FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2021
Oblig 9

(Versjon 16. april 2021)

Dokumentet inneholder følgende tre deler:

- A Diskusjonsoppgaver
- B Regneoppgaver
- C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk)

Du finner frister for innlevering av obliger på Canvas. For å få obligen godkjent, må du vise at du har gjort et ordentlig forsøk på alle oppgavene. 6/11 obliger må være godkjent for å gå opp til eksamen.

A Diskusjonsoppgaver

Oppgave 1 Elektrontilstander i hydrogenatomet

Vi har et elektron bundet i et hydrogenatom. I hele oppgaven kan du se bort fra elektronets egenspinn.

a) Hvilke observable kan vi måle for elektronet i hydrogenatomet?

b) Hvilke operatorer representerer de ulike observablene i a)?

c) For hvilke av observablene i a) og deres operatorer har vi en egenverdiligning slik at $\hat{Q}\psi_{nlm} = q\psi_{nlm}$?

d) Vi ser på et elektron i et hydrogenatom, som befinner seg i egentilstanden ψ_{nlm}. For hvilke av observablene i a) har dette elektronet skarpe verdier?

e) Forklar med egne ord hva kvantetallene n, l og m i ψ_{nlm} betyr og hvilken informasjon de gir oss.

f) I virkeligheten bruker vi eksperimenter til å måle observable. Matematisk kan vi litt rundhåndet si at mulige eksperimenter er uttrykt ved operatorer. Mulige måleresultater representeres ved egenverdier som igjen er uttrykt med ulike kvantetall. Hvilke operatorer har egenverdier uttrykt ved hhv. n, l og m for elektronet i hydrogenatomet?

g) Er følgende kombinasjon av måleresultater (på identiske tilstander) for energi og angulærmoment mulig? Begrunn svaret med fysiske argumenter.

$$E = -\frac{m_e e^4 k_e^2}{18\hbar^2},\ L^2 = 6\hbar^2 \text{ og } L_z = 3\hbar,\ \text{der } k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \tag{1}$$

B Regneoppgaver

Oppgave 2 Hydrogenatomet (tekst tatt fra eksamen våren 2005)

I denne oppgaven ser vi bort fra elektronets egenspinn. Energi-egentilstandene til hydrogenatomet skrives generelt som

$$\psi_{nlm}(r,\phi,\theta) = R_{nl}(r)Y_l^m(\phi,\theta). \tag{2}$$

a) Hvilke verdier kan kvantetallene n, l og m ta.

b) Forklar hva som menes med et sentralsymmetrisk potensial og gi et eksempel. Hvorfor er vinkeldelen av bølgefunksjonen, $Y_l^m(\phi,\theta)$, den samme enten vi ser på hydrogenatomet eller på en *fri* partikkel i tre dimensjoner?

Radialdelen av bølgefunksjonen, $R_{nl}(r)$, bestemmes av den radielle Schrödingerligningen som for hydrogenatomet kan skrives som

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{d^2}{dr^2}(rR(r)) + \left[-\frac{k_e e^2}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_e r^2}\right](rR(r)) = E\cdot(rR(r)), \tag{3}$$

der m_e er elektronets masse (må ikke forveksles med kvantetallet m) og $k_e \equiv 1/(4\pi\epsilon_0)$. Energispekteret er som kjent gitt ved

$$E_n = -\frac{(k_e e^2)^2 m_e}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{E_0}{n^2}, \tag{4}$$

der $E_0 = 13.6$ eV.

c) Vis ved innsetting i den radielle Schrödingerligningen (3) at den radielle bølgefunksjonen

$$R(r) = re^{-\gamma r}, \tag{5}$$

er en løsning for en bestemt verdi av l og γ og at denne løsningen tilsvarer energinivået $n = 2$. Bestem l og γ for denne løsningen. *Hint:* Siden ligningen du får må være oppfylt for alle r, må den være oppfylt separat for hver potens av r som multipliseres med $e^{-\gamma r}$.

d) Forklar hvorfor den radielle sannsynlighet er definert som

$$P(r) = r^2 \cdot R^2(r), \tag{6}$$

snarere enn bare kvadratet av den radielle bølgefunksjonen, $R^2(r)$. Beregn elektronets mest sannsynlige radius (det vil si mest sannsynlige avstand fra kjernen) i tilstanden i oppgave **c)**. Uttrykk resultatet ved hjelp av Bohrradien $a_0 \equiv \hbar^2/(k_e m_e e^2)$.

C Tilleggsoppgave (ikke obligatorisk)

Oppgave 3 Elektronet i hydrogenets grunntilstand (fra Griffiths Kap.4)

Hva er den *mest sannsynlige* verdien av r for grunntilstanden til hydrogen? (Svaret er *ikke* null!) *Hint:* Du må først finne sannsynligheten for at elektronet befinner seg mellom r og $r + dr$.