

۱. درونیابی لاگرانژ را معرفی کنید.
۲. قضایای زیر را ثابت کرده و نتیجه بگیرید اگر V و W دو فضای برداری یکریخت باشند ($T : V \rightarrow W$ یک یکریختی باشد) و $\{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای V باشد، $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ پایه‌ای برای W است.
 آ. اگر V و W دو فضای برداری، $T : V \rightarrow W$ تبدیل خطی و $\{v_1, \dots, v_n\}$ مولد V باشد، نشان دهید $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ مولد $R(T)$ است.
 ب. اگر V و W دو فضای برداری، $T : V \rightarrow W$ تبدیل خطی یک‌به‌یک و $\{v_1, \dots, v_n\}$ مستقل خطی باشد، نشان دهید $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ مستقل خطی است.
۳. در هر مورد بررسی کنید که T داده شده تبدیل خطی است یا خیر. اگر هست فضای پوچ، فضای مقادیر، پوچی و رتبه آن را به دست آورید.

$$(i) T_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \quad (a, b, c, d) \mapsto \begin{bmatrix} a+c & a \\ c & b+d \end{bmatrix}$$

$$(ii) T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (a, b) \mapsto ab$$

$$(iii) T_3 : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R}), \quad f \mapsto f'$$

۴. دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

نشان دهید اگر مجموعه $\{(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3)\}$ مستقل خطی باشد، تنها جواب دستگاه بالا $x = y = z = 0$ است.

۵. فرض کنید $T: V \rightarrow V$ یک تبدیل خطی باشد، $W \leq V$ را T -پایا گوئیم هرگاه $\forall x \in W \quad T(x) \in W$. همچنین T_W را تحدید T به W می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$T_W: W \rightarrow W$$

$$x \mapsto T(x)$$

در این صورت به سوالات زیر پاسخ دهید.

آ. نشان دهید اگر W ، T -پایا باشد، $N(T_W) = N(T) \cap W$.

ب. نشان دهید اگر $W = R(T) \oplus V$ ، و W ، T -پایا باشد، $W = N(T)$. (فرض کنید V متناهی‌البعد است.)

(گوئیم $W_1 \oplus W_2 = V$ اگر $W_1 + W_2 = V$ و $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.)

۶. کارخانه‌ای دارای دو ماشین M و N است. M روزانه ۱۵ ساعت و N روزانه ۱۰ ساعت می‌تواند کار کند. این کارخانه دو محصول A و B را تولید می‌کند. برای تولید یک واحد از A ، هریک از M و N به مدت ۱ ساعت و برای تولید یک واحد از B ، ماشین M نیم ساعت و ماشین N ربع ساعت کار می‌کنند. چند واحد از A و B باید در روز تولید شود تا مطمئن باشیم که M و N در تمام مدتی که قابل استفاده بوده‌اند کار می‌کرده‌اند؟

موفق باشید