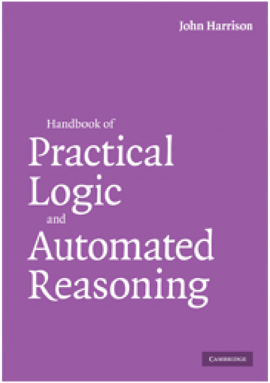
項書き換え系入門

服部桃子

June 10, 2019

Contents

Handbook of Practical Logic and Automated Reasoning の 4.5〜4.7 節



前回のあらすじ

- Egison 入門
- 導出原理の Egison での実装
- 群の公理から、$e \cdot x = x, \quad x^{-1} \cdot x = e$ を導きたい

群の公理

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$
$$x \cdot x^{-1} = e$$
$$x \cdot e = x$$

TRS / 概要

- R : 書き換え規則 $l = r$ の集合
- 規則に従って与えられた項を書き換えていく
  - 左から右に書き換える
- 任意の「等しい」項が同じ標準形を持つと仮定すると、$s \stackrel{?}{=} t$ を示したいならば、s, t を標準形になるまで書き換えて比較すればよい

例: 自然数の足し算

$R = \{O + x = x, \quad S(x) + y = x + S(y)\}$

$$\begin{aligned} S(O) + S(S(O)) &\to O + S(S(S(O))) \quad () \\ &\to S(S(S(O))) \quad \leftarrow \text{標準形} \end{aligned}$$

TRS / 概要

うまくいかない場合もある

停止性がない場合

$R = \{x + y = y + x\}$

$$a + b \to b + a \to a + b \to b + a \to a + b \to \cdots$$

合流性がない場合

$R = \{x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z\}$

$$\begin{aligned}
(a + b) \cdot (c + d) &\to a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) \\
&\to^* (a \cdot c + a \cdot d) + (b \cdot c + b \cdot d) \\
(a + b) \cdot (c + d) &\to (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d \\
&\to^* (a \cdot c + a \cdot c) + (a \cdot d + b \cdot d)
\end{aligned}$$

X : 集合　　$\to$: X 上の簡約関係 (2 項関係)

定義

x が正規形である $\overset{\text{def}}{\iff} \neg(\exists y \in X.\, x \to y)$

簡約関係が停止性を持つ $\overset{\text{def}}{\iff}$ 無限の簡約列が存在しない

x と y が合流可能 $(x \downarrow y)$ $\overset{\text{def}}{\iff} \exists z.\, x \to^* z \wedge y \to^* z$

TRS / 停止性・合流性

定義

簡約関係 $\to$ が**合流性を持つ**

$$\overset{\text{def}}{\iff} \forall x, y, y'.\,(x \to^* y \land x \to^* y') \Rightarrow \exists z.\,(y \to^* z \land y' \to^* z)$$

ダイアモンド性

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ y \arrow[dr] & & y' \arrow[dl] \\ & z & \end{tikzcd}$$

合流性

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, ->>] \arrow[dr, ->>] & \\ y \arrow[dr, ->>] & & y' \arrow[dl, ->>] \\ & z & \end{tikzcd}$$

弱合流性

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ y \arrow[dr, ->>] & & y' \arrow[dl, ->>] \\ & z & \end{tikzcd}$$

ダイアモンド性 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 合流性 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 弱合流性

定理

$\to$ が停止性と弱合流性を持つならば、$\to$ は合流性を持つ

証明:
$x \to^* y$ かつ $x \to^* y'$ かつ y, y' が正規形ならば、$y = y'$ であることを整礎帰納法で示す。

- x がすでに正規形の場合: $x = y = y'$
- $x \to w \to^* y,\ x \to w' \to^* y'$ なる w, w' があるとき
  弱合流性より $\exists z. (x \to w \to^* z) \land (x \to w' \to^* z) \land (z$ は正規形)
  帰納法の仮定から、$y = z$ かつ $y' = z$ $\square$

整礎帰納法

$$\forall x \in X. P(x) \Leftrightarrow \forall x \in X. (\forall y \in X. x \to y \Rightarrow P(y)) \Rightarrow P(x)$$

定義

$$
\begin{aligned}
\to \text{が完備 (complete)} &\overset{\text{def}}{\iff} \to \text{が停止性と合流性を持つ} \\
&\iff \to \text{が停止性と弱合流性を持つ}
\end{aligned}
$$

LPO / 概要

概要

- 項の「サイズ」を計算する方法を考える
- 簡約 = 項のサイズを減らす操作 となるように設定する

motivation

- 簡約が停止性をもつことを保証したい
  - サイズは正の値を取る
  - 完備化 (後述) で新しい書換え規則を追加する際に規則の向きを決めるために利用

LPO / 準備

定義: rewrite order

項についての二項関係 $>$ が rewrite order であるとは、

- $>$ は非対称
- $>$ は推移的
- $s > t$ なら、任意の代入 θ について $s\theta > t\theta$
  - 変数を用いた式を具体的な式に instantiate するときに順番が不変
- $s > t$ なら、

$$f(u_1, \ldots, u_{i-1}, s, u_{i+1}, \ldots, u_n) > f(u_1, \ldots, u_{i-1}, t, u_{i+1}, \ldots, u_n)$$

定義: reduction order

$>$ が reduction order $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $>$ が rewrite order でかつ停止性を持つ

LPO / 準備

補題

$>$ が reduction order であって

$$\forall (l = r) \in R.\, l > r$$

ならば、簡約関係 $\to_R$ は停止性を持つ

次に考えること

- 項のサイズ $|t|$ を適切に定義
- $s > t \overset{\text{def}}{\iff} |s| > |t|$ としたとき、$>$ が reduction order になるようにする

LPO / 準備

補題

$>$ が reduction order であって

$$\forall (l = r) \in R.\, l > r$$

ならば、簡約関係 $\to_R$ は停止性を持つ

次に考えること

- 項のサイズ $|t|$ を適切に定義
- $s > t \overset{\text{def}}{\iff} |s| > |t|$ としたとき、$>$ が reduction order になるようにする

LPO / サイズの計算

ナイーブな方法ではうまくいかない

例 1

全ての変数・関数シンボルのサイズを 1 とし、それらの和を全体のサイズとした場合

$$f(x, x)\ \textcolor{red}{(3)} > g(y)\ \textcolor{red}{(2)}$$

$$f(x, x)\ \textcolor{red}{(3)} \not> g(f(x, x))\ \textcolor{red}{(4)}$$

例 2

左辺の方が右辺より大きくなるようなサイズとは？

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

LPO / サイズの計算

$>$ の定義

- $s_1, \ldots, s_m$ が $t_1, \ldots, t_m$ より辞書順で大きく、
  かつ $\forall i \in \{1, \ldots, m\}.\ f(s_1, \ldots, s_m) > t_i$ なら
  $f(s_1, \ldots, s_m) > f(t_1, \ldots, t_m)$
- $s_i \geq t$ なら $f(s_1, \ldots, s_m) > t$
- 規定の関数シンボルについての条件から $f > g$ で、
  かつ $\forall i \in \{1, \ldots, m\}.\ f(s_1, \ldots, s_m) > t_i$ なら
  $f(s_1, \ldots, s_m) > g(t_1, \ldots, t_n)$

※青字は停止性のための条件

- $(x \cdot y) \cdot z > x \cdot (y \cdot z)$
- $(x + y) \cdot z > x \cdot z + y \cdot z$
  - 3 番目の規則と $\cdot > +$ より
- $(x + y) \cdot z \not> (y + x) \cdot z + z$ (非停止な例)
  - $\cdot > +$ だが、停止性の部分で引っかかる

LPO / サイズの計算

$>$ の定義

- $s_1, \ldots, s_m$ が $t_1, \ldots, t_m$ より辞書順で大きく、かつ $\forall i \in \{1, \ldots, m\}.\ f(s_1, \ldots, s_m) > t_i$ なら $f(s_1, \ldots, s_m) > f(t_1, \ldots, t_m)$
- $s_i \geq t$ なら $f(s_1, \ldots, s_m) > t$
- 規定の関数シンボルについての条件から $f > g$ で、かつ $\forall i \in \{1, \ldots, m\}.\ f(s_1, \ldots, s_m) > t_i$ なら $f(s_1, \ldots, s_m) > g(t_1, \ldots, t_n)$

定理

上のように $>$ が定義されたとき、$>$ は reduction order

Knuth-Bendix 完備化

群の公理を書き換え系とみなすと、
これは停止性を持つが弱合流性を持たない

$$(x^{-1} \cdot x) \cdot y \to x^{-1} \cdot (x \cdot y) \nrightarrow$$

$$(x^{-1} \cdot x) \cdot y \to e \cdot y \to y$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$x^{-1} \cdot x = e$$

$$e \cdot x = x$$

Knuth-Bendix 完備化: 概要

- 与えられた書き換え規則の集合に規則を追加して完備にする
- 万能ではない
  - 完備化失敗として終了 or 非停止 になりうる

Knuth-Bendix 完備化

群の公理を書き換え系とみなすと、
これは停止性を持つが弱合流性を持たない

$$(x^{-1} \cdot x) \cdot y \to x^{-1} \cdot (x \cdot y) \not\to$$

$$(x^{-1} \cdot x) \cdot y \to e \cdot y \to y$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$x^{-1} \cdot x = e$$

$$e \cdot x = x$$

Knuth-Bendix 完備化: 概要

- 与えられた書き換え規則の集合に規則を追加して完備にする
- 万能ではない
  - 完備化失敗として終了 or 非停止 になりうる

Knuth-Bendix 完備化 / 危険対

ある要素に 2 通りの書き換えが可能な場合

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$
$$x^{-1} \cdot x = e$$
$$e \cdot x = x$$

1. 異なる重なりのない箇所を書き換えた場合

$$(e \cdot x) \cdot (y^{-1} \cdot y) \to x \cdot (y^{-1} \cdot y)$$
$$(e \cdot x) \cdot (y^{-1} \cdot y) \to (e \cdot x) \cdot 1$$

2. 一方の書き換え箇所が他方に適用された規則において変数である場合

$$((e \cdot x) \cdot y) \cdot z \to (e \cdot x) \cdot (y \cdot z)$$
$$((e \cdot x) \cdot y) \cdot z \to x \cdot (y \cdot z)$$

3. 同じ場所を書き換えた場合 (overlap)

$$(e \cdot x) \cdot y \to e \cdot (x \cdot y)$$
$$(e \cdot x) \cdot y \to x \cdot y$$

Knuth-Bendix 完備化 / 危険対

定義: 危険対

$l_1 = r_1, l_2 = r_2$ を書き換え規則とする (ただし $FV(l_1) \cap FV(l_2) = \emptyset$)
l'_2 が l_1 の変数でない subterm として 1 回以上出現し、

$$\left(l_1 = l_1[l'_2, \cdots, l'_2, \cdots, l'_2]\right)$$

σ が l_2 と l'_2 の最汎単一化子であるとき、

$$(\sigma r_1, \sigma l_1[l'_2, \cdots, r_2, \cdots, l'_2])$$

を $l_1 = r_1, l_2 = r_2$ の危険対という

例

$(e \cdot (x \cdot y), x \cdot y)$ や $(x^{-1} \cdot (x \cdot y), e \cdot y)$ は危険対

$$\begin{cases} (e \cdot x) \cdot y \to e \cdot (x \cdot y) \\ (e \cdot x) \cdot y \to x \cdot y \end{cases} \qquad \begin{cases} (x^{-1} \cdot x) \cdot y \to x^{-1} \cdot (x \cdot y) \\ (x^{-1} \cdot x) \cdot y \to e \cdot y \end{cases}$$

定理: Knuth-Bendix の合流条件

項書き換え系が弱合流性を持つ $\Longleftrightarrow$ 全ての危険対 (s,t) が合流可能 $(s\downarrow t)$

Corollaly

停止性を持つ項書き換え系が合流性を持つ
$\Longleftrightarrow$ 全ての危険対 (s,t) が合流可能 $(s\downarrow t)$

合流可能性 $s\downarrow t$ について

1. s と t の正規形を求める $(s',t'$ とする$)$
   - 停止性より決定可能
2. $s' \stackrel{?}{\equiv} t'$

Knuth-Bendix 完備化 / アルゴリズム

アルゴリズム

1. 危険対 $\{(s_i, t_i) \mid 1 \le i \le n\}$ を全て見つける
2. $s_i \to^* s'_i,\ t_i \to^* t'_i$ に正規化する
3. $s'_i \equiv t'_i$ ならばその危険対は無視
4. $s'_i \not\equiv t'_i$ ならば
    - $s'_i > t'_i$ ならば $s'_i \to t'_i$ を規則に追加
    - $s'_i < t'_i$ ならば $t'_i \to s'_i$ を規則に追加
    - どちらでもなければ完備化失敗
5. (冗長な規則を消去する)

注意

新しい規則の追加によって新しい危険対が生じる可能性があり、これが続けば完備化が非停止