



ملخص المحاضرة الخامس معادلات تفاضلية جزئية للأسئلة (التاسع - العاشر - الحادي عشر )

السؤال التاسع

حل المعادلة التفاضلية التامة بطريقة فصل المتغيرات:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u \quad ; \quad u(0, y) = 2e^{-y} + 3e^{-2y}$$

(الخطوة الأولى)

Let  $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \bar{X}Y \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = X\bar{Y}$$

$$\bar{X}Y + X\bar{Y} = X \cdot Y \Rightarrow \bar{X}Y + X\bar{Y} - XY = 0$$

$$\Rightarrow \bar{X}Y + X(\bar{Y} - Y) = 0 \Rightarrow \bar{X}Y = X(Y - \bar{Y})$$

$$\therefore \frac{\bar{X}}{X} = \frac{Y - \bar{Y}}{Y} = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X}}{X} = \lambda \Rightarrow \bar{X} - \lambda X = 0 \Rightarrow X = A e^{\lambda x} \rightarrow \text{فصل (X)}$$

$$\frac{X - \bar{Y}}{Y} = \lambda \Rightarrow \lambda Y = Y - \bar{Y} \Rightarrow \cancel{X} - (\lambda - 1)Y = 0$$

$$\Rightarrow Y = B e^{-(\lambda - 1)y} \rightarrow \text{فصل (Y)}$$

أعوى ليفة (y, x) بالفرضية  $(u(x, y) = X \cdot Y)$

$$\Rightarrow u(x, y) = X \cdot Y \Rightarrow (A e^{\lambda x}) \cdot (B e^{-(\lambda - 1)y})$$

$$\Rightarrow A B e^{\lambda x - (\lambda - 1)y} \Rightarrow \boxed{C = AB}$$

$$\Rightarrow u = C e^{\lambda x - (\lambda - 1)y} \rightarrow \text{الحل العام للمعادلة التفاضلية}$$

نعوض بعد ذلك بالشرط  $(u(0, y) = 2e^{-y} + 3e^{-2y})$

(من أجل إيجاد القيم لثابت C)



$$\therefore u = c e^{\lambda x - (\lambda - 1)y} \Rightarrow c_1 e^{2x - (\lambda_1 - 1)y} + c_2 e^{2x - (\lambda_2 - 1)y}$$

$$c_1 = 2, c_2 = 3, \lambda_1 = 2 \quad \text{أوجد دالة لطيفة.}$$

$$\lambda_2 - 1 = 2 \Rightarrow \lambda_2 = 3$$

$$\therefore u(x, y) = 2e^{2x-y} + 3e^{3x-2y} \quad \text{وهو حل المعادلة بالشروط المعطاة}$$

السؤال العاشر ← حل مسألة الشاليف :-

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 ; \quad \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = 2\sin 3x - 5\sin 4x \end{cases}$$

نلاحظ هنا أن المعادلة التفاضلية جزئية من مرتبة ثانية والمتغير (u) يتبع متغيرين

$$u = T(t) \cdot X(x) \quad \text{نفرض أن}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{T} \cdot X, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = T \cdot \dot{X}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T \cdot \ddot{X}$$

نعوض في المعادلة الأصلية المعطاة :-

$$2\dot{T}\dot{X} - T\ddot{X} = 0 \Rightarrow \frac{2\dot{T}}{T} = \frac{\ddot{X}}{X} = \lambda$$

$$\therefore \frac{2\dot{T}}{T} = \lambda \Rightarrow 2\dot{T} = \lambda T \Rightarrow 2\dot{T} - \lambda T = 0$$

$$\Rightarrow T = C e^{\frac{\lambda}{2}t} \quad \left| \quad \frac{\ddot{X}}{X} = \lambda \Rightarrow \ddot{X} - \lambda X = 0 \right.$$

$$\Rightarrow X = A e^{\sqrt{\lambda}x} + B e^{-\sqrt{\lambda}x} \quad \therefore u(x, t) = (T \cdot X)$$

$$u(x, t) = A e^{\sqrt{2}x + \frac{\lambda}{2}t} + B_1 e^{-\sqrt{2}x + \frac{\lambda}{2}t} \quad \text{الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة}$$



$$\Rightarrow u(0,t) = 0 \Rightarrow A_1 e^{\frac{2}{3}t} + B_1 e^{\frac{2}{3}t} = 0$$

$$\Rightarrow e^{\frac{2}{3}t} (A_1 + B_1) = 0$$

$$\Rightarrow u(\pi,t) = 0 \Rightarrow A_1 (e^{\frac{\sqrt{2}\pi + \frac{2}{3}t}{3}} - e^{\frac{\sqrt{2}\pi + \frac{2}{3}t}{3}}) = 0$$

$$\Rightarrow A_1 = 0, B_1 = 0$$

$$\Rightarrow u(x,t) = 0$$

$$\text{Let } \frac{2T}{T} = \frac{X}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{2T}{T} = -\lambda^2$$

$$\Rightarrow 2T + \lambda^2 T = 0 \Rightarrow T = c e^{\frac{\lambda^2}{2}t}$$

$$\frac{X}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow X + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

$$u(x,t) = e^{\frac{\lambda^2}{2}t} [A_1 \cos(\lambda x) + B_1 \sin \lambda x]$$

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow e^{\frac{\lambda^2}{2}t} A_1 = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

$$\Rightarrow u(x,t) = B_1 e^{\frac{\lambda^2}{2}t} \sin \lambda x = 0 \Rightarrow B_1 \neq 0 \Rightarrow \sin \lambda x = 0$$

$$n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$$

$$u(\pi,t) = \alpha_1 e^{\frac{n_1^2}{2}t} \sin n_1 x + \alpha_2 e^{\frac{n_2^2}{2}t} \sin n_2 x$$

$$\therefore u(x,0) = 2 \sin 3x - 5 \sin 4x = \alpha_1 \sin n_1 x + \alpha_2 \sin n_2 x$$

$$[\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -5, n_1 = 3, n_2 = 4]$$

$$u(x,t) = 2 e^{\frac{9}{2}t} \sin 3x - 5 e^{\frac{16}{2}t} \sin 4x$$



## السؤال الحادي عشر

حل بطريقة فصل المتغيرات المسألة الآتية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(10, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u(x, 0) = 3\sin(2\pi x) - 4\sin\frac{5\pi x}{2} \end{cases}$$

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \cdot X$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X \cdot T$$

نقسم المعادلتين بالعادة الأولى

$$\Rightarrow \frac{T''}{T} - 4 \frac{X''}{X} = 0 \Rightarrow \frac{T''}{T} = \frac{4X''}{X} = -\lambda^2$$

$$\Rightarrow \frac{T''}{T} = -\lambda^2 \Rightarrow T'' + \lambda^2 T = 0 \Rightarrow T = A \cos 2t + B \sin 2t$$

$$\frac{4X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow 4X'' + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X = A_1 \cos\left(\frac{\lambda}{2}x\right) + B_1 \sin\frac{\lambda}{2}x$$

$$u(x, t) = [A \cos 2t + B \sin 2t] [A_1 \cos \frac{\lambda}{2}x + B_1 \sin \frac{\lambda}{2}x]$$

$$u(0, t) = [A \cos 2t + B \sin 2t] [0] \Rightarrow A_1 = 0$$

$$u(x, t) = [B_1 \sin \frac{\lambda}{2}x] [A \cos 2t + B \sin 2t]$$

$$u(10, t) = 0 \Rightarrow B_1 \sin 5\lambda [A \cos 2t + B \sin 2t] = 0$$

$$n=2, n=\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n \Rightarrow 5\lambda = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{5}$$



$$u(x,t) = B_1 \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) \left[ A \cos \frac{n\pi}{5}t + B \sin \frac{n\pi}{5}t \right]$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial t} = B_1 \sin \frac{n\pi}{10}x \left[ -\frac{n\pi}{5}A \sin \frac{n\pi}{5}t + \frac{n\pi}{5}B \cos \frac{n\pi}{5}t \right]$$

$$\Rightarrow u_t(x,0) = B_1 \sin \frac{n\pi}{10}x \left[ 0 + \frac{n\pi}{5}B \right] \Rightarrow B = 0$$

$$u(x,t) = A_2 \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) \cos \frac{n\pi}{5}t, \quad A_2 = AB_1$$

$$\Rightarrow u(x,t) = B_2 \sin \frac{n_1\pi}{10}x \cos \frac{n_1\pi}{5}t + B_3 \sin \frac{n_2\pi}{10}x \cos \frac{n_2\pi}{5}t$$

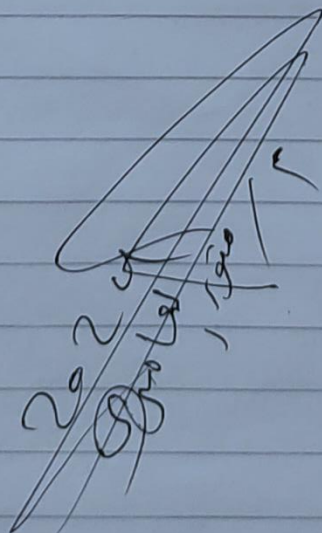
$$\Rightarrow u(x,0) = 3 \sin 2\pi x - 4 \sin \frac{5\pi}{2}x = B_2 \sin \frac{n_1\pi}{10}x + B_3 \sin \frac{n_2\pi}{10}x$$

0'i  $\sum$   $\sin$   $\cos$   $\sin$   $\cos$

$$B_2 = 3, \quad \frac{n_1}{10} = 2, \quad B_3 = -4, \quad \frac{n_2}{10} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow B_2 = 3, \quad n_1 = 20, \quad B_3 = -4, \quad n_2 = 25$$

$$\therefore u(x,t) = 3 \sin 2\pi x \cos 4\pi t - 4 \sin 2.5\pi x \cos 5\pi t$$





رابط المحاضرة التجريبية على قناتي يوتيوب (YouTube)



<https://youtu.be/QDFvVTestHM?si=YQJZnNJWcloh-DDG>

المهندس / منور العامري

شروحات المقرر ( 150 ريال ) شامل للمقرر كامل (للميد والفايل + حلول  
النماذج السابقة وشرحها للميد والفايل خصم خاص للقروبات ومشرفين  
الشعب )

خدمات طلابية متكاملة - تصاميم - بحوث - عروض تقديمية

إنضم الآن عبر حساباتي على مواقع التواصل الاجتماعي

موقعي على الانترنت:



[https://monawweralameri.github.io/Math\\_Academy/](https://monawweralameri.github.io/Math_Academy/)

قناتي تليجرام



<https://t.me/+G26LNiXDZMZkNDg0>

حساب الواتساب



<https://wa.me/967711848728>

حسابي تليجرام



<https://t.me/Monwwer>

