FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2021
Løsningsforslag for Oblig 4

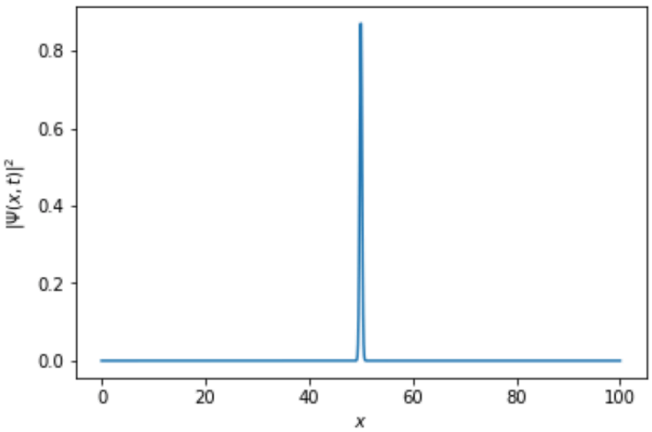
(Versjon 22. februar 2021)

Her er løsninger på A Diskusjonsoppgaver, B Regneoppgaver og C Tilleggs-oppgaver (ikke obligatorisk).

A Diskusjonsoppgaver

Oppgave 1 Tolkning av $|\Psi(x,t)|^2$

Hvordan vil du fysisk tolke den kvadrerte bølgefunksjonen i Fig. 1? Diskutér påstandene i A, B, C, D og E og skriv hvilken dere synes passer best. Begrunn hvorfor. Kommenter gjerne de andre alternativene også.



Figur 1: Kvadratet av bølgefunksjonen som funksjon av posisjon x.

A: Dette ser ikke særlig fysisk ut i det hele tatt

B: Kvantemekanikken lar oss egentlig ikke «tolke» bølgefunksjonen $\Psi(x,t)$

C: $|\Psi(x,t)|^2$ beskriver en stor partikkel

D: $|\Psi(x,t)|^2$ beskriver en liten partikkel

E: $|\Psi(x,t)|^2$ beskriver at det er størst sannsynlighet for å finne en bestemt partikkel i nærheten av $x = 50$

Svar: Alternativ E er riktig. Den kvadrerte bølgefunksjonen tolkes som en sannsynlighetstetthet, jfr Max Born's artikkel i *Zeitschrift für Physik* (1926).

Den smale, spisse grafen viser at nesten all sannsynlighet for å finne partikkelen ligger rundt punktet $x = 50$. Alternativ B har også et poeng, siden bølgefunksjonen $\Psi(x,t)$ ikke har noen direkte fysisk tolkning og kan ikke måles direkte. $|\Psi(x,t)|^2$ har derimot en tolkning, som sannsynlighetstetthet for en partikkels posisjon. Alternativene C og D er gale siden sannsynlighetstettheten bare forteller om sannsynligheten for å finne partikkelen ved én måling. *Digresjon:* Fra grafen kan vi riktignok avlese uskarpheten i x, men det sier bare noe om uskarpheten i p (ikke partikkelens størrelse).

Oppgave 2 Tolkning av bølgefunksjonen

Bølgefunksjonen $\Psi(x,t)$ er en løsning av kvantefysikkens bevegelsesligning (Schrödinger-ligningen), mens funksjonen $x(t)$ er løsning av den klassiske fysikkens bevegelsesligning (Newtons andre lov).

a) Hvordan kan du tolke hhv. $\Psi(x,t)$, $|\Psi(x,t)|^2$ og $x(t)$ fysisk?

Svar: $\Psi(x,t)$ har ingen klar fysisk tolkning, den kan ikke måles direkte. $|\Psi(x,t)|^2 = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$ beskriver sannsynlighetsfordelingen for partikkelen i rom og tid. $x(t)$ beskriver derimot en bane til ett eller annet objekt, og kan måles.

b) Hva slags prediksjoner kan vi gjøre på bakgrunn av de to funksjonene, og på hvilken måte er prediksjonene forskjellige?

Svar: $\Psi(x,t)$ (etter kvadrering) lar oss forutsi sannsynligheten for ulike utfall av målinger av en partikkels posisjon. Sagt på en annen måte, den kan forutsi spredningen av gjentatte posisjonsmålinger av likt preparerte systemer. Den kan ikke deterministisk forutsi utfallet av én enkelt måling. $x(t)$ lar oss forutsi hvor partikkelen er til en viss tid, deterministisk.

Prediksjonene er fundamentalt forskjellige: $\Psi(x,t)$ gir oss en sannsynlighetsfordelingen for gjentatte målinger mens $x(t)$ gir oss en deterministisk forutsigelse av én enkelt måling.

Oppgave 3 Forventningsverdier

Diskuter og kommenter følgende utsagn (flere kan være riktige):

A: Forventningsverdien $\langle x \rangle$ er den verdien det er mest sannsynlig å få hvis vi gjør en måling av posisjonen x til partikkelen.

B: Sannsynligheten for å måle forventningsverdien kan være 0.

C: Forventningsverdien $\langle x \rangle$ er gjennomsnittet vi ville fått hvis vi kunne måle posisjonen til (uendelig) mange partikler som alle var i samme tilstand Ψ.

Svar: Både alternativ B og C er riktige. C: Snittet av mange gjentatte målinger går mot forventningsverdien når antall målinger går mot uendelig. For en vanlig terning er for eksempel forventningsverdien 3.5. B: Forventningsverdien trenger ikke være et sannsynlig utfall av én måling. Hvis vi betrakter terningen igjen, ser vi at sannsynligheten for å få forventningsverdien er 0. Man får aldri 3.5 på en vanlig terning. Det betyr også at alternativ A generelt sett er feil. Forventningsverdien $\langle x \rangle$ er ikke nødvendigvis det samme som den mest sannsynlige verdien man kan få ved en måling av x (men den kan være det).

B Regneoppgaver

Oppgave 4 Sannsynlighetsfordeling av posisjon

Vi betrakter bølgefunksjonen

$$\Psi(x,t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t}, \tag{1}$$

hvor A, λ og ω er positive reelle konstanter.

a) Finn normaliseringen til Ψ.

Svar: Vi normaliserer ved tiden $t = 0$ da en løsning av SL vil forbli normalisert ved alle tider dersom den er normalisert ved en bestemt tid:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,0)|^2 \, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\lambda|x|}Ae^{-\lambda|x|} \, dx \\ &= 2A^2 \int_0^{\infty} e^{-2\lambda x} \, dx \\ &= 2A^2 \left[-\frac{1}{2\lambda} e^{-2\lambda x} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{A^2}{\lambda}. \end{aligned} \tag{2}$$

Dette gir $A = \sqrt{\lambda}$ som normalisering når A er reell og positiv. Vi har brukt at funksjonen er symmetrisk rundt $x = 0$ når vi gjør integralet.

b) Bestem forventningsverdien til x og x^2.

Svar:

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x|\Psi(x,t)|^2\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} xAe^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t}A^*e^{-\lambda|x|}e^{i\omega t}\,dx \\
&= |A|^2\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-2\lambda|x|}\,dx = 0. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Denne integranden er anti–symmetrisk om $x = 0$ (odde integrand). Integralet er derfor null.

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2|\Psi(x,t)|^2\,dx = |A|^2\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-2\lambda|x|}\,dx \\
&= 2\lambda\int_0^{\infty} x^2e^{-2\lambda x}\,dx \\
&= 2\lambda\left[\frac{1}{(2\lambda)^{2+1}}\cdot 2!\right] \\
&= \frac{1}{2\lambda^2}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Her har vi brukt formelen fra Oblig 1:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha^{n+1}}\,n!, \qquad (5)$$

med $n = 2$ og $\alpha = 2\lambda$.

c) Finn standardavviket til x. Plott grafen til $|\Psi|^2$ numerisk som en funksjon av x (bruk f.eks. `python` og vær nøye med enhetene på aksene). Marker punktene $x_1 = \langle x \rangle + \sigma$ og $x_2 = \langle x \rangle - \sigma$ for å illustrere hvordan σ representerer "spredningen" i x av bølgefunksjonen.

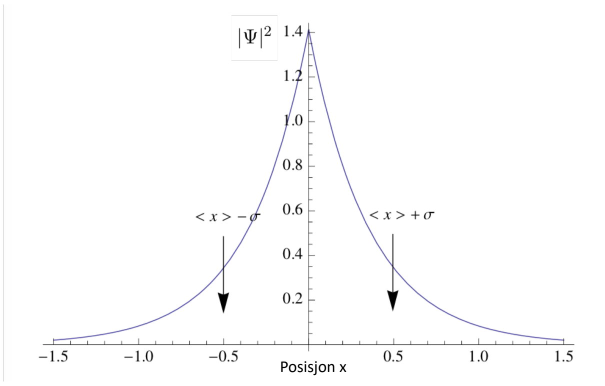
Svar: Standardavviket er

$$\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{2\lambda^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}\frac{1}{\lambda}. \qquad (6)$$

Grafen til $|\Psi|^2$ vises i Figur 2. I denne oppgaven avvhenger ikke $|\Psi|^2$ av tid, men dette kan være tilfelle for andre bølgefunksjoner.

d) Hva er sannsynligheten for at partikkelen befinner seg utenfor intervallet $[x_1, x_2]$? **Svar:** Sannsynligheten for å finne partikkelen utenfor

intervallet $[x_2, x_1]$ er $1 - P(x_2, x_1)$, hvor $P(x_2, x_1)$ er sannsynligheten



Figur 2: $|\Psi|^2$ med $\lambda = \sqrt{2}$.

for å finne partikkelen innenfor intervallet. Denne er gitt av integralet

$$\begin{aligned} P(x_2, x_1) &= \int_{x_2}^{x_1} |\Psi|^2\, dx = \int_{\langle x\rangle - \sigma}^{\langle x\rangle + \sigma} A^2 e^{-2\lambda|x|}\, dx \\ &= \int_{-\sqrt{\frac{1}{2}}\frac{1}{\lambda}}^{\sqrt{\frac{1}{2}}\frac{1}{\lambda}} \lambda e^{-2\lambda|x|}\, dx \\ &= 2\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}\frac{1}{\lambda}} \lambda e^{-2\lambda x}\, dx \\ &= \left[-e^{-2\lambda x}\right]_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}\frac{1}{\lambda}} \\ &= -e^{-\sqrt{2}} + 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Dette gir at sannsynligheten er $1 - P(x_2, x_1) = e^{-\sqrt{2}} = 0.243$. Altså, i rundt 24.3% av identiske målinger på et ensemble av tilsvarende systemer så befinner partikkelen seg utenfor intervallet.

Oppgave 5 Uskarphetsrelasjonen

En partikkel med masse m befinner seg i tilstanden

$$\Psi(x, t) = Ae^{-a[(mx^2/\hbar)+it]}, \tag{8}$$

hvor A og a er positive reelle konstanter.

a) Finn A.

Svar: Vi bruker normeringsbetingelsen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2\, dx = 2|A|^2 \int_0^{\infty} e^{-2amx^2/\hbar}\, dx$$

$$= \quad 2A^2\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2am/\hbar}} = A^2\sqrt{\frac{\pi\hbar}{2am}}, \tag{9}$$

hvor vi har brukt fra Rottmann at

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}. \tag{10}$$

Normeringsbetingelsen gir at $A^2 = \sqrt{\frac{2am}{\pi\hbar}}$. Vi kan da velge en positiv verdi for A gitt ved

$$A = \left(\frac{2am}{\pi\hbar}\right)^{1/4}. \tag{11}$$

b) For hvilken potensiell energi funksjon $V(x)$ tilfredsstiller Ψ Schrödingerligningen?

Svar: Vi setter tilstanden inn i Schrödingerligningen. Først finner vi de deriverte vi trenger:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\Psi &= -ia\Psi, \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2amx}{\hbar}\Psi\right) = -\frac{2am}{\hbar}\Psi + \frac{2amx}{\hbar}\frac{2amx}{\hbar}\Psi \\
&= \frac{2am}{\hbar}\left(\frac{2amx^2}{\hbar} - 1\right)\Psi.
\end{aligned} \tag{12}$$

I Schrödingerligningen gir det

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi &= i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{2am}{\hbar}\left(\frac{2amx^2}{\hbar} - 1\right)\Psi + V(x)\Psi &= i\hbar(-ia\Psi) \\
-\hbar a\left(\frac{2amx^2}{\hbar} - 1\right) + V(x) &= \hbar a \\
V(x) &= 2ma^2x^2.
\end{aligned} \tag{13}$$

Tilstanden Ψ er altså en gyldig løsning for Schrödingerligningen med potensialet $V(x) = 2ma^2x^2$. Dette kalles et **harmonisk oscillatorpotensiale**, og vi skal komme tilbake til det mange ganger.

c) Beregn forventningsverdiene til x, x^2, p, og p^2.

Svar: Forventningsverdien til x er enkel å finne:

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x|\Psi(x,t)|^2\,dx = 0, \tag{14}$$

fordi vi har en odde (antisymmetrisk) integrand. Forventningsverdien til x^2 er

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi(x,t)|^2 \, dx = 2|A|^2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-2amx^2/\hbar} \, dx \\
&= 2A^2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-2amx^2/\hbar} \, dx \\
&= 2 \left(\frac{2am}{\pi\hbar} \right)^{1/2} \frac{1}{2^2} \left(\frac{\hbar}{2am} \right)^{3/2} \sqrt{\pi} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2am}{\hbar} \right)^{1/2} \left(\frac{\hbar}{2am} \right)^{3/2} = \frac{\hbar}{4am}, \qquad (15)
\end{aligned}$$

hvor vi har brukt fra Rottmann at

$$\int_0^{\infty} x^k e^{-\lambda x^2} \, dx = \frac{1}{2} \lambda^{-\frac{k+1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2} \right), \qquad (16)$$

for $k > -1$ og $\lambda > 0$, som med $k = 2$ og $\lambda = 2am/\hbar$ gir

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-2amx^2/\hbar} \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{2am}{\hbar} \right)^{-3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2^2} \left(\frac{\hbar}{2am} \right)^{3/2} \sqrt{\pi}. \qquad (17)$$

Forventningsverdien til p er

$$\langle p \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = 0, \qquad (18)$$

fordi $\langle x \rangle = 0$. Tilsutt er forventningsverdien til p^2 gitt ved

$$\begin{aligned}
\langle p^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Psi \, dx = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi \, dx \\
&= -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{2am}{\hbar} \left(\frac{2amx^2}{\hbar} - 1 \right) \Psi \, dx \\
&= -2am\hbar \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2amx^2}{\hbar} |\Psi|^2 \, dx - \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 \, dx \right) \\
&= -2am\hbar \left(\frac{2am}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi|^2 \, dx - 1 \right) \\
&= -2am\hbar \left(\frac{2am}{\hbar} \langle x^2 \rangle - 1 \right) \\
&= -2am\hbar \left(\frac{2am}{\hbar} \frac{\hbar}{4am} - 1 \right) \\
&= am\hbar, \qquad (19)
\end{aligned}$$

hvor vi har brukt normeringsbetingelsen for Ψ og forventningsverdien for x^2 for å løse integralene.

d) Finn σ_x og σ_p. Er disse konsistente med uskarphetsrelasjonen?

Svar:

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{4am}}. \tag{20}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \sqrt{am\hbar}. \tag{21}$$

Vi får

$$\sigma_x \sigma_p = \sqrt{\frac{\hbar}{4am}} \sqrt{am\hbar} = \frac{\hbar}{2}, \tag{22}$$

som akkurat oppfyller uskarphetsrelasjonen, faktisk har tilstanden den minimale uskarpheten som er tillatt.

C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk)

Oppgave 6 Konstant tillegg i potensiell energi

Anta at du legger til en konstant V_0 til den potensielle energien i et problem (med konstant mener vi her uavhengig av både x og t). I *klassisk mekanikk* så endrer det ingenting, problemet har samme løsning, men hva skjer i *kvantemekanikken*? Vis at bølgefunksjonen plukker opp en tidsavhengig fasefaktor: $\exp(-iV_0 t/\hbar)$. Hva slags effekt har dette på forventningsverdier til dynamiske variable i problemet?

Svar: Anta at Ψ er en løsning av Schrödingerligningen til et problem uten V_0:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \tag{23}$$

Hva er da løsningen Ψ_0 for potensialet $V(x) + V_0$? Vi prøver med forslaget $\Psi_0 = \Psi e^{-iV_0 t/\hbar}$ og setter inn i Schrödingerligningen. Venstre side gir

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2} + (V(x) + V_0)\Psi_0 &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 (\Psi e^{-\frac{iV_0 t}{\hbar}})}{\partial x^2} + (V(x) + V_0)\Psi e^{-\frac{iV_0 t}{\hbar}} \\
&= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi\right) e^{-\frac{iV_0 t}{\hbar}} + V_0 \Psi e^{-\frac{iV_0 t}{\hbar}} \\
&= i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} e^{-\frac{iV_0 t}{\hbar}} + V_0 \Psi e^{-\frac{iV_0 t}{\hbar}},
\end{aligned} \tag{24}$$

hvor vi i den siste overgangen har brukt den opprinnelige Schrödingerligningen til problemet uten V_0. Høyre side gir

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_0}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial (\Psi e^{-iV_0 t/\hbar})}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}
&= i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}e^{-iV_0t/\hbar} + i\hbar\Psi\frac{-iV_0}{\hbar}e^{-iV_0t/\hbar} \\
&= i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}e^{-iV_0t/\hbar} + V_0\Psi e^{-iV_0t/\hbar}. \qquad (25)
\end{aligned}$$

Vi må altså konkludere med at $\Psi_0 = \Psi e^{-iV_0t/\hbar}$ er en løsning. Fordi en differensialligning av en gitt type, som Schrödingerligningen, alltid har samme antall løsninger, har vi nå alle løsningene dersom vi hadde alle løsningene Ψ_0 av den opprinnelige Schrödingerligningen.

For en generell forventningsverdi til en observabel $Q(x,p)$ har vi

$$\begin{aligned}
\langle Q(x,p)\rangle &= \int \Psi_0^* \, Q(\hat{x},\hat{p})\,\Psi_0\,dx \\
&= \int \Psi_0^* \, Q\left(x, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\,\Psi_0\,dx \\
&= \int \Psi^* e^{iV_0t/\hbar}\,Q\left(x, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\,\Psi e^{-iV_0t/\hbar}\,dx \\
&= \int \Psi^* \, Q\left(x, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\,\Psi\,dx. \qquad (26)
\end{aligned}$$

Vi kan her flytte $e^{iV_0t/\hbar}$ forbi Q fordi Q ikke innholder noen derivert med hensyn på t, og de to fasene kansellerer. Forventningsverdiene for Ψ_0 og Ψ er altså identiske, og det er derfor ingen *observable* forskjeller mellom de to løsningene. Det konstante bidraget til potensialet har ingen observabel effekt i kvantemekanikken!

Oppgave 7 Oppgave 1.7 i Griffiths

Finn $d\langle p\rangle/dt$. *Hint:* svaret skal bli

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle. \qquad (27)$$

Denne ligningen, og

$$\langle p\rangle = m\frac{d\langle x\rangle}{dt}, \qquad (28)$$

som vi har sett tidligere, er to eksempler på **Ehrenfests teorem** som forteller oss at forventningsverdier må oppfylle de klassiske lovene.[1]

Svar: Vi har fra definisjonen av $\langle p\rangle$ at

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi\,dx$$

[1] Her er det selvfølgelig

$$F = \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad (29)$$

som er oppfylt.

$$
\begin{aligned}
&= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left[\Psi^* \frac{\partial}{\partial x}\Psi\right] dx \\
&= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \Psi^* \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right] dx. \qquad (30)
\end{aligned}
$$

Vi setter inn for Schrödingerligningen løst med hensyn på $\partial\Psi/\partial t$:

$$
\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - V\Psi\right), \qquad (31)
$$

som gir

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\langle p\rangle}{dt} \\
&= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \Psi^* \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + V\Psi^*\right)\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \Psi^* \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - V\Psi\right)\right] dx.
\end{aligned}
$$

Merk: Leddene $\pm V\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ kansellerer, slik at

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\langle p\rangle}{dt} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \Psi^*\left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} - \frac{\partial V}{\partial x}\Psi\right)\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\hbar^2}{2m}\Psi^*\frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} - \Psi^*\frac{\partial V}{\partial x}\Psi\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2}\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3}\right) - \Psi^*\frac{\partial V}{\partial x}\Psi\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right) - \Psi^*\frac{\partial V}{\partial x}\Psi\right] dx. \qquad (32)
\end{aligned}
$$

Her kan vi bruke at integralet

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right) dx = \left[\frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0, \qquad (33)
$$

når man krever at Ψ oppfører seg på en rimelig (fysisk) måte. Med andre ord så må vi kreve at $(\psi, \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}) \to 0$ når $x \to \pm\infty$ for et reelt system der bølgefunksjonen skal være både normaliserbar og kvadratisk integrerbar. Det er for eksempel nok å anta at $|\Psi| \to 0$ når $|x| \to \infty$ og at Ψ er kontinuerlig. Dette gir

$$
\begin{aligned}
\frac{d\langle p\rangle}{dt} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\Psi^*\frac{\partial V}{\partial x}\Psi\right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right)\Psi\, dx \\
&= \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle. \qquad (34)
\end{aligned}
$$