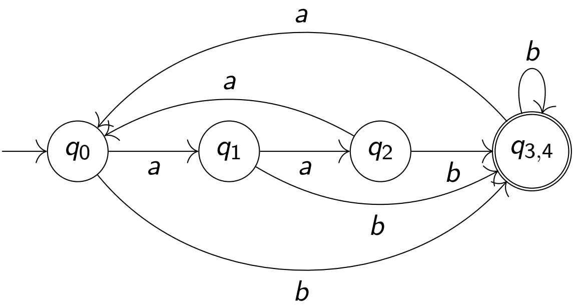
Minimisation d'AFD



Minimisation d'AFD

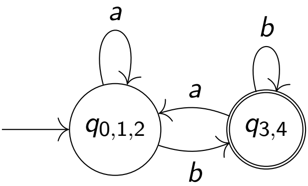


Les états q_0,q_1,q_2 sont non acceptant et $\delta(q_0, b) = \delta(q_1, b) = \delta(q_2, b)$. En revanche, $\delta(q_0, a) \neq \delta(q_1, a) \neq \delta(q_2, a)$.



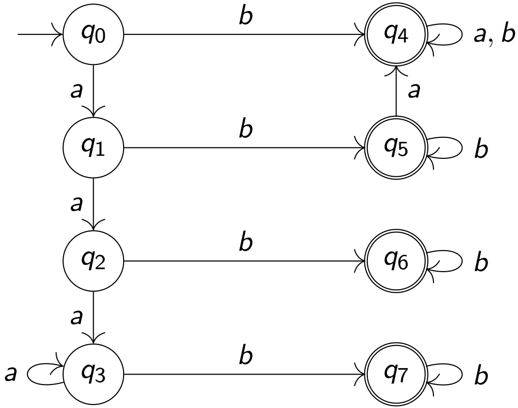
Les états q_0,q_1,q_2 sont non acceptant et $\delta(q_0, b) = \delta(q_1, b) = \delta(q_2, b)$. En revanche, $\delta(q_0, a) \neq \delta(q_1, a) \neq \delta(q_2, a)$.
Mais comme $\delta(q_0, a), \delta(q_1, a), \delta(q_2, a) \in \{q_0, q_1, q_2\}$, les 3 états sont équivalents et on peut donc les fusionner.

Minimisation d'AFD



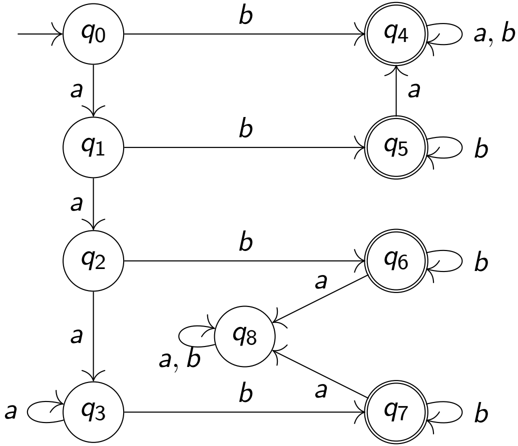
Cette AFD a deux états: un acceptant et l'autre non acceptant. Il est donc minimum.

Algorithme de minimisation.



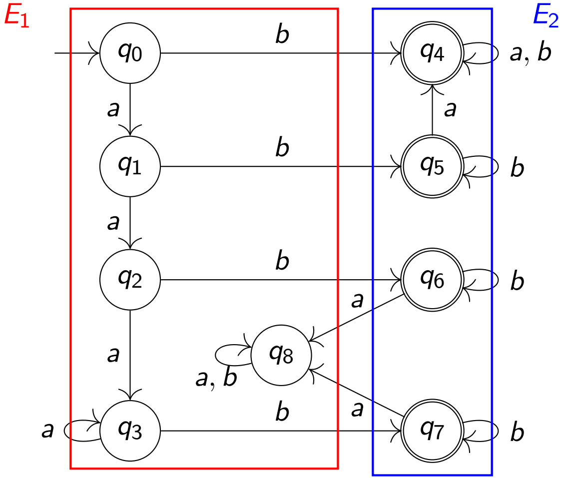
Idée: on va partitionner les états en ensemble d'états qui doivent être fusionnés.

Algorithme de minimisation.



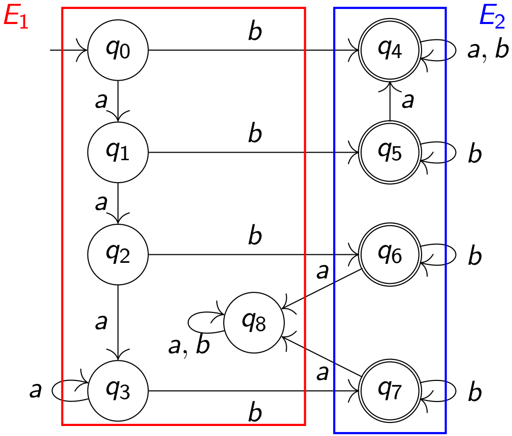
Étape préliminaire: On complète l'automate.

Algorithme de minimisation.



Première étapes: on partitionne en deux groupe: les acceptant et les non acceptant.

Algorithme de minimisation.



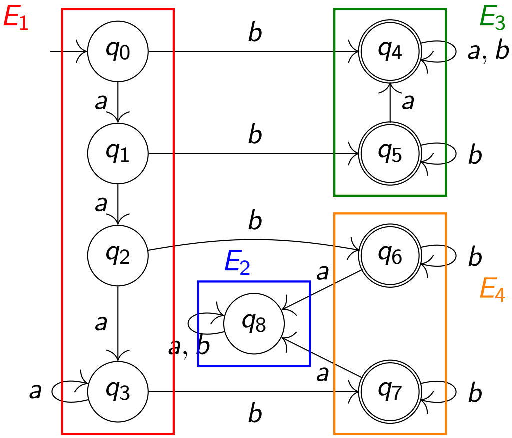
E_1 :

	a	b
q_0	E_1	E_2
q_1	E_1	E_2
q_2	E_1	E_2
q_3	E_1	E_2
q_8	E_1	E_1

E_2 :

	a	b
q_4	E_2	E_2
q_5	E_2	E_2
q_6	E_1	E_2
q_7	E_1	E_2

On voit $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ et $\{q_8\}$ ne peuvent pas être fusionnés.
Même chose pour $\{q_4, q_5\}$ et $\{q_6, q_7\}$.



E_1 :

	a	b
q_0	E_1	E_3
q_1	E_1	E_3
q_2	E_1	E_4
q_3	E_1	E_4

E_2 : tout seul

E_3 :

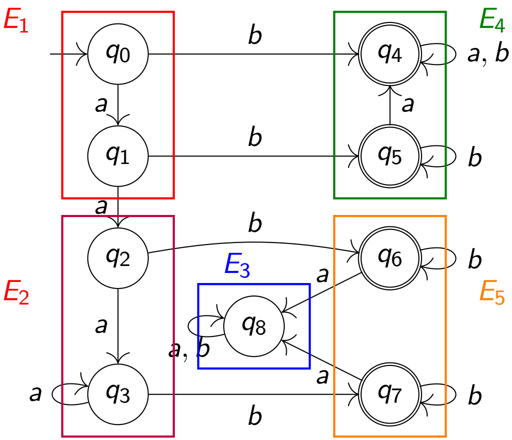
	a	b
q_4	E_3	E_3
q_5	E_3	E_3

E_4 :

	a	b
q_6	E_2	E_4
q_7	E_2	E_4

On voit $\{q_0, q_1\}$ et $\{q_2, q_3\}$ ne peuvent pas être fusionnés.

Algorithme de minimisation.



E_1 :

	a	b
q_0	E_1	E_4
q_1	E_2	E_4

E_2 :

	a	b
q_2	E_2	E_5
q_3	E_2	E_5

E_3 :tout seul

E_4 :

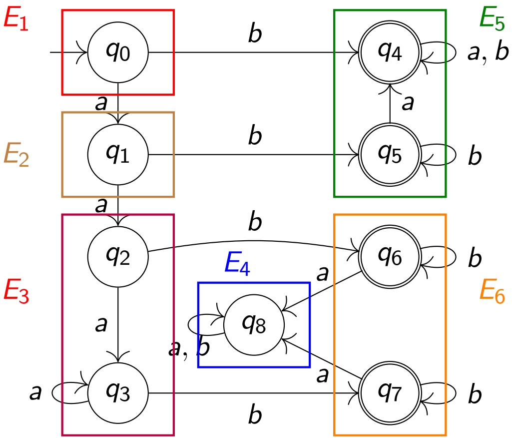
	a	b
q_4	E_4	E_4
q_5	E_4	E_4

E_5 :

	a	b
q_6	E_3	E_5
q_7	E_3	E_5

On voit q_0 et q_1 ne peuvent pas être fusionnés.

Algorithme de minimisation.



E_1 : tout seul

E_2 : tout seul

E_3 :

	a	b
q_2	E_3	E_6
q_3	E_3	E_6

E_4 :tout seul

E_5 :

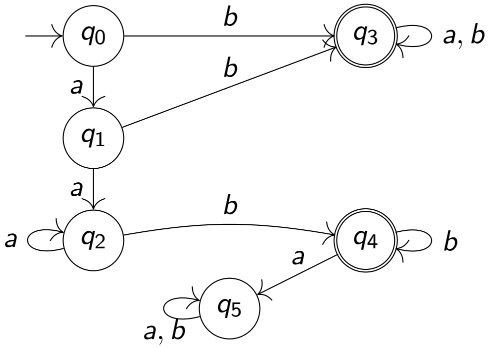
	a	b
q_4	E_5	E_5
q_5	E_5	E_5

E_6 :

	a	b
q_6	E_4	E_6
q_7	E_4	E_6

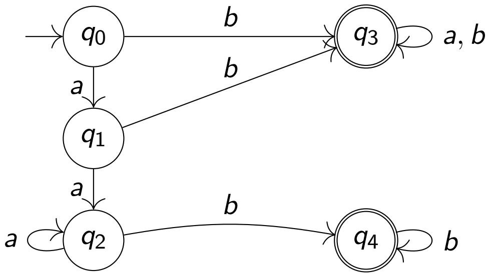
Pas de contradiction: on peut fusionner tous les états qui sont dans un même ensemble.

Algorithme de minimisation.



On obtient l'AFD complet ci-dessus.

Algorithme de minimisation.



Si on le souhaite on peut alors retirer l'état poubelle.

Minimisation d'AFD

Théorème

Le résultat de l'algorithme de minimisation sur un AFD A est le plus petit AFD C tel que $L(C) = L(A)$ (le plus petit étant unique à un renommage des états près).

Traduction: l'algorithme de minimisation nous donne le résultat optimal (qui est unique).

Corollaire

Soit deux AFD A et B avec $L(A) = L(B)$. L'algorithme de minimisation va donner le même AFD C comme résultat pour A et pour B (à un renommage des états près).

Cet algorithme nous donne donc un moyen de vérifier si deux AFD reconnaissent le même langage.

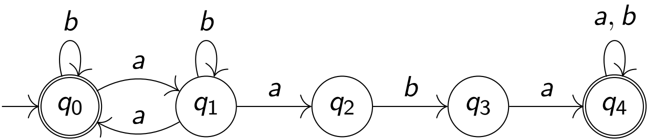
Table des matières

Automates finis indéterministes (AFI)

Definition (Automate fini indéterministe (AFI))

Un **automate fini indéterministe (AFI)** est un quintuplet $(\Sigma, Q, \delta, Q_0, F)$ où:

- Σ est un alphabet,
- Q est un ensemble **fini** d'états,
- δ est une fonction $Q \times \Sigma \to P(Q)$ (où $P(Q)$ est l'ensemble des sous-ensembles de Q),
- $Q_0 \subseteq Q$ est l'ensemble des états initiaux,
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états d'acceptation.

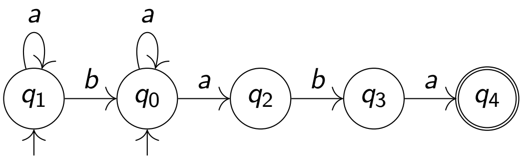


Automates finis indéterministes (AFI)

Similairement à un AFD, un AFI A est une machine qui calcule si un mot w appartient au langage $L(A)$ défini par cet automate. La différence est que certaines transitions sont non déterministes: on peut se retrouver dans différents états en ayant lu un même mot.

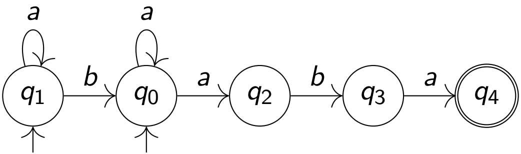
- Premier choix: dans quel état initial $q_0 \in Q_0$ commencer?
- À chaque lettre ℓ lu (dans un état q_i): vers quel état $q_j \in \delta(q_i, \ell)$ transitionner?
- Si une série de choix permet de finir dans un état acceptant alors $w \in L(A)$, sinon $w \notin L(A)$.

Automates finis indéterministes (AFI)

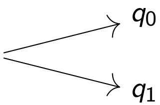


Exécution de la machine sur le mot *ababa*:

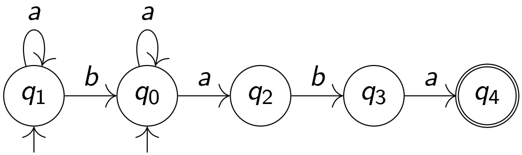
Automates finis indéterministes (AFI)



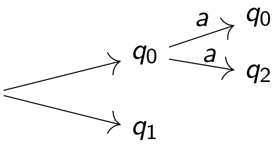
Exécution de la machine sur le mot *ababa*:



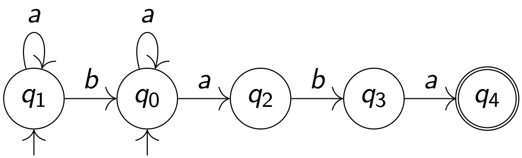
Automates finis indéterministes (AFI)



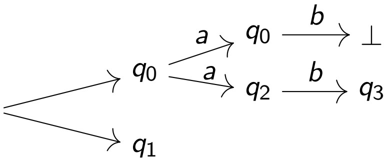
Exécution de la machine sur le mot *ababa*:



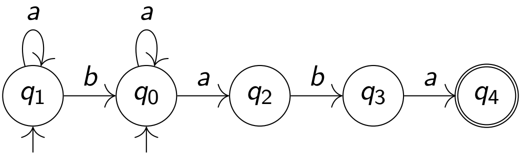
Automates finis indéterministes (AFI)



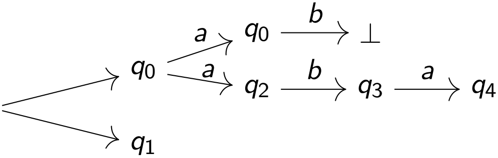
Exécution de la machine sur le mot *ababa*:



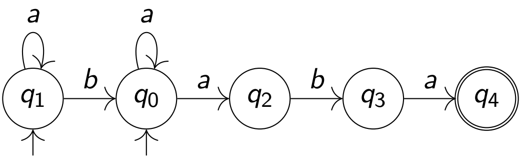
Automates finis indéterministes (AFI)



Exécution de la machine sur le mot *ababa*:



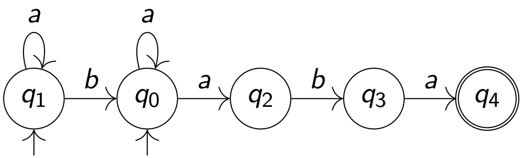
Automates finis indéterministes (AFI)



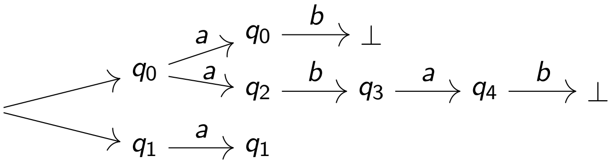
Exécution de la machine sur le mot *ababa*:

$$
\begin{tikzcd}
{} & {} & q_0 \arrow[r, "b"] & \perp \\
{} & q_0 \arrow[ur, "a"] \arrow[r, "a"] & q_2 \arrow[r, "b"] & q_3 \arrow[r, "a"] & q_4 \arrow[r, "b"] & \perp \\
{} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
{} & q_1 & & & &
\end{tikzcd}
$$

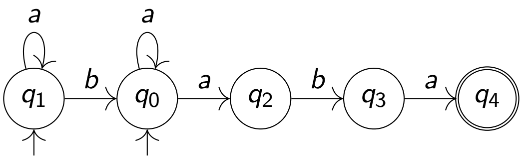
Automates finis indéterministes (AFI)



Exécution de la machine sur le mot *ababa*:



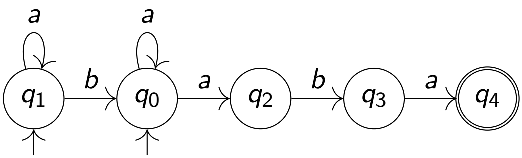
Automates finis indéterministes (AFI)



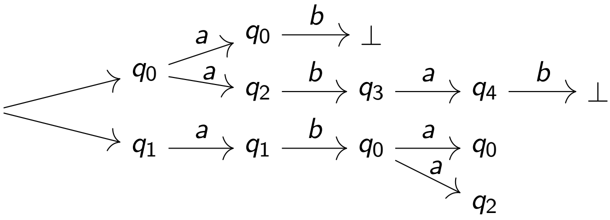
Exécution de la machine sur le mot *ababa*:

$$\begin{tikzcd}
 & & q_0 \arrow[r, "b"] & \bot & & \\
 & q_0 \arrow[ur, "a"] \arrow[r, "a"'] & q_2 \arrow[r, "b"] & q_3 \arrow[r, "a"] & q_4 \arrow[r, "b"] & \bot \\
{} \arrow[ur] \arrow[r] & q_1 \arrow[r, "a"] & q_1 \arrow[r, "b"] & q_0 & &
\end{tikzcd}$$

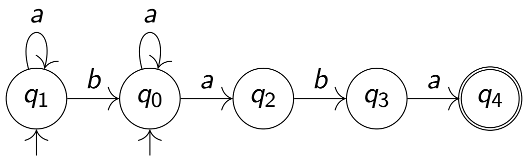
Automates finis indéterministes (AFI)



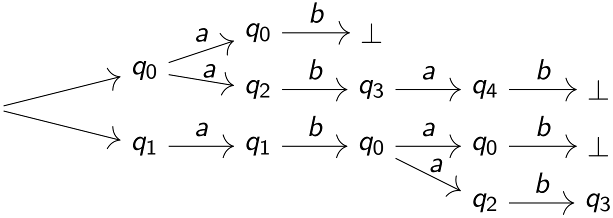
Exécution de la machine sur le mot *ababa*:



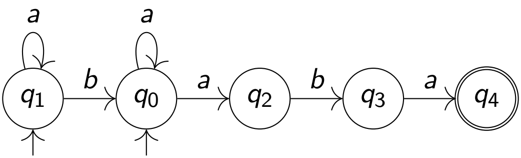
Automates finis indéterministes (AFI)



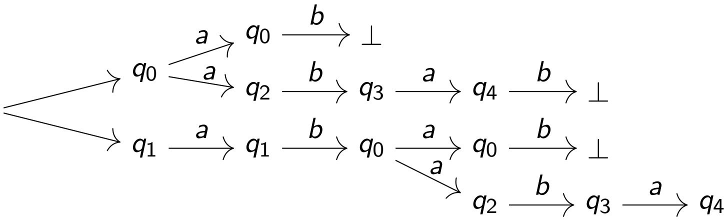
Exécution de la machine sur le mot *ababa*:

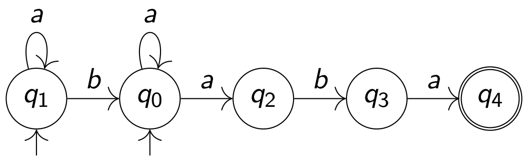


Automates finis indéterministes (AFI)

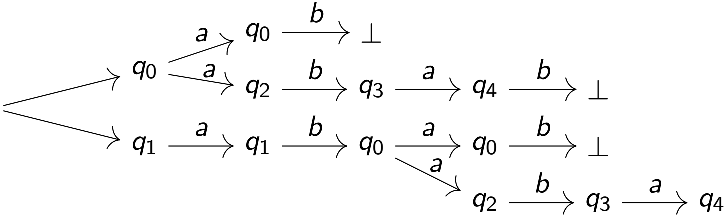


Exécution de la machine sur le mot *ababa*:





Exécution de la machine sur le mot *ababa*:



La machine peut finir dans l'état acceptant q_4 donc *ababa* $\in L(A)$.

Table des matières

Déterminisation d'AFI

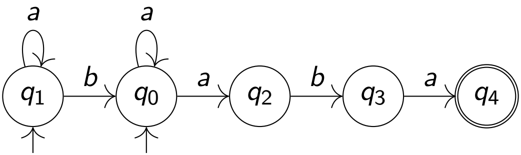
Théorème

Les AFI reconnaissent exactement la même famille de langages que les AFD (les langages rationnels).

On le prouve en donnant un algorithme pour transformer un AFI A en AFD B (avec plus d'états) tel que $L(A) = L(B)$.

Déterminisation d'AFI

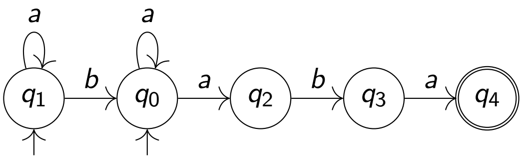
Nous allons déterminiser cette AFI:



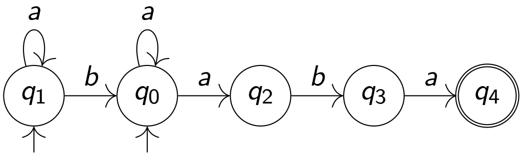
Idée de l'algorithme de déterminisation:

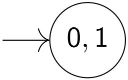
- Chaque état de l'AFD va représenter un sous ensemble d'états de l'AFI.
- Après avoir lu un mot w: l'AFI peut se trouver dans l'état q_i $\Leftrightarrow$ l'AFD se trouve dans un état Q_j tel que $q_i \in Q_j$.
- En particulier, l'état initial de l'AFD est l'ensemble des états initiaux de l'AFI.
- Et un état Q_j de l'AFD est acceptant ssi $\exists q_i \in Q_j$ tel que q_i est acceptant.

Déterminisation d'AFI

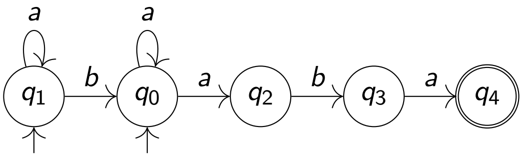


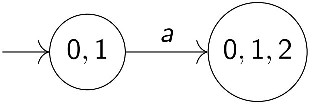
Déterminisation d'AFI



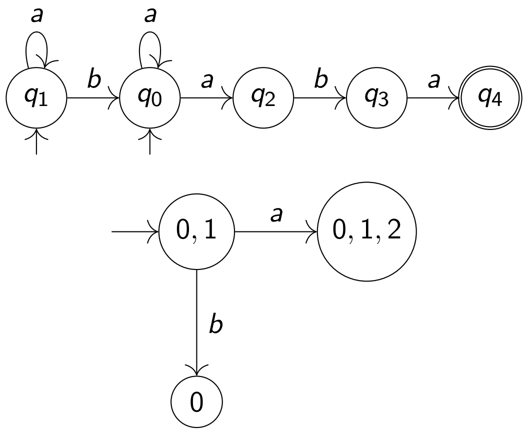


Déterminisation d'AFI

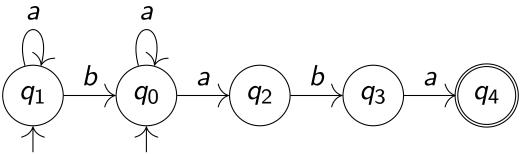


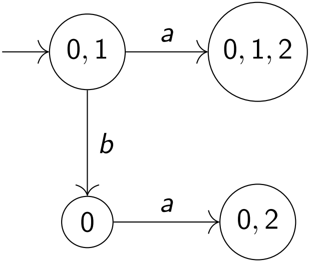


Déterminisation d'AFI

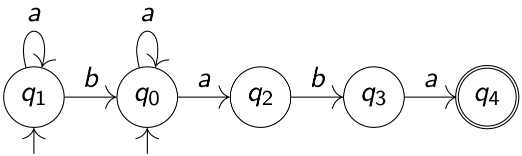


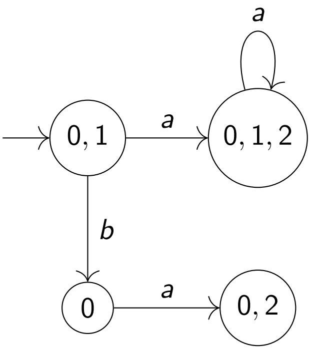
Déterminisation d'AFI



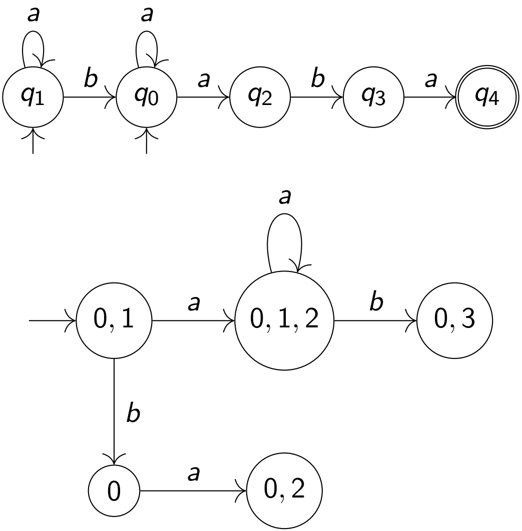


Déterminisation d'AFI

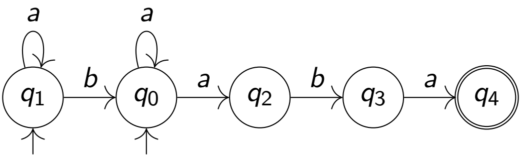


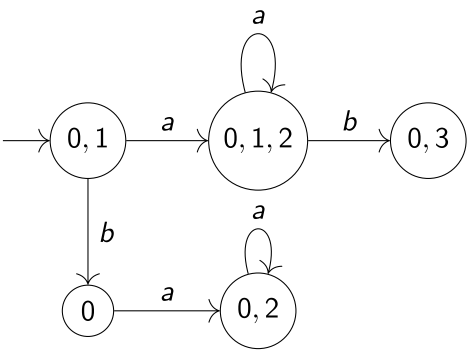


Déterminisation d'AFI

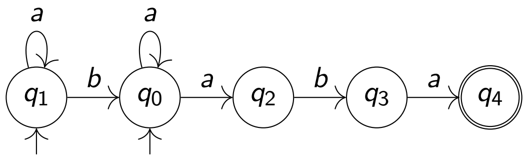


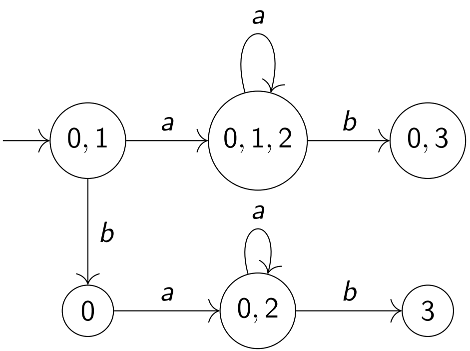
Déterminisation d'AFI



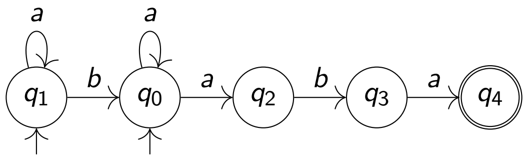


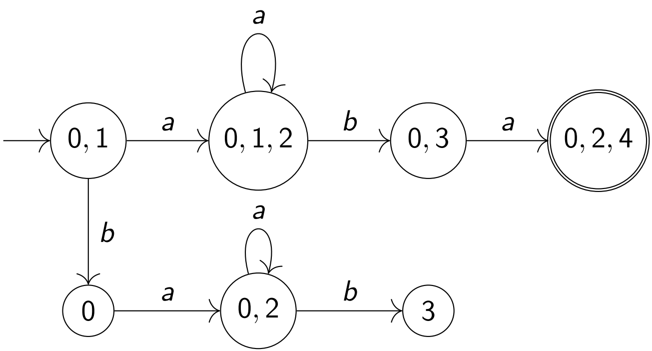
Déterminisation d'AFI



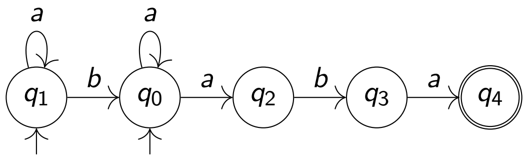


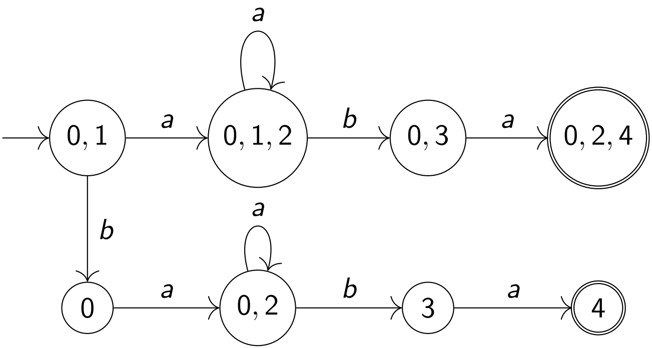
Déterminisation d'AFI



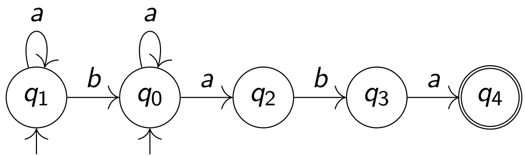


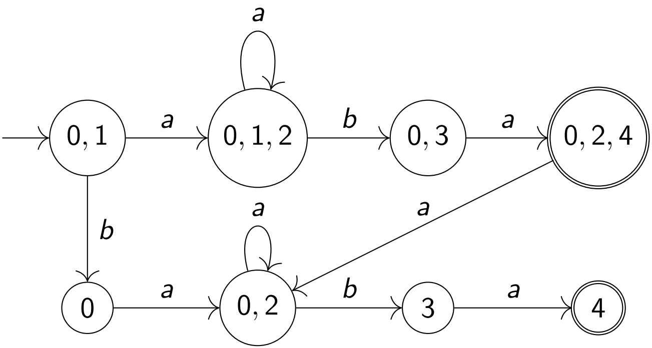
Déterminisation d'AFI



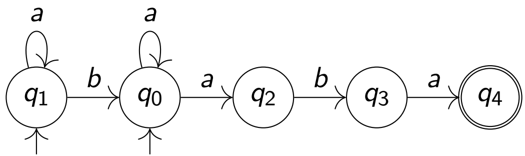


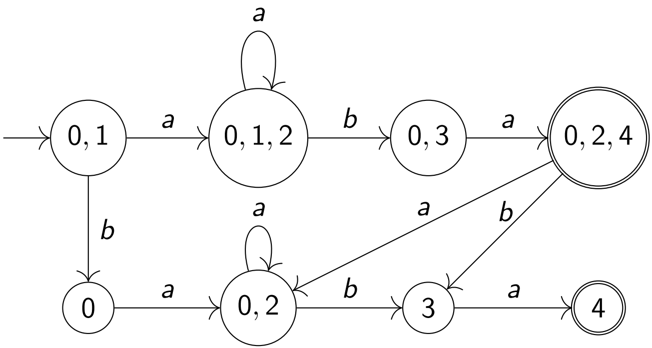
Déterminisation d'AFI





Déterminisation d'AFI





Déterminisation d'AFI

Théorème

Soit A un AFI à $|Q|$ états, alors on peut construire B un AFD à au plus **?** états tel que $L(A) = L(B)$.

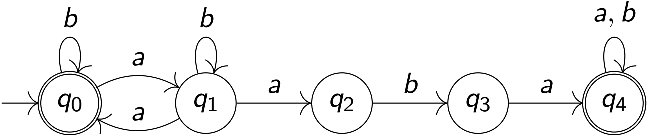
Déterminisation d'AFI

Théorème

Soit A un AFI à $|Q|$ états, alors on peut construire B un AFD à au plus $2^{|Q|}$ états tel que $L(A) = L(B)$.

Conclusion: On peut toujours déterminiser un AFI, mais le nombre d'états peut augmenter exponentiellement...

Déterminisation d'AFI



Exercice

Déterminiser l'AFI ci-dessus.

Exercice

Minimiser l'AFD obtenu.