

Elastisitet

FYS2150

Student som er relativt fornøyd med sitt innsats
(Dated: June 15, 2021)

I dette forsøket har det blitt gjort et forsøk for å bestemme elastisitet for en stang. Dette har blitt gjort ved bruk av to metoder. Det ene ved å påføre et kraft på stangen og observere hvor mye den bøyes, og den andre ved å observere grunnfrekvensen til stangen ved å gi et slag på den. Hensikten med dette er å bestemme elastisitet, noe som er svært viktig egenskap av materialer som man burde ta hensyn til når man bruker disse i konstruksjoner. Etter utført forsøk, ble det endt opp med at elastisiteten til stangen er på ca. 105GPa. Disse to metodene samsvarer med hverandre og dermed kan det konkluderes at disse to metodene påbygger tilliten til teorien av elastisitetsmodulen.

I. INTRODUKSJON

Når vi jobber med materialer, er det særlig viktig å kjenne til egenskapene i disse materialene og vite hvor mye de kan tåle. Materialens elastisitet, eller Young's modulus forteller oss forholdet mellom stress som er utført på materialet (altså kraft per areal), og lengdetøying. Med andre ord, vi får vite hvor stive disse materialene er når disse er utsatt for et eksternt kraft.

I denne forsøket skal vi dermed vise frem to metoder vi kan bruke for å finne materialens elastisitet ved å bruke en messingstang. Det ene er ved å undersøke statisk nedbøying av stangen, og det andre er ved å måle hastigheten av lyd i stangen. Ved bruk av disse to metodene kan vi da se hvor godt de samsvarer med hverandre, og utifra det kan vi se hvor godt man kan stole på disse beregningene.

Dette er svært viktig siden da er det to kilder (altså metoder) som viser frem til samme resultat, noe som forsterker våres teori eller modell for elastisitet.

II. TEORI

A. Regning på usikkerheter

Oftest når vi jobber med målinger, har vi flere kilder som gjør et bidrag til målingens usikkerhet. Det er systematiske og tilfeldige usikkerheter. Systematiske usikkerheter kommer for eksempel fra produsentens selve måleutstyret, mens tilfeldige kommer fra selve utføreren av målingene.

Figur 1 illustrer forskjell mellom systematiske- og tilfeldige usikkerheter.

Når det er flere slike kilder for usikkerhet, ønsker vi å vite det totale bidraget fra disse usikkerhetene. Når vi skal bare addere disse usikkerhetene, gjør vi slik ligning 1 viser.

$$\Delta Z = \sqrt{\Delta Z_1^2 + \Delta Z_2^2} \quad (1)$$

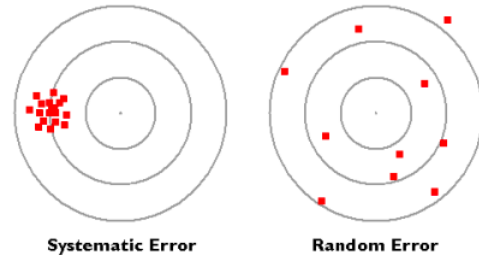


Figure 1. Her ser vi at i systematisk usikkerhet er det selve måleutstyret som gjør et avvik fra faktiske verdien. Mens tilfeldig usikkerhet gir tilfeldige slag rundt faktiske punktet.

Oftest har vi et uttrykk for et eller annet størrelse som er definert ved

$$R = f(x_1, x_2, \dots), x_n$$

og hvis variablene har et usikkerhet i seg, da brukes det partiell derivasjon som et generell form for å finne det totale usikkerheten som er bidratt fra flere målinger.

$$\Delta R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial R}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2} \quad (2)$$

B. Kraftmoment

Kraftmoment (eller Torque på engelsk) er definert som kryssprodukt mellom avstandvektor og Kraften påført.

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3)$$

Kraftmoment er rotasjonskraft, som er ekvivalent til linær kraft. Figur 2 illustrerer kraftmoment vektorene.

C. Relasjon mellom defleksjon $h(m)$ og elastisitetsmodulus

Når det påføres et kraft i midtpunktet av bjelke, observeres det et nedbøying slik det er illustrert i figur 3.

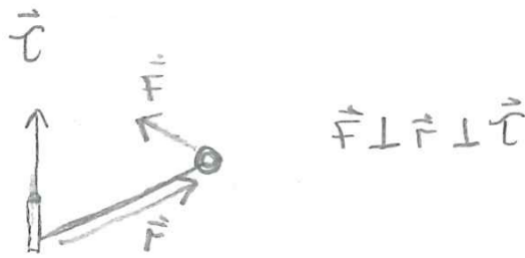


Figure 2. Vektorene av kraft, posisjon og kraftmoment illustrert. Disse er ortogonale på hverandre

Det avbøyde delen har maximums lengde h i midtpunktet.

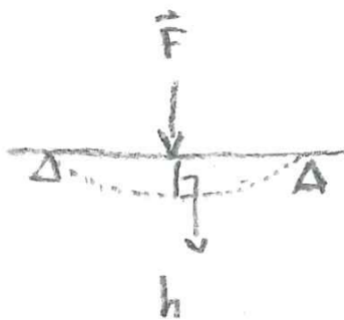


Figure 3. Et kraft som blir påført i midtpunktet av et bjelke som er holdt av to kniver. Det samme kraft kan beskrives av et vekt som henges på midtpunktet av bjelke.

Dette er et spesiell tilfelle for bøyning av bjelke og er dermed definert som

$$h = \frac{mgl^3}{48EI} \quad (4)$$

Her defineres det påtrykket kraften ved bruk av Newton's andre lov. Utifra ligningen kan det tolkes at ved stor påtrykt kraft, altså ved stor masse hengt på, burde det observeres stor avbøyningslengde h .

Allikevel, ved stor stivhet i materialet, altså stor verdi for elastisitet E , fører det til liten h (siden E er i nevner), som betyr at bjelken avbøyes ikke like mye.

I tillegg er det et konstant I som er arealmoment. Arealmoment er et geometrisk egenskap som forteller noe om hvordan punkter i arealsnittet er distribuert. For en stav er tversnittet en sirkel med diameter $d = 2r$, dermed defineres I som $\frac{\pi d^4}{4 \cdot 2^4}$. Se appendix B for mer detalj. Siste konstant l , er lengden av bjelken.

Det som er viktig å merke her, er at h er proporsjonal med massen til loddet. Hvis det blir gjort måling med mange forskjellige verdier av m , burde resultatet blitt

distribuert som et linær økning for h . Verdien til h kan altså uttrykkes som et linær funksjon, slik ligning 5 definerer.

$$h(m) = Am + B \quad (5)$$

Hvor A er da stigningstallet til tilnærmede modellen, og B er konstanten som er konsistent med 0. Denne stigningstallen kan bli funnet ved bruk av minste kvadratsmetoden [1]. MATLAB innebygde kommandoer som for eksempel *fitlm* kan brukes som tilnærminger for linærregresjon ved bruk av minste kvadratsmetode.

Vi kan da løse ligning 4 for E . Se appendix C for full utregning.

$$E = \frac{4l^3 g}{3\pi |A| d^4} \quad (6)$$

Uttrykket inneholder et verdi g . Dette er gravitasjonsfeltverdi. I dette forsøket skal vi anta at den er konstant på verdi 9.81 m/s^2 , og uten usikkerhet.

D. Bestemmelse av E ved måling av lydhastigheten i materialet

Lydbølger i et medie er beskrevet som longitudinale bølger. Det vil si at lyd er definert som sammentrekning og utstrekning av molekylene i et materialet. Elastisiteten E og tettheten ρ til medie bestemmer i hvilken grad kan det materialet sammentrekke og utstrekke seg selv. Dermed er lydhastigheten i et materialet definert som

$$v^2 = \frac{E}{\rho} \quad (7)$$

Hastigheten til et streng er definert som produkt mellom lengden L av streng og dens frekvens f skalert med 2, altså

$$v = 2Lf$$

Stangen kan være et tilnærming av en streng. Tettheten ρ til materialet kan også uttrykkes som

$$\rho = \frac{4M}{\pi d^2 L}$$

Ved å putte disse to uttrykkene i ligning 7, og løse for E , får man

$$E = \frac{16mLf^2}{\pi d^2} \quad (8)$$

Dermed trengs det å måle stangens masse m , lengden L , diameter d og grunntonen f for å bestemme dens elastisitet.

E. Sveving

Når det er to bølger i rom som interferer med hverandre, er den resulterende bølgen bygget opp av det konstruktive og destruktive deler i interferensen. Hvis vi har for eksempel to bølger som er i fase, og topppunkter er oppå hverandre, er resulterende bølge konstruktiv, hvis det er omvendt, er det destruktivt. Figur 4 viser frem illustrasjon av dette.

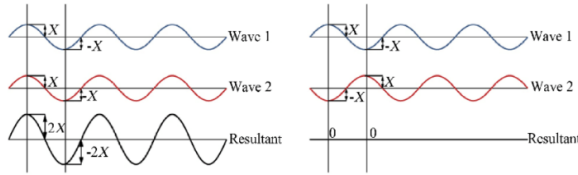


Figure 4. Konstruktiv og destruktiv interferens

Allikevel, hvis to bølger i rommet har forskjellige frekvenser, vil det oppstå både konstruktive og destruktive interferens i forskjellige punkter. Figur 5 illustrerer dette.

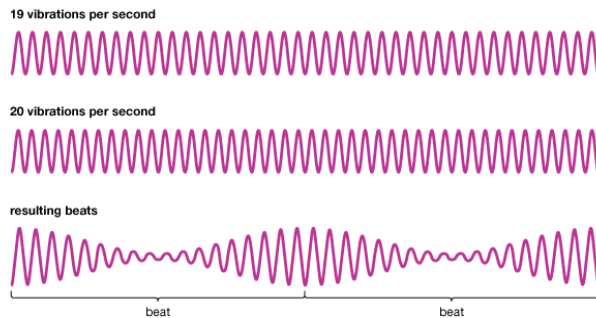


Figure 5. To bølger med forskjellige frekvens interfererer og danner både sveving.

Hvis det er to lydbølger med konstant tone som spiller samtidig, kan menneskelig øre høre sveving hvis disse to tonene har forskjellig frekvens fra hverandre. Det er bare når frekvens til disse to tonene er like at det ikke er mulig å observere sveving, siden da er det bare et konstruktiv interferens slik figur 4 viser.

Dette åpner da et mulighet til å bestemme et frekvens til et ukjent tone. Ved å spille denne tonen, og generert tone samtidig, er det mulighet å observere sveving ved å endre på generert tonens frekvens. Når observatøren observerer at total tonen blir bare amplifert og uten noe sveving, kan det konkluderes med at det genererte tonen har samme frekvens som den ukjente tonen.

F. FFT-analyse

FTT-analyse er fourier transform analyse. Det grunnleggende virkemåte er utnyttelse av at produkt av to trigonometriske funksjoner med samme frekvens gir stor resultat amplitude. Når det er snakk om digital opptak av et lyd, velges det numerisk å ta produkt for punkt til punkt med en annen generert signal med forskjellige frekvenser. Ved FFT prøves det mange forskjellige frekvenser, og det observeres hvilke frekvenser gir størst utslag. Utfra det kan man bestemme frekvensen til det ukjente signalen. Prinsippet bak det ligner veldig på svevingsfenomenet, man kan dermed referere det nært til sveving som et forklaring på virkemåten til FFT.

Det brukes ofte numeriske scripter til for FFT-analyse. Referanse til scripte som er brukt for dette forsøket ligger [her](#).

III. EKSPERIMENTALT

1. Første metode, bøyning av en messingstav med sirkulært tverrsnitt

Det skal bli undersøkt hvor stiv en messingstang er ved å bøye den med et lodd. Figur 6 viser frem illustrasjon av oppsettet. Mens figur 7 viser frem et bilde av det reelle oppsette.

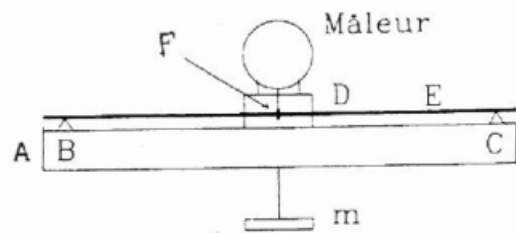


Figure 6. Vi har et bjelke A som er utstyrt med to kniver B og C. Stativ D ligger på bjelken uten å røre messingstaven E. Stativet er utstyrt med et måleuret som har en føler F, som rører staven og måler lengden av bøyningen. Føleren kan altså utstrekkes eller sammenstrekkes i bestemt lengde, denne lengden måler måleuret.

Det ønskes at punktet hvor måleurets føler er, altså F, skal være mest mulig i midten. Det ønskes dermed å ha avstand BF og FC til å være mest mulig like. Måten det kan nås, er ved å måle avstanden fra B til C, og dele det på 2. For å måle denne avstanden brukes Hultafors meterstokk.

Utfra databladet, er det oppgitt at den systematiske usikkerheten ved bruk av meterstokken er ± 1.14 mm hvis det blir målt 2 m. Usikkerheten er da altså forholdet

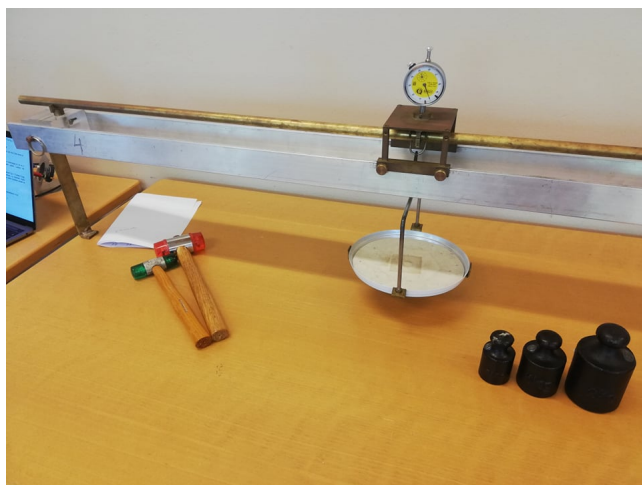


Figure 7. Her kan vi se fysiske oppsettet, og alle delene som Figure 6 har illustrert, utenom kniv B.

mellom 1.14 mm og 2 m. Dermed hvis en lengde L blir målt, er usikkerheten gitt som

$$\Delta L = L \frac{1.14 \text{ mm}}{2 \text{ m}} = L 2.28 \text{e}(-3) \text{ m}$$

I tillegg til dette, er det oppgitt en usikkerhet for måling over et ledd for meterstokken. Databladet forteller at usikkerheten over ledd er $\pm 0.5 \text{ mm}$. Under målingene, gjøres det i tillegg noen relative feil, for eksempel ved å lese av målingene. Dermed velges det å utføre flere målinger og ta gjennomsnittet og finne standardfeilen av den. Det tas i bruk MATLAB og dens innebygde moduler (vist i appendix A) for å beregne gjennomsnittet og standardfeilene.

Ved flere usikkerheter, kan de da adderes ved å bruke 1.

Det ønskes å måle presist hvor mye stangen kan bøyes. Det monteres en holder med flat side på, slik figur 8 illustrerer.

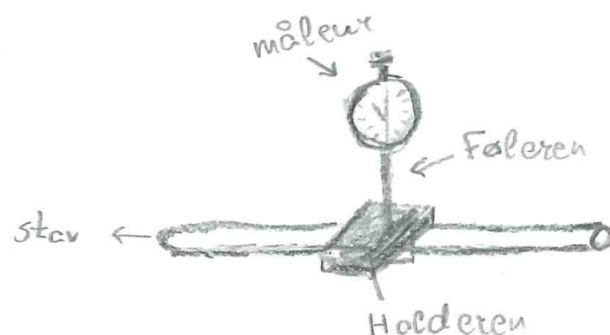


Figure 8. Illustrasjon av flat delen av holderen som måleurets føleren berører.

Holderen skal være så vannrett som mulig, slik at

måleurets føler skal ligge mest mulig normalt på overflaten. Det brukes dermed en vaterpass til å bestemme hvor mye stangen skal dreies slik at flaten skal være vannrett.

Slik figur 7 viser, er det holderen (loddplattform) som er festet på midtpunktet av stangen. Det er her loddene legges på og avbøyning måles. Før målingene, er det svært viktig å vite hvor mye disse loddene veier, slik at det skal være mulig å vite kraften som midtpunktet av staven blir utsatt for. Dermed kalibreres disse loddene ved bruk av balansevekt. Oppsettet til kalibreringen er vist i figur 9. I figuren er det mulig å se de hvite loddene som er balanseringsveksloddene, disse brukes til å sammeligne masse på de svarte loddene som da brukes til å bøye stangen. Vi er dermed avhengig av å ha riktig vekt på disse hvite kalibreringsloddene. Disse brukes da på selve balansevekt og vekten til de hvite loddene måles flere ganger. Ved flere målinger er det da mulig å finne standard feil av disse. Etter det måles vekta på de svarte loddene og observeres hvor godt de samsvarer med de hvite loddene.

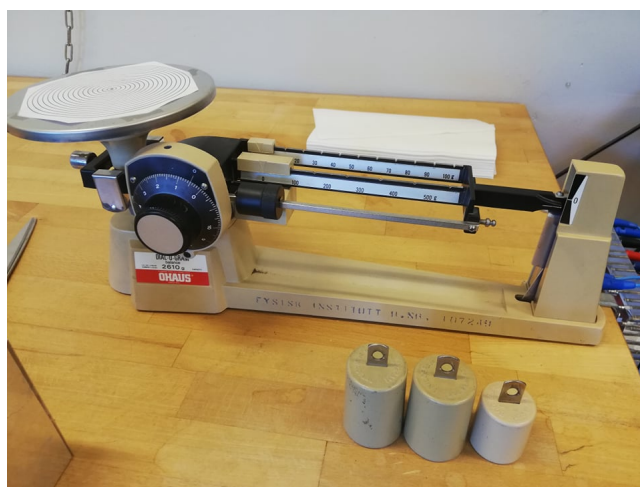


Figure 9. OHAUSE balansevekt. Her ser vi 3 kalibreringslodd

Vi velger å kalibrer tre typer lodd, en på 2kg, en på 1kg og tredje på 500g.

Etter å ha kalibrert loddene, kalibrerer vi også måleuret. Her setter vi bare at måleuret skal vise 0 utslag når vi ikke har lagt noe vekt på hengeren. Etter det, legger vi loddene med forskjellige vekt kombinasjon på hengeplattform som henger på staven. Når vi legger på en vekt, leser vi da av avbøyningen som føleren av måleuret viser.

Vi tar 9 slike målinger med 9 forskjellige vekt-kombinasjoner, $m = \{0.0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5\} \text{ kg}$

Vi velger da å plotte disse målte verdiene i MATLAB, vi setter massen til vektene langs x-aksen, og

målte måleurets utslags langs y-aksen. Slik det står i teori delen **IIC**, forventer vi å se en linær stigning, dermed velger vi å ta linær tilpasning med MATLABS innebygt kommando "fitlm". Med denne tilpassningen kan vi da bestemme verdien til A , slik at vi kan bruke det i ligning 6. I tillegg til verdien A , må vi finne diameteren, d . Lengden l i ligning 6 er det samme som vi har målt for CB. Dermed har vi alle verdiene vi trenger for å beregne elastisiteten E .

For å beregne diameteren, velger vi å måle diameter med cocraft skyvelærer på 4 forskjellige steder av stangen, slik at vi kan estimere gjennomsnittlig diameteren av stangen. Målepunktene er illustrert i figur 10.

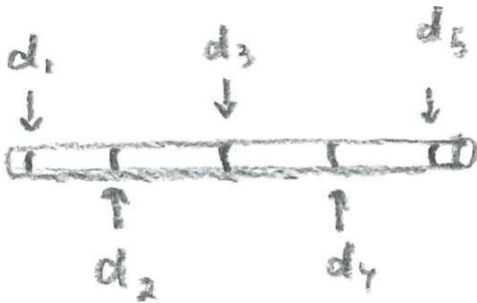


Figure 10. Illustrasjon av punkter hvor diameteren skal måles

Usikkerheten til cocraft skyvelærer er gitt i databladene til å være 0.02 mm, dette er da det systematiske usikkerheten til diameteren. Ved å utføre 5 målinger, finner vi standard feilen, som da er det tilfeldige usikkerheten. Vi bruker da ligning 1 for å finne det totale usikkerheten.

Til slutt bruker vi ligning 6 til å finne elastisiteten. Mange av disse verdiene vi har funnet har et usikkerhet, dermed for å finne det totale usikkerheten for E , partiell deriverer vi slik ligning 2 viser. Se appendix D for full derivasjon

2. Andre metode, dynamisk bestemmelse av elastisitetsmodulen

Vi starter med å måle stangens lengde L . For å finne denne lengden, legger vi stangen på borde og markere endene av stangen pent. Dette gjør vi for at det skal være enklere å måle. Deretter måler vi avstanden mellom disse to markerte punktene med den samme meterstokken som vi har brukt da vi målte avstanden CB i forrige metode.

Vi gjør dette fire ganger for å finne den tilfeldige usikkerheten.

Det neste vi ønsker å måle er massen til stangen. Vi bruker samme metode for å måle massen til stangen som vi brukte for å kalibrere de sorte loddene i første metode. Altså ta i bruk en balanseringsvekt. Dermed legger vi stangen på midten av veieplattformen og leser av målingene. Vi gjør dette fire ganger slik at vi kan anslå den tilfeldige usikkerheten.

Siden elastisiteten E til stangen er funnet i forrige metode, kan den brukes i ligning 8 for å finne stangens grunnfrekvens f .

Ved å vite denne beregnede grunnfrekvensen f , stilles det en tonegenerator med det beregnet frekvensen. Målet med dette er å observere sveving ved bruk av svevingsprinsipp som er beskrevet i teori delen **IIE**. For å observere sveving, trengs det den andre tonen som er skapt av selve stangen. For å skape det, trengs det et aksial slag på stangen med et plasthammer. Ved å ha begge tonene aktivert, justeres frekvensen til det genererte tonen slik at det observeres at svevingen går hurtigere og hurtigere. Når svevingsfenomenet ikke kan lenger observeres, anslås det at frekvensen til det genererte tonen er samme som frekvens til tonen fra stangen.

Ved å anslå det nye grunnfrekvensen, kan den brukes til å beregne ny verdi for elastisiteten E ved bruk av ligning 8. Det brukes igjen partiell derivasjon (ligning 2) for å finne det totale usikkerheten for den nytt beregnet elastisitet.

Til slutt velges det å måle grunnfrekvensen til stangen ved bruk av FFT-analyse (se teori del **IIIF** for mer informasjon). Tonegeneratoren fjernes, og det settes opp en mikrofon som kan ta opp lydopptak og overføre det digitalt. Mikrofonen skrus på og det slås igjen aksialt på stangen med en plasthammer.

3. Elastisitets modul med hensyn til holderens masse

Stangen har en holder montert i midten. Utifra databladene er det oppgitt at denne holderen alene veier ca. $m_h = 32.4g$. For usikkerheten, anslås det $\Delta m_h = 0.2g$.

I forrige delene har vi anslått at holderens masse er en del stangens masse. Det ønskes dermed å se hvor mye denne ekstra massen har påvirkning for beregnet elastisitet. Vi trekker dermed fra den ekstra massen som kommer fra holderen, og beregner elastisiteten på nytt.

Usikkerheten til massen beregnes ved å legge usikkerheten til m_h og m ved bruk av ligning 1.

IV. RESULTATER

1. Første metoden, bøyning av en messingstav med sirkulært tverrsnitt

Vi har da målt avstanden mellom B og C fire ganger. Målingene er da gitt i tabell I

Table I. 4 målte verdier for lengden av BC

Måling (i)	lengde (cm)
1	133.40
2	133.80
3	133.20
4	133.40

Ved bruk av MATLAB, får vi vite at gjennomsnittsverdi er 133.45cm, og at standardfeil(tilfeldig usikkerhet) er 0.13cm. Vi har målt dette over 6 ledd med meterstokken, dermed må usikkerheten for alle leddene være $6 \cdot 0.5\text{mm} = 3\text{mm}$. Det andre usikkerheten som kommer fra selve meterstokken har vi da regnet ut til å være $\Delta L = L \frac{1.14\text{mm}}{2\text{m}} = L 2.28e(-3)\text{m}$ Vi velger L til å være den gjennomsnittlige verdien som vi har funnet, da setter vi $L \cdot 2.28e(-3) = 133.45\text{cm} \cdot 2.28e(-3)\text{m} = 0.30\text{cm}$

Totalt har vi da 3 usikkerhetskilder, disse er oppsumert i tabell II

Table II. Kilder til usikkerhetene med mengden

Usikkerhet	Størrelse
Systematisk feil i selve meterstokk	0.30cm
Systematisk feil over ledd	0.30cm
Tilfeldig feil	0.13cm

Ved bruk av ligningen 1 finner vi ut av at total usikkerheten for lengden BC er 0.44cm. Med dette har vi funnet ut at avstand fra C til B er gitt som

$$BC = (133.45 \pm 0.44)\text{cm}$$

Ved å dele BC på 2 får vi at punkt for F må ligge $66.73 \pm 0.44\text{ cm}$ fra punkt C og punkt B.

Ved å måle de hvite loddene på balansevekten 5 ganger ender vi opp med relativt liten usikkerhet. Vi har funnet ut at feilen kommer bare fra oppløsningen, altså siden balansevekt har et sensitivitet, får vi aldri helt perfekt måling. Allikevel, har vi valgt å anslå et usikkerhet til å være på 0.01g, noe som er mindre enn 25% av den største usikkerheten, og dermed kan vi neglisjere den.

Ved å legge sette på loddene finner vi ut utslagene for avbøyninger, disse utslagene er presentert i tabell III

Table III. Måling fra måleuret fra utsatt kraft av loddene på stangen

Vekt for loddene [kg]	Utslag på måleuret [mm]
0.00	0.00
0.50	0.72
1.00	1.45
1.50	2.18
2.00	2.90
2.50	3.60
3.00	4.31
3.50	5.06

Ved å sette disse verdiene inn i MATLAB, og finne linæartilpassning, for vi et plot som figur 11 viser.

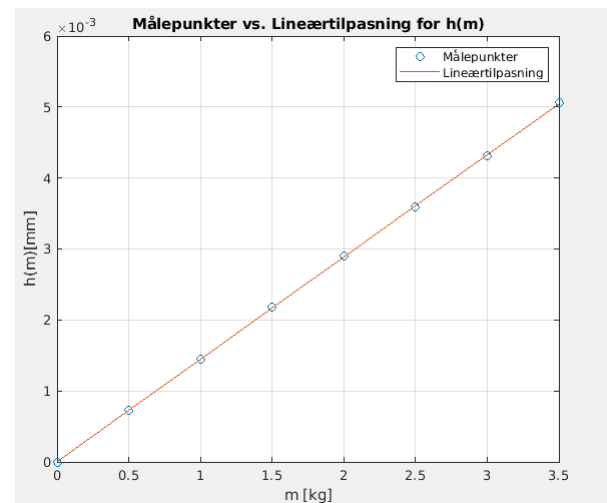


Figure 11. Målepunkter og dens linæartilnærming plottet

Ved å bruke fitlm kommando i MATLAB, får vi utskrift av stigningstallet og dens standardfeil slik figur 12 viser.

Estimated Coefficients:

	Estimate	SE
(Intercept)	5e-06	8.0302e-06
x1	0.0014414	3.8392e-06

Figure 12. Utifra $A m + B$ modellen ser vi at A er estimert til å være 0.00144, mens B er tilnærmet 0.

Vi har målt fem verdier for diameteren. Disse er gitt i

tabell IV.

Table IV. Målte verdien til diameteren

Måling	diameteren [mm]
d ₁	15.99
d ₂	16.00
d ₃	16.00
d ₄	15.99
d ₅	15.98

Ved bruk av MATLAB fant vi at gjennomsnittet av målingene er 15.992mm og standardfeilen er 0.004mm. Ved å legge standardfeilen/tilfeldigfeilen og systematiske feilen ender vi opp med $\Delta d = 0.02\text{mm}$. Dermed har vi funnet at diameteren til stangen er

$$d = (15.99 \pm 0.02)\text{mm}$$

Vi til slutt finner at elastisitets modul for stangen vår er gitt som 104.9GPa, ved partiellderivasjon (se appendix B for full derivasjon) finner vi også at det totale usikkerheten for E er 0.3GPa. Dermed Elastisitets module E for stangen er gitt ved

$$E = (104.9 \pm 0.3)\text{GPa}$$

2. Andre metode, dynamisk bestemmelse av elastisitetsmodulen

For å finne lengden L av staven, måler vi lengden fire ganger. Tabell V viser frem målingene.

Table V. Målte verdien av stangens lengde L

Måling	diameteren [cm]
1	144.1
2	144.5
3	144.4
4	144.3

Ved bruk av MATLAB finner vi at gjennomsnittlig målt verdi er 144.33cm, og standardfeilen er på 0.09cm. Siden vi har brukt det samme meterstokk, får vi at det systematiske usikkerheten fra meterstokken er 0.10cm. Vi har målt over 7 ledd, dermed får vi usikkerheten over leddene til å være 3.5mm. Det totale usikkerheten lagt sammen er da 0.37cm. Dermed lengden av stangen er

$$L = (144.33 \pm 0.37)\text{cm}$$

Det ble gjort 4 målinger av massen til stangen. Tabell VI viser frem disse målingene. Alle de fire målingene viser det samme. Det er to personer som har lest av målingene,

Table VI. Målte verdien av stangens masse m

Måling	massen [kg]
1	2.482
2	2.482
3	2.482
4	2.482

og det har blitt enighet mellom begge partnere om at alle fire målingene viste det samme utslag. Det ble brukt samme kalibrering lodd som i forrige metode. Det ble anslått at det systematiske usikkerheten fra disse kalibrerings loddene er såpass liten, at det kan neglisjeres. Dermed konkluderes det med at massen til stangen er gitt ved,

$$m = 2.482\text{kg}$$

Ved bruk av funnet elastisitet E fra forrige oppgave, og funnet verdier i denne delen, beregnes det ved bruk av ligning 8 at grunnfrekvens er estimert til å være på 1.213kHz.

Ved å ha denne frekvensen på tonegeneratoren, og et aksial slag på stangen observeres det en svak og utydelig sveving. Allikevel er det en del uenighet i forsøksgruppen om dette. Ved valg av $f = 1.2120\text{kHz}$ på tonegeneratoren, høres det sveving klarere. Dermed ved små justeringer og valg av høyere frekvens på det genererte tonen kommes det til enighet om at svevingen slutter ved 1.2129kHz. Ved å justere med ca. 0.4Hz opp eller ned på genererte tonen, observeres det et svak og utydelig sveving. På grunn av uenighet og diskusjon i gruppen velges det å anslå at usikkerheten for grunnfrekvensen til stangen ved bruk av svevingsmetoden, skal være på 0.6Hz.

$$f = (1212.0 \pm 0.6)\text{Hz}$$

Ved bruk av denne frekvensen beregnes det ny verdi for elastisitet, og ved bruk av partiell derivasjon finnes det usikkerheten. Elastisitets verdi for stangen ved bruk av svevings metoden er dermed funnet som

$$E = (105.1 \pm 0.3)\text{GPa}$$

Ved bruk av FFT-analyse endes det opp med en graf i frekvensdomenet som vises i figur 13.

Det nøyaktige frekvensen som FFT-analyse finner ut er 1213.6Hz. Dette er mindre presis enn det som ble funnet av svevingsmetode. Ved å runde ned til samme

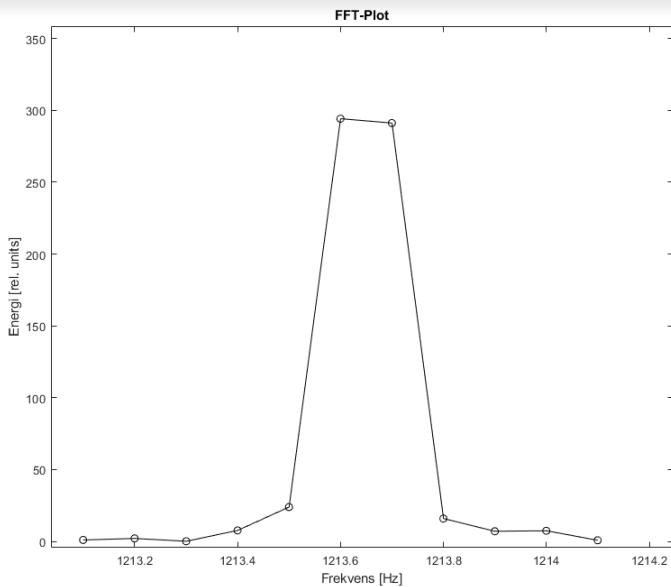


Figure 13. Fouriertransform i frekvensdomenet.

antall gjeldendesifre er resultat fra svevingsmetoden og FFT-analyse det samme.

3. Elastisitetens modul med hensyn til holderens masse

Det som har blitt gjort her, er bare mynket massen til stangen. Det har blitt brukt ligning 8 til å beregne dette. Her har vi antatt det samme frekvensen som ble funnet med sveving og FFT. Dermed ved beregning ble det funnet at elastisiteten med massen til bare stangen er,

$$E = (105.4 \pm 0.4) \text{ GPa}$$

V. DISKUSJON

1. Første metode, bøyning av en messingstav med sirkulært tverrsnitt

Når vi har funnet lengden BC , så delte vi med 2 for å finne midtpunktet, slik at vi skal vite hvor vi skal legge føleren på. Altså at vi må ha ca (66.73 ± 0.44) cm unna punkt C og B. Allikevel ser vi at vi har et feilområde på ± 0.44 cm, det sier at vi har et område på 0.88 cm hvor vi vet at i et eller annet sted må vi ha det "presise" midtpunktet, men vi kommer ikke til å vite presist hvor det kan være. Eneste vi kan gjøre er å måle mer nøyaktig med mer nøyaktig måleutstyr og måle det flere ganger slik at vi kan minke dette usikkerhetsområdet.

Vi har brukt vaterpass til å få stangholderen så

vannrett som mulig. Grunnen til det som nevnt i eksperimentaldelen er å få måleurets føler til å være mest mulig normal på flaten. Allikevel så tar vi bare hensyn til at overflaten av holderen skal være mest mulig vannrett, men vi tar ikke hensyn til at føleren skal ligge mest mulig normal på overflaten. Eneste utstyr vi bruker for å justere vinkelen på holderen er vaterpasset, og vaterpasset måler bare hvor vannrett den er med tanke på jordas overflate (du ønsker at boblen som er i vaterpasset skal være i midten), og dermed er ikke vaterpasset uavhengig av måleurfølerens pekeretning. Allikevel, så antokk vi at dette gir såpass liten usikkerhet at vi valgte å neglesjere denne feilen.

Når vi kalibrerer vektene er det flere ting som kan gi opphav til eventuell usikkerhet. For det første kan vi se visuelt at balansevektmaskinen er relativt gammel, og dermed er det sannsynlig at den kan ha relativt liten sensitivitet pga indre friksjon i vektens mekanisme. Altså at foreksempel et bestemt vekt gir ikke nok kraft for å motvirke det indre friksjonen i mekanismen. Man kan minke denne opphav for usikkerheten ved å minke det indre friksjon i mekanisme ved å for eksempel smørre på fett eller olje. Allikevel, dette fører til såpass liten usikkerhet at vi har valgt å neglisjere. Dette er fortsatt viktig å ta med i betraktningene. Det andre opphav for usikkerheten er loddens plassering på vektplaten. Utifra 3 ser vi at jo lengre avstand mellom rotasjonsmidtpunktet er, desto større er kraftmomentet. Dermed ved å plassere loddet lenger ut på siden, og ikke i midten av vektplaten, øker vi kraftmomentet, og dermed vil loddet slå ut større kraftmoment enn kalibreringsloddet. Dermed er det viktig å skjønne til balansevekten og vite hvor man skal plassere loddene.

2. Andre metode, dynamisk bestemmelse av elastisitetsmodulen

I resultat delen er det presentert at massen til stangen er uten usikkerhet. Dette må nok være feil siden det alltid er noe usikkerhet fra avlesning eller systematiske usikkerhet. Allikevel, er det tydelig at det systematiske usikkerheten dominerer. Dermed hadde det vært ganske lurt å måle massen til stangen med flere måleutstyr.

Når svevingsmetoden brukes for å bestemme grunnfrekvensen til materialet, er det det menneskelige øret som er det største feilkilden. I tillegg kan støy i bakgrunnen ha et stort påvirkning av svevingstolkningen. Det har blitt opplevd at man plutselig ikke hører sveving lenger når man har hørt sveving for lenge. Dette skyldes fra hørsels illusjon. Dermed er det lurt å ha flere personer som kan bekrefte at de hører sveving. I tillegg hadde det vært lurt å ha det stille i rommet slik at man kan fokusere på sveving mest mulig uten bakgrunnstøy.

Etter å ha funnet verdiene til elastisitet ved bruk av to metoder, er det mulig å diskutere hvor godt de stemmer med hverandre. Ved bruk av avbøyning ble det funnet at elastisitet er gitt som

$$E_{avbøyning} = (104.9 \pm 0.3) \text{GPa}$$

Mens ved bruk av sveving ble det funnet

$$E_{sveving} = (105.1 \pm 0.3) \text{GPa}$$

Ved å ta differansen D mellom disse to målte verdiene, kan man se hvor godt disse to målte verdiene stemmer overens med hverandre. Vi ser at differansen må være $D = 0.20 \text{GPa}$. Noe som er relativt lite. Allikevel, har vi usikkerheter for disse verdier. Ved bruk av ligning 1 finner vi at $\Delta D = 0.42 \text{GPa}$. Et generell regel sier at hvis absolutt verdi av differansen er mindre enn dens usikkerhet, kan det anses at verdiene er like, innenfor måleusikkerheten. Dermed kan vi se, at den målte elastisiteten fra begge metodene, anses som like innenfor måleusikkerhete.

VI. KONKLUSJON

Vi har brukt to forskjellige metoder for å finne elastisiteten. I den ene har vi bøyd på stangen ved et bestemt kraft, og målt hvor mye den bøyes. Utifra dette har vi tilnærmet et linært vekst for avbøyning med hensyn til massen som ble hengt på. Utifra denne tilnærmingen har vi funnet et stigningstall A . I tillegg har vi fått målt lengden mellom knivene og diamteter for stangen. Utifra denne informasjon har vi klart å beregne elastisiteten og har fått

$$E_1 = (104.9 \pm 0.3) \text{GPa}$$

I andre metoden har vi slått på stangen med plasthammer og observert frekvenser på tonen stangen emitterer på 2 måter. Ved bruk av svevingsfenomenet, og ved bruk av FFT. Vi har funnet at FFT metoden samsvarer med svevingsfenomensmetoden meget bra, og dermed funnet at elastisiteten er på

$$E_2 = (105.1 \pm 0.3) \text{GPa}$$

Ved å sammenligne disse to resultatene, konkluderte vi med at disse to metodene samsvarer med hverandre, selvom det ikke er "full overstemmelse". Vi har funnet at overstemmelse er innenfor måleusikkerheten.

Hvis vi skal trekke et grovt estimat for elastisitet for den type stangen som vi har brukt i forsøket, ville det vært på rundt 105 GPa.

REFERENCES

- Meterstokk utviklet med erfaring - Hultafors, Dat-
ablad

- Figur for teori delen om sveving.

Appendix A: Gjennomsnittet og Standardfeil i MATLAB

Hvis vi har for eksempel målt 5 tilfeldige verdier i et bestemt enhet. La os si vi har målt [1, 1.5, 1, 0.5, 0.8], så definerer vi dette inn i MATLAB.

```
m = [1, 1.5, 1, 0.5, 0.8];
mean(m)
>>>
ans =

    0.9600

std(m)/sqrt(5)
>>>
ans =

    0.1631
```

Her har vi brukt kommando mean(), som gir oss gjennomsnittsverdi av lista, og std(), som gir oss standard deviation av lista. Ved å dele standard deviation på kvadratroten av listen lengden, altså kvadratroten av antall målte verdier, får vi standard error.

Appendix B: Uledning av arealmoment for en sylinder med diameter $d = 2r$

Arealmoment på tvers av bjelken er gitt som

$$I = \int \int z^2 dy dz$$

Utifra situasjon når lastet er hengt på i midten av bjelken, defineres lasten langs z-retningen. Da strekkes bjelken langs x-retning. Bjelke er sylinder formet og dermed har en diameter $d = 2r$.

For denne geometrien settes grensene for uttrykket for arealmoment til, vi bruker sylinder koordinater.

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^R (r \sin \theta)^2 r dr d\theta = \frac{\pi d^4}{4 \cdot 2^4}$$

Appendix C: Uledning for likning 6

$$h = \frac{mgl^3}{48EI}$$

$$E = \frac{mgl^3}{48hI}$$

Uttrykket for I er allerede uttrykt i forrige appendix, ved å legge denne her endes det opp med

$$E = \frac{mgl^3 64}{48h\pi d^4} = \frac{4}{3} \frac{mgl^3}{d^4 h \pi}$$

Siden h kan også uttrykkes som linær funksjon, løser vi den for A

$$h = Am + 0$$

$$A = \frac{h}{m}$$

Ved å legge inn A i uttrykket endes det opp med ligning 6 ,

$$E = \frac{4}{3} \frac{gl^3}{|A|d^4\pi}$$

Appendix D: Partiell derivasjon av ligning 6

Vi begynner med å ha et uttrykk for E .

$$E = \frac{4l^3 g}{3\pi |A|d^4}$$

Vi har målt verdiene for l , A og d . Det er disse verdiene som har usikkerhet, og dermed er disse de variablene i ligning 2 som har usikkerhet. Dermed løser vi,

$$\begin{aligned} \Delta E &= \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial A} \Delta A\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial l} \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial d} \Delta d\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-4l^3 g \Delta A}{3\pi d^4 A^2}\right)^2 + \left(\frac{4l^3 g \Delta l}{\pi |A|d^4}\right)^2 + \left(\frac{-16l^3 g \Delta d}{3\pi |A|d^5}\right)^2} \end{aligned}$$

-
- [1] For mer informasjon om minste kvadrats metode, se disse [slides](#).