SI 4[e]année **Année 2020-2021**
Complexité et Algorithmique

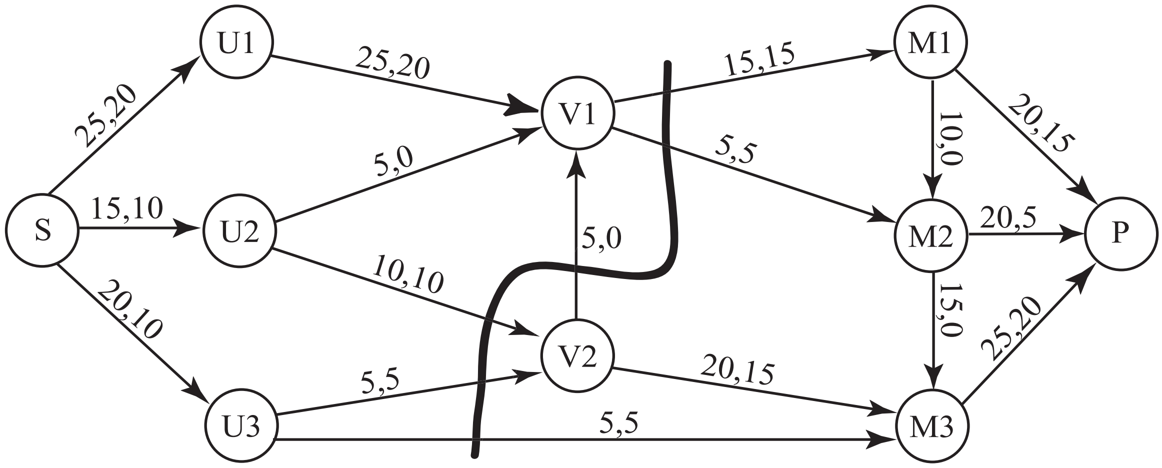
Flots

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n^{o}4

11 décembre 2018

1. Pour ramener le problème à un problème de flot classique, on rajoute une source S et un puits P. Une exécution possible de la méthode de Ford & Fulkerson donne :

- chaîne augmentante $S \to U_1 \to V_1 \to M_1 \to P$, augmentation 15
- chaîne augmentante $S \to U_1 \to V_1 \to M_2 \to P$, augmentation 5
- chaîne augmentante $S \to U_2 \to V_2 \to M_3 \to P$, augmentation 10
- chaîne augmentante $S \to U_3 \to V_2 \to M_3 \to P$, augmentation 5
- chaîne augmentante $S \to U_3 \to M_3 \to P$, augmentation 5

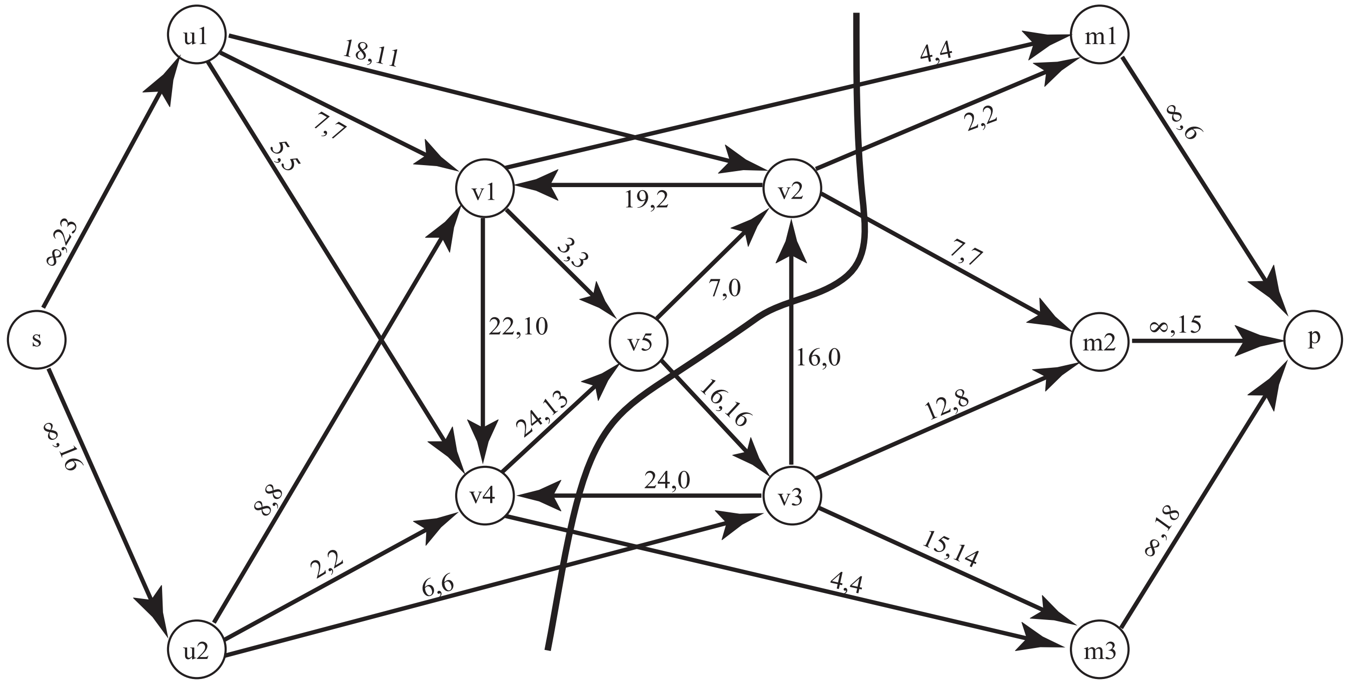


Le flot maximum est de 40 avec l'unique coupe de capacité de minimum qui est $(S, \overline{S})$ avec $S = \{s, U_1, U_2, U_3, V_1\}$. Attention, car la coupe est unique mais le flot maximum est loin de l'être ! Il suffit de chercher un circuit dans le réseau résiduel. Par exemple prenons le circuit $S \to U_2 \to V_1 \to U_1 \to S$. On peut effectuer une "augmentation" [1] d'au plus $Min\{5, 5, 5, 5\} = 5$. Si on fait une "augmentation" d'une unité on obtient un autre flot maximum, de même des autres flots maximum pour une "augmentation" de 2, 3, 4 ou 5 unités.

2. Pour ramener le problème à un problème de flot classique, on rajoute une source s et un puits p, avec des arcs de capacité infinie. Une exécution possible de la méthode de Ford & Fulkerson donne :

- chaîne augmentante $s \to u_1 \to v_2 \to m_2 \to p$, augmentation 7
- chaîne augmentante $s \to u_1 \to v_2 \to v_1 \to m_1 \to p$, augmentation 4
- chaîne augmentante $s \to u_1 \to v_1 \to v_2 \to m_1 \to p$, augmentation 2
- chaîne augmentante $s \to u_1 \to v_1 \to v_5 \to v_3 \to m_3 \to p$, augmentation 3
- chaîne augmentante $s \to u_1 \to v_1 \to v_4 \to v_5 \to v_3 \to m_3 \to p$, augmentation 2
- chaîne augmentante $s \to u_1 \to v_4 \to m_3 \to p$, augmentation 4
- chaîne augmentante $s \to u_1 \to v_4 \to v_5 \to v_3 \to m_3 \to p$, augmentation 1
- chaîne augmentante $s \to u_2 \to v_1 \to v_4 \to v_5 \to v_3 \to m_3 \to p$, augmentation 8
- chaîne augmentante $s \to u_2 \to v_4 \to v_5 \to v_3 \to m_2 \to p$, augmentation 2
- chaîne augmentante $s \to u_2 \to v_3 \to m_2 \to p$, augmentation 6

1. en fait il ne s'agit pas vraiment d'une augmentation, car ce n'est pas un chemin de la source vers le puit.



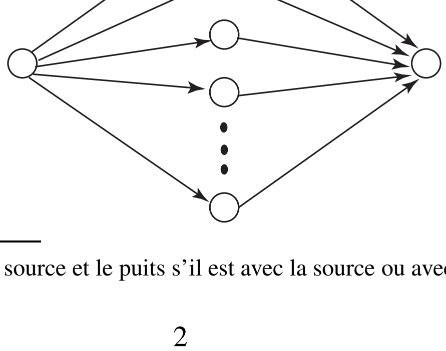
Le flot maximum est de 39 avec l'unique coupe de capacité de minimum qui est $(S, \overline{S})$ avec $S = \{s, u_1, u_2, v_1, v_2, v_4, v_5\}$.

3. Il y a $2^3 = 8$ coupes [2], dont une seule de capacité minimum 5 :

S	$\bar{S}$	coupe
s	x, y, z, p	6
s, x	y, z, p	7
s, y	x, z, p	7
s, z	x, y, p	12
s, x, y	z, p	5
s, x, z	y, p	12
s, y, z	x, p	11
s, x, y, z	p	8

4.

a) Nous avons vu qu'on a 2^{n-2} coupes différentes. On peut donc se poser la question est-ce que toutes les coupes peuvent être minimaux ? On teste et réalise que cela marche pour n=2, puis pour n=3 et on généralise. Ainsi l'exemple le plus simple consiste à considérer le graphe à n sommets, avec comme arcs un arc de la source vers tous les autres sommets et un de chaque sommet vers le puits, tous de capacité unitaire. Ainsi nous avons 2^{n-2} coupes toutes de capacité minimum.



2. il faut décider pour chaque sommet autre que la source et le puits s'il est avec la source ou avec le puits

b) Les sommets du graphe se retrouvent partitionnés en quatre parties : $S \cap T$, $S \cap \overline{T}$, $\overline{S} \cap T$ et $\overline{S} \cap \overline{T}$.
Ainsi, les capacités des quatres coupes s'écrivent :
$C(S,\overline{S}) = C(S\cap T,\overline{S}\cap T) + C(S\cap T,\overline{S}\cap \overline{T}) + C(S\cap \overline{T},\overline{S}\cap T) + C(S\cap \overline{T},\overline{S}\cap \overline{T})$
$C(T,\overline{T}) = C(S\cap T,S\cap \overline{T}) + C(S\cap T,\overline{S}\cap \overline{T}) + C(\overline{S}\cap T,S\cap \overline{T}) + C(\overline{S}\cap T,\overline{S}\cap \overline{T})$
$C(S\cup T,\overline{S\cup T}) = C(S\cap T,S\cap \overline{T}) + C(S\cap T,\overline{S}\cap T) + C(S\cap T,\overline{S}\cap \overline{T})$
$C(S\cap T,\overline{S\cap T}) = C(S\cap T,\overline{S}\cap \overline{T}) + C(S\cap \overline{T},\overline{S}\cap \overline{T}) + C(\overline{S}\cap T,\overline{S}\cap \overline{T})$
où les deux premiers sont égaux et inférieurs ou égaux aux deux derniers.
Notons :
$a = C(S\cap T,S\cap \overline{T})$
$b = C(S\cap T,\overline{S}\cap T)$
$c = C(S\cap T,\overline{S}\cap \overline{T})$
$d = C(S\cap \overline{T},\overline{S}\cap T)$
$e = C(S\cap \overline{T},\overline{S}\cap \overline{T})$
$f = C(\overline{S}\cap T,S\cap \overline{T})$
$g = C(\overline{S}\cap T,\overline{S}\cap \overline{T})$
Ainsi nous obtenons :
$C(S,\overline{S}) = b + c + d + e$
$C(T,\overline{T}) = a + c + f + g$
$C(S\cup T,\overline{S\cup T}) = a + b + c$
$C(S\cap T,\overline{S\cap T}) = c + e + g$
Nous avons donc :
$b + c + d + e = a + c + f + g$
$b + c + d + e \leq a + b + c$
$b + c + d + e \leq c + e + g$
Nous pouvons donc conclure que $d = f = 0$, ainsi que $b = g$ et $a = e$, ce qui permet aussi de déduire l'égalité des quatres capacités.

c) Le problème est donc de trouver le minimal (pour l'inclusion) et le maximal parmi les coupes de capacité minimum (la structure de treillis sous-jacente est le résultat de la question précédente), et ce sans avoir à énumerer ces coupes, dont le nombre peut être exponentiel. Il est facile de remarquer que la oupe minimum obtenu en considérant les sommets vers lesquels on peut encore envoyer du flot, est exactement ce minimum. De même, le meximum n'est rien d'autre que l'ensemble des sommets à partir desquels il n'existe plus de chemin vers le puits dans le graphe résiduel. Il suffit donc de trouver le graphe résiduel associé à un flot maximum (quelconque !).

d) Il suffit donc de tester que le minimal et le maximal se confondent, pour conclure l'unicité.

5. Il s'agit de l'application de l'exercice précédent. En effet on obtient comme coupe minimal de capacité minimum l'ensemble $\{s, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et comme coupe maximale de capacité minimum l'ensemble $\{s, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Entre ces deux se trouvent donc toutes les coupes de capacité minimum. La vérification nous donnes quatre autres coupes de capacité minimum : $\{s, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, $\{s, 1, 2, 3, 4, 5, 8\}$, $\{s, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $\{s, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$.

6. Dans le premier cas on trouve un flot admissible et par la suite un flot maximum, alors que dans le second il n'existe pas de flot admissible.

7. Un couplage de cardinalité maximum (par exemple) est $\{(1, d), (2, b), (4, g), (5, c), (6, e)\}$. L'intérêt de l'exercice est en l'obtention du certificat de maximalité. En effet on obtient le transversal $\{4, 5, 6, b, d\}$, et comme la cardinalité d'un couplage est borné par la cardinalité d'un transversal, nous disposons d'un certificat d'optimalité.

8. Un exemple classique d'application des flots.

9. Un couplage de cardinalité maximum (par exemple) est $\{(A, a), (C, b), (D, c)\}$. Le certificat de maximalité est donné par le transversal $\{A, C, c\}$.

10. Sans commentaires.