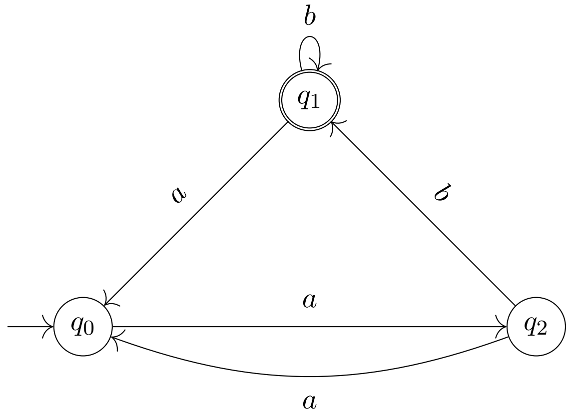
TD 01 – Automates finis déterministes

Exercice 1. *Exécuter un AFD*

On considère l'AFD A suivant sur l'alphabet $\{a, b\}$:



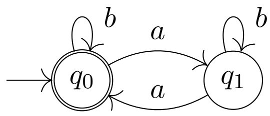
1. Donner explicitement le quintuplet qui défini A.
2. Donner la liste des transitions prises par A pour les mots $aaabbaab$ et $aabaaab$ et indiquer si ces mots sont acceptés.
3. Donner la liste des mots de Σ^3 (avec $\Sigma = \{a, b\}$) qui sont acceptés par l'automate.
4. Dans votre langage de programmation préféré, écrire une fonction booléenne qui prend en entrée une chaîne de caractère w (un mot) et renvoi vrai si et seulement si $w \in L(A)$ (= w est accepté par l'AFD A).
5. Quel est la complexité en temps et en espace de votre algorithme ? D'une manière plus générale, quelle est la complexité en temps et en espace de reconnaître si un mot w appartient à un langage rationnel L donné ?

Exercice 2. *Concevoir un AFD*

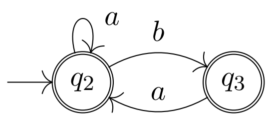
1. Écrire un AFD qui reconnaît l'ensemble des entiers "bien formés" en binaire :
   $0, 1, 10, 11, 100, 101, \ldots$
2. Écrire un AFD qui reconnaît le langage des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ qui contiennent le facteur $abaa$.
3. Écrire un AFD qui reconnaît le langage $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|\%3 = 0\}$ avec $\Sigma = \{a\}$.
4. Écrire un AFD qui reconnaît l'ensemble des nombres écrit sur l'alphabet décimal $\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9\}$ qui sont multiples de 3. **Remarque : un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.**

Exercice 3. *Unions et intersections de langages rationnels*

1. Considérons les deux AFD suivants sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.
   L'AFD A :



   L'AFD B :



2. Donner la liste des transitions prises par A et B pour les mots $abba$, $abab$, $baaa$ et $babb$ et indiquer si ces mots sont acceptés ou refusés par A et B.
3. Expliciter les langages $L(A)$ et $L(B)$.
4. À l'aide d'un nouvel état q_4, complétez l'AFD B. On appellera B' le nouvel AFD.
5. Notons
   — $A = (\Sigma, Q_A = \{q_0, q_1\}, \delta_A, q_A = q_0, F_A = \{q_0\})$ et
   — $B' = (\Sigma, Q_B = \{q_2, q_3, q_4\}, \delta_B, q_B = q_2, F_B = \{q_2, q_3\})$.
   Dessinez un nouvel AFD $C = (\Sigma, Q_C, \delta_C, q_C, F_C)$ avec les propriétés suivantes :
   — $Q_C = Q_A \times Q_B = \{(q_0, q_2), (q_0, q_3), \ldots, \}$.
   — $\delta_C((q_i, q_j), \ell) = (\delta_A(q_i, \ell), \delta_B(q_j, \ell))$.
   Par exemple, $\delta_C((q_0, q_2), a) = (q_1, q_2)$ car $\delta_A(q_0, a) = q_1$ et $\delta_B(q_2, a) = q_2$.
   — $q_C = (q_A, q_B)$
   — $(q_i, q_j) \in F_C$ si et seulement si $q_i \in F_A$ et $q_j \in F_B$.
6. Donner la liste des transitions prises par C pour les mots $abba$, $abab$, $baaa$ et $babb$ et indiquer si ces mots sont acceptés par C.
7. Expliciter les langages $L(C)$.
8. Que peut-on dire sur l'intersection de deux langages rationnels ? Sur l'union de deux langages rationnels ?
9. Que peut-on dire sur la rationalité d'un langage fini ?