FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2021
Oblig 5

(Versjon 10. februar 2021)

Dokumentet inneholder følgende tre deler:

- A Diskusjonsoppgaver
- B Regneoppgaver
- C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk)

Du finner frister for innlevering av obliger på Canvas. For å få obligen godkjent, må du vise at du har gjort et ordentlig forsøk på alle oppgavene. 6/11 obliger må være godkjent for å gå opp til eksamen.

A Diskusjonsoppgaver

Oppgave 1 Uskarphet I

Et elektron i svært lav fart (dvs. nesten i ro) blir akselerert av et potensial V og får tilført kinetisk energi lik 1 eV før det sendes ut i et stort område med $V = 0$. (Begrunn alle svar i oppgaven).

a) Hva kan du si om uskarpheten i elektronets bevegelsesmengde i dette tilfellet?

b) Hva kan du si om uskarpheten i elektronets posisjon?

Eksperimentelle fysikere måler posisjonen til elektronet og får en verdi $x = x_0$. Målingen skjer ved at forskerne lyser på elektronet med fotoner.

c) Hva skjer med elektronets bevegelsesmengde idet målingen utføres?

d) Hva vil være forventet resultat av en ny posisjonsmåling på samme elektron rett etter første måling?

e) Hvor tenker du at elektronet var rett før målingen ble utført?

Forskerne setter opp eksperimentet på nytt, helt likt som sist, og gjør en ny helt tilsvarende måling av posisjonen.

f) Vil posisjonen igjen bli målt til å være $x = x_0$?

Forskerne setter opp 1000 helt like eksperimenter og måler posisjonen x i 500 av dem og bevegelsesmengden p i de 500 andre.

g) Hva kan du si om spredningen i målingene av x og p?

Oppgave 2   Uskarphet II

Diskutér påstandene under og velg hvilke(n) du synes best beskriver Heisenbergs uskarphetsrelasjon $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2$. Begrunn svaret.

A: Uskarphetsrelasjonen beskriver at vi alltid påvirker kvantesystemer når vi måler på dem. For eksempel vil posisjonsmåling ved hjelp av fotoner påvirke bevegelsesmengden, og måling av bevegelsesmengde ved hjelp av magnetfelt vil påvirke posisjonen.

B: Uskarphetsrelasjonen beskriver at vi ikke har godt nok måleutstyr til å gjøre eksakte målinger. Det gjør at vi får en spredning i målinger som er gitt av bølgefunksjonen.

C: Uskarphetsrelasjonen beskriver at kvantesystemer i seg selv har en iboende uskarphet. Denne uskarpheten kommer fra kvantesystemers bølgenatur, der egenskapene som definerer posisjon (lokalisering) og bevegelsesmengde (bølgelengde) er inverst relatert til hverandre.

B Regneoppgaver

Regneoppgavene dreier seg for det meste om å regne ut forventningsverdier. Dere skal bruke et konkret eksempel med en partikkel i en (en-dimensjonal) uendelig dyp kvadratisk brønn (såkalt partikkel i boks). Brønnen er avbildet i Figur 1, og er definert fra 0 til a (med lengde a).

Oppgave 3   Heisenbergs uskarphetsrelasjon

a) Finn $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$, σ_x og σ_p for den n-te stasjonære tilstanden for en uendelig dyp kvadratisk brønn

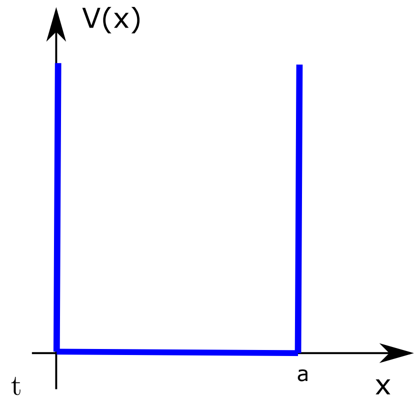
$$\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i(n^2\pi^2\hbar/2ma^2)t}. \tag{1}$$

Sjekk at Heisenbergs uskarphetsrelasjon er oppfylt. Hvilken tilstand kommer nærmest grensen for uskarpheten?

b) Animér tidsutviklingen av $\Psi_{n=3}(x,t)$ numerisk med $a = 1$ nm og $m = 0.511\text{MeV}/\text{c}^2$. I innleveringen, vis et plot ved tiden $t = 10$ fs, som viser reell og imaginær komponent for $\Psi_{n=3}$, samt sannsynlighetstettheten.

Oppgave 4   Sannsynlighet for å måle energi-egenverdi

En partikkel med masse m i den uendelige brønnen med vidde a begynner i venstre halvdel av brønnen, og kan ved tiden $t = 0$ finnes med like stor sannsynlighet ved alle posisjoner i den halvdelen.



Figur 1: Uendelig brønn

a) Hva er den initielle bølgefunksjonen $\Psi(x, 0)$? (Anta at den er reell. Ikke glem å normalisere den.)

b) Hva er sannsynligheten for at en måling av energien gir akkurat verdien $\pi^2\hbar^2/2ma^2$?

C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk)

Oppgave 5 Tidsutvikling av partikkel i boks (fra Griffiths Kap.2)

En partikkel i den uendelige dype kvadratiske brønnen har som starttilstand en bølgefunksjon som er en lik blanding av de to første stasjonære tilstandene:

$$\Psi(x, 0) = A[\psi_1(x) + \psi_2(x)]. \tag{2}$$

a) Normaliser $\Psi(x, 0)$. (Det vil si: finn A. Det forenkler regningen om du utnytter ortonormaliteten til ψ_1 og ψ_2. Husk at når bølgefunksjonen er normalisert ved $t = 0$ så vil den forbli normalisert — sjekk dette eksplisitt etter at du har gjort oppgave **b)** dersom du er i tvil.)

b) Finn $\Psi(x, t)$ og $|\Psi(x, t)|^2$. Uttrykk den siste som en cosinusfunksjon av tiden, som i eksempel 2.1 i Griffiths. For å forenkle resultatet, la $\omega \equiv \pi^2\hbar/2ma^2$.

c) Finn $\langle x \rangle$. Legg merke til at denne forventningsverdien oscillerer som funksjon av tiden. Hva er vinkelfrekvensen til denne oscillasjonen? Hva er amplituden til oscillasjonen? (Hvis du får en amplitude større enn $a/2$, så er du på bærtur!)

d) Finn $\langle p \rangle$. (*Hint:* det finnes en rask måte!)

e) Hvis du skulle måle energien til denne partikkelen, hvilke verdier ville du fått, og hva er sannsynligheten for å få hver av de? Finn forventningsverdien til H. Hvordan er denne sammenliknet med E_1 og E_2?