FYS1120 Elektromagnetisme 2014

Obligatorisk oppgåve 1

Innleveringsfrist **19. september kl. 23.59**

Øyvind Sigmundson Schøyen

19. september 2014

Obligar i FYS1120 leverast elektronisk på Devilry – `http://devilry.ifi.uio.no/`*. Du kan velge om du vil skrive han maskinelt, med til dømes LaTeX, eller skanne håndskrivne ark. Skanner finst på bibliotek og terminalstuer.*

Oppgåve 1 Gradient, divergens og kvervling

a) Finn gradienten til desse skalarfelta:

Gradienten vert rekna ut ved formelen

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

(i) $f(x, y, z) = x^2 y$

$$\nabla f = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$$

(ii) $g(x, y, z) = xyz$

$$\nabla g = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$

(iii) $h(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r}e^{r^2}$ *Hint: Bruk at $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, eller sjå etter formelen for gradient i kulekoordinater i Rottmann.* Her vil me nytte formelen for gradient i kulekoordinatar. Den er gitt ved

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{i}_\phi$$

$$\nabla h = \left(-\frac{1}{r^2}e^{r^2} + 2e^{r^2}\right)\mathbf{i_r}$$

b) Finn divergensen og kvervlinga til desse vektorfelta:

Divergensen finn me ved

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Kvervlinga finn me ved

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

(i) $\mathbf{u}(x, y, z) = (2xy, x^2, 0)$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 2y$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}(2x - 2x) = \mathbf{0}$$

(ii) $\mathbf{v}(x,y,z) = (e^{yz}, \ln(xy), z)$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{y} + 1$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{yz} & \ln(xy) & z \end{vmatrix} = ye^{yz}\mathbf{j} + \mathbf{k}\left(\frac{1}{x} - ze^{yz}\right)$$

(iii) $\mathbf{w}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

(iv) $\mathbf{a}(x,y,z) = (y^2 z, -z^2 \sin y + 2xyz, 2z\cos y + y^2 x)$

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = 2xz - z^2 \cos y + 2\cos y = 2xz + \cos y(2 - z^2)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 z & 2xyz - z^2 \sin y & 2z\cos y + y^2 x \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(2xt - 2z\sin y - 2xy + 2z\sin y) \\ &- \mathbf{j}(y^2 - y^2) \\ &+ \mathbf{k}(2yz - 2yz) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

c) Kva vil det seie at eit felt er *konservativt*, matematisk sett? Og kva vil det seie at t.d. eit gravitasjonsfelt er konservativt, fysisk sett? Er det nokon av felta i **b)** som er konservative? Har nokon av dei i så fall noko med **a)** å gjere?

Felta (i), (iii) og (iv) er konservative. Dette kan me sjå då kvervlinga vert $\mathbf{0}$. Det at eit felt er konservativt betyr at energien er bevart. For gravitasjon vil det seie at kva veg me vel å bevege oss langs er likegyldig. Den potensielle energien i begge endepunkta vil vere den same. Viss feltet er konservativt $\exists\ \mathbf{F} = \nabla\phi$. I oppgåve 1 har me at 1a)(i) er eit skalarpotensial til feltet 1b)(i) og 1a)(ii) er eit skalarpotensial til feletet 1b)(iii).

d) Viss me tek divergensen av gradienten til eit skalarfelt f, $\nabla \cdot \nabla f$, så får me eit nytt skalarfelt. Operatoren $\nabla \cdot \nabla$ skriv me ofte ∇^2, og han vert kalla *laplaceoperatoren*.

Bruk laplaceoperatoren på desse skalarfelta:

Laplaceoperatoren vert formelen for divergensen på ein gradient.

(i) $j(x, y, z) = x^2 + xy + yz^2$

$$\begin{aligned} \nabla j &= (2x + y)\mathbf{i} + (x + z^2)\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k} \\ \nabla \cdot \nabla j &= \nabla^2 j = 2 + 2y \end{aligned}$$

(ii) $h(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} e^{r^2}$ Her nyttar me formelen for gradient i kulekoordinatar. Den er gitt ved

$$\nabla^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) f + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) f + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} f.$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 h &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \left(-\frac{1}{r^2} e^{r^2} + 2e^{r^2} \right) \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(2r^2 e^{r^2} - e^{r^2} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \left(4re^{r^2} + 4r^3 e^{r^2} - 2re^{r^2} \right) = \frac{4}{r} e^{r^2} + 4re^{r^2} - \frac{2}{r} e^{r^2} \\ &= 2e^{r^2} \left(2r + \frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

Oppgåve 2 Vektoridentitetar

La $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ vere tre-dimensjonale vektorar. Vis følgande identitet:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \tag{1}$$

Du kan godt anta at vektorane er på formen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ osb.

Me viser identiteta ved å rekne ut venstre sida av likhetsteiknet på komponentform. Etterpå legger me til og trekk ifrå 6 ledd som me bruker til å sortere uttrykket til det liknar på det på høgre sida av likhetsteiknet.

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \times \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(b_2 c_3 - b_3 c_2) - \mathbf{j}(b_1 c_3 - b_3 c_1) + \mathbf{k}(b_1 c_2 - b_2 c_1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3 - b_3c_2 & b_1c_3 - b_3c_1 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{i}(a_2(b_1c_2 - b_2c_1) + a_3(b_1c_3 - b_3c_1)) \\
&- \mathbf{j}(a_1(b_1c_2 - b_2c_1) + a_3(b_3c_2 - b_2c_3)) \\
&+ \mathbf{k}(a_1(b_3c_1 - b_1c_3) + a_2(b_3c_2 - b_2c_3))
\end{aligned}
$$

No legg me til ledda $\mathbf{i}(a_1b_1c_1 - a_1b_1c_1)$, $\mathbf{j}(a_2b_2c_2 - a_2b_2c_2)$ og $\mathbf{k}(a_3b_3c_3 - a_3b_3c_3)$. Me sorterer litt og får

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{i}(a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3) - \mathbf{i}(a_1b_1c_1 + a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1) \\
&+ \mathbf{j}(a_1b_2c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_2c_3) - \mathbf{j}(a_1b_1c_2 + a_2b_2c_2 + a_3b_3c_2) \\
&+ \mathbf{k}(a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 + a_3b_3c_3) - \mathbf{k}(a_1b_1c_3 + a_2b_2c_3 + a_3b_3c_3) \\
&= (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\
&- (c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k})(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\
&= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})
\end{aligned}
$$

Oppgåve 3 Fluksintegral og Gauss' teorem

a) Eit vektorfelt er gitt ved

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (y, x, z - x). \tag{2}$$

Rekn ut fluksen av dette feltet ut av einingskuben, som er gitt ved $x, y, z \in [0, 1]$. *Hint: Berekn fluksen,* $\iint_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dxdy$*, der* $\mathbf{n}$ *er einingsnormalvektoren for flata* A*, for kvar sideflate av kuben og legg saman.*

Kuben har 6 sider som me rekner ut kvar for seg og legg saman til slutt.
For sida $x = 1$ får me $\mathbf{n} = dydz\mathbf{i}$ i positiv x-retning.

$$\int_0^1 \int_0^1 y \; dydz = \frac{1}{2}.$$

For sida $x = 0$ får me $\mathbf{n} = -dydz\mathbf{i}$ i negativ x-retning.

$$\int_0^1 \int_0^1 -y \; dydz = -\frac{1}{2}.$$

For sida $y = 1$ får me $\mathbf{n} = dxdz\mathbf{j}$ i positiv y-retning.

$$\int_0^1 \int_0^1 x \; dxdz = \frac{1}{2}.$$

For sida $y = 0$ får me $\mathbf{n} = -dxdz\mathbf{j}$ i negativ y-retning.

$$\int_0^1 \int_0^1 -x \; dxdz = -\frac{1}{2}.$$

For sida $z = 1$ får me $\mathbf{n} = dxdy\mathbf{k}$ i positiv z-retning.

$$\int_0^1 \int_0^1 1 - x \; dxdy = \frac{1}{2}.$$

For sida $z = 0$ får me $\mathbf{n} = -dxdy\mathbf{k}$ i negativ z-retning.

$$\int_0^1 \int_0^1 x \; dxdy = \frac{1}{2}.$$

Totalt får me då

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

b) Bruk Gauss' teorem til å berekne den samme fluksen. Sjekk at du får samme svar!

Me startar med å rekne ut divergensen og etterpå rekner me ut volumintegralet.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 1.$$

Me har at det infinitesimale volumelementet er gitt ved $d\tau = dxdydz$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v}\, d\tau = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 1\, dxdydz = 1.$$

Oppgåve 4 Linjeintegral og Stokes' teorem

Endå eit vektorfelt er gitt ved

$$\vec{w}(x, y, z) = (2x - y)\vec{i} - y^2\vec{j} - y^2 z\vec{k}, \tag{3}$$

der $\vec{i}, \vec{j}$ og $\vec{k}$ er einingsvektorene i høvesvis x, y og z-retning. Vi har òg ei *lukka kurve* γ gitt ved $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$.

a) Rekn ut divergensen til $\vec{w}$.

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 2 - 2y + y^2.$$

b) Rekn ut kvervlinga til $\vec{w}$.

$$\nabla \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x - y & -y^2 & -y^2 z \end{vmatrix} = -2yz\mathbf{i} + \mathbf{k}.$$

c) Parametrisér kurva γ som ein vektor $\vec{\gamma}(t)$, og finn $d\vec{\gamma}$ uttrykt ved dt.

Me ser at γ utgjer ein sirkel. Me vil difor parametrisere ved hjelp av sylinderkoordinatar. Då har me at $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ og $z = 1$, kor $r = 1$ og $t \in [0, 2\pi]$. Då får me

$$\gamma(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k},$$
$$d\gamma = (-\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j})dt.$$

d) Rekn ut sirkulasjonen til $\vec{w}$ rundt γ.

Her beveger me oss rundt sirkelen i ein fast avstand frå origo. Då har me at $r = 1$. Me bruker sylinderkoordinatar på $\mathbf{w}$. Då får me $\mathbf{w}(t) = (2\cos t - \sin t)\mathbf{i} - \sin^2 t\mathbf{j} - \sin^2 t\mathbf{k}$. Sirkulasjonen vert

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{w}\cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t - 2\cos t\sin t - \cos t\sin^2 t\ dt\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1-\cos(2t)\ dt - \int_0^{2\pi}\sin(2t)\ dt - \int_0^{2\pi}\cos t\sin^2 t\ dt\\ &= \frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos t\sin^2 t\ dt.\end{aligned}$$

På det siste leddet bruker me substitusjon. Det gjer oss

$$\begin{aligned} u &= \sin t, & u(2\pi) &= 0\\ dt &= \frac{du}{\cos t}, & u(0) &= 0.\end{aligned}$$

Til slutt vert det

$$\int_\gamma \mathbf{w}\cdot d\gamma = \pi - \left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^0 = \pi.$$

e) Bruk Stokes' teorem til å finne sirkulasjonen ved hjelp av kvervlinga til $\vec{w}$. Sjekk at du får samme svar!

Me bruker sylinderparametrisering i $\nabla\times\mathbf{w}$ ($x = r\sin t$, $y = r\cos t$ og $z = 1$). No vil me integrere over heile området. Me har difor $r \in [0,1]$. Då får me

$$\begin{aligned}\int_S (\nabla\times\mathbf{w})\cdot d\gamma &= \int_0^1\int_0^{2\pi}(-2\sin t\mathbf{i}+\mathbf{k})\cdot(-\sin t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j})r\ drdt\\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi} 2r\sin^2 t\ drdt = \int_0^{2\pi}\sin^2 t\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1-\cos(2t)\ dt\\ &= \frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{2\pi} = \pi.\end{aligned}$$