Equations différentielles

OBJECTIFS :

Ce thème vise à :

• étudier la forme des solutions de certaines équations différentielles ;

• modéliser quelques problèmes à l'aide d'une équation différentielle et en déduis une solution.

Commentaires

La notion d'équation différentielle est nouvelle pour les élèves en mathématiques. Cette théorie ne sera donc appréhendée que sur quelques exemples parmi les plus simples.

Les élèves de terminale rencontrent en sciences physiques ces équations à travers l'étude de systèmes physiques ou chimiques. Des exemples importants sont :

Les oscillateurs libres (en particulier harmoniques) en mécanique ou en électricité (oscillateurs mécaniques, système LC ou LRC) ; la loi de la croissance radioactive.

Ce thème correspond donc à une initiation à une théorie extrêmement importante en analyse et en géométrie. Il n'ya donc pas lieu de développer exagérément cette initiation, mais plutôt de Montre l'importance de ces équations à l'aide de quelques problèmes qui se modélisent sous cette forme. Un des intérêts immédiats du cours de mathématiques sera donc la justification de la nature des solutions de ces équations différentielles.

La résolution des équations différentielles du type $af'' + bf' + cf = g$ où a, b et c sont des nombres réel non nuls et la théorie qui l'accompagne sont hors programme.

Volume horaire : 6 heures

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Equation différentielle du type $f' = kf$. • Equation différentielle du type $f'' = 0$. • Equation différentielle du type $f'' = kf$.	• Résous une équation différentielle du type $f' = kf$. • Equation différentielle du type $f'' = 0$. • Equation différentielle du type $f'' = kf$.

Remarques et suggestions

Ce thème comprend deux parties :

1) L'établissement des solutions des équations différentielles
   Les trois types d'équations peuvent faire l'objet d'une étude assez poussée en classe. Ces démonstrations présentent un intérêt incontestable pour les élèves : recherches de solutions, preuve de l'exhaustivité de cette recherche.
   A l'issue de cette mise en place, la forme des solutions doit être utilisée comme un résultat que les n'auront plus alors à justifier. Ces résultats doivent donc être connus des élèves.
2) La résolution de problèmes
   Les élèves devront être confrontés à 3 types de problèmes :
   • des applications immédiates du cours ;
   • des équations différentielles qui dépassent leur compétence immédiate, et qu'ils sauront Résous grâce à un guidage important de l'énoncé (exemple : équations linéaires avec second membre ; recherche d'une solution particulière) ;
   • des problèmes géométriques, ou tirés de sciences expérimentales qui se modélisent à l'aide d'équations différentielles au programme. Les exemples choisis devront rester particulièrement simples, n'entraînant pas en particulier de recherche de validité de solutions.

I- Définition :

On appelle équations différentielles, toutes équations faisant intervenir une fonction (l'inconnue), ses dérivées et sa variable x . Leur résolution consiste à Détermine toutes les fonctions solutions.

II- Différents types d’équations différentielles

1) Equations différentielles du 1er ordre ($y' - ay = 0$)

a) Définition :

f étant une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, la relation $\boldsymbol{f'(x) - a\,f(x) = 0}$; où f est une fonction inconnue, est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, sans second membre. Cette équation est souvent notée $y' - ay = 0$.

b) Résolution :

Les solutions, définies sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ sont les solutions f_k qui à tout nombre réel x, associent $f_k(x) = ke^{ax}$, où k est un nombre réel quelconque.

Ainsi l’ensemble solution est : **S = {** $\boldsymbol{ke^{ax}}$ **}**

2) Equations différentielles du 2ème ordre :

a) Cas particulier : (Equation du 2ème ordre de la forme $\boldsymbol{y'' + A(x) = 0}$)
Avec $A(x)$ est une fonction quelconque.

Ce type d’équation différentielle contient uniquement la variable x et la dérivée seconde de la fonction à cherchée. Résous ce type d’équation différentielle revient donc, dans un premier temps, à chercher y' puis chercher y en intégration successive de $\boldsymbol{y''}$.

b) Equation différentielle de la forme: ($\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0}$)
Pour Résous de telles équations différentielles, on recherche d'abord une équation caractéristique de la forme $ar^2 + br + c = 0$. Ainsi on calcule le discriminant associe Δ tel que $\Delta = b^2 - 4ac$.

* Si $\Delta > 0$ on a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 tel que :

$$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad S = f(x) = k_1e^{r_1x} + k_2e^{r_2x} \text{ Avec } k_1 \; et \; k_2 \in \mathbb{R}$$

* Si $\Delta = 0$, on a une solution doubles r_0 tel que : $r_0 = \dfrac{-b}{2a}$ et

S = $f(x) = (k_1x + k_2)e^{r_0x}$ Avec $k_1 \; et \; k_2 \in \mathbb{R}$

* Si $\Delta < 0$, on a deux solutions complexes r_1 et r_2 tel que :

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-b}{2a} - i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \alpha - i\beta \quad \text{et} \quad r_1 = \frac{-b}{2a} + i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \alpha + i\beta$$

Où $\alpha\ \ et\ \beta$ désignent respectivement les parties réelles et imaginaires des solutions r_1 et r_2

et S = $f(x) = (k_1 cos\beta x\ +\ k_2 sin\beta x)e^{\alpha x}$ Avec $k_1\ et\ \ k_2 \in\ \mathbb{R}$

c) **Equations différentielles de la forme** $(y''\ +\ w^2y\ =\ 0)$

Ce type d'équation différentielle est très fréquent en sciences physiques. Sa résolution est suivit d'une application.

Résolution :

La solution de telles équations est de la forme : S = $f(x) = k_1 coswx\ +\ k_2 sinwx$

Avec $k_1\ et\ \ k_2 \in\ \mathbb{R}$

d) **Equations différentielles de la forme** $(y'' - w^2y\ =\ 0)$

Ce type d'équation différentielle est utilisé ici pour Résous une application concrète.

Résolution :

La solution de telles équation est de la forme : S = $f(x) = k_1 e^{wx}\ +\ k_1 e^{-wx}$

Avec $k_1\ et\ \ k_2 \in\ \mathbb{R}$

Exercices

Equations différentielles sans second membre.

1 Résous les équations différentielles suivantes :

1) $y'' - 4y'\ +\ 3y\ =\ 0$; **2)** $y'' - 9y\ =\ 0$; **3)** $y' - 2y\ =\ 0$

4) $y'' + 2y'\ +\ 2y\ =\ 0$; **5)** $4y'' + 5y\ =\ 0$; **6)** $7y' + 4y\ =\ 0$

7) $9y'' - 24y' + 16y\ =\ 0$; **8)** $4y'' - sinx\ +\ e^{-2x} = 0$; **9)** $2xy + y'x^2 -\ e^x = 0$

2 Vérifie que les fonctions f données sont solutions des équations différentielles (E) correspondantes :

1) $f(x) = 2e^{-2x} + 3e^{2x}$ et (E) : $y'' - 4y\ =\ 0$

2) $f(x) = (2x+1)e^{-x}$ et (E) : $y'' + 2y' + y = 0$

3) $f(x) = e^{-x}sinx$ et (E) : $y'' + 2y' + 2y = 0$

3

Détermine la solution f des équations différentielles données, vérifiant les conditions données suivantes :

1) $y'' - 2y' + y = 0$; conditions : $f(0) = 1$ *et* $f'(0) = 1$

2) $y'' + 4y = 0$; conditions : $f(0) = 6$ *et* $f'(0) = 10$

3) $y'' + y = 0$; conditions : $f(0) = 0$ *et* $f'(0) = 1$

4) $y'' - 3y' + 2y = 0$; conditions : $f(1) = 1$ *et* $f'(1) = 3$

4

On considère le système suivant, d'équations différentielles du 1er ordre tel que :

$\begin{cases} y' + 4Z = 2e^{2x} \\ Z' - y = e^{2x} \end{cases}$ où y et Z désignent deux fonctions inconnues de variable réel x.

1) Forme l'équation différentielle du second ordre (E) à la quelle satisfait $y(x)$

2) Résous l'équation (E) et en déduis la solution générale du système.

3) Précise la solution particulière pour laquelle on a : $y = 1$ et $Z = -1$ pour $x = 0$.

5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \times 5^{3x}$

1) Détermine les réels a et b tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}, f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$
2) En déduis une primitive de f sur $\mathbb{R}$

6

Détermine la solution f des équations différentielles données, dont la courbe (C) vérifie les conditions données suivantes :

1) $y' - 3y = 0$; (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation

$y = x$.

2) $2y' - y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées$(2\ ; e)$.

3) $y'' + 2y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $(0\ ; 0)$ et admet la droite d'équation $y = x$ comme tangente en ce point.

4) $y'' - 4y' + 4y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $(0\ ; 1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

5) $y'' - 3y' + 2y = 0$; (C) passe par le point coordonnées ($ln2$; 0)et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -4

6) $y'' - 2y + 2y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{4} ; 0\right)$ et sa tangente au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

Equations différentielles avec second membre.

7

Soient les équations différentielles (E) : $y' + 2y = x^2$ et (E′) : $y' + 2y = 0$

1) Détermine une fonction polynôme g, de degré deux, solution de (E).
2) Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation (E′)
3) Résous l'équation (E′).
4) En déduis l'ensemble solution de l'équation (E).

8

Soient les équations différentielles (E) et (E′) telles que :

(E) : $y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$ et (E′) : $y'' + 2y' + y = 0$

1) Détermine une fonction polynôme g, de degré deux, solution de (E).
2) Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation (E′)
3) a) Résous l'équation (E′).
   b) En déduis l'ensemble solution de l'équation (E).

9

1) Résous l'équation différentielle d'inconnue f tel que : $x^2 f'(x) + 2xf(x) - 1 = 0$.
2) Soit l'équation (E): $x^2 f'(x) - 2xf(x) + f^2(x) = 0$.

3) On pose $g(x) = \frac{1}{f(x)}$
   a- Montre que l'équation (E) est équivalent à $x^2 g'(x) + 2xg(x) = 1$.
   b- Déduis-en la résolution de l'équation (E).

10

On se propose de Résoudre le problème suivant : Trouvez une fonction f définie et dérivable sur$]0 ; +\infty[$, s'annulant pour $x = 1$ et vérifiant la propriété : pou tout $x > 0$, on a :

(E) : $x \times f'(x) - 3 \times f(x) = 3lnx$.

1) Trouve tous les polynômes P du 3ème degré telles que$\forall\, x > 0; x \times P'(x) - 3 \times P(x) = 0$

2) Soit une fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ telle que $f(1) = 0$ et soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par la relation $f(x) = x^3 \times h(x)$

   a) Calcule h (1) et Calcule $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et $h(x)$.

b) Démontre que f vérifie (E) si et seulement si $\forall\ x \in\ ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ h'(x) = \frac{3}{x^4}\ lnx$

c) On suppose que f vérifie (E). Démontre que h est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$, par $h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4}\ lnt\ dt$

d) Détermine $h(x)$ en fonction de x par une intégration par partie

e) Démontre qu'il existe une unique fonction f solution du problème posé et Donne l'expression de $f(x)$.

11 On se propose de Résoudre l'équation différentielle : (E_1) : $y' - 2y = \frac{-2}{1+\ e^{-2x}}$

1) Détermine la solution de l'équation différentielle (E_2) : $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.

2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0)\ =\ ln2$ et soit g la fonction définie par la relation : $f(x)\ = e^{2x} \times g(x)$.

a- Calcule $g(0)$

b- Calcule $g'(x)$ en fonction de $f\,'(x)$ et de $f(x)$.

c- Démontre que f est solution de (E_1) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+\ e^{-2x}}$

d- En déduis l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de (E).

12 Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel différent de 1.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = ay + by^n$

1) On pose sur $\mathbb{R}$: $Z = y^{1-n}$ (avec $y > 0$).

Détermine une équation différentielle satisfaite par Z et la Résous.

2) En déduis les solutions, strictement positives, de (E) sur $\mathbb{R}$.

Que donne le cas $n = 0$?

Equations différentielles dans les cas pratiques.

13 Un tronc de baobab $\boldsymbol{y}$ grossi avec une vitesse proportionnelle à lui-même.

On sait de plus que ce tronc double de volume tous les 10 ans.

Combien de temps luis faut-il pour tripler de volume ?

14 Lors du tremblement de terre qui a secoué la centrale nucléaire de FUKUSHIMA au Japon, la teneur du nombre d'atome de radium $N(t)$ échappé à l'instant t est donné par la relation : $N'(t) =\ aN(t)$ et $N(0) = N_0$ où (t est exprimé en années).

De plus sa teneur en toxine triple chaque deux ans.

1) Détermine l'expression de $N(t)$ en fonction de N_0 et t.
2) Au bout de combien d'années la teneur du nombre d'atome de radium aura –t-il quadruplé ?

15 Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à l'instant t, exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction numérique N à variable réelle t. La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre de microbes est la dérivée N' de cette fonction. On a constaté que : $N^{'}(t) = -kN(t)$ où k est un coefficient réel strictement positif. On désigne par N_0 le nombre de microbes à l'instant $t = 0$

1°/ Détermine $N(t)$ en fonction de N_0 , k et t.

2°/ Détermine le nombre de microbes au bout de 1 heures si $N_0 = 1000$ et $k = 1$.

3°/ Soit T la période de reproduction du nombre de microbes, c'est-à-dire le temps au bout duquel le nombre de microbes a été divisé par 2. Montre que $e^{kT} = 2$.

4°/ Détermine la période de reproduction T sachant que $k = 6{,}66 \bullet 10^{-5}$.

16 Une substance se dissout dans l'eau avec une vitesse de dissolution proportionnelle à la quantité non dissoute.

A l'instant $t = 0$ (en minutes), on place 20 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau. Sachant que les 10 premiers grammes se dissolvent en 5 minutes.

1) Forme l'équation différentielle expliquant cette situation en fonction de $f'(t)$ et de $f(t)$.

2) En déduis une expression de la quantité dissoute $f(t)$, en grammes, en fonction de t.

17 Le taux d'alcoolisme $f(t)$ (en gL^{-1}) d'une personne ayant absorbé, en jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie, sur $\mathbb{R}_+$, l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = ae^{-t}$.

Où t est le temps écoulé après l'ingestion (exprime en heures), et a une constante qui dépend des conditions expérimentales.

1) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+ : g(t) = f(t)e^{t}$.
   Démontre que g est une fonction affine.
2) Exprime $f(t)$ en fonction de t et de a.
3) Dans cette question, on pose que $a = 5$.
   a- Etudie les variations de f et tracer sa courbe.
   b- Détermine graphiquement le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout du quel il est atteint.
   c- Donne une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à 0,5 en gL^{-1} .

18 Un bloc de métallique est déposé dans un four dont la température constante est de 1000°C.

La température θ est une fonction du temps t $(en\ heures)$ qui vérifie l'équation différentielle

(E): $\theta'(t) = k[1000 - \theta(t)]$; $k \in \mathbb{R}_+^*$.

1) On pose $y(t) = \theta(t) - 1000$.
   Ecris une équation différentielle (F) satisfaite par y.
2) Résous (F) puis (E).
3) Le bloc, initialement à 40°C est déposé dans le four au temps $t_0 = 0$. Sa température est de 160°C au bout d'une heure. En déduis l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t uniquement.
4) a- Calcule la température du bloc au temps $t = 3$ heures.
   b- Détermine le temps T à partir duquel la température du bloc dépassera 500°C.
   On donne $\left(\frac{7}{8}\right)^3 = 0,7$; $ln\left(\frac{7}{8}\right) = -0,13$; $ln\left(\frac{25}{48}\right) = -0,65$

19 A l'instant $t = 0$, un corps à la température $\theta_0 = 60°C$ est placé dans l'air ambiant à la température $\theta_1 = 20°C$. Au bout de 10 $minutes$, la température du corps est 50°C.

Sa température à la date t exprimée en minutes est solution de l'équation différentielle :

$\frac{d\theta(t)}{dt} = -k[\theta(t) - \theta_1]$ où k est une constante réelle. On pose $y(t) = \theta(t) - \theta_1$.

1) a- Quelle est l'équation différentielle vérifiée par y ?
   b- Détermine y.
   c- En déduis $\theta(t)$ en fonction de k.

   d- Détermine la constante k puis en déduis l'expression définitive de $\theta(t)$.

2) a- Au bout de combien de minutes la température du corps diminuera-t-elle de moitié ?
   b- Quelle sera la température du corps au bout d'une heure ?
   On donne $ln2 = 0,70$; $ln\left(\frac{3}{4}\right) = -0,29$.

Solutions

Equations différentielles sans second membre.

1 Résolvons les équations différentielles suivantes :

NB : Dans tout l'exercice, on désignera par **(E.C)** comme : **E**quation **C**aractéristique.

1) $y'' - 4y' + 3y = 0$

(E.C) : $r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 4$. $(\Delta > 0)$. Alors $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$

$\Rightarrow S = f(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} \Rightarrow S = f(x) = C_1e^{x} + C_2e^{3x}$. Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

2) $y'' - 9y = 0$. Ici $w^2 = 9 \Rightarrow w = 3$

$\Rightarrow S = f(x) = C_1e^{3x} + C_1e^{-3x}$

3)$y' - 2y = 0$. Ici $a = 2 \Rightarrow S = f(x) = ke^{2x}$. Avec $(k \in \mathbb{R})$

4) $y'' + 2y' + 2y = 0$

(E.C) : $r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 = 4i^2$. $(\Delta < 0)$.

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i$$

$\Rightarrow \alpha = -1$ et $\beta = 1$

$$r_2 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$$

Où α *et* β désignent respectivement les parties réelles et imaginaires des solutions r_1 et r_2

Et S $= f(x) = (C_1cos\beta x + C_2sin\beta x)e^{\alpha x} = (C_1cosx + C_2sinx)e^{-x}$. Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

5) $4y'' + 5y = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{5}{4}y = 0$. Ici $w^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow w = \frac{\sqrt{5}}{2}$

S $= f(x) = C_1coswx + C_2sinwx \Rightarrow$ S $= f(x) = C_1cos\frac{\sqrt{5}}{2}x + C_2sin\frac{\sqrt{5}}{2}x$.
Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

6) $7y' + 4y = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{4}{7}y = 0$. Ici $a = -\frac{4}{7} \Rightarrow S = f(x) = ke^{-\frac{4}{7}x}$. Avec $(k \in \mathbb{R})$

7) $9y'' - 24y' + 16y = 0$

(E.C) : $9r^2 - 24r + 16 = 0 \Rightarrow \Delta = 0$. $(\Delta = 0)$. Alors $r_1 = r_2 = r_0 = \frac{4}{3}$

=> S = $f(x) = (C_1 x + C_2)e^{r_0 x} = (C_1 x + C_2)e^{\frac{4}{3}x}$. Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

8) $4y'' - sinx + e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow 4y'' = sinx - e^{-2x} \Rightarrow y'' = \frac{1}{4}sinx - \frac{1}{4}e^{-2x}$

$\Rightarrow y' = -\frac{1}{4}cosx + \frac{1}{8}e^{-2x} + k$ et $y = -\frac{1}{4}sinx - \frac{1}{16}e^{-2x} + kx + k'$

=> S $= f(x) = -\frac{1}{4}sinx - \frac{1}{16}e^{-2x} + kx + k'$

9) $2xy + y'x^2 = e^x \Leftrightarrow (x^2 \times y)' = e^x \Leftrightarrow x^2 \times y = e^x \Rightarrow y = \frac{e^x}{x^2} + k$

2

Vérifions que les fonctions f données sont solutions des équations différentielles (E) correspondantes :

1) $f(x) = 2e^{-2x} + 3e^{2x}$ et (E) : $y'' - 4y = 0$

La fonction $f(x) = 2e^{-2x} + 3e^{2x}$ est solution de (E) : $y'' - 4y = 0$ si et seulement si

$f''(x) - 4f(x) = 0$ Avec : $f(x) = 2e^{-2x} + 3e^{2x}$; $f'(x) = -4e^{-2x} + 6e^{2x}$ et

$f''(x) = 8e^{-2x} + 12e^{2x}$

Alors $f''(x) - 4f(x) = (8e^{-2x} + 12e^{2x}) - 4(2e^{-2x} + 3e^{2x})$

$= 8e^{-2x} + 12e^{2x} - 8e^{-2x} - 12e^{2x} = 0$

Puisque $f''(x) - 4f(x) = 0$.

Alors $f(x) = 2e^{-2x} + 3e^{2x}$ est solution de (E) : $y'' - 4y = 0$

2) $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ et (E) : $y'' + 2y' + y = 0$

La fonction $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ est solution de (E) : $y'' + 2y' + y = 0$ si et seulement si

$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$. Avec $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$; $f'(x) = (-2x + 1)e^{-x}$ et

$f''(x) = (2x - 3)e^{-x}$

Alors $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = (2x - 3)e^{-x} + 2(-2x + 1)e^{-x} + (2x + 1)e^{-x}$

$= (2x - 3 - 4x + 2 + 2x + 1)e^{-x} = (0)e^{-x} = 0$

Puisque $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$. Alors $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ est solution de (E)

3) $f(x) = e^{-x}sinx$ et (E) : $y'' + 2y' + 2y = 0$

La fonction $f(x) = e^{-x}sinx$ est solution de (E) : $y'' + 2y' + 2y = 0$ si et seulement si

$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$. Avec $f(x) = e^{-x}sinx$; $f'(x) = (cosx - sinx)e^{-x}$ et

$f''(x) = (-2cosx)e^{-x}$

Alors $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = (-2cosx)e^{-x} + 2(cosx - sinx)e^{-x} + 2e^{-x}sinx$

$$= -2e^{-x}cosx + 2e^{-x}cosx - 2e^{-x}sinx + 2e^{-x}sinx = 0$$

Puisque $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$. Alors $f(x) = e^{-x}sinx$ est solution de (E)

3

Déterminons la solution f des équations différentielles données, vérifiant les conditions données suivantes :

1) $y'' - 2y' + y = 0$

$y'' - 2y' + y = 0$

(E.C) : $r^2 - 2r + 1 = 0$ => $\Delta = 0$. $(\Delta = 0)$. Alors $r_1 = r_2 = r_0 = 1$

=> S = $f(x) = (C_1x + C_2)e^{r_0x} = (C_1x + C_2)e^x$. Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

Conditions : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$

$f(x) = (C_1x + C_2)e^x$ Alors $f(0) = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1$

$f'(x) = (C_1x + C_1 + C_2)e^x$ Alors $f'(0) = 1 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 1$. Or $C_2 = 1$ => $C_2 = 0$

D'où $f(x) = xe^x$

2) $y'' + 4y = 0$

$y'' + 4y = 0$. Ici $w^2 = 4$ => $w = 2$

S = $f(x) = C_1coswx + C_2sinwx$ => S = $f(x) = C_1cos2x + C_2sin2x$. Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

Conditions : $f(0) = 6$ et $f'(0) = 10$

$f(x) = C_1cos2x + C_2sin2x$ Alors $f(0) = 6 \Leftrightarrow C_1 = 6$

$f'(x) = -2C_1 sin2x\ + 2C_2 cos2x$ Alors $f'(0) = 10 \Leftrightarrow 2C_2 = 10 \Rightarrow C_2 = 5$

D'où $f(x) = 6cos2x\ + 5sin2x$

3) $y''\ + y = 0$. Ici $w^2 = 1 \Rightarrow w = 1$

S $= f(x) = C_1 coswx\ + C_2 sinwx \Rightarrow$ S $= f(x) = C_1 cosx\ + C_2 sinx$. Avec $(C_1\ ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

Conditions : $f(0)\ =\ 0\ et\ f\ '(0)\ =\ 1$

$f(x) = C_1 cosx\ + C_2 sinx$ Alors $f(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$

$f'(x) = -C_1 sinx\ + C_2 cosx$ Alors $f'(0) = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1$

D'où $f(x) = sinx$

4) $y'' - 3\,y' + 2\,y = 0$

(E.C) : $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1$. $(\Delta > 0)$. Alors $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$

$\Rightarrow S = f(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \Rightarrow S = f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ Avec $(C_1\ ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

Conditions : $f(1)\ =\ 1\ et\ f\ '(1)\ =\ 3$

$f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Alors $f(1) = 1 \Leftrightarrow C_1 e +\ C_2 e^2\ = 1$

$f'(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$. Alors $f'(1) = 3 \Leftrightarrow C_1 e + 2C_2 e^2 = 3$

Formons ainsi le système avec ces deux conditions :

$$\begin{cases} C_1 e +\ C_2 e^2\ = 1 \\ C_1 e\ +\ 2C_2 e^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -C_1 e -\ C_2 e^2\ = -1 \\ \ \ C_1 e\ +\ 2C_2 e^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ C_2 e^2 = 2\ \Rightarrow C_2 = \frac{2}{e^2} \Rightarrow C_2 = 2e^{-2}$$

En remplaçant $C_2 = 2e^{-2}$ par sa valeur dans l'équation 2, on a : $C_1 = -e^{-1}$

D'où $f(x) = -e^{-1} \times e^x + 2e^{-2} \times e^{2x} = -e^{x-1} + 2e^{2x-2} = 2e^{2x-2} - e^{x-1}$

4 On considère le système suivant, d'équations différentielles du 1[er] ordre tel que :

$\begin{cases} y'\ +\ 4Z = 2e^{2x} \\ Z'\ -\ y = e^{2x} \end{cases}$ où y et Z désignent deux fonctions inconnues de variable réel x.

1) Formons l'équation différentielle du second ordre (E) à la quelle satisfait $y(x)$

(1) $y' +\ 4Z = 2e^{2x} \Rightarrow\ y'' +\ 4Z' = 4e^{2x}$

(2) $Z' - y = e^{2x}$ => $Z' = y + e^{2x}$

En remplaçant $Z' = y + e^{2x}$ par sa valeur dans (1). Alors on a :

$y'' + 4(y + e^{2x}) = 4e^{2x} \Leftrightarrow y'' + 4y + 4e^{2x} = 4e^{2x} \Leftrightarrow y'' + 4y = 0$

D'où l'équation différentielle du second ordre (E) à la quelle satisfait $y(x)$ est

(E) : $y'' + 4y = 0$.

2) Résolvons l'équation (E)

$y'' + 4y = 0$. Ici $w^2 = 4$ => $w = 2$

Alors $y(x) = C_1 coswx + C_2 sinwx = C_1 cos2x + C_2 sin2x$ avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

En déduisons la solution générale du système, c'est-à-dire la fonction inconnue Z.

D'après l'équation (2), on a : $Z' = y + e^{2x} \Leftrightarrow$

Donc $Z' = y + e^{2x} \Leftrightarrow \int Z'(x)dx = \int y(x)dx + \int e^{2x}dx$

$$\Leftrightarrow Z(x) = \int (C_1 cos2x + C_2 sin2x)dx + \int e^{2x}dx$$

$$\Leftrightarrow Z(x) = \int C_1 cos2xdx + \int C_2 sin2xdx + \int e^{2x}dx$$

$$\Leftrightarrow Z(x) = C_1 \int cos2xdx + C_2 \int sin2xdx + \int e^{2x}dx$$

=> $Z(x) = C_1 \left[\frac{1}{2} sin2x\right] + C_2 \left[-\frac{1}{2} cos2x\right] + \left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]$

=> $Z(x) = \frac{C_1}{2} sin2x + -\frac{C_2}{2} cos2x + \frac{1}{2} e^{2x} = \frac{1}{2}(C_1 sin2x - C_2 cos2x + e^{2x})$

3) Précisons la solution particulière pour laquelle on a : $y = 1$ et $Z = -1$ pour $x = 0$.

$\boldsymbol{y(x) = C_1 cos2x + C_2 sin2x}$

Si $y = 1$ Pour $x = 0$ alors on a : $1 = C_1 cos0 + C_2 sin0 \Leftrightarrow C_1 = 1$

$\boldsymbol{Z(x) = \frac{1}{2}(C_1 sin2x - C_2 cos2x + e^{2x})}$

Si $Z = -1$ Pour $x = 0$ alors on a : $-1 = \frac{1}{2}(C_1 sin0 - C_2 cos0 + e^0) \Leftrightarrow$

$C_1 sin0 - C_2 cos0 + e^0 = -2 \Leftrightarrow -C_2 + 1 = -2 \Leftrightarrow C_2 = 3$

Alors $y(x) = cos2x + 3sin2x$ et $Z(x) = \frac{1}{2}(sin2x - 3cos2x + e^{2x})$

D'où la solution particulière du système est :

$$\begin{cases} y(x) = cos2x + 3sin2x \\ \quad\quad et \\ Z(x) = \frac{1}{2}(sin2x - 3cos2x + e^{2x}) \end{cases}$$

5 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \times 5^{3x}$

1) Déterminons les réels a et b tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$

$f(x) = x \times 5^{3x} \Rightarrow f(x) = x \times e^{3xln5}$. Ainsi :

$f'(x) = (1 + 3xln5)e^{3xln5}$ et $f''(x) = (2 + 3xln5)3ln5e^{3xln5}$

$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$

$\Leftrightarrow (2 + 3xln5)3ln5e^{3xln5} + a(1 + 3xln5)e^{3xln5} + bx \times e^{3xln5} = 0$

$\Leftrightarrow (2 + 3xln5)3ln5 + a(1 + 3xln5) + bx = 0$

$\Leftrightarrow 6ln5 + x(3ln5)^2 + a + 3axln5 + bx = 0$

$\Leftrightarrow x[(3ln5)^2 + 3aln5 + b] + a + 6ln5 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} (3ln5)^2 + 3aln5 + b = 0 \\ a + 6ln5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (3ln5)^2 \\ a = -6ln5 \end{cases} \Leftrightarrow$

D'où les réels a et b sont tels que : $a = -6ln5$ et $b = (3ln5)^2$

2) En déduisons une primitive de f sur $\mathbb{R}$

Pour cela, déterminons la fonction f en résolvant l'équation différentielle :

$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) - 6ln5f'(x) + (3ln5)^2f(x) = 0$

$f''(x) - 6ln5f'(x) + (3ln5)^2f(x) = 0$

(E.C) : $r^2 - 6ln5r + (3ln5)^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 0$. $(\Delta = 0)$. Alors $r_1 = r_2 = r_0 = 3ln5$

$\Rightarrow f(x) = (C_1x + C_2)e^{r_0x} = (C_1x + C_2)e^{3xln5}$. Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

Alors si $f(x) = (C_1x + C_2)e^{3xln5} = C_1xe^{3xln5} + C_2e^{3xln5}$

Posons $A(x) = C_1xe^{3xln5}$ et $B(x) = C_2e^{3xln5}$ puis cherchons une primitive de A et B.

Pour : $\boldsymbol{A(x) = C_1xe^{3xln5}}$

Posons : $u(x) = C_1 x$ => $u'(x) = C_1$

$v'(x) = e^{3x\ln 5}$ => $v(x) = \frac{1}{3\ln 5} e^{3x\ln 5}$

=> $A(x) = \left[\frac{C_1 x}{3\ln 5} e^{3x\ln 5}\right] - \int \frac{C_1}{3\ln 5} e^{3x\ln 5} \mathrm{d}x = \left[\frac{C_1 x}{3\ln 5} e^{3x\ln 5}\right] - \frac{C_1}{3\ln 5} \int e^{3x\ln 5} \mathrm{d}x$

$= \left[\frac{C_1 x}{3\ln 5} e^{3x\ln 5}\right] - \frac{C_1}{3\ln 5}\left[\frac{1}{3\ln 5} e^{3x\ln 5}\right] = \left[\frac{C_1 x}{3\ln 5} e^{3x\ln 5}\right] - \left[\frac{C_1}{(3\ln 5)^2} e^{3x\ln 5}\right]$

$= \left[\frac{C_1 x}{3\ln 5} e^{3x\ln 5} - \frac{C_1}{(3\ln 5)^2} e^{3x\ln 5}\right] = \frac{C_1 x}{3\ln 5} e^{3x\ln 5} - \frac{C_1}{(3\ln 5)^2} e^{3x\ln 5}$

=> $A(x) = \frac{C_1 x}{3\ln 5} e^{3x\ln 5} - \frac{C_1}{(3\ln 5)^2} e^{3x\ln 5}$

Pour : $\boldsymbol{B(x) = C_2 e^{3x\ln 5}}$

Si $B(x) = C_2 e^{3x\ln 5}$ alors la primitive de B est : $\frac{C_2}{3\ln 5} e^{3x\ln 5}$

D'où $F(x) = \frac{C_1 x}{3\ln 5} e^{3x\ln 5} - \frac{C_1}{(3\ln 5)^2} e^{3x\ln 5} + \frac{C_2}{3\ln 5} e^{3x\ln 5} = \frac{e^{3x\ln 5}}{3\ln 5}\left(C_1 x - \frac{C_1}{3\ln 5} + C_2\right) + k$

6 Déterminons la solution f des équations différentielles données, dont la courbe (C) vérifie les conditions données suivantes :

<u>NB :</u> Il est important et nécessaire de connaître que :

- La courbe **(Cf)** passe par le point $\boldsymbol{A}\binom{x_0}{y_0}$ si et seulement $\boldsymbol{f(x_0) = y_0}$.
- La courbe **(Cf)** admet au point $\boldsymbol{A}\binom{x_0}{y_0}$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses c'est-à-dire l'axe ox si et seulement si $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$.
- La courbe **(Cf)** admet au point $\boldsymbol{A}\binom{x_0}{y_0}$ une tangente parallèle à la droite **(D)** d'équation : $\boldsymbol{y = ax + b}$ si et seulement si $\boldsymbol{f'(x_0) = a}$.
- La courbe (Cf) admet au point $\boldsymbol{A}\binom{x_0}{y_0}$ une tangente de coefficient directeur $\boldsymbol{k}$ si et seulement si $\boldsymbol{f'(x_0) = k}$.

1) $y' - 3y = 0$; (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.

$y' - 3y = 0$ => $S = f(x) = ke^{3x}$

(C) admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$ si et seulement si $f'(0) = 1$ avec $f'(x) = 3ke^{3x}$

Alors $f'(0) = 1 \Leftrightarrow 3ke^0 = 1 \Leftrightarrow 3k = 1$ => $k = \frac{1}{3}$. D'où $f(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$

2) $2y' - y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées$(2 \ ; e)$.

$2y' - y = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{1}{2} y = 0$ => $S = f(x) = ke^{\frac{1}{2}x}$

(C) passe par le point de coordonnées$(2 \ ; e)$ si et seulement si $f(2) = e$

$f(2) = e \Leftrightarrow ke^{\frac{1}{2}\times 2} = e \Leftrightarrow ke = e$ => $k = 1$. D'où $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

3) $y'' + 2y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $(0 \ ; 0)$ et admet la droite d'équation $y = x$ comme tangente en ce point.

$y'' + 2y = 0$. Ici $w^2 = 2$ => $w = \sqrt{2}$

Alors $S = f(x) = C_1 coswx + C_2 sinwx = C_1 cos\sqrt{2}x + C_2 sin\sqrt{2}x$ avec $(C_1 \ ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

(C) passe par le point de coordonnées $(0 \ ; 0) \Leftrightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$

(C) admet la droite d'équation $y = x$ comme tangente au point$(0 \ ; 0)$ => $f'(0) = 1$.
Avec $f'(x) = -C_1\sqrt{2}sin\sqrt{2}x + C_2\sqrt{2}cos\sqrt{2}x$

$f'(0) = 1 \Leftrightarrow C_2\sqrt{2} = 1$ => $C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D'où $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}sin\sqrt{2}x$

4) $y'' - 4y' + 4y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $(0 \ ; 1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

$y'' - 4y' + 4y = 0$

(E.C) : $r^2 - 4r + 4 = 0$ => $\Delta = 0$. $(\Delta = 0)$. Alors $r_1 = r_2 = r_0 = \frac{4}{2} = 2$

=> S = $f(x)$ = $(C_1x + C_2)e^{r_0x} = (C_1x + C_2)e^{2x}$. Avec $(C_1 \ ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

(C) passe par le point de coordonnées $(0 \ ; 1)$ => $f(0) = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1$

(C) admet au point$(0 \ ; 1)$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si :

$f'(0) = 0$. Car l'axe des abscisses a pour équation $y = 0$ et $f'(x) = (2C_1x + C_1 + 2C_2)e^{2x}$

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 + 2C_2 = 0$. Or $C_2 = 1$ alors $C_1 + 2 = 0$ => $C_1 = -2$

D'où $f(x) = (-2x + 1)e^{2x}$

5) $y'' - 3y' + 2y = 0$; (C) passe par le point coordonnées ($ln2$; 0)et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -4

(E.C) : $r^2 - 3r + 2 = 0$ => $\Delta = 1$. $(\Delta > 0)$. Alors $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$

=> $S = f(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$ => $S = f(x) = C_1e^{x} + C_2e^{2x}$ Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

(C) passe par le point coordonnées ($ln2$; 0) => $f(ln2) = 0 \Leftrightarrow C_1e^{ln2} + C_2e^{2ln2} = 0 \Leftrightarrow$

$C_1e^{ln2} + C_2e^{ln4} = 1 \Leftrightarrow 2C_1 + 4C_2 = 0 \Leftrightarrow C_1 + 2C_2 = 0$ **(1)**

(C) admet au point ($ln2$; 0) une tangente de coefficient directeur -4 => $f'(ln2) = -4$

Avec $f'(x) = C_1e^{x} + 2\,C_2e^{2x}$

$f'(ln2) = -4 \Leftrightarrow C_1e^{ln2} + 2\,C_2e^{2ln2} = -4 \Leftrightarrow C_1e^{ln2} + 2\,C_2e^{ln4} = -4 \Leftrightarrow 2C_1 + 8\,C_2 = -4$

$\Leftrightarrow C_1 + 4\,C_2 = -2$ **(2)**

Formons ainsi le système avec les équations **(1)** et **(2) :**

$$\begin{cases} C_1 + 2C_2 = 0 \\ C_1 + 4\,C_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + 2C_2 = 0 \\ -C_1 - 4\,C_2 = 2 \end{cases}$$

=> $-2C_2 = 2$ => $C_2 = -1$

En remplaçant $C_2 = -1$ par sa valeur dans l'équation **(1),** on a : $C_1 = 2$

D'où $f(x) = 2e^{x} - e^{2x}$

6) $y'' - 2y + 2y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{4}\ ; 0\right)$ et sa tangente au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

(E.C) : $r^2 - 2r + 2 = 0$ => $\Delta = -4 = 4i^2$. $(\Delta < 0)$.

$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$

=> $\alpha = 1$ et $\beta = -1$

$r_2 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$

Où α et β désignent respectivement les parties réelles et imaginaires des solutions r_1 et r_2

Et S $= f(x) = (C_1cos\beta x + C_2sin\beta x)e^{\alpha x} = (C_1cosx - C_2sinx)e^{x}$. Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

(C) passe par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{4}\ ;0\right)$ => $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}C_2\right)e^{\frac{\pi}{4}} = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{\sqrt{2}}{2}C_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}C_2 = 0 \ \Leftrightarrow C_1 - C_2 = 0$ **(1)**

(C) admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à l'axe des abscisses => $'(0) = 0$.

Avec $f'(x) = (C_1 cosx + \ C_2 cosx + \ C_2 sinx - C_1 sinx)e^x$.

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 0$ **(2)**

Formons ainsi le système avec les équations **(1)** et **(2) :**

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

=> $2C_1 = 0$ => $C_1 = 0$ et $C_2 = 0$

D'où $f(x) = 0$

Equations différentielles avec second membre.

7 Soient les équations différentielles (E) : $y' + 2y = x^2$ et (E′) : $y' + 2y = 0$

1) Déterminons une fonction polynôme g, de degré deux, solution de (E).

Soit $g(x) = ax^2 + bx + c$ ce polynôme de degré deux solution de (E) telque :

$g'(x) + 2g(x) = x^2 \Leftrightarrow (2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c\ ) = x^2 \ \Leftrightarrow$

$2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c\ = x^2 \ \Leftrightarrow 2ax^2 + x(2a + 2b) + b + 2c = x^2$

Par identification on a :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$$. D'où $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

2) Démontrons qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation (E′)

<u>NB</u> :

Montre que $\Leftrightarrow B$, revient à montré que $\begin{cases} A => B \\ \quad et \\ B => A \end{cases}$

Ainsi pour Montre qu'une fonction f est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$ si et seulement si $f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$, on montre que :

$$\begin{cases} f \text{est solution de l}'\text{équation } (\boldsymbol{E}) => \ f-g \ \text{ est solution de } (\boldsymbol{E'}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad et \\ f-g \ \text{ est solution de } (\boldsymbol{E'}) => f \text{ est solution de l}'\text{équation } (\boldsymbol{E}) \end{cases}$$

- Montrons que f est solution de l'équation $(\boldsymbol{E}) \ => \ f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$
  - f est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$ si et seulement si $f'(x)+2f(x) = x^2$ **(1)**
  - g est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$ si et seulement si $g'(x)+2g(x) = x^2$ **(2)**

Effectuons ainsi la différence des relations **(1)** et **(2)** :

(1) – (2) : $[f'(x)-g'(x)]+2[f(x)-g(x)] = x^2-x^2$

$\Leftrightarrow (f-g)'(x)+2(f-g)(x) = 0 =>$ $f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$

D'où f est solution de l'équation $(\boldsymbol{E}) \ => \ f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$

- Montrons que $f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'}) => f$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$

Si $f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$ alors on a : $(f-g)'(x)+2(f-g)(x) = 0 \Leftrightarrow$

$[f'(x)-g'(x)]+2[f(x)-g(x)] = 0 \Leftrightarrow f'(x)-g'(x)+2f(x)-2g(x) = 0 \Leftrightarrow$

$f'(x)+2f(x) = g'(x)+2g(x)$. Avec $g(x) = \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ et $g'(x) = x-\frac{1}{2}$.

Alors $f'(x)+2f(x) = g'(x)+2g(x) \Leftrightarrow f'(x)+2f(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)$

$\Leftrightarrow f'(x)+2f(x) = x^2$

D'où $f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'}) => f$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$

<u>**Conclusion :**</u> puisque $\begin{cases} f \text{est solution de l}'\text{équation } (\boldsymbol{E}) => \ f-g \ \text{ est solution de } (\boldsymbol{E'}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad et \\ f-g \ \text{ est solution de } (\boldsymbol{E'}) => f \text{ est solution de l}'\text{équation } (\boldsymbol{E}) \end{cases}$

Alors une fonction f est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$ si et seulement si $f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$**.** (Ce qu'il fallait Démontre).

3) Résolvons l'équation (E′).

(E′) : $y' + 2y = 0 \Rightarrow S = ke^{-2x}$

4) En déduisons l'ensemble solution de l'équation (E).

On sait que $f(x) - g(x)$ est solution de (E′).

- De même ke^{-2x} est solution de (E′).

Par identification des deux solutions, on a : $f(x) - g(x) = ke^{-2x} \Rightarrow f(x) = ke^{-2x} + g(x)$.

Or $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. Alors $f(x) = ke^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

8 Soient les équations différentielles (E) et (E′) telles que :

(E) : $y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$ et (E′) : $y'' + 2y' + y = 0$

1) Déterminons une fonction polynôme g, de degré deux, solution de (E).

Soit $g(x) = ax^2 + bx + c$ ce polynôme de degré deux solution de (E) telque :

$g''(x) + 2g'(x) + g(x) = x^2 + 2x - 2 \Leftrightarrow$

$(2a) + 2(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = x^2 + 2x - 2 \Leftrightarrow$

$2a + 4ax + 2b + ax^2 + bx + c = x^2 + 2x - 2 \Leftrightarrow$

$ax^2 + x(4a + b) + 2a + 2b + c = x^2 + 2x - 2$

Par identification on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 2 \\ 2a + 2b + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$$. D'où $g(x) = x^2 - 2x$

2) Démontrons qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation (E′)

<u>NB</u> :

Montre que $\Leftrightarrow B$, revient à montré que $\begin{cases} A \Rightarrow B \\ \quad et \\ B \Rightarrow A \end{cases}$

Ainsi pour Montre qu'une fonction f est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$ si et seulement si $f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$, on montre que

$$\begin{cases} f \text{ est solution de l'équation } (\boldsymbol{E}) \Rightarrow f-g \text{ est solution de } (\boldsymbol{E'}) \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad et \\ f-g \text{ est solution de } (\boldsymbol{E'}) \Rightarrow f \text{ est solution de l'équation } (\boldsymbol{E}) \end{cases}$$

- Montrons que f est solution de l'équation $(\boldsymbol{E}) \Rightarrow f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$

f est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$ si et seulement si $f''(x)+2f'(x)+f(x)=x^2+2x-2$ **(1)**

g est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$ si et seulement si $g''(x)+2g'(x)+g(x)=x^2+2x-2$ **(2)**

Effectuons ainsi la différence des relations **(1)** et **(2)** :

(1) − (2) : $[f''(x)-g''(x)]+2[f'(x)-g'(x)]+[f(x)-g(x)]=0$

$\Leftrightarrow (f-g)''(x)+2(f-g)'(x)+(f-g)(x)=0 \Rightarrow f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$

D'où f est solution de l'équation $(\boldsymbol{E}) \Rightarrow f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$

- Montrons que $f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'}) \Rightarrow f$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$

Si $f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$ alors on a : $(f-g)'(x)+2(f-g)(x)=0 \Leftrightarrow$

$[f''(x)-g''(x)]+2[f'(x)-g'(x)]+[f(x)-g(x)]=0$

$\Leftrightarrow f''(x)-g''(x)+2f'(x)-2g'(x)+f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow$

$f''(x)+2f'(x)+f(x)-g''(x)-2g'(x)-g(x)=0 \quad \Leftrightarrow$

$f''(x)+2f'(x)+f(x)=g''(x)+2g'(x)+g(x)$

Avec $g(x)=x^2-2x$; $g'(x)=2x-2$ et $g''(x)=2$

Alors $f''(x)+2f'(x)+f(x)=g''(x)+2g'(x)+g(x) \Leftrightarrow$

$f''(x)+2f'(x)+f(x)=(2)+2(2x-2)+x^2-2x \Leftrightarrow$

$f''(x)+2f'(x)+f(x)=x^2+2x-2$

D'où $f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'}) \Rightarrow f$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$

Conclusion : puisque $\begin{cases} f \text{ est solution de l'équation } (\boldsymbol{E}) \Rightarrow f - g \text{ est solution de } (\boldsymbol{E'}) \\ \quad et \\ f - g \text{ est solution de } (\boldsymbol{E'}) \Rightarrow f \text{ est solution de l'équation } (\boldsymbol{E}) \end{cases}$

Alors une fonction f est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$ si et seulement si $f - g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$. (Ce qu'il fallait Démontre).

3) a- Résolvons l'équation (E′).

(E′) : $y'' + 2y' + y = 0$

(E.C) : $r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0$. $(\Delta = 0)$. Alors $r_1 = r_2 = r_0 = -1$

=> $S = (C_1x + C_2)e^{r_0x} = (C_1x + C_2)e^{-x}$. Avec $(C_1\,;\,C_2) \in \mathbb{R}^2$

b- En déduisons l'ensemble solution de l'équation (E).

On sait que $f(x) - g(x)$ est solution de (E′).

- De même $(C_1x + C_2)e^{-x}$ est solution de (E′).

Par identification des deux solutions, on a : $f(x) - g(x) = (C_1x + C_2)e^{-x} \Rightarrow$

$f(x) = (C_1x + C_2)e^{-x} + g(x)$. Or $g(x) = x^2 - 2x$

Alors $f(x) = (C_1x + C_2)e^{-x} + x^2 - 2x$.

9 1) Résolvons l'équation différentielle d'inconnue f tel que : $x^2f'(x) + 2xf(x) - 1 = 0$.

$x^2f'(x) + 2xf(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 \times f(x)\right)' - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 \times f(x)\right)' = 1 \Leftrightarrow$

$\int \left(x^2 \times f(x)\right)' dx = \int 1dx \Leftrightarrow x^2 \times f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{x^2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$

2) Soit l'équation (E): $x^2f'(x) - 2xf(x) + f^2(x) = 0$.

On pose $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

a-Montrons que l'équation (E) est équivalent à $x^2g'(x) + 2xg(x) = 1$.

$g(x) = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{g(x)}$ et $f'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$

En remplaçant $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ et $f'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ par leur valeur dans l'équation (E), on a :

(E): $x^2\left[-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right]-2x\left[\frac{1}{g(x)}\right]+\left[\frac{1}{g(x)}\right]^2=0 \Leftrightarrow -\frac{x^2g'(x)}{g^2(x)}-\frac{2x}{g(x)}+\frac{1}{g^2(x)}=0 \Leftrightarrow$

$\frac{-x^2g'(x)-2xg(x)+1}{g^2(x)}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2g'(x)+2xg(x)-1}{g^2(x)}=0 \Leftrightarrow x^2g'(x)+2xg(x)-1=0.$

D'où l'équation (E) est équivalent à $x^2g'(x)+2xg(x)=1$. (Ce qu'il fallait Démontre).

b-Déduisons-en la résolution de l'équation (E).

D'après la question 1), on a : $f(x)=\frac{1}{x}$ et D'après la question 2)-a , on a : $f(x)=\frac{1}{g(x)}$

Par identification, on a : $\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow g(x)=x$

D'où la solution de l'équation (E) est $g(x)=x$

10 On se propose de Résous le problème suivant : Trouve une fonction f définie et dérivable sur$]0\,;+\infty[$, s'annulant pour $x=1$ et vérifiant la propriété : pou tout $x>0$, on a :

(E) : $x\times f'(x)-3\times f(x)=3lnx.$

1) Trouvons toutes les fonctions polynômes P du 3$^{\text{ième}}$ degré telles que, pour tout réel x, on ait

$x\times P'(x)-3\times P(x)=0.$

Soit $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ où a ; b ; c e d sont tous des réels ce polynômes de degré 3 tel que : $P'(x)=3ax^2+2bx+c$.

$x\times P'(x)-3\times P(x)=0 \Leftrightarrow x(3ax^2+2bx+c)-3(ax^3+bx^2+cx+d)=0 \Leftrightarrow$

$3ax^3+2bx^2+cx-3ax^3-3bx^2-3cx-3d=0 \Leftrightarrow -bx^2-2cx-3d=0$

Par identification, on a : $b=0$; $c=0$ et $d=0$

D'où $\forall\, x\in\mathbb{R}$; on a : $P(x)=ax^3$. $a\in\mathbb{R}^*$.

2) Soit une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ telle que $f(1)=0$ et soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par la relation $f(x)=x^3\times h(x)$

a-Calculons h (1) et Calcule $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et $h(x)$.

$f(x)=x^3\times h(x) \Rightarrow h(x)=\frac{f(x)}{x^3}$ et $h(1)=\frac{f(1)}{1^3}=\frac{0}{1^3}=0$

$f(x)=x^3\times h(x) \Rightarrow f'(x)=3x^2h(x)+x^3h'(x)$

b-Démontrons que f vérifie (E) si et seulement si$\forall\ x \in\ ]\ 0\ ;\ +\infty[\ ;\ h'(x) = \frac{3}{x^4}\,lnx$

(E) : $x \times f\ '(x) - 3 \times f(x)\ = 3lnx$.

$f(x) =\ x^3 \times h(x)$ et $f^{'}(x) = 3x^2h(x) + x^3h'(x)$

Remplaçons $f(x)$ et $f^{'}(x)$ par leur valeur dans l'équation (E), on a :

$x[3x^2h(x) + x^3h'(x)]- 3[x^3 \times h(x)]\ = 3lnx \Leftrightarrow 3x^3h(x) + x^4h'(x) - 3x^3h(x) = 3lnx$

$\Leftrightarrow\ \ x^4h^{'}(x) = 3lnx$ => $h'(x) = \frac{3}{x^4}\,lnx$

D'où f vérifie (E) si et seulement si$\forall\ x \in\ ]\ 0\ ;\ +\infty[\ ;\ h'(x) = \frac{3}{x^4}\,lnx$ (Ce qu'il fallait Démontre).

c-On suppose que f vérifie (E).

Démontrons que h est définie sur $]\ 0\ ;\ +\infty[$, par $h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4}\ lnt\ dt$

$h\ (1) = 0$ et $h'(x) = \frac{3}{x^4}\,lnx$. Alors h est la primitive de $h^{'}: x \to \frac{3}{x^4}\,lnx$ qui s'annule en 1.

D'où h est définie sur $]\ 0\ ;+\infty[$, par $h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4}\ lnt\ dt$

d-Déterminons $h(x)$ en fonction de x par une intégration par partie

$h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4}\ lnt\ dt$

Posons : $u(t) = lnt$ => $u(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = \frac{3}{t^4}$ => $u(t) = -\frac{1}{t^3}$

=> $h(x) = \left[-\frac{lnt}{t^3}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^4}dt = \left[-\frac{lnt}{t^3}\right]_1^x + \left[-\frac{1}{3t^3}\right]_1^x = \left[-\frac{lnt}{t^3} - \frac{1}{3t^3}\right]_1^x$

=> $h(x) = -\frac{lnx}{x^3} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3}$

e-Démontrons qu'il existe une unique fonction f solution du problème posé et Donne l'expression de $f(x)$.

$f(x) =\ x^3 \times h(x)$. Or $h(x) = -\frac{lnx}{x^3} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3}$

=> $f(x) =\ x^3\left(-\frac{lnx}{x^3} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3}\right) = -lnx - \frac{1}{3} + \frac{x^3}{3}$

Puisque h est unique alors f est unique.

11 On se propose de Résous l'équation différentielle : (E_1) : $y' - 2y = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$

1) Déterminons la solution de l'équation différentielle (E_2) : $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.

$y' - 2y = 0 \Rightarrow S = y(x) = ke^{2x}$. Or $y(0) = 1 \Leftrightarrow ke^{0} = 1 \Rightarrow k = 1$

D'où $y(x) = e^{2x}$.

2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = ln2$ et soit g la fonction définie par la relation : $f(x) = e^{2x} \times g(x)$.

a- Calculons $g(0)$

$f(x) = e^{2x} \times g(x) \Leftrightarrow g(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}} \Rightarrow g(0) = \frac{f(0)}{e^{0}} = \frac{ln2}{1} = ln2$

b- Calculons $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$.

$g(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}} \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x) \times e^{2x} - 2e^{2x} \times f(x)}{e^{4x}} = \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}$

c- Démontrons que f est solution de (E_1) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

(E_1) : $y' - 2y = \frac{2}{1+e^{-2x}}$

f est solution de (E_1) si et seulement si $f' - 2f = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$.

Or $f(x) = e^{2x}g(x)$ et $f'(x) = 2e^{2x}g(x) + e^{2x}g'(x) = e^{2x}[g'(x) + 2g(x)]$

$f' - 2f = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$. $\Leftrightarrow$ $e^{2x}[g'(x) + 2g(x)] - 2e^{2x}g(x) = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$ $\Leftrightarrow$

$e^{2x}g'(x) + 2e^{2x}g(x) - 2e^{2x}g(x) = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$ $\Leftrightarrow$ $e^{2x}g'(x) = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$ $\Leftrightarrow$

$g'(x) = -\frac{2}{(1+e^{-2x})e^{2x}} \Rightarrow g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

D'où f est solution de (E_1) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

d- En déduisons l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de (E).

D'après le question précédente, $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+\,e^{-2x}}$ $\Leftrightarrow$ $\int g'(x)\ dx = \int \frac{-2e^{-2x}}{1+\,e^{-2x}} dx$ $\Leftrightarrow$

$g(x) = ln(1\ +\ e^{-2x}) + k$. Or $g(0) =\ ln2$

$\Leftrightarrow ln(1\ +\ e^{0}) + k =\ ln2 \Leftrightarrow ln2 + k =\ ln2 \Rightarrow k = 0$. D'où $g(x) = ln(1\ +\ e^{-2x})$

12 Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel différent de 1.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = ay + by^n$

1) On pose sur $\mathbb{R}$: $Z = y^{1\,-\,n}$ (avec $y > 0$).

Déterminons une équation différentielle satisfaite par Z et la Résous.

La fonction Z est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car y l'est) et :

$Z' = (1-n)y'y^{\,-\,n}$. Or $y' = ay + by^n$

$\Rightarrow Z^{'} = (1-n)(ay+by^n)y^{\,-\,n} = (1-n)(ay+by^n)y^{\,-\,n} = (1-n)(ay^{1-n} + by^0)$

$= (1-n)(ay^{1-n}+b)$. Or $Z = y^{1\,-\,n}$

$\Rightarrow Z^{'} = (1-n)(aZ+b) \Leftrightarrow Z^{'} = a(1-n)Z + b(1-n)$

$\Rightarrow Z^{'} = ke^{(1-n)ax} - \frac{b}{a}$

2) En déduisons les solutions, strictement positives, de (E) sur $\mathbb{R}$.

Puisque l'on a posé $= y^{1\,-\,n}$, alors $y = Z^{\frac{1}{n-1}}$

D'où $\forall\, x\ \in \mathbb{R};\ y(x) = \left[ke^{(1-n)ax} - \frac{b}{a}\right]^{\frac{1}{n-1}}$

Lorsque $n = 0$, on récupère l'équation différentielle $y^{'} = ay + b$ avec ses solutions :

$y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$. Cette équation est appelée : équation de Bernoulli.

Equations différentielles dans les cas pratiques.

13 Un tronc de baobab $\boldsymbol{y}$ grossi avec une vitesse proportionnelle à lui-même.

On sait de plus que ce tronc double de volume tous les 10 ans.

Déterminons le temps nécessaire pour tripler de volume.

Par hypothèse, on a : $y' - ay = 0$ où a est le coefficient de proportionnalité.

Notons t le temps (en années).

D'autre part, l'équation différentielle $y' - ay = 0$ a pour solution : $y(t) = ke^{at}.(k \in \mathbb{R}^*)$

Puisque le tronc de baobab double de volume tous les 10 ans, alors on a :

$y(t+10) = 2y(t) \Leftrightarrow ke^{a(t+10)} = 2ke^{at} \Leftrightarrow e^{a(t+10)} = 2e^{at} \Leftrightarrow e^{(at+10a)} = 2e^{at}$

$\Leftrightarrow e^{at} \times e^{10a} = 2e^{at} \Leftrightarrow e^{10a} = 2 \Rightarrow 10a = ln2 \Rightarrow a = \frac{ln2}{10}$

D'où $y(t) = ke^{\frac{ln2}{10}t}$ avec $(k \in \mathbb{R}^*)$

Cherchons maintenant le temps T nécessaire pour tripler de volume.

$y(t+T) = 3y(t) \Leftrightarrow ke^{a(t+T)} = 3ke^{at} \Leftrightarrow e^{a(t+T)} = 3e^{at} \Leftrightarrow e^{(at+aT)} = 3e^{at}$

$\Leftrightarrow e^{at} \times e^{aT} = 3e^{at} \Leftrightarrow e^{aT} = 3 \Rightarrow aT = ln3 \Rightarrow T = \frac{ln3}{a}$. Or $a = \frac{ln2}{10}$

$\Rightarrow T = \frac{ln3}{\frac{ln2}{10}} = \frac{10ln3}{ln2} \approx 15{,}85$ à 10^{-2} près.

Il faut donc attendre 15 ans, 10 mois et 6 jours (aux jours près) pour que le volume du tronc de baobab puisse tripler de volume.

14 Lors du tremblement de terre qui a secoué la centrale nucléaire de FUKUSHIMA au Japon, la teneur du nombre d'atome de radium $N(t)$ échappé à l'instant t est donné par la relation : $N'(t) = aN(t)$ et $N(0) = N_0$ où (t est exprimé en années).

De plus sa teneur en toxine triple chaque deux ans.

1) Déterminons l'expression de $N(t)$ en fonction de N_0 et t.

$N'(t) = aN(t) \Leftrightarrow N'(t) - aN(t) = 0$

Cette équation différentielle est donc sous la forme :

$y' - ay = 0$ qui a pour solution : $y(t) = ke^{at}.(k \in \mathbb{R}^*)$

Donc $N'(t) - aN(t) = 0 \Rightarrow N(t) = N_0e^{at}.(N_0 \in \mathbb{R}^*)$

2) Déterminons le temps au bout du quel la teneur du nombre d'atome de radium aura quadruplé.

Puisque la teneur en toxine triple chaque deux ans, alors on a :

$N(t+2) = 3N(t) \Leftrightarrow N_0 e^{a(t+2)} = 3N_0 e^{at} \Leftrightarrow e^{a(t+2)} = 3e^{at} \Leftrightarrow e^{(at\ +2a)} = 3e^{at}$

$\Leftrightarrow e^{at} \times e^{2a} = 3e^{at} \Leftrightarrow e^{2a} = 3 \Rightarrow 2a = ln3 \Rightarrow a = \frac{ln3}{2}$

D'où $N(t) = N_0 e^{\frac{ln3}{2}t}$ avec $(N_0 \in \mathbb{R}^*)$

Cherchons maintenant le temps T nécessaire pour quadrupler de teneur.

$N(t+T) = 4N(t) \Leftrightarrow N_0 e^{a(t+T)} = 4N_0 e^{at} \Leftrightarrow e^{a(t+T)} = 4e^{at} \Leftrightarrow e^{(at+aT)} = 4e^{at}$

$\Leftrightarrow e^{at} \times e^{aT} = 4e^{at} \Leftrightarrow e^{aT} = 4 \Rightarrow aT = ln4 \Rightarrow T = \frac{ln4}{a}$. Or $a = \frac{ln3}{2}$

$\Rightarrow T = \frac{ln4}{\frac{ln3}{2}} = \frac{2ln4}{ln3} \approx 3.$

Il faut donc attendre à peu près 3 ans, pour que la teneur du nombre d'atome de radium soit quadruplée.

15 Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à l'instant t, exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction numérique N à variable réelle t. La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre de microbes est la dérivée N' de cette fonction. On a constaté que : $N'(t) = -kN(t)$ où k est un coefficient réel strictement positif. On désigne par N_0 le nombre de microbes à l'instant $t = 0$

1°/ Déterminons $N(t)$ en fonction de N_0, k et t.

$N'(t) = -kN(t) \Rightarrow N(t) = Ce^{-kt}$.

D'autre part, $N(0) = Ce^0 = C = N_0$.

D'où $N(t) = N_0 e^{-kt}$.

2°/ Déterminons le nombre de microbes au bout de 1 heures si $N_0 = 1000$ et $k = 1$.

$N(1) = 1000e^{-1} \approx 368$

Alors le nombre de microbes au bout de 1 heures est de 368 individus.

3°/ Soit T la période de reproduction du nombre de microbes, c'est-à-dire le temps au bout duquel le nombre d'atome a été divisé par 2. Montrons que $e^{kT} = 2$.

Si, après un temps T, le nombre de microbes a été divisé par 2, on peut écrire $N(t) = \frac{N_0}{2}$.

On a donc : $N(t) = N_0 e^{-kT} = \frac{N_0}{2} \Leftrightarrow e^{-kT} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{kT}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{kT} = 2.$

4°/ Déterminons la période de reproduction T sachant que $k = 6{,}66 \bullet 10^{-5}$.

$e^{kT} = 2 \Leftrightarrow kT = ln2 \quad \Rightarrow T = \frac{ln2}{k}$

Si $k = 6{,}66 \bullet 10^{-5}$, on obtient $T \approx 10407{,}6$ heures.

16 Une substance se dissout dans l'eau avec une vitesse de dissolution proportionnelle à la quantité non dissoute.

A l'instant $t = 0$ (en minutes), on place 20 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau. Sachant que les 10 premiers grammes se dissolvent en 5 minutes.

1) Formons l'équation différentielle expliquant cette situation en fonction de $f'(t)$ et de $f(t)$.

Comme la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $f'(t) = a\big(20 - f(t)\big)$.

Les solutions sont de la forme, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $f(t) = ke^{-at} + 20$.

2) En déduisons une expression de la quantité dissoute $f(t)$, en grammes, en fonction de t.

A l'instant initial, il n'ya pas encore de la quantité dissoute donc :

$$f(0) = 0$$

$$\Rightarrow C + 20 = 0$$

$$\Rightarrow C = -20$$

Comme les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes, on a :

$$f(5) = 10$$

$$\Rightarrow -20e^{-5a} + 20 = 10$$

$$\Rightarrow e^{-5a} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{ln2}{5} \approx 0{,}14 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

On a donc, pour $t \in \mathbb{R}_+$: $f(t) = 20\left(1 - e^{-\frac{ln2}{5}t}\right) = 20\left(1 - 2^{-\frac{t}{5}}\right)$

17 Le taux d'alcoolisme $f(t)$ (en gL^{-1}) d'une personne ayant absorbé, en jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie, sur $\mathbb{R}_+$, l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = ae^{-t}$.

Où t est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures), et a une constante qui dépend des conditions expérimentales.

1) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $g(t) = f(t)e^t$.

Démontrons que g est une fonction affine.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car les fonctions f et exponentielles le sont.

Alors $g'(t) = f'(t)e^t + f(t)e^t = \left(f'(t) + f(t)\right)e^t$

Puisque f est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$: $g'(t) = a$. D'où $g(t) = at + b$.

Conclusion : La fonction g est bien affine sur $\mathbb{R}_+$.

2) Exprimons $f(t)$ en fonction de t et de a.

On sait que : $g(t) = f(t)e^t$ => $f(t) = \frac{g(t)}{e^t} = g(t)e^{-t}$

Or à l'instant $t = 0$, l'alcool n'est pas encore dans le sang, donc $f(0) = 0$

=> $be^{-t} = 0$ => $b = 0$

D'où $f(t) = ate^{-t}$.

3) Dans cette question, on pose que $a = 5$.

a-Etudions les variations de f et tracer sa courbe.

$f(t) = ate^{-t}$. Puis que $a = 5$. Alors $f(t) = 5te^{-t}$ et $f'(t) = 5e^{-t}(1 - t)$

$5e^{-t} > 0$ .Alors le signe de $f'(t)$ dépend du signe de $1 - t$.

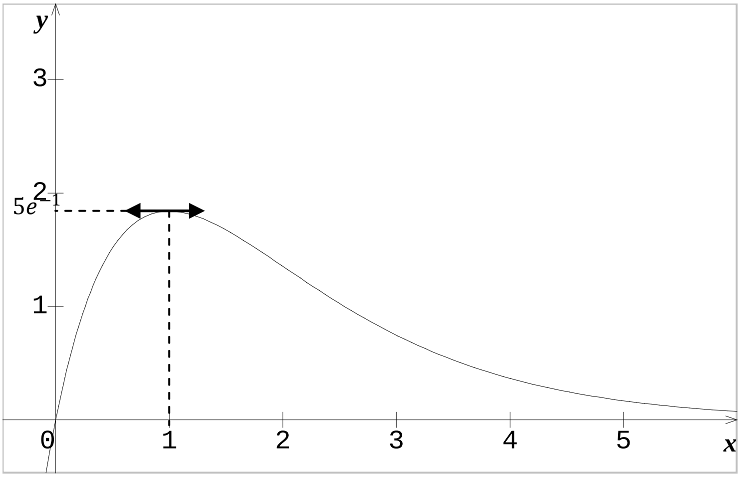
Posons $1 - t = 0$ => $t = 1$

D'où le tableau de variation de $f(t)$ est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$5e^{-1}$	$\searrow$	0

D'après le tableau :

$\forall\, x \in [0\,;1]$; f est croissante et $\forall\, x \in [1\ ;\ +\infty[$; f est décroissante.



b-Déterminons graphiquement le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout du quel il est atteint.

Graphiquement le taux d'alcoolémie maximal est donné par : $5e^{-1} \approx 1{,}83$ gL^{-1} et cette valeur est atteinte à l'instant $t = 1\ min$

c-Donnons une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à 0,5 en gL^{-1} .

La valeur du délai T au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à 0,5 en gL^{-1} est obtenue en résolvant l'inéquation :$f(t) \leq 0{,}5$.

Résous algébrique l'inéquation :$f(t) \leq 0{,}5$ est pratiquement impossible, alors utilisons le théorème de la bijection sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

Pour tout $t \in\ [1\ ;\ +\infty[$; f est définie, continue et strictement décroissante, donc réalise une bijection de $[1\ ;\ +\infty[$ vers $[0\ ; 5e^{-1}]$.

Alors il existe une unique solution α sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Déterminons ainsi un encadrement de α en utilisant le graphique.

Traçons maintenant la droite $y = 0{,}5$ qui coupe la courbe dans l'intervalle $[3\ ; 4]$
(Voir figure)

D'où $\alpha\ \in [3\ ; 4]\ \Leftrightarrow 3 < \ \alpha < 4$.

Il faut donc 4 heures (à l'heure près par excès) pour pouvoir, par exemple, reprendre le volant.

18 Un bloc de métallique est déposé dans un four dont la température constante est de 1000°C.

La température θ est une fonction du temps t $(en\ heures)$ qui vérifie l'équation différentielle

(E): $\theta'(t) = k[1000 - \theta(t)]$; $k \in \mathbb{R}_+^*$.

1) On pose $y(t) = \theta(t) - 1000$.

Ecrivons une équation différentielle (F) satisfaite par y.

On a $y(t) = \theta(t) - 1000 \Rightarrow y'(t) = \theta'(t)$. Or $\theta'(t) = k[1000 - \theta(t)]$

=> $y'(t) = k[1000 - \theta(t)] = 1000k - k\theta(t)$. Or $\theta(t) = y(t) + 1000$

Donc $y'(t) = 1000k - k[y(t) + 1000]$

=> $y'(t) = 1000k - ky(t) - 1000k = -ky(t) \Leftrightarrow y'(t) + ky(t) = 0$

D'où $(\boldsymbol{F})$: $\boldsymbol{y'(t) + ky(t) = 0}$

2) Résolvons (F): $y'(t) + ky(t) = 0$

(F): $y'(t) + ky(t) = 0$

Ainsi la solution générale de (F) est : $t \mapsto y(t) = Ae^{-kt}$; avec $k \in \mathbb{R}$.

D'où $\boldsymbol{y(t) = Ae^{-kt}}$ avec $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$.

Résolvons (E): $\theta'(t) = k[1000 - \theta(t)]$

On sait que $y(t) = \theta(t) - 1000 \Rightarrow \theta(t) = y(t) + 1000 \Leftrightarrow \theta(t) = Ae^{-kt} + 1000$

Ainsi la solution générale de (E) est : $t \mapsto \theta(t) = Ae^{-kt} + 1000$; avec $k \in \mathbb{R}$.

D'où $\boldsymbol{\theta(t) = Ae^{-kt} + 1000}$; avec $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$.

3) En déduisons l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t uniquement.
   - Le bloc, initialement à 40°C est déposé dans le four au temps $t_0 = 0$.

=> $\theta(0) = 40 \Leftrightarrow Ae^0 + 1000 = 40 \Leftrightarrow A + 1000 = 40 \Rightarrow A = -960$

Donc $\theta(t) = -960e^{-kt} + 1000$

   - Sa température est de 160°C au bout d'une heure.

=> $\theta(1) = 160 \Leftrightarrow -960e^{-k} + 1000 = 160 \Leftrightarrow -960\, e^{-k} = -840$

$\Leftrightarrow e^{-k} = \frac{-840}{-960} \Leftrightarrow e^{-k} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow -k = ln\left(\frac{7}{8}\right)$

D'où l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t uniquement est :

$\theta(t) = -960 \ e^{tln\left(\frac{7}{8}\right)} + 1000$ ou $\theta(t) = -960 \ e^{-tln\left(\frac{8}{7}\right)} + 1000$

4) a- Calculons la température du bloc au temps $t = 3$ heures.

$\theta(3) = -960 \ e^{3ln\left(\frac{7}{8}\right)} + 1000 = -960 \times 0{,}7 + 1000 = 328°C$

D'où la température du bloc au bout de 3 heures est $328°C$.

b- Déterminons le temps T à partir duquel la température du bloc dépassera 500°C.

On a : $\theta(t) \geq 500 \Leftrightarrow -960 \ e^{tln\left(\frac{7}{8}\right)} + 1000 \geq 500 \Leftrightarrow e^{tln\left(\frac{7}{8}\right)} \leq \frac{500}{960}$

$\Leftrightarrow tln\left(\frac{7}{8}\right) \leq ln\left(\frac{500}{960}\right)$ => $t \geq \frac{ln\left(\frac{500}{960}\right)}{ln\left(\frac{7}{8}\right)}$ car $ln\left(\frac{7}{8}\right) < 0$ => $t \geq 5$. D'où $T = 5$ heures.

D'où la température du bloc dépassera 500°C au bout de 5 heures.

19 A l'instant $t = 0$, un corps à la température $\theta_0 = 60°C$ est placé dans l'air ambiant à la température $\theta_1 = 20°C$. Au bout de 10 $minutes$, la température du corps est 50°C.

Sa température à la date t exprimée en minutes est solution de l'équation différentielle :

$\frac{d\theta\,(t)}{dt} = -k[\theta(t) - \theta_1]$ où k est une constante réelle. On pose $y(t) = \theta(t) - \theta_1$.

1) a- Déterminons l'équation différentielle vérifiée par y

On sait que : $y'(t) = \theta'(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = -k[\theta(t) - \theta_1] = -k\theta(t) + k\theta_1$.

Or $y(t) = \theta(t) - \theta_1$ => $\theta(t) = y(t) + \theta_1$

Donc $y'(t) = -k\theta(t) + k\theta_1 \Leftrightarrow y'(t) = -k[y(t) + \theta_1] + k\theta_1 = -ky(t) - k\theta_1 + k\theta_1$

=> $y'(t) = -ky(t) \Leftrightarrow y'(t) + ky(t) = 0$

D'où l'équation différentielle vérifiée par y est : $y'(t) + ky(t) = 0$

b- Déterminons y.

La solution générale de y est : $y: t \mapsto y(t) = Ae^{-kt}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

c- En déduisons $\theta(t)$ en fonction de k.

On sait que $y(t) = \theta(t) - \theta_1 \Leftrightarrow \theta(t) = y(t) + \theta_1$. Or $y(t) = Ae^{-kt}$

=> $\theta(t) = Ae^{-kt} + \theta_1$. Or $\theta_1 = 20°C$

=> $\theta(t) = Ae^{-kt} + 20.$

D'où l'expression $\theta(t)$ en fonction de k est : $\boldsymbol{\theta(t) = Ae^{-kt} + 20.}$

d- Déterminons la constante k puis en déduisons l'expression définitive de $\theta(t)$.

- A l'instant $t = 0\ min$, on a : $\theta_0 = 60°C$
  => $\theta(0) = 60 \Leftrightarrow Ae^0 + 20 = 60 \Leftrightarrow A + 20 = 60$ => $A = 40$

  Donc $\theta(t) = 40e^{-kt} + 20$

- A l'instant $t = 10\ min$, on a : $\theta = 50°C$

  => $\theta(10) = 50 \Leftrightarrow 40e^{-10k} + 20 = 50 \Leftrightarrow 40e^{-10k} = 30 \Leftrightarrow e^{-10k} = \frac{30}{40}$

  $\Leftrightarrow e^{-10k} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow -10k = ln\left(\frac{3}{4}\right)$ => $-k = \frac{1}{10} ln\left(\frac{3}{4}\right)$

  D'où l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t est : $\boldsymbol{\theta(t) = 40e^{\frac{1}{10}ln\left(\frac{3}{4}\right)t} + 20}$

2) a- Déterminons l'instant au bout du quel la température du corps diminuera de moitié

La température du corps diminuera de moitié si $\theta(t) = 30 \Leftrightarrow 40e^{\frac{1}{10}ln\left(\frac{3}{4}\right)t} + 20 = 30$

$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{10}ln\left(\frac{3}{4}\right)t} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{10} ln\left(\frac{3}{4}\right) t = ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{10} ln\left(\frac{3}{4}\right) t = -ln4$

$\Leftrightarrow t = -\frac{10ln4}{ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 48\ min.$

D'où la température du corps diminuera de moitié au bout de 48 $minutes$.

b- Déterminons la température du corps au bout d'une heure

La température du corps au bout d'une heure c'est-à-dire au bout de 60 $minutes$ est :

$\theta(60) = 40e^{\frac{1}{10}ln\left(\frac{3}{4}\right)\times 60} + 20 \approx 27$

D'où au bout d'une heure, la température serait de 27°C.