تمرینات جبر خطی

سری دو

مدرس درس: دکتر یاسمی

مهلت تحویل: ۴ آبان‌ماه ۹۸

۱. هر یک از گزاره‌های زیر را با دلایل منطقی اثبات یا رد کنید.

(آ) هر k بردار مستقل خطی در فضای برداری k-بعدی V پایه‌اند.

(ب) هر k بردار مولد V در فضای برداری k-بعدی V پایه‌اند.

(پ) اگر $W_۱$ و $W_۲$ زیرفضاهای V باشند، $W_۱ \cup W_۲$ نیز زیرفضای V است.

(ت) اگر $W_۱$ و $W_۲$ زیرفضاهای V باشند، $W_۱ \cap W_۲$ نیز زیرفضای V است.

(ث) اگر $W_۱$ و $W_۲$ زیرفضاهای V باشند، $W_۱ \setminus W_۲$ نیز زیرفضای V است.
$(A \setminus B = \{x \in A | x \notin B\})$

(ج) اگر $W_۱$ و $W_۲$ زیرفضاهای V باشند، $W_۱ \Delta W_۲$ نیز زیرفضای V است.
$(A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B))$

(چ) اگر $W_۱$ و $W_۲$ زیرفضاهای V باشند، $W_۱ + W_۲$ نیز زیرفضای V است.
$(V_۱ + V_۲ = \{v_۱ + v_۲ \mid v_۱ \in V_۱ \wedge v_۲ \in V_۲\})$

(ح) اگر $V_۱$، $V_۲$، $V_۳$ و $V_۴$ زیرفضاهای $M_{۳\times۴}(\mathbb{R})$ باشند، و بعد همگی آن‌ها برابر ۴ باشد، i و j وجود دارند که $V_i \cap V_j$ بیشتر از یک عضو دارد.

(خ) اگر V یک فضای برداری و $W_۱$ و $W_۲$ زیرفضاهای آن باشند، داریم $|W_۱ \cap W_۲| \leq \min(|W_۱|, |W_۲|)$.

(د) اگر V یک فضای برداری و $W_۱$ و $W_۲$ زیرفضاهای آن باشند، داریم $|W_۱ + W_۲| \leq |W_۱| + |W_۲|$.

(ذ) اگر V یک فضای برداری و W یک زیرفضای آن باشد؛ آنگاه اگر $\{v_۱, \dots, v_{|W|}\}$ یک پایه برای W باشد در این صورت $v_{|W|+۱}, \dots, v_{|V|}$ وجود دارند که $\{v_۱, \dots, v_{|V|}\}$ یک پایه برای V است.

(ر) اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد و S مولد V باشد، $B \subseteq S$ وجود دارد به طوری که B پایه‌ای برای V است. (دقت کنید که ممکن است S متناهی نباشد.)

۲. دستگاه معادلات خطی زیر به ازای چه مقادیری از $b_۱$، $b_۲$ و $b_۳$ جواب دارد. جواب‌های آن را بر حسب $b_۱$، $b_۲$ و $b_۳$ بیابید.

$$\begin{aligned} x + ۲y - ۲z &= b_۱ \\ ۲x + ۵y - ۴z &= b_۲ \\ ۴x + ۹y - ۸z &= b_۳ \end{aligned}$$

۳. فرض کنید $W_۱$ و $W_۲$ که در زیر تعریف شده‌اند زیرفضاهایی از $M_{۲\times۲}(\mathbb{R})$ باشند.

$$\begin{aligned} W_۱ &= \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ W_۲ &= \{\begin{bmatrix} ۰ & a \\ -a & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

بعد هر یک از مجموعه‌های $W_۱$، $W_۲$، $W_۱ + W_۲$ و $W_۱ \cap W_۲$ را در صورت فضای برداری بودن بیابید.

۴. بعد هر یک از فضاهای برداری زیر را بیابید.

$$(i) \quad \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a+d=0\right\}$$

$$(ii) \quad \{(a,b,c,d) \mid a+d=b+c\}$$

$$(iii) \quad \{ax^2+bx+c \mid 5a+3b+c=0 \wedge 3a+5b+2c=0 \wedge 7a+b=0\}$$

۵. اگر $\{V_1,\dots,V_n\}$ خانواده‌ای از فضاهای برداری باشد یک پایه برای $V=\prod_{i=1}^{n} V_i$ بیابید.

($\prod_{i=1}^{n} A_i$ حاصل‌ضرب دکارتی $A_1,\dots,A_n$ است.)

۶. گوییم $V=W_1\oplus W_2$ اگر $V=W_1+W_2$ و $W_1\cap W_2=\{0\}$. با توجه این تعریف به سوالات زیر پاسخ دهید.

(آ) اگر $V=W_1+W_2$، نشان دهید $|V|=|W_1|+|W_2|$ اگر و تنها اگر $V=W_1\oplus W_2$.

(ب) اگر $V=W_1+W_2$، B_V پایه‌ای برای V، B_{W_1} پایه‌ای برای W_1 و B_{W_2} پایه‌ای برای W_2 باشد، نشان دهید که $V=W_1\oplus W_2$ اگر و تنها اگر $B_{W_1}\Delta B_{W_2}=B_V$.

(پ) فرض کنید $V=W_1\oplus W_2$. همچنین فرض کنید $P_1:V\to V$ و $P_2:V\to V$ توابعی باشند به طوری که برای هر $v\in V$ که $w_1+w_2=v$ و $w_1\in W_1$ و $w_2\in W_2$ داشته باشیم $P_1(v)=w_1$ و $P_2(v)=w_2$.

(i) نشان دهید P_1 خوش‌تعریف است.

(ii) نشان دهید $P_1^2=P_1$.

(iii) نشان دهید $P_2=I-P_1$.

۷*. اگر W_1 زیرفضای فضای برداری V باشد و زیرفضایی یکتا مانند W_2 وجود داشته باشد که $V=W_1\oplus W_2$، نشان دهید $W_1=V$.