Informatique Théorique
Informatique Théorique 5
(MAM3-SI3)

6 décembre 2017

1 Gammes

Soit $x = abbcc$ un mot sur l'alphabet $V = \{a,b,c\}$.

1. Quelle est la valeur de $|x|$?
2. Donner un mot de V^3 qui n'est pas un facteur de x.
3. Donner tous les facteurs de x qui appartiennent à V^3.
4. Donner l'ensemble $Pref(x)$ des préfixes de x.
5. Donner l'ensemble $Suff(x)$ des suffixes de x.

---

1. 5
2. aaa.
3. $\{abb,bbc,bcc\}$.
4. $Pref(x) = \{\epsilon,a,ab,abb,abbc,abbcc\}$.
5. $Suff(x) = \{\epsilon,c,cc,bcc,bbcc,abbcc\}$.

---

2 un peu, beaucoup, passionnément,.....

1. Déterminez un mot de longueur 7 sur un alphabet à trois lettres ayant le plus petit nombre possible de facteurs différents.
2. Déterminez un mot de longueur 7 sur un alphabet à trois lettres ayant le plus grand nombre possible de facteurs différents.

Supposons que l'alphabet soit $\Sigma = \{a,b,c\}$

1. Il y en a trois, les trois mots de longueurs 7 n'utilisant qu'une lettre, c'est à dire ici *aaaaaaa*, *bbbbbbb* et *ccccccc*. Ces mots ont un seul facteur de longueur k, pour toutes les longueurs possibles (c'est à dire $0 \leq k \leq 7$)
2. Par exemple *abcacbb*. Il y a un seul facteur de longueur 0 (on ne peut pas faire mieux il n'y a qu'un mot vide), trois facteurs de longueur 1 (on ne peut pas faire mieux il n'y a que trois lettres dans l'alphabet), tous les facteurs de longueur 2 (ils sont 6) sont différents, donc on ne peut pas faire mieux et cela assure la maximalité du nombre de facteurs de longueur $k \geq 2$, puisque deux facteurs de longueurs k ne commençant pas au même endroit dans le mot commencent par deux facteurs de longueur 2 ne commençant pas au même endroit dans le mot, et sont donc différents.

---

3 Distributivité

Soit Σ un alphabet et L,M,N trois langages sur cet alphabet. Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $$L.(M \cup N) = (L.M) \cup (L.N)$$

2. $$L.(M \cap N) = (L.M) \cap (L.N)$$

---

1. La concaténation est distributive par rapport à l'union:

$$L.(M \cup N) = (L.M) \cup (L.N)$$

En effet soit m un mot de $L.(M \cup N)$. Il existe donc un mot u dans L et un mot v dans $M \cup N$, tel que $m = uv$. Si v appartient à M alors $m \in L.M$ donc $m \in L.(M \cup N)$, sinon v appartient à N et $m \in L.N$ donc $m \in L.(M \cup N)$. Dans tous les cas, on a bien $m \in L.(M \cup N)$. Donc $L.(M \cup N) \subset (L.M) \cup (L.N)$

De la définition de la concatenation des langages, il découle que si $X \subset Y$ alors $M.X \subset M.Y$, on a donc $L.M \subset L.(M \cup N)$ et $L.N \subset L.(M \cup N)$, on a donc $(L.M) \cup (L.N) \subset L.(M \cup N)$

2. $$L.(M \cap N) \neq (L.M) \cap (L.N)$$

En fait $L.(M \cap N) \subset (L.M) \cap (L.N)$. En effet, soit m un mot de $L.(M \cap N)$. Il existe donc un mot u dans L et un mot v dans $M \cap N$, tel que $m = uv$. Puisque $v \in M$, $m \in L.M$.Puisque $v \in N$, $m \in L.N$. Donc $m \in (L.M) \cap (L.N)$.

En revanche on n'a pas toujours l'inclusion dans l'autre sens. Par exemple choisissons $L = \{a,ab\}$, $M = \{bc\}$ et $N = \{c\}$. On a $M \cap N = \emptyset$, donc $L.(M \cap N) = \emptyset$, alors que $(L.M) \cap (L.N) = \{abc\}$

---

4 Langages

1. Soient trois langages L_1, L_2, L_3 sur l'alphabet $\Sigma = \{a,b\}$ définis par
   - $L_1 = \{\epsilon,a,b,ab,ba,aba,aaba,abba,abaa\}$
   - $L_2 = \{w \in \Sigma^\star \mid 0 < |w|_b < |w|_a\}$
   - $L_3 = \{w \in \Sigma^\star \mid \exists n,m \in N,n < m \; w = a^n b a^m\}$

   Calculer $L_1 \cap L_2$, $L_1 - L_3$.
2. Soient L_1, L_2, deux langages. Si ϵ appartient à $L_1.L_2$ que peut on dire de L_1 et L_2 ?

1.
   - $L_1 \cap L_2 = \{aba,aaba,abaa\}$, car pour être dans L_2 il faut qu'il y ait au moins un b et plus de a que de b
   - $L_1 - L_3 = \{\epsilon,a,b,ab,aba,aaba,abba\}$
2. L_1 et L_2 contiennent ϵ. En effet la seule manière d'obtenir le mot vide comme concaténation de mots, c'est de concaténer des mots vides.

---

5 Union étoilée

1. Montrer qu'il existe des langages L_1 et L_2 sur le même alphabet V, tels que $(L_1 \cup L_2)^\star \neq L_1^\star \cup L_2^\star$.
2. De façon similaire, trouver des langages L_1 et L_2 tels que $(L_1.L_2)^\star \neq L_1^\star.L_2^\star$.
3. L étant un langage quelconque, $L^\star$ est-il toujours un langage infini ?
4. Avec $L = \{00,01,10,11\}$, montrer que $L^\star$ est l'ensemble des mots de longueur paire. Peut-on trouver un langage X tel que $X^\star$ soit l'ensemble des mots de longueur impaire ?

1-2 Par exemple pour $V = \{a,b\}$, on peut choisir $L_1 = \{a\}^\star$ et $L_2 = \{b\}^\star$. Le mot *abab* appartient à $(L_1 \cup L_2)^\star$, mais pas à $L_1^\star \cup L_2^\star$, de même, il appartient à $(L_1.L_2)^\star$mais pas à $L_1^\star.L_2^\star$.
On peut aussi choisir $V = \{a\}$, $L_1 = \{aa\}$ et $L_2 = \{aaa\}$. Le mot *aaaaa* appartient à $(L_1 \cup L_2)^\star$, mais pas à $L_1^\star \cup L_2^\star$. Ce même mot *aaaaa* appartient à $(L_1.L_2)^\star$ et à $L_1^\star.L_2^\star$. En revanche, le mot aaaa appartient à $L_1^\star$ et donc à $L_1^\star.L_2^\star$, mais il n'appartient pas à $(L_1.L_2)^\star$.

3 Les seuls cas où $L^\star$ n'est pas un langage infini sont les cas $L = \emptyset$ et $L = \{\epsilon\}$. En effet dès que L contient un mot m non vide, si la longueur de ce mot est k, $L^\star$ contient un mot de longueur kp (obtenu en concaténant m avec lui même suffisamment de fois), pour tout entier k, donc c'est un ensemble infini.

4 Clairement $L^\star$ ne contient que les mots de longueurs pairs. Il les contient tous, car L contient tous les mots de longueur deux.
Il est impossible d'obtenir l'ensemble des mots de longueur impair comme l'étoile d'un langage X. En effet X doit contenir doit contenir au moins un mot non vide, et le carré de ce mot (de longueur pair le carré) est dans $X^\star$.

---

6 Simplification ?

On considère un alphabet A, une lettre a de A et deux langages L et M sur l'alphabet A

1. Si $\{a\}.L = \{a\}.M$ alors a-t-on $L = M$?
2. Peut-on avoir $L^\star = M^\star$ quand $L \neq M$?

---

1. oui , soit l un mot de L, puisque $\{a\}.L = \{a\}.M$, il existe m un mot de M tel que $al = am$, mais alors on a forcement $l = m$ et donc $l \in M$, on a donc $L \subset M$. La réciproque se montre de manière symétrique.
2. oui, par exemple si $L = \{b\}$ et $M = \{bb,b\}$, on a $L^\star = M^\star = \{b\}^\star$

---

7 Echiquiers

On suppose que n est un entier non nul. Soit un échiquier ayant 2^n cases par coté. Un triomino est un morceau d'échiquier de 3 cases non alignées.

1. Prouvez que l'on peut recouvrir par des triominos, un échiquier ayant 2^n cases par coté et auquel on a enlevé une case de coin.

Preuve par récurrence sur n

- Base : Pour n=1 si on enlève une case a un échiquier 2x2, il reste trois cases que l'on peut recouvrir par un triomino

- Hypothèse de récurrence : "les cases d'un échiquier carré de coté 2^n, privé d'un coin, peuvent êtres recouvertes par des triominos."
  On suppose l'hypothèse de récurrence vraie pour un n quelconque et fixe.
  Soit alors un échiquier carré de côté 2^{n+1}, et privé d'un coin. On le découpe virtuellement en 4 échiquier carrés de côté 2^n, l'un d'entre eux est déjà privé d'un coin, ses cases restantes peuvent être recouvertes par des triominos.
  On retire aux trois autres les trois coins au centre de l'échiquier initial (ces trois coins sont connexes et peuvent être recouvert par un triomino). On applique a chacun des trois échiquiers que l'on vient de priver d'un coin l'hypothèse de récurrence, et on a recouvert toutes les cases de l'échiquier initial privé d'un coin.

---

2. Prouvez que le recouvrement est possible quel que soit l'emplacement de la case que l'on enlève à l'échiquier.

Rien a changer à la preuve précédente.
Ici ce qui est important c'est de comprendre que ce type de preuve par récurrence est constructif et qu'il défini un algorithme récursif de recouvrement par des triominos.

---

3. En déduire que $\forall n \in N$ $2^{2n} - 1$ est divisible par 3.
   ________ $\forall n \in N$ $2^{2n} - 1$ est le nombre de cases d'un échiquier carré de cote 2^n privé d'un coin, lequel peut être recouvert par des triominos, donc ce nombre de cases est un multiple de trois.

---

4. Conclure que la condition de divisibilité est une condition nécessaire mais pas suffisante.

La condition n'a aucune raison d'être suffisante. Si on considère un échiquier 3x1, son nombre de case est un multiple de trois, mais clairement on ne peut pas le recouvrir par un triomino

---

8 Palindromes

1. Donnez et prouvez une définition inductive pour l'ensemble des mots binaires palindromes. Est-ce que la définition est libre ?
2. Donner un exemple de schéma inductif, ne comportant qu'une règle et qui cependant n'est pas libre.

Une définition possible est
- Base $\{\epsilon,0,1\} \subset E$
- Règles
  - $R0$: $m \in E \Rightarrow 0m0 \in E$
  - $R1$: $m \in E \Rightarrow 1m1 \in E$

Soit P l'ensemble des mots binaires palindromes.
Montrons l'égalité des deux ensembles.
- $E \subset P$
  La preuve se fait très simplement par induction structurelle
  - Base: ϵ ,0,1 sont bien des palindromes binaires.
  - Propagation: Supposons que m est un palindrome binaire, alors il en est de même de $1m1$ et de $0m0$.

- $P \subset E$
  La preuve se fait sur la longueur des mots de P
  - Si cette longueur est 0 alors le mot est dans la base de E, donc dans E.
  - Supposons que tout mot de P de longueur $< k$ est aussi dans E.
  - Soit alors m un mot de P de longueur k.
    - Si $|m| = 1$, il est dans la base, on peut donc le supposer de longueur au moins 2
    - Si la dernière lettre de m est un 1 alors la première lettre doit aussi être un 1 et ainsi $m = 1m'1$ et m' est lui aussi un mot de P. Comme $|m'| < k$, m' est dans E (par hypothèse de récurrence) et donc $m = 1m'1$ est aussi dans$E$ (par définition de E).
    - Sinon, la dernière lettre de m est un 0, mais alors sa première lettre est aussi un 0 et on a m=$0m'0$ et m' est lui aussi un mot de P. Comme $|m'| < k$, m' est dans E (par hypothèse de récurrence) et donc $m = 0m'0$ est aussi dans E (par définition de E).

Le schéma est libre, en effet :
- aucun mot ne peut être dans la base (donc de longueur de un) et produit par une règle (donc de longueur au moins deux)
- un mot se terminant (et commençant) soit par un un soit par un zéro, il ne peut être produit que par l'une des deux règles.
- Un seul antécédent est possible pour une règle donnée, car $1m1$=$1m'1$ entraîne $m = m'$ et de même $0m0 = 0m'0$ entraîne $m = m'$.

---

9 Equilibre

Soit M le sous ensemble de $\{a, b\}^\star$ constitué des mots ayant autant de a que de b.
Soit E l'ensemble défini de manière inductive par
- Base : $B = \{\epsilon\}$
- Règles : $\Omega = \{\omega_g, \omega_d\}$ avec $\omega_g(m) = amb$ et $\omega_d(m) = bma$.

1. Le schéma définissant E est-il libre ?
2. A-t-on $M \subset E$?
3. A-t-on $E \subset M$?
4. Déterminez et prouvez une définition inductive pour M.
5. Donnez une définition non inductive de E.

- Le schéma définissant E est libre, en effet
  - aucun mot ne peut être dans la base (donc de longueur nulle) et produit par une règle (donc de longueur au moins deux)
  - un mot se terminant soit par un un soit par un zéro, il ne peut être produit que par l'une des deux règles.
  - Un seul antécédent est possible pour une règle donnée, car $0m1 = 0m'1$ entraîne $m = m'$ et de même $1m0 = 1m'0$ entraîne $m = m'$.
- M n'est pas inclus dans E. Par exemple, le mot 0110 appartient à M (il comporte autant de zéro que de un), mais pas à E (il n'est pas dans la base et aucune règle ne peut le produire puisque sa premiére et sa derniére lettre sont identiques.
- E est inclus dans M. La preuve se fait facilement par induction structurelle
  - Base : le mot vide contient autant de zéro que de un (zéro de chaque)

- Propagation : Supposons que m contienne autant de zéro que de un, alors clairement il en est de même de 0m1 et de 1m0.

- - Soit F l'ensemble défini de manière inductive par
    - Base : $\epsilon \in F$
    - Règles :
      1. $m,m' \in F \Rightarrow mm' \in F$
      2. $m \in F \Rightarrow 1m0 \in F$
      3. $m \in F \Rightarrow 0m1 \in F$
    - Montrons que $M = F$
    - Clairement par induction structurelle on a $F \subset M$
    - Réciproquement, montrons par récurence sur la longueur des mots de M que $M \subset F$
      - Base : Un mot de M de longueur nulle est le mot vide, il est donc dans F
      - Supposons que tout mot de M de longueur au plus n est dans F
      - Soit m un mot de M de longueur $n+1$. Si m ne commence et ne termine pas par la même lettre, on peut supposer que l'on a $m = 0m'1$, m' a autant de '0' que de '1', il est donc dans M il est de longueur $n-1$ il est donc dans F. Donc m est dans F. Sinon, c'est que m commence et termine par la même lettre, disons un '0'. On a $m = 0m'0$. Soit $prefixe(i)$ le préfixe de m de longueur i. Calculons pour tout i, $f(i)$= le nombre de '0' de $prefixe(i)$ moins le nombre de '1' de $prefixe(i)$.On a $f(1) = 1$ et $f(n) = -1$. Il existe donc un entier k compris entre 1 et n tel que $f(k) = 0$. Posons $m_1 = prefixe(k)$, et soit m_2 tel que $m = m_1m_2$. Les deux mots m_1 et m_2 sont tous les deux dans M, ils sont tous les deux de longueur au plus n, ils sont donc tous les deux dans F, et donc m est dans F.

10

Soit LP le langage défini sur l'alphabet $\{(,)\}$ par

- Base : $B = \{\epsilon\}$
- Règle : $\Omega = \{\omega\}$ avec $\omega(u,v) = (u)v$.

Montrer par induction structurelle que les mots de LP ont exactement autant de (que de).

- Notons $m_k = (^k)^k$. On montre facilement par récurrence sur k que tous les m_k sont dans LP. En effet on a $m_{k+1} = (m_k)\epsilon$
- On montre facilement par récurrence sur k que tous les d^k sont dans LP. En effet on a $d^{k+1} = (\epsilon)d^k$
- $())() = (m_1)d$ est dans LP
- - tous les mots de la base de LP (c'est à dire ϵ) ont autant parenthèses ouvrantes que de fermantes
  - Si $|u|_(= |u|_) = k$ et $|v|_(= |v|_) = k'$ alors $|(u)v|_(= |(u)v|_) = k + k' + 1$

11

Donner et prouver une définition inductive pour l'ensemble des mots sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ ne comportant pas deux a consécutifs. Votre schéma est-il libre?

Une définition possible est

- Base ϵ,0 est inclus dans E
- Règles
  - R1 :Si m est dans E, alors $m1$ est dans E
  - R2 :Si m est dans E, alors $m10$ est dans E

Soit $MBS20C$l'ensemble des mots binaires ne comportant pas deux zéros consécutifs
Montrons l'égalité des deux ensembles

- E est inclus dans $MBS20C$
  La preuve se fait très simplement par induction structurelle
  - Base: ϵ et 0 sont bien des mots binaires et ne comportent pas deux zéros consécutifs
  - Propagation: Supposons que m ne comporte pas deux zéros consécutifs, alors il en est de même de $m1$ et de $m10$.
- $MBS20C$ est inclus dans E
  La preuve se fait par rècurrence sur la longueur des mots de $MBS20C$
  - Si cette longueur est 0 alors le mot est dans la base de E, donc dans E
  - Supposons que tout mot de $MBS20C$ de longueur $< k$ est aussi dans E
  - Soit alors m un mot de $MBS20C$ de longueur k.
    Si $|m| = 1$, alors soit $m = 0$ et m est dans la base, soit $m = 1$ et il est produit par la règle $R1$ à partir de ϵ.
    On peut donc supposer k au moinségal à deux.
    - Si la derniére lettre de m est un 1, alors $m = m'1$ et m' est lui aussi un mot de $MBS20C$. Comme $|m'| < k$, m' est dans E (par hypothése de récurrence) et donc $m = m'1$ est aussi dans E (par définition de E).
    - Sinon, la derniére lettre de m est un 0, mais alors son avant derniére lettre est forcément un 1 et $m = m'10$, et m' est lui aussi un mot de $MBS20C$. Comme $|m'| < k$, m' est dans E(par hypothèse de récurrence) et donc $m = m'10$ est aussi dans E(par définition de E)

Le schéma est libre, en effet :

- aucun mot ne peut être dans la base (donc de longueur un) et produit par une règle (donc de longueur au moins deux)
- un mot se terminant soit par un un soit par un zéro, il ne peut être produit que par l'une des deux règles.
- un seul antécédent est possible pour une règle donnée, car $m1 = m'1$ entraîne $m = m'$ et de même $m10 = m'10$ entraîne $m = m'$.

un autre schéma possible

- Base ϵ , 0 sont dans E
- Règle m,m' dans $E \Rightarrow m1m'$ dans E

Mais ce schema n'est pas libre

12

Considérons LBP l'ensemble des mots m sur l'alphabet $\Sigma = \{(,)\}$ tels que $|m|_(= |m|_)$ et dans tout pr éfixe u de m, $|u|_(\geq |u|_)$.

1. Montrez que $LBP = LP$
2. Montrez que le schéma définissant LP est libre

Notons $P(m)$ la propriété :
$m \in \{(,)\}^*$, $\forall p$, p préfixe de m $|p|_(\geq |p|_)$ et $|m|_(= |m|_)$
Notons que $m \in LBP$ est équivalent à $P(m)$.

- Montrons d'abord par induction structurelle que $LP \subset LBP$
  - Base $P(\epsilon)$ est vrai.
  - Propagation : Montrons que $P(u)$ et $P(v)$ entraînent $P((u)v)$.
    Un préfixe de $(u)v$ est soit
    - ϵ
    - $(p_u$ où p_u est un préfixe de u
    - $(u)p_v$ où p_v est un préfixe de v

    Dans tous les cas, ce préfixe comporte au moins autant d'ouvrantes que de fermantes.
    De plus $(u)v$ contient exactement autant d'ouvrantes que de fermantes.
    Donc $P((u)v)$ est bien vrai.
- Pour démontrer la réciproque on introduit la fonction suivante:
  Soit $altitude(m,i)=$ le nombre de (- le nombre de) dans le préfixe de longueur i de m,
  $P(m) \Leftrightarrow \forall i, 0 \leq i \leq |m|$, $altitude(m,i) \geq 0$ et $altitude(m,|m|) = 0$
  Proposition 1
  Pour tout mot m de $\{(,)\}^*$, $\forall i, 1 \leq i \leq |m|+1$ $altitude((m,i) = altitude(m,i-1)+1$
  Proposition 2
  Pour tous les mots m, m' de $\{(,)\}^*$,
  $\forall i, 0 \leq i \leq |m|$, $altitude(mm',i) = altitude(m,i)$
  $\forall i$, $|m|+1 \leq i \leq |m|+|m'|$, $altitude(mm',i) = altitude(m,|m|) + altitude(m',i-|m|))$,
  Montrons par récurrence sur n la propriété
  $H(n)$: tout mot m de longueur n vérifiant $P(m)$ est dans LP
  $H(0)$ est vrai car ϵ est le seul mot de longueur 0 et il appartient à LP;
  Supposons $H(p)$ vrai pour tout p<n;
  Soit m un mot vérifiant $P(m)$ et de longueur n. Notons m_i la i-ème lettre de m.
  Soit k le plus petit entier tel que $altitude(m,k) = 0$ (il existe car altitude $(m,|m|)) = 0$)
  On a nécessairement $altitude(m,k-1) = 1$ donc $m_k =)$
  Posons $u = m_2m_3...m_{k-1}$, et $v = m_{k+1}..m_n$
  On a $m = (u)v$.
  D'après la proposition 2 , on a $altitude((u)v,i) = altitude((u,i)$ $\forall i, 0 \leq i \leq |u|+1$.
  D'après la proposition 1, on a $altitude((u,i) = altitude(u,i-1)+1$ $\forall i, 1 \leq i \leq |u|+1$
  Donc $\forall i$, $1 \leq i \leq |u|$ $altitude(u,i) = altitude((u,i+1)-1 = altitude(m,i+1)-1 \geq 0$ puisque i <k, et $altitude(u,|u|)) = altitude(m,k-1)-1 = 0$
  Le mot u appartient donc à LBP.
  D'après la proposition 2, $altitude(v,i) = altitude(m,i+|(u)|))$ $\forall i, 1 \leq i \leq |v|$. On a donc $altitude(v,i) \geq 0$, $\forall i$, $1 \leq i \leq |v|$ et $altitude(v,|v|) = 0$ Le mot v appartient donc à LBP.
  Les deux mots u et v sont de longueur strictement inférieure à n, donc par hypothèse ils sont dans LP.
  Par définition de LP, m est donc aussi dans LP.

- Montrez que le schéma définissant LP est libre
  Clairement un mot ne peut pas être à la fois dans la base et construit par les règles.
  Supposons qu'il existe $m = (u)v=(u')v'$, avec u,v,u',v' dans LP. Avec la même fonction altitude que pour la question précédente, on a $altitude((u),|u|+2) = 0 = altitude((u'),|u'|+2)$.
  Supposons que u et u' soient différents, alors ils sont forcement de longueur différente. On peut donc supposer que $|u| < |u'|$. Alors $u)$ est un préfixe de u' puisque $(u)v = (u')v'$ mais $u)$ contient plus de) que de (, en contradiction avec u' dans LP. Donc $u = u'$, et donc $v = v'$.

13

$LP2$ est définit inductivement par
- Base : $B = \{\epsilon\}$
- Règles : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ avec $\omega_1(u) = (u)$ et $\omega_2(u,v) = uv$.

1. Montrez que $LP = LP2$.
2. Le schéma définissant $LP2$ est-il libre ?

- Montrons tout d'abord que LP est inclus dans $LP2$, par induction structurelle sur LP
  Tout mot de la base de LP est dans $LP2$, car les deux ensembles ont la même base.
  Supposons que les mots u et v de LP soient aussi dans $LP2$, alors par définition de $LP2$, le mot (u) est dans $LP2$ (Règle 2) et puisque (u) et v sont dans $LP2$, $(u)v$ est dams $LP2$ (Règle 1), donc si u et v sont dans $LP2$, $(u)v$ est dans $LP2$.
  On vient de prouver que tous les mots de LP ont la propriété d'appartenir à $LP2$ par induction structurelle sur $LP2$.
- Montrons maintenant que $LP2$ est inclus dans LBP
  A nouveau, faisons une induction structurelle sur $LP = LBP$ cette fois.
  Tout mot de la base de $LP2$ est dans LP
  Si un mot u de $LP2$ est dans LP il en est de même de $u = (u)\epsilon$.
  Soient maintenant u et v mots de $LP2$, supposons qu'ils sont dans LBP, il en est alors de même pour uv est lui aussi dans LBP (d'après la propriété 2, on vérifie que l'altitude n'est jamais négative)
- Ce schéma n'est pas libre : par exemple le mot ()()() peut être produit à partir de la première règle avec $u = ()$ et $v = ()()$ ou bien avec $u = ()()$ et $v = ()$

14

Soit A l'alphabet $\{(,)\}$ et soit L le sous ensemble de $A^\star$ formé des mots dont tous les préfixes contiennent au moins autant de (que de).

1. Donnez une définition inductive de L et prouvez-la.
2. Montrez que L n'est pas égal à l'ensemble des mots bien parenthésés. Comment peut-on associer à un mot de L, un mot bien parenthésé ?
3. Le schéma que vous avez donné à la première question est-il libre ou ambigu ?

Notons $Q(m)$ la propriété :
$m \in \{(,)\}^*$, $\forall p$, p préfixe de m $|p|_(\geq |p|_)$.
Notons que $m \in L$ est équivalent à $Q(m)$.

En utilisant la fonction *altitude* définie à l'exercice précédent, on a aussi
$Q(m) \Leftrightarrow \forall i, 0 \leq i \leq |m|, altitude(m,i) \geq 0$

1. Une définition possible est
   - Base : ϵ est dans M
   - R égles :Si m et m' sont dans M alors $(m$ et $(m)m'$ sont dans M

   M est inclus dans L par induction structurelle, en effet
   - ϵ appartient à L
   - Supposons $Q(m)$, on vérifie que l'on a $Q((m)$
   - Supposons $Q(m)$ et $Q(m')$, on vérifie que l'on a aussi $Q((m)m')$

   Réciproquement,montrons par récurrence sur n que tout mot de L de longueur n appartient à M.
   Base Si $n = 0, m = \epsilon$ et donc m appartient à M
   Etape inductive
   Supposons que tout mot de L de longueur strictement inférieure à n appartient à M
   Soit u un mot de L, de longueur n
   Premier cas : $altitude(u,i) > 0$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$
   Si u n'est pas le mot vide, alors $u = (u'$, et comme $altitude(u,i) = altitude(u',i-1)+1$, $altitude(u',j) \geq 0$, pour tout j $1 \leq j \leq n-1$, et donc u' appartient à L. Comme u' est de longueur $n-1$, par hypothèse de récurrence u' appartient à M. Donc u appartient à M par définition de M.
   Deuxième cas : il existe k tel que $altitude(u,k) = 0$
   Soit j le plus petit entier tel que $altitude(u,j) = 0$. On a donc $altitude(u,i) > 0$, pour tout i $1 \leq i \leq j-1$.
   La jième lettre de u est nécessairement un).
   Soit m tel que (m) est le prefixe de longueur j de u.
   Comme $altitude(u,k) = 1 + altitude(m,k-1)$, m appartient à L, et par hypothèse de récurrence à M.
   Soit m' le mot éventuellement vide tel que $u = (m)m'$, on a $altitude(u,k) = altitude(m',k-j)$, et donc m' aussi appartient à L et par récurrence à M. On a donc $u = (m)m'$, avec m et m' dans M, donc u appartient à M.
2. Une autre définition possible est
   - Base : ϵ et (sont dans M
   - Règles :Si m et m' sont dans M alors (m) et mm' sont dans M

   Les preuves sont similaires
3. Le mot (est dans M mais n'est pas bien parenthésé. En fait pour tout mot de M, il suffit d'ajouter en fin le nombre de) nécessaires pour équilibrer le nombre de) et de (pour rendre ce mot bien parenthésé.
4. Le premier schéma donné n'est pas libre, en effet le mot (() peut être dérivé soit avec la règle $(m$ et $m = ()$, soit avec la règle $(m)m'$ avec $m = ($ et m' vide. Le second schéma n'est pas libre non plus, le mot (((peut être dérivé par la règle mm' avec $m = ($ $m' = (($, soit avec $m' = (, = (($.
