FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2021
Løsningsforslag for Oblig 6

(Versjon 15. mars 2021)

Her er løsninger på A Diskusjonsoppgaver, B Regneoppgaver og C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk).

A Diskusjonsoppgaver

Oppgave 1 Ortonormale egentilstander

Ikke-degenererte stasjonære løsninger til energi-egenverdiligningen tilfredsstiller likningen $\hat{H}\psi = E\psi$. Med den tidsavhengig faktoren satt på, kan løsningen skrives som $\Psi_n(x,t) = \psi_n(x)\exp(-iE_n t/\hbar)$.

a) Egentilstandene $\psi_n(x)$ er ortonormale, slik at $\int \psi_m^*(x)\psi_n(x)dx = \delta_{mn}$. Hva er definisjonen på ortonormalitet, og hva betyr dette for egentilstandene til en partikkel?

Svar: At ψ_n er ortonormale betyr at de er ortogonale på hverandre slik at indreproduktet mellom dem (her definert som $\int \psi_m^*\psi_n dx$) er 0 når $m \neq n$, og normalisert slik at indreproduktet er lik 1 når $m = n$.

Ortogonaliteten forteller oss at en partikkel i en egentilstand ikke kan inneha flere energitilstander samtidig, mens det at egentilstanden er normert forteller oss at sannsynligheten for at partikkelen finnes et sted i rommet må summeres opp til 1.

b) Hvorfor må vi kreve normalitet for at bølgefunksjonene skal kunne representere fysiske tilstander?

Svar: Siden $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,t)^*\Psi(x,t)dx$ skal representere sannsynligheten for å finne partikkelen ett eller annet sted, må integralet være lik 1 som betyr at bølgefunksjonen er normalisert.

c) Er også $\Psi_n(x,t)$ ortonormale slik at $\int \Psi_m^*(x,t)\Psi_n(x,t)dx = \delta_{mn}$? Begrunn svaret.

A) Ja

B) Nei

C) Kommer an på de ulike E_n

Svar: A) er riktig alternativ, Ψ_n er også ortonormale. Dette kan vi se ved å sette opp integralet og betrakte de to tilfellene $m \neq n$ og $m = n$.

$$\int \Psi_m^*(x,t)\Psi_n(x,t)dx \quad = \quad \int \psi_m^*(x)e^{iE_m t/\hbar}\psi_n(x)e^{-iE_n t/\hbar}dx \qquad (1)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \psi_m^*(x)\psi_n(x)e^{i(E_m-E_n)t/\hbar}dx &(2)\\
&= e^{i(E_m-E_n)t/\hbar}\int \psi_m^*(x)\psi_n(x)dx &(3)\\
&= e^{i(E_m-E_n)t/\hbar}\delta_{mn}. &(4)
\end{aligned}
$$

Hvis $m \neq n$, er $\delta_{mn} = 0$, og hvis $m = n$, er $e^{i(E_m-E_n)t/\hbar} = 1$ og $\delta_{mn} = 1$ slik at hele integralet også er 1.

Oppgave 2 Energi-egentilstander

De tidsavhengige bølgefunksjonene $\Psi_1(x,t)$ og $\Psi_2(x,t)$ er begge egentilstander for Hamilton-operatoren, altså er de energi-egentilstander. Tilstandene er ikke degenererte, som betyr at de har forskjellige energiegenverdier E_1 og E_2. Med andre ord har vi at $\hat{H}\Psi_1 = E_1\Psi_1$ og $\hat{H}\Psi_2 = E_2\Psi_2$ og $E_1 \neq E_2$.

a) Er $\Psi_{\text{sum}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1 + \Psi_2)$ også en energi-egentilstand? Begrunn svaret.

A) Ja, alltid

B) Nei, aldri

C) Kanskje ja, det kommer an på

Svar: B) er riktig, Ψ_{sum} er aldri en egentilstand. Tilstanden er en superposisjon av to (ikke-degenererte) egentilstander og en energimåling på Ψ_{sum} kan dermed gi enten E_1 eller E_2 som resultat. Da kan ikke Ψ_{sum} være en egentilstand for energi selv, siden en egentilstand for energi har skarp energi, dvs. at man alltid får egenverdien i en energimåling.

b) Hva kan du si om resultatet av en energimåling på Ψ_{sum}?

Svar: En energimåling på dette systemet vil gi enten E_1 eller E_2. Sannsynlighetene for å måle hver av de to energiene er like, da $c_1 = c_2 = 1/\sqrt{2}$.

c) Er forventningsverdien $\langle E \rangle$ av energimålinger det samme som svaret i b)?

Svar: Nei. Forventningsverdien $\langle E \rangle$ er gjennomsnittet av uendelig mange energimålinger på Ψ_{sum}, eller sagt på en annen måte; et gjennomsnitt av alle mulige måleutfall vektet etter sannsynlighet for hvert utfall.

d) Nå måler du energien til systemet beskrevet av Ψ_{sum}. Hvordan ser den nye bølgefunksjonen ut? Rett etterpå måler du energien igjen. Hvilken energi måler du nå?

   Svar: Ved måling kollapser superposisjonen av bølgefunksjonen, og avhengig av om vi måler E_1 eller E_2 er systemet nå beskrevet av enten Ψ_1 eller Ψ_2. Hvis vi nå måler energien igjen, vil vi måle den samme som i første måling.

e) Hvis systemet som du studerer beskrives av Ψ_1 alene, hvilke(n) energi(er) vil du da måle?

   Svar: Siden Ψ_1 er en egenfunksjon for energi, vil vi alltid få E_1 i en energimåling.

Oppgave 3 Energi-egentilstander i harmonisk oscillator (HO)

Hvis $\hat{H}(\hat{a}_+\psi_n) = (E_n + \hbar\omega)(\hat{a}_+\psi_n)$, hva kan du si om $\hat{a}_+\psi_n$? Velg ett av alternativene under og begrunn svaret.

A) Ikke så mye.

B) Det er en energi-egentilstand og den må være proporsjonal med tilstanden ψ_n.

C) Det er en energi-egentilstand, men den er IKKE proporsjonal med tilstanden ψ_n.

Svar: C) er riktig svar. Bølgefunksjonen $\hat{a}_+\psi_n$ er en energi-egentilstand, siden den er en løsning av TUSL med egenverdi $(E_n + \hbar\omega)$. Den kan derimot ikke være proporsjonal med ψ_n, siden $\hat{a}_+$ hever systemet fra energitilstand ψ_n til energitilstand ψ_{n+1}, som må være ortogonal (lineært uavhengig) av ψ_n (hvis ikke er de ikke egentilstander).

B Regneoppgaver

Oppgave 4 Egenskaper ved HO bølgefunksjoner

a) Konstruer ψ_2 for den harmoniske oscillator ved å anvende heveoperatoren to ganger på grunntilstanden $\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$.

Svar: Vi vet at ψ_2 kan konstrueres fra grunntilstanden ved å bruke stigeoperatoren $\hat{a}_+$:

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2!}}\hat{a}_+^2\psi_0. \tag{5}$$

Vi begynner med grunntilstanden

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}, \tag{6}$$

og bruker først $\hat{a}_+$ en gang:

$$\begin{aligned}
\hat{a}_+\psi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(-i\hat{p} + m\omega\hat{x}\right)\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(-\hbar\frac{d}{dx} + m\omega x\right)\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left[-\hbar\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\cdot 2x\right) + m\omega x\right] e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&= \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2},
\end{aligned} \tag{7}$$

og så $\hat{a}_+$ en gang til:

$$\begin{aligned}
\hat{a}_+^2\psi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(-i\hat{p} + m\omega\hat{x}\right)\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&= \frac{1}{\hbar}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left(-\hbar\frac{d}{dx} + m\omega x\right) x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&= \frac{1}{\hbar}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left[-\hbar\left(1 - x\frac{m\omega}{2\hbar}2x\right) + m\omega x^2\right] e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Dette gir

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2!}}\hat{a}_+^2\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}. \tag{9}$$

b) Tegn ψ_0, ψ_1 og ψ_2 sammen med $V(x)$. Velg konstanter som gir $m\omega/\hbar = 1\,\mathrm{nm}^{-2}$. Vær nøye med å bruke enheter på aksene. Dette er nødvendig for å få full poengpott på (hjemme)eksamen!

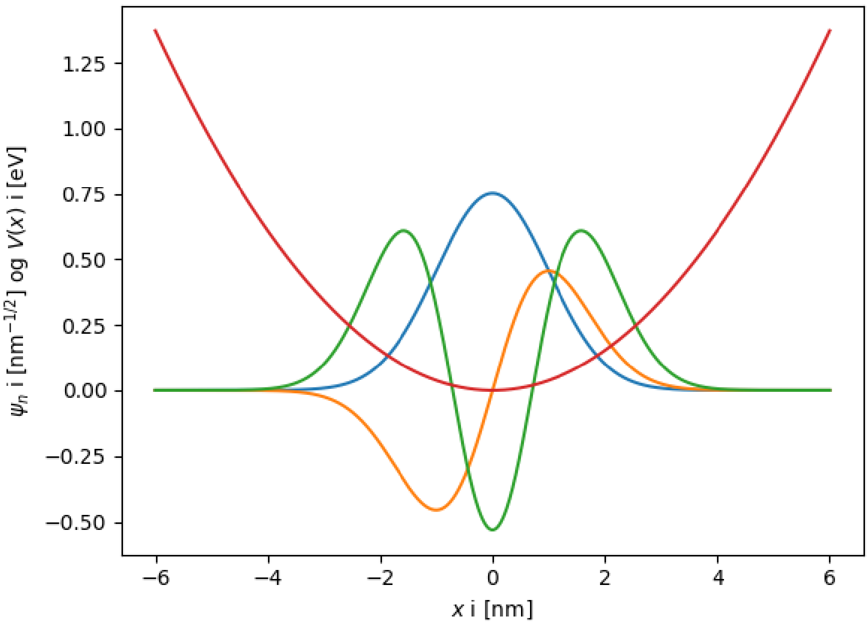
Svar: Se figur 1. Her er $k = m\omega/\hbar = 1\,\mathrm{nm}^{-2}$, som gir at potensialet kan skrives $V(x) = \frac{1}{2}k^2\frac{(\hbar c)^2}{mc^2}x^2$, der $\hbar c = 197.3$ nmeV og $mc^2 = 0.511$

MeV. Det er egentlig en tilsnikelse å tegne bølgefunksjonene og potensialet i samme koordinatsystem, de har jo ikke samme enhet! Det vi egentlig ser for oss, er to y-akser, en i $\mathrm{nm}^{-0.5}$ og en i eV.

En annen mulighet er å lage et slags modifisert potensial V^* som får samme enhet som bølgefunksjonene, men likevel beholder formen til det opprinnelige potensialet. Det er mange måter å gjøre dette på, men dette er metoden vi brukte. Først gjør vi potensialet dimensjonsløst gjennom å introdusere $\tilde{V} = V/m\omega^2 x_0^2$, der $x_0 = 1\mathrm{nm}$. Da blir potensialet på formen

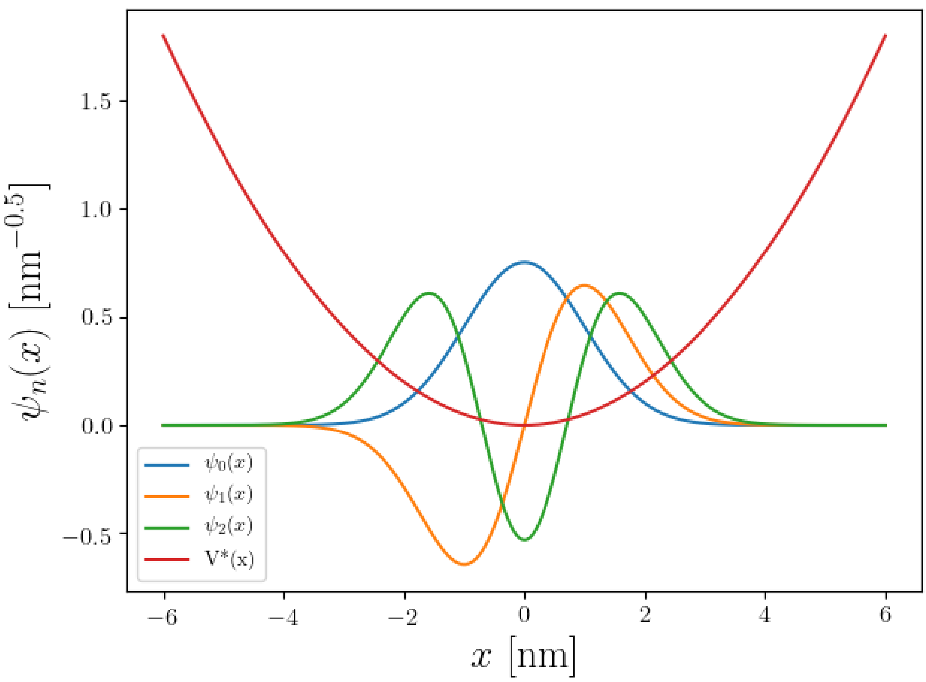
$$\tilde{V} = \frac{1}{2}\tilde{x}^2, \quad \tilde{x} = x/x_0.$$

Dette har fortsatt ikke riktig enhet, så vi gjør enda en substitusjon, altså $V^* = \tilde{V}/x^*$, der $x^* = 0.1\mathrm{nm}^{0.5}$ (kunne valgt $x^* = 1\mathrm{nm}^{0.5}$, men $0.1\mathrm{nm}^{0.5}$ ga penere plot). Dermed har vi et modifisert potensial $V^* = 0.05\tilde{x}^2\mathrm{nm}^{-0.5}$ med riktig enhet og som vi kan plotte sammen med bølgefunksjonene. Se figur 2.



Figur 1: ψ_0 (blå), ψ_1 (oransje) og ψ_2 (grønn) for $m\omega/\hbar = 1\,\mathrm{nm}^{-2}$, og $V(x)$ (rød).

c) Sjekk ortogonaliteten til ψ_0, ψ_1 og ψ_2, ved eksplisitt integrasjon. *Hint:*



Figur 2: ψ_0 (blå), ψ_1 (oransje) og ψ_2 (grønn) for $m\omega/\hbar = 1\,\mathrm{nm}^{-2}$, og $V^*(x)$ (rød).

hvis du utnytter symmetrien til integrandene rundt $x = 0$ så slipper du unna med å gjøre ett integral.

Svar: Kravet til ortogonaliteten for to bølgefunksjoner ψ_m og ψ_n kan skrive som

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n \, dx = \delta_{mn}, \tag{10}$$

hvor $\delta_{mn} = 1$ dersom $m = n$ og null ellers.

Dette kravet er automatisk oppfylt for $m = n$ fordi alle de tre bølgefunksjonene er normerte (se Griffiths). Siden ψ_0 og ψ_2 er symmetriske ("like") rundt $x = 0$ og ψ_1 er anti-symmetrisk ("odde"), så er integrandene $\psi_0^*\psi_1$ og $\psi_2^*\psi_1$ anti-symmetriske og integralene dermed automatisk null, noe som oppfyller ortogonalitetskravet i (10). Det gjenstår derfor bare å teste $\psi_0^*\psi_2$ som er symmetrisk om null:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \psi_2 \, dx \\
= \; &\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \, dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2m\omega}{\hbar} x^2 - 1 \right) e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \, dx \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2m\omega}{\hbar} x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \, dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \, dx \right] \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}} \left[2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \, dy - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \, dy \right] \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \left[4 \int_{0}^{\infty} y^2 e^{-y^2} \, dy - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, dy \right] \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \left[4 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} - \sqrt{\pi} \right] = 0, \qquad (11)
\end{aligned}
$$

hvor vi har brukt variabelbyttet $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$, og fra Rottmann tatt integralene:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2} \, dy = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \qquad (12)
$$

$$
\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda y^2} y^k \, dy = \frac{1}{2} \lambda^{-\frac{k+1}{2}} \Gamma \left(\frac{k+1}{2} \right), \qquad (13)
$$

med $\lambda = 1$, som sammen med de følgende egenskapene til Gamma-funksjonen: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ og $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, gir

$$
\int_{0}^{\infty} e^{-y^2} y^2 \, dy = \frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{1}{4} \Gamma \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}. \qquad (14)
$$

Oppgave 5 Middelverdier av størrelser i HO

a) Beregn $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ og $\langle p^2 \rangle$ for tilstanden ψ_0. *Kommentar:* I denne og andre oppgaver om den harmoniske oscillator så vil det forenkle regningen dersom du introduserer variablen $\xi = \sqrt{m\omega/\hbar}\, x$ og konstanten $\alpha = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}$. Dermed kan vi skrive $\psi_0 = \alpha e^{-\xi^2/2}$. Vi legger også merke til at

$$
\xi = \sqrt{\pi} \alpha^2 x, \qquad (15)
$$

slik at

$$
dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha^2} d\xi. \qquad (16)
$$

Det kan lønne seg å tenke på symmetriene til bølgefunksjonen før du starter å regne, må du virkelig regne ut $\langle x \rangle$ og $\langle p \rangle$?

Svar: Vi har sett at ψ_0 er en symmetrisk ("like") funksjon om $x = 0$, som betyr at $|\psi_0|^2$ også er en symmetrisk funksjon, og $x|\psi_0|^2$ antisymmetrisk. Som et resultat er $\langle x \rangle = \int x |\psi_0|^2 \, dx = 0$ og $\langle p \rangle = m \, d\langle x \rangle / dt = 0$. Vi behøver derfor bare finne $\langle x^2 \rangle$ og $\langle p^2 \rangle$.

For ψ_0:

$$\begin{aligned}
\langle x^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2|\psi_0|^2\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\alpha^2 e^{-\xi^2}\,dx \\
&= \alpha^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi\alpha^4}\xi^2\cdot e^{-\xi^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha^2}\,d\xi \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2}\alpha^4}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2 e^{-\xi^2}\,d\xi \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2}\alpha^4}\cdot 2\int_{0}^{\infty}\xi^2 e^{-\xi^2}\,d\xi \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2}\alpha^4}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4} \\
&= \frac{1}{2\pi\alpha^4} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega},
\end{aligned} \tag{17}$$

hvor vi har brukt integralet i ligning (14).

$$\begin{aligned}
\langle p^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_0^*\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^2\psi_0\,dx \\
&= -\hbar^2\pi\alpha^4\int_{-\infty}^{\infty}\alpha e^{-\xi^2/2}\frac{d^2}{d\xi^2}\alpha e^{-\xi^2/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha^2}\,d\xi \\
&= -\hbar^2\sqrt{\pi}\alpha^4\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2/2}\frac{d}{d\xi}\left(-\xi e^{-\xi^2/2}\right)\,d\xi \\
&= -\hbar^2\sqrt{\pi}\alpha^4\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2/2}\left(-e^{-\xi^2/2}+\xi^2 e^{-\xi^2/2}\right)\,d\xi \\
&= -\hbar^2\sqrt{\pi}\alpha^4\int_{-\infty}^{\infty}\left(\xi^2-1\right)e^{-\xi^2}\,d\xi \\
&= -\hbar^2\sqrt{\pi}\alpha^4\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\sqrt{\pi}\right) \\
&= \frac{\hbar^2\pi\alpha^4}{2} \\
&= \frac{1}{2}m\hbar\omega,
\end{aligned} \tag{18}$$

hvor vi har brukt

$$-i\hbar\frac{d}{dx} = -i\hbar\frac{d\xi}{dx}\frac{d}{d\xi} = -i\hbar\sqrt{\pi}\alpha^2\frac{d}{d\xi}, \tag{19}$$

og

$$\left(-i\hbar\sqrt{\pi}\alpha^2\frac{d}{d\xi}\right)^2 = -\hbar^2\pi\alpha^4\frac{d^2}{d\xi^2}, \tag{20}$$

samt (12) og (14).

Det finnes også en enda enklere måte å løse integralene på. For profesjonelle. Det første vi må innse er at vi kan skrive om relasjonene for heve- og senkeoperatorene. Vi hadde

$$\hat{a}_+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{x}), \tag{21}$$

$$\hat{a}_- = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(+i\hat{p} + m\omega\hat{x}). \tag{22}$$

Summen og differansen av disse vil gi

$$\hat{a}_+ + \hat{a}_- = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\hat{x}, \tag{23}$$

$$\hat{a}_+ - \hat{a}_- = -i\sqrt{\frac{2}{\hbar m\omega}}\,\hat{p}, \tag{24}$$

eller

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_+ + \hat{a}_-), \tag{25}$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}_+ - \hat{a}_-). \tag{26}$$

Med Diracs brakketnotasjon blir for eksempel foreventningsverdiene til x^2 for tilstanden ψ_0 da

$$\begin{aligned}
\langle x^2\rangle &= \langle\psi_0|\hat{x}^2\psi_0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\psi_0|(\hat{a}_+ + \hat{a}_-)^2\psi_0\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\psi_0|(\hat{a}_+^2 + \hat{a}_-\hat{a}_+ + \hat{a}_+\hat{a}_- + \hat{a}_-^2)\psi_0\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\Big(\langle\psi_0|\hat{a}_+^2\psi_0\rangle + \langle\psi_0|\hat{a}_-\hat{a}_+\psi_0\rangle\Big) \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\langle\hat{a}_-\psi_0|\hat{a}_+\psi_0\rangle + \langle\hat{a}_+\psi_0|\hat{a}_+\psi_0\rangle\right) \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\langle 0|\hat{a}_+\psi_0\rangle + \langle\psi_1|\psi_1\rangle\right) = \frac{\hbar}{2m\omega},
\end{aligned} \tag{27}$$

hvor vi har brukt at $\hat{a}_-\psi_0 = 0$.

b) Sjekk uskarphetsprinsippet for denne tilstanden.

Svar: For ψ_0 har vi

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}}, \tag{28}$$

og

$$\sigma_p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{2}m\hbar\omega}, \tag{29}$$

slik at

$$\sigma_x\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}}\sqrt{\frac{1}{2}m\hbar\omega} = \frac{1}{2}\hbar, \tag{30}$$

som er akkurat på uskarphetsgrensen, ψ_0 (med gaussisk form) er altså en tilstand med minimal uskarphet.

Oppgave 6 Kinetisk og potensiell energi i HO

Beregn $\langle K\rangle$ (forventningsverdien for kinetisk energi) og $\langle V\rangle$ (forventningsverdien for potensiell energi) for ψ_0 og ψ_1 i harmonisk oscillator (se forrige oppgave). (Du har ikke lov til å gjøre noen nye integral, men du får oppgitt forventningsverdiene $\langle x^2\rangle_0 = \frac{\hbar}{2m\omega}$, $\langle x^2\rangle_1 = \frac{3\hbar}{2m\omega}$, $\langle p^2\rangle_0 = \frac{m\hbar\omega}{2}$ og $\langle p^2\rangle_1 = \frac{3m\hbar\omega}{2}$.) Er summen hva du ville forvente?

Svar: Forventningsverdien til kinetisk energi K finnes fra relasjonen $K = p^2/2m$, som gir

$$\langle K\rangle = \frac{1}{2m}\langle p^2\rangle. \tag{31}$$

For ψ_0 er da

$$\langle K\rangle = \frac{1}{2m}\cdot\frac{1}{2}m\hbar\omega = \frac{1}{4}\hbar\omega, \tag{32}$$

og for ψ_1 er

$$\langle K\rangle = \frac{1}{2m}\cdot\frac{3}{2}m\hbar\omega = \frac{3}{4}\hbar\omega. \tag{33}$$

Forventningsverdien til potensiell energi $\langle V\rangle$ finnes fra HO potensialet $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$, som gir

$$\langle V\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2\langle x^2\rangle. \tag{34}$$

For ψ_0 er da

$$\langle V\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2\cdot\frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega} = \frac{1}{4}\hbar\omega, \tag{35}$$

og for ψ_1 er

$$\langle V\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2\cdot\frac{3}{2}\frac{\hbar}{m\omega} = \frac{3}{4}\hbar\omega. \tag{36}$$

For både ψ_0 og ψ_1 er summen av forventningsverdiene til kinetisk og potensiell energi lik forventningsverdien til Hamiltonoperatoren (operatoren for totalenergien) for tilstanden, $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ og $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$.

C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk)

Oppgave 7 Middelverdier av størrelser i HO, fortsettelse

a) Beregn $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle x^2\rangle$ og $\langle p^2\rangle$ for tilstanden $\psi_1 = \sqrt{2}\alpha\xi e^{-\xi^2/2}$.

Svar:

a) Beregn $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle x^2\rangle$ og $\langle p^2\rangle$ for tilstanden ψ_0 og ψ_1. *Kommentar:* I denne og andre oppgaver om den harmoniske oscillator så vil det forenkle regningen dersom du introduserer variablen $\xi = \sqrt{m\omega/\hbar}\,x$ og konstanten $\alpha = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}$. Dermed kan vi skrive $\psi_0 = \alpha e^{-\xi^2/2}$ og $\psi_1 = \sqrt{2}\alpha\xi e^{-\xi^2/2}$. Vi legger også merke til at

$$\xi = \sqrt{\pi}\alpha^2 x, \tag{37}$$

slik at

$$dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha^2}d\xi. \tag{38}$$

Det kan lønne seg å tenke på symmetriene til bølgefunksjonene før du starter å regne, må du virkelig regne ut $\langle x\rangle$ og $\langle p\rangle$?

Svar: Vi har sett at ψ_1 er en anti-symmetrisk ("odde") funksjon om $x = 0$, som betyr at $|\psi_1|^2$ en symmetrisk funksjon, og $x|\psi_1|^2$ anti-symmetrisk. Som et resultat er $\langle x\rangle = \int x|\psi_1|^2\,dx = 0$ og $\langle p\rangle = m\,d\langle x\rangle/dt = 0$. Vi behøver derfor bare finne $\langle x^2\rangle$ og $\langle p^2\rangle$.

For ψ_1:

$$\begin{aligned}
\langle x^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2|\psi_1|^2\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot 2\alpha^2\xi^2 e^{-\xi^2}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi\alpha^4}\xi^2\cdot 2\alpha^2\xi^2 e^{-\xi^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha^2}\,d\xi \\
&= \frac{2}{\pi^{3/2}\alpha^4}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^4 e^{-\xi^2}\,d\xi \\
&= \frac{4}{\pi^{3/2}\alpha^4}\int_{0}^{\infty}\xi^4 e^{-\xi^2}\,d\xi \\
&= \frac{4}{\pi^{3/2}\alpha^4}\cdot\frac{3}{8}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{3}{2\pi\alpha^4} \\
&= \frac{3}{2}\frac{\hbar}{m\omega},
\end{aligned} \tag{39}$$

hvor vi har brukt at fra (13) er

$$\int_0^\infty \xi^4 e^{-\xi^2}\, d\xi = \frac{1}{2}\cdot 1^{-\frac{4+1}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{4+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}. \quad (40)$$

Tilslutt er

$$\begin{aligned}
\langle p^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_1^*\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^2\psi_1\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2}\alpha\xi e^{-\xi^2/2}\left(-\hbar^2\pi\alpha^4\frac{d^2}{d\xi^2}\right)\sqrt{2}\alpha\xi e^{-\xi^2/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha^2}\, d\xi \\
&= -2\hbar^2\sqrt{\pi}\alpha^4\int_{-\infty}^{\infty}\xi e^{-\xi^2/2}\frac{d^2}{d\xi^2}\xi e^{-\xi^2/2}\, d\xi \\
&= -2\hbar^2\sqrt{\pi}\alpha^4\int_{-\infty}^{\infty}\xi e^{-\xi^2/2}\frac{d}{d\xi}\left(e^{-\xi^2/2}-\xi^2 e^{-\xi^2/2}\right) d\xi \\
&= -2\hbar^2\sqrt{\pi}\alpha^4\int_{-\infty}^{\infty}\xi e^{-\xi^2/2}\left(-\xi e^{-\xi^2/2}-2\xi e^{-\xi^2/2}+\xi^3 e^{-\xi^2/2}\right) d\xi \\
&= -2\hbar^2\sqrt{\pi}\alpha^4\int_{-\infty}^{\infty}\left(\xi^4-3\xi^2\right)e^{-\xi^2}\, d\xi \\
&= -2\hbar^2\sqrt{\pi}\alpha^4\cdot 2\int_0^{\infty}\left(\xi^4-3\xi^2\right)e^{-\xi^2}\, d\xi \\
&= -4\hbar^2\sqrt{\pi}\alpha^4\left(\frac{3}{8}\sqrt{\pi}-3\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\pi}\right) \\
&= \frac{3}{2}\hbar^2\pi\alpha^4 \\
&= \frac{3}{2}m\hbar\omega, \qquad (41)
\end{aligned}$$

hvor vi har benyttet oss av (14) og (40).

b) Sjekk uskarphetsrelasjonen for denne tilstanden.

Svar: For ψ_1 har vi

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad (42)$$

og

$$\sigma_p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \sqrt{\frac{3}{2}m\hbar\omega}, \quad (43)$$

slik at

$$\sigma_x\sigma_p = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{\hbar}{m\omega}}\sqrt{\frac{3}{2}m\hbar\omega} = \frac{3}{2}\hbar, \quad (44)$$

som større enn uskarphetsgrensen.

Oppgave 8 Sannsynlighet i harmonisk oscillator (fra Griffiths Kap.2)

For grunntilstanden til en harmonisk oscillator, hva er sannsynligheten (med tre desimalers presisjon) for å finne partikkelen utenfor det klassisk tillatte området? *Hint:* klassisk sett så er energien til en oscillator $E = \frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$, hvor a er amplituden (maksimumsutslaget). Derfor går det klassisk tillatte området for en oscillator med energi E fra $-\sqrt{2E/m\omega^2}$ til $\sqrt{2E/m\omega^2}$. Slå opp den numeriske verdien for det intregralet du behøver.

Svar: Sannsynligheten for å finne en partikkel i grunntilstanden i et forbudt område (utenfor det klassiske maksutslaget) er gitt ved

$$P_{\text{forbudt}} = \int_a^{\infty} |\psi_0|^2\, dx + \int_{-\infty}^{-a} |\psi_0|^2\, dx = 2\int_a^{\infty} |\psi_0|^2\, dx, \tag{45}$$

hvor vi har utnyttet at ψ_0 er symmetrisk om $x = 0$ (en "lik" funksjon), slik at integralet fra $-\infty$ til $-a$ er identisk med integralet fra a til ∞. Energien til grunntilstanden er $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$, slik at

$$a = \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}. \tag{46}$$

Med variabelbyttet $\xi(x) = \sqrt{m\omega/\hbar}\, x$ i integralet gir dette en integrasjonsgrense på $\xi(a) = 1$. Integralet blir:

$$\begin{aligned} P_{\text{forbudt}} &= 2\int_a^{\infty} |\psi_0|^2\, dx \\ &= 2\int_1^{\infty} \alpha^2 e^{-\xi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha^2} d\xi \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi \\ &\simeq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot 0.1394 \simeq 0.157. \end{aligned} \tag{47}$$

Sannsynligheten er altså nesten 16%.