FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2021
Oblig 1

(Versjon 13. januar 2021)

Dokumentet inneholder følgende tre deler:

- A Diskusjonsoppgaver
- B Regneoppgaver
- C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk)

Du finner frister for innlevering av obliger på Canvas. For å få obligen godkjent, må du vise at du har gjort et ordentlig forsøk på alle oppgavene. 6/11 obliger må være godkjent for å gå opp til eksamen.

A Diskusjonsoppgaver

Disse oppgavene handler om sentrale begreper fra den første uka med forelesninger, og aller mest om hvordan kvantefysikk bryter med klassisk fysikk. Oppgavene er lagd for å diskuteres sammen med medstudenter i gruppetimene. Forklarende svar på oppgavene skal leveres som del av obligen.

Oppgave 1 Kontinuitet og kvantisering

a) I klassisk fysikk, hvilke av følgende fysiske størrelser er *kontinuerlig* fordelt og hvilke er diskrete, altså *kvantisert*?

(i) Bevegelsesmengde $\mathbf{p}$

(ii) Elektrisk ladning q

(iii) Energi E

b) Vi flytter oss nå over i kvantefysikken. Hvilke av de fysiske størrelsene i **a**) er da *kontinuerlig* fordelt og hvilke kan være *kvantiserte*?

c) Skisser en graf som angir

(i) Potensiell energi i ei fjær som funksjon av avstanden x fra likevektspunktet

(ii) Energi til et elektron i et hydrogenatom som funksjon av energinivået n

Oppgave 2 Determinisme og statistisk fordeling

a) Hvilken informasjon trenger dere for å kunne beregne hvor en ball havner etter at den blir kasta? Hvor kommer eventuelle usikkerheter fra?

b) Tenk dere at det ikke er en ball som kastes, men et elektron som skytes ut. Hvilken informasjon trenger dere nå for å si noe om hvor elektronet havner? Hvor kommer eventuelle usikkerheter fra nå?

c) Lag en skisse som viser treffpunkt på en vegg for

(i) 100 baller som kastes helt likt etter hverandre mot veggen

(ii) 100 elektroner som skytes ut helt likt etter hverandre mot veggen

Hva er forskjellen på (i) og (ii)?

B Regneoppgaver

Dette oppgavesettet er ment å friske opp en del grunnleggende matematikk som dere forventes å beherske, og som er helt avgjørende for å komme seg helskinnet gjennom kurset.

Oppgave 3 Lek med komplekse tall

a) For hvert av de oppgitte komplekse tallene, beregn z^*, $|z|$ og $|z|^2$. Sjekk eksplisitt at $zz^* = |z|^2$.

(i) $z = i$.

(ii) $z = 3 + 4i$.

(iii) $z = -3$.

(iv) $z = 1 + i$.

b) Forenkle de oppgitte uttrykkene og skriv resultatet på formen $a + bi$. *Hint:* Bruk relasjonen $z_1/z_2 = z_1 z_2^*/|z_2|^2$.

(i) $\frac{3+4i}{1-2i}$.

(ii) $\frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)(\sqrt{3}-i)}$.

c) Skriv hvert av de følgende komplekse tallene på polarform, $z = r\exp(i\theta)$, det vil si bestem r og θ. *Hint:* Bruk relasjonen $\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ (**Eulers formel**). Velg θ slik at $-\pi < \theta \leq \pi$.

(i) $z = 2i$.

(ii) $z = -6 + 6\sqrt{3}i$.

(iii) $z = -1$.

d) Finn $z = z_1 z_2$ når:

(i) $z_1 = 2e^{-i\pi}$ og $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$.

(ii) $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{5}}$ og $z_2 = e^{i\frac{\pi}{5}}$.

Hva skjer geometrisk (i det komplekse planet) med et komplekst tall dersom du multipliserer det med $e^{i\frac{\pi}{2}}$?

Oppgave 4 Ett par viktige differensialligninger

a) Skriv ned den generelle løsningen til differensialligningen

$$\frac{df(x)}{dx} = bf(x), \tag{1}$$

hvor b er en konstant. Vi setter så følgende initialbetingelse: $f(0) = 1$ og $f'(0) = 3$. Bruk dette til å bestemme de to ukjente konstantene og skriv ned løsningen for $f(x)$ med disse initialbetingelsene.

b) Vi skal så se på differensialligningen

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = af(x), \tag{2}$$

der a er en konstant. Anta først at a er positiv. Vis at den generelle løsningen kan skrives som

$$f(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}, \tag{3}$$

der A og B er vilkårlige konstanter.

Hva kan vi si om konstanten A dersom vi krever at $f(x)$ skal gå mot null for $x \to \infty$? Altså,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0. \tag{4}$$

Dette kalles en **randbetingelse** for funksjonen f fordi den gir verdien for $f(x)$ ved grensen (randen) av hvor funksjonen er definert.

Hva blir B dersom vi i stedet krever den randbetingelsen at $f(x)$ skal gå mot null for $x \to -\infty$? Skriv til slutt om Likn. (3) som en lineærkombinasjon av hyperbolske funksjoner, $\sinh(\sqrt{a}x)$ og $\cosh(\sqrt{a}x)$, i stedet for eksponentialfunksjonen.

c) Til slutt betrakter vi tilfellet $a < 0$. Hvordan modifiseres løsningen vi ga i Likn. (3)? Skriv ned den generelle løsningen for dette tilfellet, både uttrykt ved eksponentialfunksjoner og uttrykt ved hjelp av trigonometriske funksjoner $\sin(\sqrt{|a|}x)$ og $\cos(\sqrt{|a|}x)$. *Hint:* $a < 0$ vil si at $a = -|a|$.

Oppgave 5 Litt integralregning

a) Finn følgende **gaussiske integraler** (det er lov å bruke Rottmann):

(i)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-4x-1}\, dx. \tag{5}$$

(ii)

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-2x^2}\, dx. \tag{6}$$

b) Løs følgende integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dx\, dy\, dz. \tag{7}$$

Hint: gjør om til **sfæriske koordinater** og bruk den (meget nyttige) formelen

$$\int_{0}^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^{n+1}}\, n!, \tag{8}$$

der n er et heltall. Denne formlen er av den irriterende typen som gjemmer seg i Rottmann, den er nemlig ikke blant de bestemte integralene. Du finner den skjult aller bakerst som en **Laplace-transformasjon**, men om du ikke vet at det er det den er, så kan den være lur å notere seg.

C Tilleggsoppgaver (ikke obligatorisk)

Oppgave 6 Oppgave 2.2 fra Kompendiet

Oppgave 7 Løse integral ved hjelp av Fourier transformasjoner

Vis at:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{ma}}{\hbar} e^{-ma|x|/\hbar^2} e^{-ipx/\hbar} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{p_0^{3/2}}{p^2+p_0^2}, \tag{9}$$

hvor $p_0 = ma/\hbar$. *Hint:* Her er du nesten nødt til å bruke Rottmann. Se etter **Fourier transformasjoner** bakerst og regn med at du må jobbe hardt med å skifte navn på flere variabler. Det kan være lurt å studere *En kort innføring i fouriertransformasjon*, som du finner under *Annet lærestoff og ressurser* i Canvas.