تمرینات جبر خطی

سری شش

مدرس درس: دکتر یاسمی

این سری از تمرینات تحویلی نیستند.

۱. می‌دانیم $\mathcal{L}(\mathbb{R}^۲, \mathbb{R})$ یک فضای برداری دوبعدی است. فرض کنید $T_۱(x, y) = x$ و $T_۲(x, y) = y$ دو تبدیل خطی باشند.

آ. نشان دهید $\{T_۱, T_۲\}$ مولد $\mathcal{L}(\mathbb{R}^۲, \mathbb{R})$ است. یعنی هر تبدیل خطی دلخواه مانند T را می‌توان به صورت ترکیب خطی $T_۱$ و $T_۲$ نوشت.

ب. نشان دهید اگر $T = aT_۱ + bT_۲$، این تبدیل به فرم $T(x, y) = ax + by$ است و بالعکس.

پ. نشان دهید $\{T_۱, T_۲\}$ مستقل خطی هستند.

ت. با توجه به موارد بالا سعی کنید پایه‌ای برای $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ بیابید.

۲. موارد زیر را ثابت کنید.

آ. اگر $\langle u, v\rangle$ و $\langle u, v\rangle'$ دو ضرب داخلی باشند، $\langle u, v\rangle'' = \langle u, v\rangle + \langle u, v\rangle'$ نیز ضرب داخلی است.

ب. اگر $\mathcal{I} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $u, v \in \mathbb{R}^۲$، نشان دهید $\langle u, v\rangle = [u]^T\mathcal{I}[v]$ ضرب داخلی است.

۳. دو بردار $u, v \in \mathbb{R}^n$ را به همراه ضرب داخلی معمول روی $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. نشان دهید اگر u و v متعامد باشند، داریم $\langle u+v, v+u\rangle = \langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle$.

۴. درستی موارد زیر را بررسی کنید.

آ. تبدیل خطی T خودالحاق است اگر و تنها اگر $[T]^\dagger = [T]$.

ب. تبدیل خطی T نرمال است اگر و تنها اگر $[T]^\dagger[T] = [T][T]^\dagger$.

۵. ضرب داخلی زیر را روی $P_۱(\mathbb{R})$ در نظر بگیرید.

$$\langle f, g \rangle = \int_۱^۳ f(x)g(x)dx$$

یک پایه متعامد نرمال مانند $\{f_۱, f_۲\}$ برای $P_۱(\mathbb{R})$ طوری بیابید که $f_۱$ از درجه صفر و $f_۲$ از درجه یک باشد.

۶. اگر $A \in M_{۲\times۲}(\mathbb{Z})$ ماتریسی وارون‌ناپذیر و $\mathcal{I} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، برای هر $k \in \mathbb{Z}$ دلخواه نشان دهید $det(A - k\mathcal{I})$ بر k بخش‌پذیر است.