

میان‌ترم دوم جبر خطی

۲۵ آبان‌ماه ۹۸

۱. فرض کنید ماتریس A به فرم تحویل‌یافته سطری باشد. آنگاه رتبه A برابر تعداد سطرهای ناصفر است. **راهنمایی:** ماتریس A را به فرم تحویل‌یافته سطری گوییم هرگاه در هر سطر یا همه درایه‌ها صفر باشند یا اولین درایه غیر صفر در سطر یک باشد و در زیر این یک، همه درایه‌ها صفر باشند.
۲. فرض کنید A یک ماتریس مربعی و L_A یک‌به‌یک باشد، نشان دهید L_{A^T} نیز یک‌به‌یک است.
۳. نشان دهید اگر $S \subseteq T$ آنگاه $S^\circ \subseteq T^\circ$.
- راهنمایی:** اگر V یک \mathbb{R} -فضای برداری و $S \subseteq V$ باشد، مجموعه S° را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\{T \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) \mid \forall v \in S \ T(v) = 0\}$$

۴. فرض کنید V یک فضای برداری متناهی‌البعد باشد، یک تبدیل یک‌به‌یک و پوشا از V به $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ معرفی کنید.
۵. فرض کنید $V \leq \mathbb{R}^4$ فضای جواب‌های معادله $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$ باشد. **آ.** ماتریس A را چنان بیابید که $L_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ طوری باشد که $R(L_A) = V$. **ب.** پایه‌ای برای V بیابید.
۶. تبدیل خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$$

همچنین پایه‌های مرتب α و β را برای \mathbb{R}^3 در نظر بگیرید.

$$\alpha = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$$

$$\beta = ((1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1))$$

- آ.** آیا T وارون‌پذیر است؟ در این صورت T^{-1} را بیابید.
- ب.** نشان دهید. $(T^2 - I)(T - 3I) = 0$.
- پ.** ماتریس $[T]_\alpha^\alpha$ را بیابید.
- ت.** رتبه ماتریس $[T]_\alpha^\beta$ را بیابید.
۷. فرض کنید V یک فضای برداری متناهی‌البعد و $T: V \rightarrow V$ یک تبدیل خطی باشد. نشان دهید اگر $r(T) = r(T \circ T)$ آنگاه $V = R(T) \oplus N(T)$.
- راهنمایی:** گوییم $V = W_1 \oplus W_2$ اگر $V = W_1 + W_2$ و $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. همچنین جمع دو فضای برداری به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1 \wedge w_2 \in W_2\}$$

موفق باشید!