FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2021
Oblig 11
(Versjon 21. april 2021)

Dokumentet inneholder følgende tre deler:

- A Diskusjonsoppgaver
- B Regneoppgaver
- C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk)

Du finner frister for innlevering av obliger på Canvas. For å få obligen godkjent, må du vise at du har gjort et ordentlig forsøk på alle oppgavene. 6/11 obliger må være godkjent for å gå opp til eksamen.

Husk å sjekke at du har nok godkjente obliger for å gå opp til eksamen!

A Diskusjonsoppgaver

Oppgave 1 Stern-Gerlach-eksperimentet og elektronets egenspinn

Stern-Gerlach-eksperimentet var viktig i oppdagelsen av elektronets egenspinn (se kapittel 6 i kompendiet). En forenklet skisse av eksperimentet er vist i Fig. 1. De svarte pilene representerer stråler av sølvatomer og den brede blå pilen illustrerer et inhomogent magnetfelt $B_z(z)$ med gradient i pilens retning. Bakerst har vi en fluorescerende skjerm som får lysende prikker der atomer treffer. Sølvatomene sendes ett og ett mot skjermen, og det ytterste (siste) elektronet er i en tilstand med kvantetallet $l = 0$, såkalt s-orbital (brukes i hele oppgaven).

a) Eksperimentet vist i Fig. 1 gir to vertikale lysende prikker på skjermen. Forklar kort med egne ord hvordan elektronets egenspinn fører til et slikt resultat.

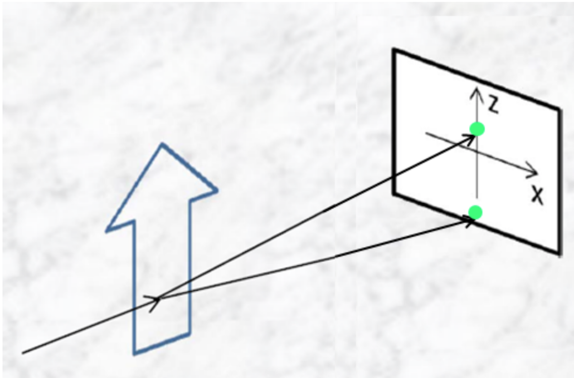
b) Figur 2 viser en variant av eksperimentet der sølvatomene passerer to inhomogene magnetfelt, begge med gradient i z-retning. Hva er riktig om mønsteret på skjermen? Begrunn svaret.

A: Vi får fire punkter på en vertikal linje

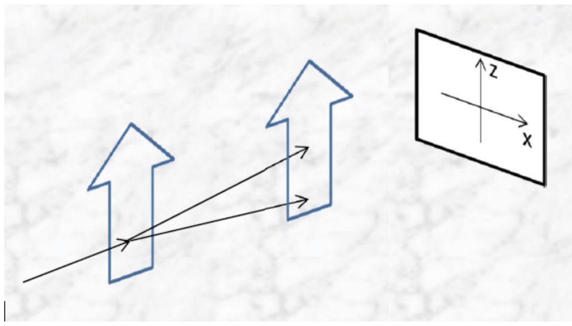
B: Vi får to punkter på en horisontal linje

C: Vi får ett punkt

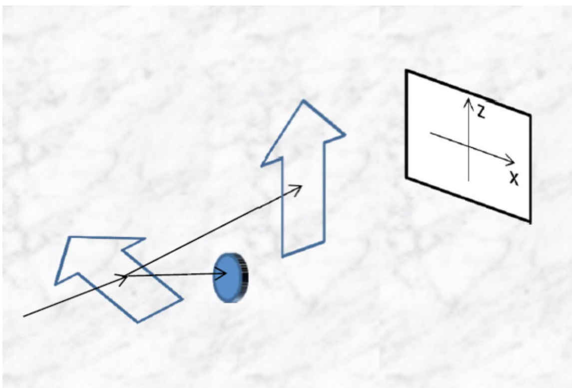
D: Vi får to punkter på en vertikal linje



Figur 1: Stråleavbøyning med ett B-felt.

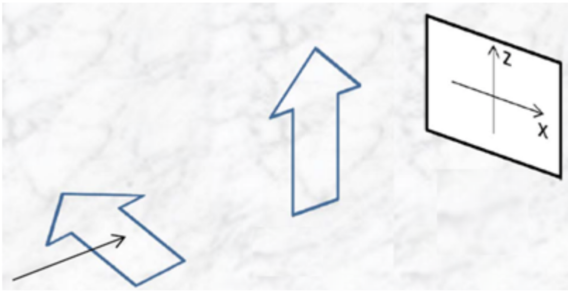


Figur 2: Stråleavbøyning med to paralelle B-felt.



Figur 3: Stråleavbøyning med to B-felt vinkelrett på hverandre og med stoppe-anordning.

c) I eksperimentet i Fig. 3 har det første inhomogene magnetfeltet nå gradient i x-retning, mens det andre fortsatt har gradient i z-retning. Ved det første feltet er det også satt opp en mekanisme som stopper alle atomene som bøyes av mot høyre, mens de som bøyes mot venstre sendes videre. Lag en tegning av mønstret vi nå får på skjermen. Forklar hvordan du kom fram til mønsteret.



Figur 4: Stråleavbøyning med to B-felt vinkelrett på hverandre og uten stoppe-anordning.

d) I Fig. 4 har vi gjort det litt vanskelig for dere (vi kommer ikke til å være strenge når vi retter denne). Oppsettet ligner forrige oppgave, men nå får alle atomene passere forbi både første og andre magnetfelt. Hva er nå riktig om mønsteret på skjermen? Begrunn svaret.

A: Vi får to punkter på en vertikal linje

B: Vi får to punkter på en horisontal linje

C: Vi får to punkter på diagonalen

D: Vi får fire punkter i et boks-mønster

Oppgave 2 Identiske partikler i singlet-tilstand

Vi bruker i det følgende notasjonen $|\uparrow\downarrow\rangle$ for spinn-bølgefunksjonen for to elektroner hvor det første har spinn opp og det andre har spinn ned. Anta at vi har et system der to elektroner er i en spinn-singlet-tilstand gitt ved $\chi(1,2) = \sqrt{\frac{1}{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle)$. Den totale bølgefunksjonen for systemet $\Psi(1,2)$ vil da være et produkt av en rom-del $\psi_{\text{rom}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ og en spinn-del $\chi(1,2)$.

a) Er rom-delen av bølgefunksjonen til systemet symmetrisk eller antisymmetrisk? Begrunn svaret. Hint: Den totale bølgefunksjonen til fermioner må være antisymmetrisk mhp ombytte-operatoren.

b) Vi gjør en måling av spinnet S_z til det ene elektronet i z-retning og får egenverdien $\hbar/2$. Hva er sannsynligheten for at en måling av S_z på den andre partikkelen gir $\hbar/2$?

c) Hvilke verdier for m_{s_z} har hhv. det første og det andre elektronet etter målingene i oppgave b) (altså ikke superposisjonen)?

d) Vi har nå et nytt elektronpar i en tilsvarende spinn-singlet-tilstand. Vi måler nå spinnet på det ene elektronet i y-retning og finner $S_y = \hbar/2$. Hva er sannsynligheten for at en måling av det andre elektronets spinn i x-retning gir $S_x = -\hbar/2$?

B Regneoppgaver

Oppgave 3 Litt av hvert fra eksamen 2010

a) Skriv ned dispersjonsrelasjonen $\omega(k)$ til en fri, ikke-relativistisk partikkel. Regn ut gruppe- og fasehastigheten og vis at det er gruppehastigheten som svarer til partikkelens hastighet.

b) Anta at vi har et sett med bølgefunksjoner ψ_{s,m_s} som er egenfunksjoner for det totale spinnet og dets z–komponent, det vil si

$$\hat{S}^2\psi_{s,m_s} = \hbar^2 s(s+1)\psi_{s,m_s}, \tag{1}$$

$$\hat{S}_z\psi_{s,m_s} = \hbar m_s \psi_{s,m_s}, \tag{2}$$

der $s = 1/2$. Vi ser på superposisjonen

$$\psi(x) = A\sum_{m_s} m_s\psi_{s,m_s}, \tag{3}$$

hvor A er en normeringskonstant. Hva er de tillatte verdiene for m_s? Er $\psi(x)$ en egenfunksjon for henholdsvis $\hat{S}^2$ og $\hat{S}_z$? Begrunn svaret.

c) Et nøytron i en atomkjerne kan bevege seg over et område med en utstrekning på omlag 5 fm. Bruk uskarphetsrelasjonen til å estimere hvilke hastigheter man kan forvente å måle for dette nøytronet.

d) En partikkel med masse m beveger seg fritt i tre dimensjoner. Skriv ned Hamiltonoperatoren for partikkelen og forklar hvorfor de stasjonære tilstandene har skarpt angulærmoment (L^2 og L_z).

Oppgave 4 Partikkel i boks (fra eksamen 2007)

I denne oppgaven skal vi nok en gang bruke det uendelige bokspotensialet ($V(x) = 0$ for $0 < x < L$, ∞ ellers), som et eksempel på et enkelt, endimensjonalt kvantemekanisk system. Som kjent er energispekteret for en partikkel med masse m gitt ved

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{4}$$

med tilhørende egenfunksjoner

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{5}$$

a) Forklar hva som menes med en egenfunksjon og egenverdi for en operator. Vis at funksjonene ψ_n i (5) *ikke* er egenfunksjoner for bevegelsesmengden, det vil si at bevegelsesmengden ikke har en skarp verdi i disse tilstandene. Gi en enkel kvalitativ forklaring på hvorfor tilstandene i boksen ikke kan ha skarp bevegelsesmengde.

La oss nå generalisere til en situasjon der det befinner seg to partikler i boksen, henholdsvis med $n = a$ og $n = b$. Vi antar at disse er identiske fermioner og at de befinner seg i en symmetrisk spinntilstand. Vi ser bort fra vekselvirkningen mellom dem.

b) Ta utgangspunkt i det generelle uttrykket for bølgefunksjonen til to identiske partikler:

$$\psi_{\text{rom}}(x_1, x_2) = A[\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) \pm \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)]. \tag{6}$$

Vis at romdelen til to-partikkelbølgefunksjonen for de to fermionene i boksen kan uttrykkes som en 2×2 determinant,

$$\psi_{\text{rom}}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2!}} \begin{vmatrix} \psi_a(x_1) & \psi_a(x_2) \\ \psi_b(x_1) & \psi_b(x_2) \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Uttrykket (7) kan generaliseres til flere partikler. Antar at vi nå har tre identiske fermioner i boksen, med $n = a$, b og c, og at spinndelen av bølgefunksjonen igjen er symmetrisk. Da kan vi skrive

$$\psi_{\text{rom}}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{3!}} \begin{vmatrix} \psi_a(x_1) & \psi_a(x_2) & \psi_a(x_3) \\ \psi_b(x_1) & \psi_b(x_2) & \psi_b(x_3) \\ \psi_c(x_1) & \psi_c(x_2) & \psi_c(x_3) \end{vmatrix}. \tag{8}$$

c) Vis at denne bølgefunksjonen er antisymmetrisk under ombytte av et hvilket som helst par av koordinater, og at den oppfyller Pauliprinsippet. (*Hint:* Direkte bruk av determinanters generelle matematiske egenskaper forenkler regningen betraktelig.)

C Tilleggsoppgave (ikke obligatorisk)

Oppgave 5 Rigid rotor (fra Griffiths Kap.4)

To partikler med masse m er festet til endene på en masseløs stang med lengde a. Systemet kan fritt rotere i tre dimensjoner om dets senter.

a) Vis at de tillatte energier for denne rigide rotoren er

$$E_n = \frac{\hbar^2 n(n+1)}{ma^2}, \tag{9}$$

for $n = 0, 1, 2, ...$

Hint: Uttrykk først den klassiske energien ved hjelp av det totale angulærmoment.

b) Hva er den normerte egenfunksjonen for dette systemet? Hva er degenerasjonen of the $n$te energinivået?