



تمرینات جبر خطی  
سری یک  
مدرس درس: دکتر یاسمی  
مهلت تحویل: ۲۱ مهرماه ۹۸

هر یک از گزاره‌های زیر را با دلایل منطقی اثبات یا رد کنید.

۱.  $\mathbb{Z}^3$  یک  $\mathbb{Z}$ -فضای برداری است.

۲.  $P_n(\mathbb{R})$  یک  $\mathbb{R}$ -فضای برداری است.

$$(P_n(F) = \{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \mid a_i \in F \quad 0 \leq i \leq n\})$$

۳.  $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(\mathbb{R})$  یک  $\mathbb{R}$ -فضای برداری است.

۴. به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $\mathbb{C}^n$  یک  $\mathbb{R}$ -فضای برداری است.

۵.  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  یک  $\mathbb{C}$ -فضای برداری است.

( $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  مجموعه همه توابع با دامنه  $\mathbb{N}$  و برد  $\mathbb{C}$  است.)

۶. مجموعه ماتریس‌های  $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid ad - bc = 0 \right\}$  یک

$\mathbb{R}$ -فضای برداری است.

۷. مجموعه  $\{f, g, h\}$  - با توجه به تعاریف زیر - در  $\mathbb{R}$ -فضای برداری

$\mathcal{F}(\{0, 1, 2\}, \mathbb{R})$  مستقل خطی هست.

( $\mathcal{F}(A, B)$  مجموعه همه توابع با دامنه  $A$  و برد  $B$  است.)

$$f(n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor; \quad g(n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor; \quad h(n) = 1 + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$$

۸. مجموعه  $\{(2, 6, 3), (3, 7, 2), (3, 7, 1)\}$  در  $\mathbb{R}^3$  مستقل خطی است.
۹. مجموعه  $\{u+v, u+w, v+w\}$  در  $V$  مستقل خطی است اگر و تنها اگر  $\{u, v, w\}$  مستقل خطی باشد.
۱۰. مجموعه  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$  یک پایه برای  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  است. (اگر پایه نیست، یک پایه برای آن معرفی کنید).
۱۱. مجموعه زیر یک پایه برای  $\langle S \rangle$  است. (اگر پایه نیست، یک پایه برای آن معرفی کنید).
- $S = \{(1, -1, 0, 1), (-2, 3, 1, 2), (1, 0, 1, 5), (1, 2, 3, 13), (2, -2, 4, 5)\}$

### سوال امتیازی

تحقیق کنید که آیا مجموعه  $\{f_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{f_\infty\}$  - با توجه به تعاریف زیر - پایه  $\mathbb{C}$ -فضای برداری  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  است یا خیر. اگر مجموعه معرفی شده پایه نبود، یک پایه برای فضای برداری مورد نظر بیابید. بار دیگر این فضا را روی میدان  $\mathbb{R}$  در نظر بگیرید و یک پایه برای آن بیابید.

$$f_i(n) = \begin{cases} 1 & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$$

$$f_\infty(n) = 1$$

راهنمایی: یک مجموعه نامتناهی را مستقل خطی گوئیم هرگاه هر زیرمجموعه متناهی آن مستقل خطی باشد. همچنین با توجه به تعریف زیر، مجموعه نامتناهی  $S$  را مولد  $F$ -فضای برداری  $V$  می‌نامیم هرگاه  $\langle S \rangle = V$ .

$$\langle S \rangle = \{r_1 s_1 + \cdots + r_n s_n \mid n \geq 1, \{r_i\} \in F, \{s_i\} \in S\}$$