

FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2021

Løsningsforslag for Oblig 2

(Versjon 21. januar 2021)

Her er løsninger på A Diskusjonsoppgaver, B Regneoppgaver og C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk).

A Diskusjonsoppgaver om lysets partikkelegenskaper

Oppgave 1 En laserpeker med rødt lys og en annen med grønt lys er merket med samme effekt 2.0 mW. Produserer én av dem flere fotoner enn den andre? I så fall hvilken? Begrunn svaret.

Svar: Den røde produserer flere fotoner enn den andre. Siden laserpekerne yter samme effekt, vet vi at de sender ut like mye energi per sekund. Røde fotoner har mindre energi (lavere frekvens) per foton enn grønne ($E = h\nu$), og må derfor produsere flere fotoner for å komme opp i samme energi per sekund.

Oppgave 2 Lys med en gitt frekvens og intensitet treffer en metallflate, og du måler at elektroner sendes ut fra denne flata (fotoelektrisk effekt). Hva skjer hvis intensiteten til lyset øker?

- a) flere elektroner sendes ut fra metallflata
- b) elektroner med høyere kinetisk energi sendes ut fra metallflata
- c) ingenting forandrer seg

Begrunn svaret.

Svar: Alternativ a) er riktig. Hvis intensiteten til lyset øker, kommer det flere fotoner per sekund inn mot metallflata. Da vil flere elektroner bli sendt ut fra flata. Selv om intensiteten øker, øker ikke energien til hvert foton. Derfor får heller ikke hvert elektron tilført mer energi, og den kinetiske energien til elektronene vil ikke bli høyere (alternativ b).

Oppgave 3 Nå sender du lys med en annen gitt frekvens og intensitet mot metallflata. Denne gangen registrerer du at ingen elektroner sendes ut fra flata. Hva skjer nå hvis intensiteten til lyset øker?

- a) flere elektroner sendes ut fra metallflata
- b) elektroner med høyere kinetisk energi sendes ut fra metallflata
- c) ingenting forandrer seg

Begrunn svaret.

Svar: Alternativ c) er riktig. Ingenting forandrer seg. For at elektroner skal sendes ut fra metallflata, må energien i hvert foton være høy nok til rive et elektron løs fra atomet det er bundet til i metallet. Siden ingen elektroner ble sendt ut før intensiteten ble skrudd opp, betyr det at fotonenergien ikke var høy nok til å rive elektroner løs. Å øke intensiteten betyr at flere fotoner sendes inn, men siden ett foton går til å rive løs ett elektron hjelper det ikke å få flere fotoner. Et enkelt foton må ha nok energi.

Oppgave 4 I fotoelektrisk effekt blir hvert foton fullstendig absorbert av metallflata. Hva brukes og/eller omdannes fotonenergien til?

Svar: Energien går til å rive løs elektronet fra atomkjernen (overkomme coulomb-potensialet) og resten går til å gi elektronet kinetisk energi.

Oppgave 5 På hvilken måte tvang eksperimenter med fotoelektrisk effekt fram en partikkelforståelse av lys? Hvilke resultater er uforenelige med en klassisk bølgeforståelse av lys? Einstein publiserte banebrytende arbeid med denne forståelsen av fotoelektrisk effekt i 1905, og fikk Nobelprisen for det i 1921.

Svar: Tre resultater fra fotoelektrisk effekt er uforenelige med en klassisk bølgeforståelse av lys: (i) Den kinetiske energien til de utsendte elektronene er den samme for en gitt frekvens i lyset, uansett intensitet. I følge klassisk fysikk burde høy intensitet gi større kinetisk energi. (ii) Hvis frekvensen er lav blir det ikke sendt ut noen elektroner. Klassisk sett burde det gå an å rive elektroner løs fra metallet ved å ha høy nok intensitet i lyset, uavhengig av frekvensen (og dermed fotonenergien). (iii) Det blir ikke observert noen forsinkelse fra lyset treffer flata til elektronene begynte å sendes ut. Klassisk sett skulle materialet trenge litt tid fra det begynner å absorbere stråling til elektronene sendes ut.

Oppgave 6 I kompendiet s. 31 står det at elektromagnetisk stråling viser både partikkel- og bølgeegenskaper, og at Compton-spredning oppviser begge deler i samme eksperiment. Hva er det med Compton-eksperimentet som viser at lys har bølgeegenskaper og hva er det som viser at det har partikkelegenskaper?

Svar: I Compton-spredning avsløres at fotonet har en bevegelsemengde ($p = h\nu/c$) gjennom en beskrivelse at et foton kolliderer slik som en partikkel med et elektron. I målingen av bølgelengden til fotonet, bruker vi et Bragg-spektrometer. Prinsippet her er basert på klassisk beskrivelse av lyset som elektromagnetiske bølger som interfererer.

B Regneoppgaver

Oppgave 7 Arbeidsfunksjon og effekt

- a) Den fotoelektriske arbeidsfunksjonen for kalium (K) er 2.0 eV. Anta at lys med en bølgelengde på 360 nm ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) faller på kaliumet. Finn stoppepotensialet for fotoelektronene, den kinetiske energien og hastigheten for de hurtigste av de emitterte elektronene. *Hint:* Det kan være lurt å bruke $0.511 \text{ MeV}/c^2$ for elektronets hvilemasse, og oppgi hastigheten som multiplum av c .

Svar: Den maksimale kinetiske energien for elektronene er gitt ved

$$K_{\text{maks}} = h\nu - \omega_0 = \frac{hc}{\lambda} - \omega_0, \quad (1)$$

der ω_0 er arbeidsfunksjonen og λ er bølgelengden. For lys er som kjent hastigheten gitt ved bølgelengden og frekvensen som $c = \lambda\nu$. Dette gir

$$K_{\text{maks}} = \frac{1240 \text{ nm eV}}{360 \text{ nm}} - 2.0 \text{ eV} = 1.4 \text{ eV}. \quad (2)$$

Her har vi brukt den meget nyttige konstanten $hc = 1240 \text{ nm eV}$, som det er vel verdt å huske. Det motsvarende stoppepotensialet (som bremser ned elektronene til de står i ro) er da 1.4 volt, og den maksimale hastigheten (ikke-relativistisk) er gitt fra $K_{\text{maks}} = \frac{1}{2}m_e v_{\text{maks}}^2$, som løst for hastigheten gir

$$v_{\text{maks}} = \sqrt{\frac{2K_{\text{maks}}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2.8 \text{ eV}}{0.511 \text{ MeV}/c^2}} = 2.3 \cdot 10^{-3} c. \quad (3)$$

Hastigheten er altså lang unna der vi må regne med relativistiske effekter.

- b) En uniform monokromatisk lysstråle med bølgelengde 400 nm faller på et materiale med arbeidsfunksjon på 2.0 eV, og med en intensitet på $3.0 \times 10^{-9} \text{ W m}^{-2}$. Anta at materialet reflekterer 50% av den innfallende stråle, og at 10% av de absorberte fotoner fører til et emittert elektron. Finn antall elektroner emittert per kvadratmeter og per sekund, den absorberte energi per kvadratmeter og per sekund, samt den kinetiske energi for fotoelektronene.

Svar: Energien per foton i strålen er

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ nm eV}}{400 \text{ nm}} = 3.1 \text{ eV}. \quad (4)$$

Det vil si at antall fotoner som treffer en kvadratmeter per sekund er totalintensiteten $3.0 \times 10^{-9} \text{ W m}^{-2}$ delt på energien til hvert foton $3.1 \text{ eV} = 4.97 \times 10^{-19} \text{ J}$, som gir 6.0×10^9 fotoner/ m^2s . Siden bare 5% av fotonene leder til et emittert elektron er antall elektroner emittert per sekund og per kvadratmeter 3.0×10^8 . Den absorberte energien er 50% av totalintensiteten, altså $1.5 \times 10^{-9} \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1}$, og den maksimale kinetiske energi til fotoelektronene er gitt ved (1) som gir

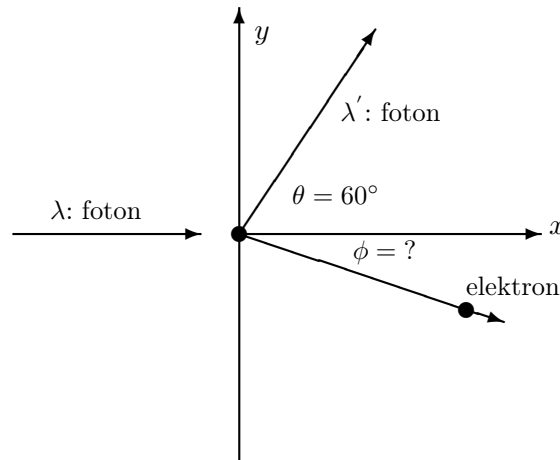
$$K_{\text{maks}} = \frac{1240 \text{ nm eV}}{400 \text{ nm}} - 2.0 \text{ eV} = 1.1 \text{ eV}. \quad (5)$$

Oppgave 8 Kinematikk i Comptonspredning

Et foton med bølglengde $\lambda = 1.00 \times 10^{-11} \text{ m}$ treffer et fritt elektron i ro. Fotonet blir spredt i en vinkel θ , og får en bølglengdeforandring gitt ved Comptons formel

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \theta),$$

hvor Comptonbølglengden er $\lambda_c = 2.426 \times 10^{-12} \text{ m}$. I denne oppgaven skal vi bare se på det som observeres i en vinkel $\theta = 60^\circ$ (se Fig. 1). Energi og



Figur 1: Comptonspredning i vinkel $\theta = 60^\circ$.

bevegelsesmengde beregningene skal uttrykkes ved enheten eV.

- a) Beregn energien og bevegelsesmengden til det innkommende fotonet.
Hint: Det kan være lurt å bruke enhet keV/c for bevegelsesmengden.

Svar: Energi til innkommende foton:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ nm eV}}{1.00 \times 10^{-2} \text{ nm}} = 124 \text{ keV}. \quad (6)$$

Bevegelsesmengde til innkommende foton:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda c} = \frac{1240 \text{ nm eV}}{1.00 \times 10^{-2} \text{ nm} \cdot c} = 124 \text{ keV}/c. \quad (7)$$

Dette siste er det selvfølgelig ikke nødvendig å gjøre noe arbeid for å regne ut, all energien til fotonet må jo komme fra bevegelsesmengden siden det ikke har masse.

- b) Finn bølgelengden, bevegelsesmengde og den kinetiske energien til det spredte fotonet.

Svar: Det spredte fotonet har bølgelengde λ' gitt ved Comptons formel:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda + \lambda_c (1 - \cos \theta) \\ &= 1.00 \times 10^{-2} \text{ nm} + 2.426 \times 10^{-3} \text{ nm} \cdot (1 - \cos 60^\circ) \\ &= 1.12 \times 10^{-2} \text{ nm}. \end{aligned} \quad (8)$$

Dette gir energi (som er rent kinetisk)

$$E' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{1240 \text{ nm eV}}{1.12 \times 10^{-2} \text{ nm}} = 111 \text{ keV}, \quad (9)$$

og bevegelsesmengde $p' = 111 \text{ keV}/c$.

- c) Finn den kinetiske energien, bevegelsesmengden og spredningsvinkelen for elektronet.

Svar: Fra konservering av energi er den totale energien til elektronet etter kollisjonen:

$$E'_e = E + E_e - E' = E + m_e c^2 - E', \quad (10)$$

hvor E er energien til fotonet før kollisjon, $E_e = m_e c^2$ er hvileenergien til elektronet som er i ro før kollisjonen, og E' er energien til fotonet etter kollisjonen. Siden (relativistisk) den totale energien E'_e er den kinetiske energien K'_e pluss hvileenergien $m_e c^2$, så er den kinetiske energien for elektronet fra (10) gitt som

$$K'_e = E'_e - m_e c^2 = E - E' = 124 \text{ keV} - 111 \text{ keV} = 13 \text{ keV}. \quad (11)$$

Bevegelsesmengden til elektronet er gitt fra formelen $E_e'^2 = p_e'^2 c^2 + m_e^2 c^4$. Når vi løser for bevegelsesmengden får vi:¹

$$p'_e = \sqrt{\frac{E_e'^2 - m_e^2 c^4}{c^2}}$$

¹Vi kan også finne bevegelsesmengden fra å kreve konservering av bevegelsesmengde. Vi må da se på komponenten av bevegelsesmengden i to retninger.

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{(K'_e + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4}{c^2}} \\
&= \sqrt{\frac{K_e'^2 + 2K'_e m_e c^2}{c^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(13 \text{ keV})^2 + 2 \cdot 13 \text{ keV} \cdot 511 \text{ keV}}{c^2}} \\
&= 116 \text{ keV}/c.
\end{aligned} \tag{12}$$

Tilslutt finner vi vinkelen ϕ ved å se på konservering av bevegelsesmengde i retningen til det innkommende fotonet. I den retningen må vi ha (se Fig. 1):

$$p = p' \cos \theta + p'_e \cos \phi. \tag{13}$$

Vi løser for $\cos \phi$ og får:

$$\cos \phi = \frac{p - p' \cos \theta}{p'_e} = \frac{124 \text{ keV}/c - 111 \text{ keV}/c \cdot \cos 60^\circ}{116 \text{ keV}/c} = 0.591, \tag{14}$$

som tilsvarer en vinkel på $\phi = 53.8^\circ$.

C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk)

Oppgave 9 Oppgave 3.3 i Kompendiet

Et atom med masse M , opprinnelig i ro, emitterer et foton ved en overgang fra et energinivå E_1 til et annet nivå E_2 . Det sies vanligvis at det emitterte fotonets energi er gitt ved $h\nu = E_1 - E_2$, der ν er fotonets frekvens og h er Plancks konstant. Imidlertid vil en liten del av energien overføres til atomet som kinetisk energi (rekylvirkning), og fotonet får derfor en tilsvarende mindre energi: $h\nu = E_1 - E_2 - \Delta E$.

- a) Finn et uttrykk for denne korreksjonen ΔE . Gå ut fra at fotonet har en bevegelsesmengde lik $h\nu/c$.

Svar: Vi antar at fotonet har bevegelsesmengde $p_\gamma = h\nu/c$. Siden atomet opprinnelig lå i ro, så må bevaring av bevegelsesmengde gi at atomet må ha den samme bevegelsesmengden etter emisjonen, men motsatt rettet, $p_A = -h\nu/c$. Dette gir atomet en kinetisk energi som er:²

$$K_A = \frac{p_A^2}{2M} = \frac{h^2 \nu^2}{2Mc^2}. \tag{15}$$

²Vi antar her at energien involvert i rekylen er så liten at vi kan regne ikke-relativistisk på atomet. Det er rimelig fordi energier i overganger mellom atomnivåer er av størrelsesorden elektronvolt, mens atomets hvileenergi er av størrelsesorden megaelektronvolt. Hvileenergien Mc^2 er altså mye større enn energien til fotonet $h\nu$.

Denne energien kommer da til fratrekk i den energien fotonet får fra forskjellen mellom de to energinivåene. Altså er

$$\Delta E = \frac{(h\nu)^2}{2Mc^2}. \quad (16)$$

- b) Gjennomfør en tilsvarende diskusjon for det tilfellet at atomet absorberer et foton.

Svar: Ved absorpsjon av et foton med $p_\gamma = h\nu/c$ må tilsvarende atomet få en bevegelsesmengde $p_A = h\nu/c$ etter absorpsjon, og en kinetisk energi $\Delta E = (h\nu)^2/2Mc^2$. Det vil si at fotonet må ha en energi på $E_\gamma = h\nu = E_1 - E_2 + \Delta E$ for at overgangen skal skje.

- c) Regn ut den numeriske verdien av $\Delta E/h\nu$ for en overgang $E_1 - E_2$ i et kvikksølvatom som har masse lik $200 \times$ massen til et proton, der fotonet har bølgelengde $\lambda = 255$ nm.

Svar: For et atom med masse $M = 200m_p$, hvor m_p er protonmassen, har vi at

$$\frac{\Delta E}{h\nu} = \frac{\frac{(h\nu)^2}{2Mc^2}}{h\nu} = \frac{h\nu}{2Mc^2}, \quad (17)$$

der

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eVnm}}{255 \text{ nm}} = 4.86 \text{ eV}. \quad (18)$$

Da blir

$$\frac{\Delta E}{h\nu} = \frac{4.86 \text{ eV}}{2 \cdot 200 \cdot 938.3 \text{ MeV}/c^2 \cdot c^2} = 1.29 \times 10^{-11}. \quad (19)$$

Altså er korreksjonen på grunn av rekyl svært liten i forhold til foton-energien.

Oppgave 10 Korreksjoner i hydrogenatomet

Anta at vi nå ser på hydrogenatomet som sender ut lys med typisk bølgelengde på 550 nm. Hvor mye rekylenergi ΔE vil atomet få på grunn av fotonutsendelsen i forhold til fotonets energi E , altså hva er størrelsenordenen av $\Delta E/E$. Sammenlikn dette med effekten av korreksjonen fra å bytte ut elektronmassen med **redusert masse**

$$\mu = \frac{m_e m_k}{(m_e + m_k)},$$

hvor m_e og m_k er massen til elektronet og kjernen. Hvilken korreksjon er størst, $\Delta E/E(\text{rekyl})$ eller $\Delta E/E(\text{redusert masse})$?

Svar: Konservering av bevegelsesmengde gjør at atomet må ha en rekyl med en bevegelsesmengde som er like stor som og motsatt rettet av bevegelsesmengden til fotonet, altså

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda c} = \frac{1240 \text{ nm eV}}{550 \text{ nm } c} = 2.25 \text{ eV}/c, \quad (20)$$

når vi antar at fotonet har en bølgelengde på $\lambda = 550 \text{ nm}$. Dette gir en kinetisk energi for atomet på³

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}, \quad (21)$$

hvor m er massen til atomet. Om vi tar hydrogenatomet som eksempel er $m = 938.8 \text{ MeV}/c^2$, og vi får at rekylen stjeler en kinetisk energi fra fotonet på

$$K = \frac{(2.25 \text{ eV}/c)^2}{2 \cdot 938.8 \text{ MeV}/c^2} = 2.70 \times 10^{-9} \text{ eV}. \quad (22)$$

Korreksjonen på energien er altså svært liten i forhold til den opprinnelige energien til fotonet.⁴

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{K}{h\nu} = \frac{K\lambda}{hc} = \frac{2.70 \times 10^{-9} \text{ eV} \cdot 550 \text{ nm}}{1240 \text{ nm eV}} \simeq 10^{-9}. \quad (23)$$

Til sammenligning er effekten fra en redusert masse⁵ gitt ved å erstatte elektronmassen med en redusert masse μ i uttrykket for den kvantiserte energien. Den kvantiserte energien er proporsjonal med elektronmassen i første potens, altså er $E(m_e) = Cm_e$, hvor C er en konstant. Dette gir en endring i energi på

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E(m_e) - E(\mu)}{E(m_e)} = \frac{m_e - \mu}{m_e} = 1 - \frac{\mu}{m_e}, \quad (24)$$

hvor den reduserte massen er

$$\mu = \frac{0.511 \text{ MeV}/c^2 \cdot 938.8 \text{ MeV}/c^2}{0.511 \text{ MeV}/c^2 + 938.8 \text{ MeV}/c^2} \simeq 0.5107 \text{ MeV}/c^2, \quad (25)$$

når vi bruker massen til protonet i hydrogenatomkjernen. Dette gir⁶

$$\frac{\Delta E}{E} = 1 - \frac{\mu}{m_e} = 1 - \frac{0.5107 \text{ MeV}/c^2}{0.511 \text{ MeV}/c^2} \simeq 6 \times 10^{-4}. \quad (26)$$

³Vi regner ikke-relativistisk siden atomer er så tunge i forhold til energien til fotonet.

⁴Vi lar her være å ta hensyn til at den reduserte fotonenergien gir en litt redusert bevegelsesmengde, som i sin tur gir litt mindre energitap til rekylen fordi denne effekten vil være særdeles minimal. Regn gjerne eksakt på det for å sjekke!

⁵Dette tar hensyn til at kjernen ikke er uendelig tung og derfor ikke er i ro, slik at vi har med et tolegemeprobem å gjøre. Se FYS-MEK1110.

⁶Hvorfor har vi beholdt en ekstra desimal i den reduserte massen? Jo, siden elektronmassen i praksis er redusert fra $0.5110 \text{ MeV}/c^2$ til $0.5107 \text{ MeV}/c^2$, så må vi det for ikke å kaste ut all presisjon i regningen ved å runde av.

Dette betyr at effekten fra redusert masse er omlag fem størrelsesordener større en rekyleffekten.