

Algorithmes et complexité (2022-2023)

Florian Bridoux, François Doré, Dorian Mazauric.

Partiel du 24 octobre 2022 (durée une heure, aucun document autorisé)

Exercice 1

Écrire une machine de Turing déterministe à un seul ruban qui reconnaît le langage des mots (à une lettre a) dont la longueur est une puissance de deux.

Exemples de mots du langage: a ; aa ; $aaaa$; $aaaaaaaa$

Quelle est la complexité de votre machine de Turing dans le pire des cas ?

Exercice 2

Écrire une machine de Turing déterministe à un seul ruban qui reconnaît le langage des mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$ qui contiennent autant de 0 que de 1.

Exemples de mots du langage: 000111 ; 00100111 ; 1101010010 ; 1111010000

Quelle est la complexité de votre machine de Turing dans le pire des cas ?

Exercice 3

Soit le problème suivant.

Nom : Double puzzle

Instance : Deux rectangles de longueur L et de largeur I chacun (L et I étant deux entiers), un ensemble de pièces polygonales.

Question : Existe-t-il une manière de remplir totalement les deux rectangles avec l'ensemble des pièces ?

Montrer que Problème de la table ronde est NP-difficile.

Pour la réduction, vous utiliserez un des problèmes NP-difficiles listés en annexe.

Exercice 4

Soit le problème suivant.

Nom : Problème de la table ronde

Instance : Un ensemble de n personnes, un ensemble de paires de personnes qui sont amis.

Question : Existe-t-il un placement de ces n personnes autour d'une table ronde de manière à ce que chaque personne ait deux amis comme voisins ?

Il est possible de voir l'ensemble des amitiés comme un graphe avec une arête entre deux personnes si ces dernières sont amis.

Exemple :

Soient 5 personnes : A, B, C, D et E avec les paires d'amitié suivantes : $\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{E, D\}$.

La réponse pour cette instance est oui.

En effet, le placement suivant A, C, D, E, B est valide car A est ami avec C , C est ami avec D , D est ami avec E , E est ami avec B et B est ami avec A .

Montrer que Problème de la table ronde est NP-difficile.

Pour la réduction, vous utiliserez un des problèmes NP-difficiles listés en annexe