میان‌ترم سوم جبر خطی

۳۰ آذرماه ۹۸

۱. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۵ & -۸ & ۴ \\ ۶ & -۱۱ & ۶ \\ ۴ & -۸ & ۵ \end{bmatrix}$.

آ. مقادیر ویژه‌ی A را بیابید.

ب. فضای بردارهای ویژه هر مقدار ویژه و بعد هر یک را بیابید.

پ. اگر A قطری‌شدنی است ماتریس وارون‌پذیر Q و ماتریس قطری D را چنان بیابید که $A = QDQ^{-۱}$. در غیر این صورت نشان دهید A قطری شدنی نیست.

۲. تابع $\Delta : M_{۲\times۲}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\Delta(A) = (tr(A))^{۲} - ۴det(A)$$

فرض کنید $A \in M_{۲\times۲}(\mathbb{R})$. درستی هر یک از موارد زیر را اثبات یا رد کنید.

آ. A دقیقا دارای دو مقدار ویژه حقیقی متمایز است اگر و تنها اگر $\Delta(A) > ۰$.

ب. A دقیقا دارای یک مقدار ویژه حقیقی با تکرر ۲ است اگر و تنها اگر $\Delta(A) = ۰$.

پ. A دارای هیچ مقدار ویژه حقیقی نیست اگر و تنها اگر $\Delta(A) < ۰$.

۳. فرض کنید A و B دو ماتریس وارون‌پذیر باشند. نشان دهید می‌توان A را با تعدادی اعمال سطری مقدماتی به B تبدیل کرد. به بیان دقیق‌تر دنباله $E_۱, \dots, E_k$ از ماتریس‌های سطری مقدماتی موجود است به طوری که

$$E_۱ \dots E_k A = B.$$

۴. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

آ. برای هر $k \in \mathbb{Z}$ نشان دهید اگر λ یک مقدارویژه A باشد، λ^k یک مقدار ویژه A^k است. (دقت کنید اگر A وارون‌پذیر باشد k می‌تواند منفی باشد.)

ب. بردار ویژه مقدار ویژه λ^k برای A^k را بر حسب بردار ویژه مقدار ویژه λ برای A بیابید

پ. بررسی کنید عکس «آ» برقرار است یا نه. به بیان دقیق‌تر اگر λ^k یک مقدار ویژه A^k باشد آیا می‌توان نتیجه گرفت λ یک مقدارویژه A است؟

ت. نشان دهید λ ریشه معادله $det(A - \lambda I) = ۰$ است اگر و تنها اگر ریشه معادله $det(A^T - \lambda I) = ۰$ باشد.

ث. اگر A پوچ‌توان باشد، نشان دهید تنها مقدار ویژه A برابر با صفر است.

راهنمایی: ماتریس مربعی A را پوچ‌توان گوییم هرگاه عدد صحیح مثبتی مانند r موجود باشد به طوری که $A^r = O$.

۵. اگر A یک ماتریس $n \times n$ با n مقدار ویژه متمایز $\lambda_۱, \dots, \lambda_n$ باشد موارد زیر را ثابت کنید.

آ. ماتریس A قطری‌شدنی است.

ب. $det(A) = \lambda_۱ \dots \lambda_k$.

پ. $tr(A) = \lambda_۱ + \dots + \lambda_k$.

موفق باشید!