



ملخص قوانين تفاضل وتكامل 2

قوانين التكامل: -
التكامل المحدود:

- 1) $\int_a^b c \, dx = c(b - a)$
- 2) $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$
- 3) $\int_a^b c f(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx = c[F(b) - F(a)]$
- 4) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx$
- 5) $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx, \quad c \in [a, b]$
- 6) $\int_a^b f(x) \, dx = -\int_b^a f(x) \, dx = -[F(a) - F(b)]$
- 7) $\int_a^a f(x) \, dx = 0$

(8) التكامل المعتل:

1. اعتلال من أعلى: $[a, \infty)$

$$\int_a^\infty f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx$$

2. اعتلال من أسفل: $(-\infty, b]$

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) \, dx$$

3. اعتلال من الجهتين: $(-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \, dx = \int_{-\infty}^0 f(x) \, dx + \int_0^\infty f(x) \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) \, dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) \, dx$$

(9) المساحات المستوية:

1. المساحة المحصورة:

$$y = f(x), \quad x = a \wedge x = b$$

$$A = \int_a^b y \, dx$$

2. المساحة الواقعة على محور x:

$$A = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx$$

3. المساحة المحصورة:

$$y = f(x), \quad y = a \wedge y = b$$

$$A = \int_a^b x \, dy$$

4. المساحة الواقعة على محور x:

$$A = \int_a^b x \, dy + \int_b^c x \, dy$$

5. المساحة المحصورة بين منحنين:

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

6. طول قوس المنحنى:

- $L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, x = f(t) \wedge y = g(t)$
- $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, y = f(x) \wedge a \leq x \leq b$
- $L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy, x = f(y) \wedge a \leq y \leq b$

التكامل غير المحدود:

- 1) $\int 0 dx = C$
- 2) $\int af(x) dx = a \int f(x) dx$
- 3) $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
- 4) $\int f[g(x)] \cdot g'(x) dx = F[g(x)] + C$
- 5) $\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$
- 6) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
- 7) $\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$
- 8) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
- 9) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$
- 10) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
- 11) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$

12) تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية:

1. $\int e^x dx = e^x + C$
2. $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$
3. $\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + C$
4. $\int a dx = ax + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

1. $\int \sin^n x \, dx = \frac{-1}{n} \sin^{n-1} x \cdot \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$
2. $\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \cdot \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$
3. $\int \tan^n x \, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \, dx$
4. $\int \cot^n x \, dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x \, dx$
5. $\int \sec^n x \, dx = \frac{\sec^{n-2} x \cdot \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx$
6. $\int \csc^n x \, dx = \frac{\csc^{n-2} x \cdot \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x \, dx$
7. $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$
 - $n = \text{عدد فردي}$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
 $u = \sin x$, $du = \cos x \, dx$
 - $m = \text{عدد فردي}$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
 $u = \cos x$, $du = -\sin x \, dx$
 - $m, n = \text{عدد زوجي}$
 $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
8. $\int \tan^m x \cdot \sec^n x \, dx$
 - $n = \text{عدد زوجي}$, $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$
 $u = \tan x$, $du = \sec^2 x \, dx$
 - $m = \text{عدد فردي}$, $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
 $u = \sec x$, $du = \sec x \cdot \tan x \, dx$
 - $m = \text{عدد زوجي}, n = \text{عدد فردي}$
 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

- $\int f(x) \cdot g(x) \, dx$
 $u = f(x)$, $dv = g(x) \, dx$
 $du = f'(x)$, $v = G(x)$
- $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

1. $\sqrt{a^2 - x^2}$
 $x = a \sin \theta$, $dx = a \cos \theta \, d\theta$
2. $\sqrt{a^2 + x^2}$
 $x = a \tan \theta$, $dx = a \sec^2 \theta \, d\theta$
3. $\sqrt{x^2 - a^2}$
 $x = a \sec \theta$, $dx = a \sec \theta \cdot \tan \theta \, d\theta$

16 التكامل بطريقة الكسور الجزئية:

1. $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx, g(x) > f(x)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\dots} = \frac{A}{(x-a_1)} + \frac{B}{(x-a_2)} + \dots = \frac{A(x-a_2)\dots + B(x-a_1)\dots}{(x-a_1)(x-a_2)\dots}$$

- $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \frac{A}{(x-a_1)} dx + \int \frac{B}{(x-a_2)} dx + \dots$

2. $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx, g(x) = (x-a)^n$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{B}{(x-a)^{n-1}} + \frac{C}{(x-a)^{n-2}} + \dots + \frac{D}{(x-a)^1}$$

- $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \frac{A}{(x-a)^n} dx + \int \frac{B}{(x-a)^{n-1}} dx + \int \frac{C}{(x-a)^{n-2}} dx + \dots + \int \frac{D}{(x-a)^1} dx$

3. $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx, g(x) = (x^n - a)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x^n - a)} = \frac{Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \dots + C}{(x^n - a)}$$

- $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \frac{Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \dots + C}{(x^n - a)} dx$

17 التكامل بطريقة إكمال المربع:

- $\int \frac{dx}{f(x)}, f(x) = (ax^2 + bx + c)$ (غير قابل للتحليل)

$$(ax^2 + bx + c) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

- $\int \frac{dx}{f(x)} = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)} = \int \frac{dx}{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right]}$

تكامل الدوال المثلثية:

1) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

2) $\int \cos x dx = \sin x + C$

3) $\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$

4) $\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$

5) $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$

6) $\int \csc x dx = -\ln |\csc x + \cot x| + C$

7) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

8) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

9) $\int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + C$

10) $\int \csc x \cdot \cot x dx = -\csc x + C$

تكامل الدوال المثلثية العكسية:

1) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} dx = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

2) $\int \frac{-1}{\sqrt{a^2 - u^2}} dx = \cos^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

3) $\int \frac{1}{a^2 + u^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

4) $\int \frac{-1}{a^2 + u^2} dx = \frac{1}{a} \cot^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

5) $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

6) $\int \frac{-1}{u\sqrt{u^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \csc^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

تكمّل الدوال الزائدية:

- 1) $\int \sinh ax \, dx = \frac{1}{a} \cosh ax + C$
- 2) $\int \cosh ax \, dx = \frac{1}{a} \sinh ax + C$
- 3) $\int \tanh ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\cosh ax| + C$
- 4) $\int \coth ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\sinh ax| + C$
- 5) $\int \operatorname{sech} ax \, dx = \frac{1}{a} 2 \tan^{-1}(\tanh \frac{ax}{2}) + C$
- 6) $\int \operatorname{csch} ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\operatorname{csch} ax - \coth ax| + C$
- 7) $\int \operatorname{sech}^2 ax \, dx = \frac{1}{a} \tanh ax + C$
- 8) $\int \operatorname{csch}^2 ax \, dx = \frac{-1}{a} \coth ax + C$
- 9) $\int \operatorname{sech} ax \cdot \tanh ax \, dx = \frac{-1}{a} \operatorname{sech} ax + C$
- 10) $\int \operatorname{csch} ax \cdot \coth ax \, dx = \frac{-1}{a} \operatorname{csch} ax + C$

تكمّل الدوال الزائدية العكسية:

- 1) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}} \, dx = \sinh^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$
- 2) $\int \frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}} \, dx = \cosh^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$
- 3) $\int \frac{1}{a^2-u^2} \, dx = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$
- 4) $\int \frac{1}{a^2-u^2} \, dx = \frac{1}{a} \coth^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$
- 5) $\int \frac{1}{u\sqrt{a^2-u^2}} \, dx = \frac{-1}{a} \operatorname{sech}^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$
- 6) $\int \frac{1}{u\sqrt{a^2+u^2}} \, dx = \frac{-1}{a} \operatorname{csch}^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$

الصيغ اللوغاريتمية للدوال الزائدية العكسية: -

- $\sinh^{-1} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $\cosh^{-1} x = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1})$
- $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$

المتطابقات: -
المتطابقات للدوال المثلثية:
-متطابقات أساسية

1. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
2. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
3. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
4. $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$
5. $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
6. $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
7. $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$
8. $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$
9. $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

-متطابقات ضعف الزاوية

- $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
- $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
- $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

-متطابقات نصف الزاوية

- $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

المتطابقات للدوال الزائدية:
-متطابقات أساسية

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
2. $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$
3. $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$
4. $\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$
5. $\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$
6. $\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$
7. $\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$
8. $\coth^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$
9. $\operatorname{csch}^2 x = \coth^2 x - 1$

-متطابقات ضعف الزاوية

- $\sinh 2x = 2 \sinh x \cdot \cosh x$
- $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
- $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$
- $\cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x$
- $\tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$

-متطابقات نصف الزاوية

- $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$
- $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$

رابط المحاضرة التجريبية



<https://youtu.be/wopTgmNAGVc?si=-q-sqm0zuWIPaThV>

المهندس / منور العامري

شروحات المقرر (١٥٠ ريال شامل للميد والفاينل + حلول النماذج
السابقة وشرحها للميد والفاينل خصم خاص للقروبات ومشرفين الشعب
(

خدمات طلابية متكاملة - تصاميم - بحوث - عروض تقديمية

إنضم الآن عبر حساباتي على مواقع التواصل الاجتماعي

موقعنا:

https://monawweralameri.github.io/Math_Academy/

قناتي تليجرام

<https://t.me/+G26LNiXDZMZkNDg0>

حساب الواتساب

<https://wa.me/967711848728>

حسابي تليجرام

<https://t.me/Monwwer>

