FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2021
Løsningsforslag for Oblig 8

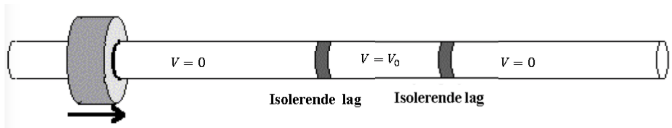
(Versjon 25. februar 2021)

Her er løsninger på A Diskusjonsoppgaver, B Regneoppgaver og C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk).

A Diskusjonsoppgaver

Oppgave 1 Ladning på wire

Vi ser på en makroskopisk ring med positiv ladning q beveger seg horisontalt mot høyre langs en glatt wire (se figur 1). Det meste av wiren har $V = 0$, men på midten er det et parti med potensial $V = V_0 > 0$ som er atskilt fra resten av wiren med tynne isolerende lag. Anta at ringen er isolert fra wiren og at vi kan se bort fra friksjon.



Figur 1: Ladning som sklir på wire.

a) Beskriv bevegelsen til ringen hvis den starter med kinetisk energi $E < qV_0$.

   Svar: Hvis den kinetiske energien er mindre enn qV_0, vil ringen snu når den møter potensialet og begynne å bevege seg motsatt vei.

b) Beskriv bevegelsen til ringen hvis den starter med kinetisk energi $E > qV_0$.

   Svar: Hvis den kinetiske energien er større enn qV_0, vil ringen bremses når den møter potensialet, men fortsette over for så å skyte fart igjen når den kommer til området uten potensial igjen.

c) Hva blir resultatet hvis du gjør dette 100 ganger der ringen hver gang starter med $E < qV_0$?

   Svar: Resultatet blir det samme hver gang, ringen snur alltid når den møter potensialet.

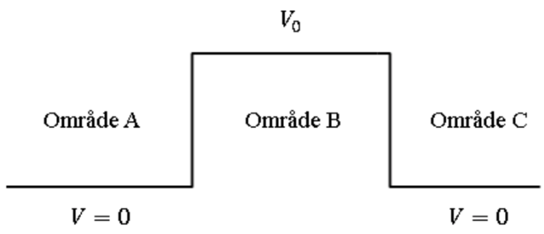
Vi setter nå opp et eksperiment der vi sender en strøm av elektroner med energi E mot et bokspotensial V_0, se Fig. 2. En detektor måler eventuelle elektroner som kommer inn i område C.

d) Forklar kvalitativt (uten regning) hvilke utfall du kan få av dette eksperimentet hvis $E < V_0$ og hvis $E > V_0$.

Svar: Selv om $E < V_0$ kan elektroner tunnellere gjennom barrieren og ut i område C. Hvor stor del av partikkelstrømmen som kommer gjennom barrieren, avhenger av størrelsen på E og V_0 og på bredden av potensialboksen. Hvis $E > V_0$ vil mye av partikkelstrømmen gå igjennom barrieren, men noe vil fortsatt reflekteres. Hvor mye som reflekteres, avhenger også her av E og V_0 og av bredden på boksen.

e) Beskriv med ord og/eller skisser hvordan romdelen $\psi(x)$ av bølgefunksjonene ser ut for område B for de to tilfellene $E < V_0$ og $E > V_0$.

Svar: For $E < V_0$ er romdelen $\psi(x)$ av bølgefunksjonen inne i boksen en avtagende eksponentialfunksjon. For E $> V_0$ har $\psi(x)$ form som en sinus-funksjon.



Figur 2: Firkantpotensial med $V_0 > 0$.

Oppgave 2 Tunnellering

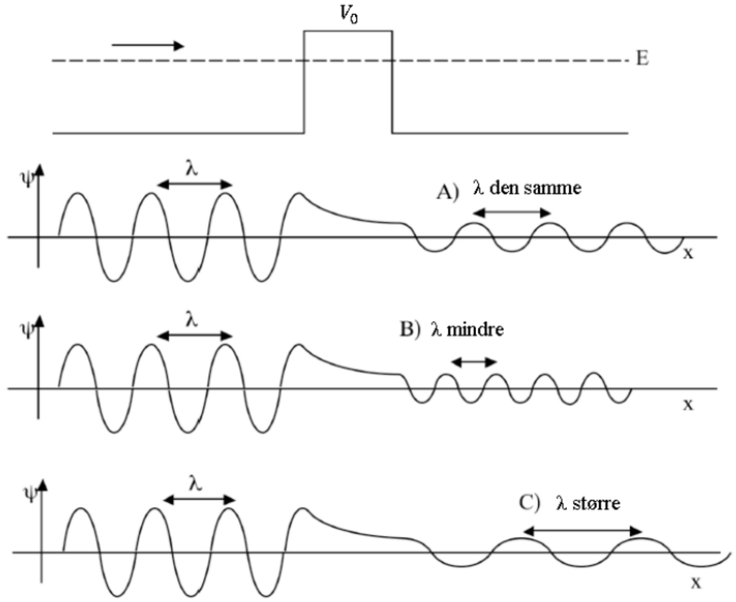
En planbølge kommer inn fra venstre og tunnellerer gjennom en potensialbarriere $V_0 > 0$, se Fig. 3. Hva er riktig utsagn om bølgefunksjonen Ψ (løsning av den tidsavhengige Schrödinger-likningen (TASL)) som er listet opp under?[1]. Begrunn svaret.

A) Ψ har samme bølgelengde på begge sider av barrieren

[1] Det finnes en tilsvarende løsning ψ av den tidsuavhengige Schrödinger-likningen (TUSL).

B) Ψ har kortere bølgelengde etter tunnelleringen

C) Ψ har lenger bølgelengde etter tunnelleringen



Figur 3: Bølgefunksjoner ved potensialbarriere.

Svar: A er riktig. Bølgelengden er den samme, siden energien og potensialet er det samme. Partikkelen har altså ikke mistet energi på tunnelleringen.

B Regneoppgaver

Oppgave 3 Spredning mot potensialbarriere og tunnellering

Vi ser på (boks)potensialet

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}, \tag{1}$$

hvor $V_0 > 0$.

Finn (analytisk) sannsynligheten for transmisjon og refleksjon som funksjon av energien for en fri-partikkel planbølgeløsning $\psi(x) = Ae^{ikx}$ med energi $E > 0$, som kommer inn fra venstre. Tegn en figur som klart viser de forskjellige områdene i potensialet, og de innkommende og utgående bølgene som er relevante. Diskuter spesielt hva som skjer når $E = V_0$. Lag et plot av resultatet hvor du bruker et elektron sendt mot et potensial med verdiene $V_0 = 10.0\,\mathrm{eV}$ og $L = 0.2\,\mathrm{nm}$ som et eksempel.

Her er det mye regninger så vi angir sluttsvarene for henholdsvis $E < V_0$, $E = V_0$ og $E > V_0$:

$$T(E) = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4(V_0-E)E}\sinh^2\left(\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}L\right)}, \tag{2}$$

$$T(V_0) = \frac{1}{1 + \frac{mL^2}{2\hbar^2}V_0}, \tag{3}$$

$$T(E) = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E-V_0)}\sin^2\left(\frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}L\right)}. \tag{4}$$

a) Tegn en figur som klart viser de forskjellige områdene i potensialet, og de innkommende og utgående bølgene som er relevante. Inkluder tilfellene der $E < V_0$ og $E > V_0$, og diskuter spesielt hva som skjer når $E = V_0$. E er partikkelens energi.

   Svar: Figur 4 viser de tre områdene for potensialet (I, II og III), de innkommende og utgående planbølgene, og løsningene inne i boksen. Merk at vi ikke har noen innkommende bølge fra høyre da denne ikke kan ha noen fysisk tolkning i dette problemet. Schrödingerligningen utenfor boksen (fri partikkel) er

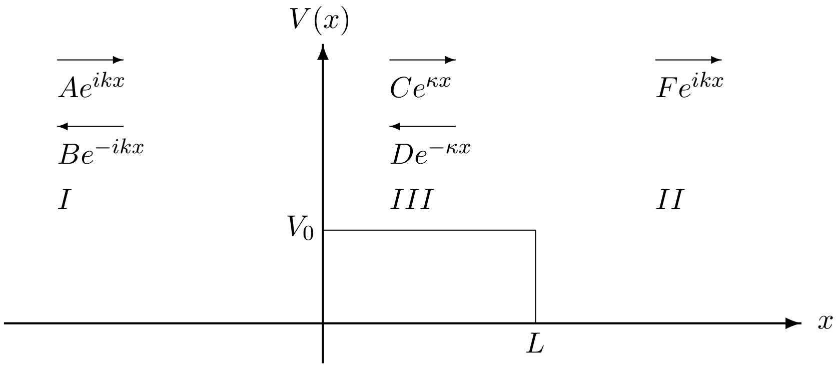
$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi = -k^2\psi, \tag{5}$$

   med $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$.

   Inne i boksen må vi skille mellom $0 < E < V_0$, som er klassisk forbudt (ingen transmisjon), og $E > V_0$ (ingen refleksjon).

b) Løs Schrödingerligningen i alle relevante områder for de 3 tilfellene ($E < V_0, E = V_0, E > V_0$). Bruk grensebetingelsene til å sette opp ligningssett for de ulike koeffisientene. *Hint: For tilfellet $E > V_0$ er det hensiktsmessig å bruke løsninger på TUSL på sinusform inne i bokspotensialet.*

c) Finn (analytisk) sannsynligheten for transmisjon og refleksjon som funksjon av energien for en fri-partikkel planbølgeløsning $\psi(x) = Ae^{ikx}$ med energi $E > 0$, som kommer inn fra venstre. *Hint: For $E > V0$ er det hensiktsmessig å først bestemme R, og deretter finne $T = 1 - R$.*



Figur 4: Skisse av potensialet gitt i (1).

Svar: For $0 < E < V_0$ er

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}\psi = \kappa^2\psi, \tag{6}$$

med $\kappa \equiv \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$. For $E > V_0$ er

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}\psi = -l^2\psi, \tag{7}$$

med $l \equiv \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$.

For $0 < E < V_0$ har Schrödingerligningen da de følgende løsningene i de tre områdene

$$\begin{aligned} \psi_I(x) &= Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, & (8) \\ \psi_{II}(x) &= Fe^{ikx}, & (9) \\ \psi_{III}(x) &= Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x}. & (10) \end{aligned}$$

Transmisjonssannsynligheten T er gitt som forholdet mellom absolutt-verdikvadratet av utgående (mot høyre) amplitude F og innkommende (fra venstre) amplitude A,

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2}. \tag{11}$$

Vi bruker kravet til kontinuitet for bølgefunksjonen, og den deriverte av bølgefunksjonen, i overgangen mellom de tre områdene ($x = 0$ og $x = L$), for å finne forholdet mellom amplitudene A, B, B, D og F. Dette gir det følgende ligningssettet

$$\begin{aligned} A + B &= C + D, & (12) \\ Ce^{\kappa L} + De^{-\kappa L} &= Fe^{ikL}, & (13) \\ ikA - ikB &= \kappa C - \kappa D, & (14) \\ \kappa Ce^{\kappa L} - \kappa De^{-\kappa L} &= ikFe^{ikL}. & (15) \end{aligned}$$

For å løse dette for A og F må vi eliminere C og D som vi ikke er interessert i. Vi begynner med å ta $ik(12)+(14)$ og $ik(12)-(14)$ som gir

$$
\begin{aligned}
2ikA &= (ik+\kappa)C + (ik-\kappa)D, && (16)\\
2ikB &= (ik-\kappa)C + (ik+\kappa)D. && (17)
\end{aligned}
$$

Deretter finner vi $\kappa(13)+(15)$ og $\kappa(13)-(15)$

$$
\begin{aligned}
2\kappa C e^{\kappa L} &= (\kappa+ik)Fe^{ikL}, && (18)\\
2\kappa D e^{-\kappa L} &= (\kappa-ik)Fe^{ikL}. && (19)
\end{aligned}
$$

Innsatt i (16) får vi

$$
2ikA = \frac{(\kappa+ik)^2}{2\kappa}Fe^{(ik-\kappa)L} - \frac{(\kappa-ik)^2}{2\kappa}Fe^{(ik+\kappa)L}. \qquad (20)
$$

Vi har nå det forholdet mellom A og F som vi trenger, og resten er ren pynting på resultatet.

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{4ik\kappa}\left[(\kappa+ik)^2e^{(ik-\kappa)L} - (\kappa-ik)^2e^{(ik+\kappa)L}\right]F\\
&= \frac{1}{4ik\kappa}\left[(\kappa+ik)^2e^{-\kappa L} - (\kappa-ik)^2e^{\kappa L}\right]e^{ikL}F\\
&= \frac{1}{4ik\kappa}\left[(\kappa^2+2ik\kappa-k^2)e^{-\kappa L} - (\kappa^2-2ik\kappa-k^2)e^{\kappa L}\right]e^{ikL}F\\
&= \frac{1}{4ik\kappa}\left[2ik\kappa(e^{-\kappa L}+e^{\kappa L}) - (\kappa^2-k^2)(e^{\kappa L}-e^{-\kappa L})\right]e^{ikL}F\\
&= \frac{1}{4ik\kappa}\left[4ik\kappa\cosh\kappa L - 2(\kappa^2-k^2)\sinh\kappa L\right]e^{ikL}F\\
&= \left[\cosh\kappa L - \frac{(\kappa^2-k^2)}{2ik\kappa}\sinh\kappa L\right]e^{ikL}F, && (21)
\end{aligned}
$$

hvor vi har brukt (fra Rottmann) at $2\cosh x = e^x + e^{-x}$ og $2\sinh x = e^x - e^{-x}$. Da er transmisjonssannsynligheten

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{1}{\left|\cosh\kappa L - \frac{(\kappa^2-k^2)}{2ik\kappa}\sinh\kappa L\right|^2}\\
&= \frac{1}{\cosh^2\kappa L + \frac{(\kappa^2-k^2)^2}{(2k\kappa)^2}\sinh^2\kappa L}\\
&= \frac{1}{1+\sinh^2\kappa L + \frac{(\kappa^2-k^2)^2}{4k^2\kappa^2}\sinh^2\kappa L}\\
&= \frac{1}{1+\frac{(\kappa^2-k^2)^2+4k^2\kappa^2}{4k^2\kappa^2}\sinh^2\kappa L}\\
&= \frac{1}{1+\frac{(\kappa^2+k^2)^2}{4k^2\kappa^2}\sinh^2\kappa L}, && (22)
\end{aligned}
$$

hvor vi har brukt at $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Det som står igjen er å skrive om T til en funksjon av energien E. Vi bruker definisjonene for k og κ som gir

$$\kappa^2 + k^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{2mV_0}{\hbar^2}, \tag{23}$$

og

$$\kappa^2 k^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{4m^2(V_0 - E)E}{\hbar^4}, \tag{24}$$

slik at

$$\frac{(\kappa^2 + k^2)^2}{4k^2\kappa^2} = \frac{\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2}{4\frac{4m^2(V_0-E)E}{\hbar^4}} = \frac{V_0^2}{4(V_0 - E)E}. \tag{25}$$

Vi får da (endelig) at for $0 < E < V_0$

$$T(E) = \left[1 + \frac{V_0^2}{4(V_0 - E)E}\sinh^2\left(\frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}L\right)\right]^{-1}. \tag{26}$$

Vi har også at $R(E) = 1 - T(E)$.

For $E > V_0$ er løsningene

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \tag{27}$$
$$\psi_{II}(x) = Fe^{ikx}, \tag{28}$$
$$\psi_{III}(x) = C\sin(lx) + D\cos(lx). \tag{29}$$

Kravene til kontinuitet gir nå

$$A + B = D, \tag{30}$$
$$C\sin(lL) + D\cos(lL) = Fe^{ikL}, \tag{31}$$
$$ikA - ikB = lC, \tag{32}$$
$$Cl\cos(lL) - Dl\sin(lL) = ikFe^{ikL}. \tag{33}$$

Her kan vi eliminere C og D fra ligning (31) og (33) ved hjelp av ligning (30) og (32):

$$(ikA - ikB)\sin(lL) + (A + B)l\cos(lL) = Fle^{ikL}, \tag{34}$$
$$(ikA - ikB)l\cos(lL) - (A + B)l^2\sin(lL) = iklFe^{ikL}. \tag{35}$$

Vi kan nå dele disse ligningene på hverandre for å eliminere F:

$$\frac{(ikA - ikB)l\cos(lL) - (A + B)l^2\sin(lL)}{(ikA - ikB)\sin(lL) + (A + B)l\cos(lL)} = ik. \tag{36}$$

Vi løser så for A,

$$A(k^2 - l^2)\sin(lL) = B(l^2 + k^2)\sin(lL) + 2iBkl\cos(lL), \tag{37}$$

som gir

$$A = \frac{(l^2+k^2)\sin(lL) + 2ikl\cos(lL)}{(k^2-l^2)\sin(lL)} B. \tag{38}$$

Refleksjonskoeffisienten er da

$$\begin{aligned} R &\equiv \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{(k^2-l^2)^2\sin^2(lL)}{(k^2+l^2)^2\sin^2(lL) + 4k^2l^2\cos^2(lL)} \\ &= \frac{(k^2-l^2)^2\sin^2(lL)}{(k^2-l^2)^2\sin^2(lL) + 4k^2l^2} \\ &= \frac{\frac{(k^2-l^2)^2}{4k^2l^2}\sin^2(lL)}{1+\frac{(k^2-l^2)^2}{4k^2l^2}\sin^2(lL)}, \end{aligned} \tag{39}$$

og transmisjonskoeffisienten blir

$$T = 1 - R = \frac{1}{1+\frac{(k^2-l^2)^2}{4k^2l^2}\sin^2(lL)}. \tag{40}$$

Vi bytter k og l med energien gjennom

$$k^2 - l^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2} = \frac{2mV_0}{\hbar^2}, \tag{41}$$

og

$$k^2l^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2} = \frac{4m^2E(E-V_0)}{\hbar^4}, \tag{42}$$

slik at

$$\frac{(k^2-l^2)^2}{4k^2l^2} = \frac{\frac{4m^2V_0^2}{\hbar^4}}{4\frac{4m^2E(E-V_0)}{\hbar^4}} = \frac{V_0^2}{4E(E-V_0)}. \tag{43}$$

Da er

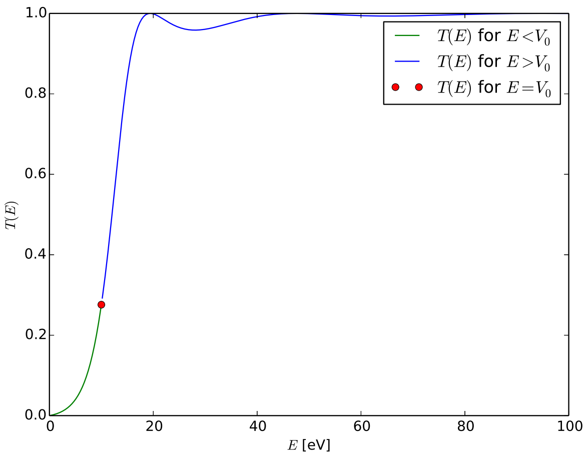
$$T(E) = \frac{1}{1+\frac{V_0^2}{4E(E-V_0)}\sin^2\left(\frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}L\right)}. \tag{44}$$

Vi kan finne svaret for tilfellet $E = V_0$ enten ved å ta grensen til transmisjonskoeffisientene for $E < V_0$ og $E > V_0$, eller ved å regne transmisjonskoeffisienten spesielt for dette tilfellet fra grunnen av.[2] Dersom vi tar grensene må vi vise at

$$\lim_{E\to V_0^+} T(E) = \lim_{E\to V_0^-} T(E) = \frac{1}{1+\frac{mL^2V_0}{2\hbar^2}}. \tag{45}$$

Regnet fra grunnen av så er TUSL i område III når $E = V_0$ gitt ved

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0. \tag{46}$$



Figur 5: Transmisjonskoeffisienten i et eksempel med et elektron med masse $m = 0.511$ MeV/c^2, $V_0 = 10.0$ eV og $L = 0.2$ nm.

Denne har løsningen $\psi(x) = Cx + D$. Kravene til kontinuitet gir

$$\begin{aligned} A + B &= D, & (47)\\ CL + D &= Fe^{ikL}, & (48)\\ ikA - ikB &= C, & (49)\\ C &= ikFe^{ikL}. & (50) \end{aligned}$$

Fra (49) og (50) får vi $A - B = Fe^{ikL}$, og fra (48), (47) og (49) får vi $A(1 + ikL) + B(1 - ikL) = Fe^{ikL}$. Vi kan eliminere B og får da et forhold mellom A og F:

$$\begin{aligned} A(1 + ikL) + A(1 - ikL) &= Fe^{ikL} + (1 - ikL)Fe^{ikL} \\ 2A &= (2 - ikL)Fe^{ikL}, & (51) \end{aligned}$$

som gir transformasjonskoeffisienten

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{4}{4 + k^2L^2} = \frac{1}{1 + \frac{k^2L^2}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{mL^2}{2\hbar^2}V_0}. \qquad (52)$$

d) Lag et plot av transmisjonskoeffisienten for de 3 tilfellene nevnt i a). Bruk et elektron sendt mot et potensial med verdiene $V_0 = 10.0$ eV og $L = 0.2$ nm som et eksempel.

[2] Ikke overraskende får vi samme svar, men vi burde egentlig regne tilfellet $E = V_0$ fra grunnen av. Det er logisk mulig at dette ikke er det samme som de to grensene, men det viser seg at transmisjonskoeffisienten er kontinuerlig i $E = V_0$.

Svar: Figur 5 viser transmisjonskoeffisienten for bestemte parameterverdier.

C Tilleggsoppgave (ikke obligatorisk)

Oppgave 4 3D HO og degenerasjon (fra Griffiths, kap. 4)

Bruk separasjon av variable teknikken i *kartesiske* koordinater til å løse det kubiske uendelig brønn potensialet:

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0, & 0 < x,y,z < a \\ \infty, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{53}$$

a) Finn de stasjonære tilstandene og de korresponderende energiene.

Svar: Fordi potensialet er kubisk kan det deles opp i tre komponenter $V(x,y,z) = X(x) + Y(y) + Z(z)$, hvor

$$X(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ \infty, & \text{ellers,} \end{cases} \tag{54}$$

og tilsvarende for $Y(y)$ og $Z(z)$. Hvis vi antar at løsningene til SL

$$\hat{H}\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t), \tag{55}$$

kan skrives på separert form: $\Psi(\vec{r},t) = \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z)\phi(t)$, så vet vi at $\phi(t) = e^{-iEt/\hbar}$ og at $\psi(\vec{r}) = \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z)$ er løsningen av den tidsuavhengige SL (TUSL):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r}) + V(x,y,z)\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \tag{56}$$

Denne kan skrives

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\psi_x(x)}\frac{d^2}{dx^2}\psi_x(x) + \frac{1}{\psi_y(y)}\frac{d^2}{dy^2}\psi_y(y) + \frac{1}{\psi_z(z)}\frac{d^2}{dz^2}\psi_z(z)\right)& \\ +X(x) + Y(y) + Z(z) = E,& \end{aligned} \tag{57}$$

hvor vi har delt på begge sider med $\psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z)$. Uttrykket kan reorganiseres i tre ledd

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi_x(x)}\frac{d^2}{dx^2}\psi_x(x) + X(x)& \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi_y(y)}\frac{d^2}{dy^2}\psi_y(y) + Y(y)& \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi_z(z)}\frac{d^2}{dz^2}\psi_z(z) + Z(z) &= E, \end{aligned} \tag{58}$$

hvor hvert ledd må være konstant da x, y og z kan endres uavhengig av hverandre. Vi kaller disse konstantene for E_x, E_y og E_z, slik at $E = E_x + E_y + E_z$. Dette gir tre uavhengige TUSL i hver sin koordinat, f.eks.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2}\psi_y(y) + Y(y)\psi_y(y) = E_y\psi_y(y), \tag{59}$$

med et uendelig brønn-potensiale. Vi har sett i en dimensjon at disse har løsning

$$\psi_y(y) = A\sin(k_y y) + B\cos(k_y y), \tag{60}$$

hvor

$$k_y = \sqrt{2mE_y}/\hbar. \tag{61}$$

Vi bruker så grensebetingelsene: $\psi_y(0) = 0$ som gir $B = 0$, og $\psi_y(a) = 0$ som gir $A\sin(k_y a) = 0$, altså kvantiseringen av bølgetallet $k_y = n_y\pi/a$ med $n_y = 1, 2, \ldots$ ($n_y = 0$ fungerer dårlig fordi $\psi_y(y) = 0$ for alle y, og negative verdier kan absorberes i A). Videre kan vi bestemme A ved normering som vi gjorde for en uendelig brønn i en dimensjon:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_y(y)|^2 dy = \int_0^a |A|^2 \sin^2\left(\frac{n_y\pi}{a}y\right)dy = |A|^2\frac{a}{2} = 1, \tag{62}$$

slik at vi kan velge $A = \sqrt{2/a}$. Merk at vi velger å normere ψ_x, ψ_y og ψ_z hver for seg, men vi kunne ha ventet til slutt med denne normeringen. Sammen med de tilsvarende løsningene for de andre koordinatene gir dette de stasjonære tilstandene

$$\Psi(\vec{r}, t) = \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n_y\pi}{a}y\right)\sin\left(\frac{n_z\pi}{a}z\right)e^{-iEt/\hbar}. \tag{63}$$

Fra (61) har vi den kvantiserte verdien av E_y:

$$E_y = \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n_y^2. \tag{64}$$

Sammen med den tilsvarende kvantiseringen for de andre koordinatene gir dette energiene til de stasjonære tilstandene

$$E = E_x + E_y + E_z = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2). \tag{65}$$

Vi ser at kvantiseringen har tre kvantetall, en for hver dimensjon av brønnen. Dette fører til degenerasjon i energinivåene.

b) Kall de distinkte energiene E_1, E_2, $E_3, \ldots$, ordnet etter stigende energi. Finn E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 og E_6. Bestem degenerasjonsgraden til de ulike energiene (altså, antall tilstander med samme energi). *Kommentar:* I endimensjonale problemer opptrer ikke degenererte bundne tilstander (se Oblig 7), men i tre dimensjoner er de vanlige.

Svar: De seks laveste distinkte energinivåene er gitt ved de seks laveste verdiene av $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$, for $n_x, n_y, n_z = 1, 2, \ldots$. Degenerasjonsgraden for disse energinivåene er gitt ved antall distinkte permutasjoner av kvantetallene. Vi viser energinivåene i tabell 1 sammen med degenerasjonsgrad og eksempler på kombinasjoner av kvantetall (n_x, n_y, n_z) som gir de aktuelle energiene. Om en ønsker å finne nye energinivåer

Energi	**Degenerasjonsgrad**	**Eksempel på kvantetall**
$E_1 = \frac{3\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$	1	(1,1,1)
$E_2 = \frac{3\pi^2\hbar^2}{ma^2}$	3	(2,1,1)
$E_3 = \frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$	3	(2,2,1)
$E_4 = \frac{11\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$	3	(3,1,1)
$E_5 = \frac{6\pi^2\hbar^2}{ma^2}$	1	(2,2,2)
$E_6 = \frac{7\pi^2\hbar^2}{ma^2}$	6	(3,2,1)

Tabell 1: De første seks energinivåene for en partikkel i en kubisk uendelig brønn, med degenerasjonsgrad og eksempel på kvantetall.

kan det være lurt å tenke på dette som punkter i et tre-dimensjonalt rutenett.

c) Hva er degenerasjonsgraden til E_{14}, og hvorfor er dette tilfellet interessant?

Svar: De neste energinivåene er gitt ved kvantetallene $E_7(3, 2, 2)$, $E_8(4, 1, 1)$, $E_9(3, 3, 1)$, $E_{10}(4, 2, 1)$, $E_{11}(3, 3, 2)$, $E_{12}(4, 2, 2)$, $E_{13}(4, 3, 1)$, og degenerasjonsgraden er antall distinkte permutasjoner av disse kvantetallene, altså enten 1, 3 eller 6. E_{14} er spesiell fordi både $(3, 3, 3)$ og $(5, 1, 1)$ gir dette energinivået, degenerasjonsgraden er 4, altså høyere enn hva man kan få fra kombinatorikk på $(5, 1, 1)$, og det er det første slike tilfellet for en partikkel i en uendelig kubisk brønn.