FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2021
Løsningsforslag for Oblig 7

(Versjon 9. mars 2021)

Her er løsninger på A Diskusjonsoppgaver, B Regneoppgaver og C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk).

A Diskusjonsoppgaver

Oppgave 1 Fri partikkel

a) Skriv opp den generelle løsningen til romdelen av den stasjonære løsningen av Schrödinger-likningen $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$ for en fri partikkel med masse m og energi E (i én dimensjon).

Svar: Den generelle løsningen til romdelen på eksponentialform er $\psi(x) = A\exp(ikx) + B\exp(-ikx)$, der $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

Merk: Man kunne her også skrevet løsningen på sinus/cosinus-form, men for frie partikler bruker vi vanligvis eksponential-løsningene, ettersom disse er egenfunksjoner for bevegelsesmengde-operator.

b) Hvordan kan du utvide løsningen til en tidsavhengig $\Psi(x,t)$?

Svar: Siden løsningen er en stasjonær løsning, så kan vi bruke separasjon av de variable E og t. Dette gjelder her for en fri partikkel som ikke er utsatt for noe tidsavhengig potensial (ikke noe potensial i hele tatt). Dermed vil løsningen av den tidsavhengige Schrödinger-likningen være gitt ved å sette på en tidsavhengig faktor som gir $\Psi(x,t) = [A\exp(ikx)+B\exp(-ikx)]\exp(-\frac{iE}{\hbar}t) = A\exp[ik(x-\frac{\hbar k}{2m}t)]+ B\exp[-ik(x+\frac{\hbar k}{2m}t)]$.

c) Hva kan du si om $\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi(x,t)|^2dx$?

Svar: Dersom vi antar at partikkelen bare har en bølge som går enten mot høyre eller venstre, får vi det enkle svaret at $\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi(x,t)|^2dx = \int_{-\infty}^{\infty}|A|^2dx \to \infty$.

Derimot hvis vi antar at $\Psi(x,t) = [A\exp(ikx)+B\exp(-ikx)]\exp(-\frac{iE}{\hbar}t)$, blir problemet vanskeligere å regne ut. Vi får $|\Psi(x,t)|^2 = |A|^2 + AB^*\exp(2ikx) + BA^*\exp(-2ikx) + |B|^2$.

Når det gjelder de to kryssleddene, er det ene det komplekskonjugerte av det andre. En slik sum blir dermed på formen $a + a^* = 2|a|\cos\theta$.
I vårt tilfelle tilsvarer dette $AB^*\exp(2ikx) + BA^*\exp(-2ikx) =$

$2|AB|\cos(2kx)$ som gir totalt $|\Psi|^2 = |A|^2 + |B|^2 + 2|AB|\cos(2kx)$. For å se at uttrykket aldri blir negativt, kan vi sjekke det verste scenarioet når $\cos(2kx) = -1$. Da blir $|\Psi|^2 \geq |A|^2 + |B|^2 - 2|AB|$ som alltid er positivt eller null, dette fordi dette er bare et spesialtilfelle av $|A|^2 + |B|^2 - 2|AB|\cos\theta = |A|^2 + |B|^2 - (A^*B + AB^*) = (A - B)(A^* - B^*) = |A - B|^2$, som er alltid større eller lik 0.

Dette betyr at $|\Psi|^2$ er en periodisk funksjon med frekvens kx, som alltid er positiv. Ergo vil integralet divergere, da vi alltid legger til det samme positive arealet for hver periode. Vi får altså at $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx \to \infty$.

d) Hvorfor kan ikke denne bølgefunksjonen representere en virkelig, fysisk partikkel?

Svar: Siden $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx \to \infty$ er ikke bølgefunksjonen normaliserbar og kan derfor ikke representere en fysisk partikkel. Det betyr altså at matematikken som beskriver kvantefysikken kan tolkes til at det ikke finnes frie partikler med veldefinert energi $E = p^2/2m$!

e) Hvordan løser kvantefysikken problemet i d) for å finne en bølgefunksjon som kan representere en fysisk fri partikkel?

Svar: Løsningen er å utnytte at lineærkombinasjoner av separable løsninger til Schrödinger-likningen også er løsninger av Schrödinger-likningen. Vi kan lage en $\Psi(x,t)$ som er en lineærkombinasjon av mange separable løsninger, men med litt ulik energi E og dermed bevegelsesmengde $p = \hbar k$. Siden E og p kan være alle mulige verdier (kontinuerlig fordelt) for en fri partikkel, må vi sette lineærkombinasjonen opp som et integral over ulike bølgetall k (og dermed p og E) i stedet for en diskret sum: $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) A \exp[ik(x - \frac{\hbar k}{2m}t)]dk$. Dette er en såkalt bølgepakke, siden den er sammensatt av mange bølger med ulikt bølgetall. Og den kan normeres og dermed representere en fysisk partikkel.

Oppgave 2 Fourier-transform

For en gaussisk funksjon $f(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \exp(-\lambda x^2)$ er fourier-transformen $g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{4\lambda}\right)$. (Her er λ ikke bølgelengde.)

a) Hvis λ endres slik at bredden av $f(x)$ øker, hvordan endrer bredden av $g(k)$ seg?

A) Den øker også

B) Den avtar

C) Uendret i dette tilfellet

D) Kommer an på mye forskjellig

Svar: B) er riktig. Hvis bredden til $f(x)$ øker, avtar eksponentialfunksjonen saktere. Det må bety at λ blir mindre. I uttrykket for $g(k)$ står λ i nevneren, og en større λ gjør derfor at denne funksjonen avtar raskere. Bredden blir altså mindre, den avtar.

b) Sett at $\Psi(x,0) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\exp(-\lambda x^2)$ er den initielle bølgefunksjonen til en partikkel. Hva forteller $\Psi(x,0)$ oss? Hvilken fysisk størrelse sier den noe om?

Svar: $\Psi(x,0)$ gir informasjon om spredningen til posisjonen x til en partikkel, gjennom at absoluttkvadratet $|\Psi(x,0)|^2$ er sannsynlighetstettheten for posisjonen til partikkelen ved $t = 0$.

c) Hvilken fysisk størrelse representerer da k i Fourier-transformen $\phi(k) = g(k)$?

Svar: k er bølgetallet som igjen er proporsjonal med bevegelsesmengden p gjennom $p = \hbar k$. Funksjonen $\phi(k)$ sier altså noe om spredningen i bevegelsesmengde for en partikkel.

d) Hva kan du konkludere om forholdet mellom spredningen til de fysiske størrelsene i b) og c)?

Svar: Siden bredden $\Psi(x,0)$ øker når bredden av $\phi(k)$ avtar og omvendt, kan vi konkludere at spredningen i x øker hvis spredningen i p avtar og omvendt. Dette er altså et uttrykk for Heisenbergs uskarphetsrelasjon.

B Regneoppgaver

Oppgave 3 Fri partikkel og Fouriers triks

En fri partikkel har som initialbetingelse bølgefunksjonen

$$\Psi(x,0) = Ae^{-a|x|}, \tag{1}$$

hvor A og a er positive reelle konstanter.

a) Normer $\Psi(x,0)$.

Svar: Normeringskravet er

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,0)|^2 \, dx = 1. \tag{2}$$

Vi finner

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,0)|^2 \, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |Ae^{-a|x|}|^2 \, dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|x|} \, dx \\
&= 2|A|^2 \int_0^{\infty} e^{-2ax} \, dx = 2|A|^2 \left[-\frac{1}{2a} e^{-2ax} \right]_0^{\infty} \\
&= 2|A|^2 \frac{1}{2a} = \frac{|A|^2}{a},
\end{aligned} \tag{3}$$

hvor vi har brukt at integranden er like (symmetrisk) om $x = 0$. Gitt normeringskravet kan vi velge en positiv reell $A = \sqrt{a}$.

b) Finn $\phi(k)$. *Hint:* Her er du nesten nødt til å bruke Rottmann. Se etter **Fourier transformasjoner** bakerst og regn med at du må skifte navn på flere variabler.

Svar: Vi finner $\phi(k)$ gjennom en generalisering av **Fouriers triks** til et kontinuerlig energispektrum, hvor $\phi(k)$ er **Fouriertransformen** til $\Psi(x,0)$:

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \Psi(x,0) \, dx. \tag{4}$$

Fra Oppgave 7 i Oblig 1, eller se Rottmanns liste over Fouriertransformasjoner, har vi at

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \sqrt{a} e^{-a|x|} \, dx = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{k^2 + a^2} = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \frac{a}{k^2 + a^2}. \tag{5}$$

c) Konstruer $\Psi(x,t)$ i form av et integral.

Svar: $\Psi(x,t)$ er nå gitt som integralet over fri-partikkel stasjonære tilstander $e^{i(kx - \omega(k)t)}$, hvor $\omega(k) = \hbar k^2/2m$, med koeffisienter gitt ved $\phi(k)$:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} \, dk. \tag{6}$$

Dette gir etter litt forenkling

$$\begin{aligned}
\Psi(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \frac{a}{a^2 + k^2} e^{i(kx - \omega(k)t)} \, dk \\
&= \frac{a^{3/2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + k^2} e^{i(kx - \omega(k)t)} \, dk.
\end{aligned} \tag{7}$$

d) Diskuter hva som skjer med partikkelen i grensene hvor a er veldig stor og a er veldig liten.

Svar: For store verdier av a er funksjonen $\Psi(x, 0)$ en skarp tynn spiss omkring $x = 0$. Samtidig er

$$\phi(k) = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \frac{a}{a^2 + k^2} \simeq \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \frac{1}{a} = \sqrt{\frac{2}{\pi a}}, \tag{8}$$

en bred og flat fordeling. Dette betyr at posisjonen er veldefinert (liten spredning på bølgefunksjonen), mens bevegelsesmengden (gjennom bølgetallet, $p = \hbar k$) er veldig uskarpt. For små a er $\Psi(x, 0)$ bred, mens

$$\phi(k) = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \frac{a}{a^2 + k^2} \simeq \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \frac{a}{k^2} = \sqrt{\frac{2a^3}{\pi}} \frac{1}{k^2}, \tag{9}$$

er en skarp spiss nær $k = 0$. I det tilfellet er posisjonen uskarp, mens bevegelsesmengden har liten spredning.

Oppgave 4 Degenererte bundne tilstander

Hvis to (eller flere) distinkte[1] løsninger av den tids-uavhengige Schrödingerligningen har samme energi E, så sier vi at tilstandene er **degenererte**. For eksempel er fri-partikkel løsningene dobbelt degenererte — en løsning representerer bevegelse mot høyre, og den andre mot venstre. Men, vi har aldri møtt *normerbare* degenererte løsninger, og dette er ingen tilfeldighet. Bevis det følgende teoremet: *i en dimensjon*[2] *finnes det ingen degenererte bundne tilstander. Hint:* anta at det finnes *to* løsninger, ψ_1 og ψ_2, med samme energi E. Multipliser Schrödingerligningen for ψ_1 med ψ_2, og Schrödingerligningen for ψ_2 med ψ_1, og finn differansen, for å vise at $(\psi_2 d\psi_1/dx - \psi_1 d\psi_2/dx)$ er en konstant. Bruk at for normerbare løsninger så må vi ha at $\psi \to 0$ ved $\pm\infty$, for å demonstrere at denne konstanten er null. Vis fra dette at ψ_2 må være et tall multiplisert med ψ_1, og at de to løsningene derfor ikke er distinkte.

Svar: Den tids-uavhengige Schrödingerligningen (TUSL) for de to løsningene er

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + V\psi_1 = E\psi_1,$$

[1]Hvis to løsninger bare skiller seg ad ved en multiplikativ konstant (slik at de, når de er normert, bare skiller seg ved en fasefaktor $e^{i\phi}$), så representerer de den samme fysiske tilstanden, og i denne betydningen er de *ikke* distinkte løsninger. Teknisk så mener vi med distinkte løsninger: lineært uavhengige.

[2]I høyere dimensjoner er slik degenerasjon veldig vanlig, som vi skal se i kapittel 4 i Griffiths. Anta også at vi ikke har det veldig spesielle tilfellet hvor potensialet består av isolerte deler adskilt av områder hvor $V = \infty$ — for eksempel vil to isolerte uendelige kvadratiske brønner gi degenererte bundne tilstander, hvor partikkelen er enten i den ene eller andre brønnen.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2}{dx^2}+V\psi_2=E\psi_2.$$

Multiplisert med henholdsvis ψ_2 og ψ_1 får vi

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_1}{dx^2}\psi_2+V\psi_1\psi_2&=E\psi_1\psi_2,\\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2}{dx^2}\psi_1+V\psi_1\psi_2&=E\psi_1\psi_2.\end{aligned}$$

Differansen mellom de to ligningene er

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi_2\frac{d^2\psi_1}{dx^2}-\psi_1\frac{d^2\psi_2}{dx^2}\right)=0, \tag{10}$$

men vi kan skrive det som står i parantesen på følgende måte:

$$\begin{aligned}\psi_2\frac{d^2\psi_1}{dx^2}-\psi_1\frac{d^2\psi_2}{dx^2} &= \frac{d\psi_2}{dx}\frac{d\psi_1}{dx}+\psi_2\frac{d^2\psi_1}{dx^2}-\frac{d\psi_1}{dx}\frac{d\psi_2}{dx}-\psi_1\frac{d^2\psi_2}{dx^2}\\ &= \frac{d}{dx}\left(\psi_2\frac{d\psi_1}{dx}-\psi_1\frac{d\psi_2}{dx}\right). \end{aligned}\tag{11}$$

Innsatt i (10) gir det

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d}{dx}\left(\psi_2\frac{d\psi_1}{dx}-\psi_1\frac{d\psi_2}{dx}\right)=0, \tag{12}$$

noe som betyr at $(\psi_2\frac{d\psi_1}{dx}-\psi_1\frac{d\psi_2}{dx})$ er en konstant uavhengig av verdien av x. Siden $\psi_1,\psi_2\to 0$ når $x\to\infty$ så må denne konstanten faktisk også være null.

Fordi $\psi_2\frac{d\psi_1}{dx}-\psi_1\frac{d\psi_2}{dx}=0$ kan vi finne forholdet mellom de to bølgefunksjonene:

$$\begin{aligned}\psi_2\frac{d\psi_1}{dx} &= \psi_1\frac{d\psi_2}{dx}\\ \frac{1}{\psi_1}d\psi_1 &= \frac{1}{\psi_2}d\psi_2\\ \int\frac{1}{\psi_1}d\psi_1 &= \int\frac{1}{\psi_2}d\psi_2\\ \ln\psi_1 &= \ln\psi_2+C\\ e^{\ln\psi_1} &= e^{\ln\psi_2+C}\\ \psi_1(x) &= C'\psi_2(x),\end{aligned}\tag{13}$$

hvor $C'=e^C$. Dette beviser at de to løsningene bare skiller seg ad ved en konstant og derfor ikke er distinkte løsninger.

Hvis du lurer på hva som går galt i dette beviset for to uendelige brønner, så skjer det når du prøver å ta differensen mellom de to Schrödingerligningene. Det finnes da ikke noen verdi for x hvor ikke begge leddene i differansen er identisk lik null.

Oppgave 5 Fri partikkel i sirkelbane

Tenk deg en liten ring/sylinder med masse m som sklir friksjonsløst på en vaier formet som en sirkel med omkrets L. (Dette tilsvarer en fri partikkel, bortsett fra at $\psi(x+L)=\psi(x)$.) Finn de stasjonære tilstandene (med passende normering) og de tilhørende energiene. Merk at det er *to* uavhengige løsninger for hver energi E_n—som korresponderer til bevegelse med eller mot klokka; kall disse $\psi_n^+(x)$ og $\psi_n^-(x)$. Hvordan vil du forklare denne degenerasjonen i forhold til teoremet i oppgaven over om degenererte bundnde tilstander? (Hva er det som gjør at teoremet ikke kan brukes i dette tilfellet?)

Svar: Vi finner de stasjonære tilstandene som løsninger av den tidsuavhengige Schrödingerligningen. I dette tilfellet er potensialet $V(x)=0$, og TUSL er gitt ved

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}=E\psi, \tag{14}$$

hvor x nå måler en avstand rundt ringen fra et gitt startpunkt. Vi kan skrive denne ligningen på en standard form

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=-k^2\psi, \tag{15}$$

hvor

$$k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \tag{16}$$

Denne differensialligningen vet vi har den generelle løsningen (se for eksempel avsnittet om partikkel i boks i Griffiths):

$$\psi(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}. \tag{17}$$

Nå må vi spørre oss hva som er grensebetingelsene her for å bestemme konstantene og eventuelt finne kvantisering av energien. Vi vet at bølgefunksjonen og den deriverte av den må være kontinuerlige, og derfor at de må være de samme etter at vi har gått en gang rundt sirkelen, det vil si $\psi(x+L)=\psi(x)$ og $\psi'(x+L)=\psi'(x)$. Det betyr at

$$Ae^{ikx}+Be^{-ikx}=Ae^{ik(x+L)}+Be^{-ik(x+L)}. \tag{18}$$

Setter vi inn $x=0$ gir det:

$$A+B=Ae^{ikL}+Be^{-ikL}. \tag{19}$$

Og, med den deriverte,

$$ikAe^{ikx}-ikBe^{-ikx}=ikAe^{ik(x+L)}-ikBe^{-ik(x+L)}. \tag{20}$$

Setter vi inn $x = 0$ her får vi:

$$A - B = Ae^{ikL} - Be^{-ikL}. \tag{21}$$

Hvis vi legger sammen (19) og (21) får vi

$$2A = 2Ae^{ikL}. \tag{22}$$

Dette betyr at enten er $A = 0$, eller så er $e^{ikL} = 1$ slik at vi må ha $k_n L = 2n\pi$ hvor $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, altså kvantisering av k. Dersom $A = 0$ så er fra (19) $B = Be^{-ikL}$, som leder til $k_n L = 2n\pi$ med $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, som gir samme konklusjon for k.

Hvis vi velger at n skal være positiv, så kan vi skrive ned to løsninger for hver n:

$$\psi_n^+(x) = Ae^{i(2n\pi x/L)} \quad \text{og} \quad \psi_n^-(x) = Be^{-i(2n\pi x/L)}. \tag{23}$$

(Negative n gir bare de samme løsningene en gang til.) For $n = 0$ finnes det bare en løsning med $k = 0$ som er en konstant (x–uavhengig) bølgefunksjon.

Vi finner en passende normering fra normeringsbetingelsen

$$\int_0^L |\psi_n^\pm(x)|^2 \, dx = 1. \tag{24}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} \int_0^L |\psi_n^+(x)|^2 \, dx &= \int_0^L |Ae^{i(2n\pi x/L)}|^2 \, dx \\ &= |A|^2 \int_0^L e^{i(2n\pi x/L)} e^{-i(2n\pi x/L)} \, dx \\ &= |A|^2 \int_0^L dx = |A|^2 L, \end{aligned} \tag{25}$$

som, dersom vi velger normeringskonstanten til å være reell og positiv, gir $A = 1/\sqrt{L}$. På samme måte er $B = 1/\sqrt{L}$. De normerte stasjonære tilstandene er altså:

$$\psi_n^+(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i(2n\pi x/L)} \quad \text{og} \quad \psi_n^-(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i(2n\pi x/L)}. \tag{26}$$

De tilhørende energiene er gitt fra (16) som

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{mL^2} n^2, \tag{27}$$

for $n = 0, 1, 2, \ldots$

Grunnen til at teoremet i forrige oppgave ikke er gyldig her er at bølgefunksjonen ikke går mot null når x går mot uendelig. Teoremet er altså kun gyldig dersom vi definerer kvantemekanikken vår på et uendelig intervall.

C Tilleggsoppgave (ikke obligatorisk)

Oppgave 6 Tidsavhengig uskarphetsrelasjon (fra Griffiths Kap.2)

En fri partikkel begynner med bølgefunksjonen

$$\Psi(x,0) = Ae^{-ax^2}, \tag{28}$$

hvor A og a er reelle konstanter, og $a > 0$.

a) Normer $\Psi(x,0)$.

Svar: Integralet i normeringsbetingelsen gir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,0)|^2 \, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 e^{-2ax^2} \, dx \\ &= |A|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2a}}. \end{aligned} \tag{29}$$

Her har vi tatt det bestemte integralet fra Rottmann som gir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2} \, dy = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \tag{30}$$

for $\lambda > 0$. Vi kan da velge oss en positiv reell normeringskonstant $A = (2a/\pi)^{1/4}$.

b) Finn $\Psi(x,t)$. *Hint:* Integral på formen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx)} \, dx, \tag{31}$$

kan gjøres ved å lage et fullstendig kvadrat: La $y \equiv \sqrt{a}[x + (b/2a)]$, og bruk at $(ax^2 + bx) = y^2 - (b^2/4a)$. *Svar:*

$$\Psi(x,t) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{-ax^2/[1+2i\hbar at/m]}}{\sqrt{1 + 2i\hbar at/m}}. \tag{32}$$

Svar: $\Psi(x,t)$ er gitt ved

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} \, dk, \tag{33}$$

der $\omega(k) = \hbar k^2/2m$. Vi begynner med å finne $\phi(k)$ som er gitt ved Fouriertransformasjonen av initialbetingelsen $\Psi(x,0)$:

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \Psi(x,0) \, dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} A e^{-ax^2}\,dx \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+ikx)}\,dx \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2+(ik)^2/4a}\sqrt{\frac{1}{a}}\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{1}{a}}\,e^{-k^2/4a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy \\
&= \left(\frac{1}{2\pi^4 a}\right)^{1/4} e^{-k^2/4a}\sqrt{\pi} = \frac{1}{(2\pi a)^{1/4}}e^{-k^2/4a}. \qquad (34)
\end{aligned}
$$

Her har vi brukt det variabelbyttet som det ble hintet om i oppgaveteksten, samt (30) med $\lambda = 1$. Merk at denne teknikken for å gjøre integralet er uavhengig av hvorvidt de ulike konstantene i eksponentialet er reelle eller ikke.

Vi finner så $\Psi(x,t)$:

$$
\begin{aligned}
\Psi(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)e^{i(kx-\omega t)}\,dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2\pi a)^{1/4}}e^{-k^2/4a}e^{i(kx-\frac{\hbar k^2}{2m}t)}\,dk \\
&= \frac{1}{(8\pi^3 a)^{1/4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{m+2i\hbar at}{4am}\right)k^2+ikx}\,dk \\
&= \frac{1}{(8\pi^3 a)^{1/4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2+(ix)^2/4\left(\frac{m+2i\hbar at}{4am}\right)}\frac{1}{\sqrt{\frac{m+2i\hbar at}{4am}}}\,dy \\
&= \frac{1}{(8\pi^3 a)^{1/4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2-x^2\frac{am}{m+2i\hbar at}}\sqrt{\frac{4am}{m+2i\hbar at}}\,dy \\
&= \frac{1}{(8\pi^3 a)^{1/4}}e^{-amx^2/(m+2i\hbar at)}\sqrt{\frac{4a}{1+2i\hbar at/m}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy \\
&= \left(\frac{2a}{\pi^3}\right)^{1/4}\frac{e^{-ax^2/(1+2i\hbar at/m)}}{\sqrt{1+2i\hbar at/m}}\sqrt{\pi} \\
&= \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4}\frac{e^{-ax^2/(1+2i\hbar at/m)}}{\sqrt{1+2i\hbar at/m}}, \qquad (35)
\end{aligned}
$$

hvor vi igjen har brukt variabelbyttet i hintet og (30).

c) Finn $|\Psi(x,t)|^2$. Uttrykk svaret ved hjelp av størrelsen

$$
w = \sqrt{\frac{a}{1+(2\hbar at/m)^2}}. \qquad (36)
$$

Skisser $|\Psi|^2$ (som funksjon av x) ved $t = 0$, og for en stor verdi av t. Kvalitativt, hva skjer med $|\Psi|^2$ når tiden går?

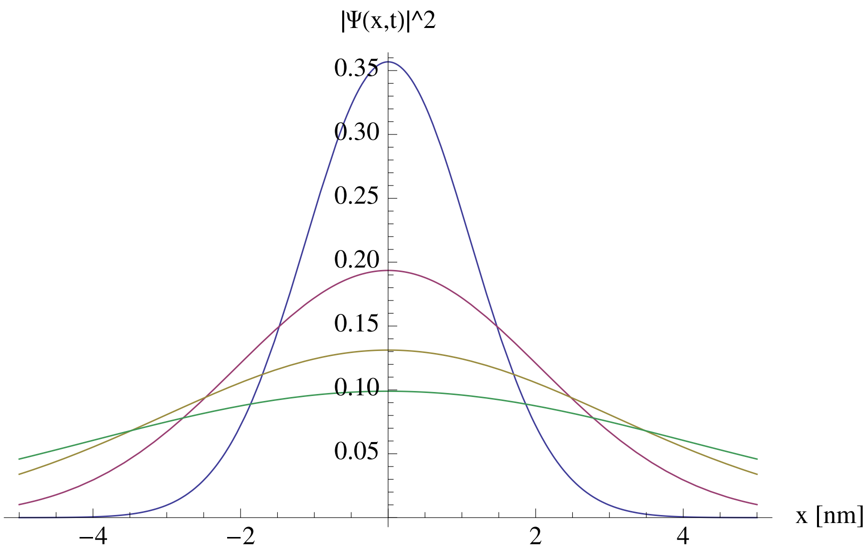
Svar: La $T = 2\hbar at/m$. Vi begynner med å finne absoluttverdikvadratet fra $|z|^2 = zz^*$:

$$\begin{aligned}
|\Psi(x,t)|^2 &= \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{-ax^2/(1+iT)}}{\sqrt{1+iT}} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{-ax^2/(1-iT)}}{\sqrt{1-iT}} \\
&= \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \frac{\exp\left[-\frac{ax^2}{1+iT} - \frac{ax^2}{1-iT}\right]}{\sqrt{(1+iT)(1-iT)}} \\
&= \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \frac{\exp\left[\frac{-ax^2(1-iT+1+iT)}{(1+iT)(1-iT)}\right]}{\sqrt{(1+T^2)}} \\
&= \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \frac{\exp\left[\frac{-2ax^2}{1+T^2}\right]}{\sqrt{(1+T^2)}}. \qquad (37)
\end{aligned}$$

Med $w = \sqrt{\frac{a}{1+T^2}}$ er da

$$|\Psi(x,t)|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} w \exp\left[-2w^2x^2\right]. \qquad (38)$$

Vi viser utviklingen til $|\Psi|^2$ med tiden i figur 1. Med tiden så spres sannsynlighetstettheten utover. Posisjonen blir mer og mer uskarp.



Figur 1: Utviklingen til $|\Psi(x,t)|^2$ for $t = 0, 1, 2, 3$ ns (blå, rød, gul, grønn) hvor vi har valgt $a = 1$ nm^{-2} og $\hbar/m = 1$ nm^{2}s^{-1}.

d) Finn $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p^2 \rangle$, σ_x og σ_p. *Delvis svar:* $\langle p^2 \rangle = a\hbar^2$, men det kan ta litt algebra for å redusere svaret til denne enkle formen.

Svar:

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x|\Psi(x,t)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\sqrt{\frac{2}{\pi}}w\,\exp\left[-2w^2x^2\right]\,dx = 0, \tag{39}$$

hvor vi har brukt at intergranden er odde (anti-symmetrisk).

$$\langle p\rangle = m\frac{d\langle x\rangle}{dt} = 0. \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
\langle x^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2|\Psi(x,t)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}w\,\exp\left[-2w^2x^2\right]\,dx \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}w\int_0^{\infty} x^2\exp\left[-2w^2x^2\right]\,dx \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}w\frac{1}{2}(2w^2)^{-\frac{2+1}{2}}\Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}w(2w^2)^{-3/2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4w^2}
\end{aligned} \tag{41}$$

hvor vi først har brukt at intergranden er like (symmetrisk), og at det resulterende integralet er gitt fra Rottmann som

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x^2}x^k\,dx = \frac{1}{2}\lambda^{-\frac{k+1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right), \tag{42}$$

for $k > -1$ og $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned}
\langle p^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x,t)\hat{p}^2\Psi(x,t)\,dx \\
&= -\hbar^2\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x,t)\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x,t)\,dx.
\end{aligned} \tag{43}$$

Vi regner først ut integranden. For å lette regnearbeidet litt vil vi definere $u = a/(1+iT)$.

$$\begin{aligned}
\Psi^*(x,t)\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x,t) &= \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2}\frac{e^{-ax^2/(1-iT)}}{\sqrt{1-iT}}\frac{d^2}{dx^2}\frac{e^{-ax^2/(1+iT)}}{\sqrt{1+iT}} \\
&= \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2}\frac{e^{-ax^2/(1-iT)}}{\sqrt{1-iT}}\frac{d}{dx}\left[\frac{-2axe^{-ax^2/(1+iT)}}{(1+iT)\sqrt{1+iT}}\right] \\
&= \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2}\frac{e^{-ax^2/(1-iT)}}{\sqrt{1-iT}}\frac{2a(2ux^2-1)e^{-ax^2/(1+iT)}}{(1+iT)\sqrt{1+iT}} \\
&= \left(\frac{8a}{\pi}\right)^{1/2}\frac{u(2ux^2-1)}{\sqrt{1+T^2}}e^{-ax^2(1/(1+iT)+1/(1-iT))}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{8}{\pi}\right)^{1/2} uw(2ux^2-1)e^{-2ax^2/(1+T^2)} \\
&= \left(\frac{8}{\pi}\right)^{1/2} uw(2ux^2-1)e^{-2w^2x^2}. \qquad (44)
\end{aligned}
$$

Vi tar så for oss integralet:

$$
\begin{aligned}
\langle p^2\rangle &= -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{8}{\pi}\right)^{1/2} uw(2ux^2-1)e^{-2w^2x^2}\,dx \\
&= -\hbar^2 \left(\frac{8}{\pi}\right)^{1/2} uw \int_{-\infty}^{\infty} (2ux^2-1)e^{-2w^2x^2}\,dx \\
&= -\hbar^2 \left(\frac{8}{\pi}\right)^{1/2} uw \int_{-\infty}^{\infty} (2ux^2-1)e^{-2w^2x^2}\,dx \\
&= -\hbar^2 \left(\frac{8}{\pi}\right)^{1/2} uw \left[2u2\frac{1}{2}(2w^2)^{-\frac{2+1}{2}}\Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right) - \sqrt{\frac{\pi}{2w^2}}\right] \\
&= -\hbar^2 \left(\frac{8}{\pi}\right)^{1/2} uw \left[2u(2w^2)^{-3/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \sqrt{\frac{\pi}{2w^2}}\right] \\
&= -\hbar^2 \left(\frac{8}{\pi}\right)^{1/2} uw \left[2u\frac{1}{(2w^2)^{3/2}}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \sqrt{\frac{\pi}{2w^2}}\right] \\
&= -\hbar^2 \left(\frac{8}{\pi}\right)^{1/2} uw \left[\sqrt{\frac{1}{8w^6}}u\sqrt{\pi} - \sqrt{\frac{\pi}{2w^2}}\right] \\
&= -2\hbar^2 uw \left[\sqrt{\frac{1}{4w^6}}u - \sqrt{\frac{1}{w^2}}\right] \\
&= 2\hbar^2 u \left[1 - \sqrt{\frac{1}{4w^4}}u\right] \\
&= 2\hbar^2 u \left[1 - \frac{u}{2w^2}\right] \\
&= 2\hbar^2 u \left[1 - \frac{a/(1+iT)}{2a/(1+T^2)}\right] \\
&= 2\hbar^2 u \left[1 - \frac{(1+T^2)}{2(1+iT)}\right] \\
&= 2\hbar^2 u \left[1 - \frac{(1-iT)}{2}\right] \\
&= 2\hbar^2 u \left[\frac{(1+iT)}{2}\right] \\
&= 2\hbar^2 \frac{a}{(1+iT)}\frac{(1+iT)}{2} = \hbar^2 a \qquad (45)
\end{aligned}
$$

hvor vi har brukt resultater fra Rottmann gitt i (30) og (42).

$$
\sigma_x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{4w^2}} = \frac{1}{2w}. \qquad (46)
$$

$$\sigma_p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \sqrt{a\hbar^2} = \sqrt{a}\hbar. \tag{47}$$

e) Holder uskarphetsprinsippet? Ved hvilken tid t kommer partikkelen nærest uskarphetsgrensen?

Svar: Uskarphetsprinsippet holder da

$$\sigma_x \sigma_p = \frac{1}{2w}\sqrt{a}\hbar = \frac{\sqrt{a}\hbar}{2\sqrt{\frac{a}{1+T^2}}} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{1+T^2} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{1+\left(\frac{2\hbar a t}{m}\right)^2} \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{48}$$

Dette uttrykket er minst når $t = 0$, og ligger da akkurat på uskarphetsgrensen.