SI3

Informatique Théorique | 1 heure | 21 Novembre 2017

Si vous manquez de place pour répondre à une question, poursuivez à la fin de la copie.

Nom, Prénom et Groupe: ______________________________

Question	Points	Note
Preuve syntaxique par 0-Résolution	4	
Unification	6	
Résolution	8	
Entiers Relatifs	3	
Flottants	4	
Total:	25	

Question 1: Preuve syntaxique par 0-Résolution . . . .

On veut démontrer la validité du raisonnement suivant par la méthode de 0- résolution :

$$Hypotheses : [A \Rightarrow (\neg B \vee C)] \wedge [B \Rightarrow (A \wedge \neg C)]$$

$$Conclusion : \neg B$$

(a) $\boxed{\text{2 points}}$ Quelles sont les clauses à partir desquelles on doit trouver une contradiction ?

Solution: Les hypothèses deviennent
- $C_1 : \neg A \vee \neg B \vee C$
- $C_2 : \neg B \vee A$
- $C_3 : \neg B \vee \neg C$
- et on ajoute la négation de la conclusion $C_4 : B$

(b) $\boxed{\text{2 points}}$ Faites la preuve (par 0-résolution obligatoirement)

Solution: Le raisonement est valide, en effet on peut obtenir la clause vide :

- $C_4; C_1 \models C_5 : \neg A \vee C$
- $C_2; C_4 \models C_6 : A$
- $C_5; C_6 :\models C_7 : C$
- $C_3 C_4 :\models C_8 : \neg C$
- et l'on obtient la clause vide a partir de C_7 et C_8

Question 2: Unification. . . . .

Calculez, si il existe un unificateur le plus général des paires d'atomes (A_1,A_2). En cas d'échec indiquez pourquoi les atomes ne sont pas unifiables.Dans cet exercice, p est un prédicat, u,v,w,x,y,z sont des variables, f et g sont des fonctions, a et b sont des constantes.

(a) $\boxed{\text{2 points}}$

- $A_1 = p(f(g(x,y)),g(v,w),y)$
- $A_2 = p(f(z),x,f(x))$

Solution:

- $\sigma_1[z|g(x,y)]$ $A'_1 = p(f(g(x,y)),g(v,w),y)$ $A'_2 = p(f(g(x,y)),x,f(x))$
- $\sigma_2[x|g(v,w)]$ $A"_1 = p(f(g(g(v,w),y)),g(v,w),y)$
  $A"_2 = p(f(g(g(v,w),y)),g(v,w),f(g(v,w)))$
- $\sigma_3[y|f(g(v,w))]$ $A"'_1 = p(f(g(g(v,w),f(g(v,w)))),g(v,w),f(g(v,w)))$
  $A"'_2 = p(f(g(g(v,w),f(g(v,w)))),g(v,w),f(g(v,w)))$

A_1 et A_2 sont donc unifiables, un unificateur le plus général est $\sigma = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$

(b) $\boxed{\text{2 points}}$

- $A_1 = p(x,f(u,x))$
- $A_2 = p(f(y,a),f(z,f(b,z)))$

Solution:

- $\sigma_1[x|f(y,a)]$ $A'_1 = p(f(y,a),f(u,f(y,a)))$ $A'_2 = p(f(y,a),f(z,f(b,z))$
- $\sigma_2[u|z]$ $A"_1 = p(f(y,a),f(z,f(y,a)))$
  $A"_2 = p(f(y,a),f(z,f(b,z))$
- $\sigma_3[y|b]$ $A"'_1 = p(f(b,a),f(z,f(b,a)))$
  $A"'_2 = p(f(b,a),f(z,f(b,z))$
- $\sigma_4[z|a]$ $A"'_1 = p(f(b,a),f(a,f(b,a)))$
  $A"'_2 = p(f(b,a),f(a,f(b,a))$

A_1 et A_2 sont donc unifiables, un unificateur le plus général est $\sigma = \sigma_4 \circ \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$

(c) $\boxed{\text{2 points}}$

- $A_1 = p(f(u,x),y)$
- $A_2 = p(f(y,a),g(u))$

Solution:

- $\sigma_1[y|u;x|a]$ $A'_1 = p(f(u,a),u)$ $A'_2 = p(f(u,a),g(u))$
- Et on ne peut pas unifier u et g(u), échec.

A_1 et A_2 ne sont donc pas unifiables.

Question 3: Résolution . . . .

Le but de cet exercice est d'utiliser la méthode de résolution pour montrer que l'ensemble des trois formules suivantes est inconsistant.

- F_1 : $\exists z[(q(f(z)) \wedge s(f(z),a))]$
- F_2 : $\forall x \forall y[\neg \exists z[p(x,y) \wedge s(x,z)]]$
- F_3 : $\forall x[(q(x) \wedge \exists w[s(x,w)]) \Rightarrow (\exists y[r(y) \wedge p(x,y)])]$

où

- f est une fonction
- p,q,r,s sont des prédicats
- w,x,y,z sont des variables

(a) $\boxed{\text{2 points}}$ Mettre les trois formules sous forme prénexe

Solution:

- F_1 : $\exists z[(q(f(z)) \wedge s(f(z),a))]$ est déjà sous forme de prénexe
- F_2 : $\forall x \forall y[\neg \exists z[p(x,y) \wedge s(x,z)]]$ ne l'est pas ,on peut transformer en F_2' : $\forall x \forall y \forall z[\neg p(x,y) \vee \neg s(x,z)]$
- F_3 n'est pas sous forme prénexe Plusieurs formes prénexes possibles dont :
  - $F_3'^1$: $\forall x \exists y \forall w\ [(q(x) \wedge s(x,w)) \Rightarrow (r(y) \wedge p(x,y))]$
  - $F_3'^2$: $\forall x \exists y \forall w[\neg(q(x) \vee \neg s(x,w)) \vee (r(y) \wedge p(x,y))]$
  - $F_3'^3$: $\forall x \forall w \exists y[\neg(q(x) \vee \neg s(x,w)) \vee (r(y) \wedge p(x,y))]$

(b) $\boxed{\text{2 points}}$ Skolémisez les formules prénexes que vous venez d'établir

Solution:

- Pour F_1 on introduit une constante z_0: et l'on obtient $(q(f(z_0)) \wedge s(f(z_0),a))$
- F_2' est déjà sous forme de Skolem
- F_3' n'est pas sous forme de Skolem, on introduit une fonction g d'arité 1 (pour $F_3'^1$ et$F_3'^2$) ou 2 (pour $F_3'^3$) et l'on obtient
  - $F_3"^1$: $\forall x \forall w[(q(x) \wedge s(x,w)) \Rightarrow (r(g(x)) \wedge p(x,g(x)))]$
  - $F_3"^2$: $\forall x \forall w[\neg(q(x) \vee \neg s(x,w)) \vee (r(g(x)) \wedge p(x,g(x)))]$
  - $F_3"^3$: $\forall x \forall w[\neg(q(x) \vee \neg s(x,w)) \vee (r(g(x,z)) \wedge p(x,g(x,z))]$

(c) $\boxed{\text{2 points}}$ Transformez maintenant vos formules en un système de Clauses

Solution:

- $C_1 : q(f(z_0)$
- $C_2 : s(f(z_0,a)$
- $C_3 : \neg p(x,y) \vee \neg s(x,z)$
- $C_4 : \neg q(x) \vee \neg s(x,w) \vee r(g(x))$
- $C_5 : \neg q(x) \vee \neg s(x,w) \vee p(x,g(x))$

ou avec des $g(x,z)$ ....

(d) $\boxed{\text{2 points}}$ Il reste à utiliser la méthode de résolution pour dériver la clause vide

Solution:

- C_1 et C_5 et substitution : $\sigma[x|f(z_0)]$
  $C_6 : \neg s(f(z_0),w)) \vee p(f(z_0),g(f(z_0))$
- C_2 et C_6 et substitution $\sigma[w|a]$
  $C_7 : p(f(z_0),g(f(z_0))$
- C_3 et C_7 et substitution $\sigma[x|f(z_0); y|g(f(z_0)]$
  $C_8 : \neg s(f(z_0),z)$
- C_8 et C_2 et substitution $\sigma[z|a]$ _ et l'on obtient la clause vide

Question 4: Entiers Relatifs . . . .

On suppose dans cette question qu'on représente les entiers relatifs en base deux sur seize bits

Pour faciliter l'écriture et la lecture il vous est recommandé d'utiliser la notation 0^k (ou 1^k) pour noter le mot composé de k 0 dans cette question et la question suivante

(a) $\boxed{\text{1 point}}$ Représenter dans le tableau ci-dessous l'entier dont l'écriture en base dix est 153 selon les trois méthodes signe, grandeur, complément à un, complément à deux

signe grandeur

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Solution:

0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

complement à un

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Solution:

0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

complément à deux

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Solution:

0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

(b) $\boxed{\text{1 point}}$ Représenter dans le tableau ci-dessous l'entier dont l'écriture en base dix est -127 selon les trois méthodes signe, grandeur, complément à un, complément à deux

signe grandeur

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Solution:

1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

complement à un

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Solution:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

complément à deux

Solution:

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

(c) 1 point Donnez un exemple où l'addition n'est plus associative dans le cas de la représentation en complément à deux.

Solution:
a et b positifs, c negatif a+b trop grand mais pas a+b+c

Question 5: Flottants . . . .

(a) $\boxed{\text{2 points}}$ L'écriture du réel x en base dix est 11,25. L'écriture du réel y en base 10 est 13,025. Ecrire x et y en base deux.

Solution:

$$x = 1011{,}01$$

$$y = 1101{,}000\{0011\}^*$$

(b) $\boxed{\text{2 points}}$ Le réel z s'écrit 1011,00111 en base deux, le réel t s'écrit $-11{,}1$ en base deux quels sont leur codage dans une représentation en virgule flottante avec 1 bit pour le signe, 5 bits pour l'exposant et 10 bits pour la pseudo mantisse ?

z :																
	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

t :																
	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Solution:

z :	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

t :	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0