Let kamena kroz otvor u Zemlji

Seminarski rad u okviru kursa
Osnovi matematičkog modeliranja
Matematički fakultet

Kristina Petrović
110/2015

Momčilo Knežević
189/2017

Jovana Marković
144/2017

24. maj, 2021

Sadržaj

1 Opis problema

Pretpostavimo da je gustina Zemlje svuda ista i da je kroz Zemlju do druge strane iskopan tunel. Sa povrsine Zemlje se pušta kamen u tunel. Cilj je preciznim izračunavanjima doći do vremena neophodnog kamenu da stigne sa druge strane Zemlje.

Slika 1. Prezentaciona slika problema

2 Modeliranje

2.1 Gausova teorema

Osnovna pretpostavka koju ćemo koristiti sledeca:
Pretpostavljamo da je rupa veoma mala tako da možemo zanemariti efekte promene gravitacionog polja Zemlje usled postojanja same rupe.

Najlakši način da odredimo gravitaciono polje unutar kugle koja ima konstantnu gustinu je da koristimo Gausovu teoremu.

Za gravitaciono polje, Gausov zakon je dat sa:

$$\phi_{\delta V} \overrightarrow{G} \overrightarrow{dS} = -4\pi\gamma \int_{v} \rho \; dv$$

Imamo zapreminu V, koja je ograničena površi δV.

Ova formula je najkorisnija u sistemima u kojima imamo visok stepen simetrije. U problemu u pitanju je sferno-simetrična raspodea mase, iz tog razloga imamo sfernu simetriju.

Prikazimo analogiju:
Osnovni zakon je Njutnov zakon gravitacije:

$$\overrightarrow{F_g} = +\gamma \frac{m_1 m_2}{\left|\overrightarrow{r1} - \overrightarrow{r2}\right|^3} (\overrightarrow{r1} - \overrightarrow{r2}),$$

dok je u elektrodinamici to Kulonov zakon:

$$\overrightarrow{F_c} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\left|\overrightarrow{r2} - \overrightarrow{r1}\right|^3} (\overrightarrow{r2} - \overrightarrow{r1})$$

ObrazloŽimo zaŠto imamo razliku u znaku:
Posmatramo dve čestice i određujemo silu koja deluje na prvu česticu. Ako su one istog tipa naelektrisanja (obe pozitivno ili obe negativno naelektrisane), onda se one odbijaju i vektor je usmeren u suprotnom smeru od smera prve ka drugoj čestici, tj vektora $\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$.

Sa druge strane, ne postoji negativna masa pa je gravitaciona sila privlačna, te je usmerena u smeru vektora $\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$.

Prethonim koracima je objašnjena razlika u znaku, vidimo da je jedina druga razlika u konstanti proporcionalnosti. Najvažnija osobina jeste činjenica da je funkcionalna zavisnost od rastojanja ista i u slučaju gravitacione i u slucaju Kulonove sile.

Poznato je da električno polje zadovoljava Gausov zakon u obliku:

$$\phi_{\delta V} \overrightarrow{E} \overrightarrow{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV.$$

Zbog istog oblika sile, moze povuci analogiju i doci do Gausove teoreme za gravitaciono polje. Jedina razlika je u konstanti proporcionalnosti.

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \to \gamma \Longleftrightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \to 4\pi\gamma$$

2.2 Problem sferno simetrične raspoedele mase

Sada prelazimo na konkretan problem sferno simetrične raspodele mase. Zbog te simetrije gravitaciono polje mora zavisiti samo od rastojanja od centra te sferno simetrične raspodele tj. r. Takodje, ono mora biti radijalno usmereno.

$$S = \delta V$$

Pomocu one druge pretpostavke za povrs S biramo sferu poluprecnika r, pa nam jednacina postaje:

$$\phi_{\delta V}\overrightarrow{G}\overrightarrow{ds}$$

$$= 4\pi\gamma \int_V \rho \; dV \longleftrightarrow \phi_{\delta V} G(r)\overrightarrow{er} - \overrightarrow{ds}$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta \; d\theta \; d\phi \; r^3 G(r) = 4\pi r^2 G(r)$$

Za polje unutar lopte dobijamo sledeći izraz:

$$4\pi r^2 G(r) = -4\pi\beta \frac{4}{3} r^3 \pi$$

Onda je polje dato:

$$G(r) = -\frac{4\gamma\pi\rho}{3} r \rightarrow \overrightarrow{G} = -\frac{1}{3}\pi\gamma\rho\overrightarrow{r}$$

Gravitaciona sila koja deluje na telo m je onda data sa

$$\overrightarrow{F_g} = m\overrightarrow{G},$$

pa je jednačina kretanja data sa:

$$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{G} \rightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{G}.$$

Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da se telo krece duz z ose.

$$\overrightarrow{a} = \frac{d_z}{d_t^2} \rightarrow \frac{\overrightarrow{d_z}^2}{d_t^2} = -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho\overrightarrow{r} = -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho\overrightarrow{z} \rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho z$$

Diferencijalna jednačina koja opisuje ovo stanje je:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{4}{3}\pi\gamma\rho z = 0$$

Možemo rešiti ovu jednačinu sa početnim uslovima:

$Z(0) = R(poluprecnik\ zemlje)\ i\ \frac{dz}{tr}(bez\ pocetne\ brzine\ kada\ kamen\ pada\ kroz\ rupu).$

Resenje trazimo u obliku:

$$z(t) = A\sin(wt) + B\cos(wt) \rightarrow \frac{dz}{dt} = Aw\cos(wr) - Bw\sin(wt) \rightarrow \frac{d^2z}{dt^6} =$$
$$-AW^2\sin(wt) + Bw^2\cos(wr) = -w^2z$$

Odatle identifikujemo:

$$w^2 = \frac{4}{3}\pi\gamma\rho$$

Opšte rešenje jednačine je:

$$z(t) = A\sin(wt) + B\cos(wt)\ i\ W = \sqrt{\frac{4}{3}\pi\gamma\rho}$$

Ovo je jednačina drugog reda te je potrebno odrediti konstante A i B. To radimo korišćenjem početnih uslova:

$$\frac{dt}{dz}|_{z=0}0 \leftrightarrow w[Acos(wt) - Bsin(wt)]|_{t=0} = 0 \rightarrow A = 0 \rightarrow z(t) = B\cos(wt)$$

$$z(0) = R \rightarrow R = z(0) = Bcos(wt)|_{t=0} = B \rightarrow B = R$$

Rešenje je:

$$z(t) = Rcos(wt)$$

$$w = \sqrt{\frac{4}{3}\gamma\rho}$$

Vidimo da smo dobili najobičnije harmonijske oscilacije. To znači da nakon što telo stigne do druge strane, ono se vrati nazad i tako osciluje u beskonačnost. Period harmonijskih oscilacija je dat sa:

$$T = \frac{2\pi}{w} \rightarrow t = \frac{\pi}{W}(= \frac{T}{2}) \rightarrow t = \frac{\pi}{W}(t\ je\ vreme\ za\ koje\ telo\ stigne\ do\ druge\ strane)$$

Kada se u formulu uvrste poznate veličine mase Zemlje M i poluprečnika Zemlje R dobija se izraz:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\gamma\pi}$$

$$\frac{4}{3}\rho = \frac{M}{R^3\pi}$$

$$t = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma\frac{M}{R^3\pi}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 R^3}{\gamma M}}$$

Masa Zemlje iznosi 5.972 * $10^2 4kg$.

Poluprečnik Zemlje R = 6370 km.

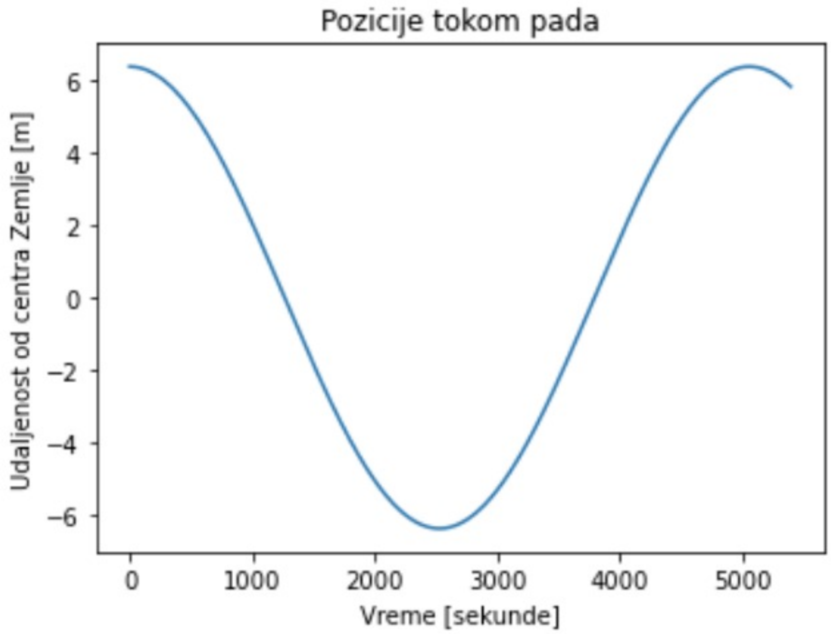
Gravitaciona sila iznosi $\gamma = 6.674 * 10^{-11} \frac{m3}{kgs^2}$

Koristeći prethodno pomenute informacije, Vreme neohodno kamenu da stigne do drugog kraja Zemlje iznosi t=42.175 min.

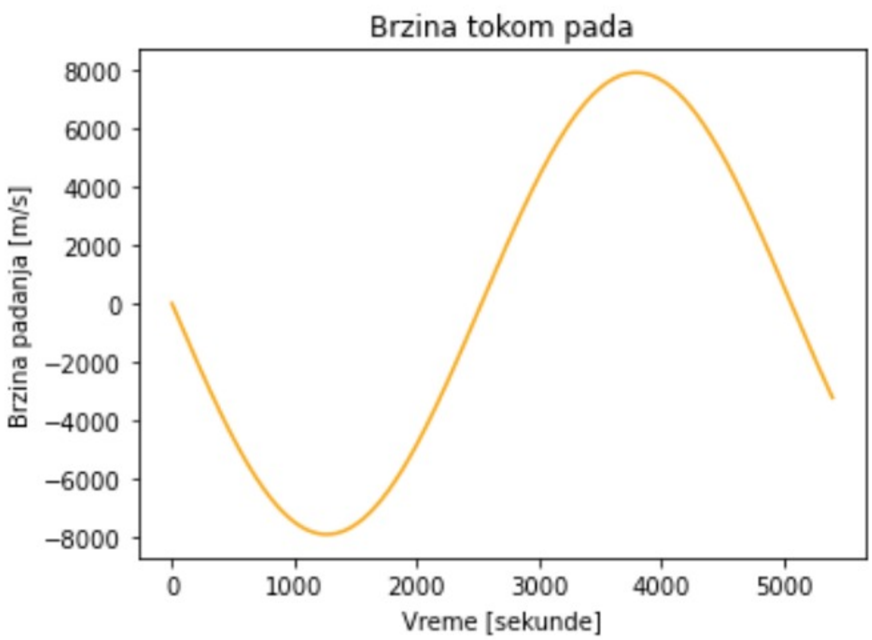
2.3 Modeliranje u programskom jeziku Python

Ceo problem je izmodeliran u programskom jeziku Python, neki od zanimljivih rezultata su prikazani kroz naredne grafike.

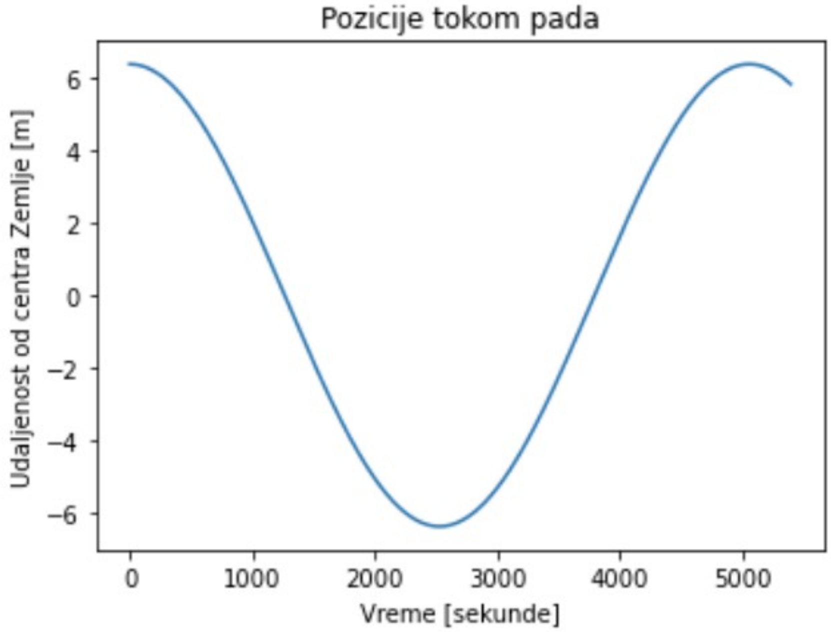
Grafik zavisnosti pozicije kamena tokom pada i udaljenosti od centra Zemlje:



Grafik zavisnosti brzine padanja kamena od vremena:



Grafik zavisnosti udaljenosti kamena od centra zemlje i vremena:



Literatura

[1] Autori, *Naslov rada/knjige*, naziv časopisa ili izdavača (godina).