FYS2140 Obligatorisk oppgave 8
Tunnelering

Domantas Sakalys

April 13, 2021

Oppgave 1: Ladning på wire

Deloppgave a:

Vi antar at vi er nå i makroskopisk verden. Hvis kinetisk energi er mindre enn qV_0, dermed klarer ikke ringen å overstige det potensialet barriere. Hvis vi plutselig hadde observert at ringen sklir over denne barrieren, er loven om mekaniske energi bevaringen brutt. Allikevel i kvanteverden, er det en lite sannsynlighet at ringen befinner seg på andre siden av barrieren eller inne i barrieren, men siden i det makroskopiske verden er størrelsene såpass store, kan vi si at sannsynligheten er tilnærmet 0 for at ringen finnes bak barrieren eller inne i barrieren. Dermed vil vi observere at ringen bare bouncer tilbake (fullstendig refleksjon).

Deloppgave b:

Hvis kinetiske energien er større enn potensialet i barrieren, vil ringen komme seg over barrieren. Når ringen er inne i potensialet, vil en del av ringen kinetisk energi bli "lånt", og dermed vil ringen gli over saktere. Med en gang ringen kommer seg over, vil den få tilbake det kinetiske energien og vil fortsette med samme hastighet som opprinnelig. Vi igjen antokk at dette er makroskopisk verden, dermed er det fullstende transmisjon.

Deloppgave c:

Siden vi antokk fullstendig refleksjon i deloppgave a, vil ringen reflektere i alle de 100 gangene.

Vå setter lignende eksperimentsett, denne gangen ikke i makroskopiske verden, men i kvanteverden med elektronet istedenfor ringen.

Deloppgave d:

Vi begynner med den første situasjonen, nemlig når energien til elektronet er mindre enn potensialbarriere.

Her vil kan man tenke seg at elektronet må reflektere, allikevel kan vi observere at noen ganger elektronet kommer seg gjennom barriaren, altså vi observere refleksjon med samtidig kan vi observere transmisjon itillegg. Dette er på grunn av at bølgefunskjonen til elektronet trer inn i barriere, og viser oss at det er noe sannsynlighet for at elektronet kan finnes i barriere, og på andre side av barrieren. Sannsynlighet for at elektronet finnes på andre siden er en del mindre.

Hvis vi nå tenker oss at elektronet har større energi enn potensialet.

Her forventer vi at elektronet kommer seg gjennom, akkurat som vi har sett med ringen. Allikevel, kan vi se at noen ganger elektroner reflekterer. Bølgefunksjonen reflekterer fra barriaren, og dermed kan vi se at det finnes sannsynlighet for at elektorner reflekterer. Allikevel, så er det større sannsynlighet for transmisjon.

Oppgave 2: Tunnelering

Når bølgen kommer med bestemt hastighet og dermed bølgelengde λ og treffer en barriere, vil sannsynligheten for at partikkelen (med sitt bølgelengde) inne i materialet mynke jo lengre inn i materialer vi er. Amplituden på andre siden må være mindre, siden det er mindre sannsynlighet for at partikkelen finnes der, amplituden er bestemt av lengden av barrieren. Siden det er ingen mer potensial på andre siden, vil hastigheten forbli samme som før barriaren, og dermed er bølgelengde det samme.[1]

[1] Her brukte jeg hastighet, men det kanskje hadde vært mer riktig å si energi. partikkelen vil ha samme energi på begge sider, og dermed er bølgelengde det samme.

Oppgave 3: Spredning mot potensialbarriere og tunnellering

Vi har fått vite at vi har en potensialbarriare som er definert som

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 <= x <= L \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Deloppgave 3a)

Vi starter med å tenge en figur som viser frem tre situasjoner, når E er større enn V0, når E er mindre enn V0 og når de er like.

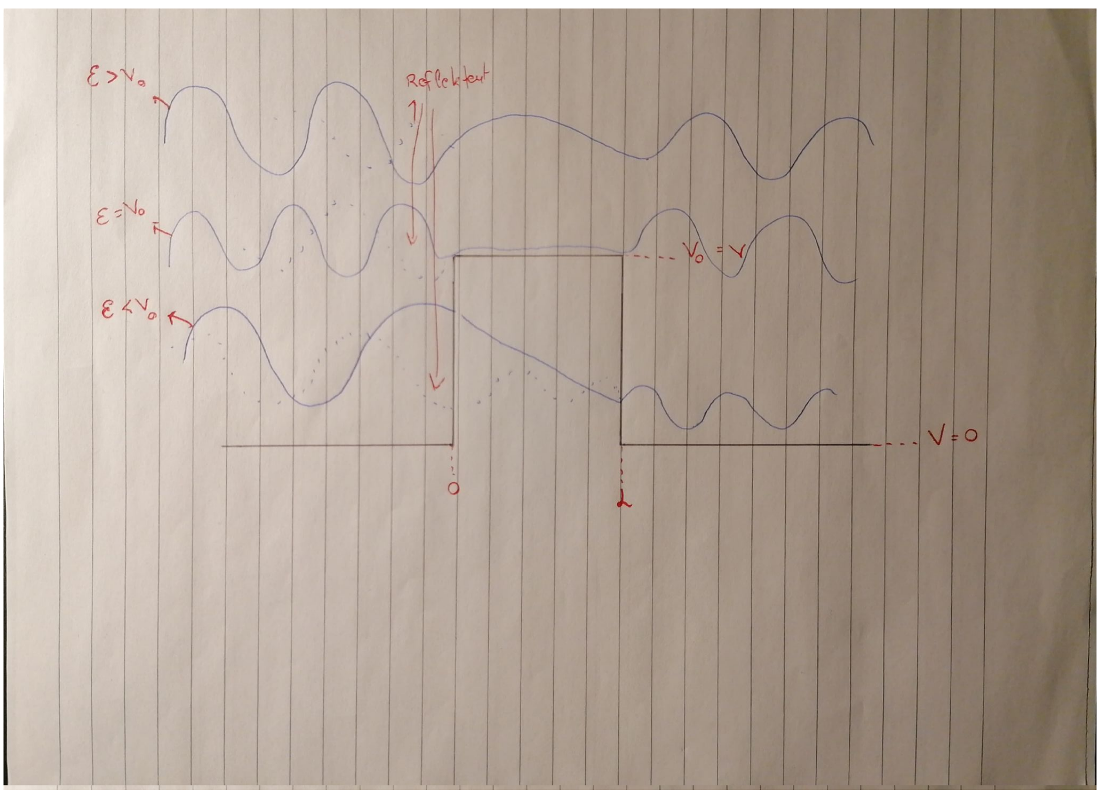

Figure 1: Illustrasjon av tre tilfeller for energinivåene for elektronet som møte potensial barriere.

Deloppgave 3b)

Vi skal igjen se på disse tre tilfellene og løse TUSL i tre områder som er vist i figuren i deloppgave 3a.

Vi begynner med å skrie ned TUSL,

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi$$

Vi velger å skrive dette om, vi velger å uttrykke $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ som et eget ledd, og sette høyre side lik 0.

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\psi = 0$$

Tilfelle 1, $E < V_0$

Vi tar for oss første tilfelle nå, nemlig når energien til partikkelen er mindre enn potensialet. I første område, er potensialet lik null, da ser våres TUSL slik ut,

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0$$

Vi innfører en forenklingskonstant k

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0$$

Fortegnet her er bestemt om $(V_0 - E)$ blir negativ eller positivt. Siden V_0 er null, er $(V_0 - E)$ negativ, og dermed har vi en differensialligning som har en generell løsning på formen,[2],

$$\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

I andre område, har vi potensialet lik V_0. Våres forenklet TUSL vil se ut som,

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\psi = 0$$

Vi innfører en forenklingskonstant her også, α.

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha\psi = 0$$

Her er det negativ fortegn for det andre leddet, siden $(V_0 - E)$ er negativ.

Dermed har denne løsning på samme form,

$$\psi_2(x) = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x}$$

[2]Her er det 2 ledd, det første leddet forteller bevegelsen til partikkelen mot høyre, men det andre leddet beskriver bevegelsen mot venstre, fysisk tolkning av det andre leddet er refleksjon.

I det tredje område, ser TUSL helt lik som i første område, dermed må løsningen være lik også,

$$\psi_3(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$$

Allikevel, pga. kontinuitet kan ikke partikkelen bli reflektert i tredje område, dermed må andre leddet falle bort, da må vi ha

$$\psi_3(x) = Fe^{ikx}$$

Tilfelle 2, $E = V_0$

Vi kan se at i første område og i tredje, ser våres forenklet TUSL helt lik ut som i første tilfelle, derfor konkluderer vi med at,

$$\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$\psi_3(x) = Fe^{ikx}$$

I det andre område derimot, våres TUSL blir,

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$$

siden faktoren $(E - V_0)$ blir lik null. Dette gir en løsning på formen av,

$$\psi_2(x) = Cx + D$$

Tilfelle 3, E $>$ **V**$_0$

Våres forenklet TUSL ser igjen lik ut i område 1 og 3, dermed kan vi igjen si at,

$$\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$\psi_3(x) = Fe^{ikx}$$

For det andre området derimot, må $(V_0 - E)$ være negativ

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\psi = 0$$

, og ved å bruke igjen forenklingsfaktorer ser vi at vi har differensialligning,

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha\psi = 0$$

Og denne har en generell løsning på formen,

$$\psi_2(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}$$

Da har vi en del ukjente, disse er amplituded til bølgelengde som kommer inn A, blir reflekter (B, D) og transmittert (C, F). Vi kan sette opp et ligningssystem ved å følge grenseverdier og kontinuitet. Vi vet da at ψ_1 og ψ_2 må være lik i punkt $x = 0$, tilsvarende er for de deriverte. Vi vet også da at ψ_2 og ψ_3 må være like i punkt $x = L$, tilsvarende for de deriverte. Hvis vi vet uttrykket for transimisjonskeof. eller refleksjonskoef, kan vi finne amplitudene til F, A og B, siden

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2}$$

$$R = \frac{|B|^2}{|A^2|}$$

Det er også nok med å bare finne en av den (enten R eller T), siden

$$1 = T + R$$

Fysisk må det gi mening, siden partikkelen må enten reflektere eller transmittere.

Deloppgave 3c)

I denne deloppgaven kan man skrive opp det ligningsystemet som vi har nevnt i forrige deloppgave, deretter løse de slik at de eneste ukjente som er igjen er B og A. Utifra det kan man finne R ved

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$

Når vi har funnet R, kan vi da finne T ved,

$$T = 1 - R$$

Deloppgave 3d)

Siden vi ikke har funnet ut uttrykkene for transmisjon i de tre ulike tilfellene, bruker vi oppgitte transmisjonsuttrykene fra oppgaveteksten.

Vi plotter først for det første tilfellen, når energien til elektronet er mindre enn potensialet.

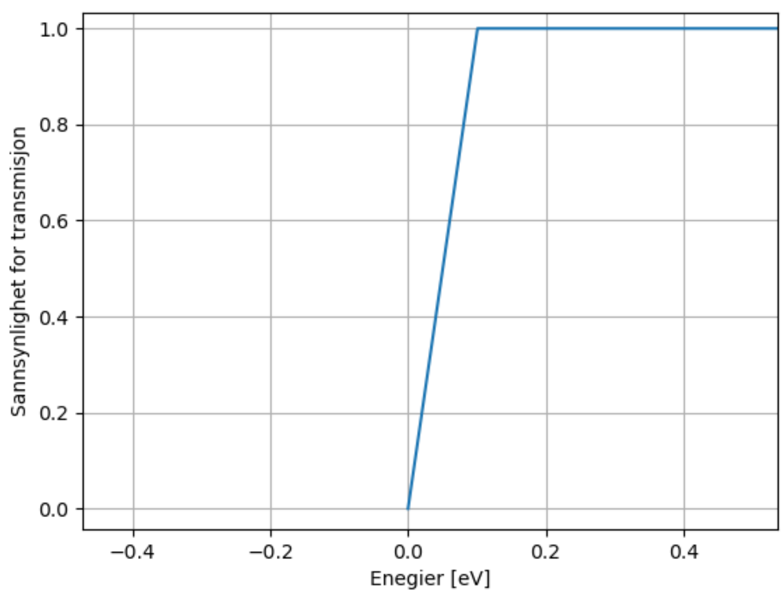

Figure 2: plot av transmisjonssannsynlighet for elektronet når dens opprinnelig energi er mindre enn potensialet

Her kan vi se klart at ved små energier, er den veldig lite sannsynlig for at elektronet kommer seg gjennom barriaren, men med en gang energien til elektronet er større, øker sannsynlighet for transmisjon helt til 100 prosent.

For det andre tilfelle, har vi bare et konstant. Vi kan putte de verdiene som oppgaven har gitt oss og renge det ut, svarene forteller oss at det er 100 prosent for transmisjon. Svaret er altså 1.0.

For det siste tilfelle, ser plottet våres slik ut,
Her ser vi et konstant strek over alle verdiene til energi. Utifra plottene kan vi da konkludere at det er garantert at elektronet kommer seg gjennom barriaren når energien blir lik eller større V0.

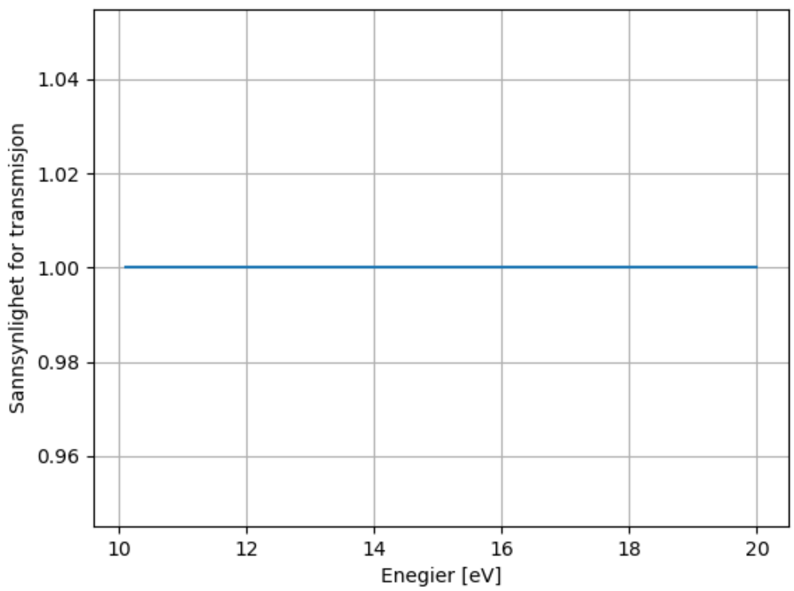

Figure 3: plot av transmisjonssannsynlighet for elektronet når dens opprinnelig energi er større enn potensialet