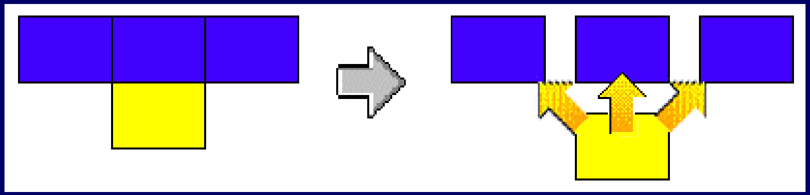
Applications des flots

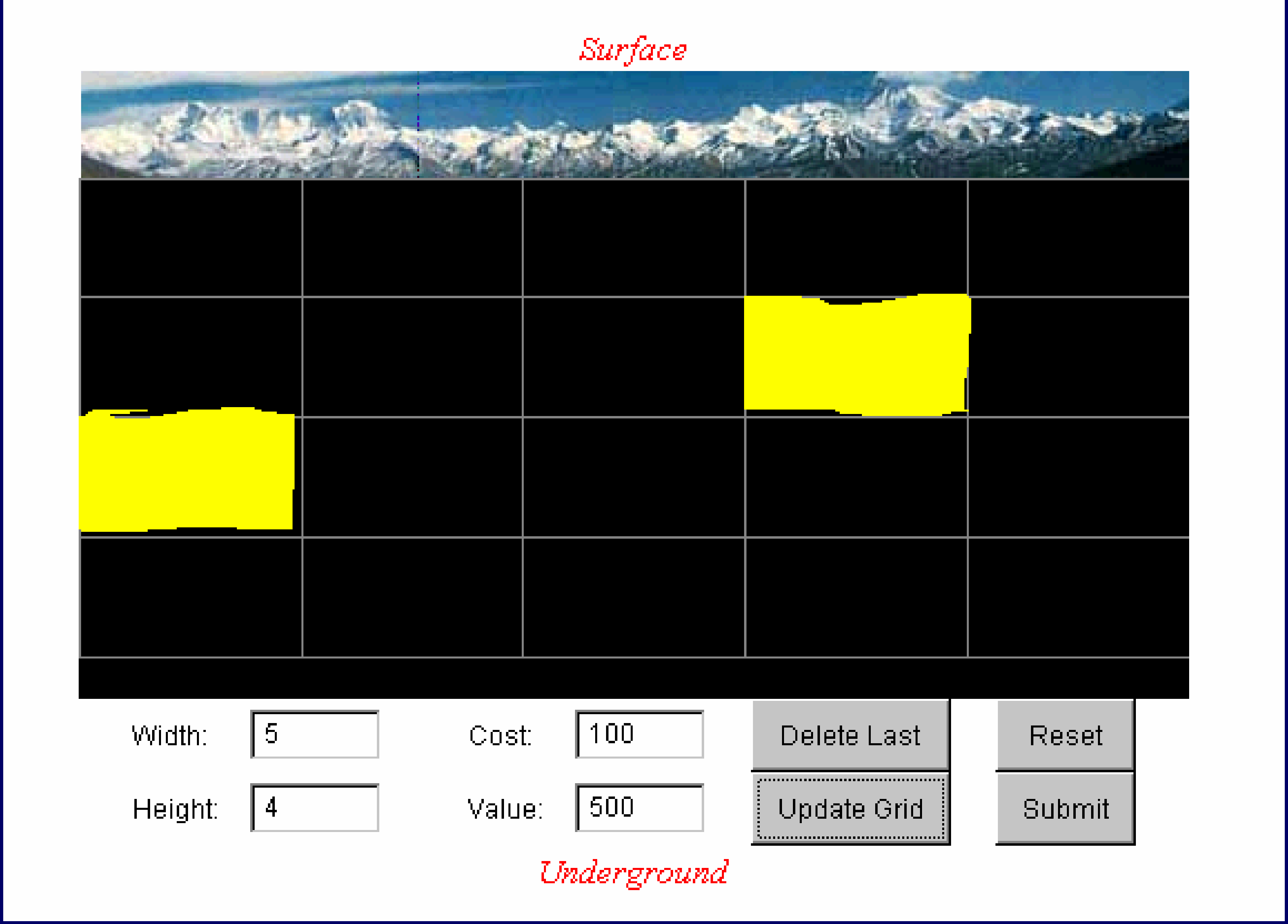
Mines à ciel ouvert

(Open-Pit Mining)

Mines d’or

- **On divise un coupe du sol en blocks orthogonaux de taille égale.**
- **On connaît le coût de l’extrait d’un block entier et le revenu généré par un block d’or. Trouver l’exploitation de forme optimale.**
- **Les contraintes de forme imposent l’extraction des trois blocks (nous sommes ici en 2D …) au-dessus de celui qu’on souhaite extraire.**




Surface
Width:
5
Height:
4
Cost:
100
Value:
500
Delete Last
Update Grid
Reset
Submit
Underground

Solution

- **Pour extraire l’or dans le block (2,4), on doit extraire les blocks (1,3), (1,4), (1,5) et (2,4). Revenu = 500€, coût = 400€, profit = 100€. Donc il est intéressant d’extraire le block (2,4).**
- **Pour extraire le block (3,1), nous devons extraire les blocks (3,1), (2,1), (2,2), (1,1), (1,2) et (1,3). Revenu = 500€, coût = 500€*, profit = 0€. Donc il n’est pas intéressant d’extraire le block (3,1).**

*** Supposant que le block (1,3) est déjà extrait.**

Le piège

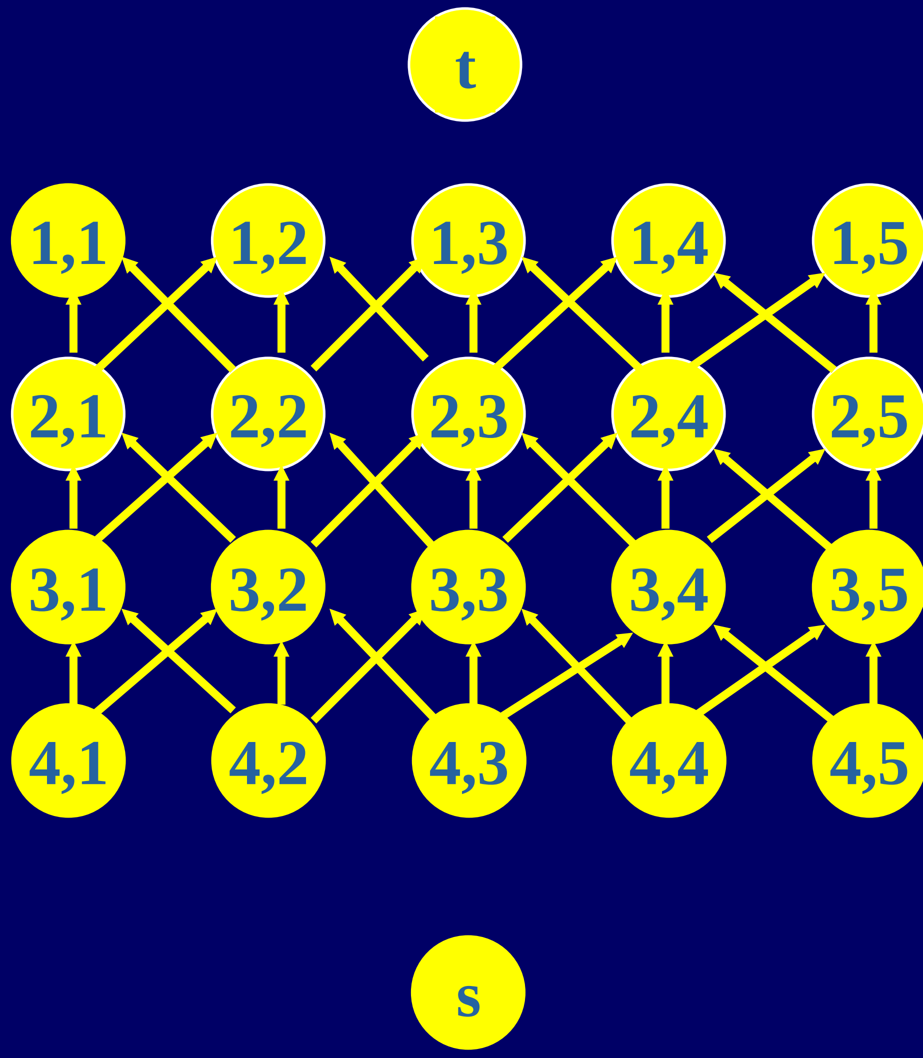
Nous ne trouvons aucun block intéressant à extraire, car chacun paraît non rentable (séparemment).

Par contre, il est très intéressant de les extraire tous …

Formulation flot-max

- **Chaque block est un nœud.**
- **La capacité des arcs de (i,j) vers (i-1,j-1), (i-1,j), (i-1,j+1) est infinie.**
- **On rajoute un nœud source s et un nœud puits t.**

Formulation Flot-max



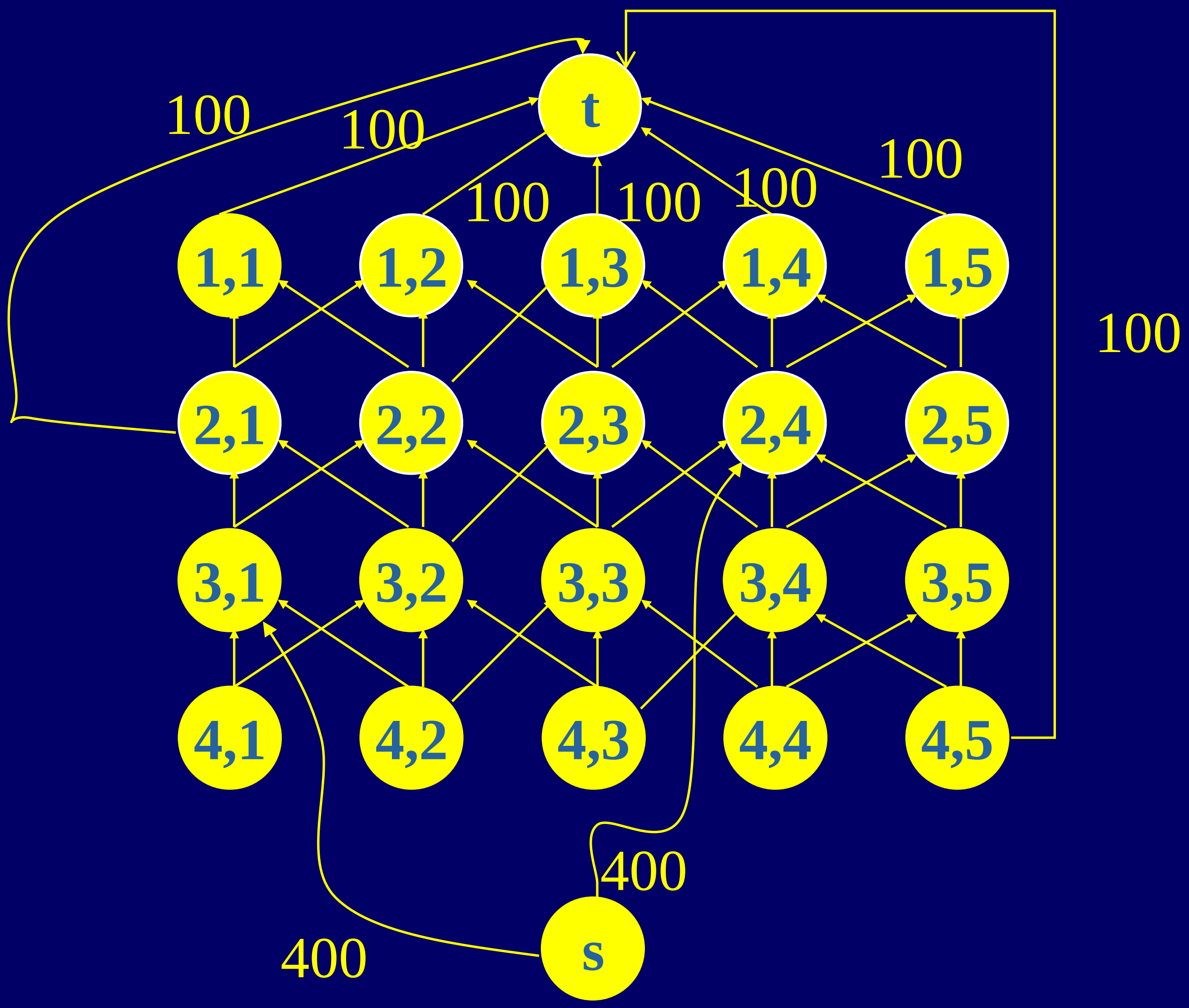
Formulation Flot-max

- $W_{ij} = V_{ij} - C =$
  - V_{ij} = valeur de l'or dans le block (i,j)
  - C = coût de l'extraction d'un block

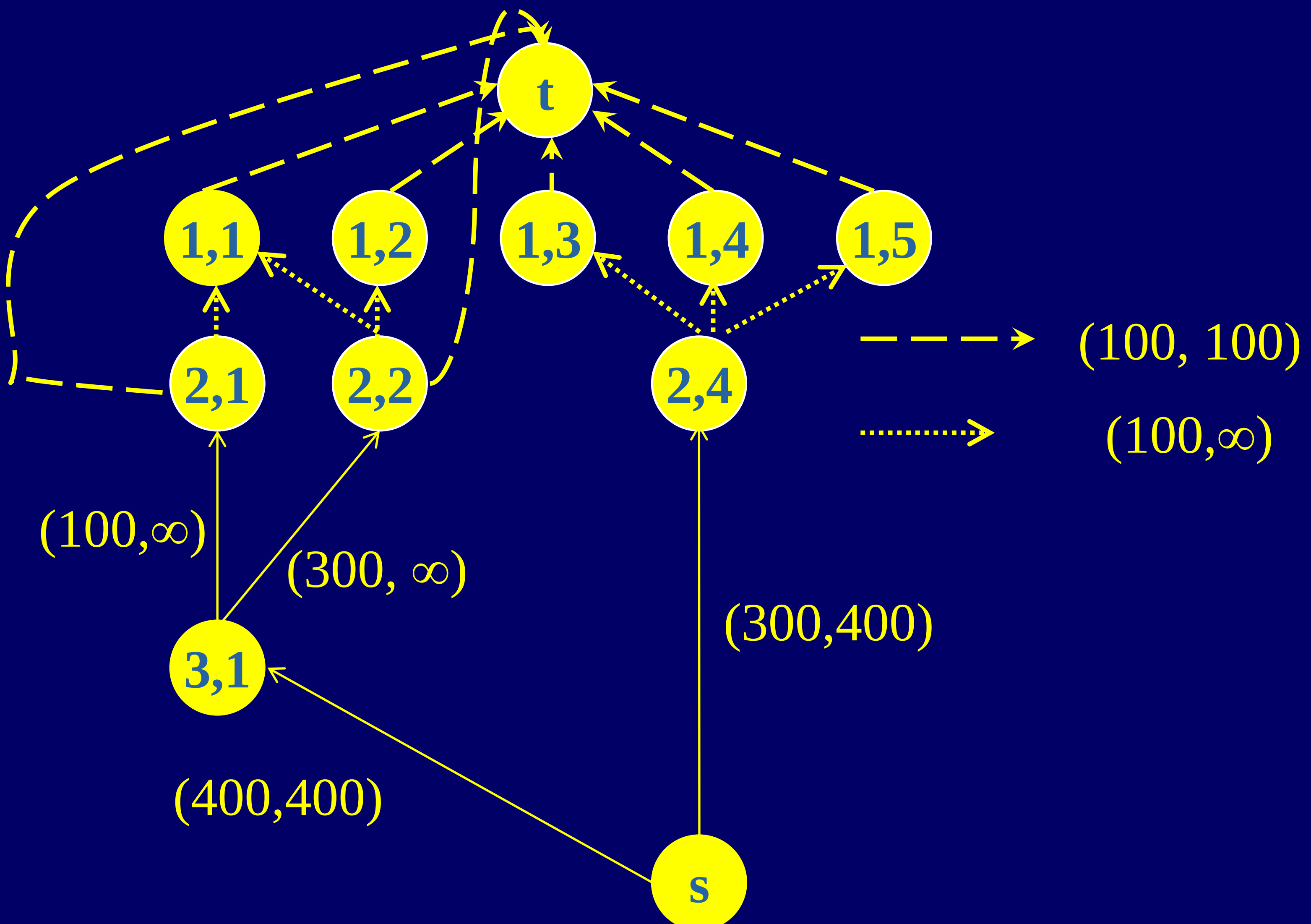
- Si $W_{ij} < 0$
  - ajouter un arc de (i,j) vers t avec capacité $-W_{ij}$
  - block (i,j) a comme valeur 0 et coût W_{ij}

- Si Wij > 0
  - ajouter un arc de s vers (i,j) avec capacité W_{ij}
  - block (i,j) a comme valeur W_{ij} et coût 0

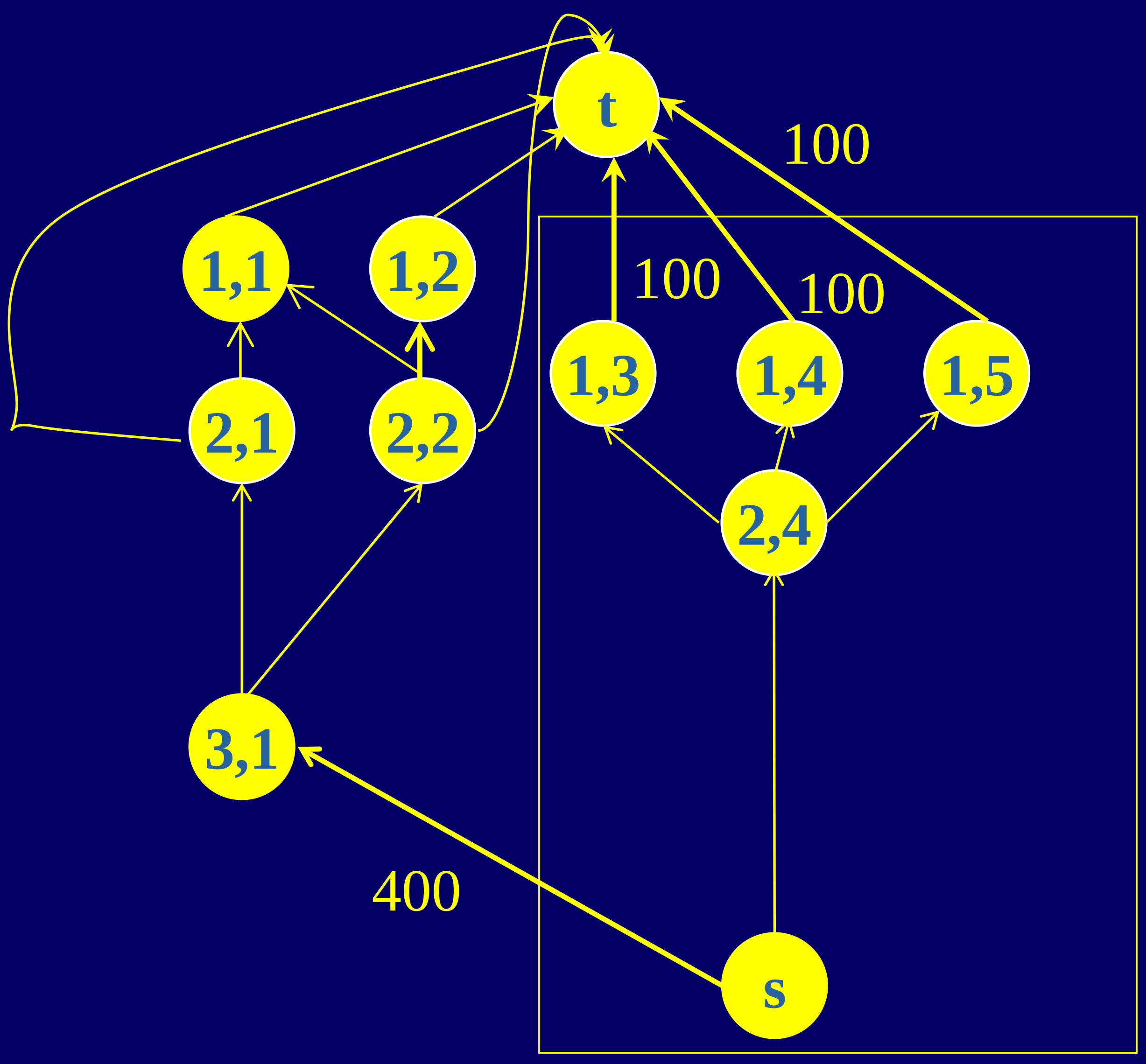
Formulation Flot-max



Solution optimale : v = 700



Coupe-min

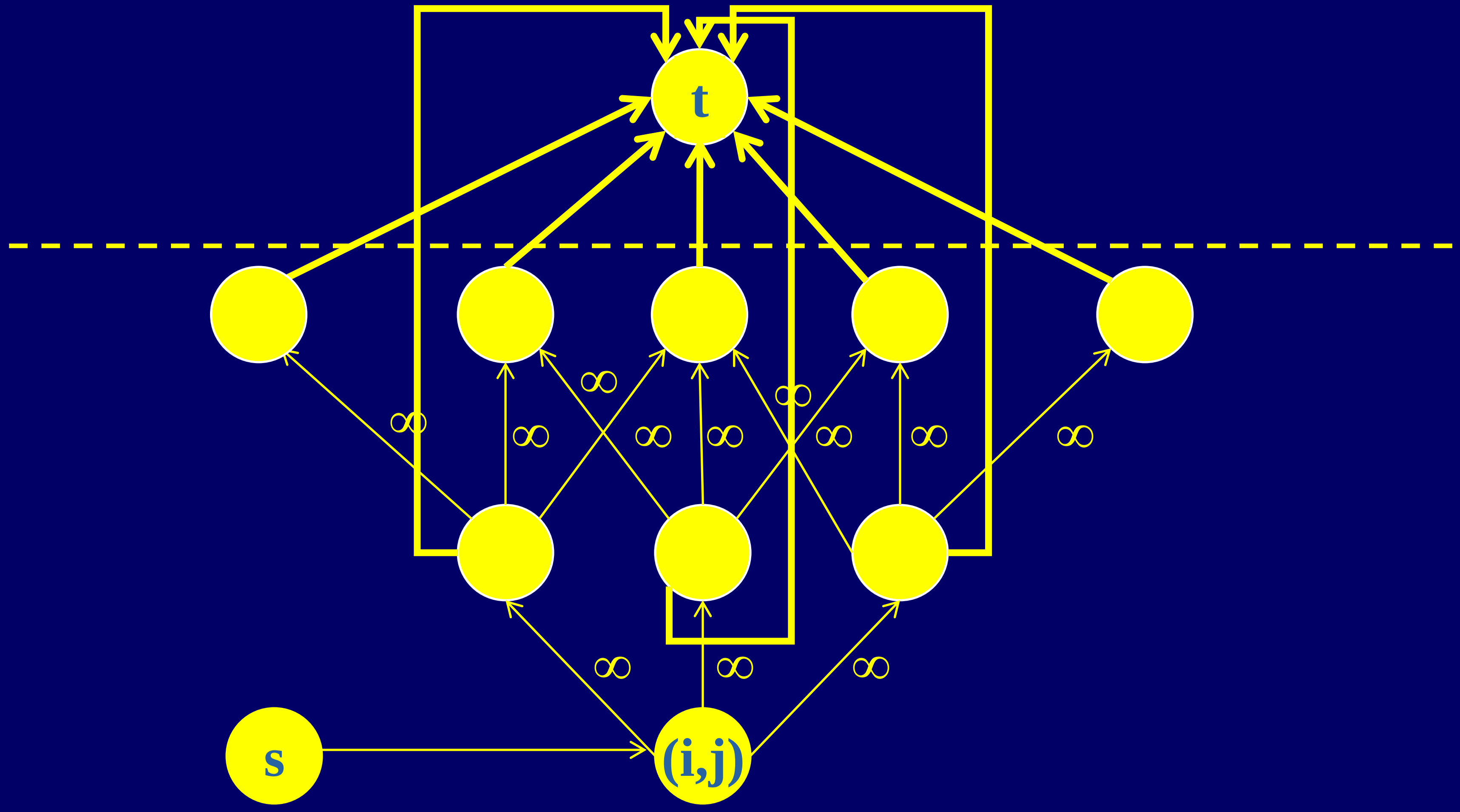


Interprétation de la coupe-min

- **Estraire tous les blocks de S**
  - **La coupe-min ne contient que des arcs de capacité finie.**
  - **Les blocks de S peuvent être extraits sans l'extraction des blocs de $\underline{S}$.**
- **Arcs de la coupe (S,$\underline{S}$)**
  - **Arcs de s vers des nœuds de T**
    - **Capacité = valeur de l'or des blocks de T**
  - **Arcs des nœuds de S vers t**
    - **Capacité = coût de l'extraction**
- **u[s,t] = valeur de T + coût de S**

Exemple coup-min

Arcs de capacité c de chaque block à extraire (i,j) seront dans la coupe.



arcs de capacité ∞ ne peuvent pas être dans la coupe

Interprétation de la coupe-min

- $cap[S,\underline{S}] = 400 + 300 = 700$
- Valeur de l'or dans $\underline{S}$: $V_{or}(\underline{S}) = 400$
- Coût de l'extraction de S : $C_{ex}(S) = 300$
- $cap[S,\underline{S}] = V_{or}(\underline{S}) + C_{ex}(S)$
- $\text{Min } cap[S,\underline{S}] = \text{Min } (V_{or}(\underline{S}) + C_{ex}(S))$
- $\text{Min } (V_{or}(\underline{S}) + C_{ex}(S)) = \text{Max } (-V_{or}(\underline{S}) - C_{ex}(S))$

Profit max

La solution du problème de flot max nous donne
$\quad \text{Max} -V_{or}(\underline{S}) - C_{ex}(S)$

Soit G*= la valeur totale de l'or

G* est un constant

$G^* + \text{Max} - V_{or}(\underline{S}) - C_{ex}(S) =$

$\text{Max } G^* - V_{or}(\underline{S}) - C_{ex}(S) =$

$\text{Max } V_{or}(S) + V_{or}(\underline{S}) - V_{or}(\underline{S}) - C_{ex}(S) =$

$\text{Max } V_{or}(S) - C_{ex}(S) =$ profit de l'extraction des blocks de S

Un sujet très étudié …

Un peu d'histoire

Année	Auteurs	Complexité
1951	Dantzig	$O(n^2mF)$
1956	Ford & Fulkerson	$O(nmF)$
1970	Dinitz et Edmonds & Karp	$O(nm^2)$
1970	Dinitz	$O(n^2m)$
1972	Dinitz et Edmonds & Karp	$O(m^2\log F)$
1973	Dinitz et Gabow	$O(nm\log F)$
1974	Karzanov	$O(n^3)$
1977	Cherkassy	$O(n^2m^{0.5})$
1980	Galil & Naamad	$O(nm\log^2 n)$
1983	Sleator & Tarjan	$O(nm\log n)$

Un peu d'histoire (suite)

Année	Auteurs	Complexité
1986	Goldberg & Tarjan	$O(nm\log(n^2/m))$
1987	Ahuja & Orlin	$O(nm+n^2\log F)$
1987	Ahuja & al.	$O(nm\log(n\log^{0.5}F/m))$
1989	Cheriyan & Hagerup	$O(nm+n^2\log^2 n)$
1990	Cheriyan & al.	$O(n^3/\log n)$
1990	Alon	$O(nm+n^{8/3}/\log n)$
1992	King & al.	$O(nm+n^{2+\varepsilon})$
1993	Phillips & Westbrook	$O(nm(\log_{m/n} n+\log^{2+\varepsilon} n))$
1994	King & al.	$O(nm\log_{m/(n\log n)} n)$
1997	Goldberg & Rao	$O(\min(n^{2/3},m^{1/2})m\log(n^2/m)\log F)$

Le mètre pliant (enfin)

Rappel

Nom : MPC (mètre pliant du charpentier)

Données : une suite ordonnée de nombres naturels (des longueurs du mètre pliant) $l_1, l_2, \ldots, l_n$ et un nombre naturel L (la longueur de l'étui).

Question : peut-on plier le mètre de manière qu'il rentre dans l'étui ?

MPC $\in$ NP

En effet il suffit de générer de manière non-déterministe une prétendue solution et la vérifier. Une solution est une suite de *n* symbôles, d ou g (droite ou gauche).

Ensuite on vérifie : nous aurons trois variables

***eg* = extrémité gauche**

***ed* = extrémité droite**

***ac* = point actuel**

MPC $\in$ NP

Il suffit de les initialiser à 0, puis pour chaque l_i, $i=1,\ldots,n$:

Si d

alors

$ac \leftarrow ac + l_i$

Si $ed < ac$ **alors** $ed \leftarrow ac$

sinon

$ac \leftarrow ac - l_i$

si $eg > ac$ **alors** $eg \leftarrow ac$

Si $L >= ed - eg$ **alors « c'est bon » sinon « non »**

MPC est NP-difficile

On réduit PARTITION à MPC.

Soient a_i, $i=1\ldots n$ les valeurs de PARTITION.

Soit $S = \Sigma_{i=1\ldots n}\, a_i$

Les longueurs de MPC seront (dans l'ordre) :

$$4S\ ,\ 2S\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ,\ a_n\ ,\ 2S\ ,\ 4S$$

Et $L = 4S$.

Il est facile de voir que MPC admet une solution SSI PARTITION en admet une.

■