FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2021
Oblig 10

(Versjon 15. april 2021)

Dokumentet inneholder følgende tre deler:

- A Diskusjonsoppgaver
- B Regneoppgaver
- C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk)

Du finner frister for innlevering av obliger på Canvas. For å få obligen godkjent, må du vise at du har gjort et ordentlig forsøk på alle oppgavene. 6/11 obliger må være godkjent for å gå opp til eksamen.

A Diskusjonsoppgaver

Først en liten introduksjon om kvantisering i hydrogenatomet:

Kvantetallene n, l og m_l forteller oss hvilket nivå den kvantiserte

- energien (kvantetall n)
- lengden av angulærmomentet (kvantetall l)
- z-komponenten av angulærmomentet (kvantetall m_l)

er på. Kvantetallene n, l og m_l inngår således i egenverdiene for hhv. energien, lengden av angulærmomentet og z-komponenten av angulærmomentet, slik at vi kan regne ut størrelsen på den kvantiserte

- energien på nivå n
- lengden av angulærmomentet på nivå l
- z-komponenten av angulærmomentet på nivå m_l

Elektronet i hydrogenatomet kan ha degenererte tilstander, dvs. at ulike tilstander har samme energi. Degenerasjon i hydrogenatomet skjer for eksempel ved at kvantetallet n er det samme for flere tilstander, men de har ulik kombinasjon av kvantetallene l og m_l. Tilstandene kan ha samme energi, men ulikt angulærmoment. Tidsutviklingen til en bølgefunksjon i en stasjonær tilstand avhenger av energien ved $\exp(-iEt/\hbar)$. I en superposisjon av tilstander med ulik energi E_n, må hvert ledd i superposisjonen ha hver sin tidsutvikling beskrevet ved $\exp(-iE_nt/\hbar)$. I en superposisjon av tilstander med samme energi, kan alle leddene ha samme tidsutvikling.

Oppgave 1 Superponering og egenverdier

Gitt bølgefunksjon $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{200}+\psi_{300})$ for et elektron i hydrogenatomet.

a) Hva er sannsynligheten for å måle z-komponenten av angulærmomentet til å være $L_z = 3\hbar$?

A: $\frac{1}{2}$

B: $1/\sqrt{2}$

C: 0

b) Tenk nå at ψ er en initiell tilstandsfunksjon slik at $\Psi(\vec{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{200} + \psi_{300})$. Kan den tidsavhengige bølgefunksjonen da skrives som $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{200} + \psi_{300}) \exp(-iEt/\hbar)$? Hvis ikke, hvordan kan tidsutviklingen da uttrykkes?

c) Vi har nå en annen initiell tilstand der $\Psi(\vec{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{210} + \psi_{200})$. Kan den tidsavhengige bølgefunksjonen nå skrives som $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{210} + \psi_{200}) \exp(-iEt/\hbar)$? Hvis ikke, hvordan kan tidsutviklingen da uttrykkes?

Oppgave 2 Operator, observabel og måling

Egenfunksjonene ψ_{nlm_l} for elektronet i hydrogenatomet tilfredsstiller egenverdiligningen $\hat{H}\psi_{nlm_l} = E\psi_{nlm_l}$.

a) Forklar med egne ord hva alle delene av ligningen over representerer.

b) Forklar hva en operator gjør matematisk sett. Hva tilsvarer anvendelsen av en operatoren fysisk sett?

c) Hva er forskjellen på en operator og en observabel i kvantefysikk?

d) Under står fire påstander om en energimåling på en egentilstand for $\hat{H}$. To og to av dem betyr det samme, men der én av dem uttrykker en sammenheng matematisk og den andre uttrykker den fysiske betydningen. Diskuter hvilke som hører sammen og forklar hvorfor. Forklar også hvilke to som er riktige.

A: Målingen endrer systemets tilstand

B: Når $\hat{H}$ virker på ψ_{nlm_l}, får vi en ny $\psi \neq a\psi_{nlm_l}$ (der a er en reell konstant)

C: Målingen endrer ikke systemets tilstand

D: Når $\hat{H}$ virker på ψ_{nlm_l}, forblir ψ_{nlm_l} den samme

B Regneoppgaver

Oppgave 3 Hydrogenatomet

I denne oppgaven ser vi bort fra elektronets egenspinn. H-atomet kan da beskrives ved tilstandsfunksjonene $\psi_{nlm_l}(\vec{r})$ som har følgende egenskaper:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_0\psi_{nlm_l}(\vec{r}) &= E_n\psi_{nlm_l}(\vec{r}), && (1)\\
\hat{L}^2\psi_{nlm_l}(\vec{r}) &= \hbar^2 l(l+1)\psi_{nlm_l}(\vec{r}), && (2)\\
\hat{L}_z\psi_{nlm_l}(\vec{r}) &= \hbar m_l\psi_{nlm_l}(\vec{r}), && (3)\\
\int \psi^*_{nlm_l}(\vec{r})\psi_{n'l'm_l'}(\vec{r})\,d^3\vec{r} &= \delta_{n,n'}\delta_{l,l'}\delta_{m_l,m_l'}, && (4)
\end{aligned}$$

hvor

$$\delta_{k,k'} = \begin{cases} 1 & \text{for } k = k' \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \tag{5}$$

a) Hva kaller vi disse (to) typene ligninger?

Operatoren $\hat{H}_0$ er tidsuavhengig. Kvantetallet n kan anta verdiene $1, 2, \ldots$. For en gitt verdi av n kan l anta verdiene $0, 1, \ldots, n-1$, og m_l kan for en gitt verdi av l anta verdiene $-l, -l+1, \ldots, l-1, l$.

I denne oppgaven trengs ingen andre opplysninger enn de som er gitt ovenfor. Det er ikke nødvendig å kjenne de eksplisitte uttrykkene for operatorene $\hat{H}_0$, $\hat{L}^2$ og $\hat{L}_z$. Det skal ikke tas hensyn til elektronets egenspinn.

b) Hvilke fysiske størrelser er representert ved operatorene $\hat{H}_0$, $\hat{L}^2$ og $\hat{L}_z$?

c) Hvilke fysiske størrelser har skarpe verdier i tilstanden $\psi_{nlm_l}(\vec{r})$?

Ved tiden $t = 0$ er H-atomets tilstand beskrevet ved tilstandsfunksjonen $\psi_{nlm_l}(\vec{r})$. Tidsutviklingen av tilstandsfunksjonen er bestemt av den tidsavhengige Schrödingerligningen

$$\hat{H}_0\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t). \tag{6}$$

d) Bestem tilstandsfunksjonen som beskriver H-atomets tilstand ved tiden t.

La H-atomets tilstand ved tiden $t = 0$ nå være gitt ved tilstandsfunksjonen

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2l+1}}\sum_{m_l=-l}^{l}\psi_{nlm_l}(\vec{r}). \tag{7}$$

e) Vis at $\Phi(\vec{r})$ er normert.

f) Vis at tilstandsfunksjonen ved tiden t er

$$\Psi(\vec{r},t) = \Phi(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n t\right). \tag{8}$$

g) Bestem forventningsverdien for operatorene $\hat{H}_0$, $\hat{L}^2$ og $\hat{L}_z$ i tilstanden som er beskrevet ved tilstandsfunksjonen $\Psi(\vec{r},t)$ i ligning (8).

En størrelse A er representert ved operatoren $\hat{A}$. Spredningen σ_A i tilstanden Ψ er definert slik:

$$\sigma_A = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}. \tag{9}$$

h) Finn spredningen av størrelsene representert ved operatorene $\hat{H}_0$, $\hat{L}^2$ og $\hat{L}_z$ i tilstanden som er beskrevet ved tilstandsfunksjonen $\Psi(\vec{r},t)$ i ligning (8).

La H-atomets tilstand ved tiden $t = 0$ være gitt ved tilstandsfunksjonen $\Phi(\vec{r})$ i ligning (7) og la oss tenke oss at vi foretar en idéell måling av L_z.

i) Hvor stor er sannsynligheten for å observere den bestemte verdien $\hbar m_l$ for L_z ved tiden $t = 0$?

j) Vil denne sannsynligheten være avhengig av ved hvilken tid $t > 0$ målingen utføres?

Vi lar nå H-atomet befinne seg i et homogent magnetfelt B og velger z-aksen langs magnetfeltet. Hamilton operatoren for systemet er da

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{e}{2m} B \hat{L}_z, \tag{10}$$

der $-e$ er elektronets ladning og m er elektronets masse.

k) Bestem H-atomets energi i tilstanden $\psi_{nlm_l}(\vec{r})$.

l) Er tilstanden $\Phi(\vec{r})$ i ligning (7) en energi-egentilstand for $\hat{H}$? Begrunn svaret.

m) Bestem forventningsverdien til $\hat{H}$ i tilstanden $\Phi(\vec{r})$.

C Tilleggsoppgave (ikke obligatorisk)

Oppgave 4 Jord–sol systemet (fra Griffiths Kap.4)

Betrakt jord–sol systemet som en gravitasjonsanalog til hydrogenatomet.

a) Hva er funksjonen for den potensielle energien? (La m være jordmassen og M solmassen.)

b) Hva er den gravitasjonelle "Bohrradiusen", a_g, for dette systemet? Finn det spesifikke tallet.

c) Skriv ned den gravitasjonelle "Bohrformelen" for energien, og vis, ved å sette E_n lik den klassiske energien til en planet i sirkelbane med radius r_o, at $n = \sqrt{r_o/a_g}$. Estimer fra dette kvantetallet n for jorden.

d) Anta at jorden gikk til en lavere tilstand med kvantetall $n - 1$. Hvor mye energi (i Joules) ville blitt frigitt? Hva ville bølgelengden til det utsendte fotonet (eller, mere sannsynlig, gravitonet) være? (Uttrykk svaret i lysår.)