Term Rewriting System 入門

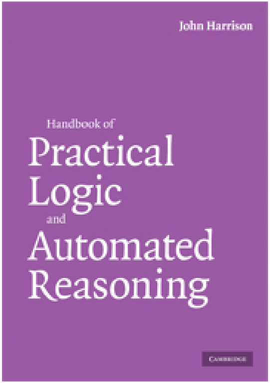
服部桃子

June 2, 2019

Contents

Handbook of Practical Logic and Automated Reasoning の 4.5〜4.7 節

1. 前回の問題設定
2. 項書き換え系 (TRS)
   - 停止性, 合流性 (confluence)
3. Lexicographic Path Orders
4. Knuth-Bendix Completion



前回のあらすじ

- Egison 入門
- 導出原理の Egison での実装
- 群の公理から、$e \cdot x = x, \quad x^{-1} \cdot x = e$ を導きたい

群の公理

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$
$$x \cdot x^{-1} = e$$
$$x \cdot e = x$$

項書き換え系 (TRS) とは

- R : 書き換え規則 $l = r$ の集合
- 規則に従って与えられた項を書き換えていく
  - 左から右に書き換える
- 任意の「等しい」項が同じ標準形を持つと仮定すると、$s \stackrel{?}{=} t$ を示したいならば、s, t を標準形になるまで書き換えて比較すればよい

例: 自然数の足し算

$R = \{O + x = x, \quad S(x) + y = x + S(y)\}$

$$\begin{aligned} S(O) + S(S(O)) &\to O + S(S(S(O))) \quad () \\ &\to S(S(S(O))) \quad \leftarrow \text{標準形} \end{aligned}$$

項書き換え系 (TRS) とは

うまくいかない場合もある

停止性がない場合

$R = \{x + y = y + x\}$

$$a + b \to b + a \to a + b \to b + a \to a + b \to \cdots$$

合流性がない場合

$R = \{x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z\}$

$$\begin{aligned}
(a + b) \cdot (c + d) &\to a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) \\
&\to^* (a \cdot c + a \cdot d) + (b \cdot c + b \cdot d) \\
(a + b) \cdot (c + d) &\to (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d \\
&\to^* (a \cdot c + a \cdot c) + (a \cdot d + b \cdot d)
\end{aligned}$$

停止性・合流性

X : 集合　　$\to$: X 上の簡約関係 (2 項関係)

定義

x が正規形である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\neg(\exists y \in X.\, x \to y)$

簡約関係が停止性を持つ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 無限の簡約列が存在しない

x と y が合流可能 $(x \downarrow y)$ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists z.\, x \to^* z \land y \to^* z$

停止性・合流性

定義

簡約関係 $\rightarrow$ が合流性を持つ

$$\overset{\text{def}}{\iff} \forall x, y, z. \, (x \rightarrow y \wedge x \rightarrow z) \Rightarrow \exists w. \, y \rightarrow^{*} w \wedge z \rightarrow^{*} w$$

ダイアモンド性

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
y \arrow[dr] & & z \arrow[dl] \\
 & w &
\end{tikzcd}$$

合流性

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
y \arrow[dr, two heads, blue] & & z \arrow[dl, two heads, blue] \\
 & w &
\end{tikzcd}$$

弱合流性

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dl, two heads, blue] \arrow[dr, two heads, blue] & \\
y \arrow[dr, two heads, blue] & & z \arrow[dl, two heads, blue] \\
 & w &
\end{tikzcd}$$