# FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2021
# Oblig 6

(Versjon 16. februar 2021)

Dokumentet inneholder følgende tre deler:

- A Diskusjonsoppgaver
- B Regneoppgaver
- C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk)

Du finner frister for innlevering av obliger på Canvas. For å få obligen godkjent, må du vise at du har gjort et ordentlig forsøk på alle oppgavene. 6/11 obliger må være godkjent for å gå opp til eksamen.

## A Diskusjonsoppgaver

### Oppgave 1 Ortonormale egentilstander

Ikke-degenererte stasjonære løsninger til energi-egenverdiligningen tilfredsstiller likningen $\hat{H}\psi = E\psi$. Med den tidsavhengig faktoren satt på, kan løsningen skrives som $\Psi_n(x,t) = \psi_n(x)\exp(-iE_n t/\hbar)$.

a) Egentilstandene $\psi_n(x)$ er ortonormale, slik at $\int \psi_m^*(x)\psi_n(x)dx = \delta_{mn}$. Hva er definisjonen på ortonormalitet, og hva betyr dette for egentilstandene til en partikkel?

b) Hvorfor må vi kreve normalitet for at bølgefunksjonene skal kunne representere fysiske tilstander?

c) Er også $\Psi_n(x,t)$ ortonormale slik at $\int \Psi_m^*(x,t)\Psi_n(x,t)dx = \delta_{mn}$? Begrunn svaret.

   A) Ja
   B) Nei
   C) Kommer an på de ulike $E_n$

### Oppgave 2 Energi-egentilstander

De tidsavhengige bølgefunksjonene $\Psi_1(x,t)$ og $\Psi_2(x,t)$ er begge egentilstander for Hamilton-operatoren, altså er de energi-egentilstander. Tilstandene er ikke degenererte, som betyr at de har forskjellige energiegenverdier $E_1$ og $E_2$. Med andre ord har vi at $\hat{H}\Psi_1 = E_1\Psi_1$ og $\hat{H}\Psi_2 = E_2\Psi_2$ og $E_1 \neq E_2$.

a) Er $\Psi_{\text{sum}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1 + \Psi_2)$ også en energi-egentilstand? Begrunn svaret.

   A) Ja, alltid
   B) Nei, aldri
   C) Kanskje ja, det kommer an på

b) Hva kan du si om resultatet av en energimåling på $\Psi_{\text{sum}}$?

c) Er forventningsverdien $\langle E \rangle$ av energimålinger det samme som svaret i b)?

d) Nå måler du energien til systemet beskrevet av $\Psi_{\text{sum}}$. Hvordan ser den nye bølgefunksjonen ut? Rett etterpå måler du energien igjen. Hvilken energi måler du nå?

e) Hvis systemet som du studerer beskrives av $\Psi_1$ alene, hvilke(n) energi(er) vil du da måle?

### Oppgave 3 Energi-egentilstander i harmonisk oscillator (HO)

Hvis $\hat{H}(\hat{a}_+\psi_n) = (E_n + \hbar\omega)(\hat{a}_+\psi_n)$, hva kan du si om $\hat{a}_+\psi_n$? Velg ett av alternativene under og begrunn svaret.

A) Ikke så mye.

B) Det er en energi-egentilstand og den må være proporsjonal med tilstanden $\psi_n$.

C) Det er en energi-egentilstand, men den er IKKE proporsjonal med tilstanden $\psi_n$.

## B Regneoppgaver

### Oppgave 4 Egenskaper ved HO bølgefunksjoner

**a)** Konstruer $\psi_2$ for den harmoniske oscillator ved å anvende heveoperatoren to ganger på grunntilstanden $\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$.

**b)** Tegn $\psi_0$, $\psi_1$ og $\psi_2$ sammen med $V(x)$. Velg konstanter som gir $m\omega/\hbar = 1\,\text{nm}^{-2}$. Vær nøye med å bruke enheter på aksene. Dette er nødvendig for å få full poengpott på (hjemme)eksamen!

**c)** Sjekk ortogonaliteten til $\psi_0$, $\psi_1$ og $\psi_2$, ved eksplisitt integrasjon. *Hint:* hvis du utnytter symmetrien til integrandene rundt $x = 0$ så slipper du unna med å gjøre ett integral.

### Oppgave 5 Middelverdier av størrelser i HO

**a)** Beregn $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle x^2\rangle$ og $\langle p^2\rangle$ for tilstanden $\psi_0$. *Kommentar:* i denne og andre oppgaver om den harmoniske oscillator så vil det forenkle regningen dersom du introduserer variablen $\xi = \sqrt{m\omega/\hbar}\,x$ og konstanten $\alpha = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}$. Dermed kan vi skrive $\psi_0 = \alpha e^{-\xi^2/2}$. Vi legger også merke til at

$$\xi = \sqrt{\pi}\alpha^2 x, \tag{1}$$

slik at

$$dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha^2} d\xi. \tag{2}$$

Det kan lønne seg å vurdere symmetrien til bølgefunksjonene før du starter å regne: må du virkelig regne ut $\langle x\rangle$ og $\langle p\rangle$?

**b)** Sjekk uskarphetsrelasjonen for denne tilstanden.

### Oppgave 6 Kinetisk og potensiell energi i HO

Beregn $\langle K\rangle$ (forventningsverdien for kinetisk energi) og $\langle V\rangle$ (forventningsverdien for potensiell energi) for $\psi_0$ og $\psi_1$ i harmonisk oscillator (se forrige oppgave). (Du har ikke lov til å gjøre noen nye integral, men du får oppgitt forventningsverdiene $\langle x^2\rangle_0 = \frac{\hbar}{2m\omega}$, $\langle x^2\rangle_1 = \frac{3\hbar}{2m\omega}$, $\langle p^2\rangle_0 = \frac{m\hbar\omega}{2}$ og $\langle p^2\rangle_1 = \frac{3m\hbar\omega}{2}$.) Er summen hva du ville forvente?

## C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk)

### Oppgave 7 Middelverdier av størrelser i HO, fortsettelse

**a)** Beregn $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle x^2\rangle$ og $\langle p^2\rangle$ for tilstanden $\psi_1 = \sqrt{2}\alpha\xi e^{-\xi^2/2}$.

**b)** Sjekk uskarphetsrelasjonen for denne tilstanden.

### Oppgave 8 Sannsynlighet i harmonisk oscillator (fra Griffiths Kap.2)

For grunntilstanden til en harmonisk oscillator, hva er sannsynligheten (med tre desimalers presisjon) for å finne partikkelen utenfor det klassisk tillatte området? *Hint:* klassisk sett så er energien til en oscillator $E = \frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$, hvor $a$ er amplituden (maksimumsutslaget). Derfor går det klassisk tillatte området for en oscillator med energi $E$ fra $-\sqrt{2E/m\omega^2}$ til $\sqrt{2E/m\omega^2}$. Slå opp den numeriske verdien for det intregralet du behøver.