FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2021
Løsningsforslag for Oblig 1
(Versjon 13. januar 2021)

Her er løsninger på A Diskusjonsoppgaver, B Regneoppgaver og C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk).

A Diskusjonsoppgaver

Oppgave 1 Kontinuitet og kvantisering

a) I klassisk fysikk, hvilke av følgende fysiske størrelser er *kontinuerlig* fordelt og hvilke er diskrete, altså *kvantisert*?

(i) Bevegelsesmengde $\mathbf{p}$

(ii) Elektrisk ladning q

(iii) Energi E

Svar:

(i) Bevegelsesmengde er kontinuerlig fordelt

(ii) Elektrisk ladning er kvantisert

(iii) Energi er kontinuerlig fordelt

b) Vi flytter oss nå over i kvantefysikken. Hvilke av de fysiske størrelsene i **a**) er da *kontinuerlig* fordelt og hvilke kan være *kvantiserte*?

Svar:

(i) Bevegelsesmengde kan være kontinuerlig fordelt eller kvantisert, avhengig av systemet det er snakk om

(ii) Elektrisk ladning er fortsatt kvantisert

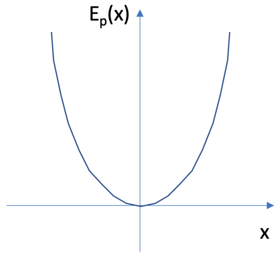
(iii) Energi kan være kontinuerlig fordelt eller kvantisert, avhengig av systemet det er snakk om

Kvantefysikken bryter med klassisk fysikk blant annet fordi bevegelsesmengde og energi ikke alltid er kontinuerlig fordelt, men kan være kvantisert.

c) Skisser en graf som angir

(i) Potensiell energi i ei fjær som funksjon av avstanden x fra likevektspunktet

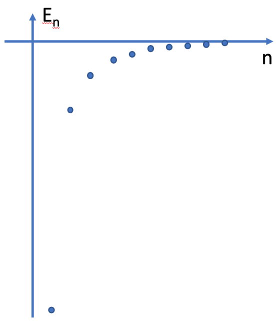
Svar: Kontinuerlig fordelte størrelser kan representeres som sammenhengende grafer. En graf som skal representere en kvantisert størrelse vil derimot ikke henge sammen, men ha brudd. Potensiell energi i ei fjær som funksjon av avstanden x fra likevekstpunktet representeres av en kontinuerlig graf i Fig. 1.



Figur 1: Kontinuerlig energipotensial for en fjær.

(ii) Energi til et elektron i et hydrogenatom som funksjon av energinivået n

Svar: Energien til et hydrogenatom som funksjon av energinivået n representeres av diskrete punkter siden energien er kvantisert, som vist i Fig. 2.



Figur 2: Kvantiserte energinivåer i hydrogenatomet.

Oppgave 2 Determinisme og statistisk fordeling

a) Hvilken informasjon trenger dere for å kunne beregne hvor en ball havner etter at den blir kasta? Hvor kommer eventuelle usikkerheter fra?

Svar: Et kast med en makroskopisk ball styres av Newtons mekanikk. Vi trenger å kjenne startbetingelsene, slik som utgangsfart (både størrelse og retning), utgangsposisjon og ballens masse. Luftmotstand (og kanskje vind) kan spille inn i større eller mindre grad, og vi trenger gravitasjonskonstanten. Da kan vi, ved hjelp av Newtons lover, regne ut hvor ballen havner. Eventuelle usikkerheter skyldes hovedsakelig unøyaktighet i våre målinger av startbetingelsene. Fordi vi kan bestemme utfallet av enkelthendelser bare vi kjenner startbetingelsene, sier vi at klassisk fysikk er deterministisk.

b) Tenk dere at det ikke er en ball som kastes, men et elektron som skytes ut. Hvilken informasjon trenger dere nå for å si noe om hvor elektronet havner? Hvor kommer eventuelle usikkerheter fra nå?

Svar: Hvis vi i stedet for en makroskopisk ball skyter av sted et mikroskopisk elektron, er det fundamentalt annerledes. Vi trenger å kjenne noen startbetingelser da også, og vi må vite om elektronet kan treffe noe på veien eller bli påvirket av et ytre elektrisk eller magnetisk felt. Også der har vi usikkerheter på grunn av unøyaktighet i målinger. Men i tillegg er det en grunnleggende uskarphet i naturen på mikronivå. Den sier at elektronet ikke har veldefinert posisjon og veldefinert fart/bevegelsesmengde samtidig (dette er uttrykt i Heisenbergs uskarphetsrelasjon, som vi kommer tilbake til senere). Da går det heller ikke an å si akkurat hvor elektronet kommer til å havne. Kvantefysikken er derfor ikke deterministisk for enkelthendelser. Derimot kan kvantefysikken forutsi den statistiske fordelingen av mange hendelser veldig nøyaktig. Kvantefysikken bryter med klassisk fysikk fordi den ikke har determinisme for enkelthendelser, men en statistisk determinisme for mange hendelser.

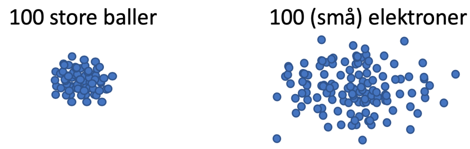
c) Lag en skisse som viser treffpunkt på en vegg for

(i) 100 baller som kastes helt likt etter hverandre mot veggen

(ii) 100 elektroner som skytes ut helt likt etter hverandre mot veggen

Hva er forskjellen på (i) og (ii)?

Svar: En skisse av tilfelle (i) og (ii) er vist i Fig. 3.



Figur 3: Store baller og små elektroner.

Forskjellen på (i) og (ii) er at de 100 ballene har truffet tilnærmet på samme sted, mens de 100 elektronene har truffet veggen med en spredning gitt av kvantemekanikken.

B Regneoppgaver

Oppgave 3 Lek med komplekse tall

a) For hvert av de oppgitte komplekse tallene, beregn z^*, $|z|$ og $|z|^2$. Sjekk eksplisitt at $zz^* = |z|^2$.

Svar:

(i) Med $z = i$ er:
$z^* = i^* = -i$
$|z| = |i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$
$|z|^2 = |1|^2 = 1$
$z \cdot z^* = i \cdot (-i) = -(-1) = 1 = |z|^2$

(ii) Med $z = 3 + 4i$ er:
$z^* = (3 + 4i)^* = 3 - 4i$
$|z| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
$|z|^2 = |5|^2 = 25$
$z \cdot z^* = (3 + 4i)(3 - 4i) = 3^2 + 4^2 = 25 = |z|^2$

(iii) Med $z = -3$ er:
$z^* = -3^* = -3$
$|z| = |-3| = 3$
$|z|^2 = |-3|^2 = 3^2 = 9$
$z \cdot z^* = (-3) \cdot (-3) = 9 = |z|^2$

(iv) Med $z = 1 + i$ er:
$z^* = (1 + i)^* = 1 - i$
$|z| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
$|z|^2 = |\sqrt{2}|^2 = 2$
$z \cdot z^* = (1 + i)(1 - i) = 1^2 + 1^2 = 2 = |z|^2$

b) Forenkle de oppgitte uttrykkene og skriv resultatet på formen $a + bi$.
Hint: Bruk relasjonen $z_1/z_2 = z_1 z_2^*/|z_2|^2$.

Svar:

(i)

$$\frac{3+4i}{1-2i} = \frac{(3+4i)(1+2i)}{1^2+2^2} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i.$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)(\sqrt{3}-i)} &= \frac{(\sqrt{3}+i)^2(1+i)}{(1-i)(1+i)(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} \\
&= \frac{(3-1+2\sqrt{3}i)(1+i)}{(1^2+1^2)(3+1^2)} \\
&= \frac{(1+\sqrt{3}i)(1+i)}{4} = \frac{(1-\sqrt{3}+\sqrt{3}i+i)}{4} \\
&= \frac{1}{4}(1-\sqrt{3}) + \frac{1}{4}(1+\sqrt{3})i.
\end{aligned}$$

c) Skriv hvert av de følgende komplekse tallene på polarform $z = r\exp(i\theta)$, det vil si bestem r og θ. *Hint:* Bruk relasjonen $\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ (**Eulers formel**). Velg θ slik at $-\pi < \theta \leq \pi$.

Svar: Vi har at $|z| = |re^{i\theta}| = r$. Med $z = a + ib$ er $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ slik at $r = \sqrt{a^2+b^2}$. Fra Eulers formel er $\frac{a}{r} = \cos\theta$ og $\frac{b}{r} = \sin\theta$ slik at $\theta = \arccos\frac{a}{r} = \arcsin\frac{b}{r}$.

(i) Med $z = 2i$ er:
$r = |z| = \sqrt{0^2+2^2} = 2$
$\theta = \arcsin\frac{b}{r} = \arcsin\frac{2}{2} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$
$z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

(ii) Med $z = -6 + 6\sqrt{3}i$ er:
$r = |z| = \sqrt{(-6)^2 + (6\sqrt{3})^2} = 12$
$\theta = \arccos\frac{a}{r} = \arccos(-\frac{6}{12}) = \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}\pi$
$z = 12e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

(iii) Med $z = -1$ er:
$r = |z| = \sqrt{(-1)^2+0^2} = 1$
$\theta = \arccos\frac{b}{r} = \arccos\left(-\frac{1}{1}\right) = \pi$
$z = e^{i\pi}$.

d) Finn $z = z_1 z_2$ når:

(i) $z_1 = 2e^{-i\pi}$ og $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$.

(ii) $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{5}}$ og $z_2 = e^{i\frac{\pi}{5}}$.

Hva skjer geometrisk (i det komplekse planet) med et komplekst tall dersom du multipliserer det med $e^{i\frac{\pi}{2}}$?

Svar:

(i) $z = 2e^{-i\pi} \cdot 3e^{i\frac{\pi}{3}} = 6e^{-i\pi+i\frac{\pi}{3}} = 6e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

(ii) $z = e^{-i\frac{\pi}{5}}e^{i\frac{\pi}{5}} = e^{-i\frac{\pi}{5}+i\frac{\pi}{5}} = e^0 = 1$.

Dersom du multipliserer et komplekst tall med $e^{i\frac{\pi}{2}}$ så vil det roteres 90° mot klokka i det komplekse planet, mens lengden forblir den samme. Vi sier at fasen roteres.

Oppgave 4 Et par viktige differensialligninger

a) Skriv ned den generelle løsningen til differensialligningen

$$\frac{df(x)}{dx} = bf(x), \tag{1}$$

hvor b er en konstant. Vi setter så følgende initialbetingelse: $f(0) = 1$ og $f'(0) = 3$. Bruk dette til å bestemme de to ukjente konstantene og skriv ned løsningen for $f(x)$ med disse initialbetingelsene.

Svar: Den generelle løsningen er

$$f(x) = Ae^{bx}, \tag{2}$$

hvor A er en integrasjonskonstant. Vi kan enten vise dette gjennom en eksplisitt løsning ved å bruke at Likn. (1) er en separabel differensialligning, eller vi kan sette inn Likn. (2) i ligningen etter å ha gjettet at dette er svaret og vise at dette er *en* løsning, for så å argumentere at en førsteordens differensialligning bare har en lineært uavhengig løsning, slik at dette må være den generelle løsningen.

Løsning ved separasjon går som følger:

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= bf \\
\frac{1}{f}df &= b\,dx \\
\int \frac{1}{f}df &= \int b\,dx \\
\ln f &= bx + C \\
e^{\ln f} &= e^{bx+C} \\
f(x) &= Ae^{bx}, \qquad (3)
\end{aligned}$$

hvor $A = e^C$ er en integrasjonskonstant.

Gitt initialbetingelsene er $f(0) = A \cdot e^{b\cdot 0} = A = 1$ og $f'(0) = b \cdot A \cdot e^{b\cdot 0} = b \cdot A = 3$. Dette gir $A = 1$ og $b = 3$. Løsningen gitt initialbetingelsene er da:

$$f(x) = e^{3x}. \tag{4}$$

b) Vi skal så se på differensialligningen

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = af(x), \tag{5}$$

der a er en konstant. Anta først at a er positiv. Vis at den generelle løsningen kan skrives som

$$f(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}, \tag{6}$$

der A og B er vilkårlige konstanter.

Hva kan vi si om konstanten A dersom vi krever at $f(x)$ skal gå mot null for $x \to \infty$? Altså,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0. \tag{7}$$

Dette kalles en **randbetingelse** for funksjonen f fordi den gir verdien for $f(x)$ ved grensen (randen) av hvor funksjonen er definert.

Hva blir B dersom vi i stedet krever den randbetingelsen at $f(x)$ skal gå mot null for $x \to -\infty$? Skriv til slutt om Likn. (6) som en lineærkombinasjon av hyperbolske funksjoner, $\sinh(\sqrt{a}x)$ og $\cosh(\sqrt{a}x)$, i stedet for eksponentialfunksjonen.

Svar: Vi viser at Likn. (6) er en løsning ved å sette inn:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(\sqrt{a}Ae^{\sqrt{a}x} - \sqrt{a}Be^{-\sqrt{a}x}) \\ &= aAe^{\sqrt{a}x} + aBe^{-\sqrt{a}x} \\ &= af(x). \end{aligned} \tag{8}$$

Dette må da være den generelle løsningen, fordi en slik andreordens differensialligning bare har to lineært uavhengige løsninger, her $e^{\sqrt{a}x}$ og $e^{-\sqrt{a}x}$.

For $x \to \infty$ må vi ha $A = 0$ fordi vi ellers ville fått $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Likeledes for $x \to -\infty$ må vi ha $B = 0$.

Fra Rottmann har vi at

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{og} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{9}$$

Ved å addere og subtrahere de to funksjonene får vi henholdsvis

$$\sinh(x) + \cosh(x) = e^x \quad \text{og} \quad \cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}. \tag{10}$$

som gir

$$\begin{aligned} f(x) &= A[\sinh(\sqrt{a}x) + \cosh(\sqrt{a}x)] + B[\cosh(\sqrt{a}x) - \sinh(\sqrt{a}x)] \\ &= (A - B)\sinh(\sqrt{a}x) + (A + B)\cosh(\sqrt{a}x). \end{aligned} \tag{11}$$

c) Til slutt betrakter vi tilfellet $a < 0$. Hvordan modifiseres løsningen vi ga i Likn. (6)? Skriv ned den generelle løsningen for dette tilfellet, både uttrykt ved eksponentialfunksjoner og uttrykt ved hjelp av trigonometriske funksjoner $\sin(\sqrt{|a|}x)$ og $\cos(\sqrt{|a|}x)$. *Hint:* $a < 0$ vil si at $a = -|a|$.

Svar: Med negative a er argumentet til eksponetialfunksjonene rent imaginært. Vi skriver $\sqrt{a} = \sqrt{-|a|} = i\sqrt{|a|}$. Den generelle løsningen blir da:

$$f(x) = Ae^{i\sqrt{|a|}x} + Be^{-i\sqrt{|a|}x}. \tag{12}$$

For å uttrykke løsningen ved trigonometrisk funksjoner kan vi igjen bruke fra Rottmann

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{og} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \tag{13}$$

som gir

$$\cos x + i \sin x = e^{ix} \quad \text{og} \quad \cos x - i \sin x = e^{-ix}, \tag{14}$$

(vi kunne eventuelt brukt Eulers formel direkte) og innsatt i løsningen får vi

$$\begin{aligned} f(x) &= A\left(\cos\sqrt{|a|}x + i\sin\sqrt{|a|}x\right) + B\left(\cos\sqrt{|a|}x - i\sin\sqrt{|a|}x\right) \\ &= (A + B)\cos\sqrt{|a|}x + (A - B)i\sin\sqrt{|a|}x. \end{aligned} \tag{15}$$

Oppgave 5 Litt integralregning

a) Finn følgende **gaussiske integraler** (det er lov å bruke Rottmann):

Svar:

(i)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-4x-1}dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-4x-4+4-1}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+4x+4)}e^3dx \\ &= e^3\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+2)^2}dx \\ &= e^3\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = e^3\sqrt{\pi} \qquad (16)\end{aligned}$$

Her har vi byttet variabel $y = x + 2$, $dx = dy$, og funnet

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \qquad (17)$$

for $\lambda = 1$ i Rottmann.

(ii)

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty} xe^{-2x^2}dx &= \frac{1}{2}\cdot 2^{-(1+1)/2}\cdot\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\cdot\Gamma(1) = \frac{1}{4} \qquad (18)\end{aligned}$$

Hvor vi har brukt (fra Rottmann)

$$\int_{0}^{\infty} x^k e^{-\lambda x^2}dx = \frac{1}{2}\lambda^{-(k+1)/2}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right), \qquad (19)$$

med $k = 1$ og $\lambda = 2$, og $\Gamma(1) = 1$. Dog finnes det en betydeligere enklere måter å gjøre dette integralet på: tenk på hva du må derivere for å få xe^{-2x^2}.

b) Løs følgende integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz. \qquad (20)$$

Hint: gjør om til **sfæriske koordinater** og bruk den (meget nyttige) formelen

$$\int_{0}^{\infty} x^n e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha^{n+1}}\,n!, \qquad (21)$$

der n er et heltall. Denne formlen er av den irriterende typen som gjemmer seg i Rottmann, den er nemlig ikke blant de bestemte integralene. Du finner den skjult aller bakerst som en **Laplace-transformasjon**, men om du ikke vet at det er det den er, så kan den være lur å notere seg.

Svar: Vi gjør om til sfæriske koordinater der

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{og} \quad dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta\, dr\, d\phi\, d\theta. \tag{22}$$

Dette gir

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx\ dy\ dz \\
= & \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-2r} r^2 \sin\theta\, dr\, d\phi\, d\theta \\
= & \ 2 \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\infty} e^{-2r} r^2 dr \\
= & \ 4\pi \cdot \frac{1}{2^{2+1}} \cdot 2! = \pi,
\end{aligned} \tag{23}$$

hvor vi har brukt (21), samt at $\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 2$ og $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$.

C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk)

Oppgave 6 Oppgave 2.2 fra Kompendiet

Anta at sola med radius 6.96×10^8 m stråler som et sort legeme. Av denne strålingen mottar vi 1370 W m^{-2} her på jorda i en avstand av 1.5×10^{11} m. Jorda har en radius på 6378 km.

a) Beregn temperaturen til sola.

Svar: Solas utstrålte energi per sekund per kvadratmeter, som et sort legeme, er gitt ved Stefan-Boltzmanns lov: $M(T) = \sigma T^4$. Den utstrålte energien fra sola per sekund F_s blir da

$$F_s = M(T) \cdot 4\pi r_s^2,$$

hvor r_s er solas radius. Siden energi er konservert så må dette være det samme som den energien per sekund F_r som en finner i en annen radius r fra sola, som vi her setter lik avstanden til jorda. Denne er gitt ved $F_r = M_r(T) \cdot 4\pi r^2$, hvor $M_r(T)$ den energien man får fra sola per sekund per kvadratmeter ved avstanden r. Vi setter $F_s = F_r$ og løser for $M(T)$ som vi ikke kjenner:

$$\begin{aligned} M(T) &= M_r(T)\,\frac{4\pi r^2}{4\pi r_s^2} \\ &= M_r(T)\,\frac{r^2}{r_s^2} \\ &= 1370\ \mathrm{Wm^{-2}} \times \frac{(1.5\times 10^{11}\ \mathrm{m})^2}{(6.96\times 10^8\ \mathrm{m})^2} \\ &= 6.36\times 10^7\ \mathrm{Wm^{-2}}. \end{aligned} \tag{24}$$

Vi løser Stefan-Boltzmanns lov for temperturen T, og finner at temperaturen på sola er

$$T = \left[\frac{M(T)}{\sigma}\right]^{\frac{1}{4}} = \left[\frac{6.36\times 10^7\ \mathrm{Wm^{-2}}}{5.67\times 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}}\right]^{\frac{1}{4}} = 5800\ \mathrm{K}. \tag{25}$$

b) Anta at atmosfæren rundt jorda reflekterer 30 % av den innkommende stråling. Hvor mye energi fra solen absorberer den per sekund og per kvadratmeter?

Svar: Atmosfæren absorberer 70% av 1370 $\mathrm{W\,m^{-2}}$, altså 959 $\mathrm{W\,m^{-2}}$, men denne strålingen blir absorbert av en flate med areal πr_j^2, hvor r_j er jordas radius, som er 1/4 av jordas totale overflate $4\pi r_j^2$.[1] Totalt absorberes det altså 239.7 $\mathrm{W\,m^{-2}}$ på jorda.

c) For å være i termisk likevekt må jorda emittere like mye energi som den absorberer via atmosfæren hvert sekund. Anta at den stråler som et sort legeme. Finn temperaturen. Hva betyr drivhuseffekten ?

Svar: Siden jorda må emittere 239.7 $\mathrm{W\,m^{-2}}$ har den, som et sort legeme, fra Stefan-Boltzmanns lov, en temperatur på

$$T = \left[\frac{M(T)}{\sigma}\right]^{\frac{1}{4}} = \left[\frac{2.40\times 10^2\ \mathrm{Wm^{-2}}}{5.67\times 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}}\right]^{\frac{1}{4}} = 255\ \mathrm{K}, \tag{26}$$

eller rundt $-18°$ C. Drivhuseffekten sørger for at jorda er litt mere beboelig med en gjennomsnittstemperatur på rundt 14° C, gjennom at drivhusgasser absorberer stråling fra jorda og restråler den mot jordoverflaten.

[1] Merk at jorda i praksis er en skive med radius r_j sett fra sollysets side.

Oppgave 7   Løse integral ved hjelp av Fourier transformasjoner

Vis at:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{ma}}{\hbar}e^{-ma|x|/\hbar^2}e^{-ipx/\hbar}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{p_0^{3/2}}{p^2+p_0^2}, \tag{27}$$

hvor $p_0 = ma/\hbar$. *Hint:* Her er du nesten nødt til å bruke Rottmann. Se etter **Fourier transformasjoner** bakerst og regn med at du må jobbe hardt med å skifte navn på flere variabler.

Svar: Rottmann gir at

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ipx}\frac{\pi}{a}e^{-a|p|}dp=\frac{1}{x^2+a^2}. \tag{28}$$

Et rent skifte av navn på variablene, $x \leftrightarrow p$, gir[2]

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ipx}\frac{\pi}{a}e^{-a|x|}dx=\frac{1}{p^2+a^2}. \tag{29}$$

Dersom vi også bytter ut konstantene $a \to am/\hbar^2$ og $p \to p/\hbar$ i integralet får vi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ipx/\hbar}\frac{\pi\hbar^2}{am}e^{-am|x|/\hbar^2}dx=\frac{1}{(p/\hbar)^2+(am/\hbar^2)^2}. \tag{30}$$

Da er

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ipx/\hbar}\frac{\sqrt{ma}}{\hbar}e^{-am|x|/\hbar^2}dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}2\pi\frac{am}{\pi\hbar^2}\frac{\sqrt{ma}}{\hbar}\frac{\hbar^2}{p^2+(am/\hbar)^2}\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{ma}{\hbar}\right)^{3/2}\frac{1}{p^2+(am/\hbar)^2}.\end{aligned} \tag{31}$$

[2] Merk at vi bare skifter hva vi kaller ting i dette uttrykket!