Bartolomeo Ryan 10208
Jeux et Sports

Modélisation de solides déformables

Plan

I. Présentation et première approche

A. Inspiration

B. Modélisation mouvement cohérent avec la réalité physique

II. Chute d’un solide déformable

A. Mise en place d’un système résistant aux perturbations :

- Méthode d’intégration d’Euler explicite
- Méthode de Runge et Kutta

B. Problème de la réaction du support

- Force électrostatique
- Méthode de Backtracking

III. Optimisation par assimilation à un gaz

A. Modèle du gaz parfait

B. Théorème de Stokes

C. Expansion en 3 dimensions

Présentation du problème et première approche

Motivation

Contraintes :
- Multi-joueurs
- Simulation en temps réel
- Machine parfois avec de faibles capacités

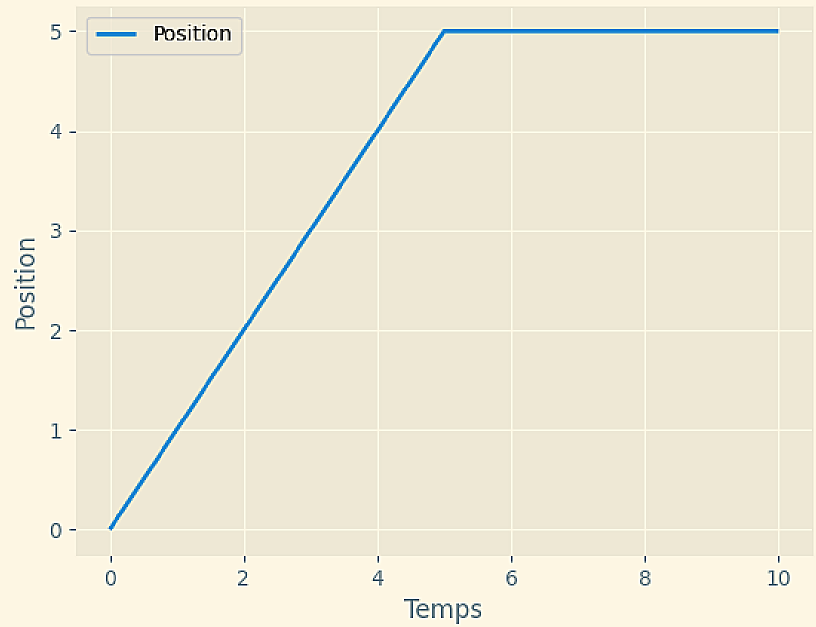
→ Comment minimiser le temps de calcul dans la simulation de solides déformable ?

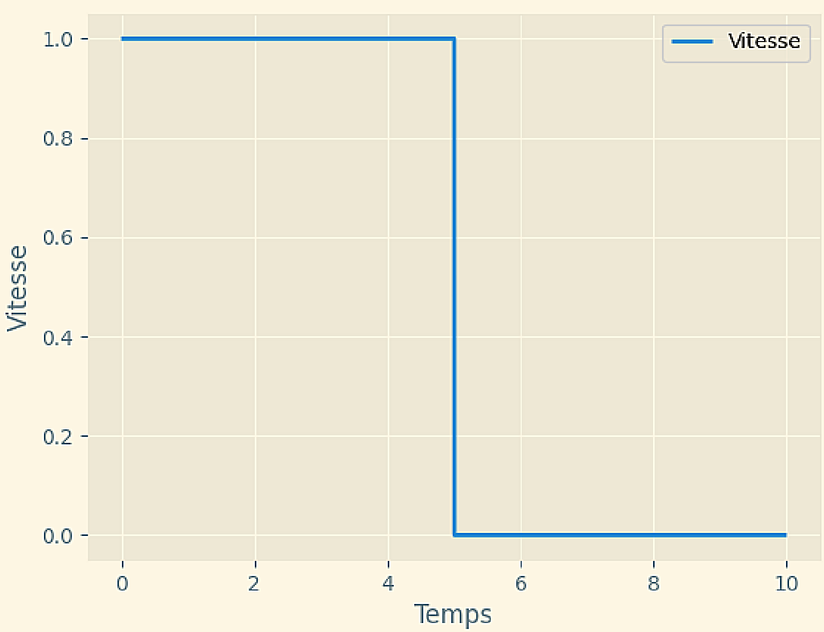
Modélisation réaliste d’un mouvement

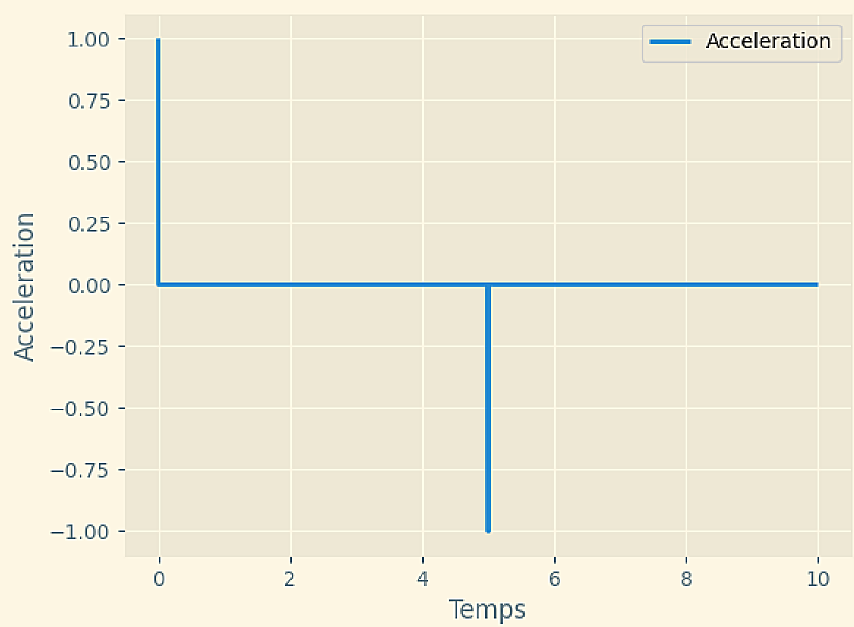
Cas simple

Modèle informatique simple

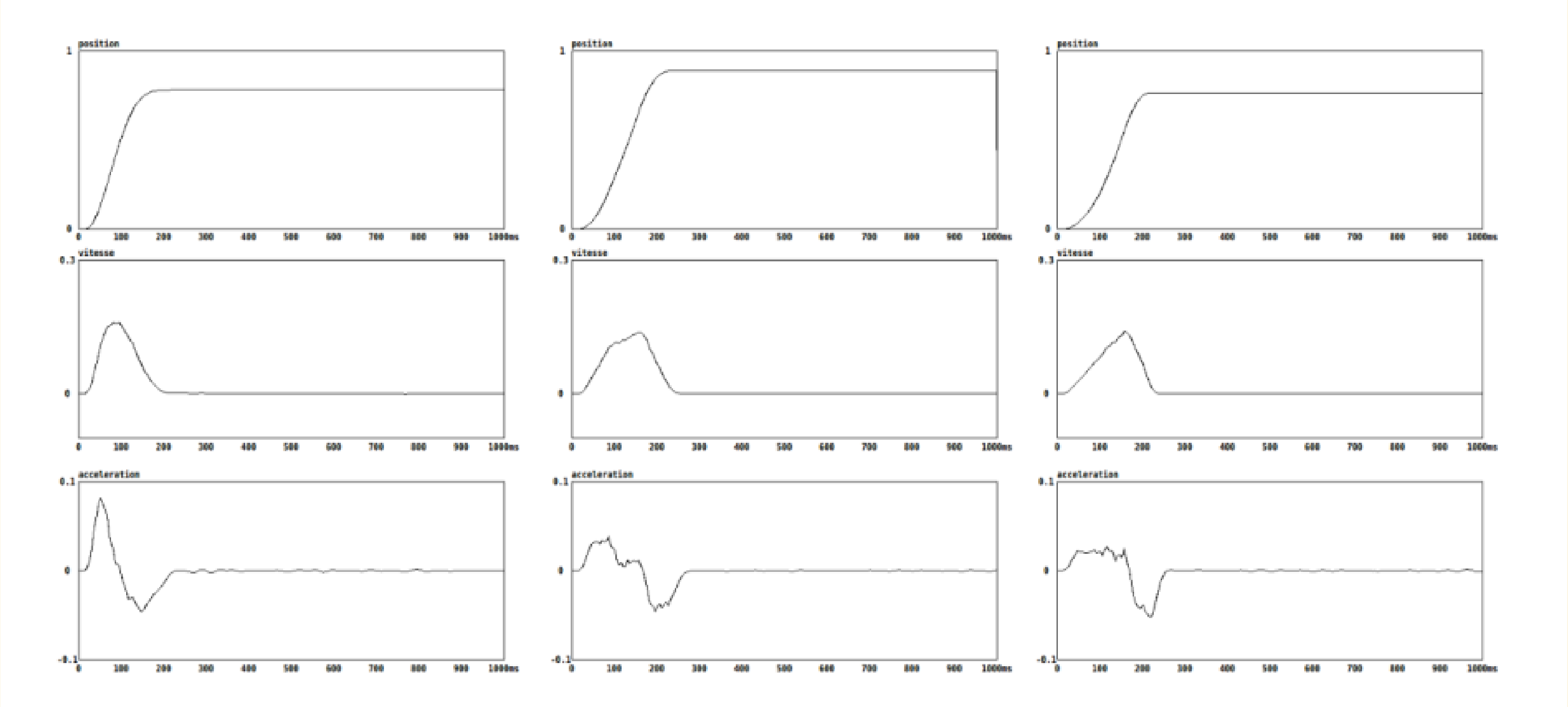
Profil de déplacement linaire







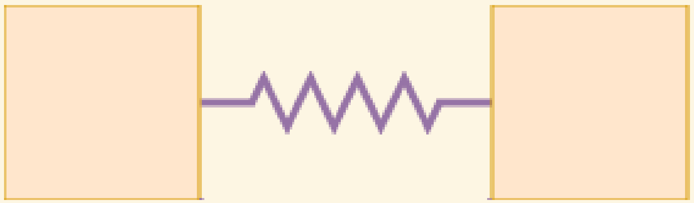
Mouvement naturel

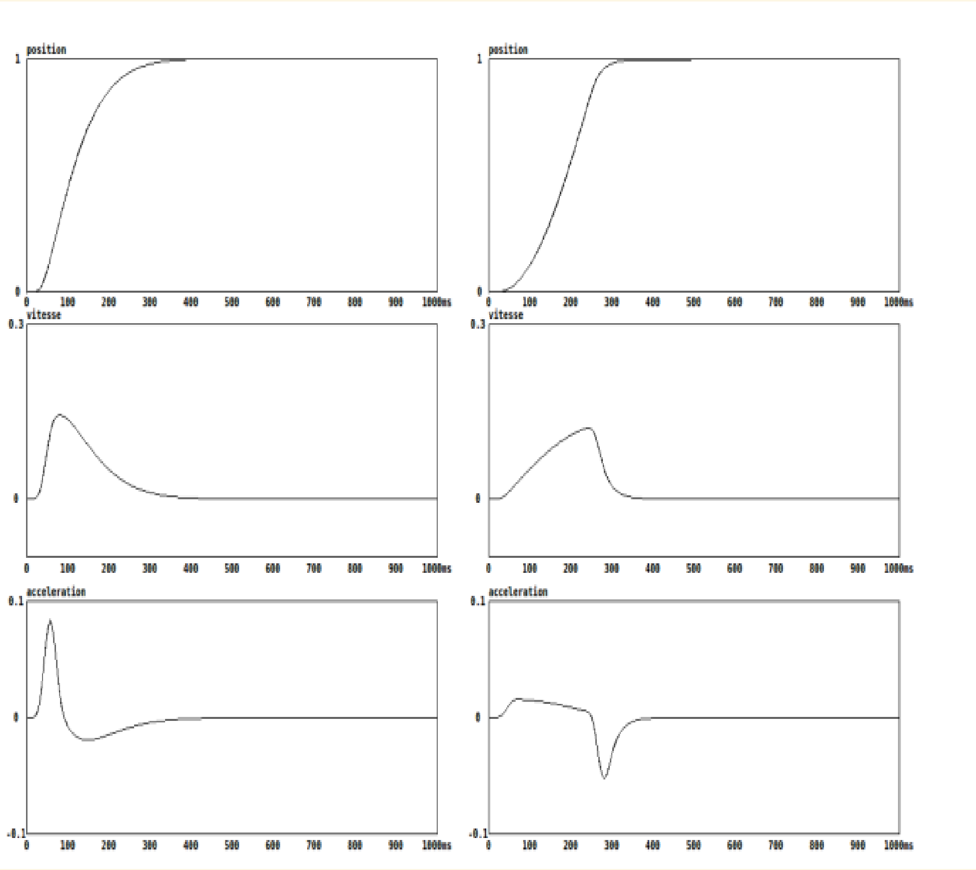


Mass-Spring-System model for real time expressive behaviour synthesis ~ Cyrille Henry

Mouvements type Système masse-ressort

Deux masses en mouvement l’une par rapport à l’autre





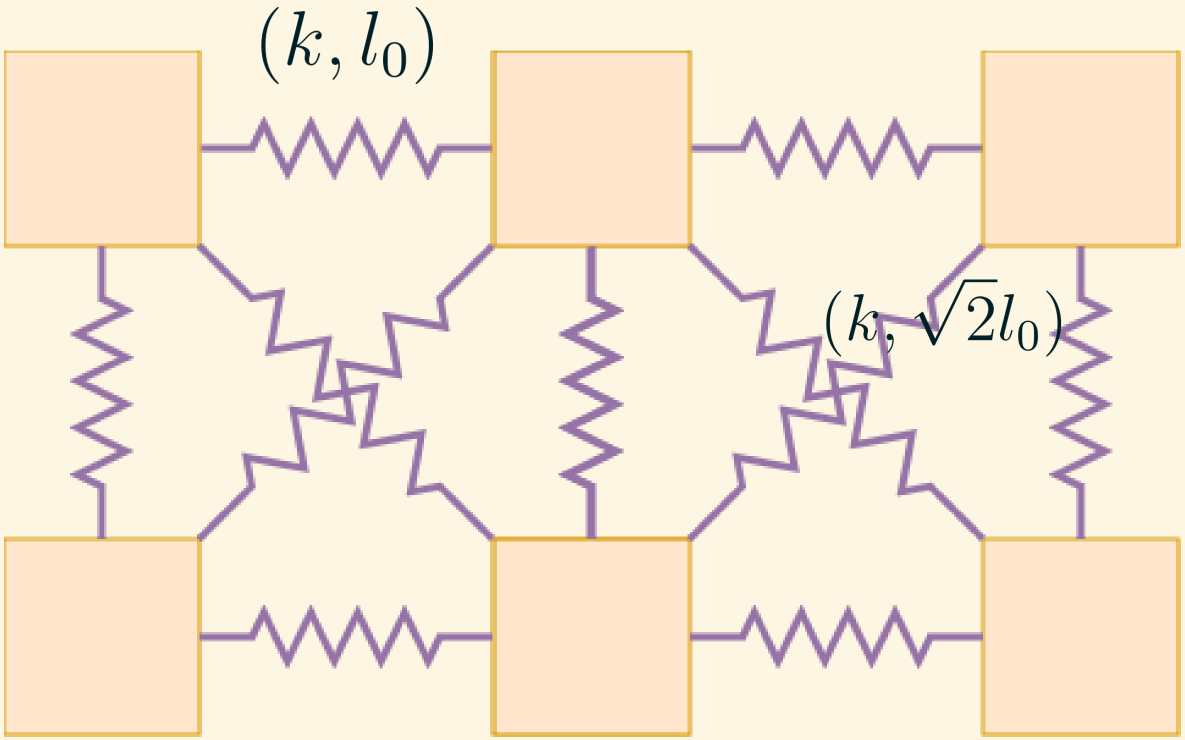
Mass-Spring-System model for real time expressive behaviour synthesis ~ Cyrille Henry

Problème à résoudre

II. Réalisation

1. Système stable malgré une perturbation

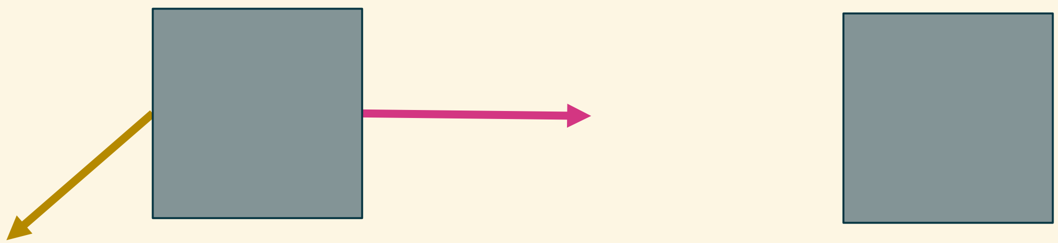
Structure du système



Méthode d’Euler explicite

$$\vec{R} = k * (l - l_0)\vec{e_x}$$

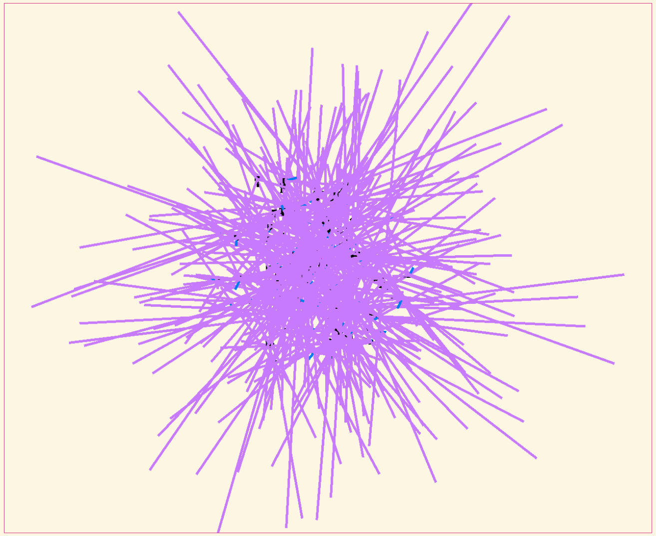
$$\vec{f} = -\alpha\vec{v}$$



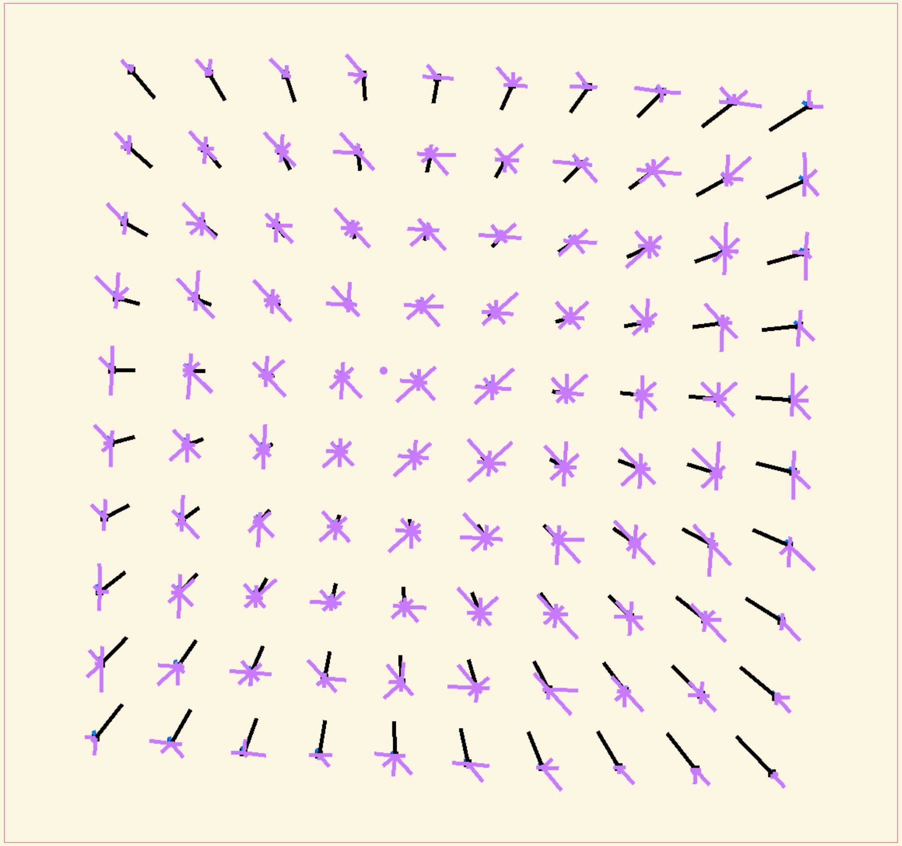
```
x[t + 1] = x[t] + v[t] * dt
v[t + 1] = v[t] + acceleration(t) * dt
```

Résultat de la simulation avec la méthode d'Euler

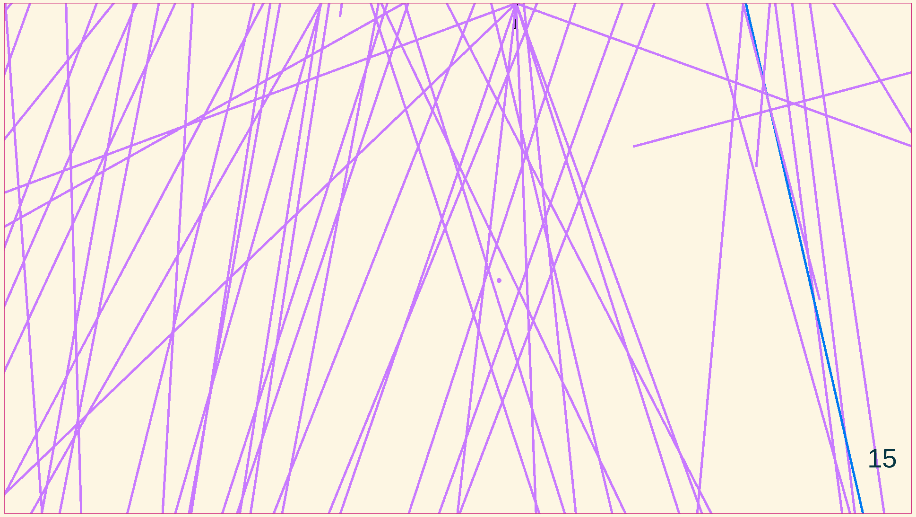
Compression sous l'effet de la force fictive



État initial

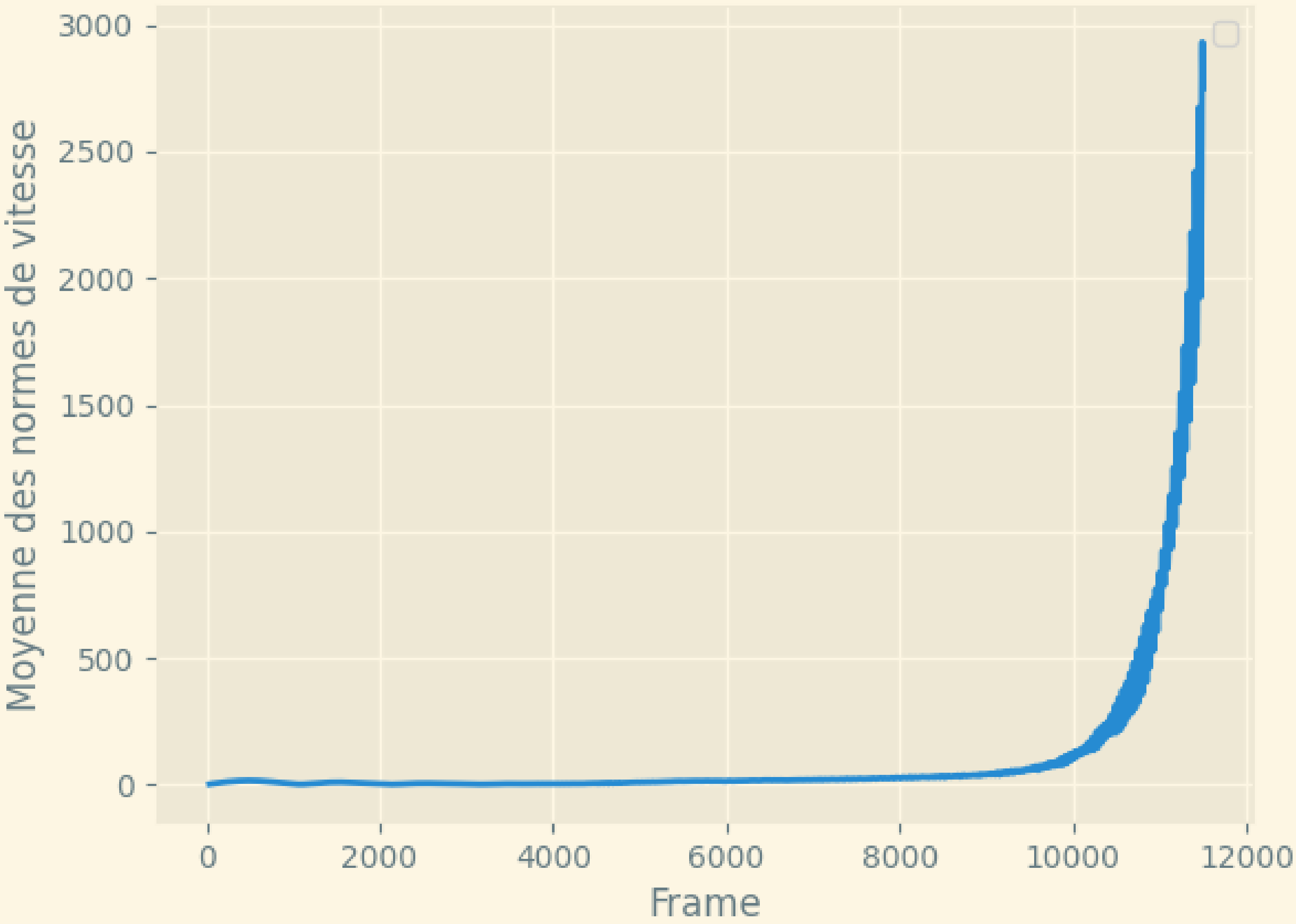


Explosion du système



Force élastique en violet
Force fictive en noir

Premier résultat



Méthode de Runge-Kutta

Approximation de Runge-Kutta

Tableau des coefficients utilisés

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

(c_i) $(a_{i,j})$ (b_j)

Problème de Cauchy à résoudre

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Si z est solution, on a :

$$t_{n,i} = t_n + c_i \times h$$
$$z(t_{n+1}) = z(t_n) + h \sum_{j \leq 4} b_j f(t_{n,j}, z(t_{n,j}))$$
$$z(t_{n,i}) = z(t_n) + h \sum_{j < i} a_{i,j} f(t_{n,j}, z(t_{n,j})))$$

Approximation de Runge-Kutta

Problème différentiel physique

$$\begin{cases} y'' = \mathrm{acc}(t, y, y') \\ y'(t_0) = y'_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

On pose alors :

$$\mathrm{Y(t)} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Y(t_0)} = \begin{pmatrix} y'_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

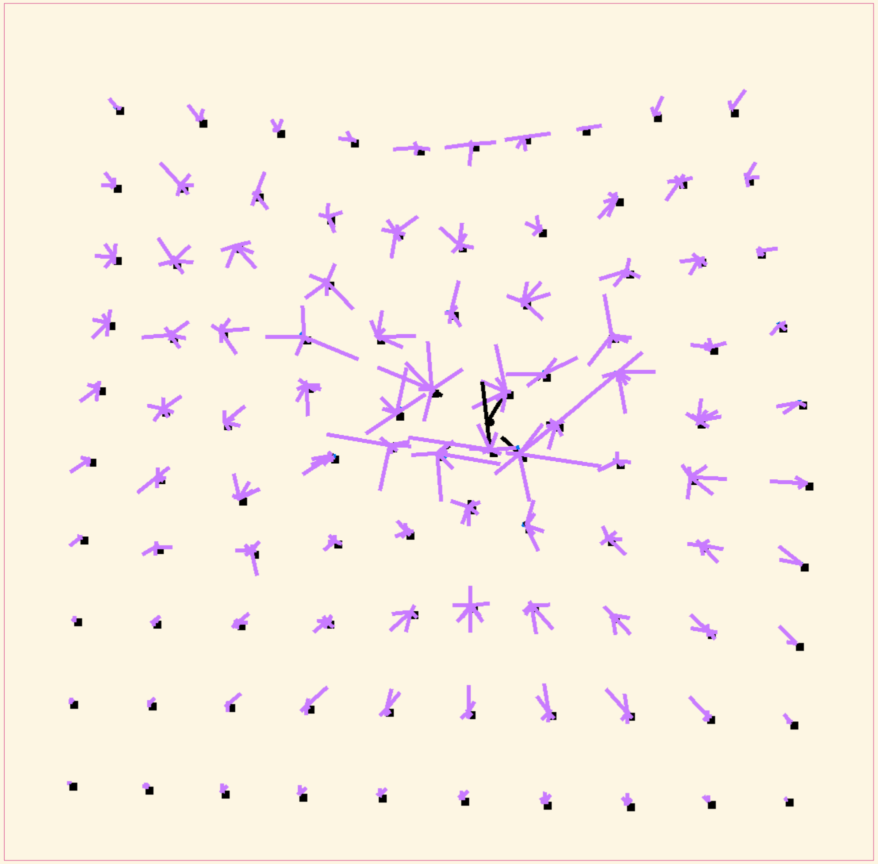
$$\text{d'où Y'(t)} = \begin{pmatrix} y''(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \mathrm{F(t{,}Y)} = \begin{pmatrix} \mathrm{acc}(t, y, y') \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

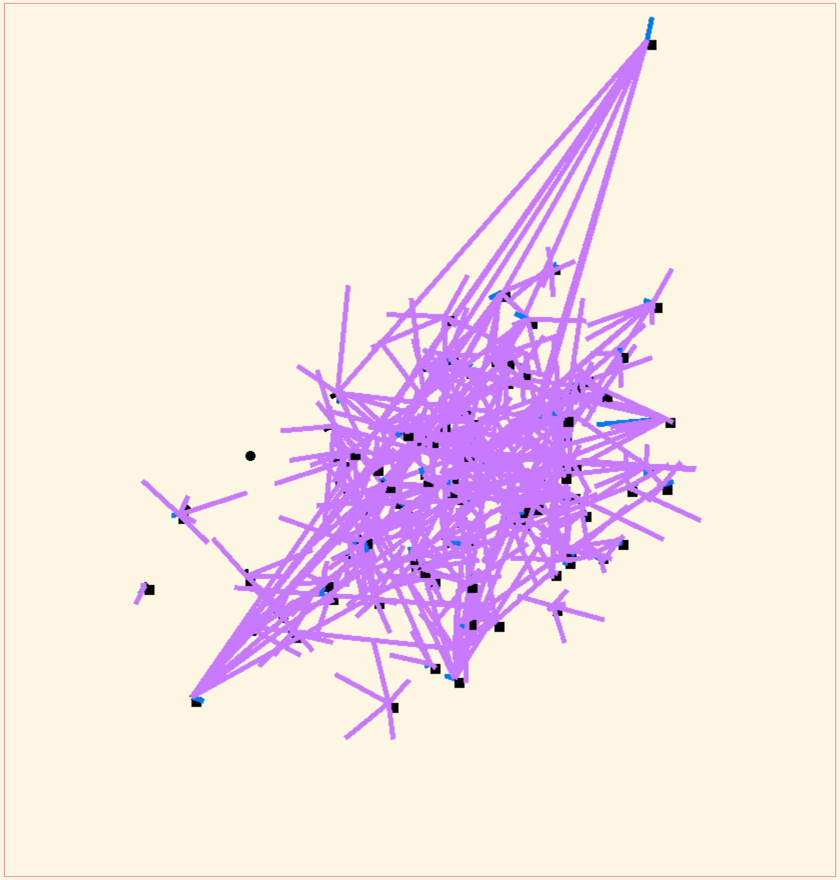
On a alors le problème de Cauchy d'ordre 1 :

$$\begin{cases} Y'(t) = F(t, Y) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

Résultat d'algorithme

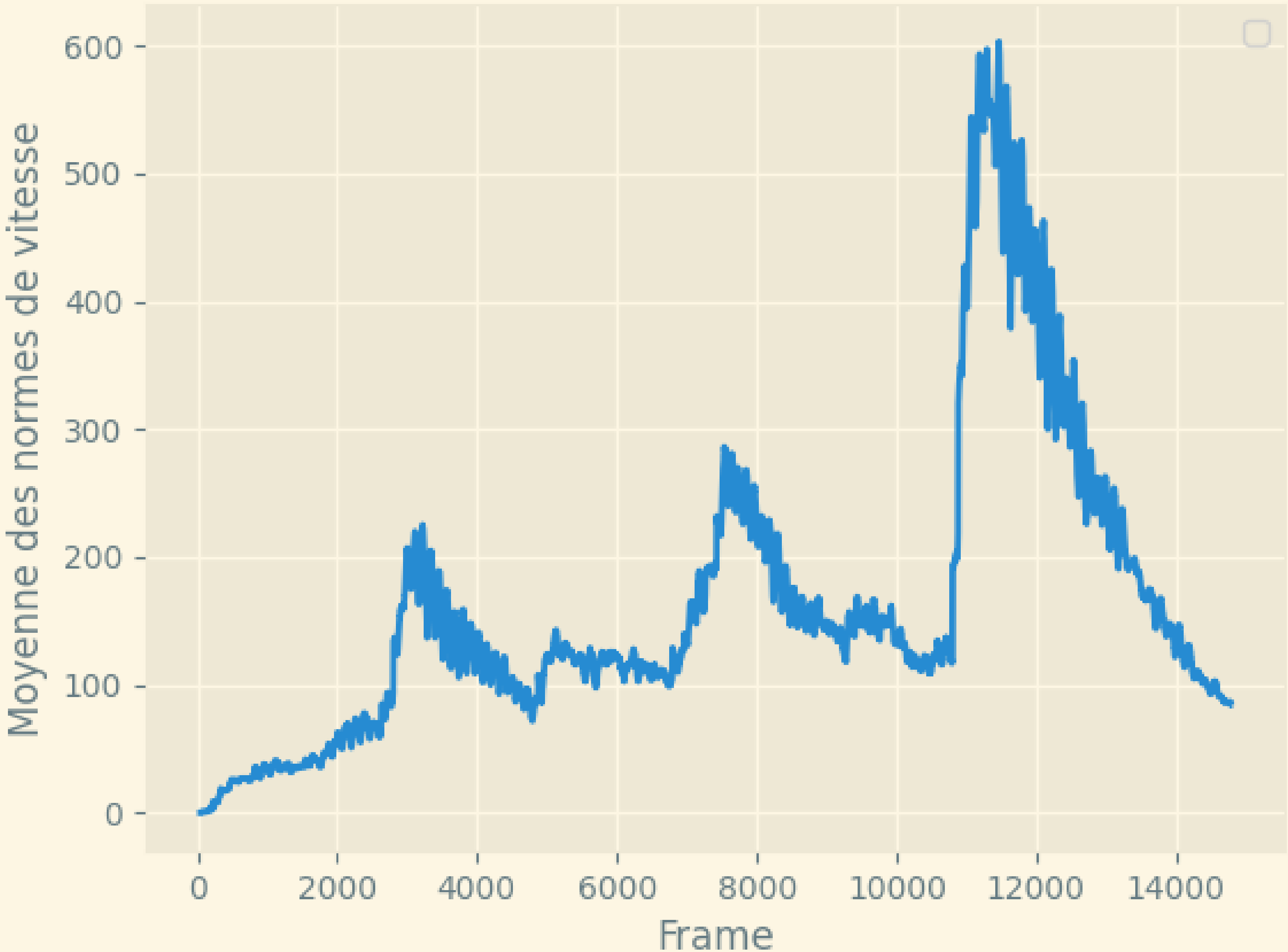
Déformation sous l'effet de la force fictive



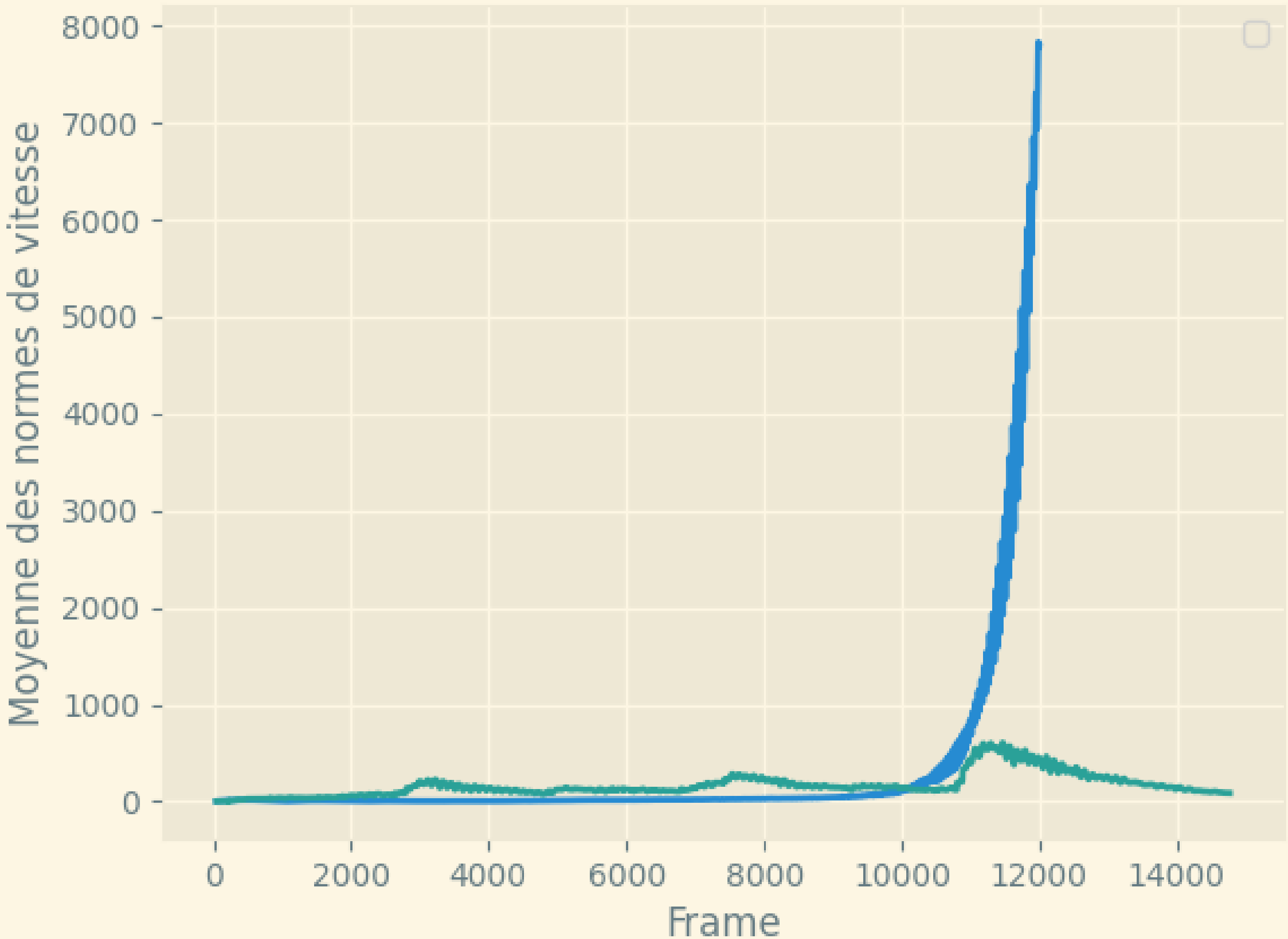


Désordre qui revient à une position d'équilibre

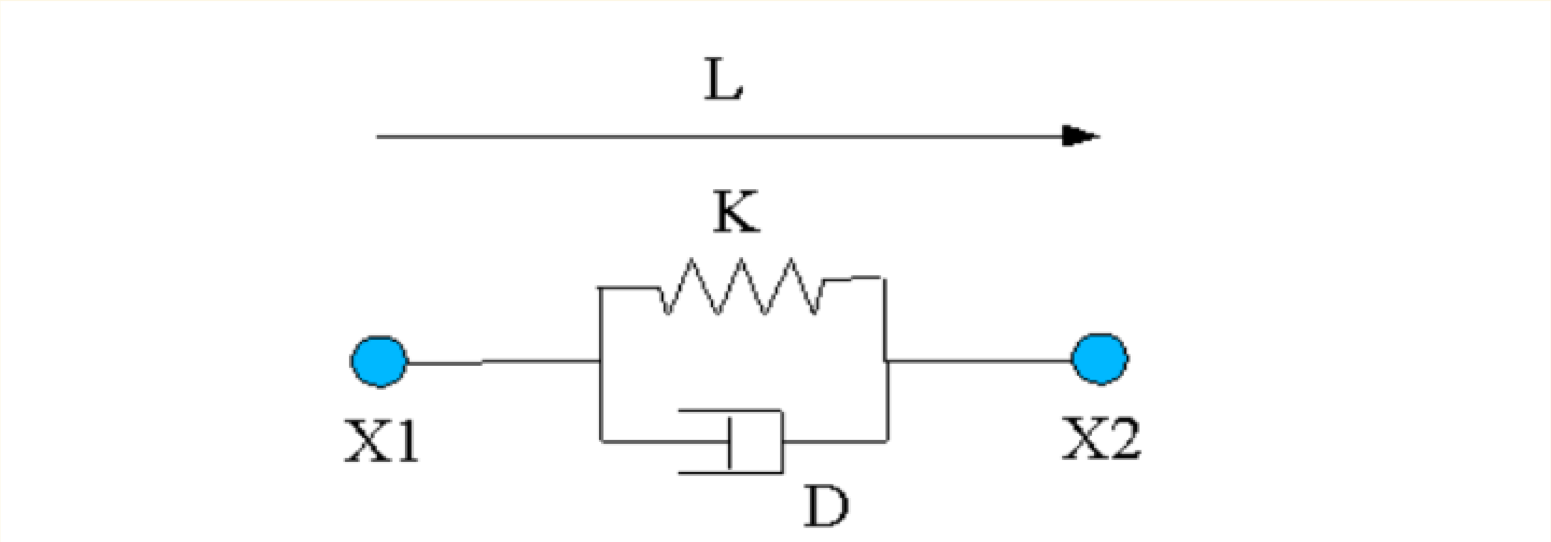
Résultat de la simulation avec RK4



Comparaison des résultats par rapport aux méthodes utilisées



Force d'amortissement pour stabiliser plus rapidement

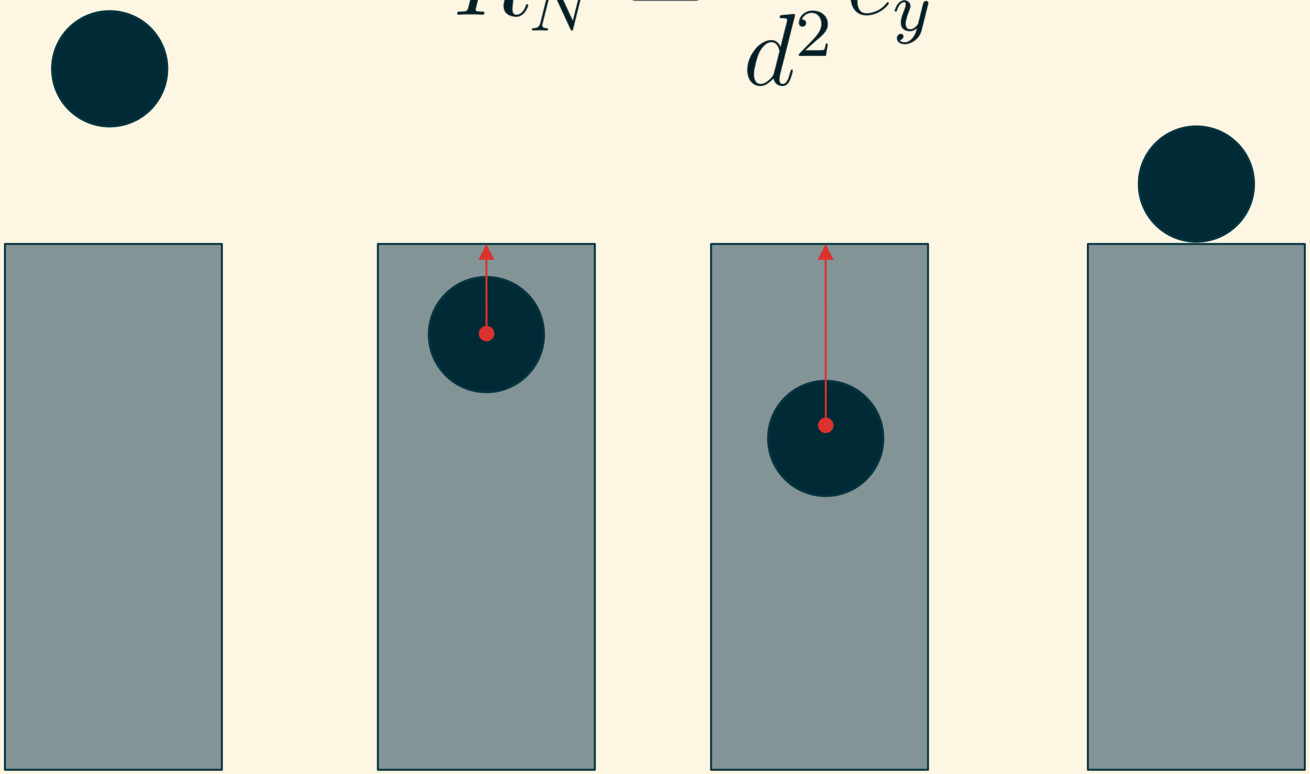


Mass-Spring-System model for real time expressive behaviour synthesis ~ Cyrille Henry

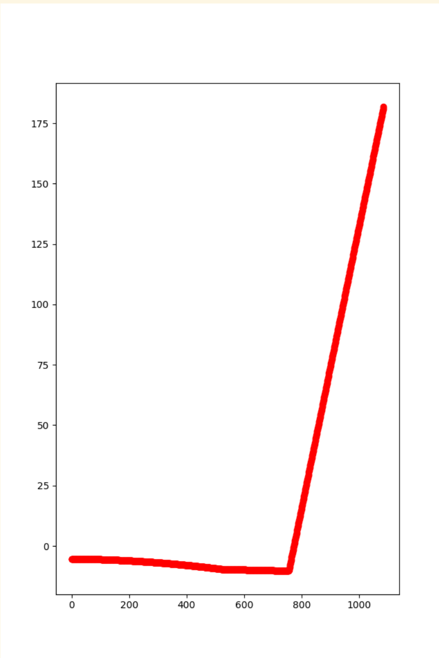
2. Implémentation des collisions

Collision “magnétique”

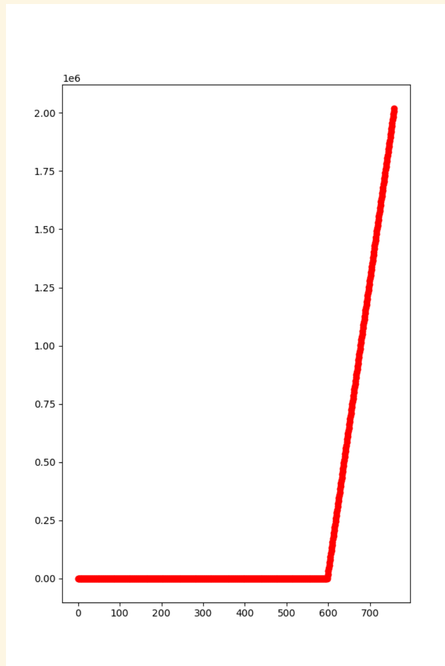
$$\vec{R_N} = \frac{K}{d^2}\vec{e_y}$$



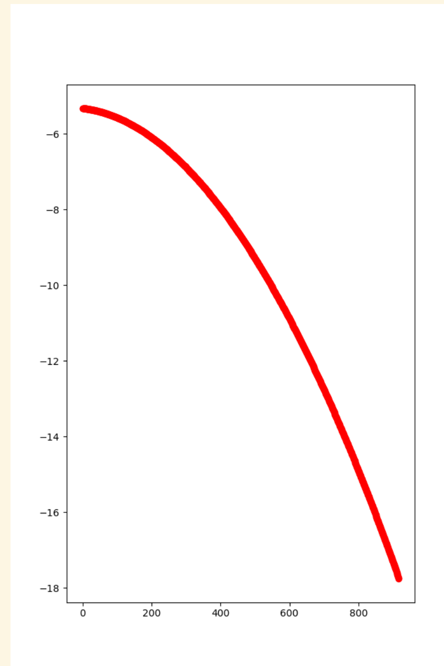
Résultats pour différentes valeurs de K



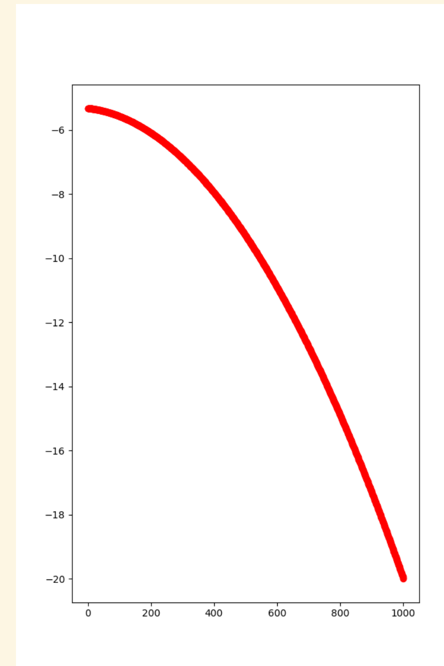
$K = 1.0$



$K = 1.0e-1$



$K = 1.0e-2$

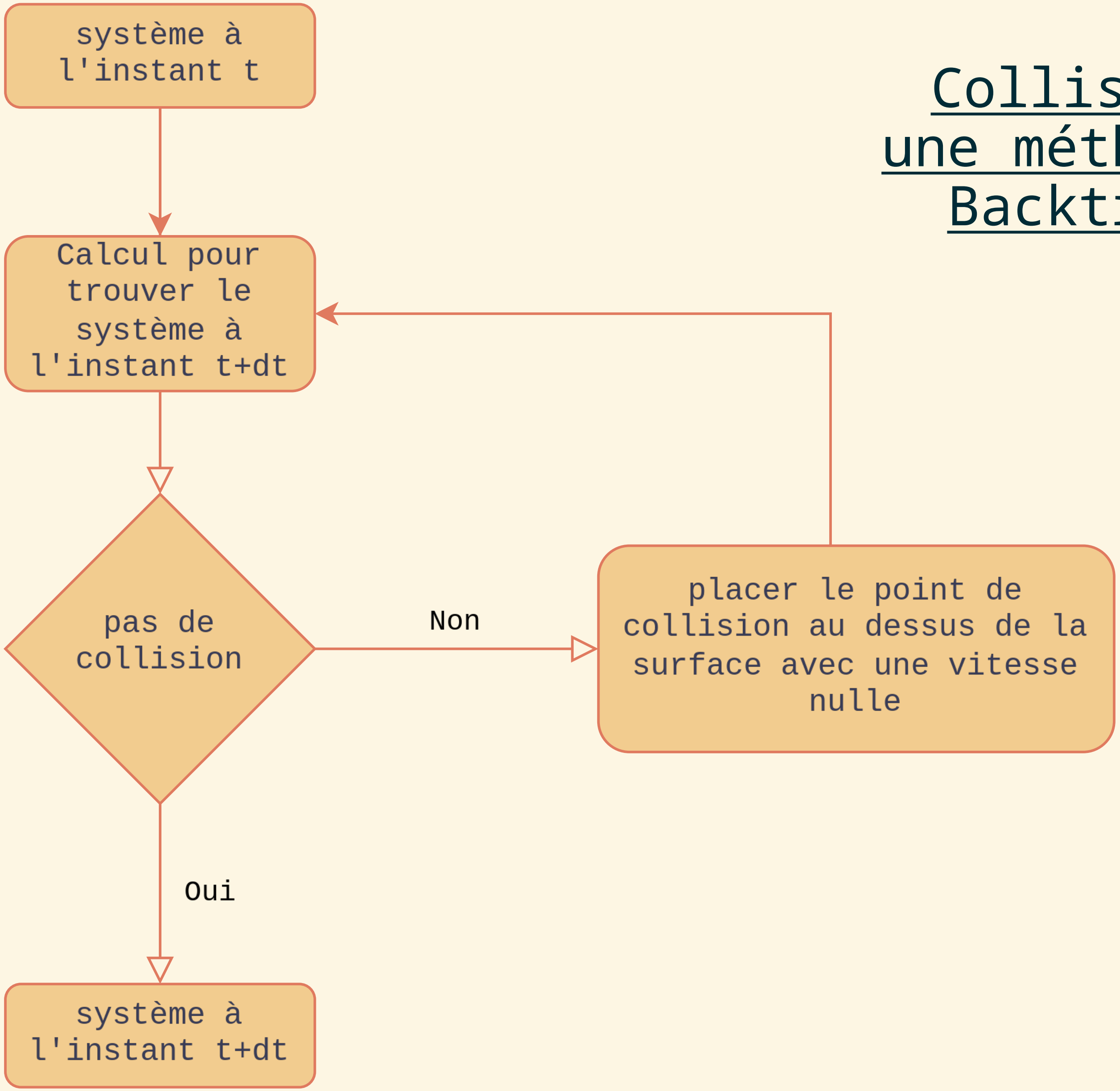


$K = 1.0e-4$

Position moyenne verticale en fonction du temps

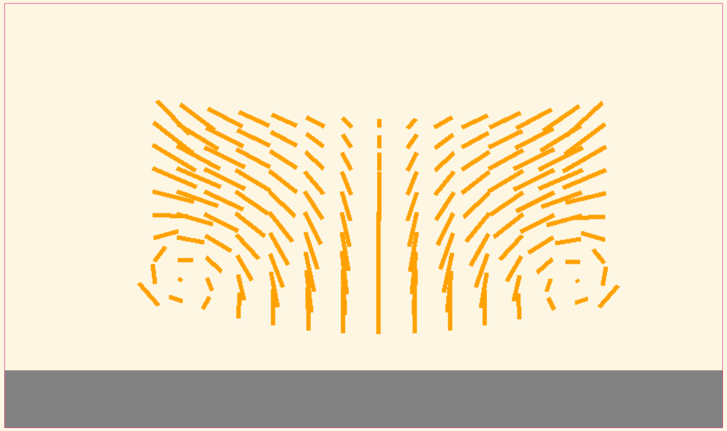
Résultats surprenants car :
→ Force discontinue
→ Force initialement très élevé lorsque d = 0

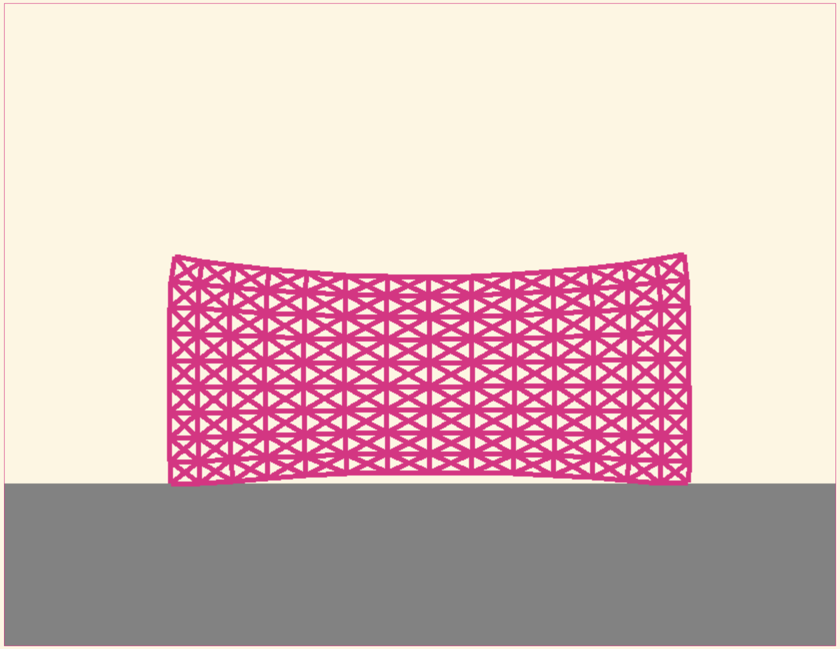
Collision via une méthode type Backtracking



Résultats

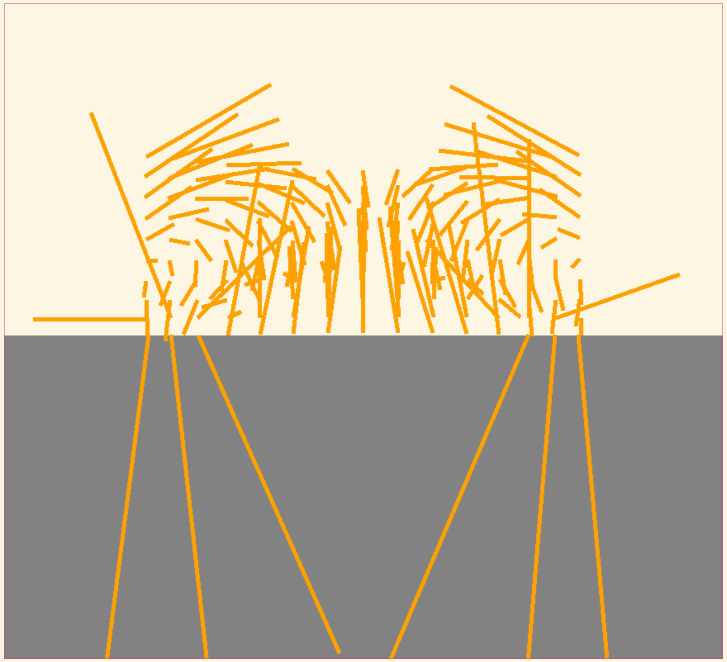
Champ d'accélération lorsque
le système rebondit en l'air





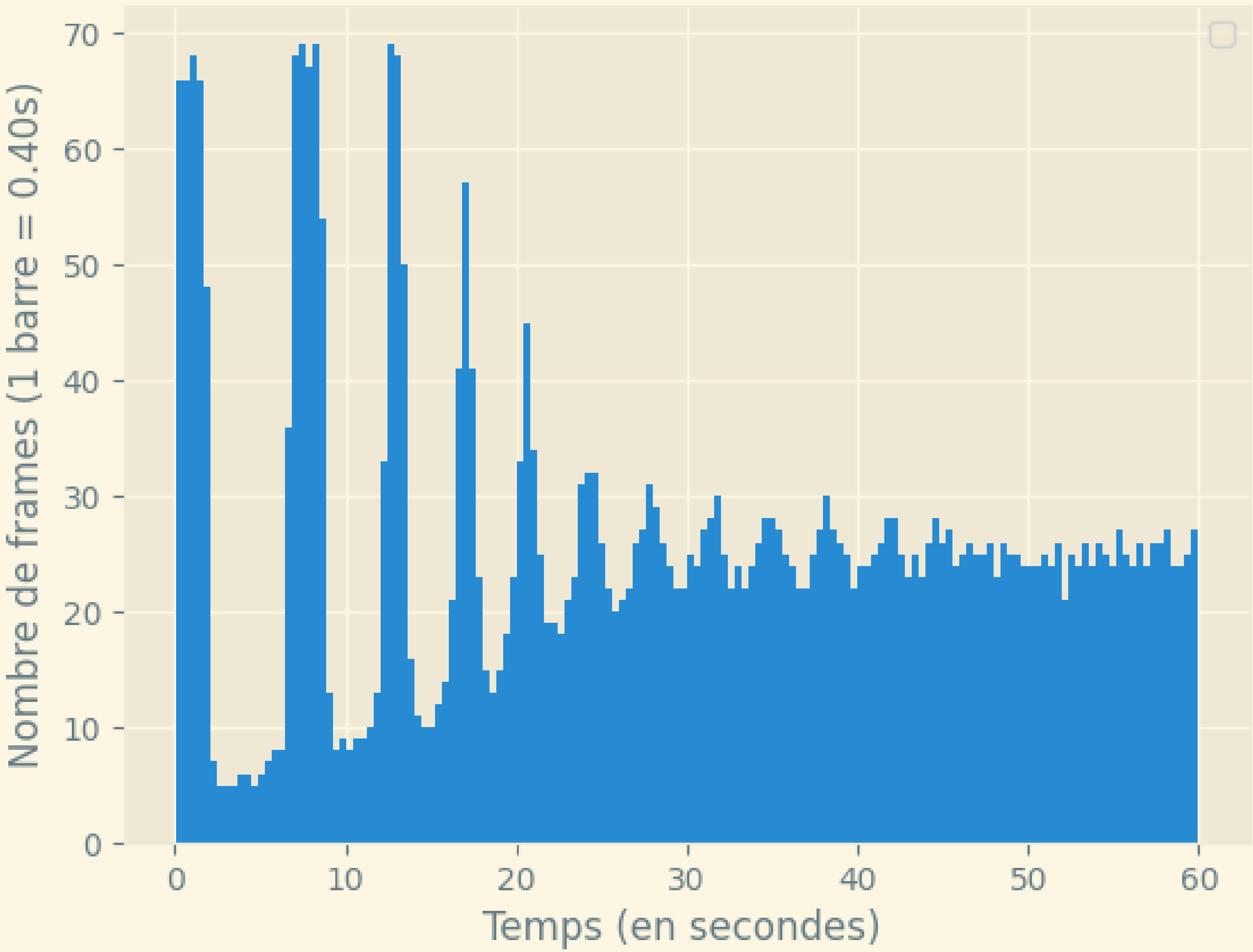
Liaisons des ressorts de la
position d'équilibre finale

Champ d'accélération lorsque le
système est au contact du sol



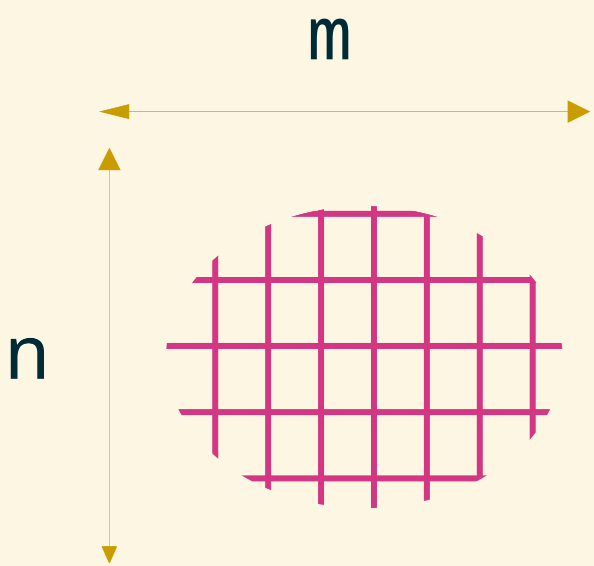
Résultats

Nombre de frames générées par période de 0,40s durant la simulation (sans affichage graphique)

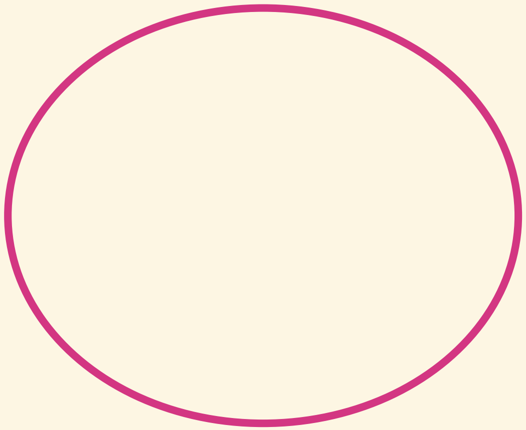


III. Deuxième approche

Modèle de la bulle de gaz parfait



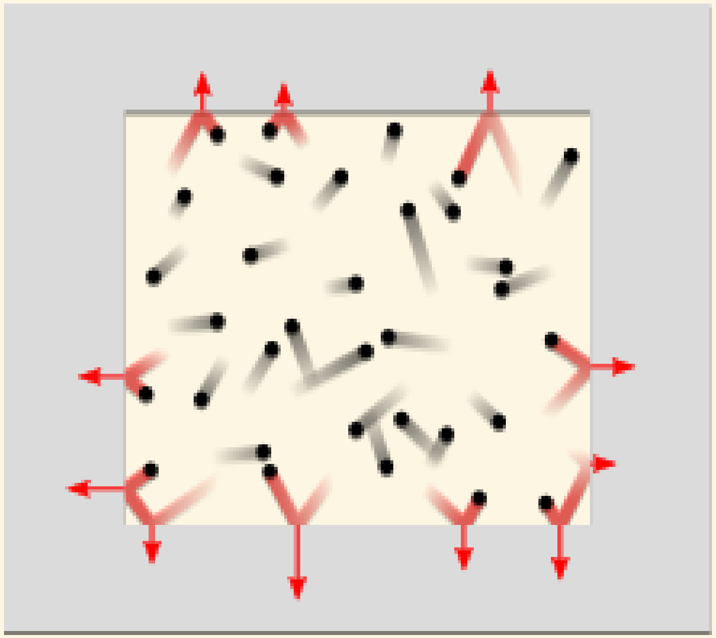
$\rightarrow$



Complexcité : $\mathcal{O}(m * n) \rightarrow \mathcal{O}(m + n)$

Avantages :
→ Moins de particules au total à simuler
→ Moins de particules au contact du sol

Modèle de la bulle de gaz parfait

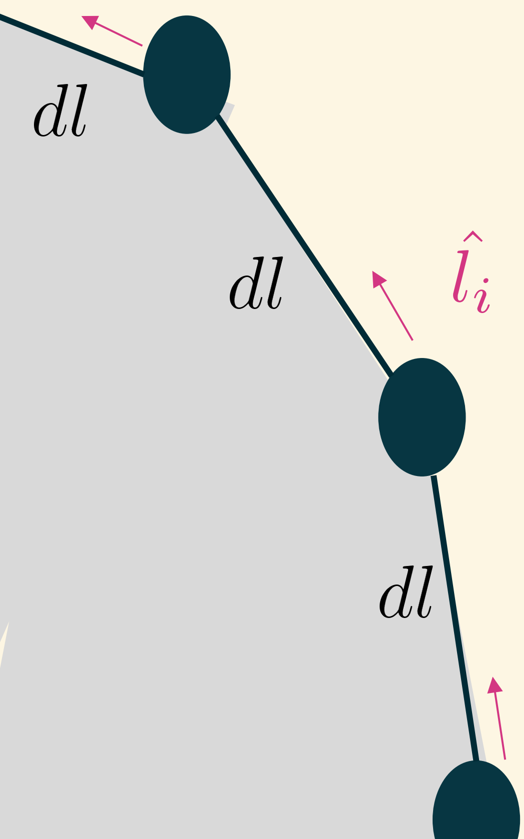


$$\vec{F} = Pd\vec{S}$$

$$P = \frac{nRT}{V}$$

$$\boxed{\vec{F} = K_{nRT}\frac{1}{V}d\vec{S}}$$

Calcul du volume



Théorème de Stokes :

$$\iint_S \mathrm{div}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F}\cdot\vec{dl}$$

$$\vec{F} = x\vec{e_x}$$

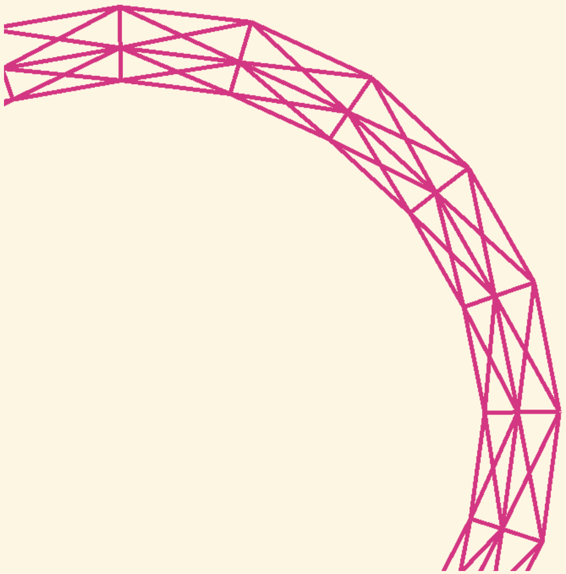
$$\mathrm{div}\vec{F} = 1$$

$$\iint_S \mathrm{div}\vec{F}\cdot d\vec{S} = S$$

$$\begin{aligned} &\vec{F}\cdot\vec{dl} \\ &= \vec{F}\cdot\hat{l}dl \\ &= x\cdot\hat{l}_x\cdot dl \end{aligned}$$

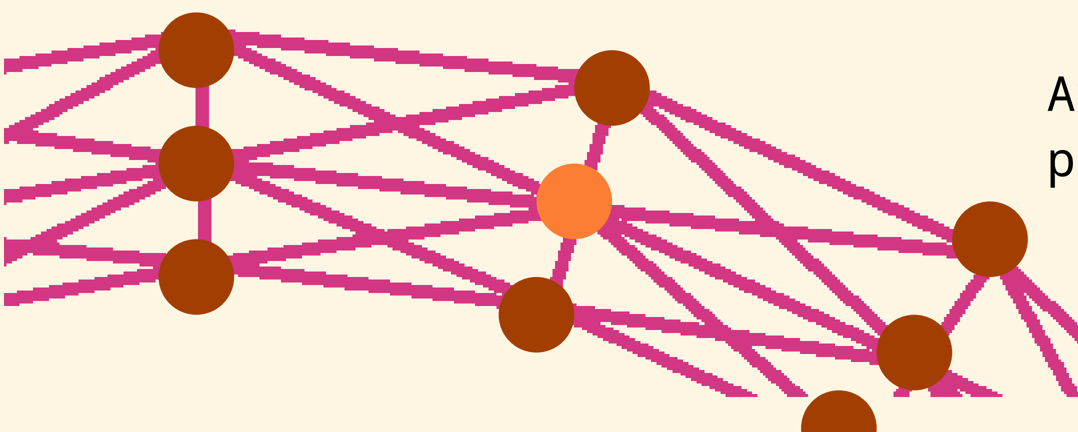
$$S \approx \sum x_i\cdot\hat{l}_{i,x}\cdot dl$$

Compromis ressort/gaz pour conserver la forme



Les points sont stockés dans un tableau pour un accès en O(1). La navigation se fait en suivant :

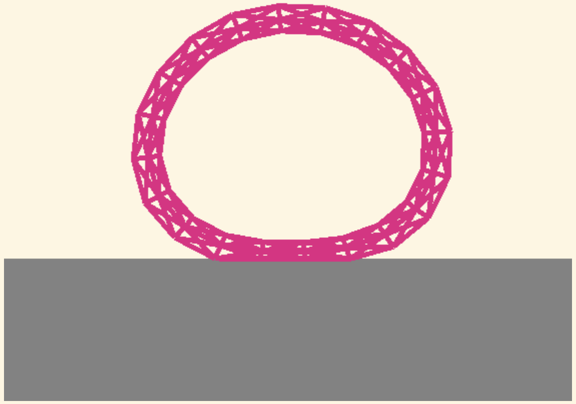
$$\begin{array}{ccccc} i+p+1 & & i+p & & i+p-1 \\ & & \uparrow & & \\ i+1 & \leftarrow & i & \rightarrow & i-1 \\ & & \downarrow & & \\ i-p+1 & & i-p & & i-p-1 \end{array}$$



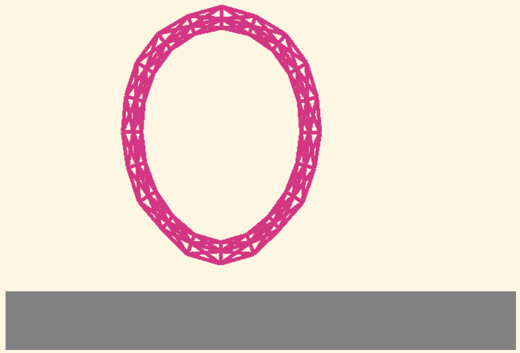
Avec p le nombre de points par couche

Résultat

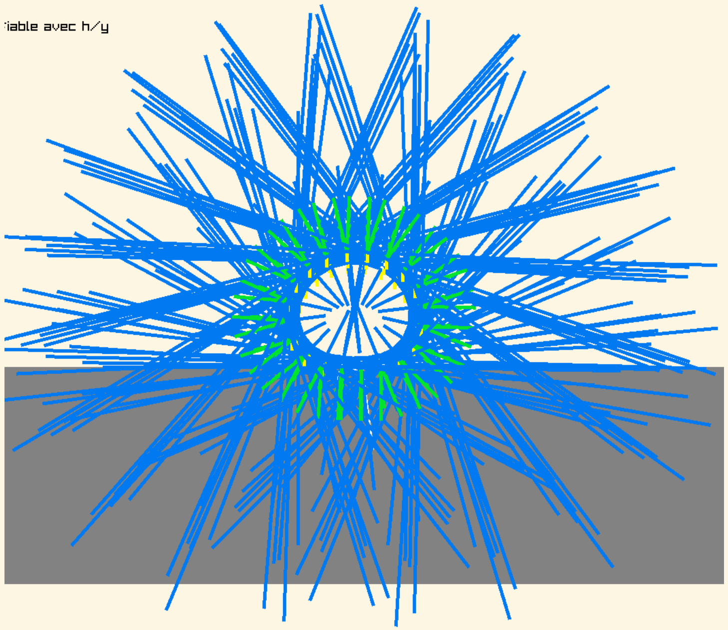
Position d'équilibre finale



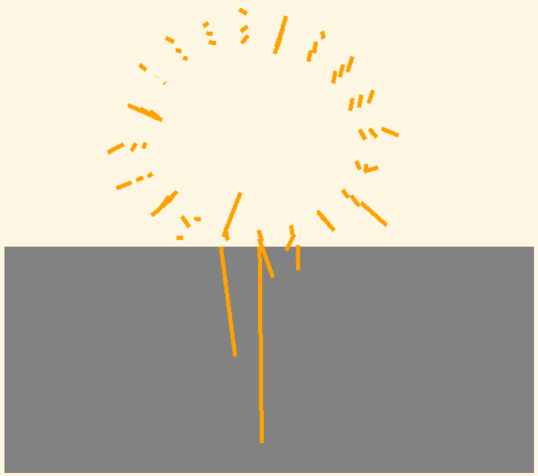
Déformation après rebond



Forces appliquées sur les points

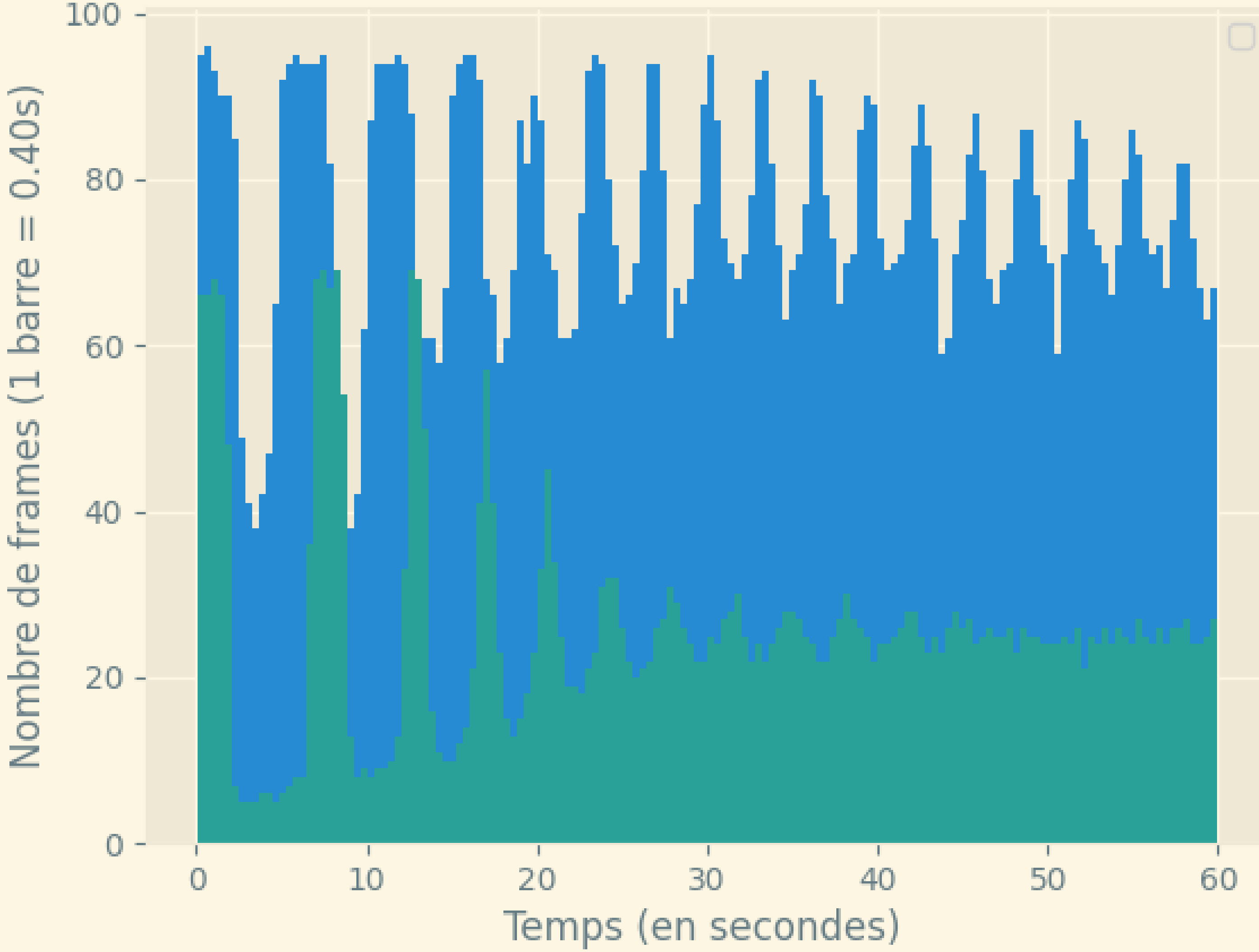


Profil d'accélération

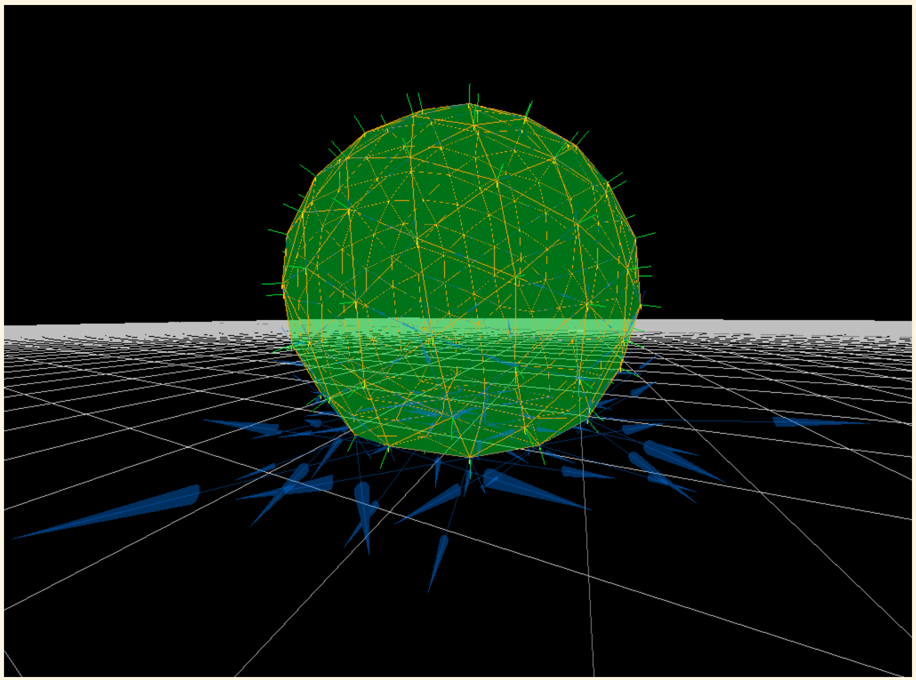


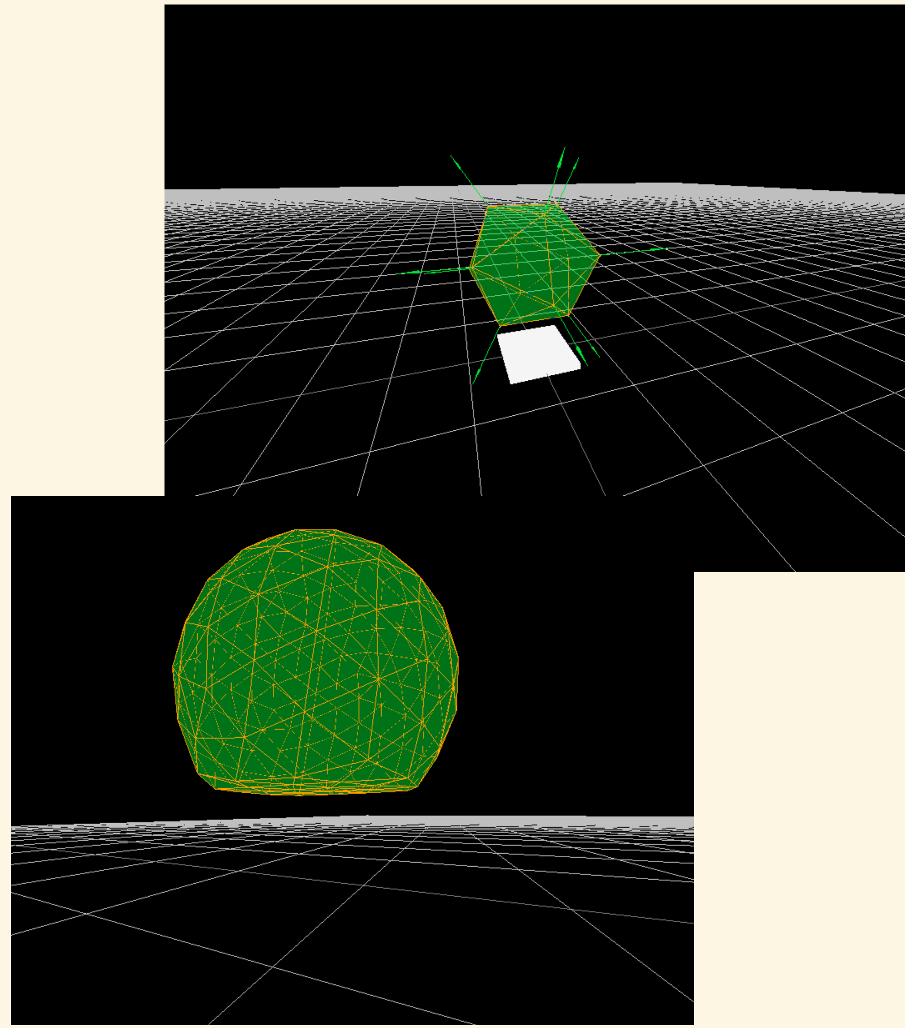
Résultats

Comparaison du nombre de frames générés via les deux méthodes
(pour un disque ayant la hauteur du cube)



Extrapolation en 3 dimensions





Conclusion

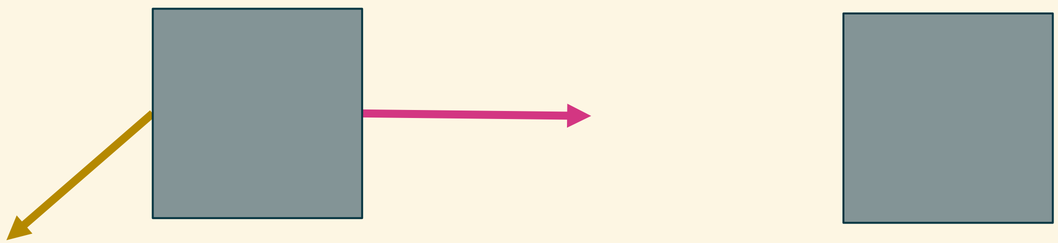
→ Méthode masse-ressort pour simuler un comportement cohérent
→ Méthode d’intégration de Runge et Kutta pour simuler un comportement stable
→ Assimilation de la partie interne par un gaz parfait pour minimiser le temps de calcul

Annexe

Méthode d'Euler implicite

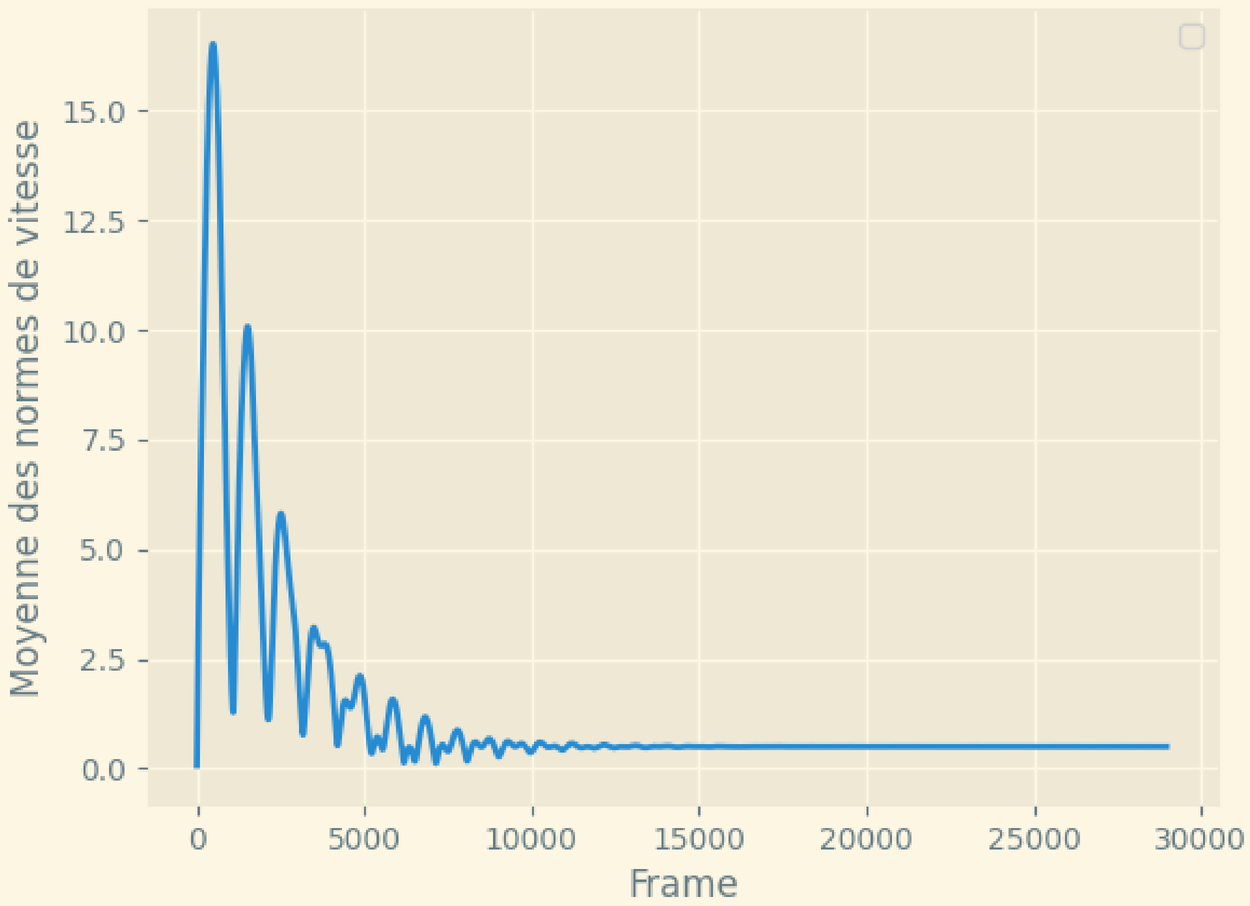
$$\vec{R} = k * (l - l_0)\vec{e_x}$$

$$\vec{f} = -\alpha\vec{v}$$

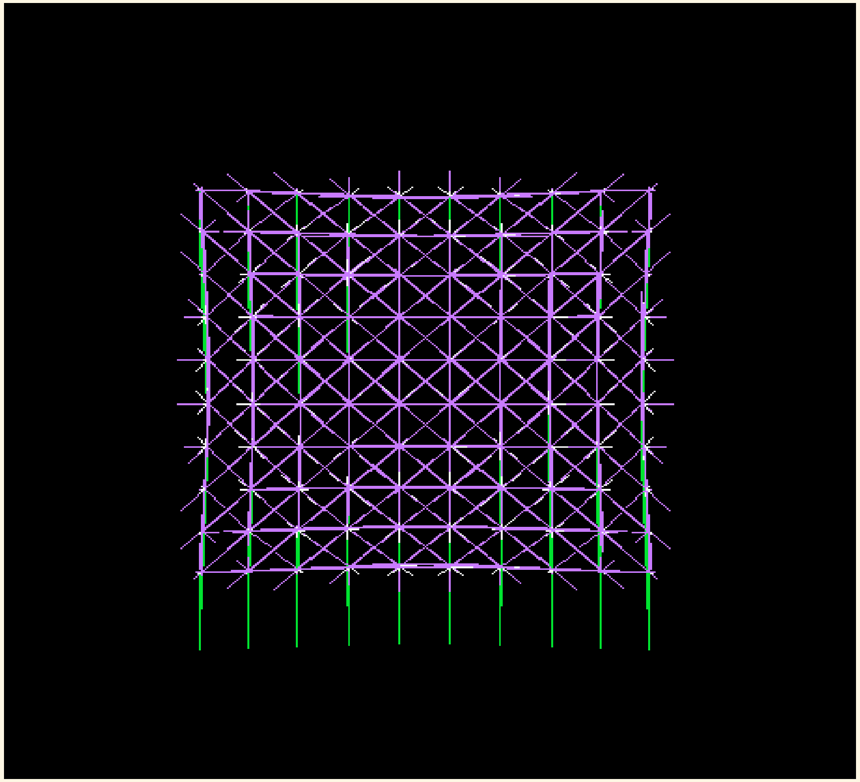


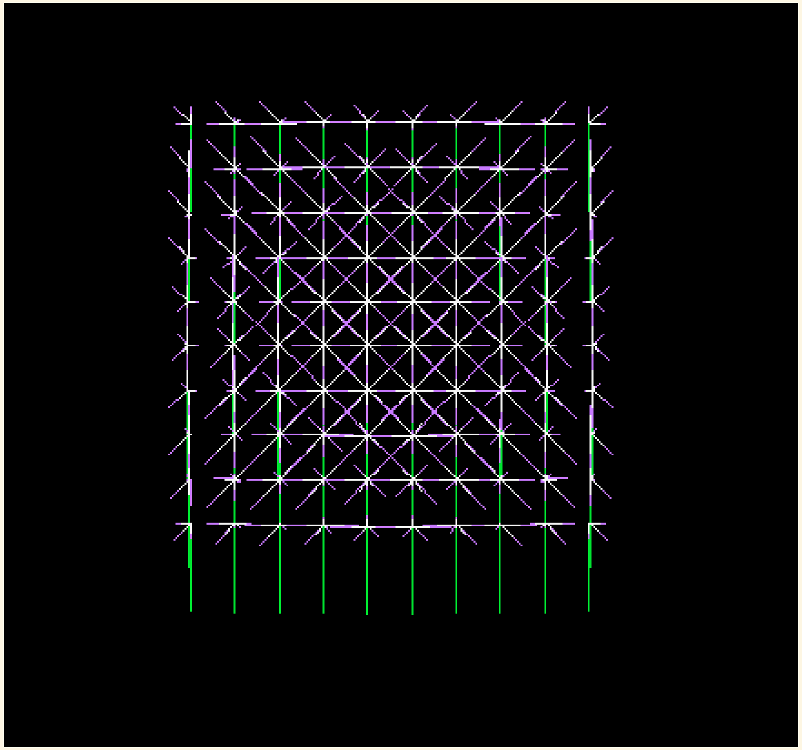
```
v[t + 1] = v[t] + acceleration(t) * dt
x[t + 1] = x[t] + v[t + 1] * dt
```

Méthode d'Euler implicite



Effet de respiration grâce au frottement





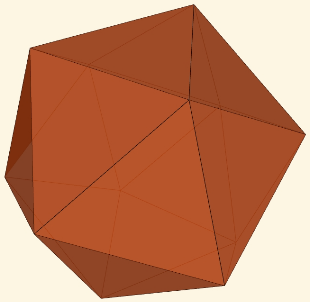
gravité

frottement amortisseur

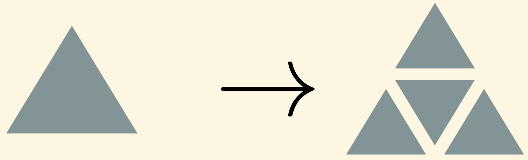
force de ressort élastique

Construction de l'icosphère

On démarre avec un icosaèdre (20 faces) :



Pour chacune des faces, on applique la transformation :



Puis on norme les vecteurs des sommets pour qu'ils soient distants de R avec le centre

On itère ce procédé pour diminuer la rugosité de la sphère

Il y aura ainsi 20×3^n sommets après n itérations

Description d’un solide isotrope : Loi de Hooke et équation de Lamé

→ La loi de Hooke

$$\sigma = E\varepsilon$$

où

σ La contrainte (pression)

E Le module de Young

ε L’allongement relatif à la longueur à vide

$$(\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0})$$

→ L’équation de Lamé

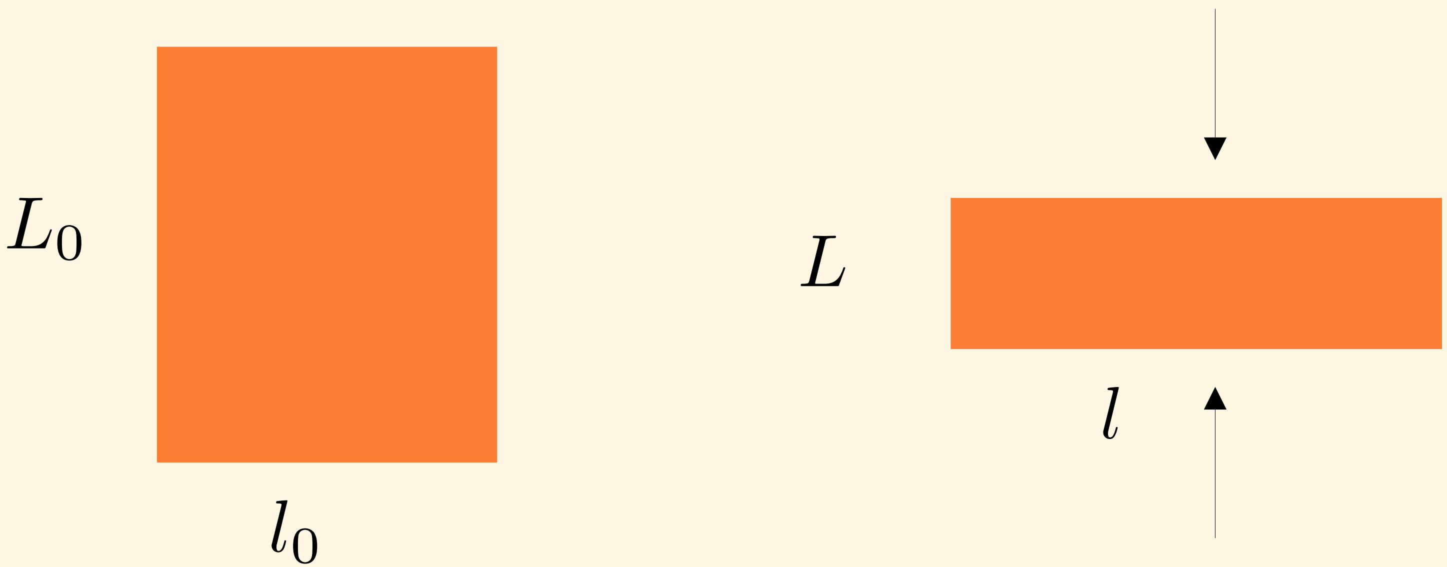
$$\sigma = E\varepsilon \Longleftrightarrow \sigma = \lambda \mathrm{Tr}(\varepsilon) + 2\mu\varepsilon$$

Le couple (λ, μ) défini entièrement le matériel isotrope

En posant : $E = \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda+\mu}$

Deuxième paramètre pour décrire un matériel isotrope : coefficient de Poisson

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \qquad \nu = \frac{\frac{l_0 - l}{l_0}}{\frac{L_0 - L}{L_0}}$$



Avec le module de Young (E) et le coefficient de Poisson (v), on retrouve facilement les coefficients de Lamé.

Preuve de la stabilité de Runge et Kutta

Une méthode d'intégration est dite stable de constante S si il existe S tel que, si

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h\phi(t_n, y_n) \\
\tilde{y}_{n+1} &= \tilde{y}_n + h\phi(t_n, \tilde{y}_n) + \varepsilon_n
\end{aligned}
$$

alors

$$\max_{n \leq N} |y_n - \tilde{y}_n| \leq S \sum_{n \leq N} |\varepsilon_n|$$

Où N est le nombre d'étapes durant l'entièreté de la simulation

Preuve de la stabilité de Runge et Kutta

Lemme : Si une solution au problème de Cauchy y est k-lipschitzienne, on a avec le lemme de Gronwall :

$$\phi \text{ est } \Lambda\text{-lipschitzienne} \Longrightarrow \\ \text{la méthode d'intégration est stable,} \\ \text{de constante de stabilité } S = e^{\Lambda T}$$

Où T est le temps total de la simulation

Preuve de la stabilité de Runge et Kutta

$$\mathrm{t}_{n,i} = t_n + c_i \times h$$
$$z(t_{n,i}) = z(t_n) + h\sum_{j<i} a_{i,j} f(t_{n,j}, z(t_{n,j}))$$
$$z(t_{n+1}) = z(t_n) + h\sum_{j\leq 4} b_j f(t_{n,j}, z(t_{n,j}))$$
$$\phi(t,z) = \sum_{j\leq 4} b_j f(t_{n,j}, z(t_{n,j}))$$

Reste à prouver que phi est lipschitzienne. On part de deux sources y et z quelconques dans R :

$$\text{Lemme : } \forall i,$$
$$|y_i - z_i| \leq \sum_{p=0}^{i} (\alpha k h)^p |y - z|$$

Avec $$\alpha = max \sum |a_{i,j}|$$

Preuve de la stabilité de Runge et Kutta

$$
\begin{aligned}
\mathrm{t}_{n,i} &= t_n + c_i \times h \\
z(t_{n,i}) &= z(t_n) + h \textstyle\sum_{j<i} a_{i,j} f(t_{n,j}, z(t_{n,j})) \\
z(t_{n+1}) &= z(t_n) + h \textstyle\sum_{j\leq 4} b_j f(t_{n,j}, z(t_{n,j})) \\
\phi(t,z) &= \textstyle\sum_{j\leq 4} b_j f(t_{n,j}, z(t_{n,j}))
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
&|\phi(t,y) - \phi(t,z)| \\
&\leq \textstyle\sum |b_j| k |y_j - z_j| \\
&\leq k \textstyle\sum |b_j| \sum_{p=0}^{j} (\alpha k h)^p |y-z| \\
&\leq \Lambda |y-z|
\end{aligned}
$$

Preuve de la stabilité de Runge et Kutta

$$\mathrm{t}_{n,i} = t_n + c_i \times h$$
$$z(t_{n,i}) = z(t_n) + h \sum_{j<i} a_{i,j} f(t_{n,j}, z(t_{n,j}))$$
$$z(t_{n+1}) = z(t_n) + h \sum_{j\leq 4} b_j f(t_{n,j}, z(t_{n,j}))$$
$$\phi(t,z) = \sum_{j\leq 4} b_j f(t_{n,j}, z(t_{n,j}))$$

Preuve du lemme par récurrence

$$\begin{aligned}
&|y_i - z_i| \\
&\leq |y-z| + h \sum_{j\leq i} |a_{i,j}||f(t_j, y_j) - f(t_j, z_j)| \\
&\leq |y-z| + h \sum_{j\leq i} |a_{i,j}|k|y_j - z_j| \\
&\leq |y-z| + \alpha h k \max |y_j - z_j| \\
&\leq |y-z| + \alpha h k \sum (\alpha h k)^p |y_j - z_j| \\
&\leq \sum_{p=0}^{i} (\alpha k h)^p |y-z|
\end{aligned}$$