FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2021
Løsningsforslag for Oblig 5

(Versjon 24. februar 2021)

Her er løsninger på A Diskusjonsoppgaver, B Regneoppgaver og C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk).

A Diskusjonsoppgaver

Oppgave 1 Uskarphet I

Et elektron i svært lav fart (dvs. nesten i ro) blir akselerert av et potensial V og får tilført kinetisk energi lik 1 eV før det sendes ut i et stort område med $V = 0$. (Begrunn alle svar i oppgaven).

a) Hva kan du si om uskarpheten i elektronets bevegelsesmengde i dette tilfellet?

Svar: Siden elektronet var nesten i ro i starten og ble akselerert av et gitt potensial, kjenner vi elektronets kinetiske energi med ganske god presisjon. Derfor er uskarpheten i bevegelsesmengden liten.

b) Hva kan du si om uskarpheten i elektronets posisjon?

Svar: Uskarpheten i elektronets posisjon må være ganske stor, siden uskarpheten i bevegelsesmengde er liten, og Heisenbergs uskarphetsrelasjon gir oss en minste verdi for produktet av uskarphet i posisjon σ_x og bevegelsesmengde σ_p.

Eksperimentelle fysikere måler posisjonen til elektronet og får en verdi $x = x_0$. Målingen skjer ved at forskerne lyser på elektronet med fotoner.

c) Hva skjer med elektronets bevegelsesmengde idet målingen utføres?

Svar: Elektronets bevegelsesmengde endrer seg idet målingen utføres. Dette skyldes at fotonet/fotonene vi lyser på elektronet med vil vekselvirke med elektronet og endre dets bevegelsesmengde ved comptonspredning eller photoelektrisk effekt.

d) Hva vil være forventet resultat av en ny posisjonsmåling på samme elektron rett etter første måling?

Svar: Første måling gjorde at partikkelens bølgefunksjon «kollapset» og har ikke mer noen mening. Vi har altså målt elektronet, og dets posisjon er så nøyaktig bestemt som instrumentene tillater (det har ikke noe med den teoretiske uskarpheten σ_x å gjøre). Hvis vi utfører en ny posisjonsmåling på elektronet rett etter første måling[1], kan vi derfor tenke oss at elektronet vil være på samme sted. Posisjonen vil nok likevel være noe endret fordi elektronet ble dyttet på av fotonet som målte på det. Det nye måleresultatet er ikke beskrevet av den første bølgefunksjonen, siden vi har endret systemet med påvirkningen fra fotonet. Hvis vi måler lenge etterpå, har bølgefunksjonen fått tid til å utvikle seg, og denne bestemmer med hvilken sannsynlighet vi vil finne partikkelen i en bestemt posisjon.

e) Hvor tenker du at elektronet var rett før målingen ble utført?

Svar (eller forsøk på svar): Dette er i stor grad et filosofisk spørsmål som kvantefysikken ikke gir oss fullt svar på. Her forventer vi ikke «fasitsvar» fra dere studenter, men vil at dere skal gruble litt på dette og diskutere det med hverandre. Hvordan vi ser på dette spørsmålet, handler mye om tolkning av kvantefysikken. Kvantemekanikken er suveren i å forutsi (statistisk) utfall av eksperimenter på mikronivå. Det har vært og er imidlertid mange dyptgående vitenskapsfilosofiske diskusjoner av hva kvantemekanikken sier om hvordan verden på mikronivå *er* i seg selv.

Kvantemekanikken gir oss sannsynligheten for å finne elektronet ulike steder hvis vi gjør en måling, men den sier ikke noe om hvor elektronet var rett før målingen. Bohr og Einstein diskuterte dette mye i kvantemekanikkens barndom. Litt forenkla kan vi si at Bohr påsto at elektronet egentlig ikke var noe veldefinert sted rett før målingen, og at fysikkens jobb uansett var å forutsi måleresultater. Einstein mente at elektronet måtte være ved x_0 også rett før målingen, og at kvantemekanikken måtte være ufullstendig siden den ikke klarte å forutsi det. Einsteins såkalte «hidden variables»-tolkning av kvantefysikken har blitt eksperimentelt motbevist, første gang av Alain Aspect i 1982. Likevel diskuteres ulike andre tolkninger av kvantemekanikken fortsatt. Griffiths har en liten gjennomgang av dette spørsmålet i kapittel 1.2 - les gjerne mer der eller andre steder for å gruble på hva Einstein, Bohr, Griffiths og dere selv tenker om de filosofiske sidene av kvantefysikk.

Forskerne setter opp eksperimentet på nytt, helt likt som sist, og gjør en ny helt tilsvarende måling av posisjonen.

f) Vil posisjonen igjen bli målt til å være $x = x_0$?

Svar: Nei, det er temmelig usannsynlig. Bølgefunksjonen (kvadrert) gir oss spredningen av gjentatte målinger av x på likt preparerte syste-

[1]Med rett etterpå menes at bølgefunksjonen ikke har 'fått tid' til å utvikle seg, dvs at $\exp(-i\omega t)$ er tilnærmet den samme, som gir $t << \omega = E/\hbar$.

mer. I dette systemet har vi ganske skarp bevegelsesmengde, som betyr at posisjonen er uskarp og at det er stor spredning i sannsynlighetstettheten $|\Psi(x,t)|^2$ for målinger av x. En gjentatt måling av x på et likt system (men som vi ennå ikke har målt på!) vil derfor neppe gi verdien x_0.

Forskerne setter opp 1000 helt like eksperimenter og måler posisjonen x i 500 av dem og bevegelsesmengden p i de 500 andre.

g) Hva kan du si om spredningen i målingene av x og p?

Svar: Spredningen av disse målingene må ha standardavvik σ_x og σ_p som oppfyller Heisenbergs uskarphetsrelasjon $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2$.

Oppgave 2 Uskarphet II

Diskutér påstandene under og velg hvilke(n) du synes best beskriver Heisenbergs uskarphetsrelasjon $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2$. Begrunn svaret.

A: Uskarphetsrelasjonen beskriver at vi alltid påvirker kvantesystemer når vi måler på dem. For eksempel vil posisjonsmåling ved hjelp av fotoner påvirke bevegelsesmengden, og måling av bevegelsesmengde ved hjelp av magnetfelt vil påvirke posisjonen.

B: Uskarphetsrelasjonen beskriver at vi ikke har godt nok måleutstyr til å gjøre eksakte målinger. Det gjør at vi får en spredning i målinger som er gitt av bølgefunksjonen.

C: Uskarphetsrelasjonen beskriver at kvantesystemer i seg selv har en iboende uskarphet. Denne uskarpheten kommer fra kvantesystemers bølgenatur, der egenskapene som definerer posisjon (lokalisering) og bevegelsesmengde (bølgelengde) er inverst relatert til hverandre.

Svar: A: Denne påstanden stemmer på noen måter, ikke på andre. Uskarphetsrelasjonen handler *ikke* om at målinger påvirker systemet i den forstand at vi endrer på størrelser vi prøver å måle fordi vi alltid vil tilføre/frata systemet litt energi eller bevegelsesmengde i prosessen. Det handler altså ikke om at posisjonsmåling ved hjelp av fotoner vil påvirke bevegelsesmengden (den siste setningen i påstand A). Det som likevel stemmer, er at uskarphet handler om forholdet mellom to observerbare størrelser (variabler) og hvordan måling av den ene påvirker mulighetene for måleutfall i den andre. I kvantemekanikken er alle observerbare størrelser representert av en operator. De mulige verdiene vi kan få når vi måler størrelsen, representeres av egenverdiene til operatoren når den virker på bølgefunksjonen som beskriver systemet. En måling gir oss én verdi, og vi sier at bølgefunksjonen kollapser til den egentilstanden som har den egenverdien. Hvis vi vil måle to ulike størrelser A og B i samme system skarpt, krever det at vi har et komplett sett med tilstander som er egentilstander for begge operatorene $\hat{A}$ og $\hat{B}$ samtidig. Selv om den ene målingen da kollapser bølgefunksjonen (som gjerne en en superposisjon av mange egentilstander) ned på den ene egentilstanden til $\hat{A}$, vil den tilstanden også ha en skarp egenverdi for den andre operatoren $\hat{B}$. Hvis $\hat{A}$ og $\hat{B}$ ikke har et felles sett med samtidige egentilstander, må egentilstandene til $\hat{B}$ være en lineærkombinasjon av flere av egentilstandene til $\hat{A}$. Da er det nødvendigvis flere mulige måleverdier for B, og B er ikke lenger skarp. Hvis operatorer har et komplett sett med samtidige egentilstander, sier vi at de kommuterer. Da er kommutatoren $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, og de kan måles skarpt samtidig. Hvis $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$, kommuterer de ikke, og vi har en uskarphetsrelasjon mellom variablene A og B. For posisjon x og bevegelsesmengde p har vi for eksempel $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.

B: Uskarphetsrelasjonen handler ikke om måleusikkerhet forbundet med upresist måleutstyr. Spredningen i målinger ville vært der selv om utstyret var perfekt. C: Dette er nok det mest riktige alternativet. Uskarphetsrelasjonen beskriver en iboende uskarphet, knyttet til kvanteobjektenes bølgenatur.

B Regneoppgaver

Oppgave 3 Heisenbergs uskarphetsrelasjon

a) Finn $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$, σ_x og σ_p for den n-te stasjonære tilstanden for en uendelig dyp kvadratisk brønn

$$\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i(n^2\pi^2\hbar/2ma^2)t}. \tag{1}$$

Sjekk at Heisenbergs uskarphetsrelasjon er oppfylt. Hvilken tilstand kommer nærmest grensen for uskarpheten?

Svar: Merk at vi i denne oppgaven bare skal se på de enkelte stasjonære tilstandene og ikke den generelle løsningen for en vilkårlig initialbetingelse. Eksponentialfaktoren fra likning (1) kansellerer når vi finner absoluttverdikvadratet, altså er $|\Psi_n(x,t)|^2 = |\psi_n(x)|^2$, der $\psi_n(x) = \sqrt{2/a}\sin(n\pi x/a)$. Forventningsverdien til posisjonen x er da

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x|\Psi_n(x,t)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi_n(x)|^2\,dx, \tag{2}$$

som gir

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \int_0^a x \cdot \frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx \\
&= \frac{2}{a}\int_0^{n\pi} \frac{ay}{n\pi}\cdot \sin^2 y \cdot \frac{a}{n\pi}dy \\
&= \frac{2a}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi} y\sin^2 y\,dy \\
&= \frac{2a}{n^2\pi^2}\left[\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y\sin 2y - \frac{1}{8}\cos 2y\right]_0^{n\pi} \\
&= \frac{2a}{n^2\pi^2}\left[\frac{1}{4}(n\pi)^2 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right] \\
&= \frac{a}{2}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Her har vi brukt variabelskiftet $y = n\pi x/a$ for å forenkle integralet. Integralet over y kan finnes ved delvis integrasjon og bruk av Rottmann.[2]

[2]Hvordan vet jeg at det er det jeg må gjøre? Av erfaring så vet jeg at integraler med høyere potenser av sinus og cosinus ikke oppgis i Rottmann fordi de kan reduseres ved delvis integrasjon og trigonometriske sammenhenger, slik som $2\sin x\cos x = \sin 2x$. Derfor begynner jeg med delvis integrasjon for å se om jeg kan redusere sinusfaktoren til første orden.

Vi begynner med delvis integrasjon:

$$\begin{aligned}
\int y \sin^2 y \, dy &= \frac{1}{2}y^2 \cdot \sin^2 y - \int \frac{1}{2}y^2 \cdot 2 \sin y \cos y \, dy \\
&= \frac{1}{2}y^2 \sin^2 y - \int \frac{1}{2}y^2 \sin 2y \, dy \\
&= \frac{1}{2}y^2 \sin^2 y - \frac{1}{2}\int y^2 \sin 2y \, dy. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Vi kan så slå opp det gjenværende integralet i Rottmann som gir

$$\int y^2 \sin ay \, dy = \frac{2}{a^2} y \sin ay + \frac{2 - a^2y^2}{a^3} \cos ay + C, \qquad (5)$$

og med $a = 2$ betyr det at

$$\begin{aligned}
\int y \sin^2 y \, dy &= \frac{1}{2}y^2 \sin^2 y - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{2^2} y \sin 2y + \frac{2 - 2^2y^2}{2^3} \cos 2y\right] + C \\
&= \frac{1}{2}y^2 \sin^2 y - \frac{1}{4}y \sin 2y - \frac{1}{8}\cos 2y + \frac{y^2}{4}\cos 2y + C \\
&= \frac{1}{2}y^2\left(\sin^2 y + \frac{1}{2}\cos 2y\right) - \frac{1}{4}y \sin 2y - \frac{1}{8}\cos 2y + C \\
&= \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y \sin 2y - \frac{1}{8}\cos 2y + C. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Litt av en jobb for en enkelt forventningsverdi!

Merk at forventningsverdien for posisjonen vi har fått ikke bare er tidsuavhengig, men også uavhengig av n, og ligger i midten av brønnen, som man kanskje kunne vente siden partikkelen ikke har noen grunn til å foretrekke en side over en annen. Dette til tross for at halvparten av de stasjonære tilstandene (de med partalls n) har *null sannsynlighetstetthet* for partikkelen i $x = a/2$!

Forventningsverdien til x^2 er

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi_n(x)|^2 \, dx = \int_0^a x^2 \cdot \frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \\
&= \frac{2}{a}\int_0^{n\pi}\left(\frac{ay}{n\pi}\right)^2 \cdot \sin^2 y \cdot \frac{a}{n\pi} dy \\
&= \frac{2}{a}\left(\frac{a}{n\pi}\right)^3 \int_0^{n\pi} y^2 \sin^2 y \, dy \\
&= \frac{2a^2}{(n\pi)^3}\left[\frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{4}y \cos 2y + \frac{1}{8}\left(1 - 2y^2\right)\sin 2y\right]_0^{n\pi} \\
&= \frac{2a^2}{(n\pi)^3}\left[\frac{1}{6}(n\pi)^3 - \frac{1}{4}n\pi\right] \\
&= a^2\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2(n\pi)^2}\right]. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Vi har igjen brukt at forventningsverdien til en stasjonær tilstand er tidsuavhengig, og samme variabelskifte som over. Integralet over y kan gjøres på følegnde måte: vi bytter ut

$$\sin^2 y = \frac{1}{2}(1 - \cos 2y), \tag{8}$$

og får

$$\begin{aligned}
\int y^2 \sin^2 y \, dy &= \int y^2 \frac{1}{2}(1 - \cos 2y) \, dy \\
&= \frac{1}{2} \int (y^2 - y^2 \cos 2y) \, dy \\
&= \frac{1}{2} \left(\int y^2 \, dy - \int y^2 \cos 2y \, dy \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} y^3 - \left[\frac{2}{2^2} y \cos 2y - \frac{2 - 2^2 y^2}{2^3} \sin 2y \right] \right) + C \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{2} y \cos 2y + \frac{1 - 2y^2}{2^2} \sin 2y \right) + C \\
&= \frac{1}{6} y^3 - \frac{1}{4} y \cos 2y + \frac{1}{8}(1 - 2y^2) \sin 2y + C,
\end{aligned} \tag{9}$$

hvor vi har brukt fra Rottmann at

$$\int y^2 \cos ay \, dy = \frac{2}{a^2} y \cos ay - \frac{2 - a^2 y^2}{a^3} \sin ay + C, \tag{10}$$

med $a = 2$. Vi kunne også brukt delvis integrasjon.

Forventningsverdien til bevegelsesmengden, $\langle p \rangle$, er da

$$\langle p \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = 0, \tag{11}$$

fordi forventningsverdien til posisjonen er tidsuavhengig. Dette er noe som alltid er tilfelle for stasjonære tilstander.[3]

Forventningsverdien til p^2 er gitt fra

$$\begin{aligned}
\langle p^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_n(x) \, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi_n(x) \, dx,
\end{aligned} \tag{12}$$

[3]Ikke gjør utregningen direkte fra operatoren for p, dette er unødvendig arbeid! Moralen her er litt som følger: av og til krever oppgaver i dette kurset mye regning, men noen ganger kan man slippe unna med slett ingenting. Så tenk før du integrerer!

hvor vi igjen har eliminert eksponentialfaktorene. Vi kan nå gjøre et lurt triks hvor vi skaffer oss den tids-uavhengige SL inne i integralet:

$$\begin{aligned}
\langle p^2 \rangle &= 2m \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x^2} \right) dx \\
&= 2m \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) E_n \psi_n(x)\, dx \\
&= 2mE_n \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)|^2\, dx \\
&= 2mE_n, \qquad (13)
\end{aligned}$$

hvor vi har brukt at ψ_n skal være en løsning av den tids-uavhengige SL (TUSL) på inne i brønnen der $V(x) = 0$, altså likning [2.20] i Griffiths:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x^2} = E_n \psi_n(x), \qquad (14)$$

og at disse er normert. Da får vi til slutt

$$\langle p^2 \rangle = 2mE_n = \left(\frac{n\pi\hbar}{a} \right)^2, \qquad (15)$$

hvor vi har brukt at energien til de stasjonære tilstandene er

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}. \qquad (16)$$

Her kunne vi alternativt brukt direkte at $\hat{H} = \hat{p}^2/2m$ når potensialet forsvinner inne i boksen, slik at $\hat{p}^2 = 2m\hat{H}$. Sammen med egenverdilikningen $\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$ gir det $\langle p^2 \rangle = \langle \hat{p}^2 \rangle = 2m\langle \hat{H} \rangle = 2mE_n$, en veldig rask måte å finne svaret på!

Vi sjekker Heisenbergs uskarphetsrelasjon ved å beregne variansen til x og p:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = a^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2(n\pi)^2} \right] - \left(\frac{a}{2} \right)^2 = a^2 \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{2(n\pi)^2} \right], \qquad (17)$$

$$\sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \left(\frac{n\pi\hbar}{a} \right)^2. \qquad (18)$$

Dette gir

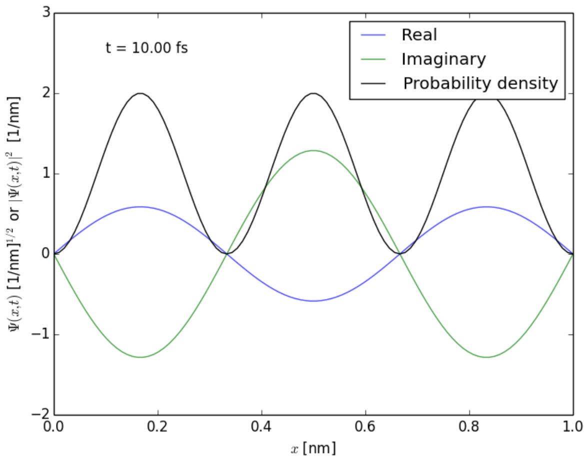
$$\sigma_x \sigma_p = a \sqrt{\left[\frac{1}{12} - \frac{1}{2(n\pi)^2} \right]} \cdot \frac{n\pi\hbar}{a} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{(n\pi)^2}{3} - 2}. \qquad (19)$$

Uttrykket innenfor rottegnet er alltid større enn en, slik at Heisenbergs uskarphetsrelasjon er oppfylt. Det er tilstanden $n = 1$ som kommer nærmest grensen med

$$\sigma_x \sigma_p = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{\pi^2}{3} - 2} \simeq 1.136 \frac{\hbar}{2}. \qquad (20)$$

b) Animér tidsutviklingen av $\Psi_{n=3}(x,t)$ numerisk med $a = 1$ nm og $m = 0.511\text{MeV/c}^2$. I innleveringen, vis et plot ved tiden $t = 10$ fs, som viser reell og imaginær komponent for $\Psi_{n=3}$, samt sannsynlighetstettheten.

Svar: Du finner to alternative `python` programmer (wave_o5.py og wave_o5_animate.py) vedlagt som animerer funksjonenes tidsutvikling.



Figur 1: Reell, imaginær og kvadratet av bølgefunksjonen som funksjon av posisjon x. Tidspunktet er tatt ved $t = 10$ fs (femtosekunder).

Oppgave 4 Sannsynlighet for å måle energi-egenverdi

En partikkel med masse m i den uendelige brønnen med vidde a begynner i venstre halvdel av brønnen, og kan ved tiden $t = 0$ finnes med like stor sannsynlighet ved alle posisjoner i den halvdelen.

a) Hva er den initielle bølgefunksjonen $\Psi(x,0)$? (Anta at den er reell. Ikke glem å normalisere den.)

Svar: Den initielle bølgefunksjonen må ha en flat, eller uniform, fordeling i intervallet $0 \le x \le a/2$, og være null ellers:

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A, & 0 \le x \le \frac{a}{2} \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} . \tag{21}$$

Vi finner A ved normalisering

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,0)|^2 \, dx = \int_0^{\frac{a}{2}} |A|^2 \, dx = \frac{a}{2}|A|^2 = 1, \tag{22}$$

som gir (vi velger en reell konstant) $A = \sqrt{2/a}$.

b) Hva er sannsynligheten for at en måling av energien gir akkurat verdien $\pi^2\hbar^2/2ma^2$?

Svar: Energien $E_1 = \pi^2\hbar^2/2ma^2$ er energien til den laveste stasjonære tilstanden. Denne har sannsynlighet $P_1 = |c_1|^2$ i en måling. Vi må altså bestemme c_1 for vår initialbetingelse $\Psi(x,0)$ i oppgave **a)**. Dette gjøres ved **Fouriers triks**, vi integrerer initialbetingelsen multiplisert med bølgefunksjonen for den laveste stasjonære tilstanden:[4]

$$\begin{aligned}
c_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x)\Psi(x,0)\,dx \\
&= \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) A\,dx \\
&= \frac{2}{a}\left[-\frac{a}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right]_0^{\frac{a}{2}} \\
&= \frac{2}{a}\left[-\frac{a}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{a}\frac{a}{2}\right) + \frac{a}{\pi}\right] \\
&= \frac{2}{\pi}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Sannsynligheten for å finne partikkelen med energi E_1 er da $P_1 = |c_1|^2 = \frac{4}{\pi^2} \simeq 0.405$.

C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk)

Oppgave 5 Tidsutvikling av partikkel i boks (fra Griffiths Kap.2)

En partikkel i den uendelige dype kvadratiske brønnen har som starttilstand en bølgefunksjon som er en lik blanding av de to første stasjonære tilstandene:

$$\Psi(x,0) = A[\psi_1(x) + \psi_2(x)]. \tag{24}$$

a) Normaliser $\Psi(x,0)$. (Det vil si: finn A. Det forenkler regningen om du utnytter ortonormaliteten til ψ_1 og ψ_2. Husk at når bølgefunksjonen er normalisert ved $t = 0$ så vil den forbli normalisert — sjekk dette eksplisitt etter at du har gjort oppgave **b)** dersom du er i tvil.)

Svar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,0)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2(\psi_1^*\psi_1 + \psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2)\,dx$$

[4] Vi sier ofte, i likhet med vektorterminologi, at vi projiserer ut komponenten av $\Psi(x,0)$ langs $\psi_1(x)$.

$$
\begin{aligned}
&= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_1^*\psi_1 + \psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2)\, dx \\
&= |A|^2(1+0+0+1) \\
&= 2|A|^2, \qquad (25)
\end{aligned}
$$

hvor vi har brukt ortonormaliteten til ψ_1 og ψ_2 for å gjøre integralene. Normaliseringskravet betyr at dette integralet må bli en, det vil si at vi kan velge $A = 1/\sqrt{2}$. Vi velger en reell og positiv normeringskonstant da fasen til normeringen ikke har fysisk betydning.

b) Finn $\Psi(x,t)$ og $|\Psi(x,t)|^2$. Uttrykk den siste som en cosinusfunksjon av tiden, som i eksempel 2.1 i Griffiths. For å forenkle resultatet, la $\omega \equiv \pi^2\hbar/2ma^2$.

Svar: Siden initialbetingelsen $\Psi(x,0)$ er oppgitt ved hjelp av de stasjonære tilstandene (løsninger av TUSL) så kjenner vi konstantene c_n i den generelle løsningen: $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($c_n = 0$ for $n > 2$). Den generelle løsningen er da

$$
\begin{aligned}
\Psi(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{-\frac{i}{\hbar}\hbar\omega t} + \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)e^{-\frac{i}{\hbar}2^2\hbar\omega t}\right] \\
&= \sqrt{\frac{1}{a}}e^{-i\omega t}\left[\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)e^{-3i\omega t}\right],
\end{aligned}
\qquad (26)
$$

hvor vi har brukt at

$$
E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = n^2\hbar\omega. \qquad (27)
$$

Sannsynlighetstettheten er

$$
\begin{aligned}
|\Psi(x,t)|^2 &= \Psi^*(x,t)\Psi(x,t) \\
&= \sqrt{\frac{1}{a}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)e^{3i\omega t}\right] \\
&\quad \times\sqrt{\frac{1}{a}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)e^{-3i\omega t}\right] \\
&= \frac{1}{a}\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{3i\omega t}\right. \\
&\quad \left. + \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)e^{-3i\omega t} + \sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right] \\
&= \frac{1}{a}\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)(e^{3i\omega t}+e^{-3i\omega t})\Bigg] \\
= \; & \frac{1}{a}\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right. \\
& \left. +2\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos(3\omega t)\right], \qquad (28)
\end{aligned}
$$

hvor vi har brukt at $\cos y = (e^{iy}+e^{-iy})/2$ fra Rottmann.

c) Finn $\langle x\rangle$. Legg merke til at denne forventningsverdien oscillerer som funksjon av tiden. Hva er vinkelfrekvensen til denne oscillasjonen? Hva er amplituden til oscillasjonen? (Hvis du får en amplitude større enn $a/2$, så er du på bærtur!)

Svar:

$$
\begin{aligned}
\langle x\rangle = \; & \int_{-\infty}^{\infty} x|\Psi(x,t)|^2\,dx \\
= \; & \frac{1}{a}\int_0^a x\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right. \\
& \left. +2\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos(3\omega t)\right]\,dx \qquad (29)
\end{aligned}
$$

Vi ser på de tre integrandene hver for seg:

$$
\int_0^a \frac{x}{a}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)dx = \frac{a}{4}, \qquad (30)
$$

$$
\int_0^a \frac{x}{a}\sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)dx = \frac{a}{4}, \qquad (31)
$$

hvor vi bruker resultatet av det første integralet i Oppgave 1, likning (3), som var uavhengig av n. Det tredje integralet gir

$$
\begin{aligned}
& \int_0^a \frac{2}{a}x\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)dx \\
= \; & \frac{1}{a}\int_0^a x\left[\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{a}x\right)\right]dx \\
= \; & \frac{1}{a}\left[\frac{1}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}\cos\frac{\pi}{a}x+\frac{x}{\frac{\pi}{a}}\sin\frac{\pi}{a}x-\frac{1}{\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2}\cos\frac{3\pi}{a}x-\frac{x}{\frac{3\pi}{a}}\sin\frac{3\pi}{a}x\right]_0^a \\
= \; & \frac{1}{a}\left[-\frac{1}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2}\right] \\
= \; & \frac{2}{a}\left[\left(\frac{a}{3\pi}\right)^2-\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\right]=\frac{2}{a}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\left[\frac{1}{9}-1\right]=-\frac{16}{9}\frac{a}{\pi^2}, \qquad (32)
\end{aligned}
$$

hvor vi har brukt forholdet

$$\cos\theta_1 - \cos\theta_2 = -2\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right), \tag{33}$$

fra Rottmann, med $\theta_1 = 3\pi x/a$ og $\theta_2 = \pi x/a$, for å unngå produktet av to sinusfunksjoner i integranden. Vi setter integralene sammen og får:

$$\langle x\rangle = \frac{a}{4} + \frac{a}{4} - \frac{16}{9}\frac{a}{\pi^2}\cos(3\omega t) = \frac{a}{2}\left[1 - \frac{32}{9\pi^2}\cos(3\omega t)\right]. \tag{34}$$

Vinkelfrekvensen til $\langle x\rangle$ er

$$3\omega = \frac{3\pi^2\hbar}{2ma^2}, \tag{35}$$

og amplituden (maksimumsutslaget for oscillasjonen) er

$$\frac{a}{2}\frac{32}{9\pi^2} = \frac{16a}{9\pi^2}. \tag{36}$$

d) Finn $\langle p\rangle$. (*Hint:* det finnes en rask måte!)

Svar:

$$\begin{aligned}\langle p\rangle &= m\frac{d\langle x\rangle}{dt} = m\frac{d}{dt}\frac{a}{2}\left[1 - \frac{32}{9\pi^2}\cos(3\omega t)\right] \\ &= \frac{16}{3\pi^2}ma\omega\sin(3\omega t) = \frac{16}{3\pi^2}ma\frac{\pi^2\hbar}{2ma^2}\sin(3\omega t) \\ &= \frac{8\hbar}{3a}\sin(3\omega t).\end{aligned} \tag{37}$$

e) Hvis du skulle måle energien til denne partikkelen, hvilke verdier ville du fått, og hva er sannsynligheten for å få hver av de? Finn forventningsverdien til H. Hvordan er denne sammenliknet med E_1 og E_2?

Svar: Målinger av energien kan bare gi en av egenverdiene E_n til Hamiltonoperatoren $\hat{H}\psi = E_n\psi$. Sannsynligheten for å få $E_1 = \pi^2\hbar^2/2ma^2$ er $|c_1|^2 = \frac{1}{2}$, for $E_2 = 2\pi^2\hbar^2/ma^2$ er den $|c_2|^2 = \frac{1}{2}$. Alle andre energier har null i sannsynlighet fordi $c_n = 0$ for $n > 2$. Forventningsverdien til Hamiltonoperatoren er

$$\langle\hat{H}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2E_n = |c_1|^2E_1 + |c_2|^2E_2 = \frac{5\pi^2\hbar^2}{4ma^2}, \tag{38}$$

altså gjennomsnittet av E_1 og E_2.

Tilslutt en liten kommentar om hva som foregår i denne oppgaven. Partikkelen begynner i tilstanden $\Psi(x, 0)$ som er en superponering av de to laveste (i energi) stasjonære tilstandene. Tidsutviklingen av partikkelen blir da en oscillasjon mellom disse tilstandene, noe målinger på partikkelen bærer preg av.