

FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2021

Oblig 3

(Versjon 3. februar 2021)

Dokumentet inneholder følgende tre deler:

- A Diskusjonsoppgaver
- B Regneoppgaver
- C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk)

Du finner frister for innlevering av obliger på Canvas. For å få obligen godkjent, må du vise at du har gjort et ordentlig forsøk på alle oppgavene. 6/11 obliger må være godkjent for å gå opp til eksamen.

A Diskusjonsoppgaver

Oppgave 1 de Broglie bølgelengden

Louis de Broglie foreslo i 1924 at materien – altså partikler med masse som danner atomer og alt stoff – har bølgeegenskaper. Videre framla han at bølgelengden til en partikkel avhenger av bevegelsesmengden som $\lambda = h/p$, der h er Plancks konstant.

- Hva har størst bølgelengde, en fotgjenger eller en bil i høy fart?
- Bilen bremses. Hva skjer med de Broglie-bølgelengden til bilen etter at den har stoppet opp?
 - Bølgelengden øker
 - Bølgelengden avtar
 - Bilen har ikke lenger en bølgelengde

Oppgave 2 Dobbeltpalteeksperimentet

Dobbeltpalteeksperiment med elektroner er kjent for å vise at elektroner har bølgeegenskaper (se kompendiet).

- På hvilken måte tilsier eksperimentet at elektronet ikke kan forstås som en liten klassisk kule som følger Newtonsk mekanikk, men også må ha bølgeegenskaper?
- Det går an å sende ett og ett elektron mot dobbeltpalten. Hva skjer med resultatene hvis vi prøver å måle hvilken spalte elektronet gikk igjennom?

B Regneoppgaver

Oppgave 3 de Broglie bølgelengde

En partikkel med ladning e og masse m_0 akselereres av et elektrisk potensial V til en relativistisk hastighet.

- a) Vis at de Broglie bølgelengden for partikkelen er gitt ved

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0eV}} \left(1 + \frac{eV}{2m_0c^2}\right)^{-1/2}$$

- b) Vis at dette gir $\lambda = h/m_0v$ i den ikke-relativistiske grensen.
c) Vis at for en relativistisk partikkel med hvileenergi E_0 er de Broglie bølgelengden gitt ved

$$\lambda = \frac{1.24 \times 10^{-2}}{E_0(\text{MeV})} \cdot \frac{\sqrt{(1 - \beta^2)}}{\beta} \text{ \AA},$$

hvor $\beta = v/c$, og hvor $E_0(\text{MeV})$ er hvileenergien målt i MeV.

Oppgave 4 Dispersjonsrelasjonen

Et fysisk system beskrevet ved hjelp av bølgeligninger som tillater $y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ som løsninger, der sirkelfrekvensen ω er en reell funksjon av bølgetallet k , kalles for et lineært, dispersivt system. Funksjonen $\omega(k)$ kalles for *dispersjonsrelasjonen* til systemet.

- a) Vis at dispersjonsrelasjonen for frie, relativistiske elektronbølger er gitt ved

$$\omega(k) = c \sqrt{k^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2}, \quad (1)$$

der m er elektronets hvilemasse.

- b) Finn et uttrykk for fasehastigheten $v_f(k)$ og gruppehastigheten $v_g(k)$ til disse bølgene, og vis at produktet $v_f(k) \cdot v_g(k)$ er en konstant (uavhengig av k). Husk: $v_f(k) \equiv \omega/k$ og $v_g(k) \equiv d\omega/dk$.
c) Fra uttrykket for v_f ser vi at $v_f > c$! Kommenter dette fenomenet og hva det har å si for tolkningene av v_f og v_g ut fra den spesielle relativitetsteorien.

Oppgave 5 Superponering

Vi skal her legge sammen sinusbølger $y(x, t) = A \sin[kx - \omega(k)t]$, med dispersjonsrelasjon som i Likn.(1). For å forenkle regningen kan du innføre $\hbar = c = 1$.¹

- Legg sammen to slike bølger med bølgetall som ligger nær hverandre, $k_1 = k_0 + \Delta k$, $k_2 = k_0 - \Delta k$, $\Delta k \ll k_0$. Velg $A = m = 1$, $k_1 = 0.7$ og $k_2 = 0.6$ og lag et plot av resultatet. Hvordan ser den resulterende funksjonen ut, og hvordan tolker man de to delene? Det er mulig å gjøre superponeringen både analytisk og numerisk, men vi anbefaler en numerisk fremgangsmåte.
- Hvordan beveger bølgen seg, og hva blir fase- og gruppehastigheten?
- Hvordan er formen på funksjonen ved $t = 0$ dersom du nå (numerisk) superponerer veldig mange (si 1000 eller enda flere) cosinusbølger med bølgetall $k \in [-5, 5]$, og med en amplitude fordelt som

$$A(k) = \frac{a}{k^2 + a^2} ? \quad (2)$$

C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk)

Oppgave 6 Spalteåpning

Når bølger treffer enkle spalteåpninger, kan vi få såkalte diffraksjonsmønstre. Grovt sett kan vi si at for at diffraksjonsmønstre skal oppstå, må bølgelengden være av samme størrelsesorden som spalteåpningen. Se for deg at du selv går igjennom en døråpning som er omtrent 1 m bred. Dørkarmen er 20 cm dyp. Hvor lang tid må du bruke på å passere gjennom døra for at det skal oppstå et diffraksjonsmønster?

Oppgave 7 Oppgave 4.1 i Kompendiet

¹Dette betegnes i fysikk som såkalte **naturlige enheter** (!) i kontrast til metriske enheter.