Théorie : la syntaxe

Une théorie est la donnée :

- d'un *langage* L
- d'un ensemble d'*axiomes* A1, A2, … An

Langage

On se place dans le cadre d'un langage L du premier ordre.

1.1 Les symboles de L

- Les ***fonctions***

  d'arité (i.e nombre d' arguments) quelconque sont notées : f, g, h, f_i ,...

  les fonctions 0-aires sont appelées ***constantes*** et sont notées a, b, c, a_i ,...

- Les ***prédicats***

  d'arité quelconque sont notés : p, q, r, p_i ,…

  les prédicats 0-aires sont appelés ***propositions*** et sont notés P, Q, R, ...

- Les ***variables***

  notées x, y, z, x_i ,...

- Les ***connecteurs logiques***

  ¬ (not), ∧ (et), ∨ (ou), ⇒ (implication), ⇔ (équivalent)

- Les ***quantificateurs***

  ∀ (universel), ∃ (existentiel)

La syntaxe de L

- Les ***termes de L*** sont définis récursivement par :

  (T1) toute *constante* c est un terme

  (T2) toute *variable* x est un terme

  (T3) si t_1, t_2,... t_n, sont des termes et f un symbole de fonction d'arité n, alors $f\,(t_1, t_2, \ldots\, t_n)$ est un terme

- Les ***atomes de L*** sont définis récursivement par :

  (A1) toute *proposition* P est un atome

  (A2) si t_1, t_2,... t_n, sont des termes et p un symbole de prédicat d'arité n, alors $p(t_1, t_2, \ldots\, t_n)$ est un atome

- Les *formules de L* sont définies récursivement par :

(F1) tout *atome* est une formule

(F2) si ϕ et ψ sont des formules alors $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \Rightarrow \psi$, $\phi \Leftrightarrow \psi$ et $\neg \phi$ sont des formules

(F3) si ϕ est une formule et si x est une variable de ϕ, $\forall x\ \phi$ et $\exists x\ \phi$ sont des formules

(F4) $\square$ représente la formule vide

Les formules sont notées ϕ, ψ, φ, ϕ_i ,...

- Priorité (par ordre décroissant) :

  - les symboles de relations la négation,
  - les quantificateurs
  - et
  - ou
  - implique

$\Rightarrow$ est associatif à droite :

$\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2 \Rightarrow \Phi_3$

S'interprête

$\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow \Phi_3)$

Exemples :

fonctions : f (arité 1), g (arité 1), a (arité 0)

prédicats : p (arité 2), q (arité 2), r (arité 2), Q (arité 0)

termes : a, f(a), f(g(a)), f(x), x, f(f(f(x))), …

atomes : p(x, y), p(x,f(x)), q(a,g(f(x))), Q, …

formules : $p(x, a) \vee p(x,f(x)) \wedge Q$

$$\exists x\ (p(x,f(x)) \Rightarrow q(a,g(f(x))))$$

$$\forall x\ \exists y\ r(a,f(y)) \Leftrightarrow (\neg\, p(x, a) \wedge q(a,a))$$

Remarque : par abus de langage on pourra utiliser une notation infixe: par exemple x + y désigne le terme +(x,y) où + est un symbole de fonction, x<y désigne l'atome <(x,y) où < est un symbole de prédicat

Exercice

– fonctions : f (arité 1), g (arité 1), a (arité 0)
– prédicats : p (arité 2), q (arité 2), r (arité 2), Q (arité 0)

– Les expressions suivantes sont-elles des formules du premier ordre ?
– $\phi 1 : \forall x \, (p \, (f(g(x)),a) \vee q(a))$
– $\phi 2 : \forall x \, \forall y \, (f(x) \vee q(x,y))$
– $\phi 3 : \forall x \, (q \, (x,y) \vee Q \wedge r(f(x),g(a)))$

Variables libres ou liées

On note $V(\phi)$ les variables qui apparaissent dans ϕ, $\equiv$ l'égalité syntaxique (même écriture des deux termes).

BV(ϕ) les ***variables liées*** (Bounded Variables) de ϕ sont définies par :

- si $\phi \equiv r(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ou $\phi \equiv t_1 = t_2$ alors $BV(\phi) = \emptyset$
- si $\phi \equiv \varphi$ op ω (op valant $\wedge$ $\vee$ $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$) alors $BV(\phi) = BV(\omega) \cup BV(\varphi)$
- si $\phi \equiv \neg\, \varphi$ alors $BV(\phi) = BV(\varphi)$
- si $\phi \equiv \forall x\, \varphi$ ou $\phi \equiv \exists x\, \varphi$ alors $BV(\phi) = BV(\varphi) \cup \{x\}$

Exemple : $\phi 1 : (x = y) \vee (x > y)$

$\phi 2 : \forall x\, ((y < x) \vee (y=x))$

$BV(\phi 1) = \emptyset$: x et y sont libres dans $\phi 1$

$BV(\phi 2) = \{x\}$: x est liée dans $\phi 2$

FV(ϕ) les ***variables libres*** (Free Variables) de ϕ sont définies par :

- si $\phi \equiv r\ (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ou $\phi \equiv t_1 = t_2$ alors $FV(\phi) = V(\phi)$
- si $\phi \equiv \varphi$ op ω (op valant $\wedge\ \vee \Rightarrow \Leftrightarrow$) alors $FV(\phi) = FV(\omega) \cup FV(\varphi)$
- si $\phi \equiv \neg\ \varphi$ alors $FV(\phi) = FV(\varphi)$
- si $\phi \equiv \forall\ x\ \varphi$ ou $\phi \equiv \exists\ x\ \varphi$ alors $FV(\phi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$

Exemple : $\phi 1 : \forall\ x, \forall\ y\ p(x,y)$

$\phi 2 : \forall\ x\ (q(x) \vee p(x,y))$

Exemples :

- $\phi_1 \equiv (p\ (x\ ,\ f(y))\ \vee\ \forall\ z\ r\ (a,z))$
  $V(\phi_1) = \{x, y, z\}$ $BV(\phi_1) = \{z\}$ $FV\ (\phi_1) = \{x,y\}$

- $\phi_2 \equiv (\forall\ x\ p(x,y,z))\ \vee\ \forall\ z\ (p(z) \Rightarrow r(z))$
  $V(\phi_2) = \{x, y, z\}$ $BV(\phi_2) = \{x, z\}$ $FV(\phi_2) = \{y, z\}$

Remarque : z est à la fois libre et liée dans ϕ_2

Exercice : Langage : ?

$\forall x \quad ((x \subset y) \Leftrightarrow \forall t\ (t \in x \Rightarrow t \in y))$

Libres : ?
Liées : ?

$((x \subset y) \wedge \exists y\ (y \in x)) \Rightarrow \exists x\ (x \in y)$

Libres : ?
Liées : ?

Formules particulières

- Si $FV(\phi) = \emptyset$ alors ϕ est une ***formule close***
- Si $FV(\phi) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ alors

  $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n\ \phi$ ***clôture universelle***

  $\exists x_1, x_2, \ldots, x_n\ \phi$ ***clôture existentielle***

- Si $\phi \equiv p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ alors ϕ est un atome ou ***litteral positif***

- Si $\phi \equiv \neg\ p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ alors ϕ est un atome nié ou ***litteral négatif***

- Si $\phi \equiv \forall x_1,x_2, \ldots, x_n\ (\phi_1 \vee \phi_2 \vee \ldots \vee \phi_n)$ avec ϕ_i un littéral alors ϕ est une ***clause***
- Si $\phi \equiv \forall x_1, x_2, \ldots, x_n\ (\neg\ \phi_1 \vee \neg\ \phi_2 \vee \ldots \vee \neg\ \phi_n \vee \varphi)$ où les ϕ_i et φ sont des atomes, alors ϕ est une ***clause de Horn***

Axiomes

- ***Un axiome est utilisé pour faire des déductions***
- On « identifie » les formules du langage par rapport aux axiomes pour faire ces déductions
- Quand on passe à un domaine sémantique, ***l'axiome doit être vrai et sa validité ne doit pas dépendre de la valeur de ses variables***

  → un axiome est une ***formule close*** c'est à dire que toutes ses variables sont liées

Exemple :

Soit $\phi 1$ et $\phi 2$ deux formules du langage L contenant deux symboles de relation = et <

$\phi 1 : \forall x, \forall y\ ((x = y) \vee (x > y) \vee (x < y))$

$\phi 2 : \forall x\ ((y < x) \vee (y=x))$

x et y sont liées dans $\phi 1$; x est liée dans $\phi 2$; y est libre dans $\phi 2$
$\phi 1$ n'a pas de variable libre

Quand on interprète $\phi 1$ et $\phi 2$ dans des mondes sémantiques, $\phi 1$ est une Formule soit valide soit non valide. Par contre, la validité de $\phi 2$ dépend de la valeur de y

Par exemple, pour les entiers positifs, $\phi 1$ est toujours vraie mais $\phi 2$ est vraie Quand on interprète y comme la valeur 0 et elle est fausse sinon.

Un axiome est une formule close

Les formules à démontrer sont aussi des formules closes