ملخص المحاضرة الخامس معادلات تفاضلية جزئية للأسئلة (التاسع - العاشر - الحادى عشر)

بسم الله الرحمن الرحيم

السؤال التاسع

حل المعادلة التفاضلية الآتية بطريقة فصل المتغيرات :-

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u \quad ; \quad u(0,y) = 2e^{-y} + 3e^{-2y}$$

(الخطوة الأولى)

Let $u(x,y) = X_{(x)} \cdot Y_{(y)}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \bar{X}Y \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = X\acute{Y}$$

$$\bar{X}Y + X\acute{Y} = X \cdot Y \Rightarrow \bar{X}Y + X\acute{Y} - XY = 0$$

$$\Rightarrow \bar{X}Y + X(\acute{Y} - Y) = 0 \Rightarrow \bar{X}Y = X(Y - \acute{Y})$$

$$\therefore \frac{\bar{X}}{X} = \frac{Y - \acute{Y}}{Y} = \lambda \in R$$

$$\Rightarrow \frac{\acute{X}}{X} = \lambda \Rightarrow \acute{X} - \lambda X = 0 \Rightarrow \boxed{X = Ae^{\lambda x}} \rightarrow (X) \text{ قيمة}$$

$$\frac{Y - \acute{Y}}{Y} = \lambda \Rightarrow \lambda Y = Y - \acute{Y} \Rightarrow \acute{Y} + (\lambda - 1)Y = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{Y = Be^{-(\lambda-1)y}} \rightarrow (Y) \text{ قيمة}$$

أعوض بقيمة (Y, X) بالفرضية $(u(x,y) = X \cdot Y)$

$$\Rightarrow u(x,y) = X \cdot Y \Rightarrow (Ae^{\lambda x}) \cdot (Be^{-(\lambda-1)y})$$

$$\Rightarrow ABe^{\lambda x - (\lambda-1)y} \Rightarrow \boxed{C = AB}$$

$$\Rightarrow \boxed{u = Ce^{\lambda x - (\lambda-1)y}} \rightarrow \text{الحل العام للمعادلة التفاضلية}$$

نعوض بعد ذلك بالشروط $\left(u(0,y) = 2e^{-y} + 3e^{-2y}\right)$

[من أجل إيجاد القيم الثابتة]

$\therefore u = c\, e^{\lambda x-(\lambda-1)y} \Rightarrow c_1 e^{\lambda_1 x-(\lambda_1-1)y} + c_2 e^{\lambda_2 x-(\lambda_2-1)y}$

$c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $\lambda_1 = 2$ ⁝ أقوم بعملية المطابقة

$\lambda_2 - 1 = 2 \Rightarrow \lambda_2 = 3$

$\therefore u(x,y) = 2e^{2x-y} + 3e^{3x-2y}$ وهو حل المعادلة بالشرط المعطاه.

السؤال العاشر ← حل المسألة التالية :-

$$2\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 2\sin 3x - 5\sin 4x \end{cases}$$

نلاحظ أن المعادلة التفاضلية جزئية من الرتبة الثانية والمتغير (u) يتبع متغيرين

نفرض أن $u = T_{(t)} \cdot X_{(x)}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = T' \cdot X \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = T \cdot X' \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T \cdot X''$$

نعوض بالمشتقات بالمعادلة الأصلية المعطاه :-

$$2T'X - TX'' = 0 \Rightarrow \frac{2T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

$$\therefore \frac{2T'}{T} = \lambda \Rightarrow 2T' = \lambda T \Rightarrow 2T' - \lambda T = 0$$

$$\Rightarrow T = Ce^{\frac{\lambda}{2}t} \quad \Big| \quad \frac{X''}{X} = \lambda \Rightarrow X'' - \lambda X = 0$$

$$\Rightarrow \therefore X = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \qquad \therefore u(x,t) = (T \cdot X)$$

$$u(x,t) = Ae^{\sqrt{\lambda}x + \frac{\lambda}{2}t} + B_1 e^{-\sqrt{\lambda}x + \frac{\lambda}{2}t}$$ الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاه

$\Rightarrow u(0,t)=0 \Rightarrow A_1 e^{\frac{\lambda}{2}t} + B_1 e^{\frac{\lambda}{2}t} = 0$ لتحقق شروط المعادلة :-

$\Rightarrow e^{\frac{\lambda}{2}}(A_1+B_1)=0$

$\Rightarrow u(\pi,t)=0 \Rightarrow A_1 (e^{\sqrt{2}\pi + \frac{\lambda}{3}t} - e^{-\sqrt{2}\pi + \frac{\lambda}{3}t}) = 0$

$\Rightarrow A_1 = 0 \quad , B_1 = 0$

$\Rightarrow \therefore u(x,t)=0$ حصلنا على حل صفري وبما أننا نبحث عن حل غير صفري فإننا نبحث أن

Let $\frac{2\dot{T}}{T} = \frac{\ddot{X}}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{2\dot{T}}{T} = -\lambda^2$

$\Rightarrow 2\dot{T} + \lambda^2 T = 0 \Rightarrow T = c e^{\frac{\lambda^2}{2}t}$

$\frac{\ddot{X}}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow \ddot{X} + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$

$u(x,t) = e^{\lambda^2/2\, t}[A_1 \cos(\lambda x) + B_1 \sin\lambda x]$

$u(0,t)=0 \Rightarrow e^{\frac{\lambda^2}{2}t} A_1 = 0 \Rightarrow A_1 = 0$

$\Rightarrow u(\pi,t) = B_1 e^{\frac{\lambda^2}{2}t} \sin\lambda\pi = 0 \Rightarrow B_1 \neq 0 \Rightarrow \sin\pi\lambda =$

$n = \lambda$

$n = \pm 1, \pm 2, \dots \pm n$

$u(\pi,t) = \alpha_1 e^{\frac{n_1^2}{2}t} \sin n_1 x + \alpha_2 e^{\frac{n_2^2}{2}t} \sin n_2 x$

$\therefore u(x,0) = 2\sin 3x - 5\sin 4x = \alpha_1 \sin n_1 x + \alpha_2 \sin n_2 x$

بالمطابقة نستنتج أن

$[\alpha_1 = 2 \quad , \alpha_2 = -5 \quad , n_1 = 3 \quad , n_2 = 4]$

$u(x,t) = 2e^{\frac{9}{2}t}\sin 3x - 5e^{-8t}\sin 4x$

السؤال الحادي عشر

حل بطريقة فصل المتغيرات المسألة الآتية :-

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(10,t) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(x,0) = 3\sin(2\pi x) - 4\sin\frac{5\pi}{2}x \end{cases}$$

$$u(x,t) = X_{(x)} \cdot T_{(t)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T'' \cdot X \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X'' \cdot T$$

نعوض بالمشتقات بالمعادلة الأصلية :-

$$\Rightarrow T'' \cdot X - 4X''T = 0 \Rightarrow \frac{T''}{T} = \frac{4X''}{X} = -\lambda^2$$

$$\Rightarrow \frac{T''}{T} = -\lambda^2 \Rightarrow T'' + \lambda^2 T = 0 \Rightarrow \boxed{T = A\cos\lambda t + B\sin\lambda t}$$

$$\frac{4X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow 4X'' + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow \boxed{X = A_1\cos(\frac{\lambda}{2}x) + B_1\sin\frac{\lambda}{2}x}$$

$$u(x,t) = [A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t)][A_1\cos\frac{\lambda}{2}x + B_1\sin\frac{\lambda}{2}x]$$

نعوض بالشروط المعطاه

$$u(0,t) = [A\cos\lambda t + B\sin\lambda t)][0] \Rightarrow \boxed{A_1 = 0}$$

$$u(x,t) = [B_1\sin\frac{\lambda}{2}x][A\cos\lambda t + B\sin\lambda t]$$

$$u(10,t) = 0 \quad B_1\sin 5\lambda\,[A\cos\lambda t + B\sin\lambda t]$$

$$n = \lambda \ , \ n = \pm 1, \pm 2 ---- \pm n \Rightarrow 5\lambda = n\pi \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{n\pi}{5}}$$

$$u(x,t) = B_1 \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right)\left[A\cos\frac{n\pi}{5}t + B\sin\frac{n\pi}{5}t\right.$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial t} = B_1 \sin\frac{n\pi}{10}x\left[-\frac{n\pi}{5}A\sin\frac{n\pi}{5}t + \frac{n\pi}{5}B\cos\left[\frac{n\pi}{5}t\right.\right.$$

$$\Rightarrow u_t(x,0) = B_1 \sin\frac{n\pi}{10}x\left[0 + \frac{n\pi}{5}B\right] \Rightarrow B = 0$$

$$u(x,t) = A_2 \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right)\cos\frac{n\pi}{5}t, \quad A_2 = AB_1$$

$$\Rightarrow u(x,t) = B_2 \sin\frac{n_1\pi}{10}x \cdot \cos\frac{n_1\pi}{5}t + B_3 \sin\frac{n_2\pi}{10}x\cos\frac{n_2\pi}{5}$$

$$\Rightarrow u(x,0) = 3\sin 2\pi x - 4\sin\frac{5\pi}{2}x = B_2 \sin\frac{n_1\pi}{10}x + B_3 \sin\frac{n_2\pi}{10}x$$

بمطابقة نستنتج أن

$$B_2 = 3, \quad \frac{n_1}{10} = 2 \quad B_3 = -4, \quad \frac{n_2}{10} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow B_2 = 3, \quad n_1 = 20, \quad B_3 = -4, \quad n_2 = 25$$

$$\therefore u(x,t) = 3\sin 2\pi x \cos 4\pi t - 4\sin 2.5\pi x \cos 5\pi t$$