

G2_TP4_gr22_DIENG_DUONG_KINFOUSSIA

Willy Kinfooussia, Seydina Dieng, Ngo Duong

08/04/2022

Vraisemblance pour plusieurs paramètres

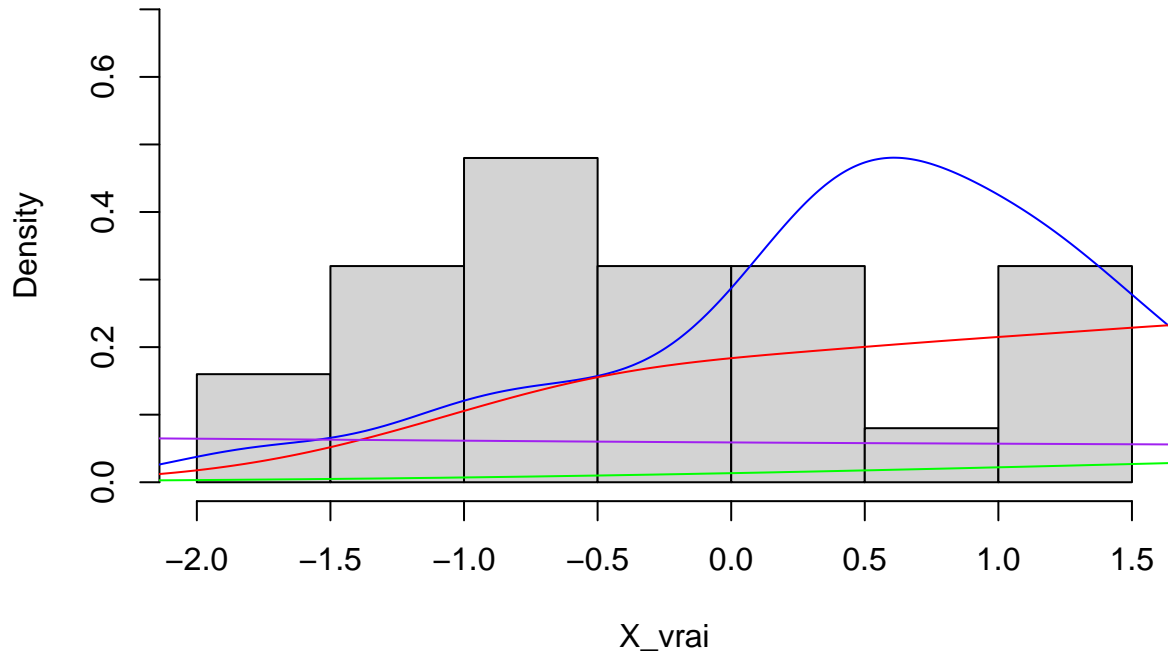
Loi Normal

1. Simulation de n variables iid de loi $N(\mu, \sigma^2)$

On choisit $n = 25$ avec $\theta_0 = (0, 1)$, $\theta_1 = (1, 2)$, $\theta_2 = (10, 5)$, $\theta_3 = (0, 5)$

```
#Simulation de l'échantillon + histogramme
n=25
mu_vrai=0
sig_vrai=1
X_vrai=rnorm(n, mean=mu_vrai, sig_vrai)
hist(X_vrai, freq=FALSE, ylim=c(0,0.7))
#Comparaisons avec différents paramètres théta
mu=c(0,1,10,0)
sig=c(1,2,5,5)
couleurs=c("blue","red","green","purple")
indices=1:length(mu)
for(i in indices)
{
  X=rnorm(n, mean=mu[i], sd=sig[i])
  den_X=density(X)
  lines(den_X, col=couleurs[i])
}
```

Histogram of X_vrai

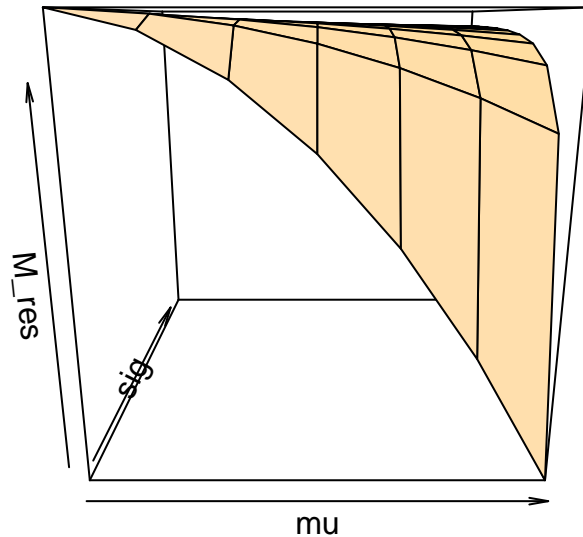


2. log-vraisemblance pour (θ, x)

```
logv = function(mu, sig, X){
  n=length(X)
  res=(-n*log(sig)-n*log(2*pi))/2 - (1/(2*sig**2))*sum((X-mu)**2)
  res
}

mu=c(0:6)
sig=c(1:10)
res=c()
max_sur_sigma=c()
for(m in mu)
{
  logv_mu_fixed=function(s){logv(m, s, X_vrai)}
  max_sur_sigma=optimize(logv_mu_fixed, sig, maximum=TRUE)["objective"]

  for(s in sig)
  {
    res=c(res, logv(m, s, X_vrai))
  }
}
M_res=matrix(res, nrow=length(mu), ncol=length(sig), byrow=TRUE)
persp(mu, sig, M_res, col=rev(topo.colors(500)))
```



```
#Point max
max_sur_sigma
```

```
## $objective
## [1] -56.66165
```

3. Faire varier l'échantillon

4. En utilisant la fonction `optim`, trouver la valeur de θ la plus probable pour l'échantillon de normal. En fait, l'estimateur est défini explicitement pour le cas normal. Vérifiez la solution numérique avec la solution analytique.

```
fr <- function(x) {    ## Rosenbrock Banana function
  x1 <- x[1]
  x2 <- x[2]
  100 * (x2 - x1 * x1)^2 + (1 - x1)^2
}
```

```
res <- optim(c(0,1), fr)
res$par[1]
```

```
## [1] 1.000984
```

```
m <- c(0,1)
m <- c(m,2)
m
```

```
## [1] 0 1 2
```

6. Testez avec des échantillons variés et trace l'histogramme de l'estimateur. Variez la taille de l'échantillons

$n = 10, 25, 50, 100$ et comparez l'écart entre la valeur théorique attendue et la valeur obtenue. Que remarquez-vous?

```
diffmoy <- c()
diffcarttype <- c()
for(m in c(0,5,8)){
  for(sigma in c(2,4,5)){
    for(n in c(10,25,50,100)){
      norm <- rnorm(n, m, sigma)
      res <- optim(c(1,1), function(m, sigma) logv(m,2,norm))$par
      diffmoy <- c(diffmoy, m - res[1])
      diffcarttype <- c(diffcarttype, sigma - res[2])
    }
  }
}
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```



```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```



```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

[illegible]

[illegible]


```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```


[illegible]

[illegible]

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```


[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]


```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```


[illegible]

[illegible]

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```



```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

[illegible]


```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```


[illegible]

[illegible]


```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```


[illegible]

[illegible]


```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

[illegible]

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```



```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```



```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]


```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```


[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

[illegible]

[illegible]


```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]


```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```


[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```


[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```


[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]


```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```



```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```



```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

[illegible]


```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

[illegible]

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```



```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```



```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```


[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```


[illegible]

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

[illegible]


```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```


[illegible]


```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]


```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```


[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]


```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```


[illegible]


```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```


[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

```
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court
```

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

```

## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court

## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court

## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court

## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court

## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court

## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court

## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court

## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court

## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court

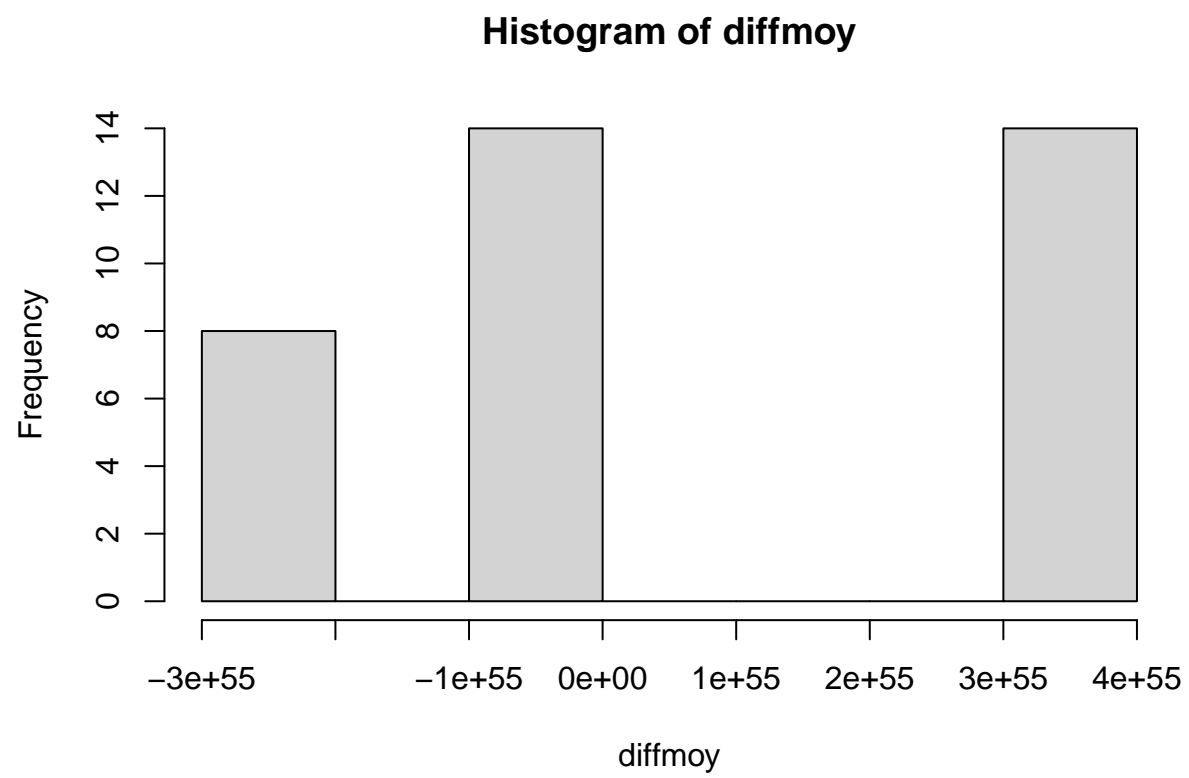
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court

## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court

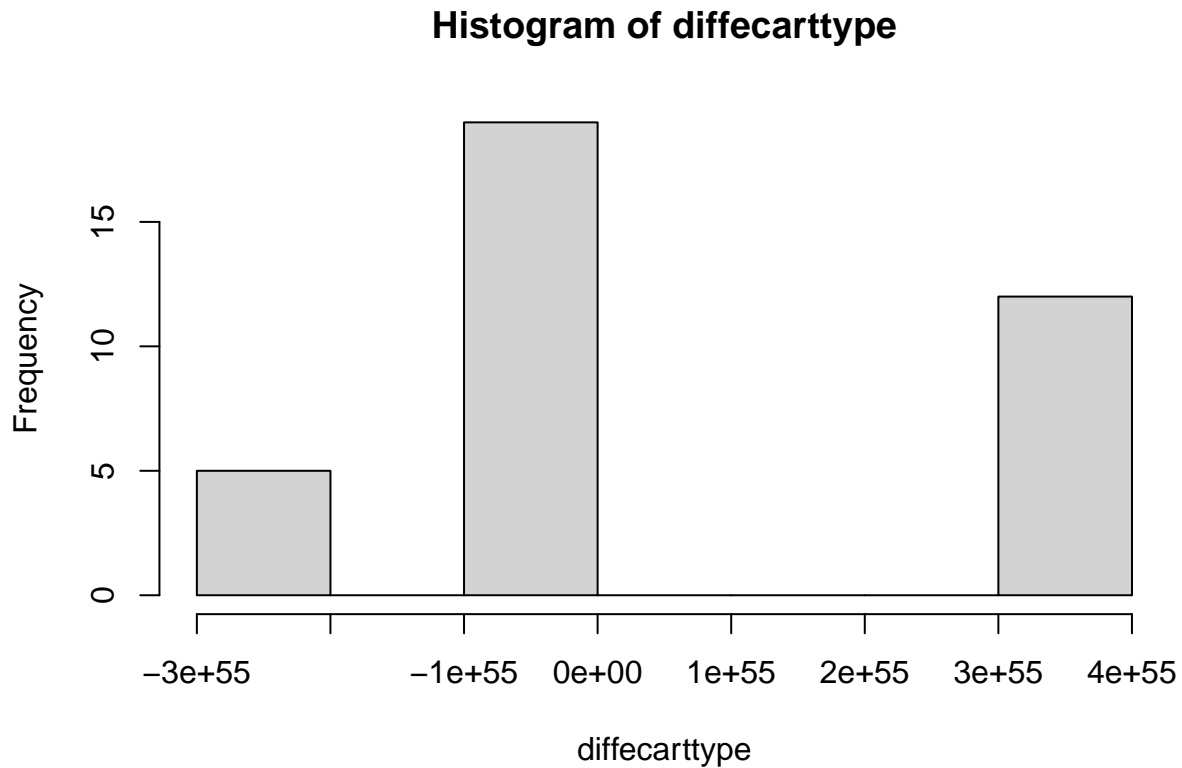
## Warning in X - mu: la taille d'un objet plus long n'est pas multiple de la
## taille d'un objet plus court

hist(diffmoy)

```



```
hist(diffecarttype)
```



La Loi Gamma

7. Soit X_1, \dots, X_n un échantillon de n variables indépendantes de loi de $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$ où $\theta = (\alpha, \beta)$ est inconnue. Simuler un échantillon i.i.d de taille $n = 25$ avec $\theta_0 = (3, 1)$. Présentez l'histogramme des données simulées. Choisir quatre paramètres candidats, disons, θ_0 (vrai) $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Comparer l'histogramme avec les densités candidates. Que remarquez-vous?

```
plot.new()
gamma0 <- rgamma(25, 3, 1)
hist(gamma0, freq = FALSE, ylim = c(0,1))

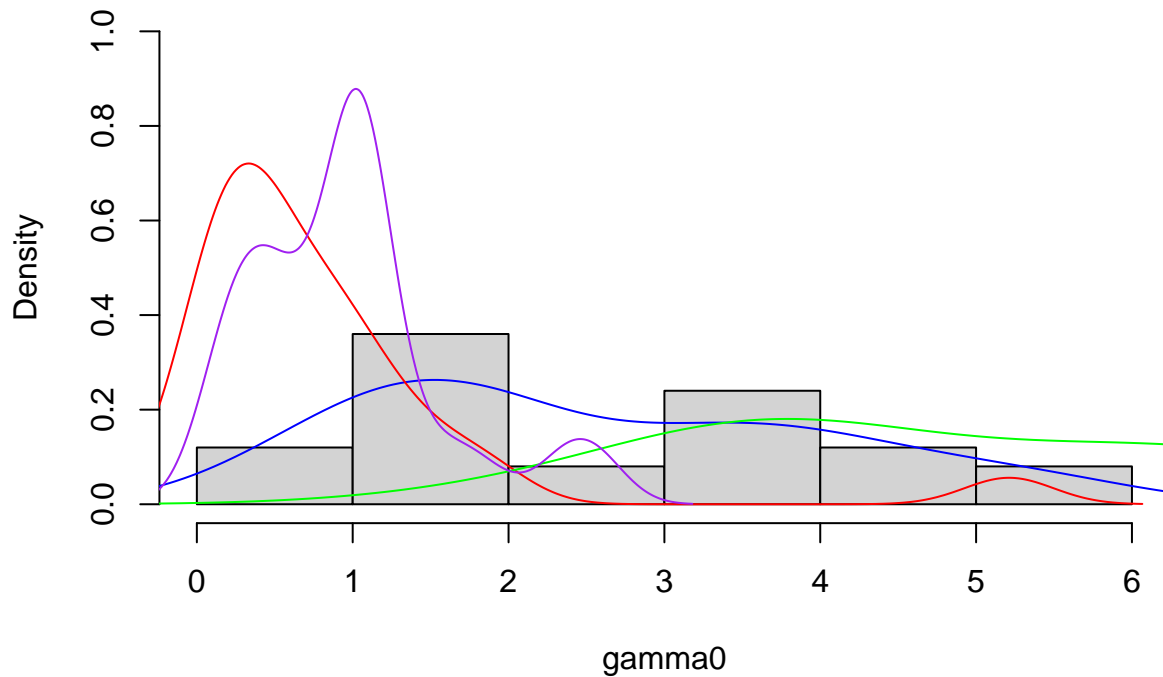
densite0 <- density(gamma0)
lines(densite0, col = "blue")

gamma1 <- rgamma(25, 1, 1)
densite1 <- density(gamma1)
lines(densite1, col = "red")

gamma2 <- rgamma(25, 5, 1)
densite2 <- density(gamma2)
lines(densite2, col = "green")

gamma3 <- rgamma(25, 3, 3)
densite3 <- density(gamma3)
lines(densite3, col = "purple")
```


Histogram of gamma0



8. Ecrire la log vraisemblance. Générez une fonction de log-vraisemblance avec les arguments (θ, x) , qui donne la log vraisemblance d'un échantillon pour une valeur donnée de $\theta = (\alpha, \beta)$ et les données $x = (x_1, \dots, x_n)$. Calculez la log-vraisemblance des échantillons que vous avez générés, en faisant varier un paramètre à la fois. Présentez graphiquement la surface de log-vraisemblance que vous calculez et marquez le point maximum. Que remarquez-vous? Est-ce qu'il y a quelque chose de notable par rapport au cas normal?

```
function_gamma <- function(x){
  if(x <= 0){
    return(1)
  }else{
    return(function_gamma(x-1)*x)
  }
}

log_vgamma <- function(X, a, b){
  return(sum(log(dgamma(X, a, b))))
}

dataloggamma <- c()
gamma <- rgamma(25, 3, 1)

for(a in 1:10){
  for(b in 1:10){
    dataloggamma <- c(dataloggamma, log_vgamma(gamma, a, b))
  }
}
```

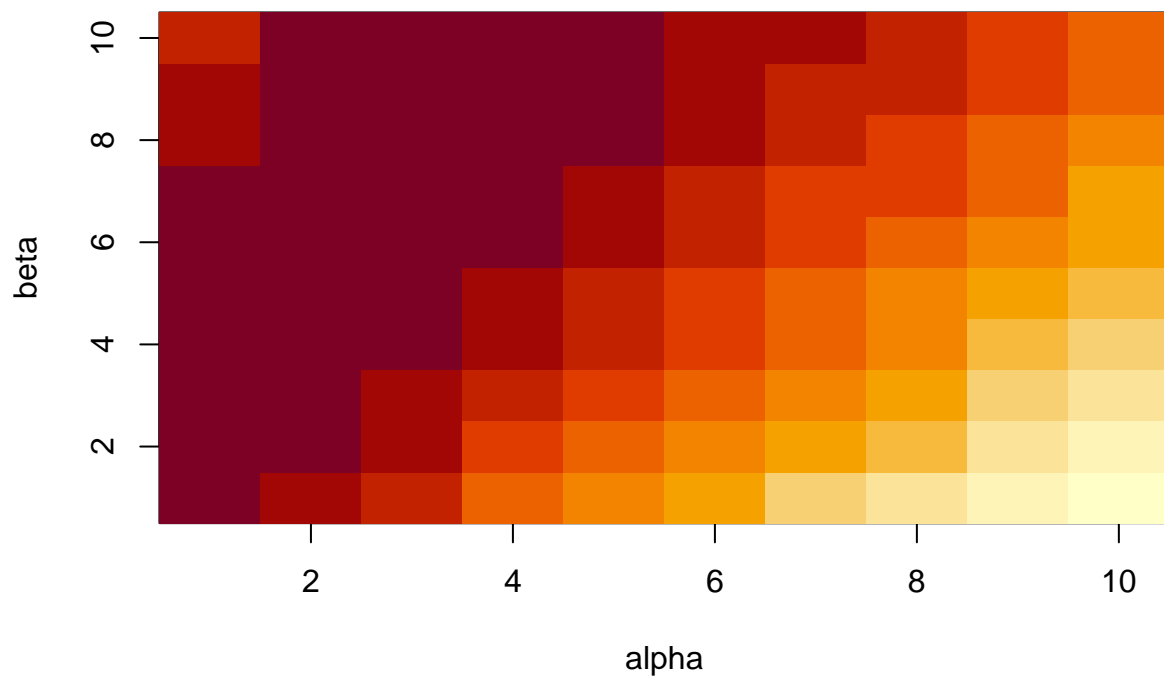
```

}
mat <- matrix(data = dataloggamma, nrow = 10)
mat

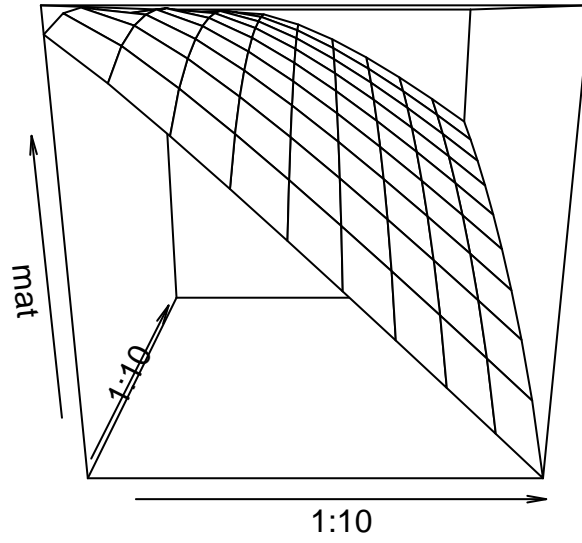
##           [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]      [,6]
## [1,] -77.13211 -51.61149 -43.41955 -45.36424 -54.50097 -69.21630
## [2,] -136.93555 -94.08625 -68.56562 -53.18163 -44.98969 -42.37634
## [3,] -203.93103 -150.94510 -115.28785 -89.76723 -71.43866 -58.68868
## [4,] -273.87109 -213.69311 -170.84381 -138.13114 -112.61052 -92.66848
## [5,] -345.42462 -279.66805 -231.24016 -192.94890 -161.84969 -136.32906
## [6,] -417.99869 -347.68408 -294.69815 -251.84885 -216.19160 -186.11294
## [7,] -491.27704 -417.10866 -360.26896 -313.56590 -274.05488 -240.12245
## [8,] -565.07086 -487.56420 -427.38622 -377.34487 -334.49557 -297.22486
## [9,] -639.25840 -558.80716 -495.68461 -442.69868 -396.90480 -356.68952
## [10,] -713.75650 -630.67125 -564.91468 -509.29474 -460.86685 -418.01755
##           [,7]      [,8]      [,9]      [,10]
## [1,] -88.48967 -111.61680 -138.08221 -167.49221
## [2,] -44.32102 -50.11947 -59.25621 -71.33753
## [3,] -50.49674 -46.15857 -45.15868 -47.10336
## [4,] -77.28449 -65.75426 -57.56232 -52.31496
## [5,] -115.36648 -98.25767 -84.48714 -73.66118
## [6,] -160.59232 -138.92547 -120.59690 -105.21290
## [7,] -210.74807 -185.22744 -163.04511 -143.80735
## [8,] -264.51218 -235.65328 -210.13266 -187.55661
## [9,] -321.03227 -289.22878 -260.76359 -235.24297
## [10,] -379.72629 -345.28879 -314.18958 -286.03495

image(1:10, 1:10, mat, xlab = "alpha", ylab = "beta")

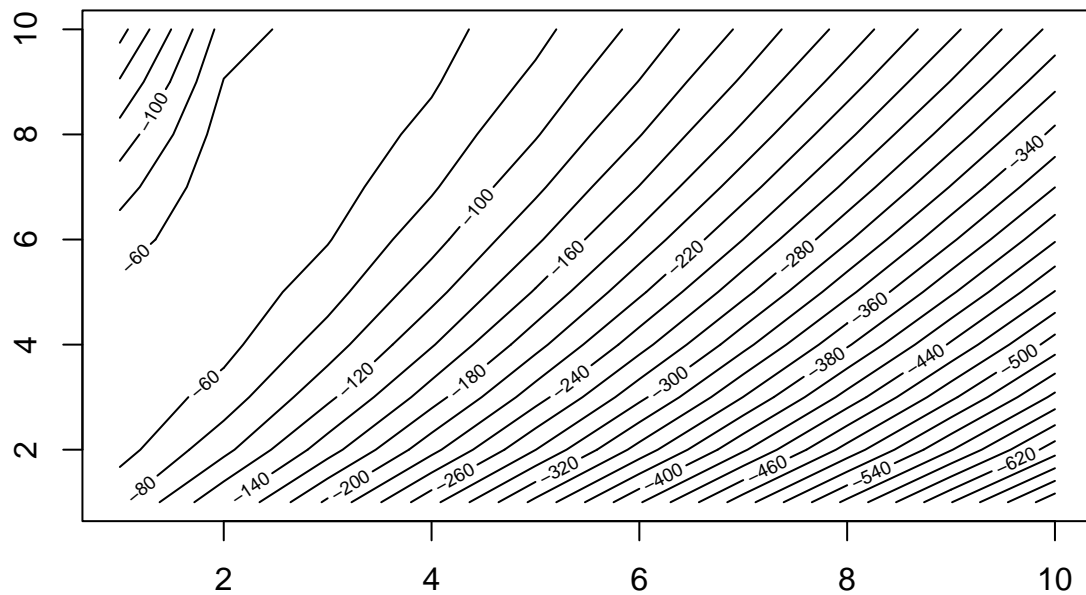
```



```
persp(1:10, 1:10, mat)
```

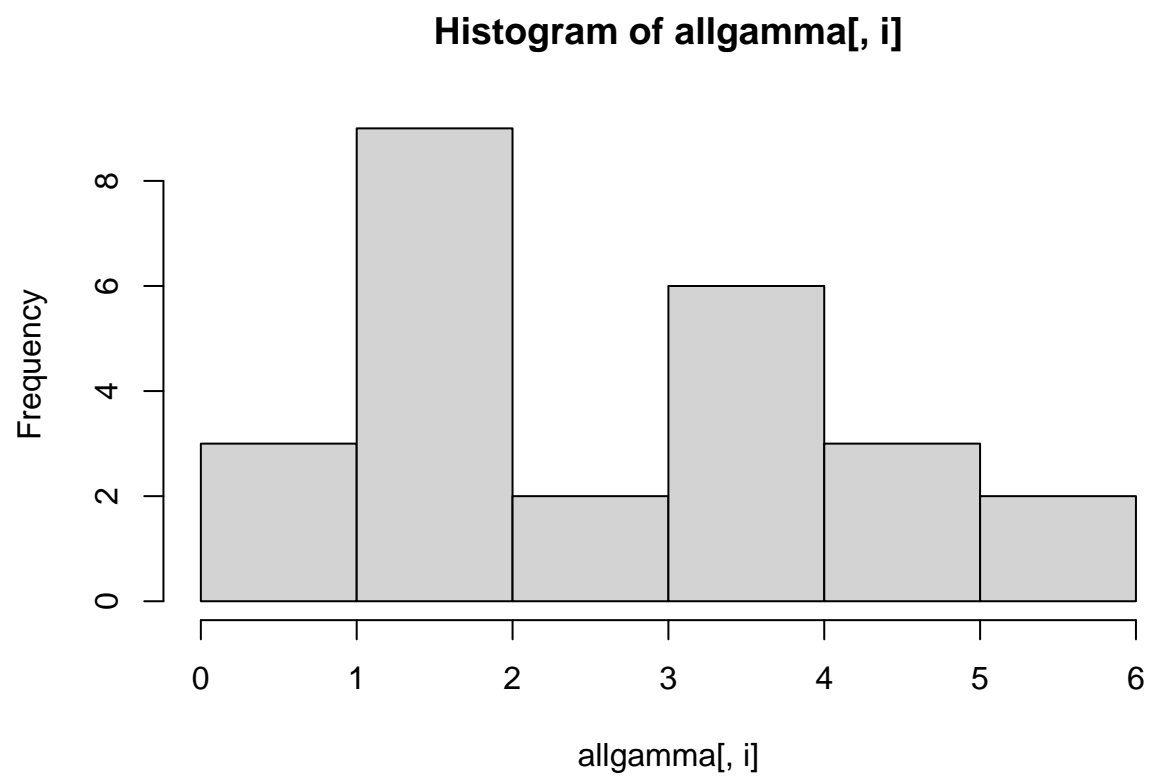


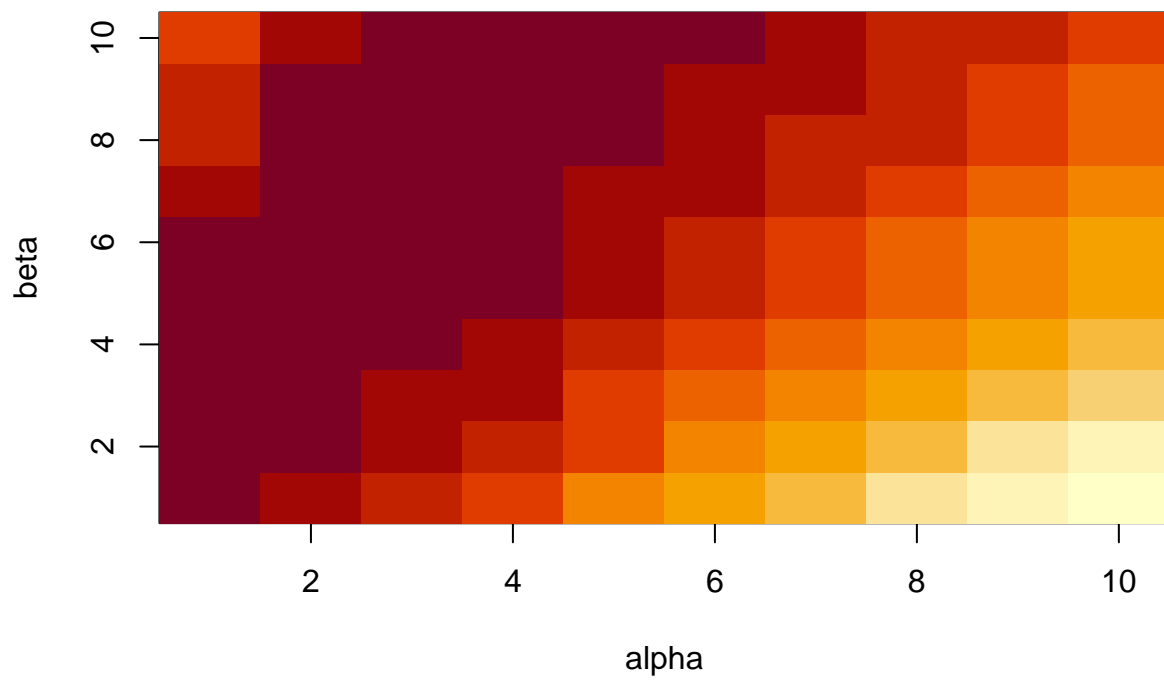
```
contour(1:10,1:10, mat, nlevels = 25)
```

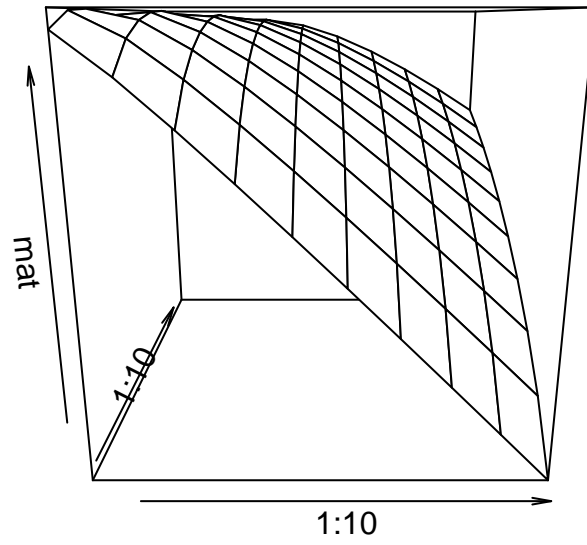


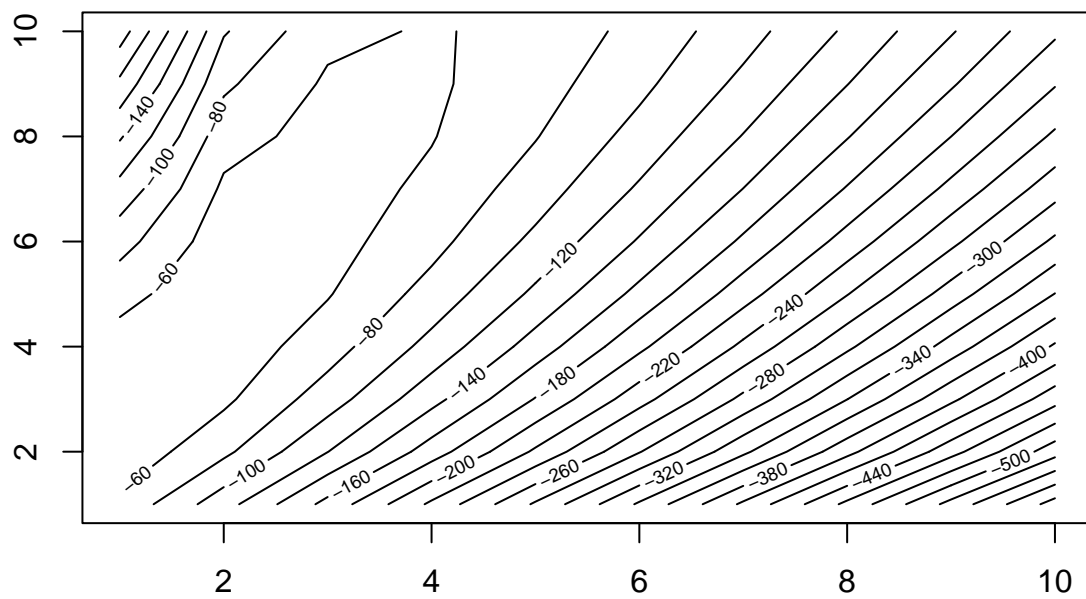
9. Variez l'échantillon. Présentez l'histogramme des données simulées et la surface de vraisemblance correspondante. Que remarquez-vous?

```
allgamma <- matrix(data = c(gamma0, gamma1, gamma2, gamma3), nrow = length(gamma0))
for(i in 1:length(allgamma[,1])){
  hist(allgamma[,i])
  dataloggamma <- c()
  for(a in 1:10){
    for(b in 1:10){
      dataloggamma <- c(dataloggamma, log_vgamma(allgamma[,i], a, b))
    }
  }
  mat <- matrix(data = dataloggamma, nrow = 10)
  image(1:10, 1:10, mat, xlab = "alpha", ylab = "beta")
  persp(1:10, 1:10, mat)
  contour(1:10,1:10, mat, nlevels = 25)
}
```

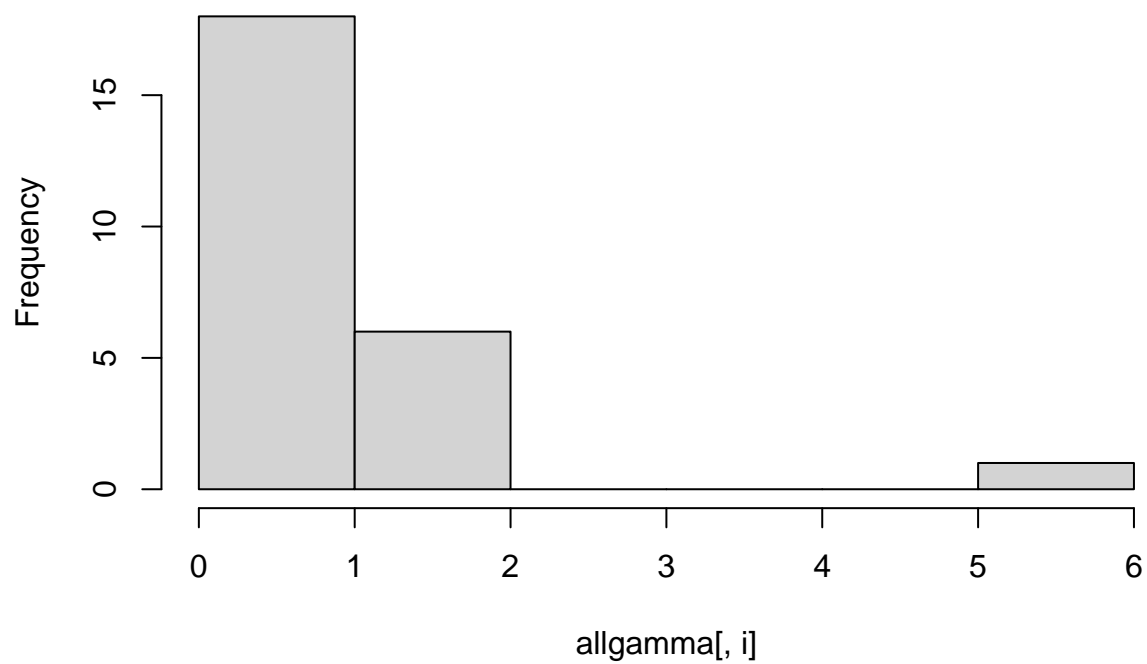


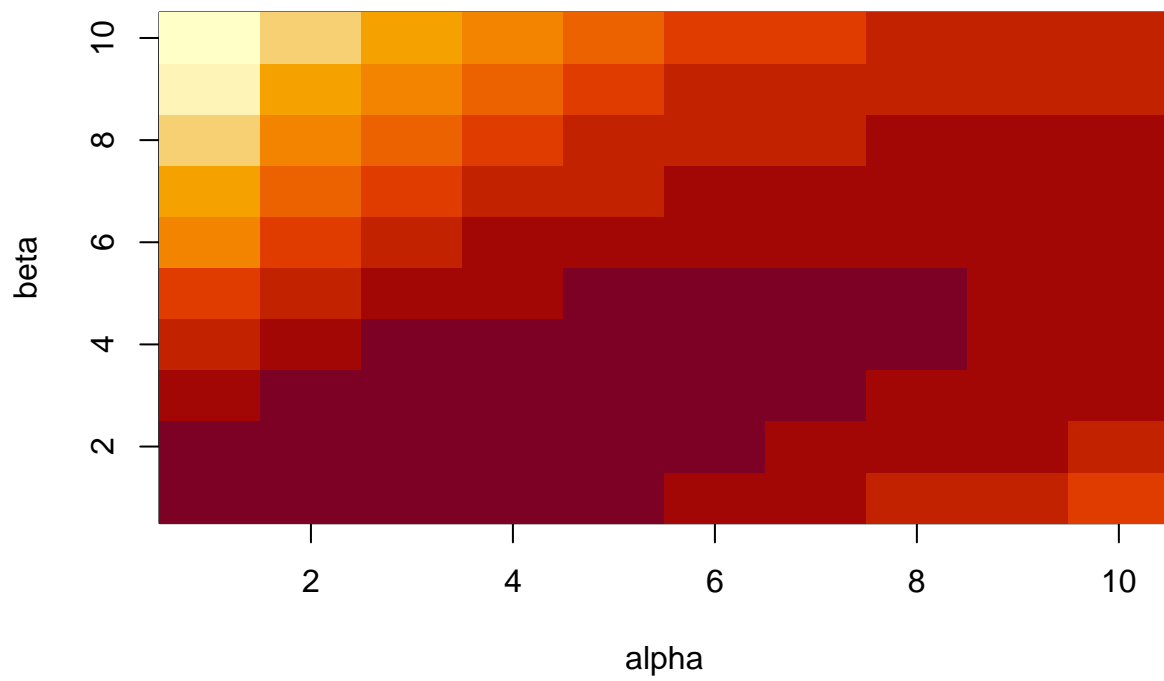


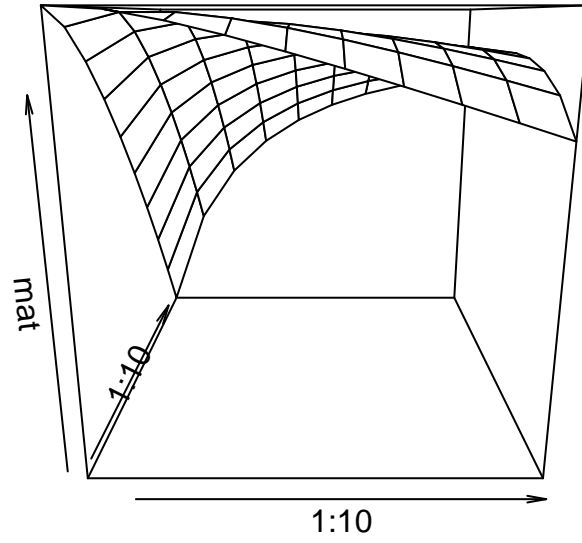


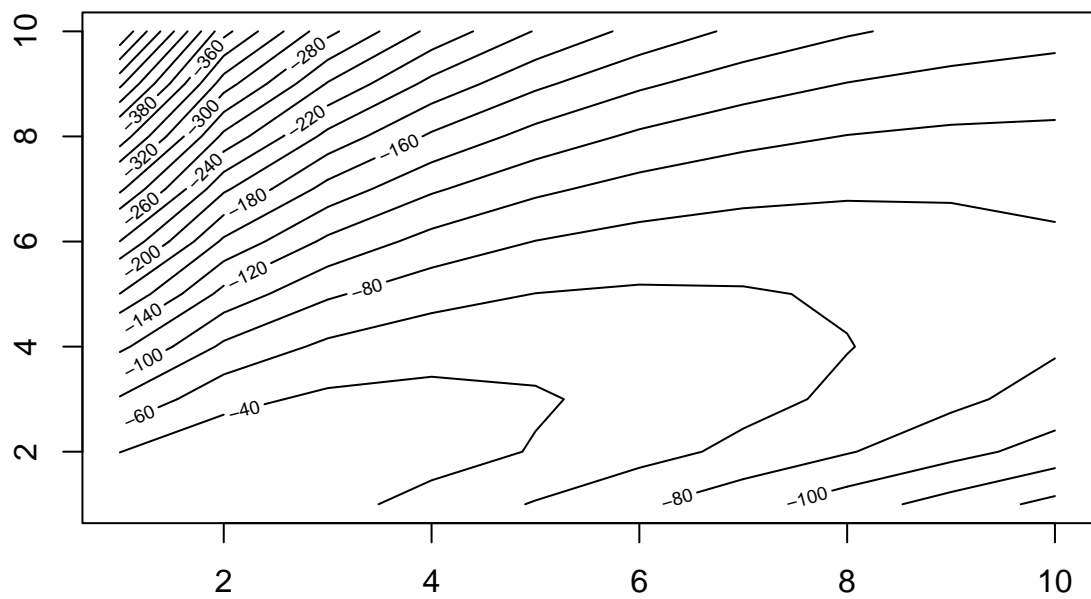


Histogram of allgamma[, i]

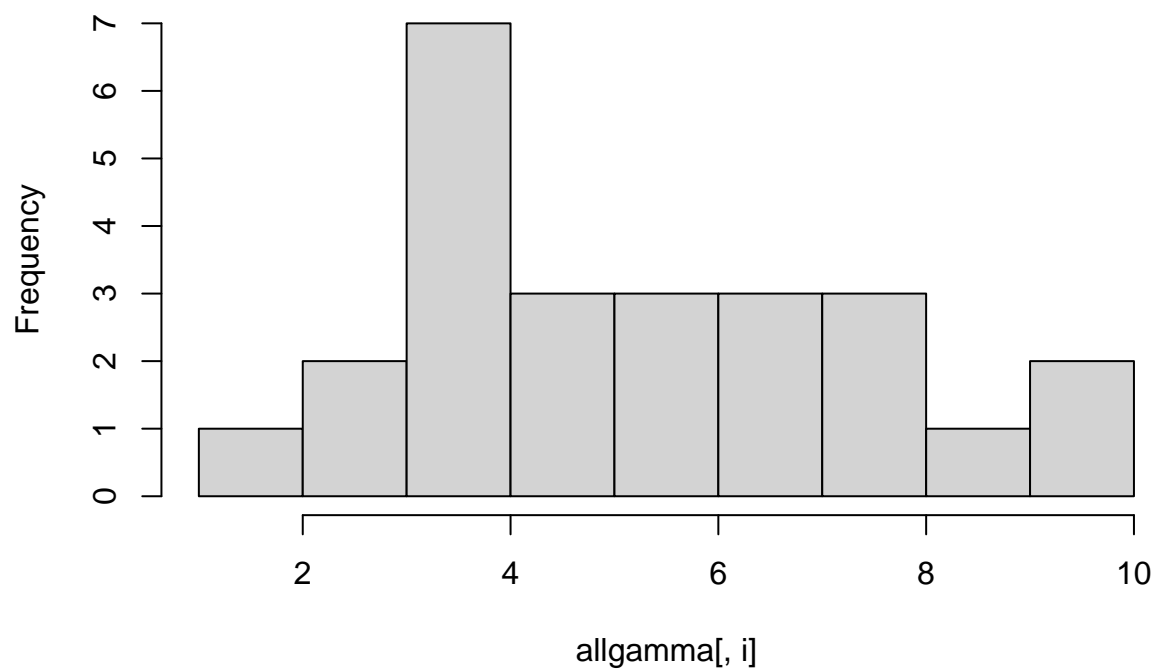


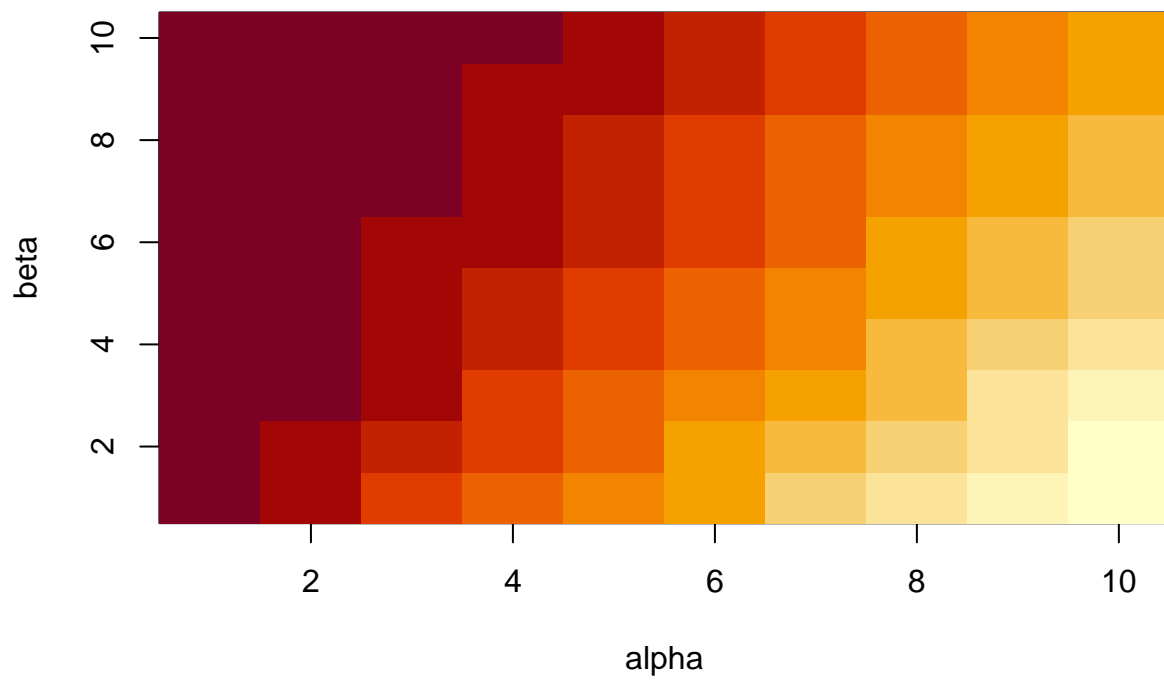


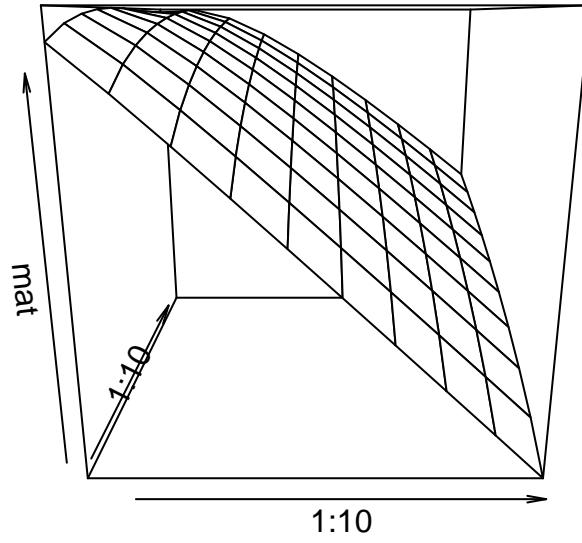


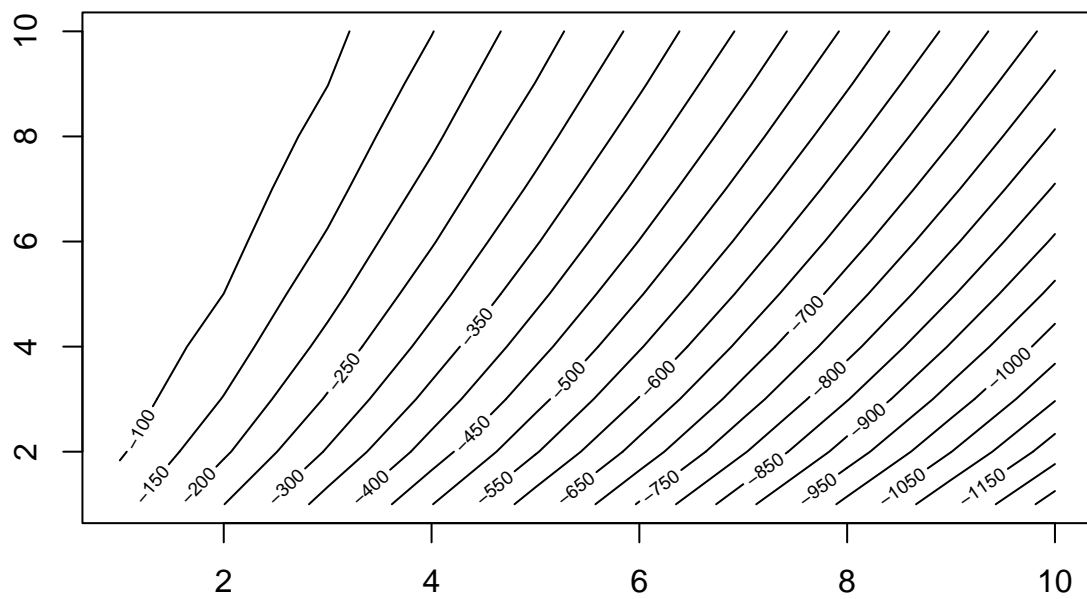


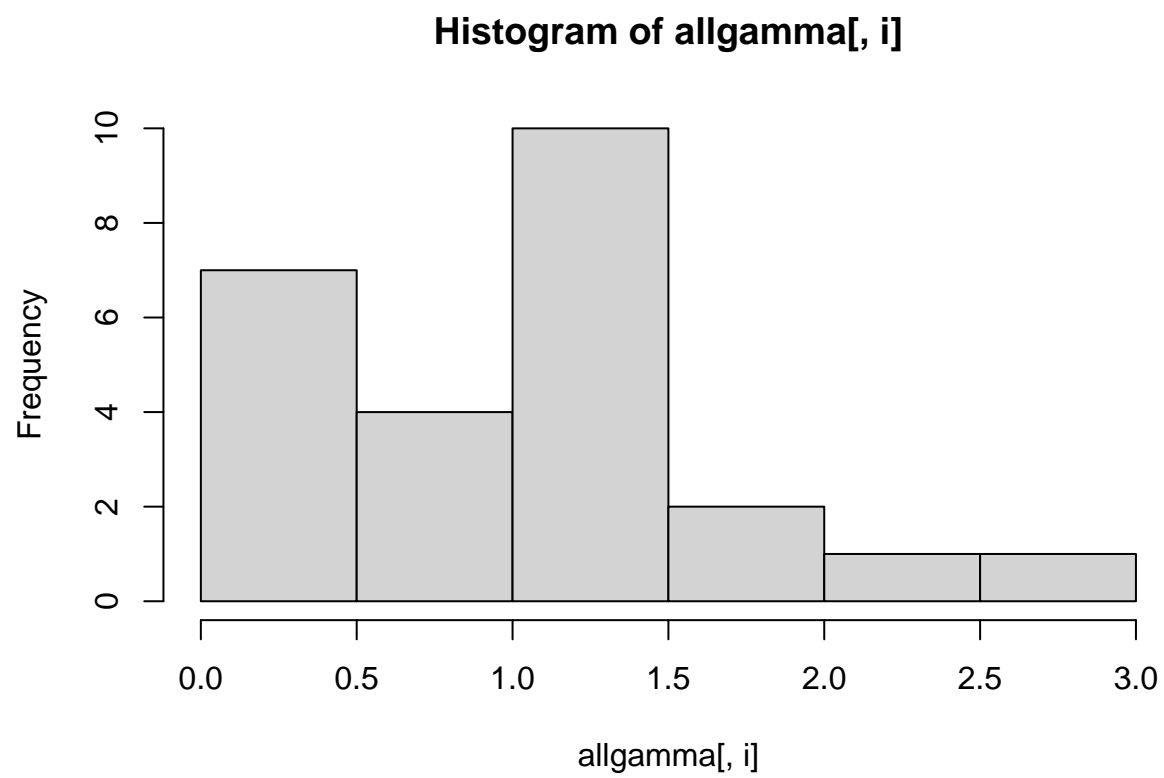
Histogram of allgamma[, i]

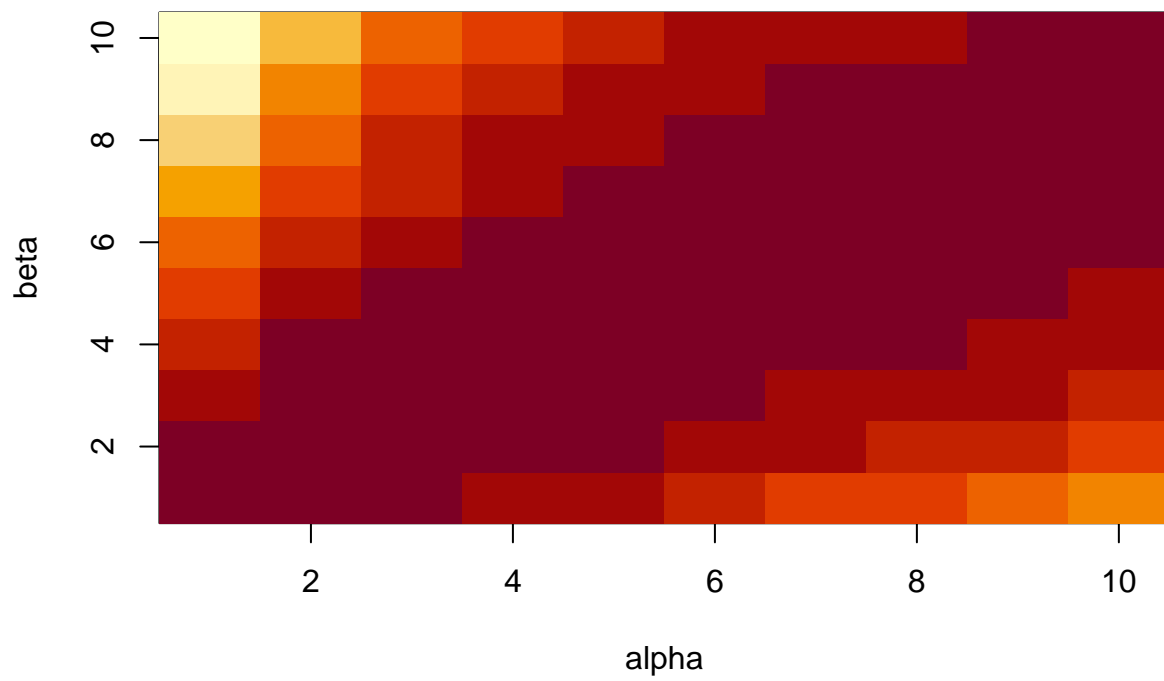


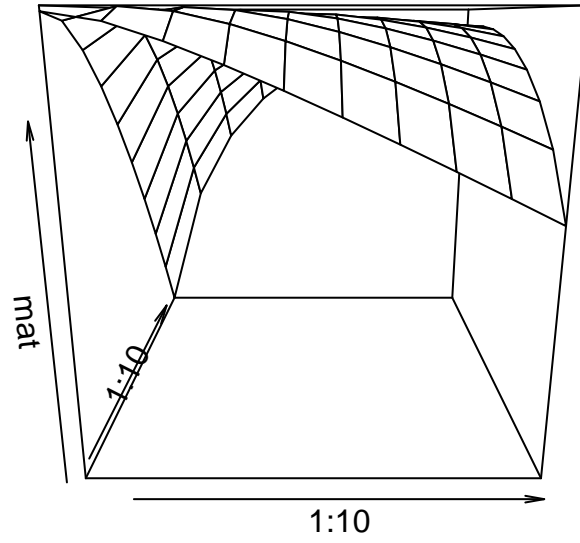


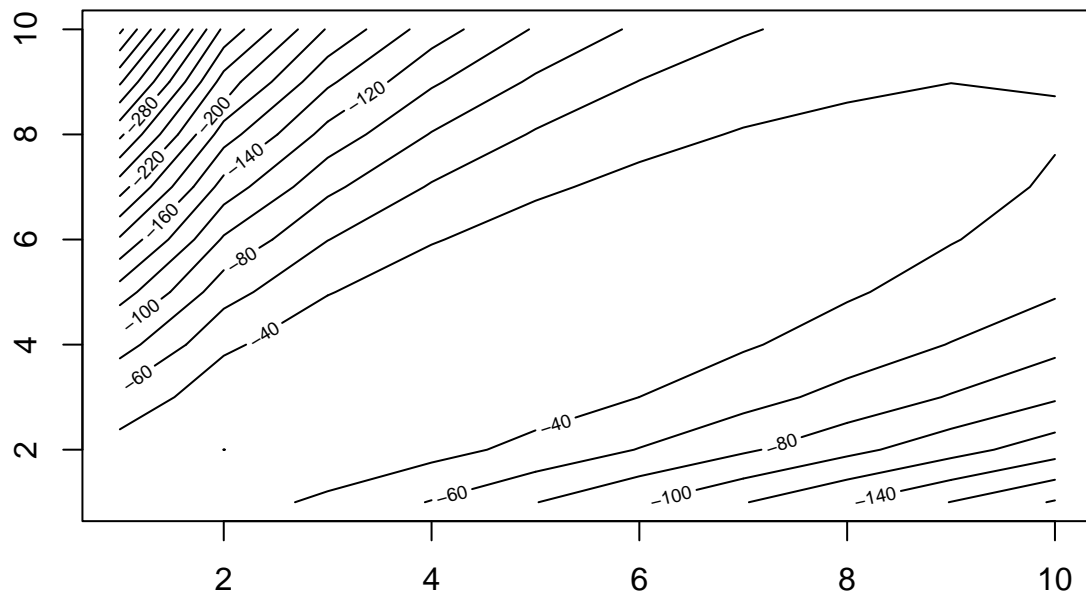








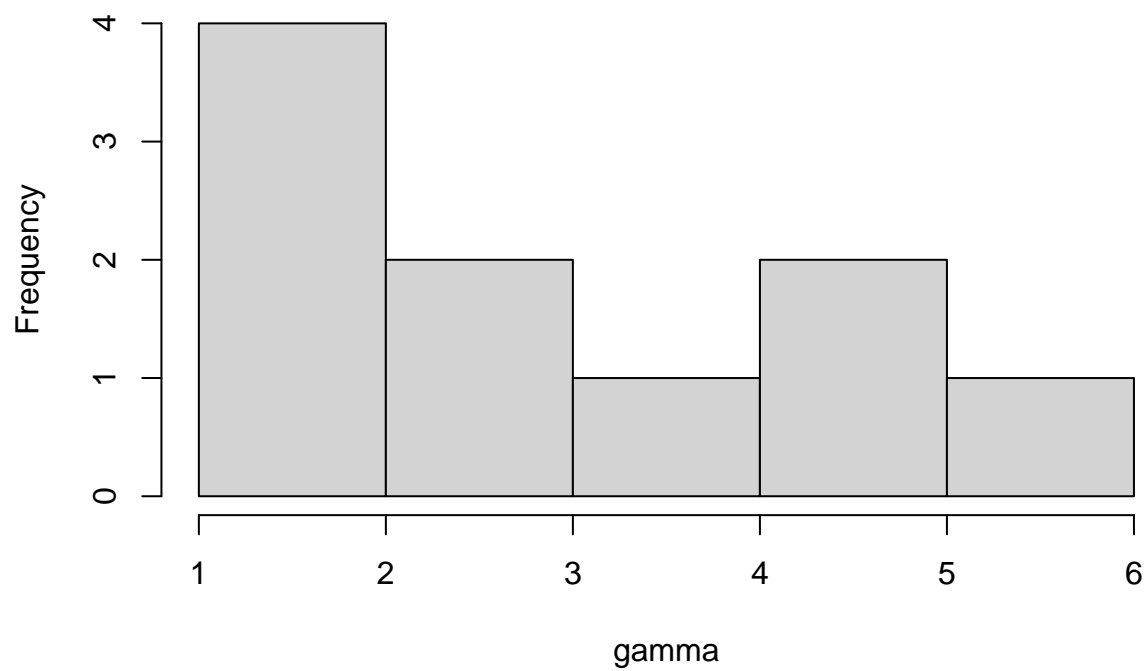


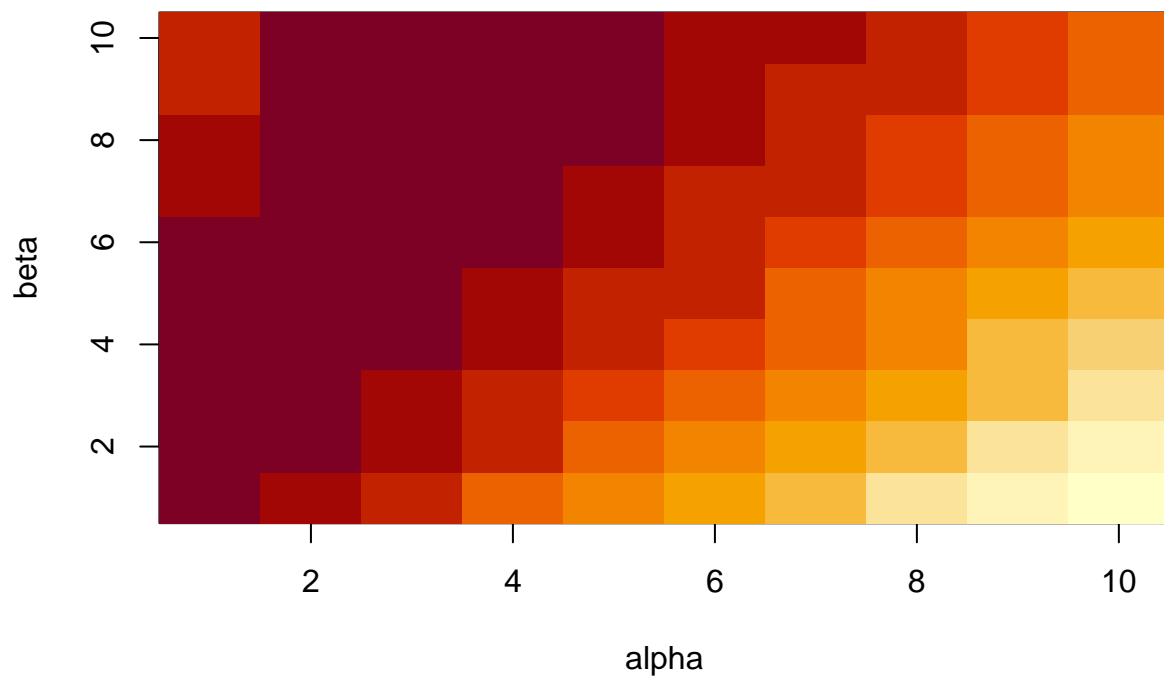


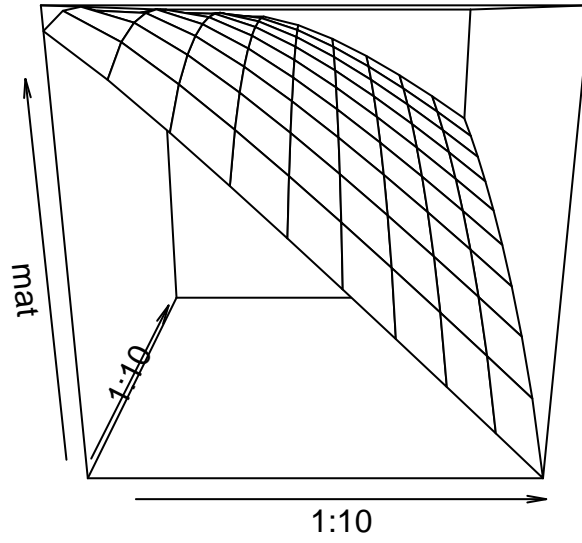
10. Répétez pour les tailles d'échantillon croissantes $n = 10, 25, 50, 100$. Commentez.

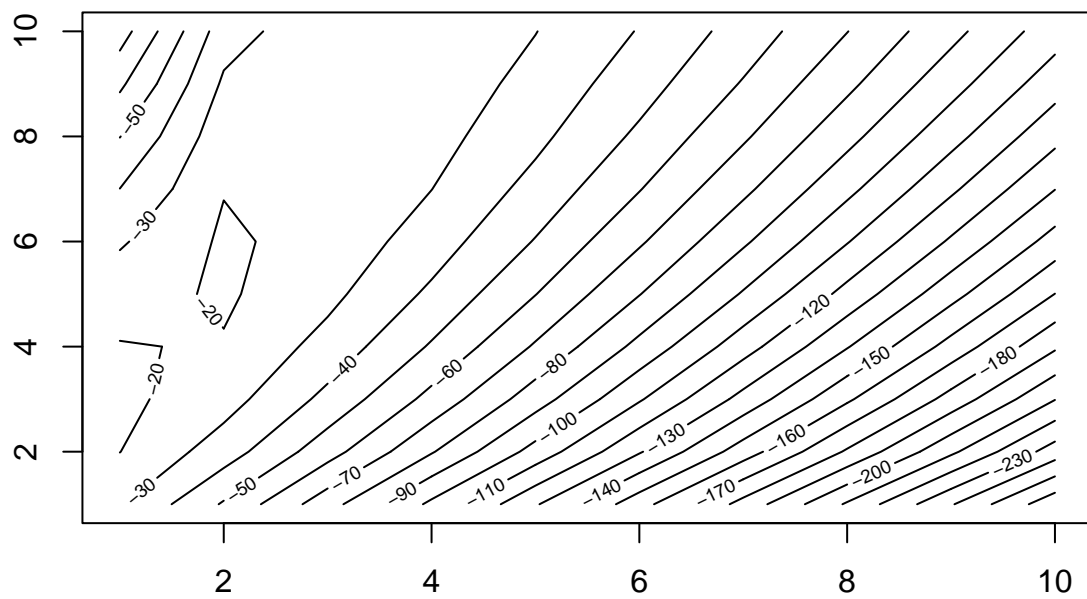
```
for(n in c(10,25,50,100)){
  dataloggamma <- c()
  gamma <- rgamma(n, 3, 1)
  hist(gamma)
  for(a in 1:10){
    for(b in 1:10){
      dataloggamma <- c(dataloggamma, log_vgamma(gamma, a, b))
    }
  }
  mat <- matrix(data = dataloggamma, nrow = 10)
  image(1:10, 1:10, mat, xlab = "alpha", ylab = "beta")
  persp(1:10, 1:10, mat)
  contour(1:10,1:10, mat, nlevels = 25)
}
```

Histogram of gamma

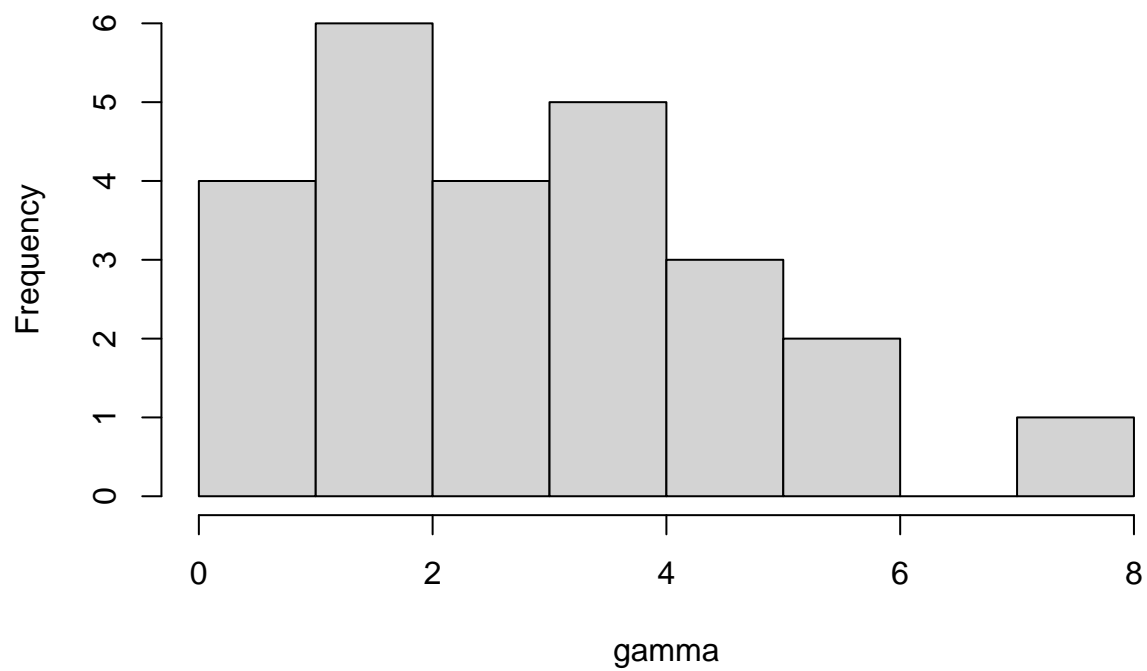


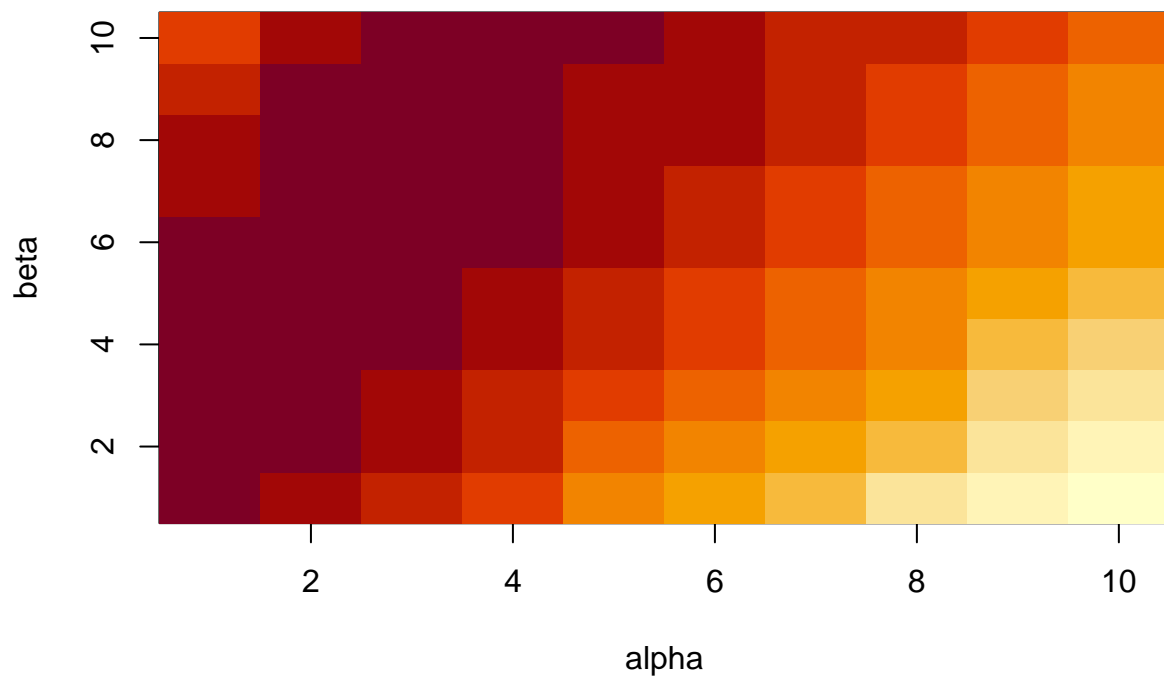


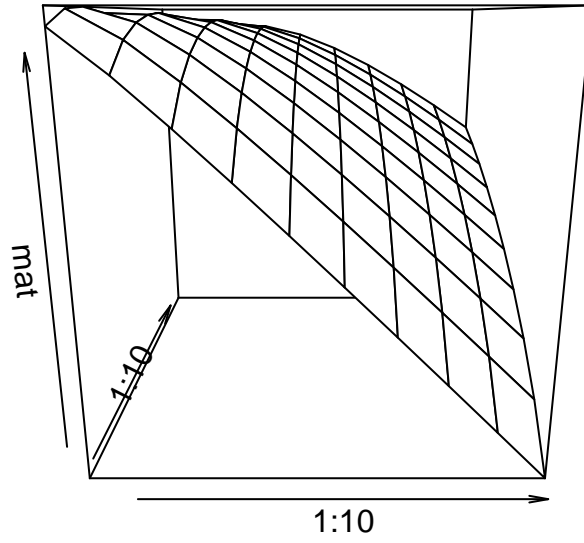


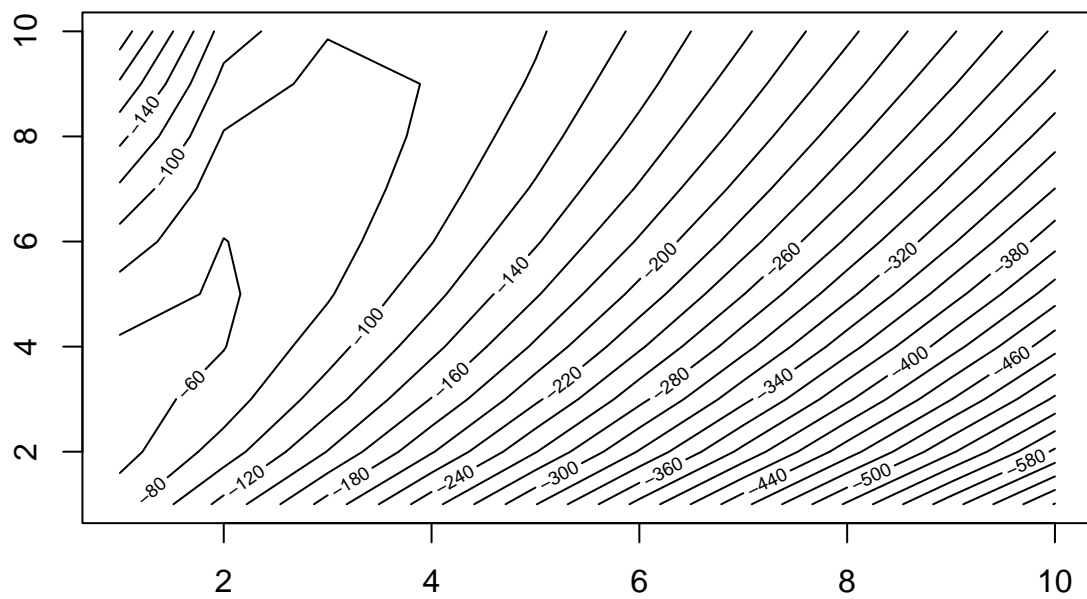


Histogram of gamma

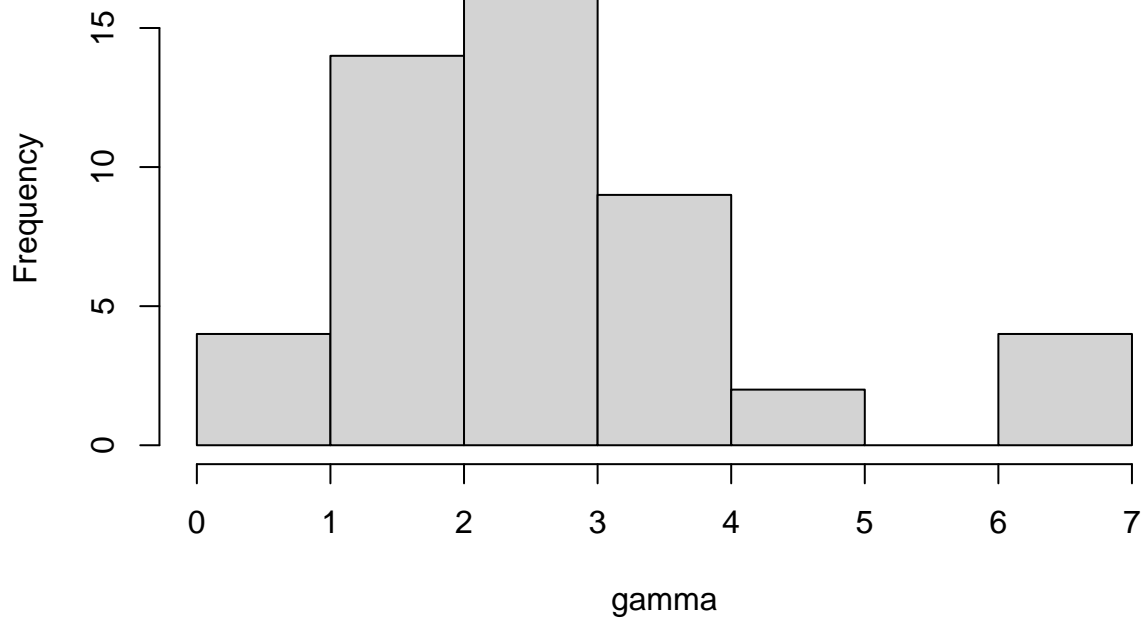


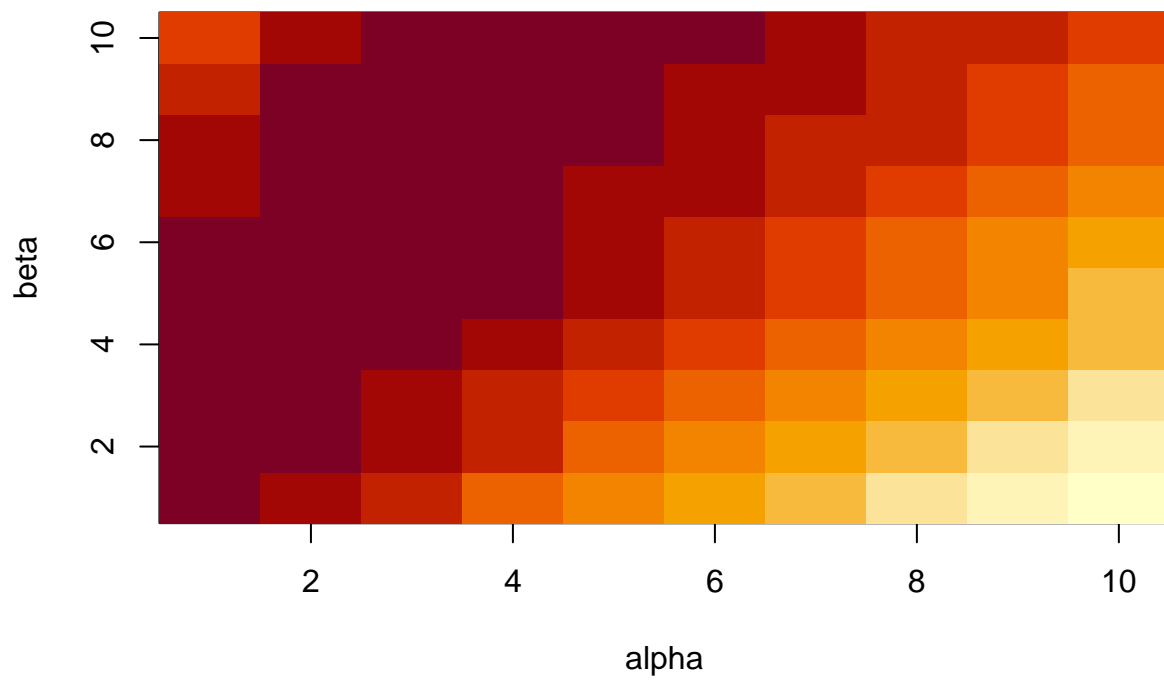


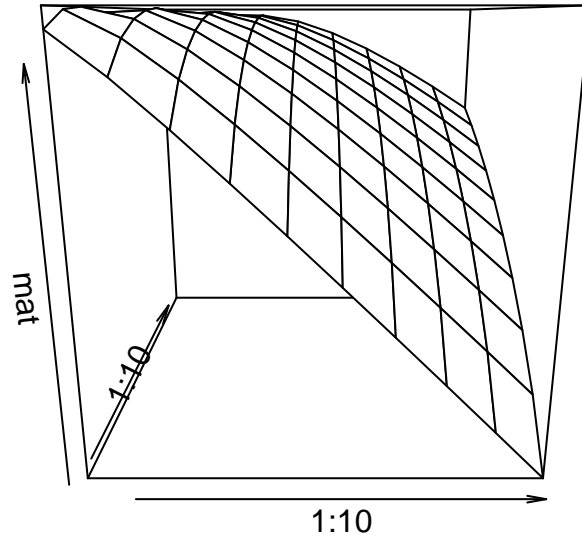


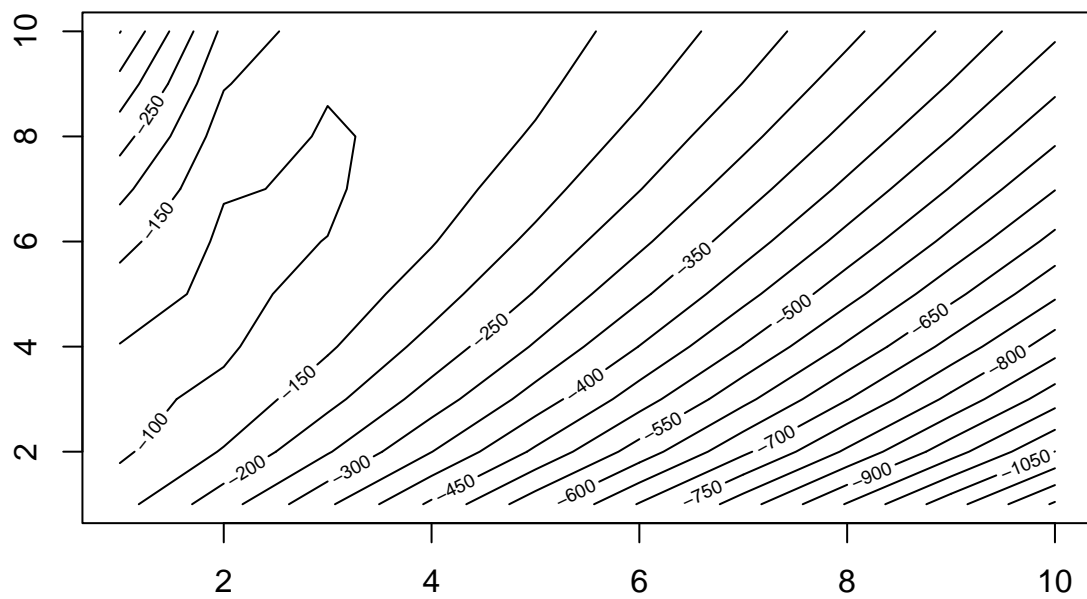


Histogram of gamma

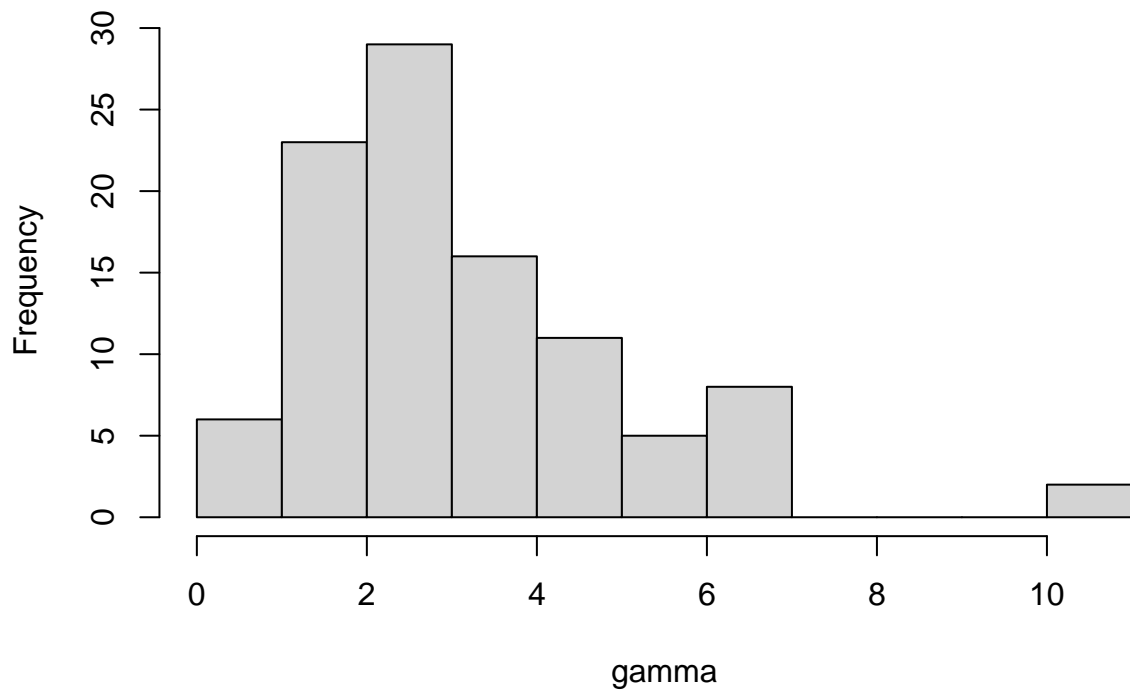


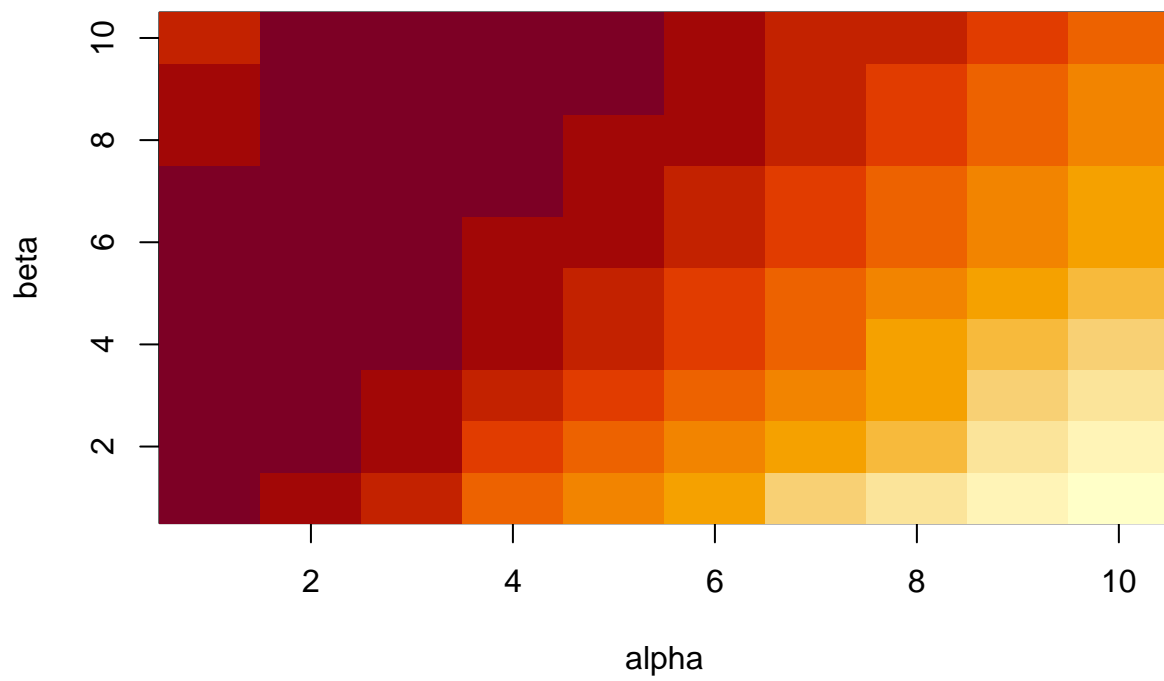


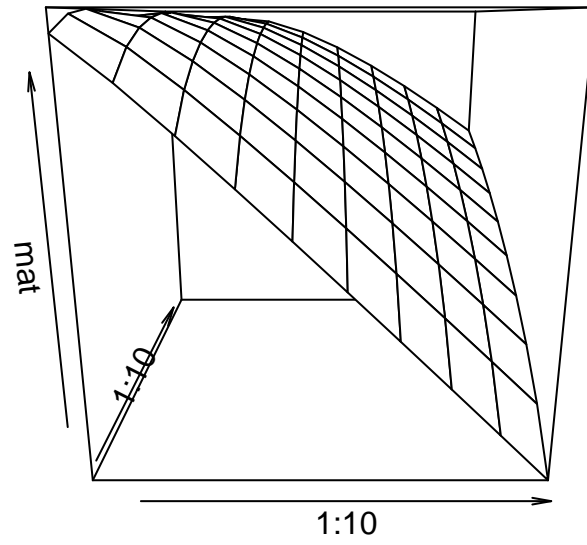


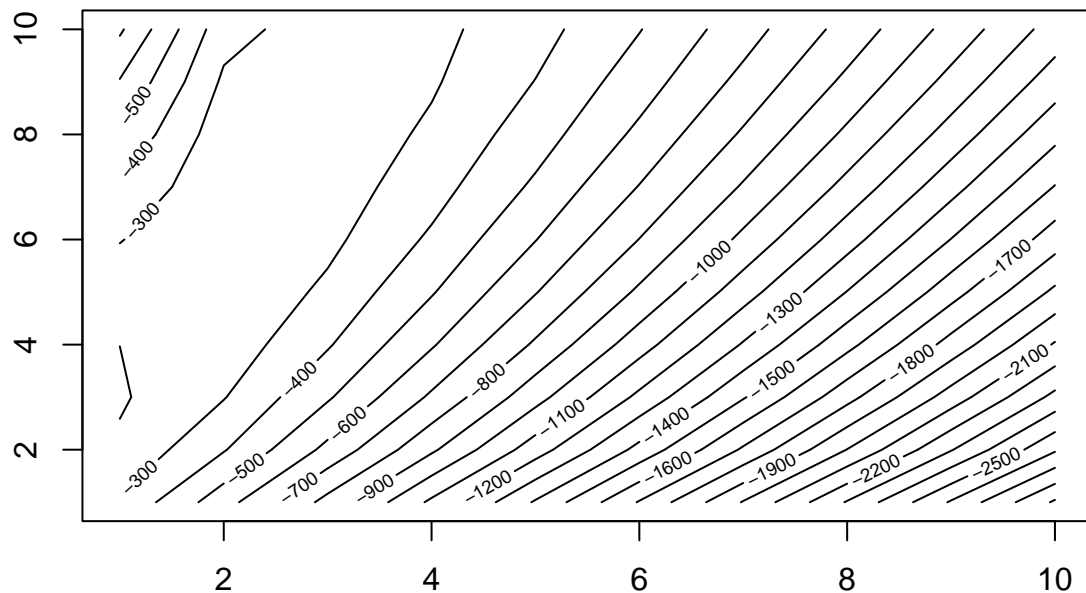


Histogram of gamma









11. En utilisant la fonction `optim`, trouver la valeur de θ la plus probable pour l'échantillon de normal. En fait, l'estimateur est défini explicitement pour le cas normal. Vérifiez la solution numérique avec la solution analytique.

```
log_v_inversgamma <- function(X, a, b){
  return (-sum(log(dgamma(X, a, b))))
}

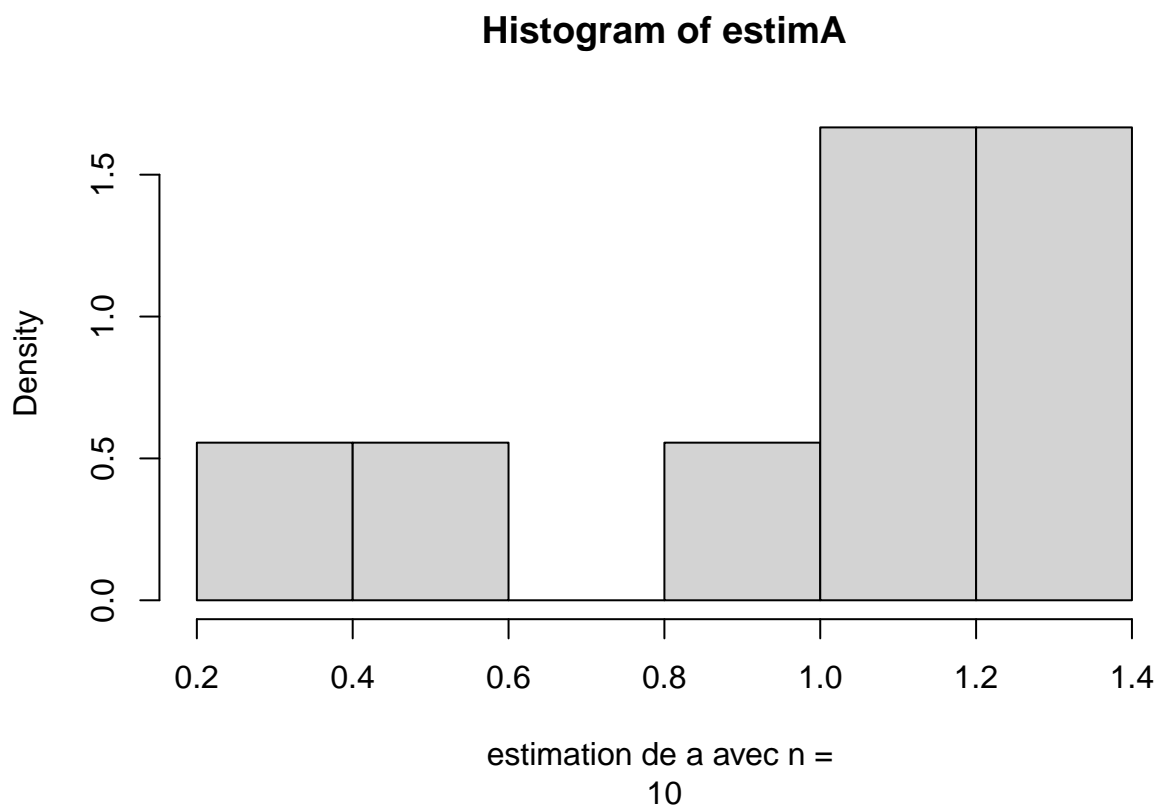
res <- optim(c(1, 1), function(theta) log_v_inversgamma(gamma0, theta[1], theta[2]))
res

## $par
## [1] 2.996436 1.159119
##
## $value
## [1] 42.4761
##
## $counts
## function gradient
##      87      NA
##
## $convergence
## [1] 0
##
## $message
## NULL
```

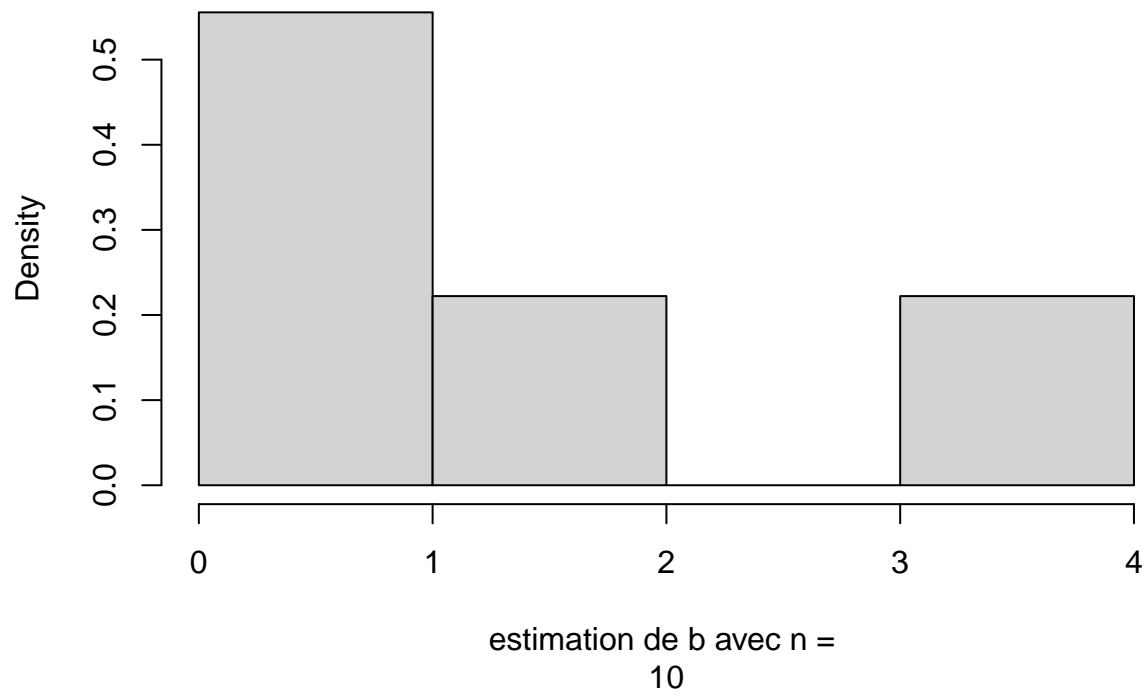
12. Testez avec des échantillons variés et trace l'histogramme de l'estimateur. Variez la taille de l'échantillons

$n = 10, 25, 50, 100$. et comparez l'écart entre la valeur théorique attendue et la valeur obtenue. Que remarquez-vous?

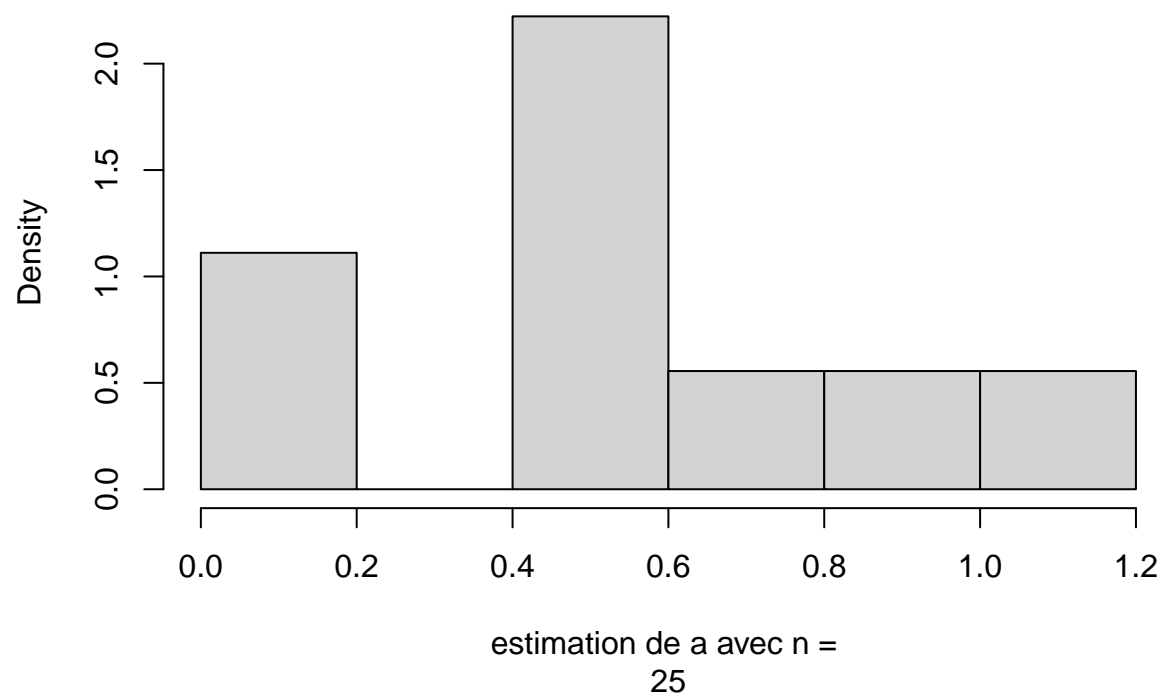
```
for(n in c(10,25,50,100)){
  estimA <- c()
  estimB <- c()
  for(a in c(2,3,5)){
    for(b in c(2,3,5)){
      gamma <- rgamma(n,a,b)
      res <- optim(c(1, 1), function(theta) log_v_inversgamma(gamma, theta[1], theta[2]))
      estimA <- c(estimA, abs(res$par[1]-a))
      estimB <- c(estimB, abs(res$par[2]-b))
    }
  }
  hist(estimA, freq = FALSE, xlab = paste(c("estimation de a avec n = ", n)))
  hist(estimB, freq = FALSE, xlab = paste(c("estimation de b avec n = ", n)))
}
```



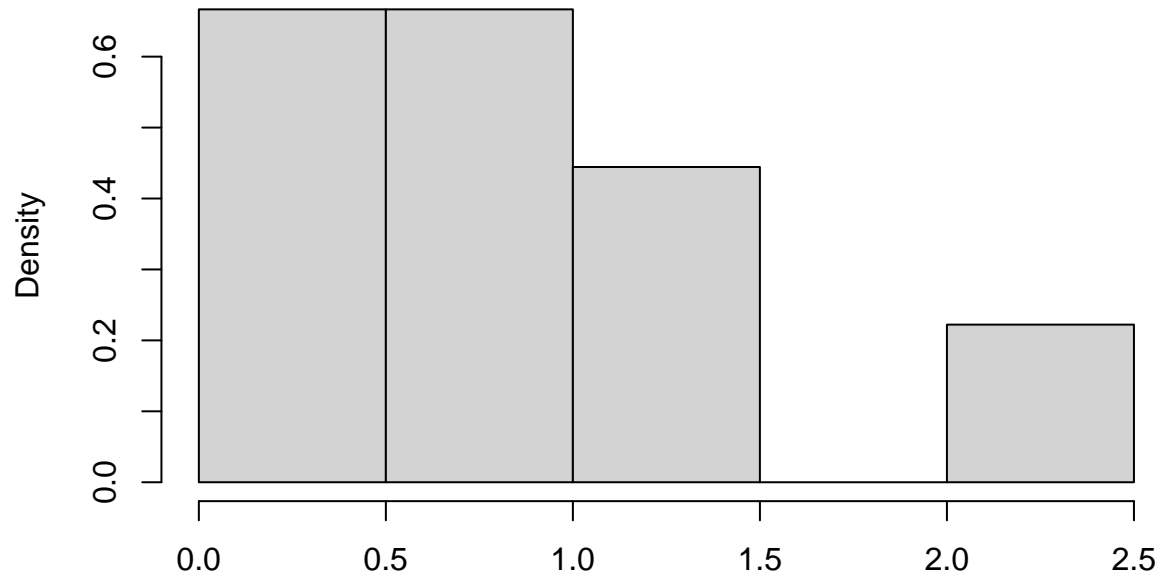
Histogram of estimB



Histogram of estimA

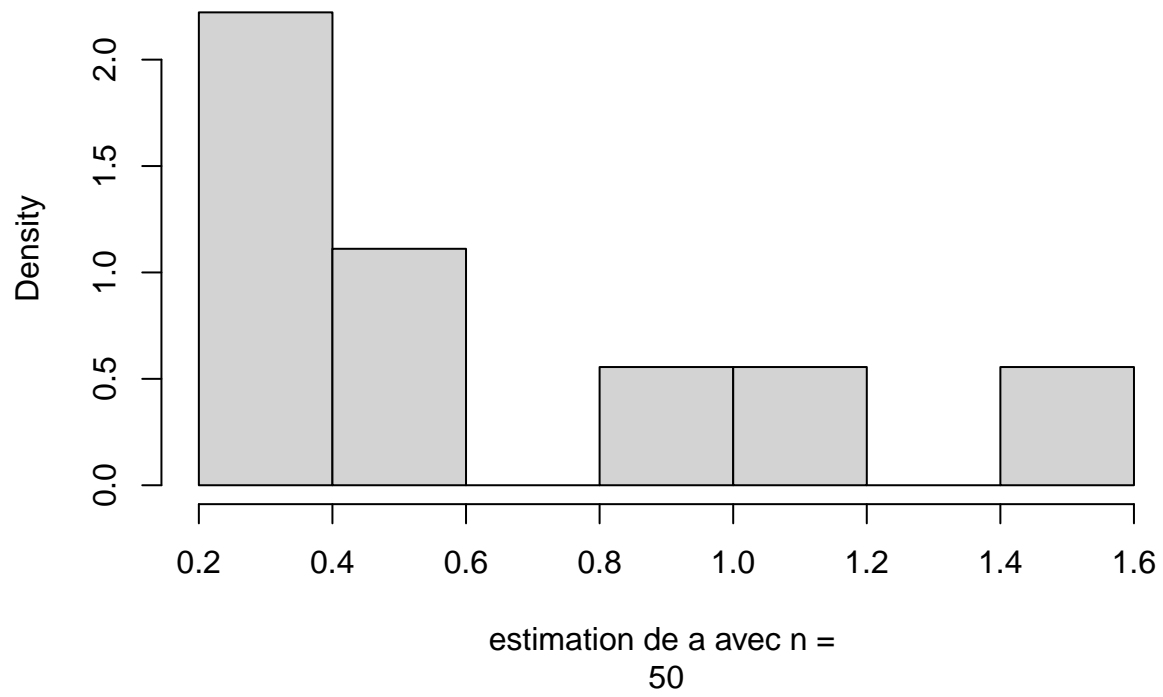


Histogram of estimB

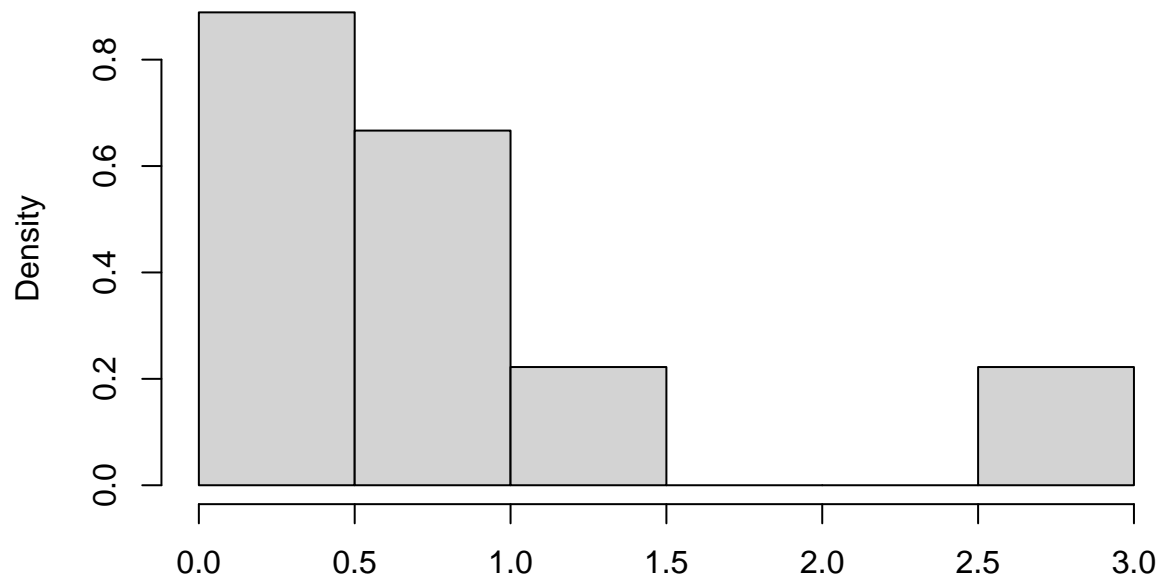


estimation de b avec n =
25

Histogram of estimA

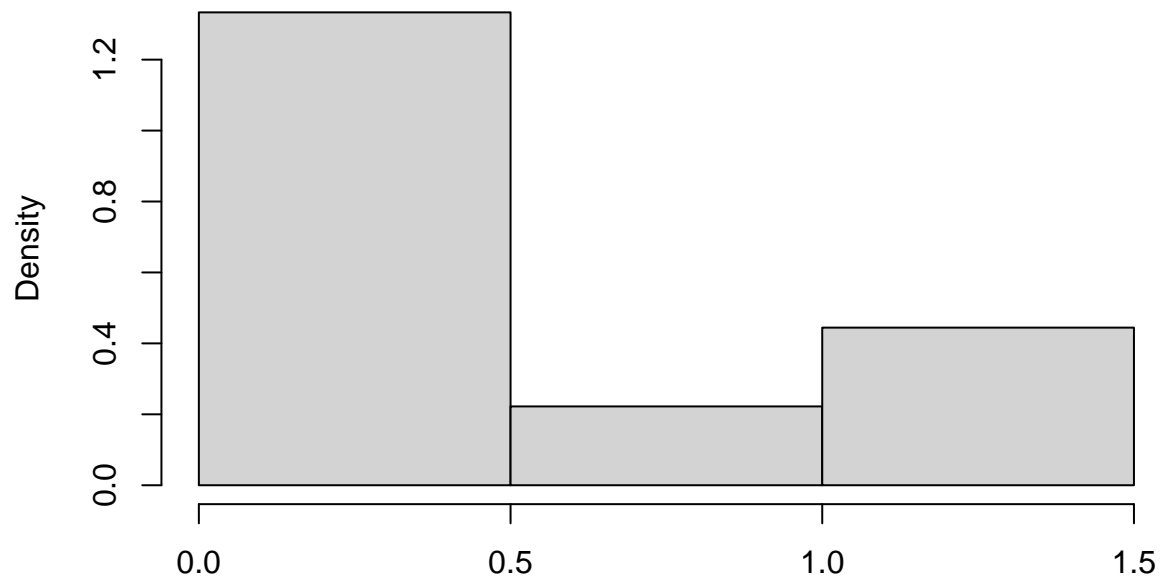


Histogram of estimB

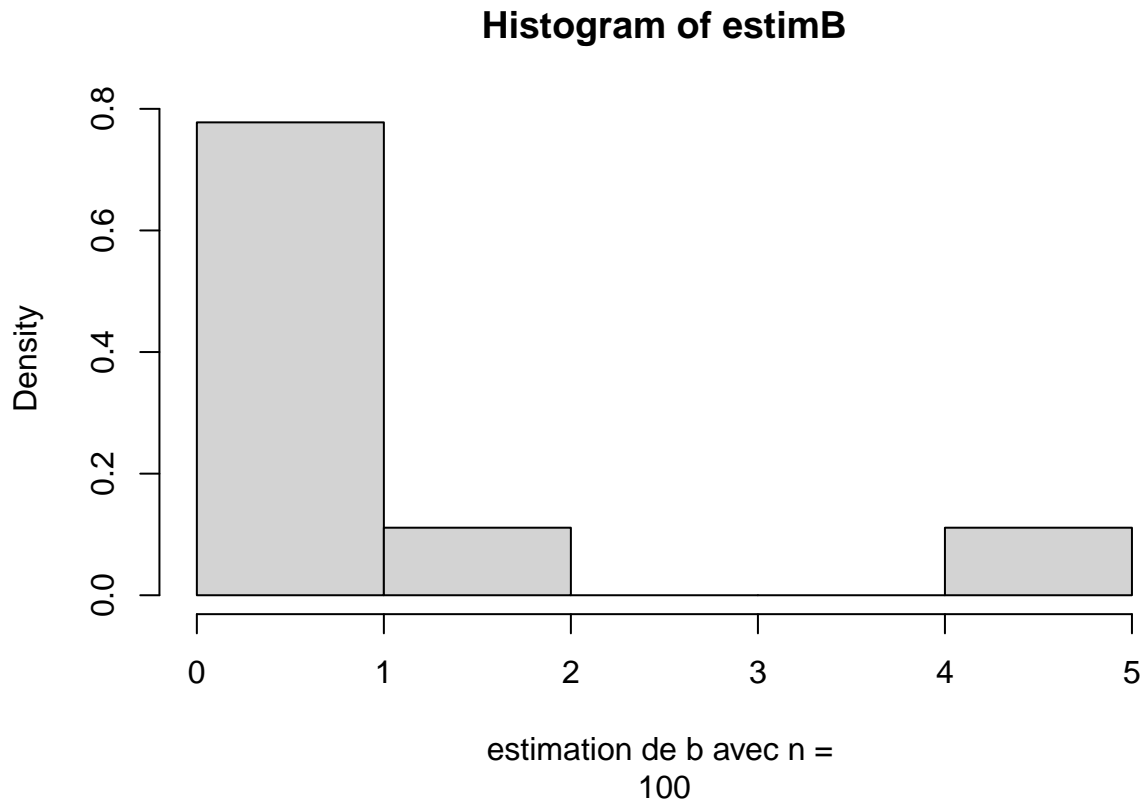


estimation de b avec n =
50

Histogram of estimA



estimation de a avec n =
100



On remarque que plus on augmente la taille de l'échantillon plus l'estimateur est fiable.

Application aux données sur l'ozone

13. Utilisez les données sur l'ozone ("summer_ozone.csv", "winter_ozone.csv") pour trouver l'estimateur de maximum de vraisemblance pour chaque site à chaque saison si on considère que c'est (i) une loi normale et (ii) une loi log normale. Comparez les résultats. Quel modèle préférez-vous et pourquoi?

```
summer <- read.csv("summer_ozone.csv")
winter <- read.csv("winter_ozone.csv")

log_vnormale <- function(X, a, b){
  return(-sum(log(dnorm(X, a, b))))
}

log_vlognormale <- function(X, a, b){
  return(-sum(log(dlnorm(X, a, b))))
}

#Loi normale

res_summer_neuil <- optim(c(100,100), function(theta) log_vnormale(summer$NEUIL, theta[1], theta[2]))
res_summer_rur <- optim(c(100,100), function(theta) log_vnormale(summer$RUR.SE, theta[1], theta[2]))

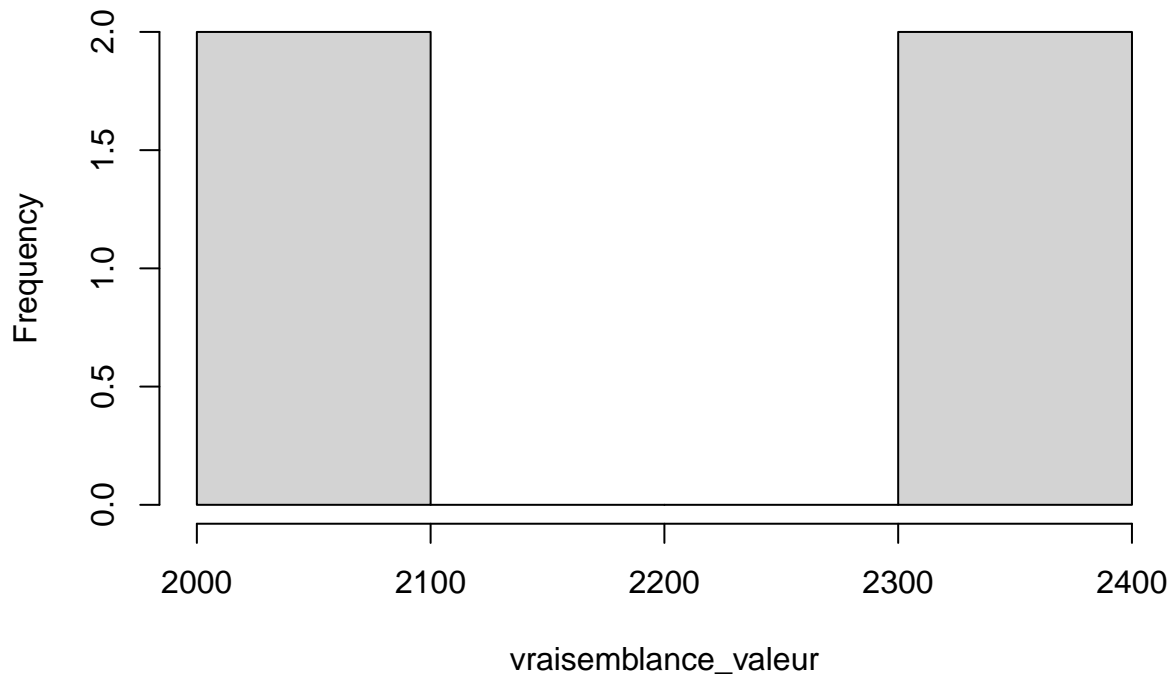
## Warning in dnorm(X, a, b): Production de NaN

res_winter_neuil <- optim(c(100,100), function(theta) log_vnormale(winter$NEUIL, theta[1], theta[2]))
```

```
## Warning in dnorm(X, a, b): Production de NaN
res_winter_rur <- optim(c(100,100), function(theta) log_vnormale(winter$RUR.SE, theta[1], theta[2]))

vraisemblance_valeur <- c(res_summer_neuil$value, res_summer_rur$value, res_winter_neuil$value, res_winter_rur$value)
hist(vraisemblance_valeur)
```

Histogram of vraisemblance_valeur



```
#Loi log normale

res_summer_neuil <- optim(c(10,10), function(theta) log_vlognormale(summer$NEUIL, theta[1], theta[2]))

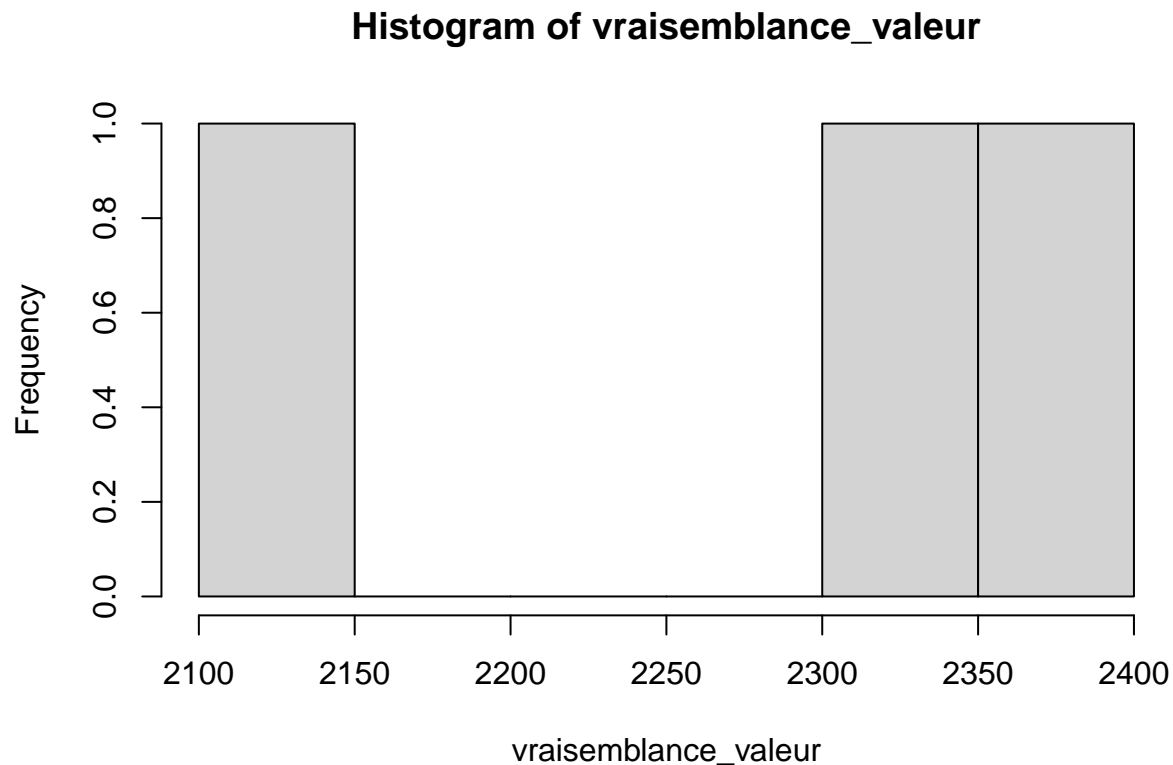
## Warning in dlnorm(X, a, b): Production de NaN
res_summer_rur <- optim(c(10,10), function(theta) log_vlognormale(summer$RUR.SE, theta[1], theta[2]))

## Warning in dlnorm(X, a, b): Production de NaN
## Warning in dlnorm(X, a, b): Production de NaN
## Warning in dlnorm(X, a, b): Production de NaN
## Warning in dlnorm(X, a, b): Production de NaN
## Warning in dlnorm(X, a, b): Production de NaN

#res_winter_neuil <- optim(c(5,5), function(theta) log_vlognormale(winter$NEUIL, theta[1], theta[2]))
res_winter_rur <- optim(c(10,10), function(theta) log_vlognormale(winter$RUR.SE, theta[1], theta[2]))

## Warning in dlnorm(X, a, b): Production de NaN
```

```
## Warning in dlnorm(X, a, b): Production de NaN
## Warning in dlnorm(X, a, b): Production de NaN
## Warning in dlnorm(X, a, b): Production de NaN
vraisemblance_valeur <- c(res_summer_neuil$value, res_summer_rur$value, res_winter_rur$value)
hist(vraisemblance_valeur)
```



```
winter$NEUIL # présence de 0
```

```
## [1] 42 51 31 36 58 40 32 33 60 57 31 24 36 34 41 32 10 15 2 4 27 49 15 1 10
## [26] 9 4 0 1 3 9 0 1 37 26 26 29 52 54 63 53 19 27 38 48 47 58 54 51 67
## [51] 48 47 50 41 63 41 23 26 43 50 44 44 54 11 5 17 49 55 59 60 60 56 64 62 45
## [76] 38 33 26 21 18 9 14 55 31 44 37 58 68 56 44 49 53 38 38 46 27 43 61 25 35
## [101] 34 5 51 54 43 38 32 20 40 58 60 67 73 61 45 75 70 8 5 25 49 44 54 59 55
## [126] 23 52 7 32 38 29 26 40 45 29 39 50 32 11 49 28 53 34 52 54 54 46 40 66 43
## [151] 57 67 56 56 59 48 49 41 29 35 0 0 8 7 32 11 21 6 37 59 44 60 59 66 59
## [176] 57 41 44 61 75 70 65 69 47 45 50 43 47 38 22 27 54 60 63 65 63 24 55 23 17
## [201] 67 53 37 41 45 44 14 33 10 11 39 51 70 58 61 54 58 16 5 4 2 46 35 27 7
## [226] 3 0 29 36 42 50 57 18 11 9 16 32 36 28 17 10 38 43 50 61 60 20 5 26 21
## [251] 18 7 13 2 12 24 25 38 44 37 53 28 16 57 61 53 61 28 23 27 12 12 33 20 54
## [276] 24 21 45 54 61 45 57 69 63 85 83 32 30 50 47 47 32 31 26 25 37 7 6 1 29
## [301] 26 37 18 19 64 80 62 50 27 36 7 12 9 43 41 56 57 61 44 64 62 76 75 62 76
## [326] 60 71 52 30 15 35 35 32 29 21 27 61 66 57 57 54 57 58 46 65 43 34 35 42 67
## [351] 64 45 33 48 28 21 30 22 22 31 48 44 48 47 7 43 41 58 46 58 62 62 49 56 43
```

```
## [376] 60 42 2 26 21 14 4 4 35 21 4 26 29 41 51 45 51 57 55 23 49 60 72 78 47
## [401] 13 31 20 28 30 48 49 50 60 60 47 55 42 8 3 4 12 35 39 59 61 53 44 44 46
## [426] 41 50 55 45 60 45 50 37 29 35 11 25 47 26 16 50 37 61 43 37 50 48 39 43 47
## [451] 58 17 21 61 62 60 45 61 25 31 51 51 3
```

```
dlnorm(winter$NEUIL, 0, 10) # probabilité que 0 soit atteint par un loi log-normale est impossible
```

```
## [1] 0.0008857781 0.0007240533 0.0012132262 0.0010392556 0.0006334037
## [6] 0.0009317535 0.0011740263 0.0011372309 0.0006114444 0.0006449703
## [11] 0.0012132262 0.0015803995 0.0010392556 0.0011026265 0.0009081974
## [16] 0.0011740263 0.0038850547 0.0025638596 0.0198992533 0.0098781795
## [21] 0.0013994539 0.0007547868 0.0025638596 0.0398942280 0.0038850547
## [26] 0.0043269725 0.0098781795 0.0000000000 0.0398942280 0.0132180672
## [31] 0.0043269725 0.0000000000 0.0398942280 0.0010101715 0.0014550775
## [36] 0.0014550775 0.0012998416 0.0007095859 0.0006822819 0.0005811590
## [41] 0.0006956724 0.0020106219 0.0013994539 0.0009826378 0.0007711284
## [46] 0.0007881758 0.0006334037 0.0006822819 0.0007240533 0.0005450607
## [51] 0.0007711284 0.0007881758 0.0007391082 0.0009081974 0.0005811590
## [56] 0.0009081974 0.0016513297 0.0014550775 0.0008644156 0.0007391082
## [61] 0.0008440374 0.0008440374 0.0006822819 0.0035239653 0.0078761743
## [66] 0.0022543976 0.0007547868 0.0006693855 0.0006222351 0.0006114444
## [71] 0.0006114444 0.0006569566 0.0005717045 0.0005909234 0.0008245774
## [76] 0.0009826378 0.0011372309 0.0014550775 0.0018136903 0.0021256734
## [81] 0.0043269725 0.0027520641 0.0006693855 0.0012132262 0.0008440374
## [86] 0.0010101715 0.0006334037 0.0005367100 0.0006569566 0.0008440374
## [91] 0.0007547868 0.0006956724 0.0009826378 0.0009826378 0.0008059753
## [96] 0.0013994539 0.0008644156 0.0006010130 0.0015152039 0.0010700240
## [101] 0.0011026265 0.0078761743 0.0007240533 0.0006822819 0.0008644156
## [106] 0.0009826378 0.0011740263 0.0019071831 0.0009317535 0.0006334037
## [111] 0.0006114444 0.0005450607 0.0004984420 0.0006010130 0.0008245774
## [116] 0.0004845862 0.0005207360 0.0048801196 0.0078761743 0.0015152039
## [121] 0.0007547868 0.0008440374 0.0006822819 0.0006222351 0.0006693855
## [126] 0.0016513297 0.0007095859 0.0055922889 0.0011740263 0.0009826378
## [131] 0.0012998416 0.0014550775 0.0009317535 0.0008245774 0.0012998416
## [136] 0.0009565345 0.0007391082 0.0011740263 0.0035239653 0.0007547868
## [141] 0.0013478479 0.0006956724 0.0011026265 0.0007095859 0.0006822819
## [146] 0.0006822819 0.0008059753 0.0009317535 0.0005536685 0.0008644156
## [151] 0.0006449703 0.0005450607 0.0006569566 0.0006569566 0.0006222351
## [156] 0.0007711284 0.0007547868 0.0009081974 0.0012998416 0.0010700240
## [161] 0.0000000000 0.0000000000 0.0048801196 0.0055922889 0.0011740263
## [166] 0.0035239653 0.0018136903 0.0065431596 0.0010101715 0.0006222351
## [171] 0.0008440374 0.0006114444 0.0006222351 0.0005536685 0.0006222351
## [176] 0.0006449703 0.0009081974 0.0008440374 0.0006010130 0.0004845862
## [181] 0.0005207360 0.0005625456 0.0005286054 0.0007881758 0.0008245774
## [186] 0.0007391082 0.0008644156 0.0007881758 0.0009826378 0.0017287809
## [191] 0.0013994539 0.0006822819 0.0006114444 0.0005811590 0.0005625456
## [196] 0.0005811590 0.0015803995 0.0006693855 0.0016513297 0.0022543976
## [201] 0.0005450607 0.0006956724 0.0010101715 0.0009081974 0.0008245774
## [206] 0.0008440374 0.0027520641 0.0011372309 0.0038850547 0.0035239653
## [211] 0.0009565345 0.0007240533 0.0005207360 0.0006334037 0.0006010130
## [216] 0.0006822819 0.0006334037 0.0023993712 0.0078761743 0.0098781795
## [221] 0.0198992533 0.0008059753 0.0010700240 0.0013994539 0.0055922889
## [226] 0.0132180672 0.0000000000 0.0012998416 0.0010392556 0.0008857781
## [231] 0.0007391082 0.0006449703 0.0021256734 0.0035239653 0.0043269725
## [236] 0.0023993712 0.0011740263 0.0010392556 0.0013478479 0.0022543976
```



```

## [241] 0.0038850547 0.0009826378 0.0008644156 0.0007391082 0.0006010130
## [246] 0.0006114444 0.0019071831 0.0078761743 0.0014550775 0.0018136903
## [251] 0.0021256734 0.0055922889 0.0029694818 0.0198992533 0.0032234467
## [256] 0.0015803995 0.0015152039 0.0009826378 0.0008440374 0.0010101715
## [261] 0.0006956724 0.0013478479 0.0023993712 0.0006449703 0.0006010130
## [266] 0.0006956724 0.0006010130 0.0013478479 0.0016513297 0.0013994539
## [271] 0.0032234467 0.0032234467 0.0011372309 0.0019071831 0.0006822819
## [276] 0.0015803995 0.0018136903 0.0008245774 0.0006822819 0.0006010130
## [281] 0.0008245774 0.0006449703 0.0005286054 0.0005811590 0.0004252384
## [286] 0.0004359448 0.0011740263 0.0012550728 0.0007391082 0.0007881758
## [291] 0.0007881758 0.0011740263 0.0012132262 0.0014550775 0.0015152039
## [296] 0.0010101715 0.0055922889 0.0065431596 0.0398942280 0.0012998416
## [301] 0.0014550775 0.0010101715 0.0021256734 0.0020106219 0.0005717045
## [306] 0.0004530260 0.0005909234 0.0007391082 0.0013994539 0.0010392556
## [311] 0.0055922889 0.0032234467 0.0043269725 0.0008644156 0.0009081974
## [316] 0.0006569566 0.0006449703 0.0006010130 0.0008440374 0.0005717045
## [321] 0.0005909234 0.0004779362 0.0004845862 0.0005909234 0.0004779362
## [326] 0.0006114444 0.0005130918 0.0007095859 0.0012550728 0.0025638596
## [331] 0.0010700240 0.0010700240 0.0011740263 0.0012998416 0.0018136903
## [336] 0.0013994539 0.0006010130 0.0005536685 0.0006449703 0.0006449703
## [341] 0.0006822819 0.0006449703 0.0006334037 0.0008059753 0.0005625456
## [346] 0.0008644156 0.0011026265 0.0010700240 0.0008857781 0.0005450607
## [351] 0.0005717045 0.0008245774 0.0011372309 0.0007711284 0.0013478479
## [356] 0.0018136903 0.0012550728 0.0017287809 0.0017287809 0.0012132262
## [361] 0.0007711284 0.0008440374 0.0007711284 0.0007881758 0.0055922889
## [366] 0.0008644156 0.0009081974 0.0006334037 0.0008059753 0.0006334037
## [371] 0.0005909234 0.0005909234 0.0007547868 0.0006569566 0.0008644156
## [376] 0.0006114444 0.0008857781 0.0198992533 0.0014550775 0.0018136903
## [381] 0.0027520641 0.0098781795 0.0098781795 0.0010700240 0.0018136903
## [386] 0.0098781795 0.0014550775 0.0012998416 0.0009081974 0.0007240533
## [391] 0.0008245774 0.0007240533 0.0006449703 0.0006693855 0.0016513297
## [396] 0.0007547868 0.0006114444 0.0005056635 0.0004651563 0.0007881758
## [401] 0.0029694818 0.0012132262 0.0019071831 0.0013478479 0.0012550728
## [406] 0.0007711284 0.0007547868 0.0007391082 0.0006114444 0.0006114444
## [411] 0.0007881758 0.0006693855 0.0008857781 0.0048801196 0.0132180672
## [416] 0.0098781795 0.0032234467 0.0010700240 0.0009565345 0.0006222351
## [421] 0.0006010130 0.0006956724 0.0008440374 0.0008440374 0.0008059753
## [426] 0.0009081974 0.0007391082 0.0006693855 0.0008245774 0.0006114444
## [431] 0.0008245774 0.0007391082 0.0010101715 0.0012998416 0.0010700240
## [436] 0.0035239653 0.0015152039 0.0007881758 0.0014550775 0.0023993712
## [441] 0.0007391082 0.0010101715 0.0006010130 0.0008644156 0.0010101715
## [446] 0.0007391082 0.0007711284 0.0009565345 0.0008644156 0.0007881758
## [451] 0.0006334037 0.0022543976 0.0018136903 0.0006010130 0.0005909234
## [456] 0.0006114444 0.0008245774 0.0006010130 0.0015152039 0.0012132262
## [461] 0.0007240533 0.0007240533 0.0132180672

```

```
log_vlognormale(winter$NEUIL, 0,10) # vraisemblance infinie
```

```
## [1] Inf
```