FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2021
Løsningsforslag for Oblig 3

(Versjon 28. januar 2021)

Her er løsninger på A Diskusjonsoppgaver, B Regneoppgaver og C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk).

A Diskusjonsoppgaver

Oppgave 1 de Broglie bølgelengden

Louis de Broglie foreslo i 1924 at materien – altså partikler med masse som danner atomer og alt stoff – har bølgeegenskaper. Videre framla han at bølgelengden til en partikkel avhenger av bevegelsesmengden som $\lambda = h/p$, der h er Plancks konstant.

a) Hva har størst bølgelengde, en fotgjenger eller en bil i høy fart?

   Svar: En fotgjenger har størst bølgelengde, siden bevegelsesmengden (som er i nevneren i de Broglies formel) er mindre enn hos en bil i høy fart.

b) Hva skjer med de Broglie-bølgelengden til bilen når den stopper?

   (i) Bølgelengden øker
   (ii) Bølgelengden avtar
   (iii) Bilen har ikke lenger en bølgelengde

   Svar: (iii) er riktig. Når bilen stopper, har ikke bilen lenger noen bevegelsesmengde, og da er heller ikke de Broglie-bølgelengden definert. Bilen har ingen bølgelengde når den er i ro.

Oppgave 2 Dobbeltspalteeksperimentet

Dobbeltspalteeksperiment med elektroner er kjent for å vise at elektroner har bølgeegenskaper (se kompendiet).

a) På hvilken måte tilsier eksperimentet at elektronet ikke kan forstås som en liten klassisk kule som følger Newtonsk mekanikk, men også må ha bølgeegenskaper?

   Svar: Interferensmønsteret som oppstår i dobbeltspalteeksperimentet, kan ikke forklares hvis elektronet forstås som en kule som følger Newtonsk mekanikk. Newtonsk mekanikk forutsier at kulene vil treffe veggen bak spaltene i to striper bak åpningene, ikke et interferensmønster.

b) Det går an å sende ett og ett elektron mot dobbeltspalten. Hva skjer med resultatene hvis vi prøver å måle hvilken spalte elektronet gikk igjennom?

Svar: Hvis vi prøver å måle hvilken spalte elektronet har gått gjennom, forsvinner interferensmønsteret. I stedet får vi (hvis vi gjør det mange ganger) to striper som forutsagt at Newtonsk mekanikk.

B Regneoppgaver

Oppgave 3 de Broglie bølgelengde

En partikkel med ladning e og masse m_0 akselereres av et elektrisk potensial V til en relativistisk hastighet.

a) Vis at de Broglie bølgelengden for partikkelen er gitt ved

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0eV}}\left(1+\frac{eV}{2m_0c^2}\right)^{-1/2}. \tag{1}$$

Svar: De Broglie bølgelengden er $\lambda = h/p$, hvor p er bevegelsesmengden. Her behøver vi det relativistiske uttrykket for forholdet mellom energi og bevegelsesmengde, $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$. Den totale energien E er gitt ved summen av kinetisk energi (fra akselerasjonen), $K = eV$, og hvileenergien $E_0 = m_0c^2$. Vi løser for bevegelsesmengden og setter inn for E:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - m_0^2c^4}} \\
&= \frac{hc}{\sqrt{(eV + m_0c^2)^2 - m_0^2c^4}} \\
&= \frac{hc}{\sqrt{(eV)^2 + 2eVm_0c^2}} \\
&= \frac{hc}{\sqrt{2m_0c^2eV}\sqrt{\frac{(eV)^2}{2eVm_0c^2}+1}} \\
&= \frac{h}{\sqrt{2m_0eV}}\left(\frac{eV}{2m_0c^2}+1\right)^{-1/2}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

b) Vis at dette gir $\lambda = h/m_0v$ i den ikke–relativiske grensen.

Svar: For ikke–relativistiske energier er den kinetiske energien $K = eV$, mye mindre enn hvileenergien, $E_0 = m_oc^2$, $K \ll E_0$. Dette gir at

$eV/2m_0c^2 = K/2E_0 \ll 1$ og

$$\left(\frac{eV}{2m_0c^2} + 1\right)^{-1/2} \simeq 1. \tag{3}$$

Siden (ikke-relativistisk), $K = eV = \frac{1}{2}m_0v^2$, så er

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0eV}}\left(\frac{eV}{2m_0c^2} + 1\right)^{-1/2} \simeq \frac{h}{\sqrt{2m_0eV}} = \frac{h}{\sqrt{m_0^2v^2}} = \frac{h}{m_0v}. \tag{4}$$

c) Vis at for en relativistisk partikkel med hvileenergi E_0 er de Broglie bølgelengden gitt ved

$$\lambda = \frac{1.24 \times 10^{-2}}{E_0(\mathrm{MeV})} \cdot \frac{\sqrt{(1-\beta^2)}}{\beta}\ \text{Å},$$

hvor $\beta = v/c$ og hvor $E_0(\mathrm{MeV})$ er hvileenergien målt i MeV.

Svar: En relativistisk partikkel med hvileenergi E_0 har totalenergi $E = \gamma m_0c^2 = \gamma E_0$, hvor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{5}$$

eller $\gamma^2 = (1-\beta^2)^{-1}$. Vi gjentar regningen fra oppgave a) og får

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - m_0^2c^4}} \\
&= \frac{hc}{\sqrt{\gamma^2E_0^2 - E_0^2}} \\
&= \frac{hc}{E_0}\frac{1}{\sqrt{\gamma^2-1}} \\
&= \frac{hc}{E_0}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^{-1}-1}} \\
&= \frac{hc}{E_0}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2}}} \\
&= \frac{hc}{E_0}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \\
&= \frac{1240\ \mathrm{nm\,eV}}{10^6\,\mathrm{eV}\cdot E_0(\mathrm{MeV})}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \\
&= \frac{1.24\times 10^{-2}}{E_0(\mathrm{MeV})}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}\ \text{Å}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Oppgave 4 Dispersjonsrelasjonen

Et fysisk system beskrevet ved hjelp av bølgeligninger som tillater $y = A\cos(kx - \omega t)$ som løsninger, der sirkelfrekvensen ω er en reell funksjon av bølgetallet k, kalles for et lineært, dispersivt system. Funksjonen $\omega(k)$ kalles for *dispersjonsrelasjonen* til systemet.

a) Vis at dispersjonsrelasjonen for frie, relativistiske elektronbølger er gitt ved

$$\omega(k) = c\sqrt{k^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2}, \tag{7}$$

der m er elektronets hvilemasse.

Svar: For å finne dispersjonsrelasjonen setter vi opp et uttrykk for energi som funksjon av bevegelsesmengde for partikkelen (et fritt relativistisk elektron). Dette er $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. Deretter bytter vi variable til bølgetall og vinkelfrekvens gjennom de Broglies uttrykk $E = \hbar\omega$ og $p = \hbar k$. Dette gir

$$\hbar^2\omega^2 = \hbar^2k^2c^2 + m^2c^4. \tag{8}$$

Vi løser dette for vinkelfrekvensen ω som funksjon av bølgetallet k, og får

$$\omega = \sqrt{k^2c^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}} = c\sqrt{k^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2}. \tag{9}$$

b) Finn et uttrykk for fasehastigheten $v_f(k)$ og gruppehastigheten $v_g(k)$ til disse bølgene, og vis at produktet $v_f(k)\cdot v_g(k)$ er en konstant (uavhengig av k). Husk: $v_f(k) \equiv \omega/k$ og $v_g(k) \equiv d\omega/dk$.

Svar: Fasehastigheten er gitt som

$$v_f(k) \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{c\sqrt{k^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2}}{k} = c\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{\hbar k}\right)^2}. \tag{10}$$

Gruppehastigheten er gitt som

$$\begin{aligned} v_g(k) &\equiv \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left(c\sqrt{k^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2}\right) \\ &= \frac{ck}{\sqrt{k^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{\hbar k}\right)^2}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Produktet er da

$$v_f(k) \cdot v_g(k) = c\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{\hbar k}\right)^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{1 + (\frac{mc}{\hbar k})^2}} = c^2, \tag{12}$$

altså konstant.

En viktig observasjon, som ikke var en del av oppgaven, er at fra Likn. (11) ser vi også at (vi multipliserer med $c\hbar k$ over og under brøkstreken):

$$v_g(k) = \frac{c^2 \hbar k}{\sqrt{c^2\hbar^2 k^2 + m^2 c^4}} = \frac{c^2 p}{\sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}} = \frac{c^2 p}{E} = v, \tag{13}$$

hvor vi i siste overgang har brukt at den relativistiske bevegelsesmengden er

$$p = \gamma m v = \gamma m c^2 \cdot \frac{v}{c^2} = E \cdot \frac{v}{c^2}. \tag{14}$$

Dette viser at v_g er lik partikkelhastigheten også for det relativistiske tilfellet, jfr. kompendiet hvor dette demonstreres for det ikke-relativistiske tilfellet. (Dette gjelder i alle fall i vakuum. I materialer kan v_g være større enn lyshastigheten!))

c) Fra uttrykket for v_f ser vi at $v_f > c$! Kommenter dette fenomenet og hva det har å si for tolkningene av v_f og v_g ut fra den spesielle relativitetsteorien.

Svar: Dette viser bare at v_f ikke kan representere partikkelens hastighet fordi $v_f > c$ bryter med relativitetsteorien. v_g derimot er alltid mindre enn eller lik c, og er et uttrykk for hastigheten. Det at $v_f > c$ bør ikke bekymre, så lenge det ikke er hastigheten til en virkelig partikkel.

Oppgave 5 Superponering

Vi skal her legge sammen sinusbølger $y(x,t) = A \sin[kx - \omega(k)t]$, med dispersjonsrelasjon som i Likn. (7). For å forenkle regningen kan du innføre $\hbar = c = 1$.[1]

a) Legg sammen to slike bølger med bølgetall som ligger nær hverandre, $k_1 = k_0 + \Delta k$, $k_2 = k_0 - \Delta k$, $\Delta k \ll k_0$. Velg $A = m = 1$, $k_1 = 0.7$ og $k_2 = 0.6$ og lag et plot av resultatet. Hvordan ser den resulterende funksjonen ut, og hvordan tolker man de to delene? Det er mulig å

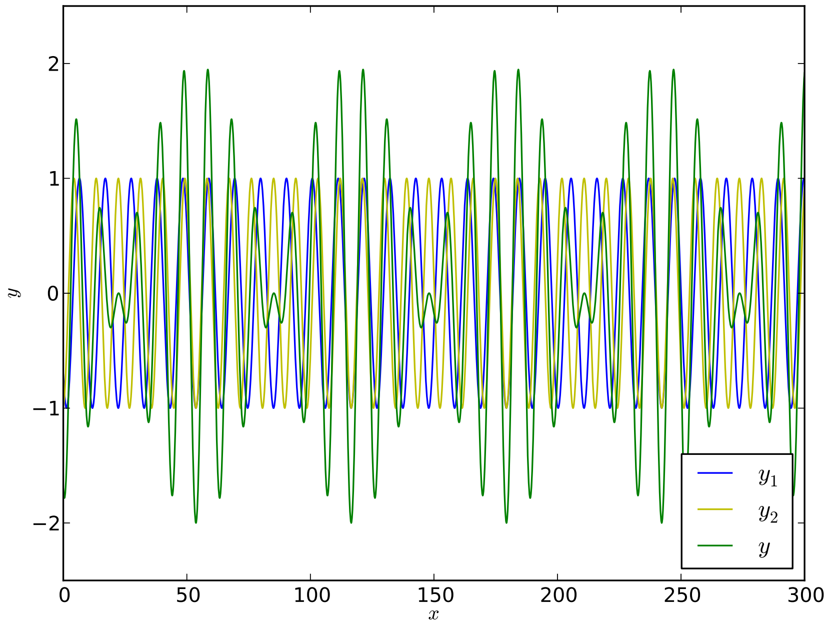
[1] Dette betegnes i fysikk som såkalte **naturlige enheter** (!) i kontrast til metriske enheter.

gjøre superponeringen både analytisk og numerisk, men vi anbefaler en numerisk fremgangsmåte.

Svar: Dispersjonsrelasjonen i Likn. (7) er (med $\hbar = c = m = 1$):

$$\omega(k) = \sqrt{k^2 + 1}. \tag{15}$$

I `oblig3a.py` har vi skrevet et enkelt skript i `python` som demonstrerer denne superponeringen numerisk. Plottet av superposisjonen (summen) vises i Fig. 1 som den grønne grafen. Denne funksjonen har en sinusbølge med (tilnærmet) samme bølgetall k_0 som de originale bølgene, modulert av en cosinusbølge med bølgetall Δk som danner en såkalt omhyllingskurve, jfr. eksemplet i Kompendiet.



Figur 1: Superponering av to bølger y_1 (blå) og y_2 (gul), med bølgetall $k_1 = 0.6$ og $k_2 = 0.7$. I grønt er den superponerte bølgen.

Vi kan gjør dette analytisk også, men det er mye mer jobb. Analytisk blir summen $y(x,t)$ av de to sinusbølgene

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) \\ &= 2A \sin\left[\frac{(k_1+k_2)x - (\omega(k_1)+\omega(k_2))t}{2}\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \cos\left[\frac{(k_1-k_2)x-(\omega(k_1)-\omega(k_2))t}{2}\right] \\
= &\; 2A\sin\left[\frac{2k_0x-(\omega(k_1)+\omega(k_2))t}{2}\right] \\
&\times \cos\left[\frac{2\Delta k\, x-(\omega(k_1)-\omega(k_2))t}{2}\right]. \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Fordi $\Delta k \ll k_0$ så er

$$
\omega(k_{1,2}) = \sqrt{k_{1,2}^2+1} = \sqrt{(k_0\pm\Delta k)^2+1} \simeq \sqrt{k_0^2 \pm 2k_0\Delta k + 1}. \qquad (17)
$$

Med $\omega(k_0) = \sqrt{k_0^2+1}$ så gir dette

$$
\omega(k_{1,2}) \simeq \omega(k_0)\sqrt{1\pm\frac{2k_0\Delta k}{\omega(k_0)^2}}. \qquad (18)
$$

Hvis vi nå rekkeutvikler rotuttrykket får vi

$$
\omega(k_{1,2}) \simeq \omega(k_0)\left(1\pm\frac{1}{2}\frac{2k_0\Delta k}{\omega(k_0)^2}\right), \qquad (19)
$$

fordi $2k_0\Delta k \ll \omega(k_0)^2$, slik at vi kan stryke høyereordens ledd i rekkeutviklingen. Dette gir

$$
\begin{aligned}
\omega(k_1)+\omega(k_2) &= \omega(k_0)\left(1+\frac{1}{2}\frac{2k_0\Delta k}{\omega(k_0)^2}\right)+\omega(k_0)\left(1-\frac{1}{2}\frac{2k_0\Delta k}{\omega(k_0)^2}\right) \\
&= 2\omega(k_0), \qquad (20)
\end{aligned}
$$

og

$$
\begin{aligned}
\omega(k_1)-\omega(k_2) &= \omega(k_0)\left(1+\frac{1}{2}\frac{2k_0\Delta k}{\omega(k_0)^2}\right)-\omega(k_0)\left(1-\frac{1}{2}\frac{2k_0\Delta k}{\omega(k_0)^2}\right) \\
&= \frac{2k_0\Delta k}{\omega(k_0)^2}. \qquad (21)
\end{aligned}
$$

Når vi så setter dette inn i uttrykket vi hadde for $y(x,t)$ i (16) får vi til slutt

$$
\begin{aligned}
y(x,t) &\simeq 2A\sin\left[\frac{2k_0x-2\omega(k_0)t}{2}\right]\cos\left[\frac{2\Delta kx-\frac{2k_0\Delta k}{\omega(k_0)^2}t}{2}\right] \\
&= 2A\sin\left[k_0x-\omega(k_0)t\right]\cos\left[\Delta kx-\frac{k_0\Delta k}{\omega(k_0)}t\right]. \qquad (22)
\end{aligned}
$$

b) Hvordan beveger bølgen seg, og hva blir fase- og gruppehastigheten?

Svar: Vi får vinkelfrekvens $\omega(k_1) = 1.17$, som gir en fasehastighet $v_f = \omega(k_1)/k_1 = 1.94$, for den første delbølgen, sammenlignet med $v_f = \omega(k_2)/k_2 = 1.74$ for den andre. Vi bør merke oss at begge disse er større enn $c = 1$.

Den superponerte bølgen har sentralt bølgetall $k_0 = 0.65$ når $k_1 = 0.6$ og $k_2 = 0.7$ for bølgetallene til de to bølgene vi adderer. Gruppehastigheten er gitt ved

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\sqrt{k_2^2 + m^2} - \sqrt{k_1^2 + m^2}}{k_2 - k_1} = \frac{0.054}{0.1} = 0.54. \tag{23}$$

Fordi vi har satt $c = 1$ så er denne hastigheten relativ til lyshastigheten. Vi kan identifisere omhyllingskurven som den tenkte kurven som omslutter den grønne bølgen (superponeringen) i Fig. 1. Det er denne som beveger seg med gruppehastigheten.

Gruppehastigheten v_g kan også finnes numerisk som det antall enheter langs x-aksen som omhylningskurven til den superponerte bølgen (grønn) går per tidsintervall. Med `oblig3a.py` ser vi at toppen av omhylningskurven som starter i $x = 0$ beveger seg omlag 55 lengdeenheter i løpet av de 100 tidsenheter som animasjonen går, noe som gir $v_g \sim 55/100 = 0.55$.

c) Hvordan er formen på funksjonen ved $t = 0$ dersom du nå (numerisk) superponerer veldig mange (si 1000 eller enda flere) cosinusbølger med bølgetall $k \in [-5, 5]$, og med en amplitude fordelt som

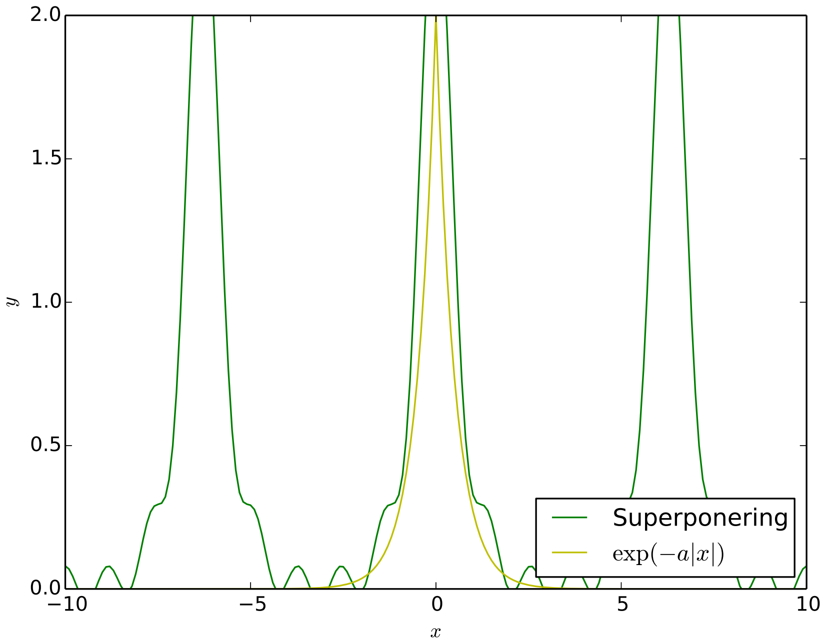
$$A(k) = \frac{a}{k^2 + a^2}\,? \tag{24}$$

Svar: Vi velger $a = 1$. Resultatet av superponeringen finnes i Fig. 2 og kan simuleres med `oblig3c.py`. Vi får en veldig lokalisert bølge rundt $x = 0$. Desto større a desto mer lokalisert er den. Dette viser at vi kan skape vilkårlige bølgeformer dersom vi velger deltagende bølgetall og fordelingen i amplitude med omhu. For sammenligning har vi overlagt funksjonen $e^{-a|x|}$ med passende normering.

C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk)

Oppgave 6 Spalteåpning

Når bølger treffer enkle spalteåpninger, kan vi få såkalte diffraksjonsmønstre. Grovt sett kan vi si at for at diffraksjonsmønstre skal oppstå, må bølgelengden være av samme størrelsesorden som spalteåpningen. Se for deg



Figur 2: Superponering av 1000 cosinusbølger med bølgetall i intervallet $[-5, 5]$. I grønt er den superponerte bølgen. I gult funksjonen $e^{-a|x|}$.

at du selv går igjennom en døråpning som er omtrent 1 m bred. Dørkarmen er 20 cm dyp. Hvor lang tid må du bruke på å passere gjennom døra for at det skal oppstå et diffraksjonsmønster?

Svar: Siden bølgelengden må være av samme størrelsesorden som døråpningen, setter vi $\lambda = 1$ m. I følge de Broglies formel, gir det en bevegelsesmengde på $p = h/\lambda = 6.6 \cdot 10^{-34}$ kgm^{2}s/1m $= 6.6 \cdot 10^{-34}$ kgm/s.

Hvis vi antar at personen har en masse på $m = 66$ kg, gir det at farten gjennom spalten må være $v = p/m = (6.6 \cdot 10^{-34}$ kgm/s$)/66$ kg$=$ $1 \cdot 10^{-35}$ m/s. Dørkarmen er omtrent 0.20 m dyp slik at tida det tar å passere den med farten over, blir $t = s/v = 0.20$ m$/(1 \cdot 10^{-35}$ m/s$) = 2 \cdot 10^{34}$ s $\approx 10^{27}$ år!

Oppgave 7 Oppgave 4.1 i Kompendiet

I et elektronmikroskop får elektronene stor kinetisk energi ved at de akselereres i et elektrostatisk potensial V.

a) Vis at de Broglie bølgelengden for et slikt ikke-relativistisk elektron er gitt ved formelen

$$\lambda = \frac{1.23}{\sqrt{V}}\ \text{nm},$$

når V er antall volt (uten enheter!)

Svar: De Broglie bølgelengden er gitt som $\lambda = h/p$. For et ikke-relativistisk elektron er bevegelsesmengden $p = m_e v$. Hastigheten kan finnes fra den kinetiske energien $K = \frac{1}{2}m_e v^2$ som er den samme energien, $K = eV$, elektronet får når det blir akselerert gjennom et potensial V. Vi får $v = \sqrt{2K/m_e}$. Altså er

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v} = \frac{h}{m_e\sqrt{\frac{2K}{m_e}}} = \frac{h}{\sqrt{2m_e K}} = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV}} = \frac{hc}{\sqrt{2m_e c^2 eV}}. \tag{25}$$

Ved å sette inn for konstantene får vi

$$\lambda = \frac{1240\ \text{nm eV}}{\sqrt{2 \cdot 0.511\ \text{MeV} \cdot eV}} = \frac{1.23}{\sqrt{V}}\ \text{nm}. \tag{26}$$

b) Hva blir den tilsvarende formelen hvis elektronet er relativistisk?

Svar: Med et relativistisk elektron så er bevegelsesmengden gitt fra $E^2 = p^2c^2 + m_e^2c^4$. Vi løser dette for p og setter inn $E = K + E_0$ for totalenergien, hvor $K = eV$ er den kinetiske energien elektronet får fra potensialet og $E_0 = m_e c^2$ er hvileenergien. Dette gir

$$p = \frac{\sqrt{E^2 - m_e^2c^4}}{c} = \frac{\sqrt{(eV + m_e c^2)^2 - m_e^2c^4}}{c} = \frac{\sqrt{(eV)^2 + 2eVm_e c^2}}{c}. \tag{27}$$

Bølgelengden λ_r for et relativistisk elektron er derfor

$$\begin{aligned}
\lambda_r &= \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{(eV)^2 + 2eVm_e c^2}} \\
&= \frac{hc}{\sqrt{2eVm_e c^2}\sqrt{\frac{(eV)^2}{2eVm_e c^2} + 1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{eV}{2m_e c^2}}}\frac{hc}{\sqrt{2eVm_e c^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{eV}{2m_e c^2}}}\frac{1.23}{\sqrt{V}}\ \text{nm} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{V}{1.022\times 10^6}}}\frac{1.23}{\sqrt{V}}\ \text{nm},
\end{aligned} \tag{28}$$

hvor vi har brukt svaret fra forrige oppgve.

c) For hvilken spenning V gir den ikke-relativistiske formelen et svar som er 5% feil?

Svar: Forholdet mellom den ikke-relativistiske og den relativistiske formelen er:

$$\frac{\lambda}{\lambda_r} = \sqrt{1 + \frac{V}{1.022 \times 10^6}}. \tag{29}$$

Feilen er på 5% når $\lambda/\lambda_r = 1.05$ (den ikke-relativistiske formelen gir alltid en lengre bølgelengde), altså er spenningen gitt fra

$$\sqrt{1 + \frac{V}{1.022 \times 10^6}} = 1.05, \tag{30}$$

som gir $V = 1.05 \times 10^5$, tilsvarende en spenning på litt i overkant av 100 kV.