

تمرینات جبر خطی
سری چهار
مدرس درس: دکتر یاسمی
مهلت تحویل: ۳ آذرماه ۹۸



۱. فرض کنید V یک فضای برداری و $M \leq V$ و $N \leq V$ زیرفضاهای آن باشند به طوری که $\dim(M) + \dim(N) = \dim(V)$. نشان دهید $M + N = V$ اگر و تنها اگر $M \cap N = \{0\}$.
۲. فرض کنید V یک فضای برداری و $T : V \rightarrow V$ یک تبدیل خطی باشد. آ. نشان دهید $R(T)$ ، T -پایا است.
- ب. بررسی کنید آیا $T_{R(T)}$ یک به یک و پوشا است یا نه. اگر هست ثابت کنید و در غیر این صورت یک T به عنوان مثال نقض معرفی کنید و بررسی کنید $T_{R(T)}$ در چه شرایطی یک به یک و پوشا خواهد بود.
- راهنمایی: $W \leq V$ را T -پایا گوئیم هرگاه $\forall x \in W \quad T(x) \in W$. همچنین T_W را تحدید T به W می نامیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$T_W : W \rightarrow W$$

$$x \mapsto T(x)$$

۳. اگر T تبدیل خطی و α و β پایه های مرتب \mathbb{R}^2 به صورت زیر تعریف شده باشند، $[T]_{\alpha}^{\beta}$ را محاسبه کرده و رتبه آن را بیابید.

$$\begin{aligned}
 T : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
 (a, b) &\mapsto (a + b, a - b) \\
 \alpha &= ((1, 0), (0, 1)) \\
 \beta &= ((1, 1), (1, -1))
 \end{aligned}$$

۴*. فرض کنید V یک F -فضای برداری باشد. برای زیرفضای دلخواه N از V ، رابطه \sim را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x \sim y \iff x - y \in N$$

(آ) ثابت کنید \sim هم‌ارزی است.
 راهنمایی: یک رابطه مانند R را هم‌ارزی گوئیم هرگاه سه خاصیت زیر را داشته باشد.

$$aRa; \quad aRb \Rightarrow bRa; \quad aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$$

برای هر $x \in V$ ، مجموعه همه اعضایی که با x رابطه دارند را با $[x]$ نمایش می‌دهیم و کلاس هم‌ارزی x می‌نامیم. مجموعه همه کلاس‌های هم‌ارزی را حاصل تقسیم V بر N می‌نامیم و با $\frac{V}{N}$ نمایش می‌دهیم. به زبان دقیق‌تر داریم

$$\begin{aligned}
 [x] &= \{v \in V \mid v \sim x\} \\
 \frac{V}{N} &= \{[x] \mid x \in V\}
 \end{aligned}$$

(ب) نشان دهید $N = [0]$.

(پ) نشان دهید عملگرهای زیر خوش‌تعریف هستند.

$$\begin{aligned}
 + : \quad V \times V &\rightarrow V \\
 [v] + [w] &\mapsto [v + w] \\
 \cdot : \quad F \times V &\rightarrow V \\
 r \cdot [v] &\mapsto [rv]
 \end{aligned}$$

- ت) ثابت کنید $\frac{V}{N}$ با اعمال بالا یک F -فضای برداری است.
- ث) نشان دهید اگر $N = \{0\}$ آنگاه $\frac{V}{N} \simeq V$.
- ج) نشان دهید اگر $N = V$ آنگاه $\frac{V}{N} = \{[0]\}$.
- چ) تبدیل خطی T که به صورت زیر تعریف شده را نگاشت خارج قسمتی گوئیم. فضای پوچ و فضای مقادیر آن را بیابید.

$$T : \quad V \rightarrow \frac{V}{N} \\ v \mapsto [v]$$

ح) نشان دهید $\dim(N) + \dim(\frac{V}{N}) = \dim(V)$.