Division en sous-problèmes

Dans ce chapitre, on étudie des algorithmes ayant la particularité de reposer sur une division d'un problème en plusieurs sous-problèmes :

- soit pour les résoudre récursivement, on parle alors de la méthode *diviser pour régner*
- soit pour résoudre ces sous-problèmes, peut-être d'une manière différente, afin d'obtenir une solution plus efficace au problème principal, on parle de *rencontre au milieu* (ou *meet in the middle*)

I Diviser pour régner

I.1 Principe

Le principe des algorithmes basé *Diviser pour régner* est de décomposer un problème en plusieurs sous-problèmes disjoints et de déduire des solutions de ces sous-problème une solution au problème de départ.

Le point clé pour ce principe est de pouvoir **fusionner** les solutions de sous-problèmes pour en faire une solution, et de pouvoir le faire dans un temps/espace raisonnable. On procède alors par récursivité en appliquant ce principe pour résoudre les sous-problèmes eux-mêmes jusqu'à tomber sur des sous-problèmes très simples.

Ainsi, si on a une entrée E, on va en déduire des entrées $E_1, \ldots, E_k$ pour des sous-problèmes tels que $|E_i| \leq \left\lceil \frac{|E|}{p} \right\rceil$, où p **et** k **sont indépendants de** E. Une fois les solutions $S_1, \ldots, S_k$ à ces sous-problèmes obtenus par des appels récursifs, on va en déduire par une **fusion** des solutions, la solution S au problème initial.

En terme de complexité temporelle, si $T(n)$ est la complexité de résolution pour une solution de taille n, on aura :

$$T(n) \leq kT\left(\left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil\right) + f(n)$$

où $f(n)$ est le coût de la fusion et en supposant, ce qui est très raisonnable, que T est croissante.

Remarque La croissance de T est naturellement déduite du fait que le problème sur une entrée de taille n est **plus facile** que le problème sur une entrée de taille $p \geq n$. On peut ainsi penser au tri d'un tableau où il suffit de rajouter des éléments factices au début ou à la fin pour se ramener à un problème sur une entrée de taille plus grande.

On ne donnera pas ici de théorème général permettant d'exprimer $T(n)$ selon les différentes valeurs de $f(n)$, on se contentera de faire des preuves dans des cas particuliers.

I.2 Somme d'éléments dans un tableau

On considère un tableau t de n nombres dont on cherche à calculer la somme $S(t) = \sum_{i=0}^{n-1} t[i]$. Il est possible de faire ce calcul très aisément avec une simple boucle :

```ocaml
let somme t =
  let s = ref 0 in
  for i = 0 to Array.length t - 1 do
    s := !s + t.(i)
  done;
  !s
```
OCaml

```c
int somme(int *t, size_t nb)
{
  int s = 0;
  for(int i = 0; i < nb; i++)
  {
    s = s + t[i];
  }
  return s;
}
```
C

```python
def somme(t):
  s = 0
  for x in t:
    s = s + x
  return s
```
Python

Il est possible, bien que cela ne soit pas naturel, de traiter ce problème avec un algorithme *diviser pour régner*. En effet, on peut couper le tableau en deux, calculer les deux sous-sommes S_1 et S_2, puis les fusionner de manière triviale en calculant la somme $S = S_1 + S_2$.

```ocaml
let rec somme_div t i j =
    if i = j
    then t.(i)
    else
        let m = i + (j-i)/2 in
        let s1 = somme_div t i m in
        let s2 = somme_div t (m+1) j in
        s1 + s2

let somme t = somme_div t 0 (Array.length t - 1)
```
OCaml

Si $T(n)$ est le coût d'une somme d'un tableau à n éléments, on a donc $T(1) = 1$ et

$$\forall n \geq 2, T(n) \leq 2T(\lceil n/2 \rceil) + O(1)$$

Remarque On constate ici qu'on utilise $\lceil x \rceil$ la partie entière supérieure liée à une majoration. En effet, si on coupe l'entrée en deux et qu'elle est de taille impaire $2p+1$, une des deux moitiés sera de longueur $p+1$ qui est la partie entière supérieure.

On aura alors $T(n) = T(p) + T(p+1) + O(1) \leq 2T(p+1) + O(1)$ par croissance de T.

Les résolutions de récurrence vont se faire en deux temps : un cas où toutes les divisions tombent justes, c'est-à-dire ici une puissance de deux, et un théorème où on s'y ramène pour un entier quelconque par encadrement et croissance de T.

Lemme I.1 $\forall n \in \mathbb{N}, T(2^n) = O(2^n)$

■ **Preuve**

On commence par expliciter le $O(1)$ présent dans la récurrence : il existe $M \geq 1$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, T(n) \leq 2T(\lceil n/2 \rceil) + M$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, T(2^n) \leq M2^n$

a) On a $T(2^0) = 1 \leq M2^0$.
b) Si $T(2^n) \leq M2^n$ alors $T(2^{n+1}) \leq 2T(2^n) + M \leq M2^n + M \leq M2^{n+1}$.

On a ainsi $T(2^n) = O(2^n)$.

■

Théorème I.2 $\forall n \geq 1, T(n) = O(n)$.

■ **Preuve**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $2^p \leq n < 2^{p+1}$. Par croissance de T, on a $T(n) \leq T(2^{p+1})$. Or, il existe M' tel que $\forall k, T(2^k) \leq M'2^k$. $T(n) \leq M'2^{p+1} \leq 2M'n$.

Donc, $T(n) = O(n)$.

■

I.3 Tri fusion

L'algorithme du tri fusion est un des exemples les plus important d'algorithmes *Diviser pour régner* :

- Étant donnée une liste l de taille $n \geq 2$, on va considérer les sous-listes l_p des valeurs d'indice pair et l_i des valeurs d'indice impair.
- On trie ensuite l_1 et l_2 pour obtenir l'_1 et l'_2.
- On fusionne ces deux listes pour obtenir $l' = \text{fusion}(l'_1, l'_2)$ liste triée déduite de l.

Comme expliqué dans le paragraphe précédent, les tris de l_1 et l_2 s'effectuent eux-aussi à l'aide d'un tri fusion.

■ **Note 1** TODO : dessin

■

Voici une implémentation en `OCaml` de cet algorithme :

```OCaml
let rec separe_en_deux l =
    match l with
    | [] -> ([], [])
    | [x] -> ([x], [])
    | x::y::q -> let l1, l2 = separe_en_deux q in
        (x::l1, y::l2)

let rec fusionne l1 l2 =
    match l1, l2 with
    | [], _ -> l2
    | _, [] -> l1
    | x::q1, y::q2 ->
        if x < y
        then x :: (fusionne q1 l2)
        else y :: (fusionne l1 q2)

let rec tri_fusion l =
    match l with
    | [] -> []
    | [x] -> [x]
    | _ ->
        let l1, l2 = separe_en_deux l in
        let l1p = tri_fusion l1 in
        let l2p = tri_fusion l2 in
        fusionne l1p l2p
```

La correction et la terminaison de cet algorithme ne posant aucune difficulté, on va se concentrer sur le calcul de la complexité temporelle :

- `separe_en_deux` consiste en un parcours linéaire de la liste `l` donc $O(|l|)$.
- `fusionne` supprime un élément d'une des deux listes à chaque appel récursif, donc une complexité en $O(|l_1|+|l_2|)$.
- Pour `tri_fusion` la situation est plus complexe en raison du double appel récursif. On va d'abord traiter le cas des listes contenant 2^k éléments.

Notons t_n la complexité temporelle pour $|l| = n$.

Lemme I.3 $t_{2^n} = O(2^n \log_2 2^n)$

■ **Preuve**

Par l'analyse de complexité des deux fonctions auxiliaires, on a pour $n \in \mathbb{N}$

$$t_{2^{n+1}} = 2t_{2^n} + O(2^n) \leq 2t_{2^n} + M2^n$$

où on peut supposer que $M \geq 1$.

On va montrer par récurence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $t_{2^n} \leq 2Mn2^n$.

- Initialisation : $t_{2^1} = 2t_1 + M2 = 2M + 2 \leq 4M = 2 \times 1 \times 2^1 M$.
- Hérédité : si $n \in \mathbb{N}^*$ et l'hypothèse est vérifiée pour t_{2^n}, alors $t_{2^{n+1}} \leq 4n2^n M + M2^n = (4n+1)M2^n \leq 4(n+1)M2^n \leq 2M(n+1)2^{n+1}$.

Ainsi $t_{2^n} = O(n2^n)$.

■

Théorème I.4 $t_n = O(n \log_2 n)$

■ **Preuve**

Le lemme assure qu'il existe M' tel que $\forall p \in \mathbb{N}^*, t_{2^p} \leq M'p2^p$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on sait qu'il existe p tel que $2^{p-1} \leq n < 2^p$ et donc $p - 1 \leq \log_2 n < p$. Par croissance de t (direct car on a plus d'éléments à trier) on a $t_n \leq t_{2^p} \leq M'p2^p \leq 2M'(1 + \log_2 n)n = O(n \log_2 n)$.

Ainsi, $t_n = O(n \log_2 n)$.

■

Remarque On a utilisé implicitement la croissance de t_n ici : plus la liste est longue, plus on effectue d'opérations.

Le programme suivant présente une implémentation du tri fusion reposant sur des tableaux. Les sous-tableaux sont manipulés à l'aide de leurs indices de début et de fin comme pour la recherche dichotomique.

```
let fusionne t1 t2 =
    let n1 = Array.length t1 in
    let n2 = Array.length t2 in
    let i1 = ref 0 in
    let i2 = ref 0 in
    let i = ref 0 in
    let t = Array.make (n1+n2) t1.(0) in
    while !i1 < n1 || !i2 < n2 do
        if !i1 = n1 || (!i2 < n2 && t1.(!i1) > t2.(!i2))
        then begin
            t.(!i) <- t2.(!i2);
            incr i2
        end else begin
            t.(!i) <- t1.(!i1);
            incr i1
        end;
        incr i
    done;
    t

let rec tri_fusion_aux t i j =
    let n = j - i in
    if n >= 1
    then begin
        let m = i + n / 2 in
        let t1 = tri_fusion_aux t i m in
        let t2 = tri_fusion_aux t (m+1) j in
        print_t t1;
        print_t t2;
        fusionne t1 t2
    end
    else if n = 0
    then [|t.(i)|]
    else [||]

let tri_fusion t =
    let n = Array.length t in
    tri_fusion_aux t 0 (n-1)
```

OCaml

■ **Note 2** TODO : exercice tri avec un tableau et tri **en place**

■

I.4 Recherche dichotomique

On a déjà vu la recherche dichotomique, ici, on coupe le tableau en deux mais on n'effectue qu'un seul appel récursif, la récurrence est donc en

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + O(1)$$

et on obtient facilement $T(n) = O(\log_2 n)$.

I.5 Principe général d'analyse des récurrences

On remarque ici qu'on retombe souvent sur la même méthode pour analyser des récurrence de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T(n) \leq kT\left(\left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil\right) + f(n)$$

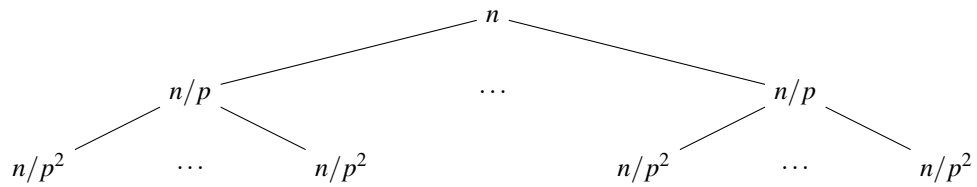
Comme on ne considère que des suites positives et croissantes, on peut se ramener à une égalité par majoration. En effet, si S vérifie $S(0) = T(0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, S(n) = kS\left(\left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil\right) + f(n)$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N}, T(n) \leq S(n)$ par une récurrence immédiate et d'une majoration de $S(n)$ on en déduira directement une majoration pour $T(n)$.

Cette remarque peut donc se résumer ainsi :

Remarque Il est toujours possible de se ramener à une relation de récurrence avec une égalité.

Que signifie cette relation de récurrence : que pour résoudre l'instance de taille n on va faire k appels récursifs à des instances de taille au plus $\lceil n/p \rceil$ et le coup de la fusion des résultat sera $f(n)$.

On peut ainsi représenter les coûts de fusion cumulés qui sont associés à chaque niveau de l'arbre d'appels récursifs. Pour simplifier, on considère que $n = p^l$ ce qui permet de n'avoir que des divisions entières tout au long de l'arbre. On remarque qu'on peut s'y ramener par croissance en majorant n par une puissance de p et on qu'on a alors $l = O(\log_p n)$.



On a alors les coûts de fusion

$$T(n) = f(n) + kf(n/p) + k^2 f(n/p^2) + \cdots = \sum_{i=0}^{l} k^i f(n/p^i)$$

On a trois cas standard pour cette somme :

- Poids sur la racine, c'est $f(n)$ qui l'emporte sur les coûts et le reste de l'arbre n'a pas d'influence sur la complexité. Ici $T(n) = f(n)$.
- Poids sur les feuilles, le coût de fusion n'est pas important et c'est le nombre de feuilles qui compte, on a alors $T(n) = k^l f(1) = O(k^l) = O(k^{\log_p n}) = O(n^{\log_p k})$.
- Poids réparti uniformément, on a chaque $k^i f(n/p^i) = O(f(n))$ et donc $T(n) = O(f(n) \log n)$.

Exemple
- Dans le cas de la multiplication de Karatsuba (exercice) on a $T(n) = 3T(\lceil n/2 \rceil) + O(n)$ donc les niveaux sont de plus en plus peuplés, on est dans le second cas et le niveau final va l'emporter. Ainsi, $T(n) = O(n^{\log_2 3})$.
- Dans le cas du tri fusion $T(n) = 2T(\lceil n/2 \rceil) + O(n)$ on a un équilibre du travail total de fusion qui reste linéaire pour chaque niveau. Donc, on est dans le troisième cas et $T(n) = O(n \log n)$.

Remarque Pour retrouver des expressions rapidement, on peut étudier $u_n = \frac{T(p^n)}{k^n}$.

En effet, de la récurrence $T(p^n) = kT(p^{n-1}) + f(p^n)$ on déduit $u_n = u_{n-1} + \frac{f(p^n)}{k^n}$ et donc $u_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(p^i)}{k^i} = O(g(n))$ qui se simplifie en général. Pour obtenir ensuite $T(p^n) = k^n u_n = O(k^n g(n))$ puis $T(n) = O(n^{\log_p k} g(\log_p n))$.

Par exemple, pour $T(n) = 2T(\lceil n/2 \rceil) + O(n)$ on a $u_n = T(2^n)/2^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{O(2^i)}{2^i} = O(n)$ donc $T(2^n) = 2^n O(n) = O(n2^n)$ puis $T(n) = O(n \log n)$.

Autre exemple, pour $T(n) = 2T(\lceil n/2 \rceil) + O(1)$, on a $u_n = \sum_{i=0}^{n} 2^{-i} O(1) = O(1) \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = O(1)$ car $\frac{1}{2^{n+1}} = o(1)$. Ainsi $T(2^n) = O(2^n)$ puis $T(n) = O(n)$.

I.6 Nombre d'inversions

Définition I.1 Soit t une structure séquentielle (tableau, liste, ...) contenant des valeurs comparables $a_0, \ldots, a_{n-1}$ et énumérées dans cet ordre au sein de t.

Une paire $(i, j) \in [\![0, n-1]\!]^2$ où $i < j$ est appelée une *inversion* de t lorsque $a_i > a_j$.

On note $I(t)$ le nombre d'inversion de t.

Remarque
- Le nombre d'inversions permet de mesurer à quel point t est non triée dans l'ordre croissante.
- Ce concept d'inversion est exactement celui utilisé pour les permutations en mathématiques : si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, il suffit de considérer $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$.

On cherche dans ce paragraphe à calculer $I(t)$ efficacement. Remarquons tout d'abord qu'un algorithme naïf est en $O(n^2)$ où $|t| = n$ en explorant toutes les paires :

```c
size_t inversions(int *t, size_t taille)
{
    size_t inv = 0;
    for (size_t i = 0; i < taille; i++)
    {
        for (size_t j = i+1; j < taille; j++)
        {
            if (t[i] > t[j]) inv++;
        }
    }

    return inv;
}
```
C

On va maintenant donner un algorithme type *Diviser pour régner* :

- On sépare t en deux moitiés t_1 et t_2.
- On calcule $I(t_1)$ et $I(t_2)$ par des appels récursifs.
- On compte les inversions entre des éléments de t_1 et des éléments de t_2
  - ⋆ Cela ne dépend pas de leur position dans t_1 ou dans t_2.
  - ⋆ On peut donc trier t_1 en t_1' et t_2 en t_2'.
  - ⋆ On compte $N(t_1, t_2) = N(t_1', t_2')$ le nombre d'inversions entre t_1' et t_2' en $O(n)$ par l'algorithme ci-dessous.
- On en déduit que $I(t) = I(t_1) + I(t_2) + N(t_1, t_2)$.

Remarque Pour calculer le nombre d'inversions entre deux tableaux triés t_1' et t_2', on remarque que si $t_1'[i] > t_2'[j]$ alors $t_1'[i+1] \geq t_1'[i] > t_2'[j]$. Cela signifie qu'on peut compter les inversions de manière cumulative en avançant dans les deux tableaux en même temps :

```OCaml
let inversions_croisees t1 t2 =
    let i = ref 0 in
    let j = ref 0 in
    let n1 = Array.length t1 in
    let n2 = Array.length t2 in
    let inv = ref 0 in
    let cumul = ref 0 in
    while !i < n1 && !j < n2 do
        if t1.(!i) > t2.(!j)
        then ( incr j; incr inv; incr cumul )
        else ( incr i; inv := !inv + !cumul )
    done;
    !inv + (!cumul * (n1 - !i - 1))
```

■ **Note 3** Rajouter un dessin illustrant l'aspect cumulatif.

■

Pour que cet algorithme fonctionne, il est nécessaire de trier à chaque étape les sous-tableaux, on obtient alors naïvement une récurrence en

$$T(n) \leq 2T(\lceil n/2 \rceil) + O(n \log n)$$

Qui se résout en $T(n) = O(n(\log n)^2)$. Il est possible de faire mieux en remarquant qu'on peut calculer le nombre d'inversions en décorant le tri fusion car celui fait naturellement calculer les sous-tableaux triés. On a donc une récurrence en

$$T(n) \leq 2T(\lceil n/2 \rceil) + O(n)$$

qui se résout en $T(n) = O(n \log n)$.

Exercice 1 Écrire le programme réalisant cet algorithme.

■ **Preuve**

```OCaml
let inversions_croisees t1 t2 =
    let i = ref 0 in
    let j = ref 0 in
    let n1 = Array.length t1 in
    let n2 = Array.length t2 in
    let inv = ref 0 in
    let cumul = ref 0 in
    while !i < n1 && !j < n2 do
        if t1.(!i) > t2.(!j)
        then ( incr j; incr inv; incr cumul )
        else ( incr i; inv := !inv + !cumul )
    done;
    !inv + (!cumul * (n1 - !i - 1))

let split t =
    let n = Array.length t in
    let m = n/2 in
    Array.sub t 0 m, Array.sub t m (n-m)

let fusion t1 t2 =
    let n1 = Array.length t1 in
    let n2 = Array.length t2 in
    let t = Array.make (n1+n2) (t1.(0)) in
    let i = ref 0 in let j = ref 0 in
    for k = 0 to n1+n2-1 do
        if !j = n2 || (!i < n1 &&  t1.(!i) < t2.(!j))
        then ( t.(k) <- t1.(!i); incr i )
        else ( t.(k) <- t2.(!j); incr j )
    done;
    t

let rec inversions_div t =
    let n = Array.length t in
    if n = 1
    then t, 0
    else let t1, t2 = split t in
        let t1', n1 = inversions_div t1 in
        let t2', n2 = inversions_div t2 in
        let n12 = inversions_croisees t1' t2' in
        fusion t1' t2', n1+n2+n12
```

■

I.7 Points les plus proches

On considère le problème

Problème - PLUSPROCHEPAIRE

- Entrées :
  Un ensemble P de n points dans le plan.
- Sortie :
  Une paire $\{p, p'\}$ de points telle que $dist(p, p') = ||\vec{pp'}||$ soit minimale.

Ce problème a déjà été étudié dans le chapitre Recherche par force brute où l'algorithme naïf en $O(n^2)$ a été amélioré en un algorithme en $O(n \log n)$.

On présente ici un algorithme diviser pour régner.

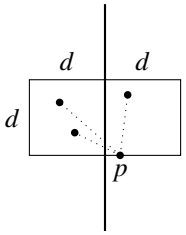
Si $n > 1$ l'idée est de séparer les points en fonctions de la médiane des abscisses. C'est-à-dire de déterminer tel x, par exemple en prenant la moitié entre l'abscisse médiane et l'abscisse suivante, tel que $\lceil n/2 \rceil$ points soient d'abscisses $< x$, notons S_1 leur ensemble, et $\lfloor n/2 \rfloor$ soient d'abscisses $> x$, notons S_2. Ensuite, on applique l'algorithme récursivement pour obtenir d_1 la plus petite distance dans S_1 et d_2 la plus petite distance dans S_2. On pose $d = \min(d_1, d_2)$ et la question qui se pose est celle de calculer $d' = \min\{dist(p_1, p_2) \mid p_1 \in S_1, p_2 \in S_2\}$.

Comme on a déjà déterminé d, on peut se contenter de chercher à déterminer s'il existe $d' < d$. Pour cela, on peut se contenter de ne considérer dans S_1 que les points d'abscisse dans $]x - d; x]$ et pour S_2 dans $[x; x + d[$. On a ainsi

une bande à étudier. Comme il n'est pas possible d'exclure qu'un nombre important de points soit dans cette bande, on a *a priori* une fusion en $O(n)$.

On va considérer les points de bas en haut dans la bande, par exemple avec un tri initial selon les ordonnées. Ainsi, il sera inutile, quand on considère un point p d'ordonnée y de considérer des points d'ordonnées $< y$. D'un autre côté, comme on cherche l'existence d'une distance $< d$, il est inutile de considérer des points d'ordonnée $> y + d$.

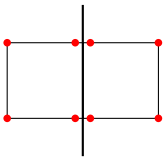
On se retrouve alors à comparer les points présents dans l'union de deux carrés de côte d de part et d'autres de la séparation :



Cependant, on sait que chaque carré étant situé d'un même côté de la ligne médiane de séparation, les points qui s'y trouvent sont à distance $\geq d$. Il est facile de se convaincre qu'il n'est pas possible de placer plus que quatre points dans un carré de côté de sorte qu'aucune paire soit à distance $< d$. Cette configuration correspond ainsi à placer les points aux sommets.

On en déduit donc qu'il y a maximum quatre points dans le carré gauche et quatre points dans le carré droit, dont le point p considéré : il n'est pas nécessaire d'explorer plus que les sept points suivants.

Sur le schéma suivant, on a volontairement séparé les points autour de la frontière pour marquer cette différence.



Remarque Cette analyse est très naïve, on peut démontrer qu'il suffit d'observer cinq autres points.

```ocaml
let distance (x1,y1) (x2,y2) =
  let v = (x1-.x2)*.(x1-.x2)+.(y1-.y2)*.(y1-.y2) in
  sqrt v

let closest_brute points i j =
  let d = ref (distance points.(i) points.(i+1)) in
  for k = i to j do
    for l = k+1 to j do
      let dist_kl = distance points.(k) points.(l) in
      if !d > dist_kl
      then d := dist_kl
    done
  done;
  !d

let rec closest_rec p_x p_y i j =
  if j-i+1 <= 3
  then closest_brute p_x i j
  else begin
    let m = (i+j) / 2 in
    let d1 = closest_rec p_x p_y i m in
    let d2 = closest_rec p_x p_y (m+1) j in
    let d = min d1 d2 in
    let min_x = fst p_x.(m) -. d in
    let max_x = fst p_x.(m+1) +. d in

    let bande = array_filter
      (fun (x,_) -> min_x <= x && x <= max_x) p_y in
    let m_d = ref d in
    for k = 0 to Array.length bande - 1 do
      for l = k+1 to min (k+7) (Array.length bande - 1) do
        let d_kl = distance bande.(k) bande.(l) in
        if d_kl < !m_d
        then m_d := d_kl
      done
    done;
    !m_d
  end

let closest points =
  let p_y = Array.copy points in
  Array.sort Stdlib.compare points;
  Array.sort Stdlib.compare p_y;
  closest_rec points p_y 0 (Array.length points - 1)
```

OCaml

ERROR: src/algorithmique/../../snippets/algorithmique/closest_di

```python
def distance(p1,p2):
  x1, y1 = p1
  x2, y2 = p2
  return sqrt( (x1-x2)**2 + (y1-y2)**2 )

def closest_brute(points, i, j):
  m = distance(points[i], points[i+1])
  for k in range(i,j+1):
    for l in range(k+1,j+1):
      d = distance(points[k], points[l])
      if d < m:
        m = d
  return m

def closest_rec(points_x, points_y, i, j):
  if j-i+1 <= 3:
    return closest_brute(points_x, i, j)
  m = (i+j)//2
  d1 = closest_rec(points_x, points_y, i, m)
  d2 = closest_rec(points_x, points_y, m+1, j)
  d = min(d1, d2)
  min_x = points_x[m][0]-d
  max_x = points_x[m+1][0]+d
  bande = [ p for p in points_y if min_x <= p[0] <= max_x ]
  for k in range(len(bande)):
    for l in range(1,8):
      if k+l >= len(bande):
        break
      d_kl = distance(bande[k], bande[k+l])
      if d_kl < d:
        d = d_kl
  return d

def closest(points):
  n = len(points)
  points.sort(key=lambda p: p[0])
  points_y = points[:]
  points_y.sort(key=lambda p: p[1])
  return closest_rec(points, points_y, 0, n-1)
```
Python

II Meet in the middle

II.1 Principe

II.2 Sous-ensemble de somme donnée

III Dichotomie pour passer de décision à optimisation

III.1 Principe

III.2 Couverture par des segments égaux

■ **Note 4** Il y a une confusion réel/entiers ici. À reprendre.

■

On considère ici n points sur la droite réelle. Le i-ème point est identifié par sa coordonnée x_i. On se pose alors, dans un premier temps, la question de savoir si on peut trouver k segments de longueur l tels que chaque point appartienne à au moins un de ces segments. Dans un second temps, on se posera la question de la longueur l minimale de ces segments.

III.2.i Couverture par des segments de longueur donnée

On va ici résoudre le premier problème :

Problème - EXISTENCECOUVERTURESEGMENT

- Entrées :
  - ⋆ n points sur la droite réelle $x_1, ..., x_n$
  - ⋆ un entier $k \geq 1$
  - ⋆ un réel l
- Sortie :
  existe-t-il k segments $S_1, \ldots, S_k$ de longueur l tels que $\forall i \in [\![1, n]\!], \exists j \in [\![1, k]\!], x_i \in S_j$?

On remarque qu'un segment de longueur l est uniquement caractérisé par son extrémité gauche. Pour chaque x_i, il doit ainsi exister une extrémité gauche dans le segment $S_i = [x_i - l, x_i]$. On peut ainsi renverser le problème et en faire un problème de couverture de segments par des points : on cherche k points tel que chaque segment S_i contienne au moins un de ces points.

Problème - ENSEMBLEINTERSECTANTLIGNE

- Entrées :
  - ⋆ n segments $S_i = [l_i, r_i]$
  - ⋆ un entier $k \geq 1$.
- Sortie :
  Un ensemble P de k points tels que $\forall p \in P, \exists i \in [\![1, n]\!], p \in S_i$ en cas de succès

Ce problème peut se résoudre par un algorithme glouton :

- on commence avec $P = \emptyset$
- on trie les segments par r_i croissant
- pour chaque segment $S_i = [l_i, r_i]$, s'il ne contient aucun élément de P, on rajoute r_i à P.
- on répond avec un succès si $|P| \leq k$ (on peut alors compléter avec des points quelconques pour avoir exactement k points).

Cet algorithme est en $O(n \log n)$ en raison du tri initial.

III.2.ii Longueur minimale

On considère maintenant le problème suivant :

Problème - COUVERTURESEGMENTSMINIMALE

- Entrées :
  - ⋆ n points à coordonnées entières sur la droite réelle $x_1, ..., x_n$
  - ⋆ un entier $k \geq 1$
- Sortie :
  la longueur l minimale pour laquelle il existe une couverture des points par k segments de longueur l.

On peut résoudre ce problème par dichotomie à l'aide de l'algorithme précédent

- on considère $L = \frac{\max_{1 \leq i < j \leq n} |x_j - x_i|}{k} = \frac{D}{k}$ où le diamètre D se calcule en $O(n)$ et correspond à répartir de manière uniforme les segments pour couvrir les points. Une telle couverture existe toujours.
- on peut considérer, sans avoir besoin de le calculer au préalable, le tableau V de booléen de longueur $L + 1$ tel que $V[l]$ indique s'il est possible de couvrir les points par k segments de longueur l. Pour obtenir la valeur $V[l]$ il suffit d'appliquer l'algorithme précédent.
- on effectue alors une recherche dichotomique du plus petit indice l tel que $V[l]$ soit vrai.

On obtient ainsi un algorithme en $O\left(n \log n \log \frac{D}{k}\right)$ qu'on peut considérer comme étant en $O(n \log n)$ en supposant que D est une constante.

Cette dichotomie est en fait une instance d'un principe fondamental permettant de transformer un problème de décision (existe-t-il ?) en un problème d'optimisation (quelle est ... minimal/maximal ?).

III.2.iii Implémentation

IV Problèmes

IV.1 Multiplication d'entiers

On considère ici le problème de la multiplication de deux entiers données en précision arbitraire par le tableau de leurs chiffres.

Ainsi, l'entier $123 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0$ sera représenté par le tableau `[|3;2;1|]` de telle sorte que le nombre représenté par `t` soit $\sum_{k=0}^{n-1} t[k]10^k$ où $n = |t|$ la taille de t. On suppose que `t` ne finit pas par des `0`. Autrement dit : soit `t` est vide, soit la dernière valeur de `t` est non nulle.

On se convaincra aisément que les entiers naturels sont en bijection avec de telles représentations.

Question IV.1.1 Écrire une fonction `simpl : int array -> int array` qui renvoie un nouveau tableau obtenu en supprimant tous les 0 en fin de tableau : `simpl [|1;2;3;0;0|] = [|1;2;3|]`.

Question IV.1.2 Écrire une fonction `add : int array -> int array -> int array` qui calcule la somme de deux entiers en temps linéaire.

On va étudier ici plusieurs techniques de multiplication.

IV.1.i Multiplication naïve

On considère la multiplication posée comme étudiée à l'école primaire :

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ & \times & 4 & 2 \\ \hline & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 9 & 2 & \\ \hline 5 & 1 & 6 & 6 \end{array}$$

Plus précisément, si $y = \sum_{j=0}^{m} y_j 10^j$, on a

$$x \times y = \sum_{j=0}^{m} (y_j \times x) 10^j$$

Question IV.1.3 Écrire une fonction `mult_digit : int -> int array -> int array` telle que `mult_digit a x` renvoie $a \times x$ où `a` est un chiffre et `x` un nombre.

Question IV.1.4 Écrire une fonction `mult_dec : int -> int array -> int array` telle que `mult_dec p x` renvoie $x10^p$ où p est un entier et `x` un nombre.

Question IV.1.5 Écrire une fonction `mult_naive : int array -> int array -> int array` réalisant cette multiplication.

Question IV.1.6 Quelle est la complexité de cette méthode en fonction de la longueur des entrées ?

IV.1.ii Première approche diviser pour régner

On remarque que pour $0 \leq a, b, c, d < 10^m$:

$$(10^m a + b)(10^m c + d) = 10^{2m} ac + 10^m (ad + bc) + bd$$

On peut alors calculer récursivement les quatre produits ac, ad, bc et bd.

On en déduit donc une solution type **diviser pour régner** de la multiplication :

- $mul(x, y, 1) = x \times y$
- pour $n \geq 2$, $mul(x, y, n) = 10^{2m} mul(a, c, m) + 10^m (mul(a, d, m) + mul(b, c, m)) + mul(b, d, m)$ où $x = a10^m + b$, $y = c10^m + d$ et $m = \lceil n/2 \rceil$.

où $x, y \leq 10^n$.

Question IV.1.7 Déterminer avec précision la complexité $T(n)$ de $mult(x, y, n)$.

Que peut-on en conclure ?

IV.1.iii Algorithme de Karatsuba

Face à ce problème, Karatsuba, alors âgé de 23 ans, est parti de la remarque suivante :

$$ac + bd - (a - b)(c - d) = ad + bc$$

qui permet de voir qu'en calculant ac, bd et le produit $(a - b)(c - d)$ on peut en déduire le coefficient $ad + bc$ de 10^m, et ainsi économiser une multiplication.

On en déduit ainsi une nouvelle solution pour la multiplication :

- $kar(x, y, 1) = x \times y$
- pour $n \geq 2$, $kar(x, y, n) = 10^{2m} X + 10^m (X + Y - Z) + Y$ où où $x = a10^m + b$, $y = c10^m + d$, $m = \lceil n/2 \rceil$, $X = kar(a, c, m)$, $y = kar(b, d, m)$ et $Z = kar(a - b, c - d, m)$.

La présence de nombres négatifs ne complique pas la complexité car il suffit de rajouter un booléen indiquant le le signe à côté du tableau des chiffres d'un nombre.

Question IV.1.8 Déterminer avec précision la complexité $K(n)$ de $kar(x, y, n)$.