

Informatique Théorique

Informatique Théorique 4

(MAM3-SI3)

October 23, 2017

1 Deux propositions

On considère une logique du premier ordre dont les seuls prédicats sont les deux propositions P et Q (pas de variables, pas de fonction) . Le but de l'exercice est de montrer que toute formule peut s'écrire en forme normale disjonctive en utilisant au plus 3 connecteurs logiques binaires (forcement des \wedge et des \vee)

1. Toute formule pouvant être ici assimilée à sa table de vérité, combien de formules différentes devez vous considérer ?
2. La manière la plus simple d'obtenir une forme normale disjonctive pour la formule est de dire que chaque ligne de la table où la formule est vrai (minterm) correspond à un \wedge et de faire un \vee de toutes les lignes où la formule est vraie, par exemple, la formule dont la table de vérité est

P	Q	Φ
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	1

correspond à $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$. C'est ce qu'on appelle la forme canonique disjonctive.

Pouvez vous faire mieux pour cet exemple ?

3. Si vous utilisez ces formes canoniques, quelles sont les tables de vérité pour lesquelles vous obtenez une solution avec plus de trois connecteurs logiques ?
4. Pour chacune de ces tables , donner une solution avec au plus trois connecteurs logiques binaires.
5. De combien de connecteurs logiques binaires avez vous besoin pour exprimer le xor ?
6. Pouvez vous en déduire que dans ce cadre, on peut aussi écrire toute formule en forme normale conjonctive avec au plus trois connecteurs logiques binaires?

-
1. 16, car 4 lignes chacune d'elle étant vrai ou fausse
 2. Oui, c'est équivalent à $\neg Q$.
 3. Celles comportant au moins trois un dans la dernière colonne, il y en a donc 5.

4.

P	Q	Φ
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

 correspond à $P \vee (\neg P \wedge Q)$

P	Q	Φ
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

 correspond à $P \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

P	Q	Φ
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

correspond à $\neg P \vee (P \wedge Q)$

P	Q	Φ
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

correspond à $\neg P \vee (P \wedge \neg Q)$

P	Q	Φ
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

correspond à $\neg P \vee P$

P	Q	Φ
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

5. . correspond à $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ et ne peut pas se simplifier. C'est en fait la seule

formule qui nécessite trois connecteurs

6. oui, car si Φ est une formule, il en est de même de $\Phi' = \neg\Phi$. On obtient une forme normale conjonctive pour Φ , en niant une forme normale disjonctive de Φ' .

2 Simplification "à la main"

Simplifier les formules suivantes

- $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$
- $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$
- $(\neg A \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge \neg D)$

- B
- $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg C)$ ou $A \wedge (B \vee \neg C)$
- $(\neg A \wedge \neg C) \vee (A \wedge B)$ en montrant que $(\neg C \vee D \vee (C \wedge \neg D))$ est universellement valide

3 Algorithme de Quine Mc Cluskey

- Lister tous les minterms de f dans une table en les convertissant en mots de $\{0, 1\}^*$
- Les grouper selon leur poids, c'est à dire par le nombre de 1 dans chaque minterm
- Unir les termes deux à deux, c'est à dire :
 - Comparer les termes d'un groupe avec ceux du groupe adjacent pour essayer de les combiner
 - Créer une nouvelle table avec les combinaisons trouvées : $0100 + 0101 = 010-$
 - Rayer chaque terme utilisé pour la combinaison et passer à la table suivante
- Répéter l'étape (3) autant de fois que c'est possible
- Identifier les impliquants premiers (qui correspondent aux termes non rayés)
- Identifier les impliquants premiers essentiels
- Vérifier si la fonction est entièrement exprimée par ses impliquants essentiels, auquel cas arrêter

8. Si on n'a pas fini à l'étape (7), choisir les impliquants premiers appropriés

Utilisez cet algorithme pour simplifier les fonctions logiques suivantes exprimées sous la forme d'une somme (représentant des \vee) de produits logiques (représentant des \wedge) des variables a,b,c,d,e éventuellement niées, et toujours dans le même ordre. Chaque produit logique est représenté par la valeur en base 10 de l'écriture binaire correspondante, par exemple a.b.c.d est identifié à 1111 puis à l'entier quinze, tandis que $\neg a \neg b \neg c d$ est identifié à 0001 puis à l'entier 1

1. $F_1 = \Sigma(0, 2, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15)$ plusieurs solutions sont possibles
2. $F_2 = \Sigma(0, 1, 2, 3, 7, 14, 15, 22, 23, 29, 31)$ une seule solution possible
3. $F_3 = \Sigma(0, 1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15)$ plusieurs solutions sont possibles

1. $F_1 = \Sigma(0, 2, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15)$

(a) Etapes 1 et 2

poids	minterm	
0	0000	0
1	0010 1000	2 8
2	0101 0110 1010 1100	5 6 10 12
3	0111 1101 1110	7 13 14
4	1111	15

(b) Etape 3

poids	minterm		union	minterm
0	0000	0	0,2 0,8	00x0 x000
1	0010 1000	2 8	2,6 2,10 8,10 8,12	0x10 x010 10x0 1x00
2	0101 0110 1010 1100	5 6 10 12	5,7 5,13 6,7 6,14 10,14 12,13 12,14	01x1 x101 011x x110 1x10 110x 11x0
3	0111 1101 1110	7 13 14	7,15 13,15 13,14	x111 11x1 111x
4	1111	15		

(c) On recommence l'Etape 3

union	minterm	union	minterm
0,2 0,8	00x0 x000	0,2,8,10	x0x0
2,6 2,10 8,10 8,12	0x10 x010 10x0 1x00	2,6,10,14	xx10
5,7 5,13 6,7 6,14 10,14 12,13 12,14	01x1 x101 011x x110 1x10 110x 11x0	8,10,12,14	1xx0
7,15 13,15 13,14	x111 11x1 111x	5,7,13,15	x1x1
		6,7,14,15	x11x
		12,13,14,15	11xx

(d) On essaye de réitérer l'Etape 3	union	minterm	et l'on s'aperçoit que c'est impossible
	0,2,8,10	x0x0	
	2,6,10,14	xx10	
	8,10,12,14	1xx0	
	5,7,13,15	x1x1	
	6,7,14,15	x11x	
	12,13,14,15	11xx	

(e) Les impliquants premiers sont donc x0x0, xx10, x1x1, x11x et 11xx

(f) On doit maintenant identifier les impliquants premiers essentiels

	0000	0010	1000	0101	0110	1010	1100	0111	1101	1110	1111
x0x0	(x)	x	x			x					
xx10		x			x	x				x	
1xx0			x			x	x			x	
x1x1				(x)				x	x		x
x11x					x			x		x	x
11xx							x		x	x	x

Les impliquants premiers essentiels sont donc x0x0 et x1x1

(g) Ils ne couvrent pas tout, reste

	0110	1100	1110
xx10	x		x
1xx0		x	x
x11x	x		x
11xx		x	x

Aucun impliquant premier ne couvre les 4 midterms restant , il faut donc en prendre deux de plus. On a 4 solutions :

- x0x0+x1x1+11xx + x11x
- x0x0+x1x1+1xx0 + xx10
- x0x0+x1x1+11xx + xx10
- x0x0+x1x1+1xx0 + x11x

2. $F_2 = \Sigma(0, 1, 2, 3, 7, 14, 15, 22, 23, 29, 31)$

(a) etapes 1 et 2	poids	minterm	
	0	00000	0
	1	00001	1
		00010	2
	2	00011	3
	3	00111	7
		01110	14
		10110	22
	4	01111	15
		10110	23
		11101	29
	5	11111	31

(b) Etape 3	poids	minterm		poids	minterm
	0	00000	0	0,1	0000x
	1	00000	1	0,2	000x0
		00010	2	1,3	000x1
	2	00011	3	2,3	0001x
		00111	7	3,7	00x11
	3	00111	14	7,15	0x111
		01110	22	7,23	x0111
		10110	23	14,15	0111x
	4	01111	29	22,23	1011x
		10110	29	15,31	x1111
	5	11111	31	23,31	1x111
				29,31	111x1

(c) On réitère l'étape 3	poids	minterm		poids	minterm
	0,1	0000x			
	0,2	000x0			
	1,3	000x1			
	2,3	0001x			
	3,7	00x11			
	7,15	0x111			
	7,23	x0111			
	14,15	0111x			
	22,23	1011x			
	15,31	x1111			
	23,31	1x111			
	29,31	111x1			

3. On ne peut pas réitérer, les impliquants premiers sont 00x11, 0111x,1011x, 111x1, 000xx et xx111

4. On cherche les impliquants premiers essentiels

	00000	00001	00010	00011	00111	01110	01111	10110	10111	11101	11111
000xx	(x)	(x)	(x)	x							
xx111					x		x		x		x
00x11				x	x						
0111x						(x)	x				
1011x							x	(x)			
111x1										(x)	x

On a trouvé 4 impliquants premiers essentiels 000xx,0111x,1011x et 111x1

5. on regarde ce qui n'est pas couvert

	00111	10111
xx111	x	x
00x11	x	

On en déduit que la seule solution minimale est 000xx+0111x+1011x+111x1+xx111

6. $F_3 = \Sigma(0, 1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15)$

(a) Etapes 1 et 2	poids	minterm	
	0	0000	0
	1	0001	1
		0010	2
	2	0101	5
		0110	6
		1001	9
		1010	10
	3	0111	7
		1011	11
		1101	13
		1110	14
	4	1111	15

(b) Etape 3

poids	minterm		union	midterm
0	0000	0	0,1 0,2	000x 00x0
1	0001 0010	1 2	1,5 1,9 2,6 2,10	0x01 x001 0x10 x010
2	0101 0110 1001 1010	5 6 9 10	5,7 5,13 6,7 6,14	01x1 x101 011x x110
3	0111 1011 1101 1110	7 11 13 14	9,11 9,13 10,11 10,14	10x1 1x01 101x 1x10
4	1111	15	7,15 11,15 13,15 14,15	x111 1x11 11x1 111x

(c) On réitère l'étape 3

union	midterm	union	midterm
0,1 0,2	000x 00x0	1,5,9,13 2,6,10,14	xx01 xx10
1,5 1,9 2,6 2,10	0x01 x001 0x10 x010	5,7,13,15 6,7,14,15 9,11,13,15 10,11,14,15	x1x1 x11x 1xx1 1x1x
5,7 5,13 6,7 6,14 9,11 9,13 10,11 10,14	01x1 x101 011x x110 10x1 1x01 101x 1x10		
7,15 11,15 13,15 14,15	x111 1x11 11x1 111x		

(d) On essaye de réitérer, c'est impossible

union	midterm	numéro
15 et 24 17 et 26	xx01 xx10	31 32
19 et 29 21 et 30 23 et 29 25 et 30	x1x1 x11x 1xx1 1x1x	33 34 35 36

(e) Les impliquants premiers sont donc 000x,00x0,xx10,x1x1,x11x, 1xx1 et 1x1x

(f) On doit maintenant identifier les impliquants premiers essentiels

	0000	0001	0010	0101	0110	1001	1010	0111	1011	1101	1110	1111
000x	x	x										
00x0	x		x									
xx01		x		x		x				x		
xx10			x		x		x				x	
x1x1				x				x		x		x
x11x					x			x			x	x
1xx1						x			x	x		x
1x1x							x		x		x	x

il n'y en a pas !

(g) Les deux solutions minimales sont

- $xx10 + x1x1 + 1xx1 + 000x$
- $xx01 + x11x + 1x1x + 00x0$