

Modélisation de solides déformables

Plan

I. Présentation et première approche

- A. Inspiration
- B. Étude d'un mouvement
- C. Première solution : les systèmes masse-ressort

II. Réalisation

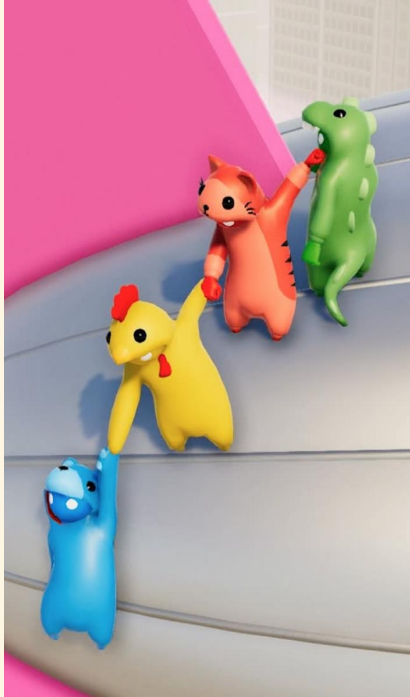
- A. Première méthode d'intégration : Euler
- B. Deuxième Méthode : procédé de Runge et Kutta
- C. Problème de la réaction du support

III. Deuxième approche

- A. Modèle du gaz parfait
- B. Théorème de Stokes

Présentation du problème et première approche

Motivation



Contraintes :

- Multi-joueurs
- Simulation en temps réel
- Machine parfois avec de faibles capacités

→ Comment minimiser le temps de calcul dans la simulation de solides déformable ?

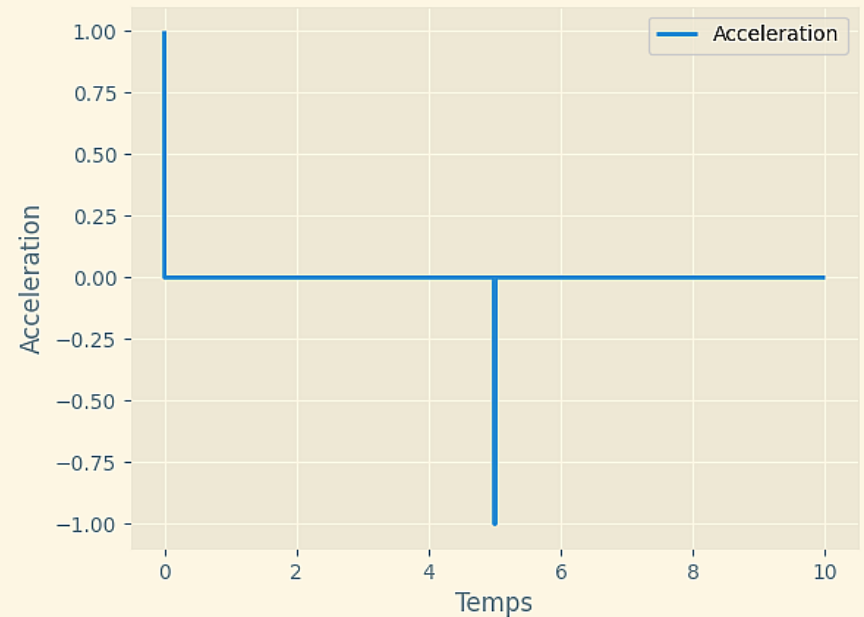
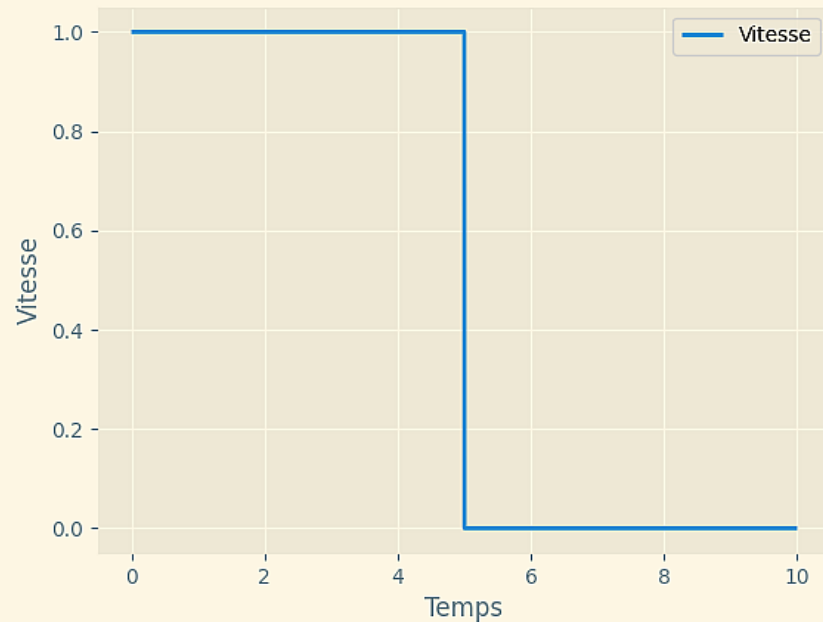
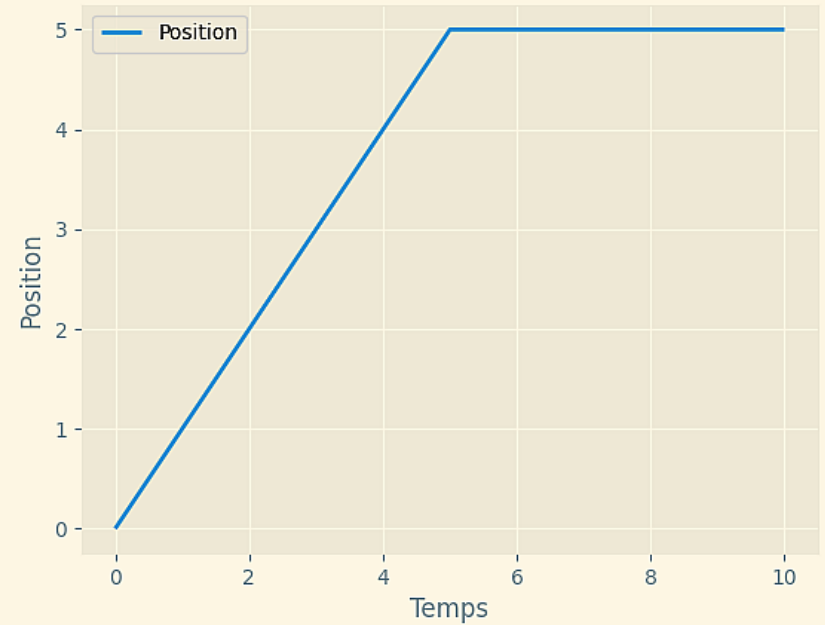
Modélisation réaliste d'un mouvement

Cas simple

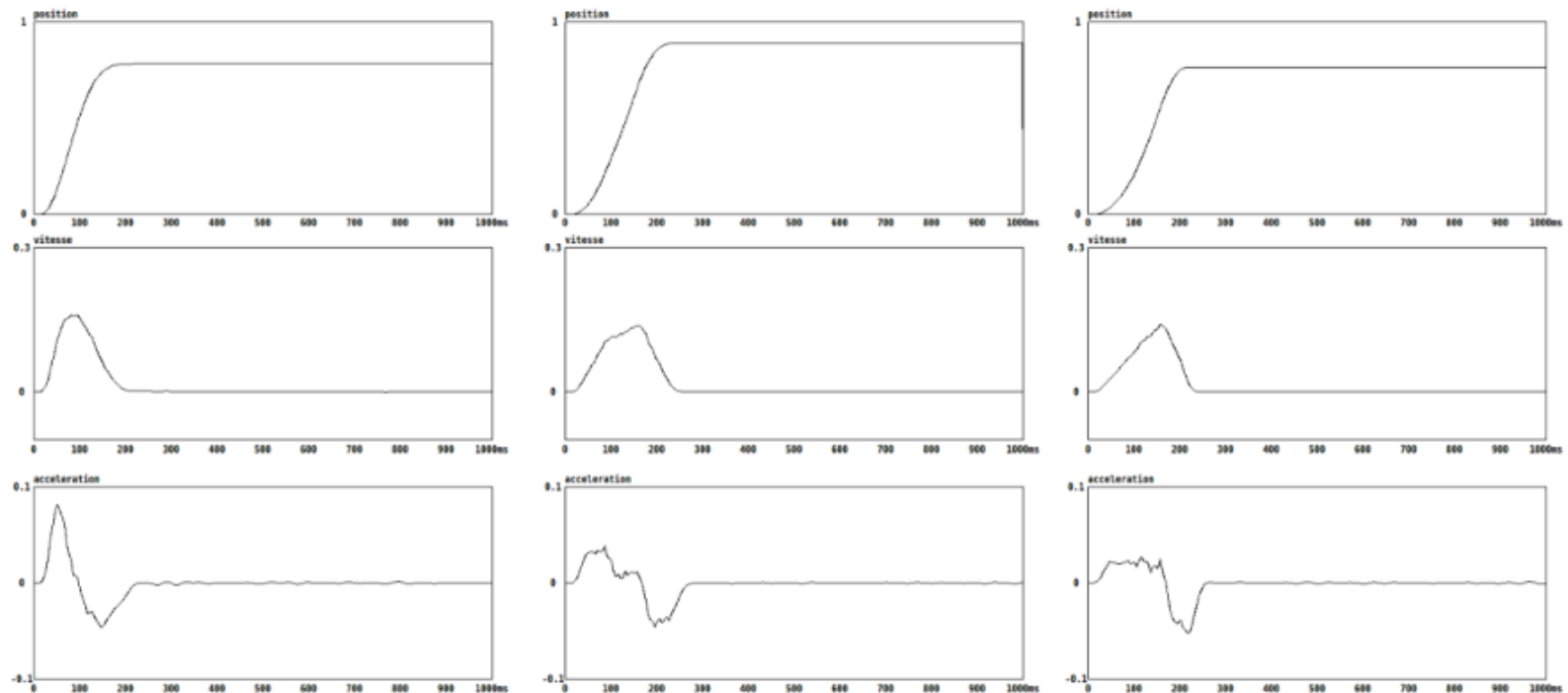


Modèle informatique simple

Profil de déplacement linéaire



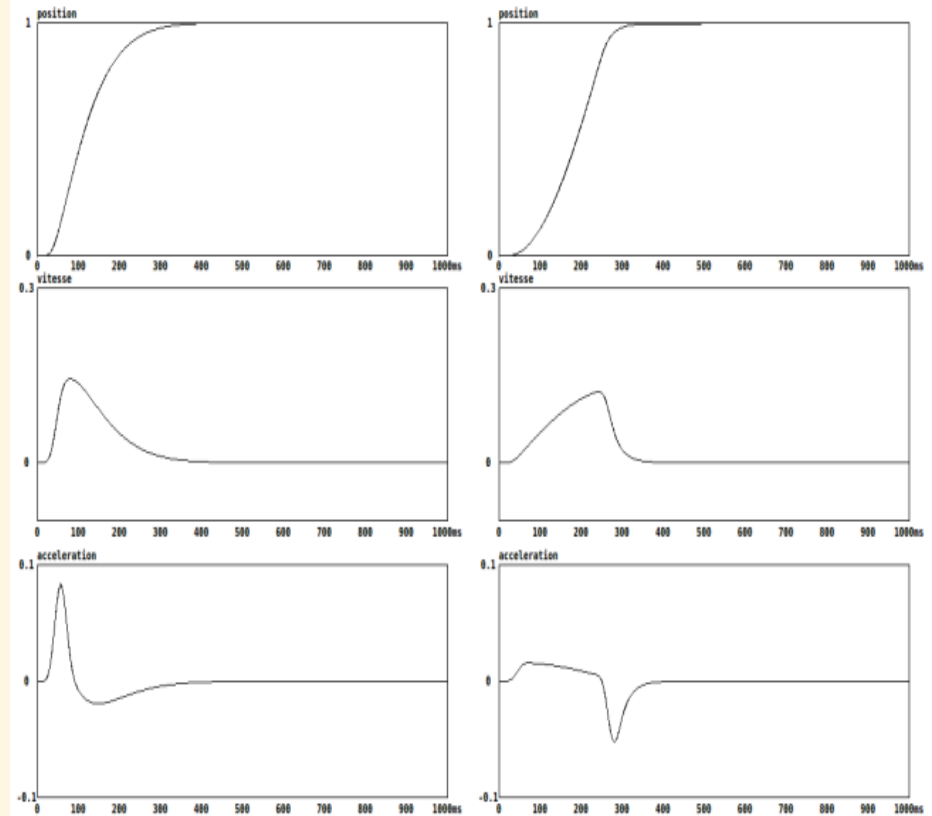
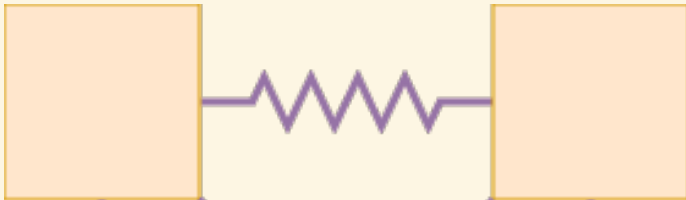
Mouvement naturel



Mass-Spring-System model for real time expressive behaviour
synthesis ~ Cyrille Henry

Mouvements type Système masse-ressort

Deux masses en mouvement
l'une par rapport à
l'autre



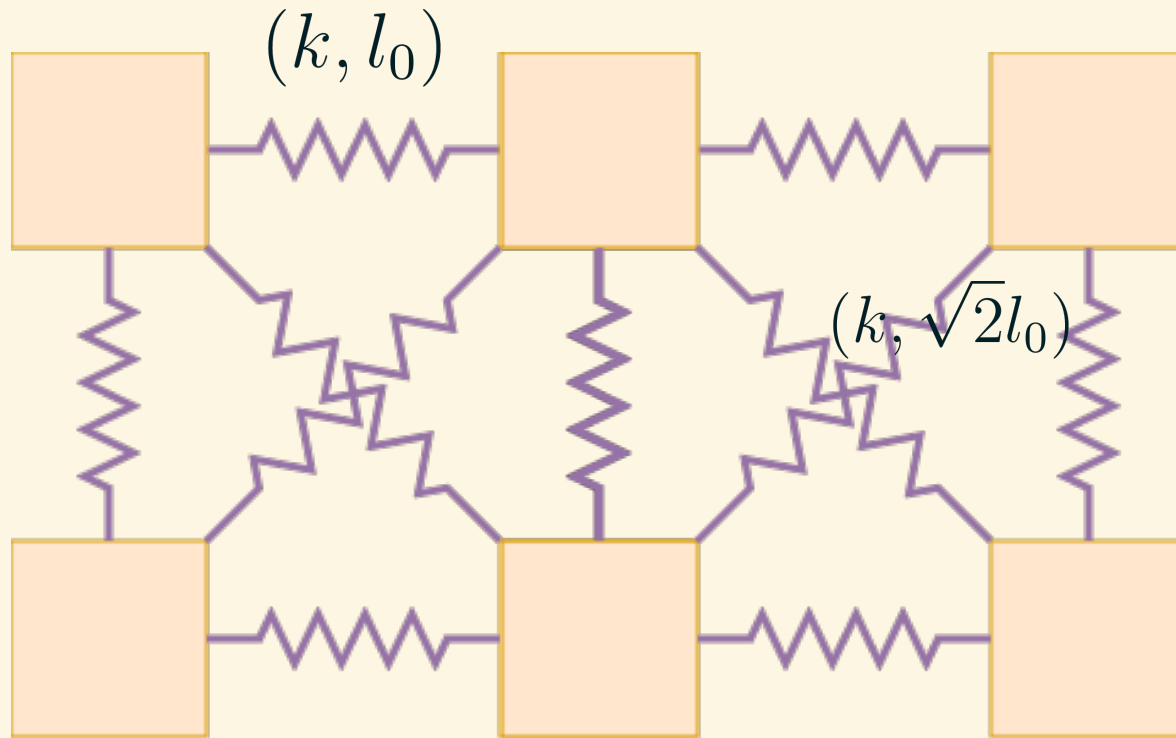
Mass-Spring-System model for real time expressive behaviour
synthesis ~ Cyrille Henry

Problème à résoudre



II. Réalisation

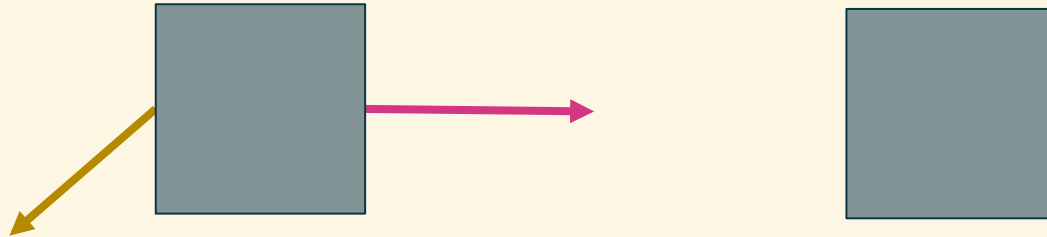
Structure du système



Méthode d'Euler explicite

$$\vec{R} = k * (l - l_0) \vec{e}_x$$

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v}$$



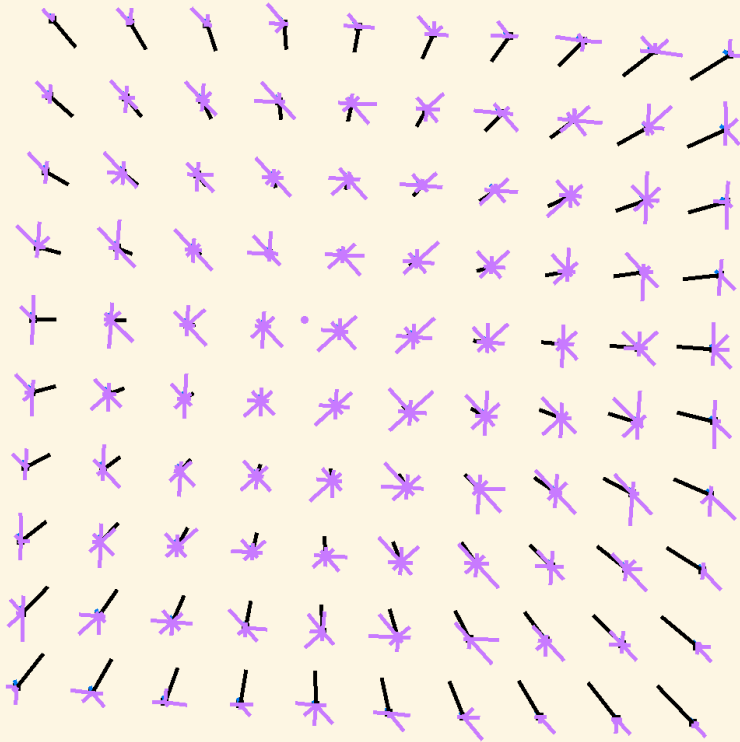
$$x[t + 1] = x[t] + v[t] * dt$$

$$v[t + 1] = v[t] + \text{acceleration}(t) * dt$$

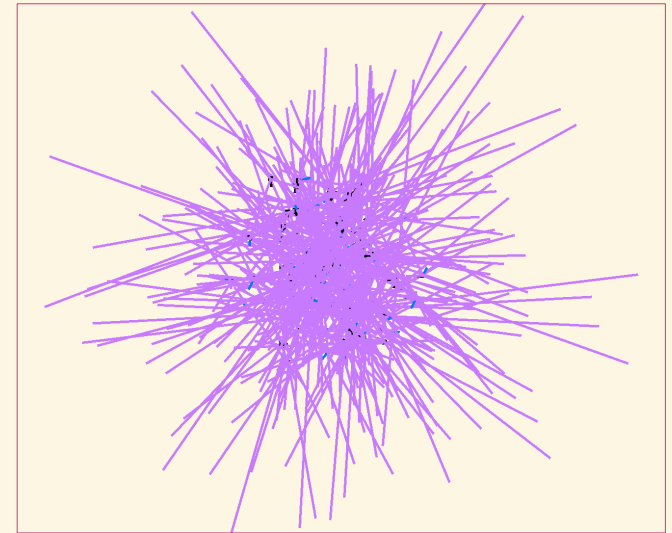
Résultat de la simulation avec la méthode d'Euler

Compression sous l'effet de la force fictive

État initial



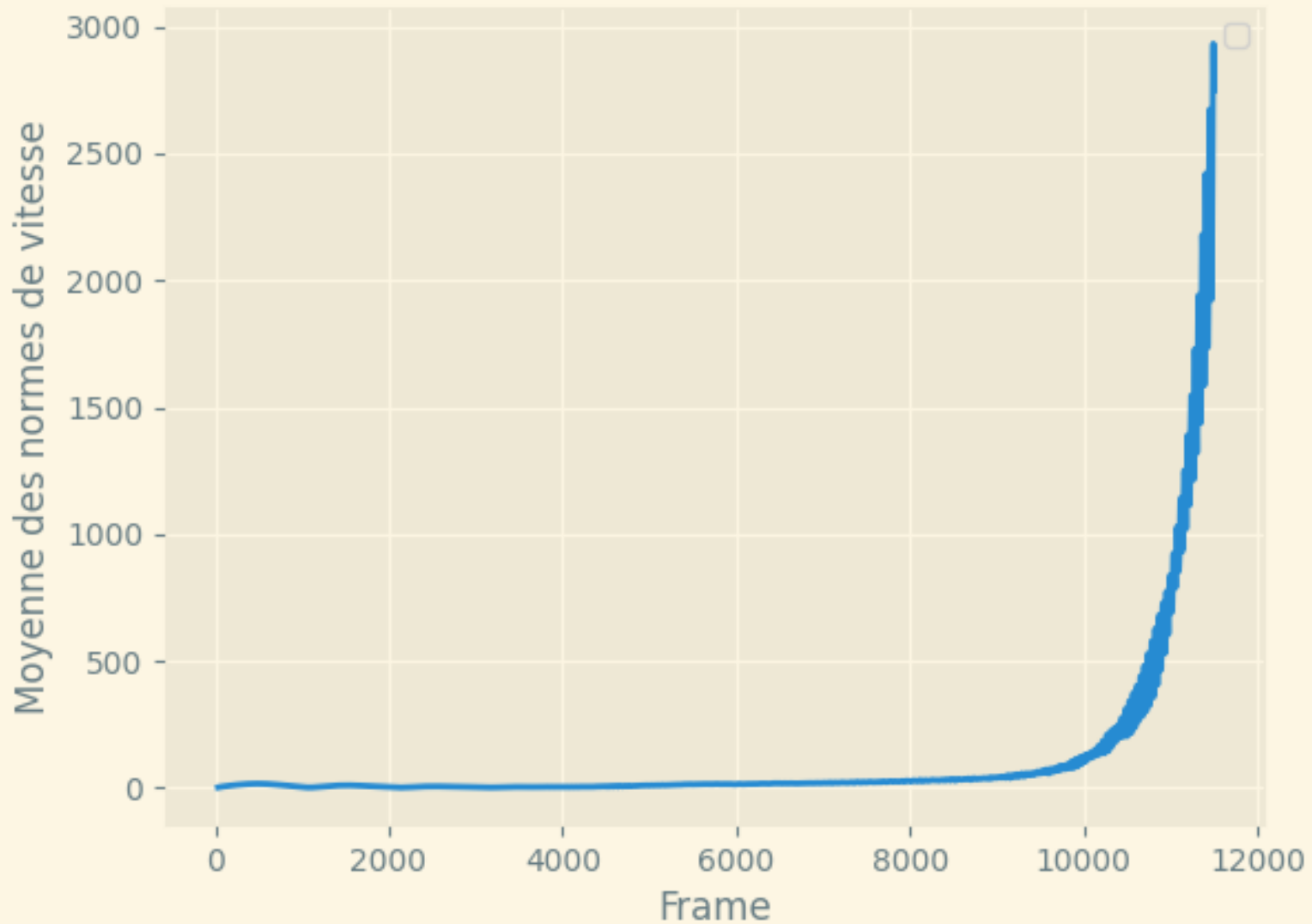
Force élastique en violet
Force fictive en noir



Explosion du système



Premier résultat



Méthode de Runge-Kutta

Approximation de Runge-Kutta

Problème de Cauchy à résoudre

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Si z est solution alors :

$$t_{n,i} = t_n + c_i \times h$$

Tableau des coefficients utilisés

(c_i)				
0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
				(b_j)

$$z(t_{n,i}) = z(t_n) + h \sum_{j < i} a_{i,j} f(t_{n,j}, z(t_{n,j}))$$

$$z(t_{n+1}) = z(t_n) + h \sum_{j \leq 4} b_j f(t_{n,j}, z(t_{n,j}))$$

Approximation de Runge-Kutta

Problème différentiel physique

$$\begin{cases} y'' = \text{acc}(t, y, y') \\ y'(t_0) = y'_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

On pose alors :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$Y(t_0) = \begin{pmatrix} y'_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

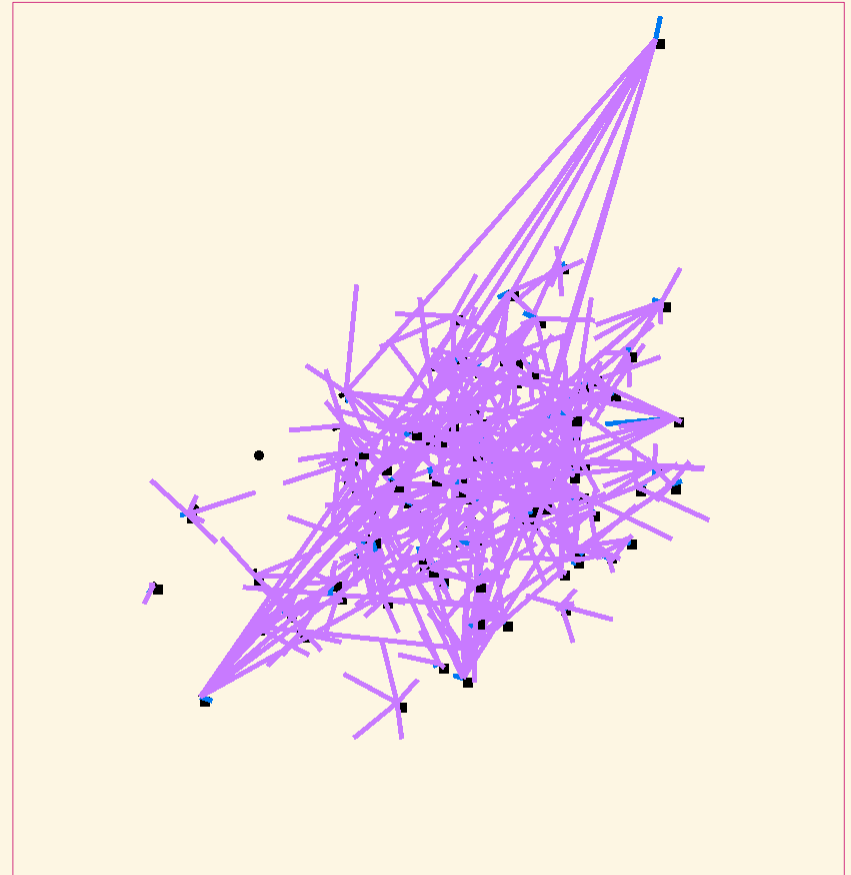
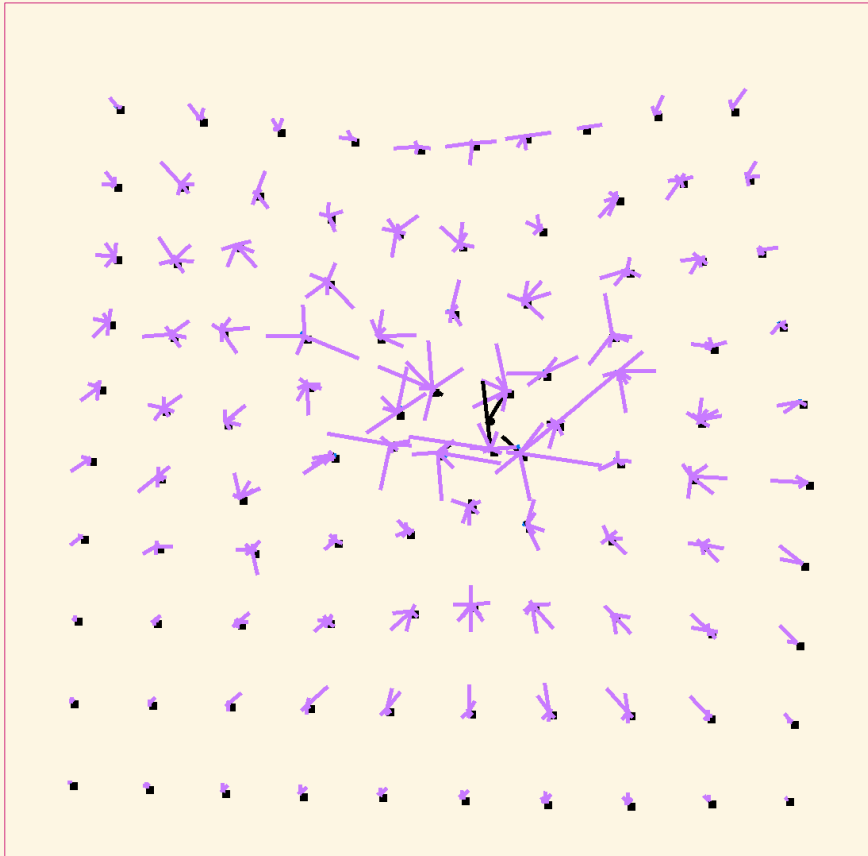
$$\text{d'où } Y'(t) = \begin{pmatrix} y''(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = F(t, Y) = \begin{pmatrix} \text{acc}(t, y, y') \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

On a alors le problème de Cauchy
d'ordre 1 :

$$\begin{cases} Y'(t) = F(t, Y) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

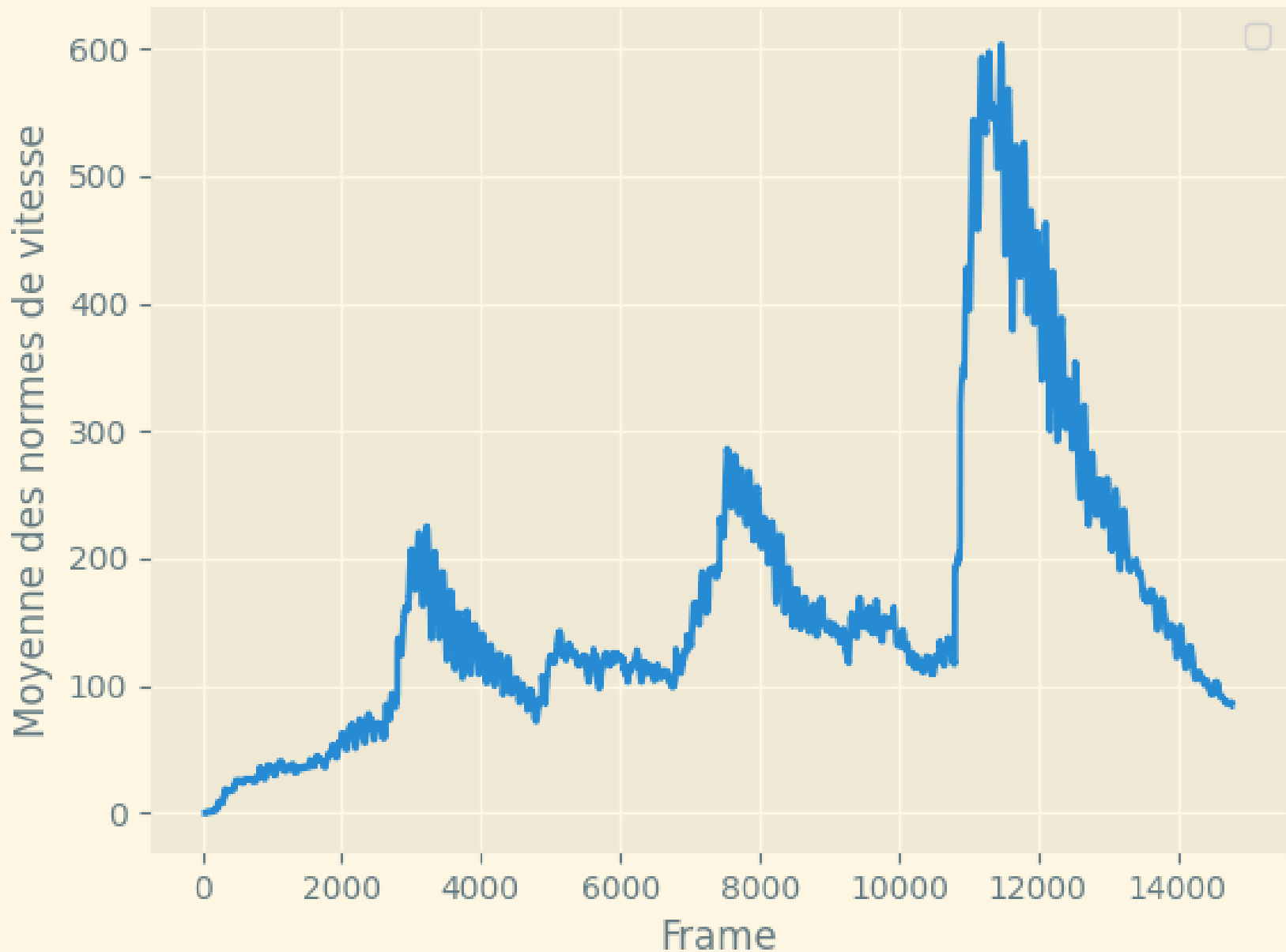
Résultat d'algorithme

Déformation sous l'effet de la force fictive

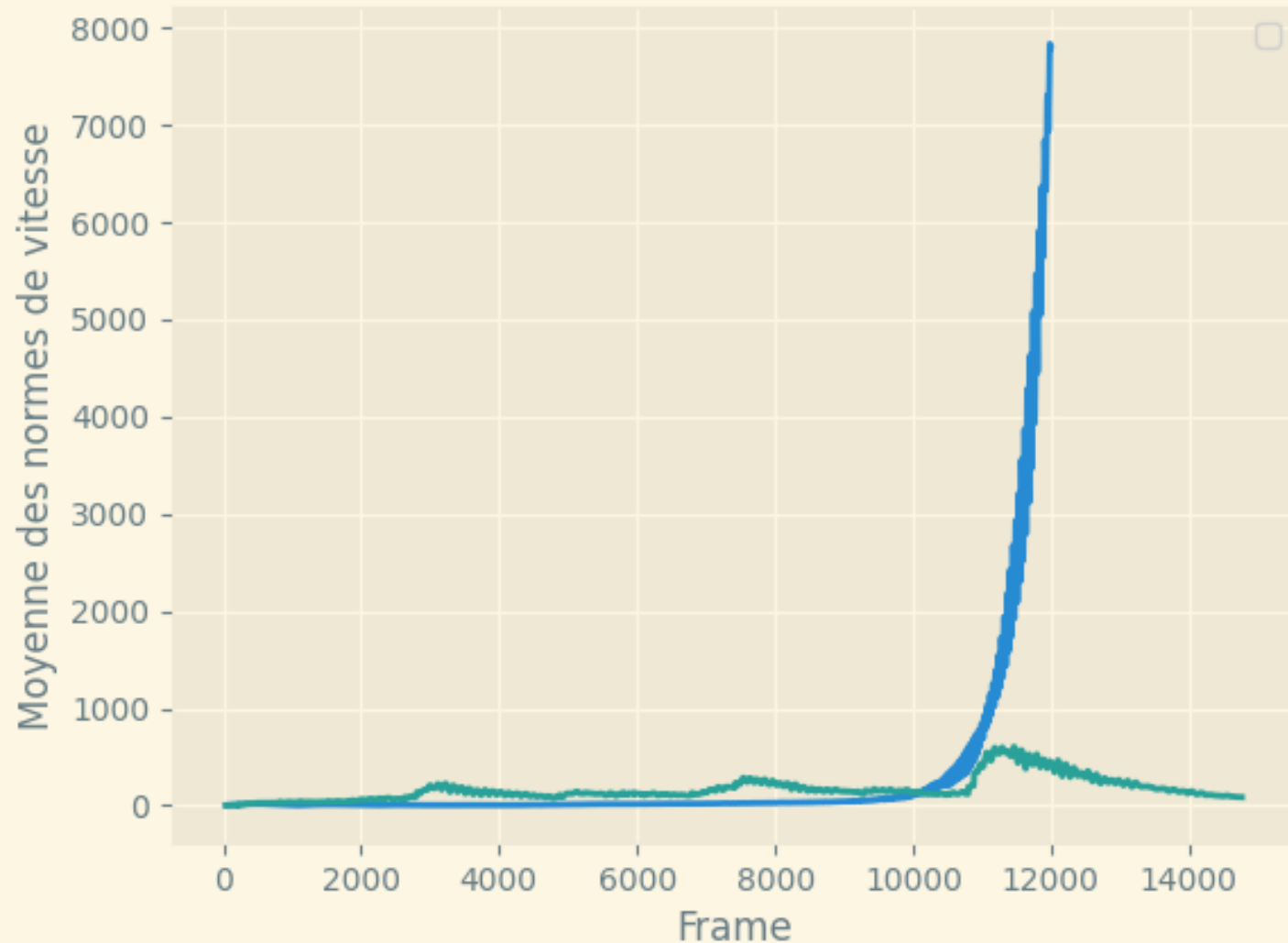


Désordre qui revient à une position d'équilibre

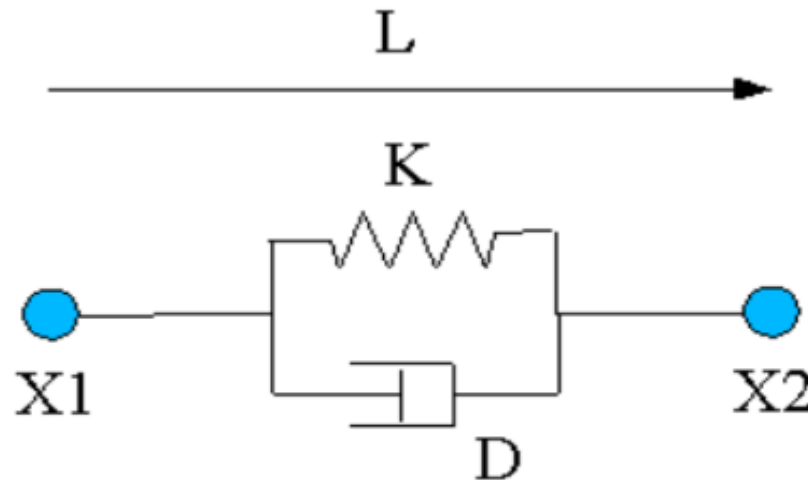
Résultat de la simulation avec RK4



Comparaison des résultats par rapport aux méthodes utilisées



Force d'amortissement pour stabiliser plus rapidement

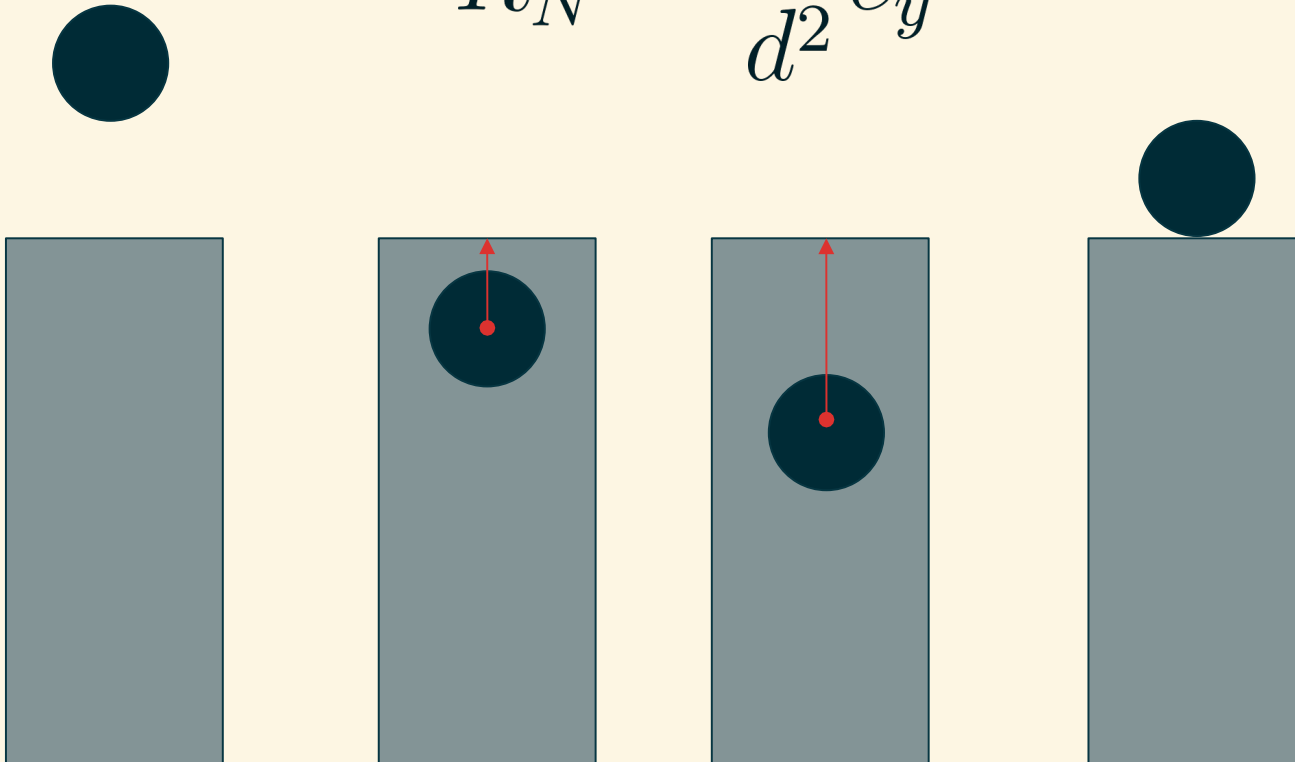


Mass-Spring-System model for real time expressive behaviour
synthesis ~ Cyrille Henry

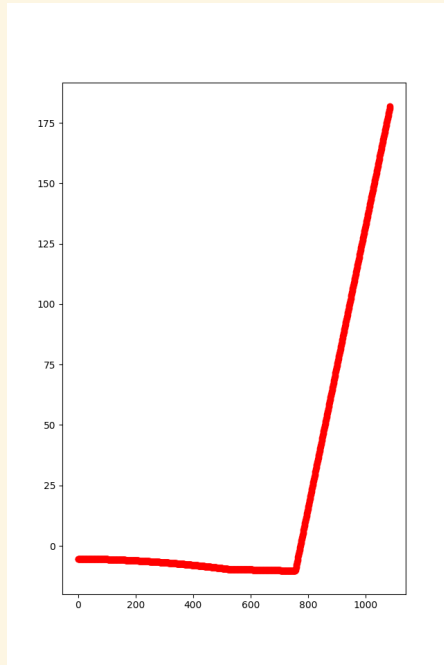
Collisions

Collision “magnétique”

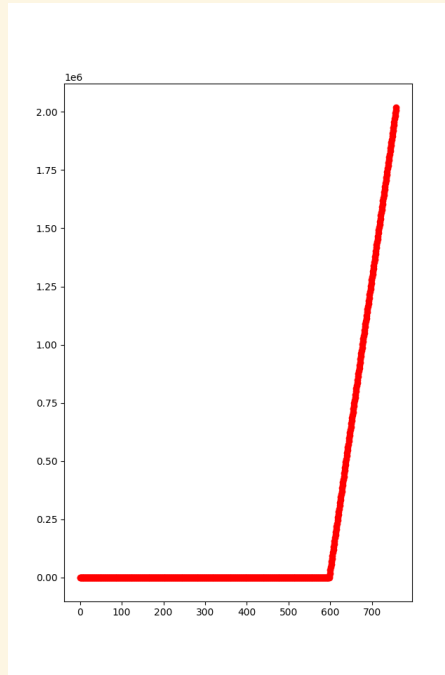
$$\vec{R}_N = \frac{K}{d^2} \vec{e}_y$$



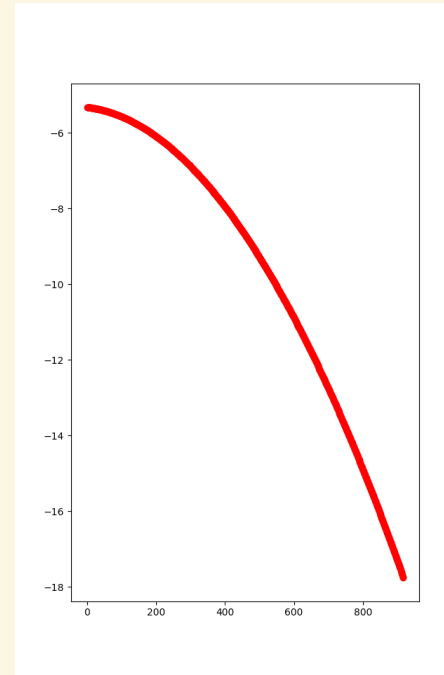
Résultats pour différentes valeurs de K



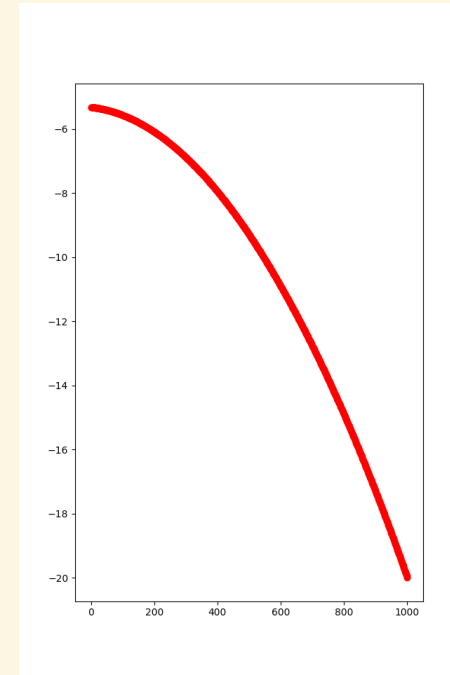
$K = 1.0$



$K = 1.0e-1$



$K = 1.0e-2$



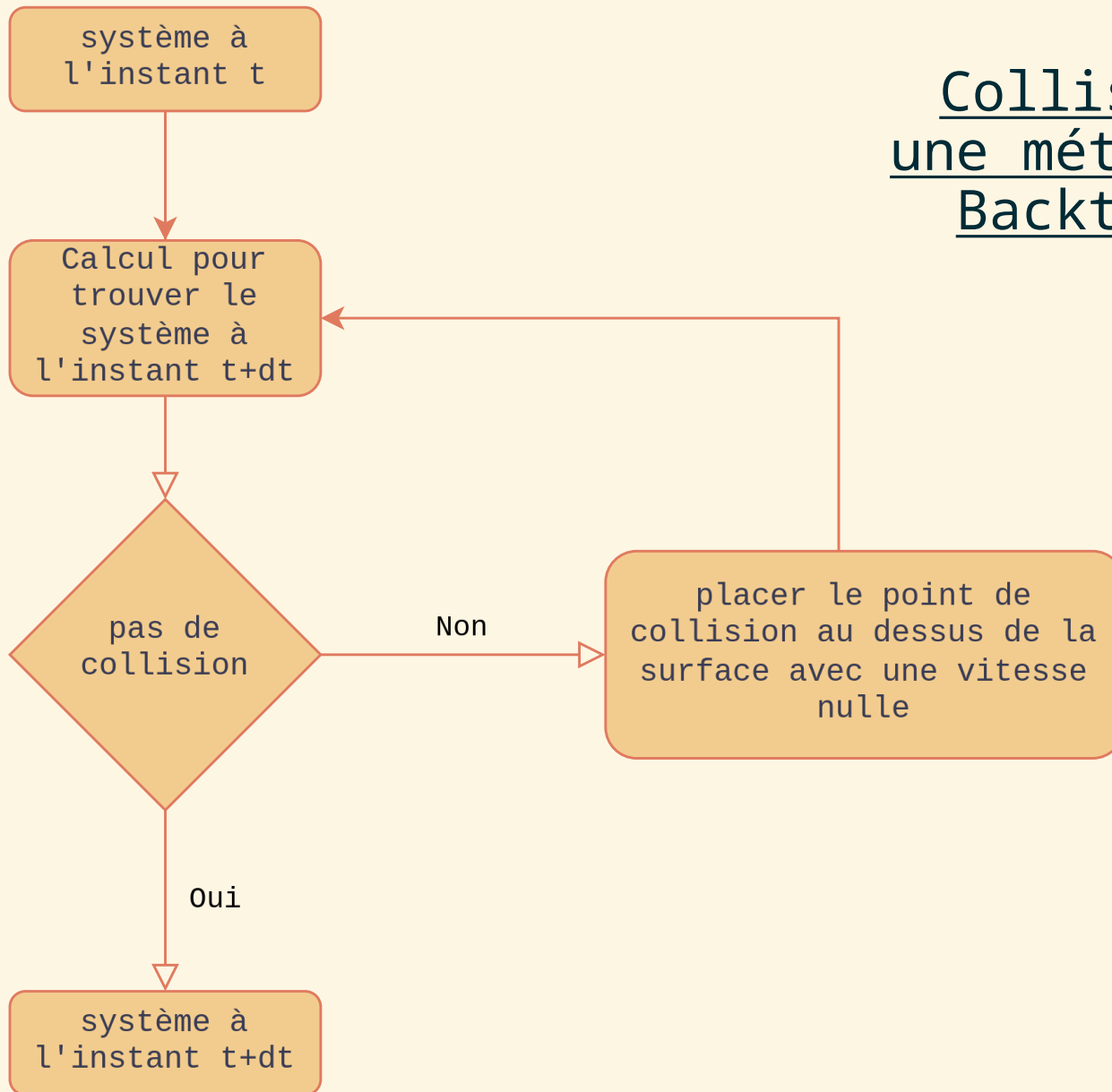
$K = 1.0e-4$

Position moyenne verticale en fonction du temps

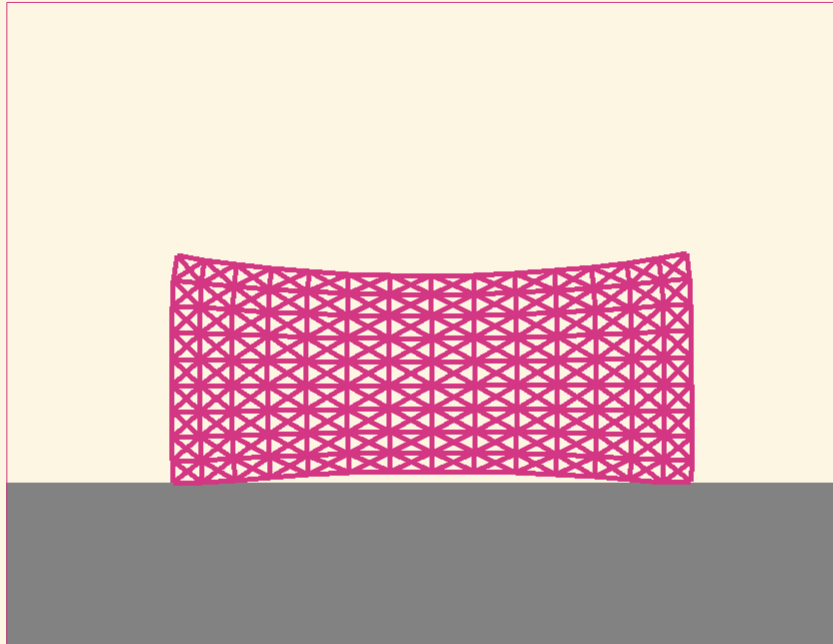
Résultats surprenants car :

- Force discontinue
- Force initialement très élevé lorsque $d = 0$

Collision via une méthode type Backtracking

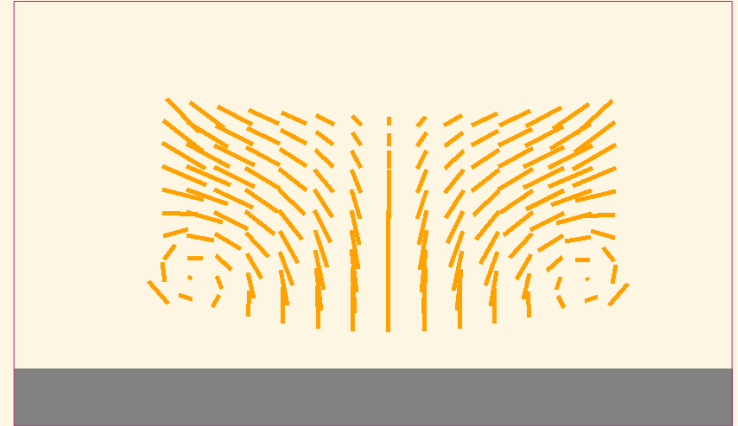


Résultats

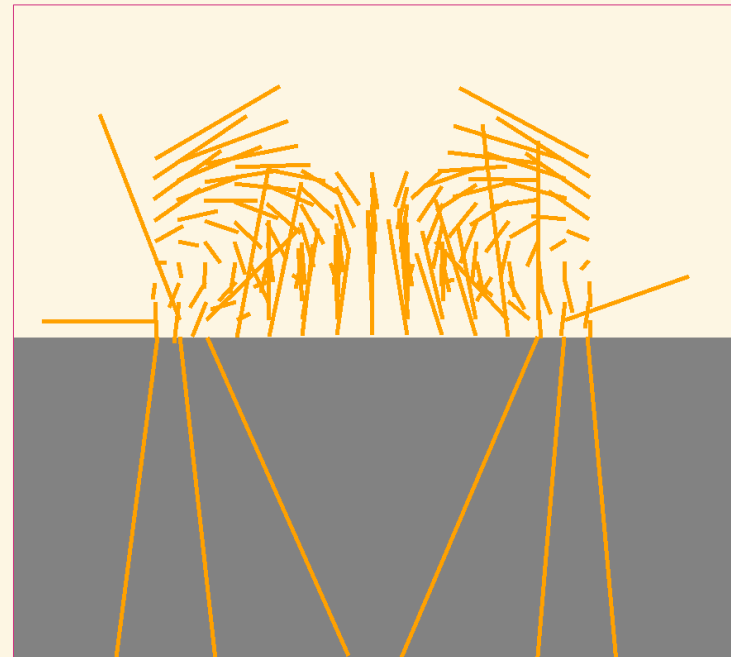


Liaisons des ressorts de la position d'équilibre finale

Champ d'accélération lorsque le système rebondit en l'air

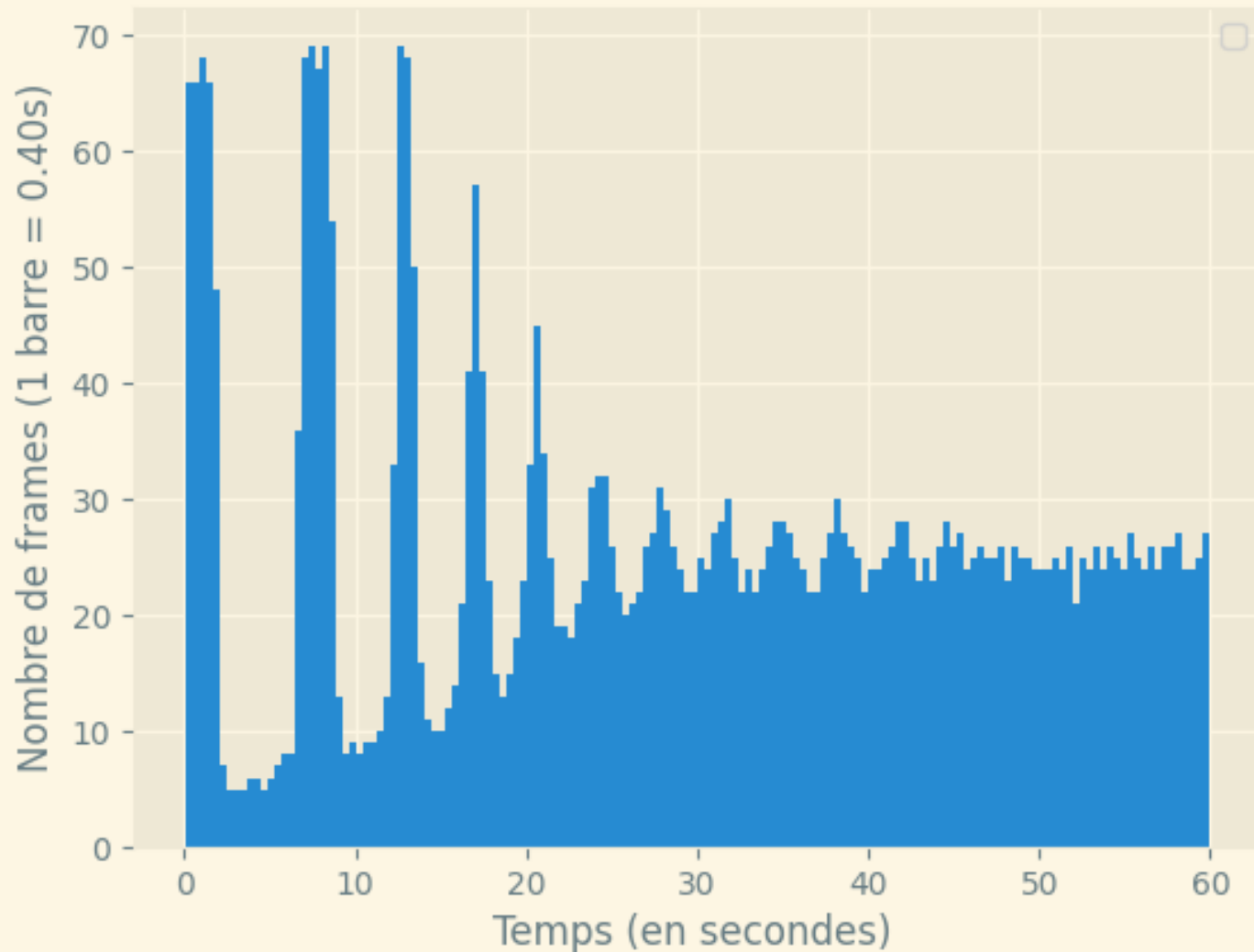


Champ d'accélération lorsque le système est au contact du sol



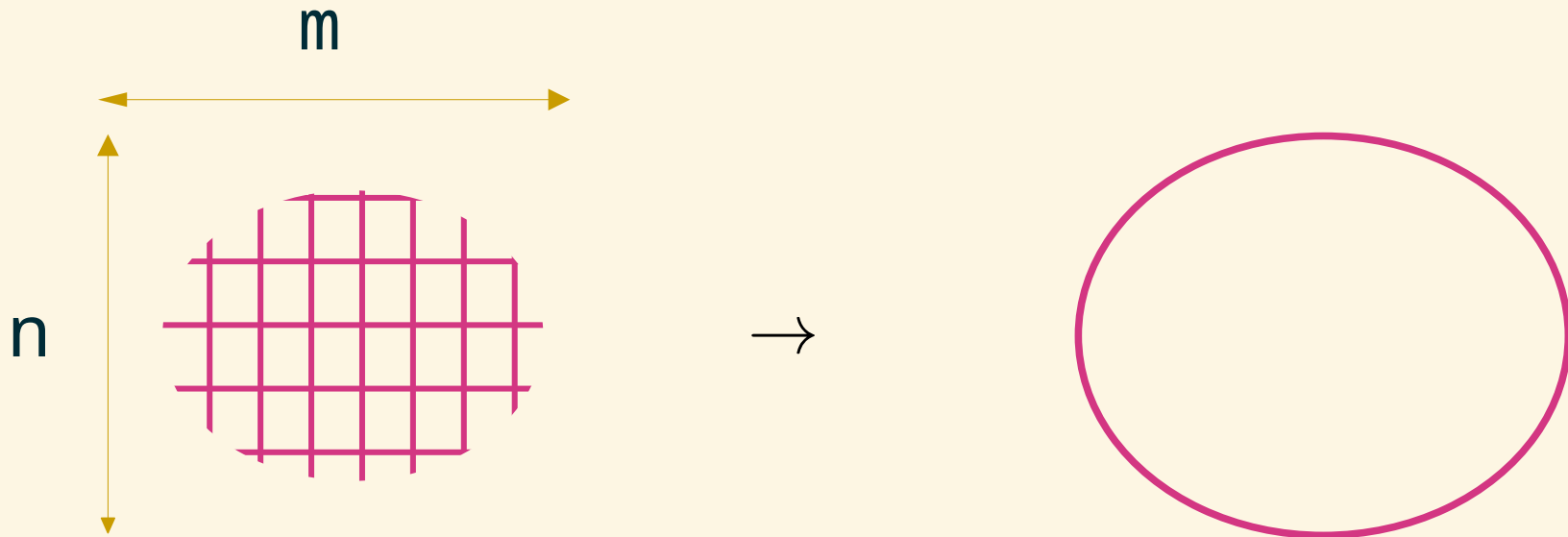
Résultats

Nombre de frames générées par période de 0,40s durant la simulation (sans affichage graphique)



III. Deuxième approche

Modèle de la bulle de gaz parfait

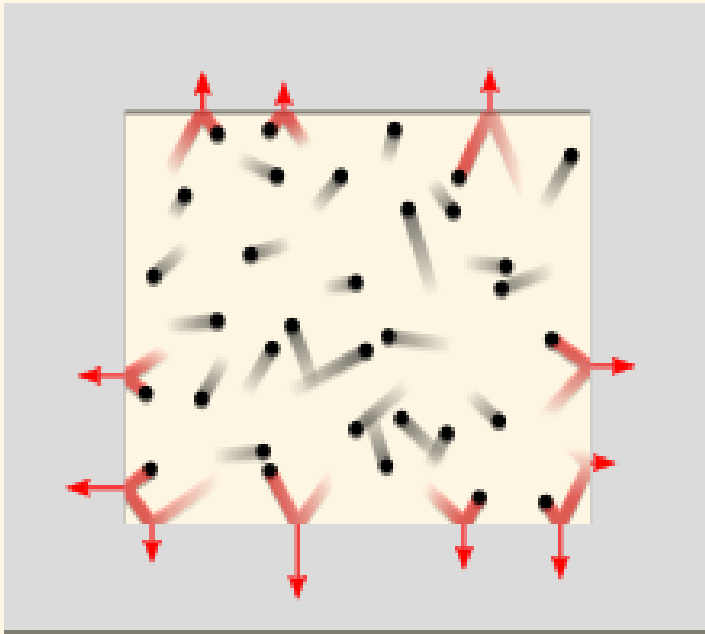


Complexité : $\mathcal{O}(m * n) \rightarrow \mathcal{O}(m + n)$

Avantages :

- Moins de particules au total à simuler
- Moins de particules au contact du sol

Modèle de la bulle de gaz parfait



$$\vec{F} = P d\vec{S}$$

$$P = \frac{nRT}{V}$$

$$\vec{F} = K_{nRT} \frac{1}{V} d\vec{S}$$

Calcul du volume

Théorème de Stokes :

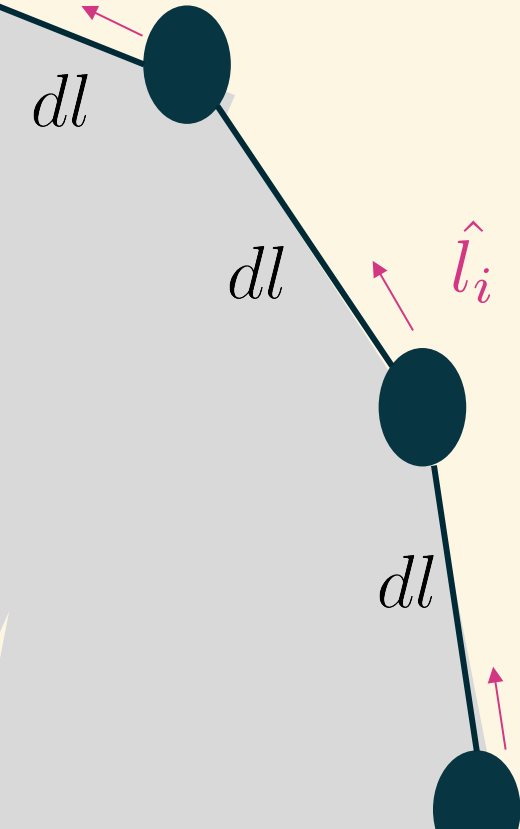
$$\iint_S \operatorname{div} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{F} = x\vec{e}_x$$

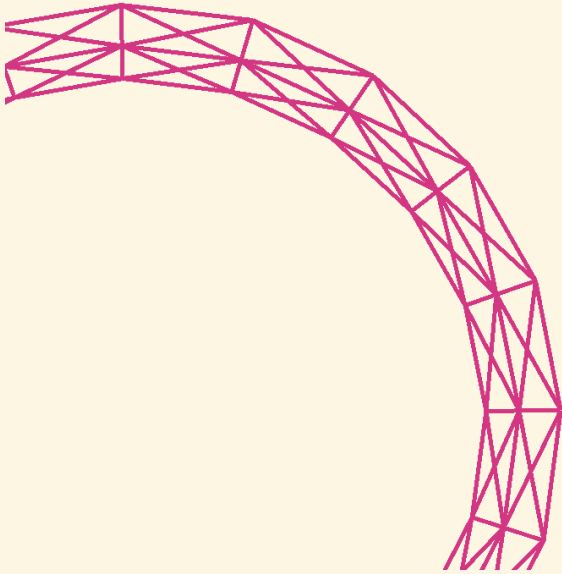
$$\operatorname{div} \vec{F} = 1 \quad \left| \quad \begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ = \vec{F} \cdot \hat{l} dl \end{aligned} \right.$$

$$\iint_S \operatorname{div} \vec{F} \cdot d\vec{S} = S \quad \left| \quad \begin{aligned} = x \cdot \hat{l}_x \cdot dl \end{aligned} \right.$$

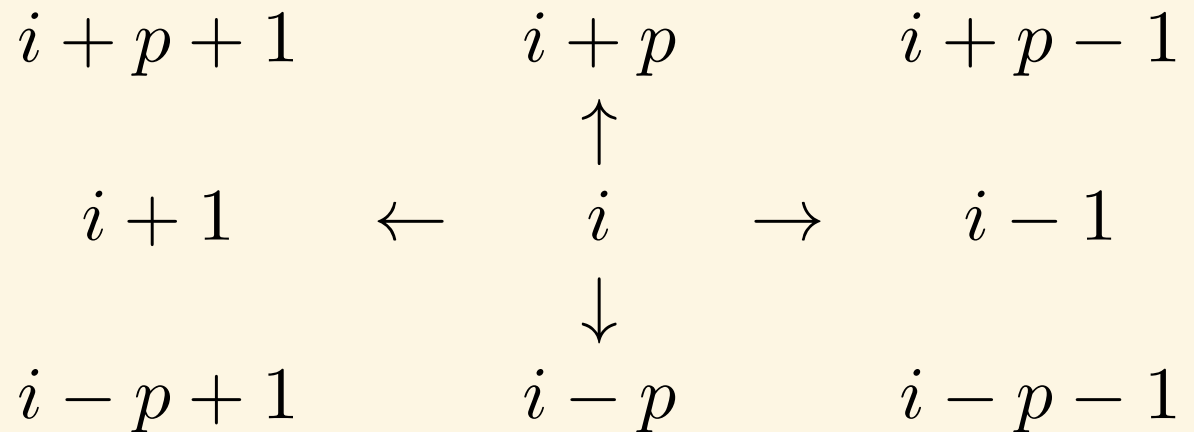
$$S \approx \sum x_i \cdot \hat{l}_{i,x} \cdot dl$$



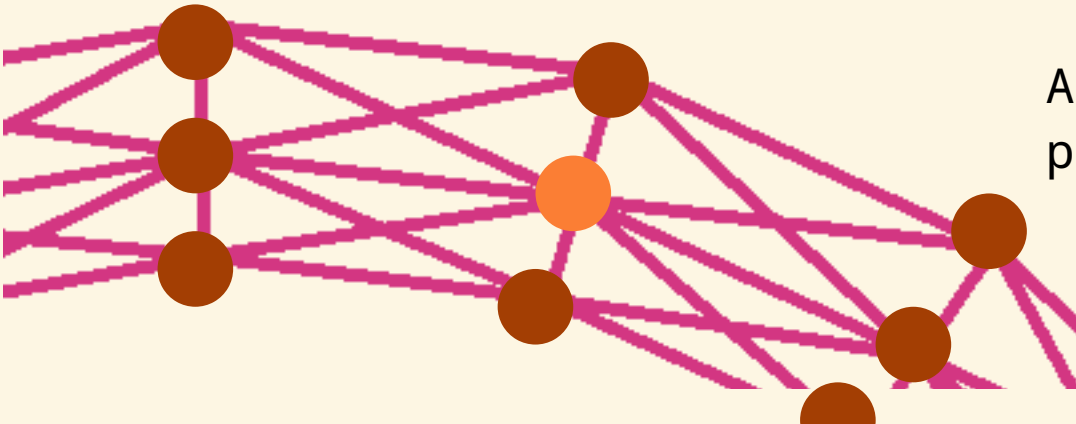
Compromis ressort/gaz pour conserver la forme



Les points sont stockés dans un tableau pour un accès en $O(1)$. La navigation se fait en suivant :

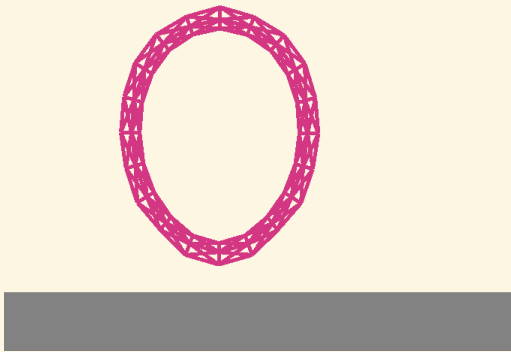


Avec p le nombre de points par couche



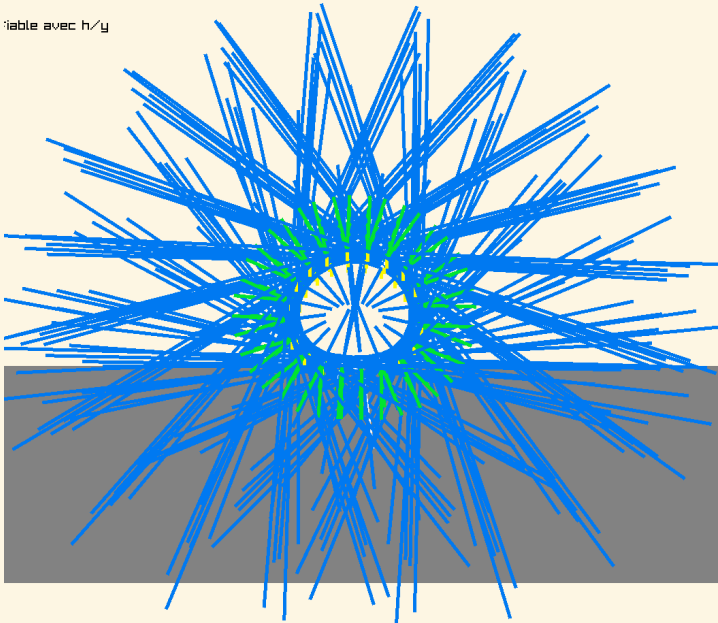
Résultat

Déformation après rebond

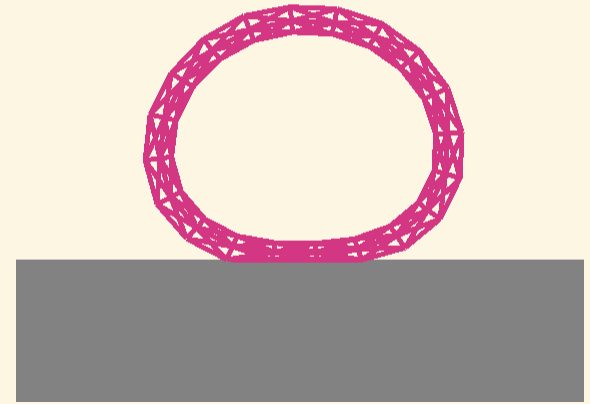


Forces appliquées sur les points

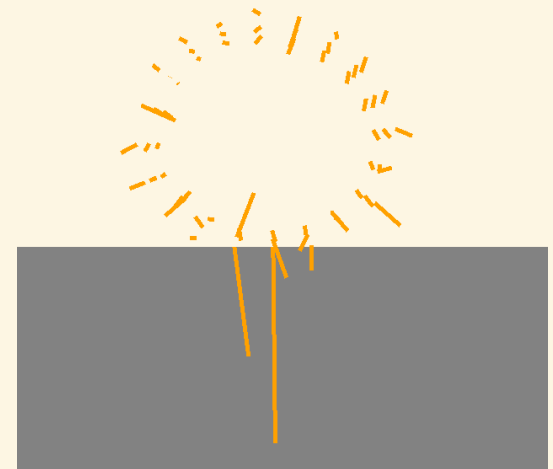
Table avec h/y



Position d'équilibre finale

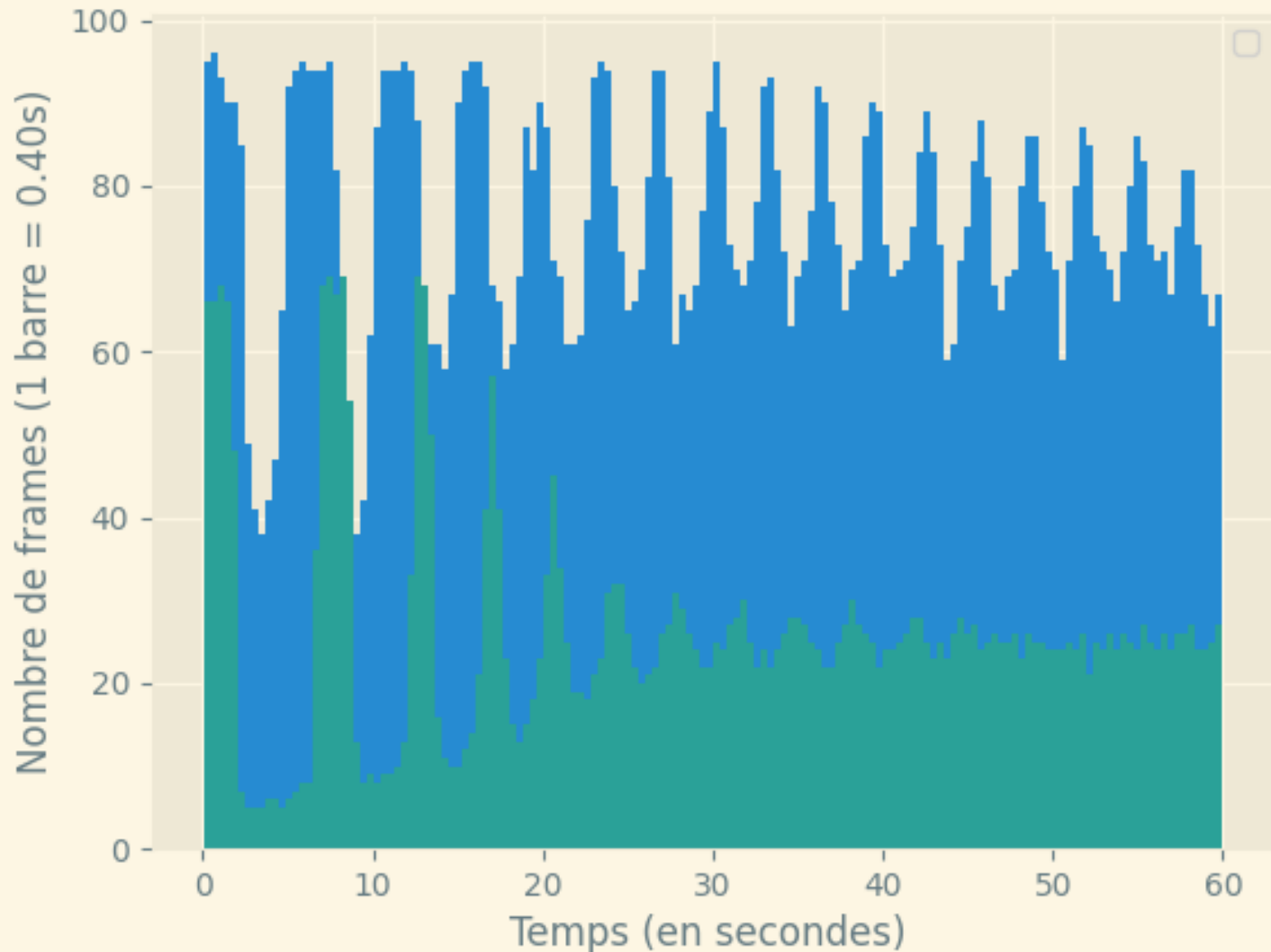


Profil d'accélération

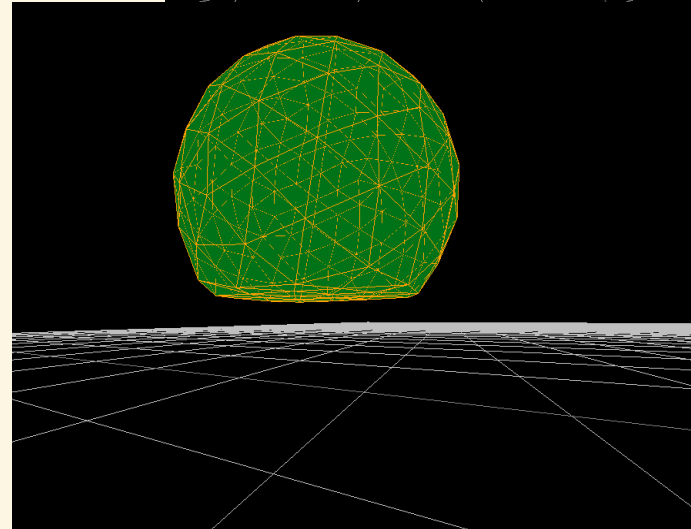
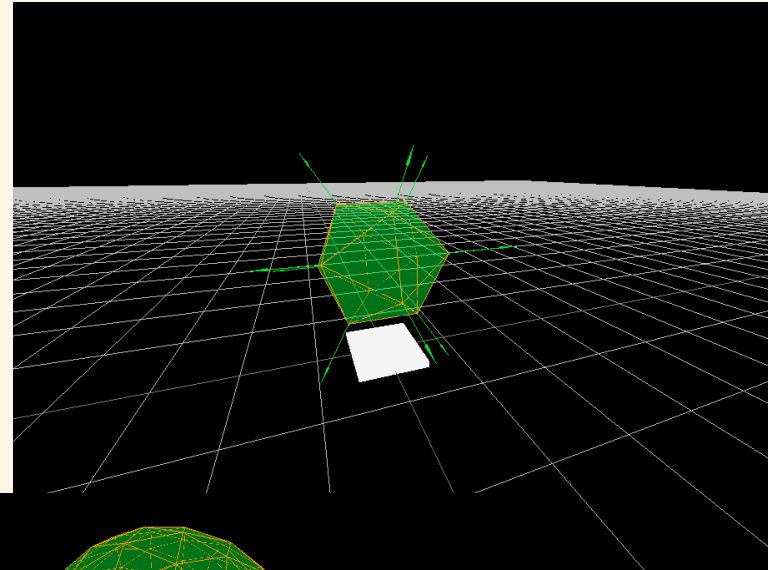
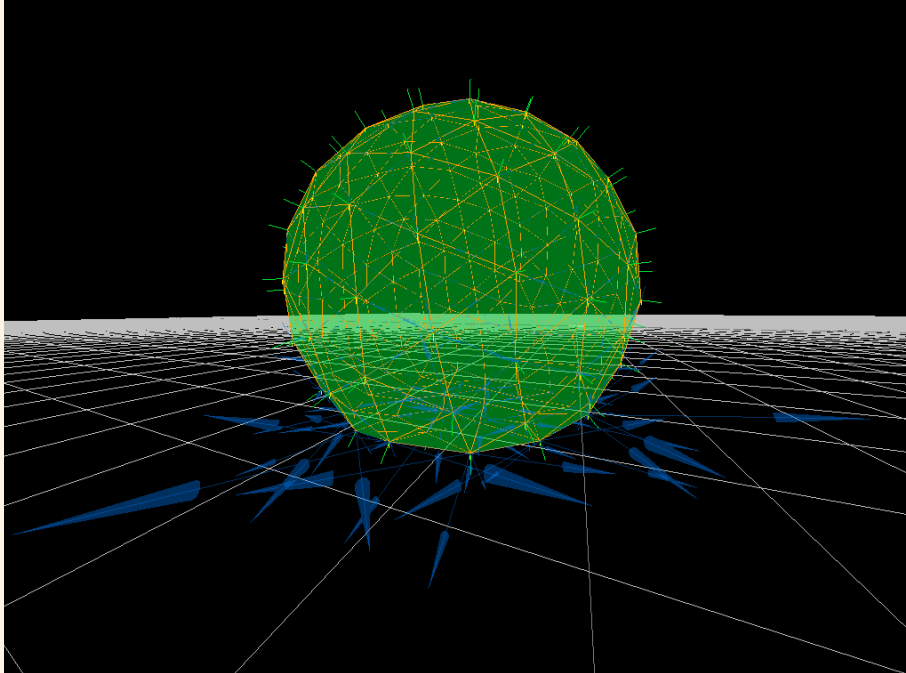


Résultats

Comparaison du nombre de frames générés via les deux méthodes
(pour un disque ayant la hauteur du cube)



Extrapolation en 3 dimensions

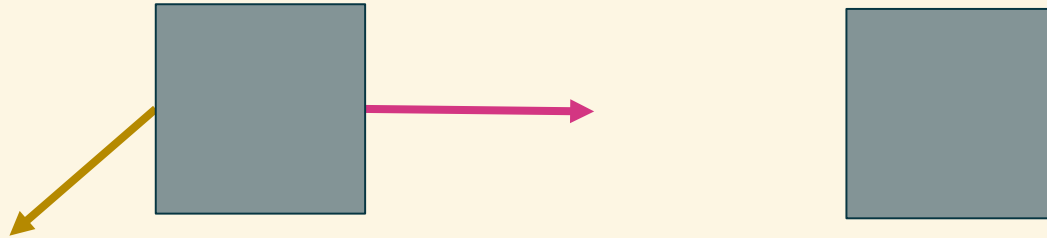


Annexe

Méthode d'Euler implicite

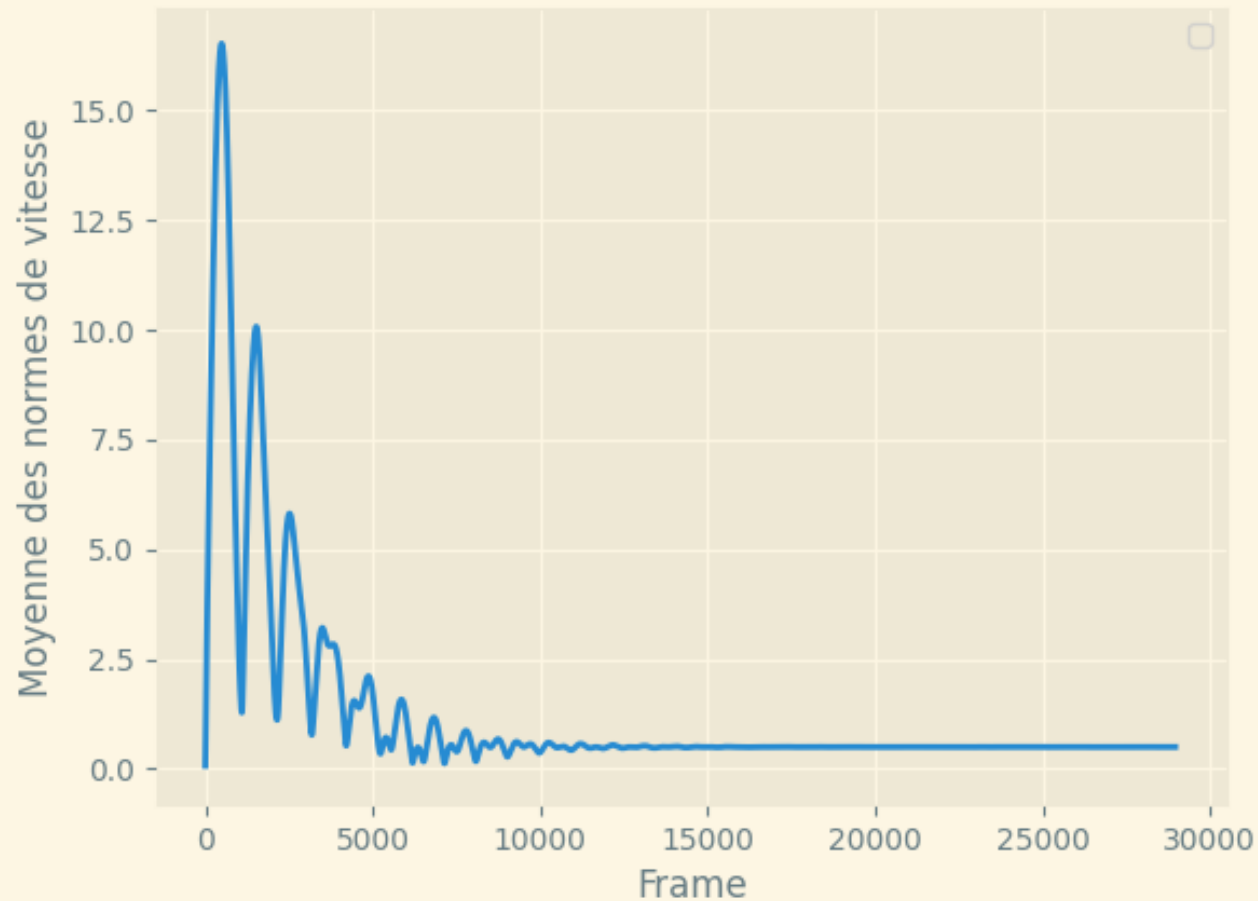
$$\vec{R} = k * (l - l_0) \vec{e}_x$$

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v}$$

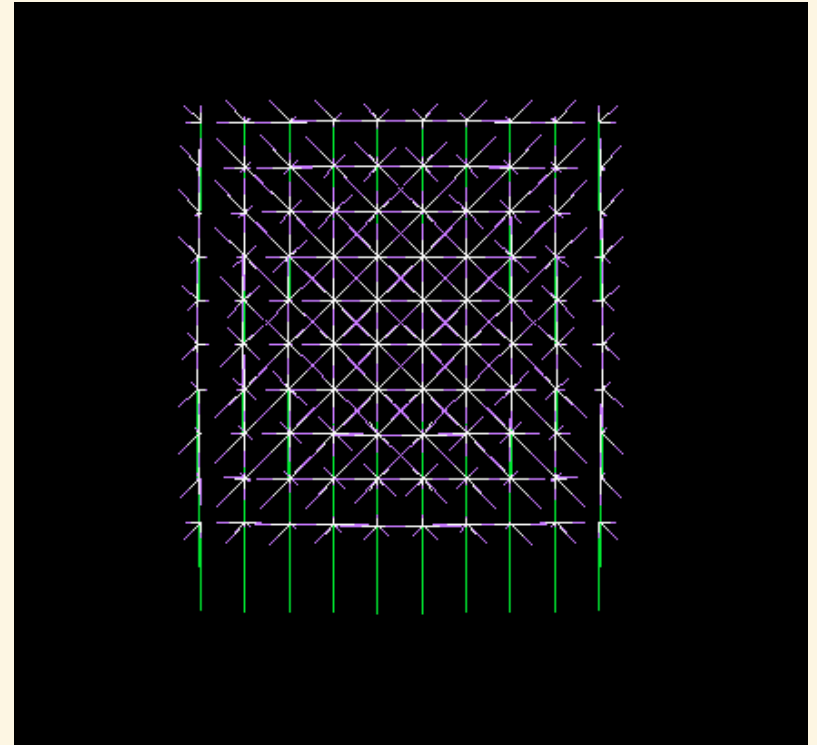
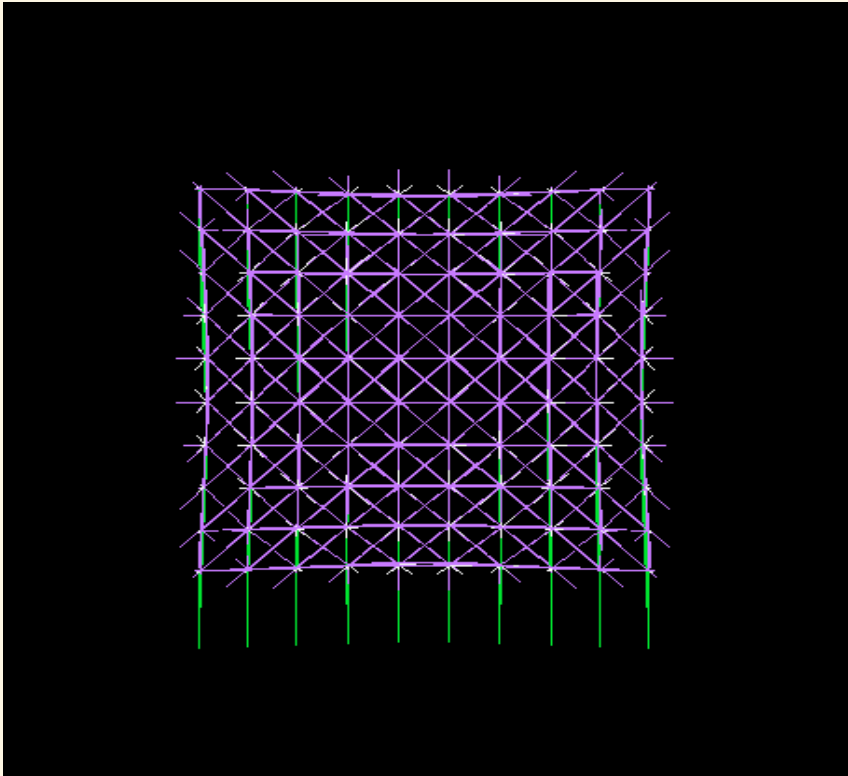


```
v[t + 1] = v[t] + acceleration(t) * dt  
x[t + 1] = x[t] + v[t + 1] * dt
```

Méthode d'Euler implicite



Effet de respiration grâce au frottement



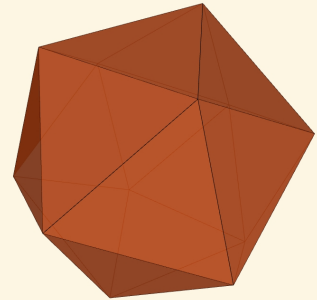
gravité

frottement
amortisseur

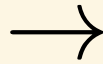
force de ressort
élastique

Construction de l'icosphère

On démarre avec un icosaèdre (20 faces) :



Pour chacune des faces, on applique la transformation :



4 triangles

Puis on norme les vecteurs des sommets pour qu'ils soient distants de R avec le centre

On itère ce procédé pour diminuer la rugosité de la sphère

Il y aura ainsi 20×3^n sommets après n itérations

Loi de Hooke

$$\sigma = E\varepsilon$$