تمرینات جبر خطی

سری سه

مدرس درس: دکتر یاسمی

مهلت تحویل: ۱۹ آبان‌ماه ۹۸

۱. برای هر یک از تبدیل‌های زیر، ابتدا بررسی کنید آیا تبدیل خطی است، سپس اگر تبدیل خطی می‌باشد، فضای پوچ، فضای مقادیر و یک پایه برای هر کدام بیابید.

$$
\begin{aligned}
(i)T_1 : \quad & \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3 \\
& (m,n,l) \mapsto (\overline{3}m + \overline{4}n + \overline{5}l, \overline{5}m + \overline{12}n + \overline{13}l, \overline{11}m + \overline{4}n + \overline{9}l) \\
(ii)T_2 : \quad & M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2 \\
& A \mapsto (tr(A), \overline{tr}(A))
\end{aligned}
$$

راهنمایی:

$\mathbb{Z}_5$ مجموعه $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$، با اعمال زیر میدان است.

$$\overline{a} = \{b \in \mathbb{Z} | a \overset{5}{\equiv} b\}; \quad \overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}; \quad \overline{a} \times \overline{b} = \overline{a \times b}$$

$tr(A)$ مجموع درایه‌های قطر اصلی و $\overline{tr}(A)$ مجموع درایه‌های قطری فرعی A است.

۲. اگر $T: V \to W$ یک تبدیل خطی، $\{v_1, \dots, v_k\}$ یک پایه برای $N(T)$ و $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه برای V باشد، بررسی کنید که آیا $\{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\}$ یک پایه برای $R(T)$ است یا خیر.

۳. فرض کنید V یک F-فضای برداری n-بعدی باشد. نشان دهید V و F^n یکریخت‌اند.

۴. اگر T تبدیل خطی، α پایه مرتب $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ و β پایه مرتب $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر تعریف شده باشند، $[T]_\alpha^\beta$ را محاسبه کنید.

$$
\begin{aligned}
T: \quad & M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2 \\
& \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto (a+d, b+c) \\
\alpha \quad & = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
\beta \quad & = \Big((1,1), (1,-1) \Big)
\end{aligned}
$$

۵*. اگر V یک $\mathbb{R}$-فضای برداری متناهی‌البعد باشد و $S \subseteq V$، مجموعه S° را به صورت $\{T \in \mathcal{L}(V,\mathbb{R}) \mid \forall v \in S \;\; T(v) = 0\}$ تعریف می‌کنیم. هر یک از موارد زیر را با دلایل منطقی اثبات یا رد کنید.

آ) اگر $S \subseteq V$ یک مجموعه دلخواه باشد، آنگاه $S^\circ \leq \mathcal{L}(V,\mathbb{R})$.

ب) اگر $S = \emptyset$، آنگاه $S^\circ = \mathcal{L}(V,\mathbb{R})$.

پ) اگر $S = V$، آنگاه $S^\circ = \{0\}$.

ت) اگر $H \leq \mathcal{L}(V,\mathbb{R})$ یک زیرفضای دلخواه باشد، آنگاه $S \subseteq V$ وجود دارد که $S^\circ = H$.

ث) اگر $H \leq \mathcal{L}(V,\mathbb{R})$ یک زیرفضای دلخواه باشد، آنگاه $S \leq V$ به صورت یکتا وجود دارد که $S^\circ = H$.

ج) اگر $S \leq V$ **یک زیرفضای دلخواه باشد، آنگاه در مورد بعد این فضا می‌توان گفت** $dim(S) + dim(S^\circ) = dim(V)$.

چ) اگر $S_۱$ **و** $S_۲$ **زیرفضاهای** V **باشند،** $S_۱ = S_۲ \Rightarrow S_۱^\circ = S_۲^\circ$.

ح) اگر $S_۱$ **و** $S_۲$ **زیرفضاهای** V **باشند،** $S_۱^\circ = S_۲^\circ \Rightarrow S_۱ = S_۲$.

ذ) اگر $S_۱$ **و** $S_۲$ **زیرفضاهای** V **باشند،** $(S_۱ + S_۲)^\circ = S_۱^\circ \cap S_۲^\circ$.

خ) اگر $S_۱$ **و** $S_۲$ **زیرفضاهای** V **باشند،** $S_۱ \subseteq S_۲ \Rightarrow S_۲^\circ \subseteq S_۱^\circ$.

د) اگر $S_۱$ **و** $S_۲$ **زیرفضاهای** V **باشند،** $S_۲^\circ \subseteq S_۱^\circ \Rightarrow S_۱ \subseteq S_۲$.

ذ) اگر $S_۱$ **و** $S_۲$ **زیرفضاهای** V **باشند،** $(S_۱ + S_۲)^\circ = S_۱^\circ \cap S_۲^\circ$.

ر) اگر $S_۱$ **و** $S_۲$ **زیرفضاهای** V **باشند،** $(S_۱ \cap S_۲)^\circ = S_۱^\circ + S_۲^\circ$.