Informatique Théorique
Définitions inductives
SI3-MAM3

1 Libre ou pas

1. Donnez et prouvez une définition inductive pour l'ensemble des mots binaires palindromes. Est-ce que la définition est libre ?
2. Donner un exemple de schéma inductif, ne comportant qu'une règle et qui cependant n'est pas libre.
3. Donner et prouver une définition inductive pour l'ensemble des mots sur l'alphabet $\Sigma = \{a,\ b\}$ ne comportant pas deux a consécutifs. Votre schéma est-il libre ?

2 Pas de jaloux

Soit M le sous ensemble de $\{a,\ b\}^\star$ constitué des mots ayant autant de a que de b.
Soit E l'ensemble défini de manière inductive par

- Base : $B = \{\epsilon\}$
- Règles : $\Omega = \{\omega_g, \omega_d\}$ avec $\omega_g(m) = amb$ et $\omega_d(m) = bma$.

1. Le schéma définissant E est-il libre ?
2. A-t-on $M \subset E$?
3. A-t-on $E \subset M$?
4. Déterminez et prouvez une définition inductive pour M.
5. Donnez une définition non inductive de E.

3 Maux de parenthèses

1. Soit LP le langage défini sur l'alphabet $\{(,\ )\}$ par
   - Base : $B = \{\epsilon\}$
   - Règle : $\Omega = \{\omega\}$ avec $\omega(u, v) = (u)v$.

   - Montrer par induction structurelle que les mots de LP ont exactement autant de (que de).
   - Le schéma est il libre ?
2. Considérons LBP l'ensemble des mots m sur l'alphabet $\Sigma = \{(,\ )\}$ tels que $|m|_(= |m|_)$ et dans tout pr éfixe u de m, $|u|_(\geq |u|_)$.
   (a) Montrez que $LBP = LP$
   (b) Montrez que le schéma définissant LP est libre
3. $LP2$ est définit inductivement par
   - Base : $B = \{\epsilon\}$
   - Règles : $\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2\}$ avec $\omega_1(u) = (u)$ et $\omega_2(u, v) = uv$.

   (a) Montrez que $LP = LP2$.
   (b) Le schéma définissant $LP2$ est-il libre ?

4 (mots

Soit A l'alphabet $\{(,)\}$ et soit L le sous ensemble de $A^\star$ formé des mots dont tous les préfixes contiennent au moins autant de (que de).

1. Donnez une définition inductive de L et prouvez-la.
2. Montrez que L n'est pas égal à l'ensemble des mots bien parenthésés. Comment peut-on associer à un mot de L, un mot bien parenthésé ?
3. Le schéma que vous avez donné à la première question est-il libre ou ambigu ?

5 Expression polonaise

Soient Var et Op deux alphabets disjoints.

On pose $A = Var \cup Op$.

On appelle langage des expressions polonaises préfixées le langage L sur A défini par le schéma:

- Base $Var \subset L$
- Règle $\omega \in Op, u, v \in L \Rightarrow \omega uv \in L$

1. Montrez qu'un mot w de A^* appartient à L si et seulement si il vérifie les deux conditions suivantes:
   - w contient une variable de plus que d'opérateurs
   - tout préfixe propre p de w contient au moins autant d'opérateurs que de variables
2. Montrez que le schéma définissant L est libre.
3. Écrire une méthode récursive pour calculer la valeur d'une expression polonaise
4. Écrire une méthode récursive pour transformer une expression polonaise en expression complétement parenthésée.