پایان‌ترم جبر خطی

۲۳ دی‌ماه ۹۸

۱. با در نظر گرفتن ماتریس‌های زیر به سوالات پاسخ دهید.

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}; \quad \mathcal{I} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

آ. آیا ستون‌های A مولد $V = \{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x = z - ۳y;\ ۳y = ۴z + ۵x\}$ هستند؟ (۱۰ *نمره*)

ب. تمام جواب‌های معادله $(A - I)X = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۷ \\ ۱۵ \end{bmatrix}$ را (در صورت وجود) بیابید. (۱۰ *نمره*)

پ. رتبه ماتریس A را بیابید. (۱۰ *نمره*)

ت. دترمینان ماتریس $(A \times \mathcal{I})^۴$ را بیابید. (۵ *نمره*)

ث. پایه‌ای برای $N(L_A)$ و پایه‌ای برای $R(L_A)$ معرفی کنید. (۱۰ *نمره*)

ج. اگر ماتریس $B = \mathcal{I} - I$ قطری‌شدنی است ماتریس وارون‌پذیر Q و ماتریس قطری D را چنان بیابید که $B = QDQ^{-۱}$. در غیر این صورت نشان دهید B قطری شدنی نیست. (۱۵ *نمره*)

۲. فرض کنید $\alpha = (v_۱, v_۲, v_۳)$ و $\beta = (u_۱, u_۲, u_۳)$ دنباله‌های مرتبی از اعضای $V = \mathcal{L}(\mathbb{R}^۳, \mathbb{R})$ هستند که به صورت زیر تعریف شده‌اند.

$$\begin{aligned} &v_۱(x,y,z) = x, \quad v_۲(x,y,z) = y, \qquad v_۳(x,y,z) = z; \\ &u_۱(x,y,z) = x, \quad u_۲(x,y,z) = x + y, \quad u_۳(x,y,z) = x + y + z. \end{aligned}$$

آ. ثابت کنید $\{v_۱, v_۲, v_۳\}$ و $\{u_۱, u_۲, u_۳\}$ پایه‌هایی برای V هستند. (۱۵ *نمره*)

راهنمایی: از آنجا که $dim(V) = ۳$ اگر یکی از دو مورد استقلال خطی یا مولد بودن را ثابت کنید مورد دیگر نیز نتیجه می‌شود.

ب. اگر $d(x,y,z) = (x^{\frac{۱}{۲}} + y^{\frac{۱}{۲}})^۲ + (x^{\frac{۱}{۲}} - y^{\frac{۱}{۲}})^۲$ نشان دهید $d \in V$. (۵ *نمره*)

پ. ماتریس‌های $[d]_\alpha$ و $[d]_\beta$ را بیابید. (۱۰ *نمره*)

ت. ماتریس تبدیل پایه $[I_V]_\alpha^\beta$ را بیابید به طوری که برای هر عضو دلخواه $f \in V$ داشته باشیم (۱۰ *نمره*)

$$[f]_\beta = [I]_\alpha^\beta [f]_\alpha.$$

۳. ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & \lambda & ۰ & ۰ & \dots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \lambda & ۰ & \dots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \lambda & \dots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & \dots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \dots & ۱ & \lambda \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

نشان دهید ماتریسی مانند B وجود دارد به طوری که $BAB^{-۱} = A^T$. (۱۵ نمره)

۴. دو بردار $u, v \in \mathbb{R}^n$ را به همراه ضرب داخلی معمول روی $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید.

آ. نشان دهید $\|u+v\|^۲ = \|u\|^۲ + \|v\|^۲$ اگر و تنها اگر u و v متعامد باشند. (۱۰ نمره)

ب. نشان دهید $\|u+v\|^۲ + \|u-v\|^۲ = ۲\|u\|^۲ + ۲\|v\|^۲$. (۱۰ نمره)

۵. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. A را F-قطری‌شدنی گوییم اگر ماتریس‌های $Q \in M_{n\times n}(F)$ و $D \in M_{n\times n}(F)$ موجود باشند به طوری که $A = QDQ^{-۱}$. درستی هر یک از موارد زیر را اثبات یا رد کنید. (دقت کنید درایه‌های A حقیقی هستند لذا $A^\dagger = A^T$.) (۲۵ نمره)

آ. اگر L_A خودالحاق باشد، A ماتریس $\mathbb{R}$-قطری‌شدنی است.

ب. اگر L_A خودالحاق باشد، A ماتریس $\mathbb{C}$-قطری‌شدنی است.

پ. اگر L_A نرمال باشد، A ماتریس $\mathbb{R}$-قطری‌شدنی است.

ت. اگر L_A نرمال باشد، A ماتریس $\mathbb{C}$-قطری‌شدنی است.

موفق باشید!