تمرینات جبر خطی

سری پنج

مدرس درس: دکتر یاسمی

مهلت تحویل: ۸ دی‌ماه ۹۸

۱. درستی هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

$$i)\quad det\begin{bmatrix} a_1^0 & a_2^0 & \cdots & a_n^0 \\ a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i)$$

$$ii)^{\varepsilon}\qquad det\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix} = det(A).det(C)$$

(**A مربعی است.**)

۲. نشان دهید چندجمله‌ای مشخصه A و A^T یکسان است.

۳. یک عدد به جای k در معادله زیر قرار دهید تا تبدیل به اتحاد شود.

$$det\begin{bmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1+c_1 & a_2+c_2 & a_3+c_3 \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \end{bmatrix} = k.det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

۴. هر یک از دستگاه‌های معادلات زیر را با استفاده از روش کرامر را حل کنید.

$$i)\quad \begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ cx_1 + dx_2 = y_2 \\ ad - bc \neq 0 \end{cases}$$

$$ii)\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 10 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$iii)^{\varepsilon}\quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = -4 \\ -8x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$iv)^{\varepsilon}\quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = -2 \\ -8x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

۵. نشان دهید اگر $A \in M_n \times n(\mathbb{R})$ قطری‌شدنی باشد، آنگاه برای هر $k \in \mathbb{Z}$، ماتریس A^k قطری‌شدنی است.

۶. ماتریس $Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید تابع T که در زیر تعریف شده است یک تبدیل خطی است و پایه‌های $N(T)$ و $R(T)$ را بیابید.

$$\begin{aligned} T : M_{n\times n}(\mathbb{R}) &\to M_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto QA \end{aligned}$$

۷. فرض کنید $O \neq A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. برای هر $n \leq m \leq ۱$ یک زیرماتریس $m \times m$ از حذف کردن $n-m$ سطر و $n-m$ ستون دلخواه از ماتریس به‌دست می‌آید. صحت موارد زیر را ثابت کنید.

آ) اگر $k > rank(A)$، دترمینان همه‌ی زیرماتریس‌های $k \times k$ صفر است.

ب) اگر $k \leq rank(A)$، لااقل یک زیرماتریس $k \times k$ با دترمینان ناصفر وجود دارد.

پ) اگر k بزرگ‌ترین عددی باشد که زیرماتریس $k \times k$ با دترمینان ناصفر وجود دارد، نشان دهید $k = rank(A)$.

۸. به ازای هر یک از ماتریس‌های داده‌شده، موارد زیر را محاسبه کنید.

آ) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر با هر مقدار ویژه را محاسبه کنید.

ب) درصورت امکان ماتریس وارون‌پذیر Q_i و ماتریس قطری D_i را چنان بیابید که $A_i = Q_i D_i Q_i^{-۱}$.

پ) درصورت امکان یک پایه برای F^n متشکل از بردارهای ویژه بیابید.

$$i) \quad A_۱ = \begin{bmatrix} i & ۱ \\ ۱ & -i \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$$

$$ii)^{\varepsilon} \quad A_۲ = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$$

$$iii) \quad A_۳ = \begin{bmatrix} ۰ & -۲ & -۳ \\ -۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۵ \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

$$iv)^{\varepsilon} \quad A_۴ = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۱ \\ ۴ & ۱ & -۴ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

۹$^{\varepsilon}$**. اگر** A **و** B **دو ماتریس** $n \times n$ **مشابه باشند، نشان دهید هر مقدار ویژه** A **مقدار ویژه** B **است و بالعکس.**

۱۰. اگر A **و** B **ماتریس‌های** $n \times n$ **باشند، به کمک تعریف ترانهاده و ضرب ماتریس‌ها نشان دهید**

$$(AB)^T = B^T A^T$$

۱۱$^{\varepsilon}$**. اگر** A **ماتریسی پوچ‌توان باشد، نشان دهید** $tr(A) = ۰$.

راهنمایی: ماتریس A **را پوچ‌توان گوییم هرگاه** k**یی وجود داشته باشد که** A^k **ماتریس صفر باشد.**