Fonction Logarithme Népérien

OBJECTIFS :

Ce thème vise à :

• définir et étudier la fonction logarithme népérien

• mettre en place les primitives de fonction de la forme $\frac{u'}{u}$

Commentaires

La fonction In est nouvelle en terminale. Son introduction vient compléter et enrichir les fonctions étudiées à ce niveau.

Volume horaire : 8 heures

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
• Fonction logarithme népérien : - Définition, notation, propriétés, représentation graphique. - Limite de référence. - Primitives de $\frac{u'}{u}$ • Logarithme décimal : définition. •Dérivée des fonctions du type *In* o *u* et *In* o $\lvert u \rvert$.	• Résous des équations ou inéquations faisant intervenir la fonction logarithme népérien. •Détermine les primitives d'une fonction du type $\frac{u'}{u}$. • Etant donnée une fonction f faisant intervenir la fonction logarithme népérien : - Trouve les limites de f aux bornes de son ensemble de définition ; - Etudie les variations de f - Représenter graphiquement f.

Remarques et suggestions

La manière d'introduire la fonction logarithme népérien n'est pas imposée. Il y a plusieurs approches possibles :

• approche historique (comme dans le livre CIAM de TSM, page 239) ;

• approche avec la calculatrice (comme dans le livre CIAM, TSE page 82).

•approche avec l'utilisation des propriétés des primitives.

L'usage de la calculatrice renforce les possibilités d'étude de cette notion aussi bien pour effectuer des calculs que pour permettre de conjecturer des résultats.

La représentation graphique de la fonction logarithme népérien doit être connue des élèves car elle permet de reTrouve de nombreux résultats (ensemble de définition, variations, signe, limites, valeurs particulières, branches paraboliques).

La bijectivité de la fonction logarithme népérien permet d'introduire le **nombre e.**

Aucune étude des propriétés de la fonction logarithme décimal ne sera faite mais on l'Utilisea dans les exercices. La croissance "lente" de la fonction logarithme népérien (illustration de la branche parabolique) pourra être étayée avec des calculs numériques. Ce résultat sera réinvesti lors de l'étude des croissances comparées des fonctions logarithme, exponentielles et puissances.

1- Définition :

On appelle fonction Logarithme Népérien notée (***ln***), la primitive de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ qui prend la valeur 0 en 1 sur l'intervalle] 0 ; $+\infty$ [

2- Ensemble de définition des fonctions logarithmiques :

- Si $f(x) = ln x$ => Df =]0 ; +∞[
- Si $f(x) = ln(ax + b)$ => Df $= \{x/x \in \mathbb{R}; ax + b > 0\}$
- Si $f(x) = ln\,[u(x)]$ => Df $= \{x/x \in \mathbb{R}\,;\, u(x) > 0\}$
- Si $f(x) = ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)$ => Df $= \{x/x \in \mathbb{R}\,;\, \frac{u(x)}{v(x)} > 0\}$
- Si $f(x) = ln|u(x)|$ => Df $= \{x/x \in \mathbb{R}\,;\, u(x) \neq 0\}$

3- Propriétés Remarquables :

$\forall\, a > 0$ et $\forall\, b > 0$, on a les propriétés suivantes:

- **P$_1$** : $ln(a \times b) = ln(a) + ln(b)$ **P$_6$** : $ln\sqrt{a} = ln a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} ln a$
- **P$_2$** : $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln a - ln b$ **P$_7$** : $ln(a) = ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- **P$_3$** : $ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\, ln a$ **P$_8$** : $ln\, e^{a} = a$ et $e^{lna} = a$
- **P$_4$** : $ln(a)^{n} = n ln a$ **P$_9$** : $ln a = b \Leftrightarrow a = e^{b}$
- **P$_5$** : $ln e = 1$ et $ln 1 = 0$ **P$_{10}$** : $ln a = ln b \Leftrightarrow a = b$

P$_{11}$: $ln(a) \geq ln\,(b) \Leftrightarrow a \geq b$

4- Limites remarquables

$\lim\limits_{x \to 0} ln\, x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} ln\, x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} x\, ln\, x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^{n} ln\, x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{x^n} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln (x+1)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ (Nombre dérivé de la fonction ln $au\ point$ 1)

5- <u>Dérivées logarithmiques</u>:

La dérivée logarithmique d'une fonction u, est la dérivée de $ln|u|$

- $Si\ f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
- $Si\ f(x) = \ln|ax + b| \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{ax+b}$
- Si $f(x) = \ln(U(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- Si $f(x) = \ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{v'(x)}{v(x)}$
- Si $f(x) = \ln\left(U(x) \bullet v(x)\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)}$.
- Si $f(x) = \ln [u(x)]^n \Rightarrow f'(x) = n\frac{u'(x)}{u(x)}$.

6- <u>Primitives remarquables :</u>

En appliquant la technique de l'intégration par parties, calcule une primitive des fonctions : $x \to \ln x$ et $x \to \ln (ax + b)$. Ainsi on retiendra :

$Si\ f(x) = \ln x \Rightarrow F(x) = x \ln x - x + k$

- $Si\ f(x) = \ln (ax + b) \Rightarrow F(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right) \ln (ax + b) - x + k$

- $Si\ f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \Rightarrow F(x) = ln|u(x)| + k$

7- Fonction logarithme de base a :

a) Définition :

Soit $\boldsymbol{a}$ un réel strictement positif et différent de 1. On appelle logarithme de base $\boldsymbol{a}$, la fonction définie par : $log_a(x) : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto log_a(x) = \frac{l_n\ x}{l_n\ a}.$$

N.B : Lorsque $\boldsymbol{a}$ = 10, la fonction logarithme de base 10 est appelé fonction logarithme décimale. Ainsi la fonction logarithme d'un nombre réel positif est noté $log\ x = \frac{l_n\ x}{l_n\ 10}$

M = $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{ln10}}$ est appelée la **Mantisse** du logarithme décimal ; ainsi $log\ x$ = M$\bullet$ lnx.

b) Propriétés :

P$_1$: $log(ab) = loga + logb$

P$_3$: $log(\frac{a}{b}) = loga - logb$

P$_2$: $log(a)^n = nloga$

P$_4$: $log(10)^n = n$

P$_5$: $(logx)' = \frac{1}{xln\,10}$

8- Etude de la fonction $\boldsymbol{log_a(x)}$:

Soit $f(x) = log_a(x)$et de courbe représentative (C_a).

1er Cas : 0 $< a < 1$ **(** $\boldsymbol{lna} < 0$ **)**

Df =] 0 ; + ∞[

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Alors la courbe (C) admet des branches : $x = 0$ est asymptote verticale pour la courbe (C).

($x'Ox$) est branche parabolique (car $\lim_{x \to +\infty} \frac{ln\ x}{x} = 0$)

$f(x) = log_a(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{xlna} < 0$

D'où le tableau de variation est le suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

- $(C) \cap (OX) \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$

Donc (C) coupe l'axe (ox) en 1

- $(C) \cap (OY) \Rightarrow x = 0$ et $f(0) = \ln(0)$ qui n'existe pas.

  Donc (C) ne coupe pas l'axe (oy).

2ième Cas : $a > 1$ ($\ln a > 0$)

Df =] 0 ; + ∞[

$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Alors la courbe (C) admet des branches : $x = 0$ est asymptote verticale pour la courbe (C).

($x'Ox$) est branche parabolique (car $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

$f(x) = \log_a(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x\ln a} > 0$

D'où le tableau de variation est le suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

- $(C) \cap (OX) \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$

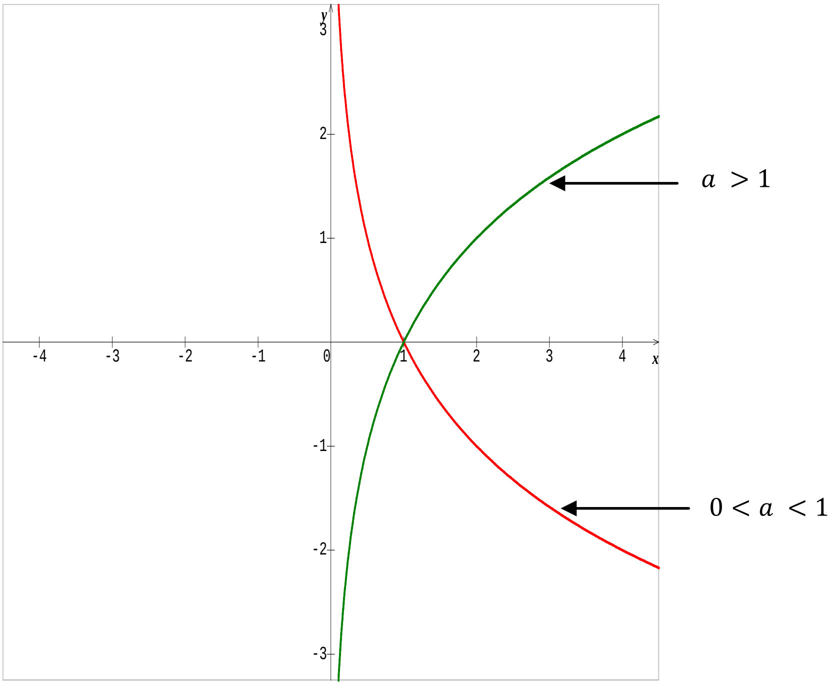
Donc (C) coupe l'axe (ox) en 1

- $(C) \cap (OY) \Rightarrow x = 0$ et $f(0) = \ln(0)$ qui n'existe pas.

Donc (C) ne coupe pas l'axe (oy).

NB : dans tous les cas, $\boldsymbol{log_a(x)}$ **= 1** <=> $\boldsymbol{x = e}$

Représentation



Exercices

Propriétés de la fonction logarithme

1 1) En utilisant les propriétés logarithmiques, exprime en fonction de $ln2$ les réels suivants :

A = $ln8 + \frac{1}{2}ln16 - ln\sqrt{2}$; B = $ln\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + ln\left(2+\sqrt{2}\right)$

C = $ln2\sqrt{2} + ln4 - ln\frac{1}{\sqrt{2}} + ln\sqrt{2^3}$; D = $ln64 + \frac{5}{3}ln8 - ln\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$

2) En utilisant les propriétés logarithmiques, résous dans ℝ les équations suivantes :
a- $ln\,(2x+7) = ln\,(x-3)$; **b-** $ln\,(x^2 - 2x - 3) = ln\,(x+7)$

c- $lnx + ln(3x + 2) = ln(2x + 3)$; **d-** $ln(x - 3) = ln(x + 7) - ln(x + 1)$.

e- $ln(2x - 2) + ln(x + 2) = 3ln2$; ***f*-** $ln(x - 2) + ln(x + 3) = 2\,ln(x + 1)$.

g- $ln\sqrt{2x - 3} = ln(6 - x) - \frac{1}{2}lnx$; ***h*-** $ln|x - 1| + ln|2x - 1| = 0$

***i*-** $(lnx)^2 - 7lnx + 6 = 0$; ***j*-** $3[ln(x + 1)]^2 - 2ln(x + 1) - 5 = 0$

3) En utilisant les propriétés logarithmiques, résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a- $ln(x + 8) - ln(x + 14) + ln(x + 2) \leq 0$; **b-** $ln(2x - 1) - ln(1 - x) < ln3$

c- $ln(x + 1) > ln(4x - 1) - ln(x - 1)$

4) En utilisant les propriétés logarithmiques, résous dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les systèmes suivantes :

a- $\begin{cases} x + y = 15 \\ lnx + lny = ln36 \end{cases}$; **b-** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ lnx + lny = ln6 \end{cases}$; **c-** $\begin{cases} 2lnx - lny = 0 \\ 4lnx + lny = 3 \end{cases}$

d- $\begin{cases} lnx \times lny = -10 \\ lnx + lny = 3 \end{cases}$; **e-** $\begin{cases} X \times Y = 4 \\ 4\left(log_x y + log_y x\right) = 17 \end{cases}$

2 Soit le polynôme q définie par $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

1) Calcule $q(1)$ puis résous les équations $q(x) = 0$ *et* $q(x) \geq 0$

2) En déduis la résolution de :

a- l'équation : $2(ln\,x)^3 + 3(ln\,x)^2 - 8ln\,x + 3 = 0$

b- l'inéquation $2(ln\,x)^3 + 3(ln\,x)^2 - 8ln\,x + 3 \geq 0$

Application des limites de la fonction logarithme

3 Calcule la limite des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définitions :

1) $f(x) = ln(2 - x)$; **2)** $f(x) = ln(-x^2 + 2x + 3)$; **3)** $f(x) = (x + 1)ln\,x - x$

4) $f(x) = ln|-x^2 + 2x + 3|$; **5)** $f(x) = ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$; **6)** $f(x) = \frac{ln(x+1)}{x^2}$

7) $f(x) = x^3 - x - 2\,lnx + 1$; **8)** $f(x) = \frac{ln|cosx|}{x^2}$; **9)** $f(x) = (2x - 1)ln(2x - 1)$

Dérivées et primitives de la fonction logarithme

4 1) Calcule la dérivée des fonctions suivantes :

a- $f(x) = ln\ (2x\ + 7)$; **b-** $f(x) = ln\ (x^2 - 2x - 3)$; **c-** $f(x) = (x\ +\ 7)ln(3x\ +\ 2)$

d- $f(x) = ln\sqrt{2x - 3}$; **e-** $f(x) = [ln\ (x\ + 1)\ ]^3$; ***f*-** $f(x) = ln\left(\frac{x^2 - 1}{x + 2}\right)$

g- $f(x) = ln(x^3 - x)(x^2+2)$; ***h*-** $f(x) = \sqrt{x - 1}\ ln(-x\ +\ 1)$

2) Calcule la primitive des fonctions suivantes :

a- $f(x) = ln\ (2x\ + 7)$; **b-** $f(x) = \frac{Sinx\ - Cosx}{cosx\ +\ sinx}$; **c-** $f(x) = \frac{-x + 1}{x^2 - 2x - 5}$

d- $f(x) = ln\ (\ 3 - x\ )$; **e-** $f(x) = \frac{7}{2x - 5}$; ***f*-** $f(x) = lnx + \frac{-3x + 3}{x^2 + 2x - 5}$

g- $f(x) = \frac{2}{xlnx}$; ***h*-** $f(x) = \frac{2 - \frac{2}{x}}{x - lnx}$

5 Soit la fonction g définie sur ℝ – {-1 ; 0 ; 1} par $g(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}$

1) Détermine les nombres réels a, b et c tel que $\forall\ x\ \in]1\ ;\ +\infty[$
On ait $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x + 1}$

2) En déduis une primitive de la fonction g sur $]1\ ;\ +\infty[$

Fonction logarithmes dans les cas pratiques

6 La magnétude apparente d'un astre d'éclat E est M = $log_a\left(\frac{E}{E_0}\right)$ où E_0 est l'éclat de référence.

1) Exprime M en fonction de lna et $ln\left(\frac{E}{E_0}\right)$.
2) Calcule lna sachant que $E_0 = \frac{E}{10}$ et M= 5
3) En déduis la magnétude apparente des astres suivants :

a- Soleil : $E = 4{,}786 \times 10^{10} E_0$; b- Lune : $E = 1{,}2 \times 10^5 E_0$

7 L'aire A (en cm^2) de la peau d'un cobaye, en fonction de son poids P (en gramme) est donnée par l'égalité suivante : $lnA\ =\ ln(9{,}85)\ +\ 0{,}64lnP$. ($ln$ désignant le logarithme népérien).

1°/ Quelle est l'aire A de la peau d'un cobaye de poids $P\ =\ 780g$?

2°/ Quel est le poids P d'un cobaye dont la peau a pour aire A = 30cm^2 ?

8

Pour Détermine l'âge d'un fossile ou d'un os on mesure le pourcentage de "carbone 14" présent dans l'objet. En effet, à la mort d'un être vivant si k est le pourcentage de "carbone 14" restant au bout de N années, alors on a : $N = - 8310 \times lnk$.

1°/ Le squelette d'un « homme du Cro-Magnon » contient 5% de carbone 14 initial. Quel âge a-t-il ?

2°/ Le pourcentage k de carbone 14 contenu dans un fossile vérifie :

$51,8\% < k < 53,8\%$. Donne un encadrement de l'âge de ce fossile.

9

Une culture de bactéries a un rythme de croissance modélisé par la fonction $\mathrm{R}(x) = \frac{3000}{1+0,25x}$
Où x est le temps écoulé en jours.
On admet que ce rythme de croissance est la dérivée de la fonction population $P(x)$ c'est-à-dire que $P'(x) = R(x)$ et au temps $x = 0$, la culture compte 1000 bactéries c'est-a-dire : $P(0) = 1000$.

1) a- Détermine $P(x)$ désignant la population des bactéries après x jours.
b- Evaluer le nombre de bactérie au bout de 3 jours.
c- Après combien de jours le nombre de bactéries atteindra t-il 12000 individus ?

2) Etudie le sens de variation de $P(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
(on Calculera la limite de $P(x)$ en $+\infty$)

3) On donne la fonction H définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :
$H(x) = 48000(1+0,25x)ln(1+0,25x) - 11000x$
a- Montre que H est une primitive de P sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
b- Calcule l'intégrale $\mathrm{I} = \int_5^{10} P(x)\,\mathrm{d}x$ puis en déduis une interprétation concrète du résultat.
c- En déduis le nombre moyen de bactéries entre le $5^{\text{ième}}$ et le $10^{\text{ième}}$ jour.

10

Partie A

Soit la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur $[\mathbf{10}\,;\mathbf{100}]$ par : $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{lnx-2}}{\boldsymbol{x}}$.

1) Calcule $\boldsymbol{f'}$
2) Démontre $\boldsymbol{que}$ $\boldsymbol{f'(x)}$ est positive sur l'intervalle $[\mathbf{10}\,;\mathbf{e^3}]$ et négative sur $[\mathbf{e^3}\,;\mathbf{100}]$
3) Dresse le tableau de variations de $\boldsymbol{f}$.

Partie B

On se propose d'Exprime la capacité pulmonaire de l'être humain en fonction de son âge $\boldsymbol{x}$, représenté en années et, $\boldsymbol{g(x)}$ la capacité pulmonaire en litres. On admet que sur l'intervalle $[\mathbf{10}\,;\mathbf{100}]$ on a : $\boldsymbol{g(x)} = \mathbf{110}\boldsymbol{f(x)}$ où f est la fonction définie dans la partie A

1) Calcule la capacité pulmonaire à 10ans, 15ans, 30ans et 60ans.
2) Trace la courbe représentative de $\boldsymbol{g}$ dans un repère orthogonal.
(On prendra en abscisse : $\mathbf{1}\boldsymbol{cm}$ pour 10 ans et en ordonnées $\mathbf{1}\boldsymbol{cm}$ pour 10 litres).
3) A quel âge la capacité pulmonaire est-elle maximale ? Quelle est cette capacité maximale ?
4) Détermine graphiquement l'intervalle du temps durant lequel la capacité pulmonaire reste supérieure ou égale à 5 litres.

Problèmes

11 **Partie A :**

Soit la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$

1) Dresse le tableau de variation de g.

2) Calcule $g(1)$ puis en déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$ et (C) sa courbe dans le repère orthonormé $(o\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm)

1) Dresse le tableau de variation de f.

2) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $(\alpha < \beta)$

3) a) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f.

b) Etudie le signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ puis en déduis la position de (C) et (Δ).

4) Trace (C) et (Δ) dans le même repère.

12 **Partie A** :

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$

1- Etudie les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

2- Dresse le tableau de variation de g puis en déduis son signe sur $]0\,;\,+\infty[$

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x + 2\frac{\ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm)

1) a- Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b- Etudie les variations de f et Dresse sont tableau de variation.

c-Montre que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C), puis étudier la position de (C) par rapport à la droite (Δ).

2) Détermine les coordonnées du point A sachant que la courbe (C) admet au point A une tangente (T) parallèle à (Δ).

3) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que α [0,5 ; 1]

4) Trace (C) et (Δ) dans le même repère.

5) Hachure puis Calcule l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) ; la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

13

Partie A :

1) On considère la fonction numérique g définie par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 lnx$

a- Dresse le tableau de variation de g.

b- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que : $1,89 < \alpha < 1,90$.

c- Déduis de ce qui précède le signe de $g(x)$.

2) On considère la fonction numérique f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{lnx}{1+x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

a) Dresse le tableau de variation de f.
b) Vérifie que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$. En déduis un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude $2 \cdot 10^{-1}$
c) Trace (C) dans le repère.

Partie B :

On considère la fonction numérique définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$

1) a) Prouve que F est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et Précise $F'(x)$.

b) En déduis le sens de variation de F.

2) a) Vérifie que $\forall\, t \geq 1$; on a : $\frac{lnt}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{lnt}{t^2}$

b) Pour tout $x > 0$ et $t \neq 0$; on pose $I(x) = \int_1^x \frac{lnt}{t^2} dt$ et $J(x) = \int_1^x \frac{lnt}{(1+t)^2} dt$

- A l'aide d'une intégration par parties, Calcule $I(x)$

- A l'aide d'une intégration par partie et de l'égalité : $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{1+t}$, Calcule $J(x)$.

c) Déduis de ce qui précède que $\forall\, x > 1$; on a :
$$ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}$$

d) On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \theta$. Sans Calcule θ Vérifie que $\ln 2 \leq \theta \leq 1$

14

L'objectif de ce problème est l'étude complète de la fonction numérique f définie pour tout nombre réel x différent de -1 par :

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| \; si\ x \neq 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

Les parties A et B sont indépendantes.

On notera (Cf)la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$

1) Détermine Dg et Détermine les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Etudie les variations de g ; on ne demande pas de Calcule ses limites en -1 et en 0.

3) Calcule $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ puis Démontre que l'on a :

$$\forall\, x \in\ ]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,\left]-\frac{1}{2}\,;0\right[\ ;g(x) < 0 \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \left]-1\,;\,-\frac{1}{2}\right[\cup\ ]0\,;+\infty[\,;g(x) > 0$$

Partie B : Etude de la limite de f à l'infini.

1) Soient les fonctions h et k définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$h : t \to ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad k : t \to ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)$$

Après une brève étude sur $[0\ ;\ +\infty[$ des fonctions h et k ; Démontre que :

$$\forall\, t \geq 0\,;\ \text{on a} : t - \frac{t^2}{2} \leq ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$$

2) En déduis que $\lim\limits_{t \to 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$

3) En utilisant les résultats précédents, Démontre que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

Donne une interprétation graphique des résultats de la question précédente.

Partie C : Etude de la fonction f.

1) Détermine Df et Détermine la limite de f en -1
2) Etudie la continuité de f en 0
3) Démontre que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$
4) Calcule la dérivée de f et Démontre que $f'(x) = x \times g(x)$
5) Dresse le tableau de variations de f
6) Détermine une équation de la tangente (T)à (Cf)au point d'abscisse 0
Détermine les asymptotes à (Cf).

7) Montre que l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions 0 et β avec $-0{,}8 < \beta < -0{,}7$.

8) Trace (T) ; les asymptotes et la courbe (Cf).

15

Partie A :

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie A la fonction numérique f définie sur

$]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$, de Détermine ensuite dans la **partie B** la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite récurrente dans la partie (Γ), cette dernière partie étant dans une large mesure indépendante des deux autres.

1) Soit g la fonction numérique définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 1$

a) Montre que la fonction g est dérivable et que $\forall\, x \in$ Dg $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

b) Etudie les variations de la fonction g puis Détermine le signe de $g(x)$.

2) a- Détermine les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b- Montre que pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ puis donne le tableau de variations de la fonction f.

Partie B :

Γ Désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ unité graphique 2 cm.

Soit h la fonction définie sur] 0 ; +∞[par $h(x) = x + ln\, x$.

1) Etudie le sens de variation de h puis Montre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle[0,4 ; 0,7]

2) Montre que l'on a : $e^{-\alpha} = \alpha$

3) a- Vérifie que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à Γ en + ∞.

b- Utilise les résultats de la question **1)** pour Détermine les positions relatives de Γ et Δ.

4) Construire Γ et Δ dans le repère ortho normal $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$

5) a- Calcule au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale I = $\int_1^2 \frac{lnt}{t^2}\, dt$

b- En déduis l'aire, en cm^2 de la portion de plan limitée par la courbe Γ, la droite Δ et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation $x = 1\ et\ x = 2$.

Partie C : Etude d'une suite

Dans cette partie :

- I désigne l'intervalle [0,4 ; 0,7]
- α est le réel mis en évidence au **B. 1**.
- φ est la fonction définie sur ℝ par $\varphi\,(x) = e^{-x}$

1) u est la suite récurrente définie par ∀ $n \in$ ℕ : $\begin{cases} u_0 = 0,4 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$

Montre qu'on a pour tout $x \in I$:

a) $\varphi(x) \in I$

b) $|\varphi'(x)| \leq 0,7$

c) $|\varphi(x) - \alpha| \leq 0,7|x - \alpha|$

2) a) Montre que ∀ $n \in$ ℕ ; on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,7|u_n - \alpha|$ puis en déduis par récurrence que ∀ $n \in$ ℕ ; on a : $|u_n - \alpha| \leq 0,3(0,7)^n$

b) Conclus alors quant à la convergence de la suite u.

3) Détermine un entier p tel que pour $n \geq p$ on ait: $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ puis donné à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de u_p à 10^{-3}près.

En déduis une valeur approchée par défaut et par excès de α à 10^{-3}près

16 **Partie A :** On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I = \left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ par :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x}{1+x} - ln(1 + x)$

1) a) Détermine l'ensemble de définition de f et les limites aux bornes de cet ensemble.
b) Détermine la fonction dérivée de f et établir son tableau de variations.

2) Démontre que $\forall\, x \in \ ]1 ; +\infty[$; l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α. Vérifie qu'une valeur décimale approchée de α à 10^{-3}près est 3,9.
3) Précise, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$

Partie B : soit g la fonction définie par : $g(0) = 0$ et $g(t) = \frac{ln(1+t)}{\sqrt{t}}$ si $t > 0$

1) Démontre que g est continue en 0. Etudie la dérivabilité de g en 0.
2) Calcule $g'(t)$ et Exprime $g'(t)$ en fonction de $f(t)$
3) a) Détermine la limite en $+\infty$ de g.
 b) Dresse le tableau des variations de g.

4) Le plan est rapporté au repère orthogonal$(o ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$. Construire la courbe (Γ) représentative de g.

Partie C : Cette partie a pour objectif de Détermine l'aire A, en unités d'aires, de la portion de plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et la droite d'équation $x = 1$.

1) a) Démontre que la fonction g_1 définie sur [0 ; $+\infty$[par : $g_1(x) = \sqrt{x}ln(1+x)$ est dérivable en 0.

   b) Soit φ la fonction définie sur [0 ; $+\infty$[par : $\varphi(x) = 2\sqrt{x}ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$

   Démontre que φ est dérivable en tout point de [0 ; $+\infty$[et que $\varphi'(x) = g(x)$

2) En déduis que A $= \int_0^1 g(t)dt = 2ln2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$

3) Soit h la fonction définie sur [0 ; $+\infty$[par : $h(x) = \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$ et k la fonction définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ par $k(\theta) = tan^2\theta$

a) Calcule $(hok)(0)$

b) Prouve que $\forall\, \theta \in I$; on a : $(hok)'(\theta) = 4tan^2\theta$

c) En écrivant $tan^2\theta = (tan^2\theta + 1) - 1$; Détermine une primitive de $(hok)'$ puis donne l'expression de (hok)

d) Calcule $h(1)$

4) déduis des résultats précédents la valeur exacte de A.

17 **Partie A :**

On considère la fonction f définie par $f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$

1) Détermine l'ensemble de définition D_f de f.

2) Calcule les limites aux bornes de D_f puis en déduis que (C) admet deux asymptotes dont on Précisera les équations.

3) Dresse le tableau de variation de f

4) a-Ecris une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse I où I est le point d'inflexion de la courbe (C).

b-Etudie la position de (C) et (T) puis Trace (C) et (T) dans le même repère.

5) On considère l'intégrale I définie par $= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx$.

a-Calcule I en utilisant une intégration par parties.

b-En déduis en cm^2 l'aire A de la partie du plan délimité par la courbe (C) , la tangente

(T) et la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$

Partie B :

On considère dans cette partie la fonction numérique h définie sur $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$h\ (x) = \frac{1}{2}f(cosx)$ où f est la fonction définie dans la **Partie A :**

1) Vérifie que h est la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{sinx}$

2) Calcule l'intégrale $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sinx} dx$

Soit l'intégrale (I_n); n appartenant à ℕ définie par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{sinx} dx$.

a-Calcule I_0 et I_1

b- Calcule l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sinxcos^n xdx$

c- En déduis l'expression de $I_n - I_{n+2}$ en fonction de n puis Calcule I_2 ; I_3 et I_4

18 **PARTIE A :**

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 3x - 1 - lnx$. On désigne par C$g$ la courbe représentative de g dans un repère orthonormé$(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ d'unité graphique 1cm.

1) Etudie les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2) Etudie les branches infinies de la courbe Cg.
3) Etudie les variations de g.
4) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle$[2\,;3]$.
   Détermine un encadrement de α
5) Déduis de ce qui précède le signe de $g(x)$ en fonction de x.
   Interprète graphiquement le résultat.
6) a- Trace la courbe Cg.
   a- Discute graphiquement suivant les valeurs du périmètre réel m, le nombre de solution de l'équation $g(x) = m$

PARTIE B :

Soit la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - xlnx}$. On désigne par (C$f$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ d'unité graphique : 1 cm.

1) a) Montre que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a $x > lnx$.
   b) Justifie que la fonction f est bien définie sur $]0\,;\,+\infty[$.

2) Etudie les limites de f en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduis ?

3) a- Monter que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2 - xlnx)^2}$

b- Dresse le tableau de variation de f.

c – Montre que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}$ puis en déduis un encadrement de $f(\alpha)$.

4) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) de f au point d'abscisse 1.

5) Résous l'équation $f(x) = 0$ puis Trace la courbe (Cf) et la tangente (T) dans le même repère.

6) a- Montre que pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, on a : $f(x) = \frac{1-\frac{1}{x}}{x - lnx}$

b- Soit $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (Cf) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

Montre que $A(\alpha)$= $2ln(\alpha - 1)$ puis en déduis un encadrement de $A(\alpha)$.

7) Soit n un entier naturel supérieur ou égale à .
   a- Calcule $a_n = \int_1^n f(x)dx$. Interprète graphiquement ce résultat.
   b- Calcule la limite de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

PARTIE C :

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \int_1^{e^x} f(t)dt$. On désigne par (Ch)la courbe représentative de h dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) d'unité graphique : 1 cm.

1) a- Montre que $h(x) = ln(e^x - x)$.
   b- Montre que pour tout nombre réel , on a : $e^x > x$.
2) a-Calcule $limite\ de\ h(x)$ puis $limite\ de\ \frac{h(x)}{x}$ en $+\infty$

   Que peut-on en déduis pour la courbe (C_f) ?

   b- Montre que pour tout nombre réel , on a : $h(x) = x + ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$.

   En déduis de $lim\ h(x)$ en $+\infty$

3) Etudie la position relative de (Ch) et de (Δ): $y = x$
4) Dresse le tableau de variation de h puis Trace(Ch) .

19 **PARTIE A :**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right)$. On désigne par (C$f$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé(O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) d'unité graphique 1cm.

1) Montre que f est impaire.
2) Montre que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis Montre que sa dérivée $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$.
3) Dresse le tableau de variation de f.
4) Etudie les branches infinies de la courbe (Cf).
5) Trouve une équation cartésienne de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse nul.
6) Précise la position de (T) et (Cf).
7) Trace la droite (T) et la courbe (Cf)
8) Soit α un réel strictement positif. Calcule en fonction de α , l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (Cf) et les droites d'équations respectives $x = 0$, $y = 0$ et $x = \alpha$.

PARTIE B :

1) Montre que la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle I que l'on Précisera.
2) Construis dans le même repère que (Cf) , la courbe (Cg) de la fonction g.
3) Montre que pour tout $x \in$ I, on a : $g(x) = \frac{1}{4}(e^{x} - e^{-x})$.
4) Montre que l'équation $g(x) = x$ admet dans l'intervalle $]\,0\ ;\ +\infty\,[$ une solution unique α et que $\alpha \in \left]\frac{-\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$.
5) Calcule en fonction de α l'aire du domaine limité par les deux courbes (Cf) et (Cg) et situées dans le demi-plan $x \geq 0$.

PARTIE C :

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$.

1) Montre que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on Précisera.
2) On pose $h(x) = \varphi^{-1}(x)$. Donne les expressions de $h(x)$ et $h'(x)$.
3) Etudie puis représenter le fonction h $sur]-1\ ;\ 1[$.

Solutions

Propriétés de la fonction logarithme

1 1) En utilisant les propriétés logarithmiques, exprimons en fonction de $ln2$ les réels suivants :

$$A = ln8 + \frac{1}{2}ln16 - ln\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A = ln2^{3} + \frac{1}{2}ln2^{4} - ln2^{\frac{1}{2}} = 3ln2 + 2\,ln2 - \frac{1}{2}\,ln2 \Rightarrow A = \frac{9}{2}\,ln2$$

$$B = ln\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + ln(2+\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow B = ln\left[\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)(2+\sqrt{2})\right]$$

$$= ln\left[\left((2)^{2} - \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^{2}\right)(2+\sqrt{2})\right] = ln\left[\left(4-(2+\sqrt{2})\right)(2+\sqrt{2})\right]$$

$$= ln[(4-2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})] = ln(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) = ln\left[(2)^{2} - (\sqrt{2})^{2}\right]$$

$$= ln(4-2) = ln2 \Rightarrow B = ln2$$

$\mathrm{C} = ln2\sqrt{2} + ln4 - ln\frac{1}{\sqrt{2}} + ln\sqrt{2^3}$

$\Rightarrow \mathrm{C} = ln2^{\frac{3}{2}} + ln2^2 - \left(ln1 - ln\sqrt{2}\right) + ln(2^3)^{\frac{1}{2}}$

$= ln2^{\frac{3}{2}} + ln2^2 + ln\sqrt{2} + ln2^{\frac{3}{2}} = ln2^{\frac{3}{2}} + ln2^2 + ln2^{\frac{1}{2}} + ln2^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{3}{2}ln2 + 2ln2 + \frac{1}{2}ln2 + \frac{3}{2}ln2 = \frac{3}{2}ln2 + 2ln2 + \frac{1}{2}ln2 + \frac{3}{2}ln2$

$= \frac{11}{2}ln2 \Rightarrow \mathrm{C} = \frac{11}{2}ln2$

$\mathrm{D} = ln64 + \frac{5}{3}ln8 - ln\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} = ln2^6 + \frac{5}{3}ln2^3 - ln2^{\frac{15}{16}}$

$= 6ln2 + 5\,ln2 - \frac{15}{16}ln2 = \frac{161}{16}ln2$

$\Rightarrow \mathrm{D} = \frac{161}{16}ln2$

2) En utilisant les propriétés logarithmiques, résolvons dans ℝ les équations suivantes :

a- $ln\,(2x + 7) = ln\,(x - 3) \Rightarrow D_v =]3\,;\,+\infty[$

Alors $ln\,(2x + 7) = ln\,(x - 3) \Leftrightarrow 2x + 7 = x - 3 \Leftrightarrow x = -10 \notin D_v \Rightarrow \mathrm{S} = \{\emptyset\}$

b- $ln\,(x^2 - 2x - 3) = ln\,(x + 7) \Rightarrow D_v =]-7\,;\,-1[\,\cup\,]3\,;\,+\infty[$

Alors $ln\,(x^2 - 2x - 3) = ln\,(x + 7) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = x + 7 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$

$\Rightarrow \Delta = 49$ Donc $x_1 = -2 \in D_v$ et $x_2 = 5 \in D_v$ $\Rightarrow \mathrm{S} = \{-2\,;\,5\}$

c- $lnx + ln(3x + 2) = ln\,(2x + 3) \Rightarrow D_v =]0\,;\,+\infty[$

Alors $lnx + ln(3x + 2) = ln\,(2x + 3) \Leftrightarrow ln[x(3x + 2)] = ln\,(2x + 3) \Leftrightarrow$

$x(3x + 2) = 2x + 3 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x = 2x + 3 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \notin D_v$ ou

$x = 1 \in D_v$ $\Rightarrow \mathrm{S} = \{1\}$

d- $ln\,(x - 3) = ln\,(x + 7) - ln\,(x + 1) \Rightarrow D_v =]3\,;\,+\infty[$

Alors $ln\,(x - 3) = ln\,(x + 7) - ln\,(x + 1) \Leftrightarrow ln\left(x - 3\right) = ln\left(\frac{x+7}{x+1}\right) \Leftrightarrow x - 3 = \frac{x+7}{x+1}$

$\Leftrightarrow \left(x - 3\right)(x + 1) = x + 7 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = x + 7 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow \Delta = 49$

Donc $x_1 = -2 \notin D_v$ et $x_2 = 5 \in D_v$ => S = { 5 }

e- $ln\ (2x - 2) + ln(x+2) = 3ln2$ => $D_v =]1\ ;\ +\infty[$

Alors $ln\ (2x - 2) + ln(x+2) = 3ln2 \Leftrightarrow ln\big[(2x - 2)(x+2)\big] = ln2^3 \Leftrightarrow$

$\big(2x - 2\big)(x+2) = 2^3 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 8 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$

=> $\Delta = 25$. Donc $x_1 = -3 \notin D_v$ et $x_2 = 2 \in D_v$ => S = { 2 }

***f*-** $ln\ (x-2) + ln\ (x+3) = 2\ ln\ (x+1)$. => $D_v =]2\ ;\ +\infty[$

Alors $ln\ (x-2) + ln\ (x+3) = 2\ ln\ (x+1) \Leftrightarrow ln\big[(x - 2)(x+3)\big] = ln(x+1)^2$

$\Leftrightarrow \big(x - 2\big)(x+3) = (x+1)^2 \Leftrightarrow -x - 7 = 0$ => $x = -7 \notin D_v$ => S = { ∅ }

g- $ln\sqrt{2x-3} = ln\ (6-x) - \frac{1}{2}lnx$ => $D_v = \left]\frac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$

Alors $ln\sqrt{2x-3} = ln\ (6-x) - \frac{1}{2}lnx \Leftrightarrow ln\sqrt{2x-3} = ln\ (6-x) - ln\sqrt{x} \Leftrightarrow$

$ln\sqrt{2x-3} + ln\sqrt{x} = ln\ (6-x) \Leftrightarrow ln\big[(\sqrt{2x-3})(\sqrt{x})\big] = ln\ (6-x) \Leftrightarrow$

$(\sqrt{2x-3})(\sqrt{x}) = 6 - x \Leftrightarrow \sqrt{x(2x-3)} = 6 - x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x} = 6 - x \Leftrightarrow$

$\left(\sqrt{2x^2 - 3x}\right)^2 = (6-x)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = x^2 - 12x + 36 \Leftrightarrow x^2 + 9x - 36 = 0$

=> $\Delta = 225$. Donc $x_1 = -12 \notin D_v$ et $x_2 = 3 \in D_v$ => S = { 3 }

***h*-** $ln|x-1| + ln|2x-1| = 0$ => $D_v = \left]-\infty\ ;\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}\ ;1\right[\cup]1\ ;\ +\infty[$

$ln|(x-1)(2x-1)| = 0 \Leftrightarrow ln|(x-1)(2x-1)| = ln1 \Leftrightarrow |(x-1)(2x-1)| = 1$

$\Leftrightarrow \big|2x^2 - 3x + 1\big| = 1$ => $2x^2 - 3x + 1 = -1$ ou $2x^2 - 3x + 1 = 1$

- Si $2x^2 - 3x + 1 = -1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2 = 0$ => $\Delta = -7$ et $S_1 = \{\emptyset\}$.
- Si $2x^2 - 3x + 1 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0$ => $(2x-3) = 0$. Donc $x = 0 \in D_v$ ou $x = \frac{3}{2} \in D_v$ => S = $\left\{0\ ;\ \frac{3}{2}\right\}$

i- $(lnx)^2 - 7lnx + 6 = 0$.

Effectuons un changement de variable en posant : $lnx = X$

Alors l'équation $(lnx)^2 - 7lnx + 6 = 0$ devient : $X^2 - 7X + 6 = 0$ => $\Delta = 25$.

Donc $X_1 = 1$ et $X_2 = 6$

- Si $X_1 = 1 \Leftrightarrow lnx = 1$ => $x = e^1 = e$.

- Si $X_2 = 6 \Leftrightarrow lnx = 6$ => $x = e^6$

=> S = { e ; e^6 }

j- $3[ln(x+1)]^2 - 2ln(x+1) - 5 = 0$

Effectuons un changement de variable en posant : $ln(x+1) = X$

Alors l'équation $3[ln(x+1)]^2 - 2ln(x+1) - 5 = 0$ devient : $3X^2 - 2X - 5 = 0$

=> $\Delta = 64$. Donc $X_1 = -1$ et $X_2 = \frac{3}{5}$

- Si $X_1 = -1 \Leftrightarrow ln(x+1) = -1$ => $x + 1 = e^{-1}$ => $x = -1 + e^{-1}$

- Si $X_2 = \frac{3}{5} \Leftrightarrow ln(x+1) = \frac{3}{5}$ => $x + 1 = e^{\frac{3}{5}}$ => $x = -1 + e^{\frac{3}{5}}$

=> S = $\left\{ -1 + e^{-1} \ ; \ -1 + e^{\frac{3}{5}} \right\}$

3) En utilisant les propriétés logarithmiques, résolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a- $ln\,(x+8) - ln\,(x+14) + ln(x+2) \leq 0$ => $D_v =]-2\,;+\infty[$

$ln\,(x+8) - ln\,(x+14) + ln(x+2) \leq 0$.

Posons $ln\,(x+8) - ln\,(x+14) + ln(x+2) = 0 \Leftrightarrow ln\left(\frac{x+8}{x+14}\right) + ln(x+2) = 0 \Leftrightarrow$

$ln\left[\frac{(x+8)(x+2)}{x+14}\right] = ln1 \Leftrightarrow \frac{(x+8)(x+2)}{x+14} = 1 \Leftrightarrow (x+8)(x+2) = x + 14 \Leftrightarrow$

$x^2 + 10x + 16 = x + 14 \Leftrightarrow x^2 + 9x + 2 = 0$ => $\Delta = 73$. Donc on a :

$x_1 = \frac{-9-\sqrt{73}}{2}$ et $x_2 = \frac{-9+\sqrt{73}}{2}$. => $S_1 = \left[\frac{-9-\sqrt{73}}{2} \ ; \ \frac{-9+\sqrt{73}}{2}\right]$

Ainsi l'intersection de $D_v =]-2\,;+\infty[$ et $S_1 = \left[\frac{-9-\sqrt{73}}{2}\;;\;\frac{-9+\sqrt{73}}{2}\right]$ donne :

$S = \left]-2\,;\,\frac{-9+\sqrt{73}}{2}\right]$

b- $ln\,(2x-1) - ln\,(1-x) < ln3 \Rightarrow D_v = \left]\frac{1}{2}\,;1\right[$

$ln\,(2x-1) - ln\,(1-x) < ln3$

Posons $ln\,(2x-1) - ln\,(1-x) = ln3 \Leftrightarrow ln\left(\frac{2x-1}{1-x}\right) = ln3 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{1-x} = 3 \Leftrightarrow$

$2x-1 = 3(1-x) \Leftrightarrow 5x-4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \Rightarrow S_1 = \left]-\infty\;;\frac{4}{5}\right[$

Ainsi l'intersection de $D_v = \left]\frac{1}{2}\,;1\right[$ et $S_1 = \left]-\infty\;;\frac{4}{5}\right[$ donne : $S = \left]\frac{1}{2}\;;\frac{4}{5}\right[$

c- $ln\,(x+1) > ln\,(4x-1) - ln\,(x-1) \Rightarrow D_v =]\,1\,;+\infty\,[$

$ln\,(x+1) > ln\,(4x-1) - ln\,(x-1)$.

Posons $ln\,(x+1) = ln\,(4x-1) - ln\,(x-1) \Leftrightarrow ln\,(x+1) = ln\left(\frac{4x-1}{x-1}\right) \Leftrightarrow$

$x+1 = \frac{4x-1}{x-1} \Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 4x-1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 4x-1 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow$

$x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 4 \Rightarrow S_1 =]-\infty\;;0[\cup]4\;;+\infty[$

Ainsi l'intersection de $D_v =]\,1\,;+\infty\,[$ et $S_1 =]-\infty\;;0[\cup]4\;;+\infty[$ donne :

$S =]\,4\;;+\infty\,[$

4) En utilisant les propriétés logarithmiques, résolvons dans ℝ×ℝ les systèmes suivantes :

<u>A retenir</u>

Si $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{P}$ désignent respectivement la somme et le produit de deux termes x et y , alors :

- $x + y = \boldsymbol{S}.$
- $x \times y = \boldsymbol{P}.$
- $x^2 + y^2 = \boldsymbol{S^2 - 2P}$
- $x^3 + y^3 = \boldsymbol{S^3 - 3PS}$

a- $\begin{cases} x + y = 15 \\ lnx + lny = ln36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 15 \\ ln(x \times y) = ln36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 15 \\ x \times y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 15 \\ P = 36 \end{cases}$

Ce système est solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ avec $S = 15$ et $P = 36$

Alors résolvons l'équation : $X^2 - 15X + 36 = 0$ => $\Delta = 81$. Donc $X_1 = 3$ et $X_2 = 12$

=> S= $\{(3\,;12)\ ;\ (12\,;3)\}$

b- $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ lnx + lny = ln6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ ln(x \times y) = ln6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x \times y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P = 13 \\ P = 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2(6) = 13 \\ P = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 12 = 13 \\ P = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 = 25 \\ P = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} S = -5 \\ P = 6 \end{cases}$

-Pour $\begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases}$, le système est solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ avec $S = 5$ et $P = 6$

Alors résolvons l'équation : $X^2 - 5X + 6 = 0$ => $\Delta = 1$. Donc $X_1 = 3$ et $X_2 = 2$

=> S= $\{(3\,;2)\ ;\ (2\,;3)\}$

-Pour $\begin{cases} S = -5 \\ P = 6 \end{cases}$, le système est solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ avec $S = -5$ et $P = 6$

Alors résolvons l'équation : $X^2 + 5X + 6 = 0$ => $\Delta = 1$. Donc $X_1 = -3$ et $X_2 = -2$

=> S= $\{(-3\,;-2)\ ;\ (-2\,;-3)\}$

c- $\begin{cases} 2lnx - lny = 0 \\ 4lnx + lny = 3 \end{cases}$ **(2)**
(1)

La somme des équations **(1)** et **(2)** donne : $6lnx = 3$ => $lnx = \frac{1}{2}$ => $x = e^{\frac{1}{2}}$

En remplaçant $x = e^{\frac{1}{2}}$ par sa valeur dans l'équation **(1)**, on a : $2lne^{\frac{1}{2}} - lny = 0 \Leftrightarrow$

$2 \times \frac{1}{2} - lny = 0 \Leftrightarrow 1 - lny = 0$ => $lny = 1$ => $y = e$

=> S= $\left\{\left(e^{\frac{1}{2}}\,;e\right)\ ;\ \left(e\,;e^{\frac{1}{2}}\right)\right\}$

d- $\begin{cases} lnx \times lny = -10 \\ lnx + lny = 3 \end{cases}$ Posons $lnx = X$ et $lny = Y$ => $\begin{cases} X \times Y = -10 \\ X + Y = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} P = -10 \\ S = 3 \end{cases}$

Ce système est solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ avec $S = 3$ et $P = -10$

Alors résolvons l'équation : $X^2 - 3X - 10 = 0$ => $\Delta= 49$. Donc $X_1 = 5$ et $X_2 = -2$

- Si $X_1 = 5 \Leftrightarrow lnx = 5 \Rightarrow x = e^5$
- Si $X_1 = -2 \Leftrightarrow lnx = -2 \Rightarrow x = e^{-2}$

=> $S = \{(e^5 ; e^{-2}) \; ; \; (e^{-2} ; e^5)\}$

e- $\begin{cases} X \times Y = 4 \\ 4(log_x y + log_y x) = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \times Y = 4 \\ 4\left(\frac{lny}{lnx} + \frac{lnx}{lny}\right) = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \times Y = 4 \\ 4\left(\frac{ln^2 y + ln^2 x}{lnx \times lny}\right) = 17 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X \times Y = 4 \\ \frac{ln^2 y + ln^2 x}{lnx \times lny} = \frac{17}{4} \end{cases}$. Posons $lnx = X$ et $lny = Y$ $\Leftrightarrow \begin{cases} X \times Y = 4 \\ \frac{Y^2 + X^2}{X \times Y} = \frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} P = 4 \\ \frac{S^2 - 2P}{P} = \frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 4 \\ \frac{S^2 - 2(4)}{4} = \frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 4 \\ \frac{S^2 - 8}{4} = \frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 4 \\ S^2 - 8 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 4 \\ S^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} P = 4 \\ S = 5 \end{cases}$

Ce système est solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ avec $S = 5$ et $P = 4$

Alors résolvons l'équation : $X^2 - 5X + 4 = 0$ => $\Delta= 9$. Donc $X_1 = 1$ et $X_2 = 4$

- Si $X_1 = 1 \Leftrightarrow lnx = 1 \Rightarrow x = e$
- Si $X_1 = 4 \Leftrightarrow lnx = 4 \Rightarrow x = e^4$

2 Soit le polynôme q définie par $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

1) Calculons $q(1)$ puis résolvons les équations $q(x) = 0$ et $q(x) \geq 0$

$q(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 8(1) + 3 = 2 + 3 - 8 + 3 = 0$

Résolvons les équations $q(x) = 0$ et $q(x) \geq 0$

Pour cela, factorisons $q(x)$. La forme factorisée de $q(x)$ en trois produit de facteurs est :

$q(x) = (x - 1)(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

Alors $q(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -3$ ou $x = \frac{1}{2}$

=> $S = \left\{1 \, ; \, -3 \, ; \, \frac{1}{2}\right\}$

De même $q(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right) \geq 0$. Posons $(x-1)(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0$

=> $x = 1$ ou $x = -3$ ou $x = \frac{1}{2}$. Ainsi le tableau de signe est le suivant :

x		-3	$\frac{1}{2}$		1 $+\infty$
$x-1$		$-$			$+$
$x+3$		$-$			$-$
$x-\frac{1}{2}$		$+$			$-$
$q(x)$		$+$			$+$

D'après le tableau de signe, l'ensemble solution correspondant à l'inéquation $q(x) \geq 0$ est :

S= $\left[-3\ ;\ \frac{1}{2}\right] \cup [1\ ;\ +\infty[$

2) En déduisons la résolution de :

a- l'équation : $2(ln\ x)^3 + 3(ln\ x)^2 - 8ln\ x + 3 = 0$

$2(ln\ x)^3 + 3(ln\ x)^2 - 8ln\ x + 3 = 0$. Posons $ln\ x = X$ => $2X^3 + 3X^2 - X + 3 = 0$

$(X-1)(X+3)\left(X-\frac{1}{2}\right) = 0$ => $X = 1$ ou $X = -3$ ou $X = \frac{1}{2}$.

- Si $X = 1 \Leftrightarrow lnx = 1$ => $x = e$
- Si $X = -3 \Leftrightarrow lnx = -3$ => $x = e^{-3}$
- Si $X = \frac{1}{2} \Leftrightarrow lnx = \frac{1}{2}$ => $x = e^{\frac{1}{2}}$

=> S = $\left\{e\ ;\ e^{-3}\ ;\ e^{\frac{1}{2}}\right\}$

b- l'inéquation $2(ln\ x)^3 + 3(ln\ x)^2 - 8ln\ x + 3 \geq 0$

en utilisant la question 1) et 2) a-) , on a : S= $\left[e^{-3}\ ;\ e^{\frac{1}{2}}\right] \cup [e\ ;\ +\infty[$

Application des limites de la fonction logarithme

3 Calculons la limite des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définition :

1) $f(x) = ln(2-x)$

$D_f = \{x\ /\ x \in \mathbb{R}\ ;\ 2-x > 0\}$. $2-x > 0$ => $x < 2$ => $D_f =]-\infty\ ;2[$

$lim\ f(x) = lim\ ln(2 - x) \ = \ lim\ ln(-x) = +\infty$

$x \to -\infty \qquad x \to -\infty \qquad\qquad x \to -\infty$

$lim\ f(x) = lim\ ln(2 - x) \ = -\infty$

$x \to 2^- \qquad x \to 2^-$

2) $f(x) = ln\ (-x^2 + \ 2x \ + 3)$

$D_f \ = \{x\ /\ x \ \in \mathbb{R}\ ;\ -x^2 + \ 2x \ + 3 > 0\}$. $-x^2 + \ 2x \ + 3 > 0$. Posons $-x^2 + \ 2x \ + 3 = 0$

=> $\Delta = 16$. Donc $x_1 \ = -1$ et $x_2 = 3$. Ainsi le tableau de signe est le suivant:

x		-1		3	
$-x^2 + \ 2x \ + 3$		0	$+$	0	

=> $D_f \ =]-1\ ; 3\ [$

$lim\ f(x) = lim\ ln\ (-x^2 + \ 2x \ + 3) \ = -\infty$

$x \to -1^+ \qquad x \to -1^+$

$lim\ f(x) = lim\ ln\ (-x^2 + \ 2x \ + 3) \ = -\infty$

$x \to 3^- \qquad x \to 3^-$

3) $f(x) \ = \ (x + 1)ln\ x - \ x$

$D_f \ = \{x\ /\ x \ \in \mathbb{R}\ ;\ x > 0\}$. $x > 0$ => $D_f \ =]0\ ; +\infty[$

$lim\ f(x) = lim\ (x + 1)ln\ x - \ x \quad = (0 \ + 1)(-\infty) - 0 = \ (1)(-\infty) = -\infty$

$x \to 0 \qquad x \to 0$

$lim\ f(x) = lim\ (x + 1)ln\ x - \ x \ = (+\infty)(+\infty) - (+\infty) = +\infty - \ \infty = "\ FI\ "$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

Levons l'indétermination

$lim\ f(x) = lim\ (x + 1)ln\ x - \ x \ = lim\ xln\ x + lnx - \ x = lim\ x\left(\ lnx + \frac{lnx}{x} - 1\right)$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad\qquad x \to +\infty \qquad\qquad x \to +\infty$

$= (+\infty)(+\infty + 0 - 1) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$

4) $f(x) = ln|-x^2 + 2x + 3|$

$D_f = \{x \,/\, x \in \mathbb{R}\,;\, -x^2 + 2x + 3 \neq 0\}$. $-x^2 + 2x + 3 \neq 0$. Posons $-x^2 + 2x + 3 = 0$

=> $\Delta = 16$. Donc $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$. Alors $D_f =]-\infty\,; -1[\, \cup\,]-1\,; 3[\, \cup\,]3\,; +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} ln|-x^2 + 2x + 3| = \lim_{x \to -\infty} ln|-x^2| = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} ln|-x^2 + 2x + 3| = \lim_{x \to +\infty} ln|-x^2| = +\infty$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = = +\infty$

5) $f(x) = ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

$D_f = \left\{x \,/\, x \in \mathbb{R}\,;\, \frac{x-1}{x+2} > 0\right\}$. $\frac{x-1}{x+2} > 0$; Posons $\frac{x-1}{x+2} = 0$ => $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ et \\ x + 2 = 0 \end{cases}$

=> $\begin{cases} x = 1 \\ et \\ x = -2 \end{cases}$

x	$-\infty$ $\quad$ -2		1 $\quad$ $+\infty$
$\frac{x-1}{x+2}$	$+$ $\quad$ (		) $\quad$ $+$

=> $D_f =]-\infty\,; -2[\, \cup\,]1\,; +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \lim_{x \to -\infty} ln\left(\frac{x}{x}\right) = ln(1) = 0$

$lim\ f(x) = lim\ ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = lim\ ln\left(\frac{x}{x}\right) = ln(1) = 0$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad\qquad x \to +\infty$

$lim\ f(x) = \ lim\ f(x) = ln\left(\frac{-3}{0^-}\right) = +\infty$

$x \to -2^- \quad x \to -2^+$

$lim\ f(x) = lim\ ln(0) = -\infty$

$x \to 1^+ \qquad x \to 1^+$

6) $f(x) \ = \frac{ln(x+1)}{x^2}$

$D_f \ = \{x\ /\ x\ \in \mathbb{R}\ ;\ \ x\ +1 > 0\ et\ x^2 \neq 0\}.$

$x\ +1 > 0 => x\ > -1$ et $x^2 \neq 0 => x \neq 0$

La reunion de ces deux conditions Donne $D_f\ =]-1\ ; 0[\cup]0\ ; +\infty[$

$lim\ f(x) = lim\ \frac{ln(x+1)}{x^2} = \frac{ln(0)}{1} = -\infty$

$x \to -1 \qquad x \to -1$

$lim\ f(x) = \ lim\ \frac{1}{x} \times \frac{ln(x+1)}{x} = \ (-\infty) \times (1) = -\infty$

$x \to 0^- \qquad x \to 0^-$

$lim\ f(x) = \ lim\ \frac{1}{x} \times \frac{ln(x+1)}{x} = \ (+\infty) \times (1) = +\infty$

$x \to 0^+ \qquad x \to 0^+$

$lim\ f(x) = lim\ \frac{ln(x+1)}{x^2} = \ lim\ \frac{ln(x)}{x^2} = 0$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

7) $f(x) \ = \ x^3 - x - 2\ lnx\ + \ 1$

$D_f \ = \{x\ /\ x\ \in \mathbb{R}\ ;\ x > 0\}.\qquad x > 0 => D_f \ =]0\ ; +\infty[$

$lim\ f(x) = lim\ x^3 - \ x - \ 2\ lnx\ + \ 1\ = 0 - 0 - 2(-\infty) + 1 = \ +\infty$

$x \to 0 \qquad x \to 0$

$lim\ f(x) = lim\ x^3 - x - 2\ lnx + 1 = +\infty - \infty = "FI"$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty$

Levons l'indétermination:

$lim\ f(x) = lim\ x^3 - x - 2\ lnx + 1 = lim\ x^2\left(x - \frac{1}{x} - 2\frac{lnx}{x} + \frac{1}{x}\right) = (+\infty)^2(+\infty) = +\infty$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

8) $f(x) = \frac{ln|cosx|}{x^2}$

$D_f = \{x\ /\ x \in \mathbb{R}\ ;\ cosx \neq 0\ et\ x^2 \neq 0\}.$

$cosx \neq 0 \Leftrightarrow cosx \neq cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ ou \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

La reunion de ces deux conditions Donne $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{2}\ ;0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right\}$

9) $f(x) = (2x-1)ln(2x-1)$

$D_f = \{x\ /\ x \in \mathbb{R}\ ;\ 2x - 1 > 0\}$. $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \Rightarrow D_f = \left]\frac{1}{2}\ ;+\infty\right[$

$lim\ f(x) = lim\ (2x-1)ln(2x-1) = (0)(-\infty) = "FI"$

$x \to \frac{1}{2} \quad x \to \frac{1}{2}$

Levons l'indétermination en effectuant un changement de variable:

Posons $2x - 1 = X \Rightarrow x = \frac{X+1}{2}$. Si $x \to \frac{1}{2}$ alors $X \to 0$

$\Rightarrow\ lim\ f(x) \Leftrightarrow lim\ XlnX = 0$

$x \to \frac{1}{2} \qquad X \to 0$

D'où $lim\ f(x) = 0$

$x \to \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x-1)ln(2x-1) = \lim_{x \to +\infty} 2xln2x = +\infty$$

Dérivées et primitives de la fonction logarithme

4 1) Calculons la dérivée des fonctions suivantes :

a- $f(x) = ln\,(2x+7) \;=>\; f'(x) = \frac{2}{2x+7}$

b- $f(x) = ln\,(x^2 - 2x - 3) \;=>\; f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3}$

c- $f(x) = (x+7)ln(3x+2) \;=>\; f'(x) = ln(3x+2) + \frac{3(x+7)}{3x+2}$

$=> f'(x) = \frac{(3x+2)ln(3x+2) + 3x + 21}{3x+2}$

d- $f(x) = ln\sqrt{2x-3} \;=>\; f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2x-3}}}{\sqrt{2x-3}} = \frac{1}{2x-3}$

e- $f(x) = [ln\,(x+1)]^3 \;=>\; f'(x) = 3\left(\frac{1}{x+1}\right)[ln\,(x+1)]^2 = \frac{3ln^2(x+1)}{x+1}$

***f*-** $f(x) = ln\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right) \;=>\; f'(x) = \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{x^2+4x+1}{(x^2-1)(x+2)}$

g- $f(x) = ln(x^3-x)(x^2+2) => f'(x) = \frac{3x^2-1}{x^3-x} + \frac{2x}{x^2+2} = \frac{5x^4+3x^2-2}{(x^3-x)(x^2+2)}$

***h*-** $f(x) = \sqrt{x-1}\,ln(-x+1) \;=>\; f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \times ln(-x+1) + \frac{-1}{-x+1} \times \sqrt{x-1}$

$=> f'(x) = \frac{ln(-x+1)}{2\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x-1}}{-x+1} = \frac{ln(-x+1)}{2\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{(x-1)ln(-x+1)+2(x-1)}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$

2) Calculons la primitive des fonctions suivantes :

a- $f(x) = ln\,(2x+7)$

<u>**NB :**</u> $Si\ f(x) = ln\,(ax+b) \;=>\; F(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right) ln\,(ax+b) - x + k$

Alors $f(x) = ln\,(2x+7) \;=>\; F(x) = \left(x + \frac{7}{2}\right) ln\,(2x+7) - x + k$

b- $f(x) = \frac{Sinx - Cosx}{cosx + sinx} = \frac{-(-Sinx + Cosx)}{cosx + sinx} = -ln|cosx + sinx| + k$

c- $f(x) = \frac{-x+1}{x^2-2x-5} = \frac{-2}{-2} \times \frac{-x+1}{x^2-2x-5} = -\frac{1}{2} \times \frac{2x-2}{x^2-2x-5}$

$=> F(x) = -\frac{1}{2} \times ln\,(x^2 - 2x - 5) + k$

d- $f(x) = ln\,(3 - x) \;=>\; F(x) = (x-3)ln\,(3-x) - x + k$

e- $f(x) = \frac{7}{2x-5} = \frac{2}{2}\times\frac{7}{2x-5} = \frac{7}{2}\times\frac{2}{2x-5} = \frac{7}{2}\times ln|2x-5| + k$

***f*-** $f(x) = lnx + \frac{-x+1}{x^2-2x-5} \;=>\; F(x) = x\,ln\,x - x - \frac{1}{2}\times ln\,(x^2 - 2x - 5) + k$

g- $f(x) = \frac{2}{xlnx} = 2 \times \frac{\frac{1}{x}}{lnx} \;=>\; F(x) = 2\times ln|lnx| + k = 2ln|lnx| + k$

***h*-** $f(x) = \frac{2-\frac{2}{x}}{x-lnx} = \frac{2\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x-lnx} \;=>\; F(x) = 2\times ln|x - lnx| + k = 2ln|x-lnx| + k$

5 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{-1\,;\,0\,;\,1\}$ par $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$

1) Déterminons les nombres réels a ; b et c tel que $\forall\, x \in\,]1\,;\,+\infty[$
On ait $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$

$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} \;=>\; g(x) = \frac{a(x-1)(x+1)+bx(x+1)+cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$

$=> g(x) = \frac{a(x^2-1)+bx(x+1)+cx(x-1)}{x(x^2-1)} = \frac{x^2(a+b+c)+x(b-c)-a}{x(x^2-1)}$

D'autre pat $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$. Ainsi par identification, on a:

$\frac{x^2(a+b+c)+x(b-c)-a}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x(x^2-1)} \Leftrightarrow x^2(a+b+c) + x(b-c) - a = 1$

$=> \begin{cases} a+b+c=0 \\ b-c=0 \\ -a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ b-c=0 \\ a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+b+c=0 \\ b-c=0 \\ a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=1 \\ b-c=0 \\ a=-1 \end{cases}$

$=> \begin{cases} b+c=1 \\ b-c=0 \end{cases} => 2b = 1 => b = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{2}$

D'où $g(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$

2) En déduisons une primitive de la fonction g sur $]1\,;\,+\infty[$
$g(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} \;=>\; G(x) = -lnx + \frac{1}{2}ln(x-1) + \frac{1}{2}ln(x+1) + k$

Fonction logarithmes dans les cas pratiques

6 La magnétude apparente d'un astre d'éclat E est M $= log_a\left(\frac{E}{E_0}\right)$ où E_0 est l'éclat de référence.

1) Exprimons M en fonction de lna et $ln\left(\frac{E}{E_0}\right)$

M $= log_a\left(\frac{E}{E_0}\right) \Leftrightarrow$ M $= \frac{ln\left(\frac{E}{E_0}\right)}{lna}$

2) Calculons lna sachant que $E_0 = \frac{E}{10}$ et M $= 5$

M $= \frac{ln\left(\frac{E}{E_0}\right)}{lna}$. Or $E_0 = \frac{E}{10}$ => M $= \frac{ln\left(\frac{E}{\frac{E}{10}}\right)}{lna} \Leftrightarrow$ M $= \frac{ln(10)}{lna} \Leftrightarrow lna = \frac{ln(10)}{M}$

Or M= 5 => $lna = \frac{ln(10)}{5}$ = 0,46

2) En déduisons la magnétude apparente des astres suivants :

a- Soleil : E = 4,786×10$^{10}E_0$

M $= log_a\left(\frac{E}{E_0}\right) \Leftrightarrow$ M $= \frac{ln\left(\frac{E}{E_0}\right)}{lna} \Leftrightarrow$M $= \frac{ln\left(\frac{4,786\times10^{10}E_0}{E_0}\right)}{lna} = \frac{ln(4,786\times10^{10})}{lna}$

$= \frac{10ln(4,786\times10)}{lna} = \frac{10ln(47,86)}{lna}$. Or lna = 0,46 => M $= \frac{10ln(47,86)}{0,46} \approx 84$

b- Lune : E = 1,2×10$^{5}E_0$

M $= log_a\left(\frac{E}{E_0}\right) \Leftrightarrow$ M $= \frac{ln\left(\frac{E}{E_0}\right)}{lna} \Leftrightarrow$M $= \frac{ln\left(\frac{1,2\times10^{5}E_0}{E_0}\right)}{lna} = \frac{ln(1,2\times10^{5})}{lna}$

$= \frac{5ln(1,2\times10)}{lna} = \frac{5ln(12)}{lna}$. Or lna = 0,46 => M $= \frac{5ln(12)}{0,46} \approx 27$

7 L'aire A (en cm^2) de la peau d'un cobaye, en fonction de son poids P (en gramme) est donnée par l'égalité suivante : $lnA = ln(9,85) + 0,64lnP$. (ln désignant le logarithme népérien).

1) Déterminons l'aire A de la peau d'un cobaye de poids $P = 780g$

$lnA = ln(9,85) + 0,64lnP$. Or $P = 780$

=> $lnA = ln(9,85) + 0,64ln780 \Leftrightarrow lnA = 2,28 + 4,26 \Leftrightarrow lnA = 6,54 \Leftrightarrow A = e^{6,54}$

=> $A = 692{,}28\ cm^2$

2) Déterminons le poids P d'un cobaye dont la peau a pour aire A = 30 cm^2

$lnA = ln(9{,}85) + 0{,}64lnP$. Or $A = 30$

=> $ln30 = ln(9{,}85) + 0{,}64lnP \Leftrightarrow 0{,}64lnP = ln30 - ln(9{,}85) \Leftrightarrow 0{,}64lnP = 3{,}40 - 2{,}28$

$\Leftrightarrow 0{,}64lnP = 1{,}12 \Leftrightarrow lnP = \frac{1{,}12}{0{,}64} \Leftrightarrow lnP = 1{,}75 \Leftrightarrow P = e^{1{,}75} = 5{,}75$

=> $P = 5{,}75\ g$.

8 Pour Détermine l'âge d'un fossile ou d'un os on mesure le pourcentage de "carbone 14" présent dans l'objet. En effet, à la mort d'un être vivant si k est le pourcentage de "carbone 14" restant au bout de N années, alors on a : $N = -\ 8310 \times lnk$.

1) Le squelette d'un « homme du Cro-Magnon » contient 5% de carbone 14 initial.

Déterminons l'âge de ce squelette

$N = -\ 8310 \times lnk$. Or $k = 5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$

=> $N = -\ 8310 \times ln0{,}05 = 24894{,}53$

=> $N = 24894{,}53$ Ans.

2) Le pourcentage k de carbone 14 contenu dans un fossile vérifie : $51{,}8\% < k < 53{,}8\%$.

Donnons un encadrement de l'âge de ce fossile.

$51{,}8\% < k < 53{,}8\% \Leftrightarrow \frac{51{,}8}{100} < k < \frac{53{,}8}{100} \Leftrightarrow 0{,}518 < k < 0{,}538 \Leftrightarrow$

$ln0{,}518 < lnk < ln0{,}538 \Leftrightarrow -0{,}65 < lnk < -0{,}61 \Leftrightarrow$

$(-\ 8310) \times (-0{,}61) < -\ 8310 \times lnk < (-\ 8310) \times (-0{,}65) \Leftrightarrow 5069{,}1 < N < 5401{,}5$

Alors l'âge de ce fossile est compris entre 5069 ans et 5402 ans.

9 Une culture de bactéries a un rythme de croissance modélisé par la fonction $R(x) = \frac{3000}{1 + 0{,}25x}$

Où x est le temps écoulé en jours.
On admet que ce rythme de croissance est la dérivée de la fonction population $P(x)$ c'est-à-dire que $P'(x) = R(x)$ et au temps $x = 0$, la culture compte 1000 bactéries c'est-à-dire : $P(0) = 1000$.

1) a- Déterminons $P(x)$ désignant la population des bactéries après x jours.

$P'(x) = R(x)$ => $P(x) = \int R(x)dx = \int \frac{3000}{1+0,25\boldsymbol{x}}dx = \frac{0,25}{0,25}\int \frac{3000}{1+0,25\boldsymbol{x}}dx = \frac{3000}{0,25}\int \frac{0,25}{1+0,25\boldsymbol{x}}dx$

=> $P(x) = 12000\int \frac{0,25}{1+0,25\boldsymbol{x}}dx = 12000[ln(1 + 0,25\boldsymbol{x})] + k$. Or $P(0) = 1000$

=> $P(x) = 12000ln(1 + 0,25\boldsymbol{x}) + k$. Or $P(0) = 1000 \Leftrightarrow k = 1000$

D'où $P(x) = 12000ln(1 + 0,25x) + 1000$
b- Evaluons le nombre de bactérie au bout de 3 jours.

$P(3) = 12000ln(1 + 0,25 \times 3) + 1000 \approx 7715$

D'où le nombre de bactérie au bout de 3 jours est de 7715 individus.

c- Déterminons le nombre de jours à partir du quels le nombre de bactéries atteindra 12000 individus

Pour cela, posons $P(x) = 12000 \Leftrightarrow 12000ln(1 + 0,25x) + 1000 = 12000$
$\Leftrightarrow 12000ln(1 + 0,25x) = 11000 \Leftrightarrow ln(1 + 0,25x) = \frac{11000}{12000} \Leftrightarrow ln(1 + 0,25x) = 0,91$
$\Leftrightarrow 1 + 0,25x = e^{0,91} \Leftrightarrow 0,25x = e^{0,91} - 1 \Leftrightarrow 0,25x = 2,48 - 1 \Leftrightarrow 0,25x = 1,48$
=>$x = 5,92 \approx 6$
Alors le nombre de jours à partir du quels le nombre de bactéries atteindra 12000 individus au bout de 6 jours.

2) Etudions le sens de variation de $P(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$
(on Calculera la limite de $P(x)$ en $+\infty$)

$P(x) = 12000ln(1 + 0,25x) + 1000$
$P(0) = 12000ln(1 + 0,25 \times 0) + 1000 = 1000$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$

$P'(x) = R(x) = \frac{3000}{1+0,25\boldsymbol{x}} > 0\ \forall\ x \in [0\,;\,+\infty[$

Alors $\forall\ x \in [0\,;\,+\infty[$, P est strictement croissante.

3) On donne la fonction H définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :
$H(x) = 48000(1 + 0,25x)ln(1 + 0,25x) - 11000x$
a- Montrons que H est une primitive de P sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
H est une primitive de P sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ si et seulement si $H'(x) = P(x)$

$H(x) = 48000(1 + 0,25x)ln(1 + 0,25x) - 11000x$
$\quad\quad = (48000 + 12000x)ln(1 + 0,25x) - 11000x$

=> $H'(x) = 12000 \times ln(1 + 0,25x) + \frac{0,25}{1+0,25\boldsymbol{x}} \times (48000 + 12000x) - 11000$

$= 12000ln(1 + 0,25x) + \frac{(12000 + 3000x)}{1 + 0,25\boldsymbol{x}} - 11000$

$= 12000ln(1 + 0,25x) + \frac{(12000 + 3000x) - 11000(1 + 0,25\boldsymbol{x})}{1 + 0,25\boldsymbol{x}}$

$= 12000ln(1 + 0,25x) + \frac{12000 + 3000x - 11000 - 2750x}{1 + 0,25\boldsymbol{x}}$

$= 12000ln(1 + 0,25x) + \frac{9250x + 11000}{1 + 0,25\boldsymbol{x}}$

$= 12000ln(1 + 0,25x) + \frac{1000 + 250x}{1 + 0,25\boldsymbol{x}}$

$= 12000ln(1 + 0,25x) + \frac{1000(1 + 0,25\boldsymbol{x})}{1 + 0,25\boldsymbol{x}}$

$= 12000ln(1 + 0,25x) + 1000 = P(x)$

D'où H est une primitive de P sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$

b- Calculons l'intégrale $\mathrm{I} = \int_5^{10} P(x)\mathrm{d}x$

$\mathrm{I} = \int_5^{10} P(x)\mathrm{d}x = \int_5^{10} P(x)\mathrm{d}x = [H(x)]_5^{10} = H(10) - H(5)$

=> $\mathrm{I} = 100464,1787 - 32580,46335 = 67883,71$

Interprétation concrète du résultat : l'intégrale I correspond l'aire en cm^2 de l'espace occupé par les bactéries entre le 5$^{\text{ième}}$ et le 10$^{\text{ième}}$ jour.

c- Calculons le nombre moyen de bactéries entre le 5$^{\text{ième}}$ et le 10$^{\text{ième}}$ jour.

$m = \frac{1}{10-5}\int_5^{10} P(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\mathrm{I} = 0,2\mathrm{I} = 0,2 \times 67883,71 = 13576,74 \approx 13577$

Alors le nombre moyen de bactéries entre le 10$^{\text{ième}}$ et le 20$^{\text{ième}}$ jour est d'environ 13577 individus.

10

Partie A

Soit la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur $[\mathbf{10}\,;\mathbf{100}]$ par : $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{lnx - 2}}{\boldsymbol{x}}$.

1) Calculons $\boldsymbol{f'}$

$\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{lnx - 2}}{\boldsymbol{x}}$ => $\boldsymbol{f'(x)} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)(x) - (1)(lnx - 2)}{(x)^2} = \frac{1 - lnx + 2}{(x)^2} = \frac{3 - lnx}{x^2}$

2) Démontrons que $\boldsymbol{f'(x)}$ est positive sur l'intervalle $[\mathbf{10}\,;\mathbf{e^3}]$ et négative sur $[\mathbf{e^3}\,;\mathbf{100}]$

Pour tout $\boldsymbol{x} \in [\mathbf{10}\,;\mathbf{100}], \boldsymbol{x^2} > 0$ alors le signe de $\boldsymbol{f'(x)}$ dépend donc du signe de $\mathbf{3} - \boldsymbol{lnx}$

Posons $\mathbf{3} - \boldsymbol{lnx} > 0 \Leftrightarrow -\boldsymbol{lnx} > -3 \Leftrightarrow \boldsymbol{lnx} < 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} < \boldsymbol{e^3}$

=> $\forall\, \boldsymbol{x} < \boldsymbol{e^3},\ \mathbf{3} - \boldsymbol{lnx} > 0$ et $\forall\, \boldsymbol{x} > \boldsymbol{e^3},\ \mathbf{3} - \boldsymbol{lnx} < 0$

D'où $\forall\, x \in [10\,;e^3]$, $f'(x) > 0$ et $\forall\, x \in [e^3\,;100]$, $f'(x) < 0$

$f(10) = \frac{\ln 10 - 2}{10} = 0,03$; $f(e^3) = \frac{\ln e^3 - 2}{e^3} = \frac{3 - 2}{e^3} = \frac{1}{e^3} = e^{-3}$

et $f(100) = \frac{\ln 100 - 2}{100} = 0,02$

3) Dressons le tableau de variations de f.

x	10		e^3		100
$f'(x)$		+		−	
$f(x)$	$0,03$	↗	e^{-3}	↘	$0,02$

Partie B

On se propose d'Exprime la capacité pulmonaire de l'être humain en fonction de son âge x, représenté en années et,$g(x)$ la capacité pulmonaire en litres. On admet que sur l'intervalle$[10\,;100]$on a : $g(x) = 110f(x)$ où f est la fonction définie dans la partie A

1) Calculons la capacité pulmonaire à 10ans, 15ans, 30ans et 60ans.

- La capacité pulmonaire à 10 ans est : $g(10) = 110f(10) = 110 \times 0,03 = 3,3\ litres$
- La capacité pulmonaire à 15 ans est : $g(15) = 110f(15) = 110 \times 0,04 = 4,4\ litres$
- La capacité pulmonaire à 15 ans est : $g(30) = 110f(30) = 110 \times 0,05 = 5,5\ litres$
- La capacité pulmonaire à 15 ans est : $g(60) = 110f(60) = 110 \times 0,03 = 3,3\ litres$

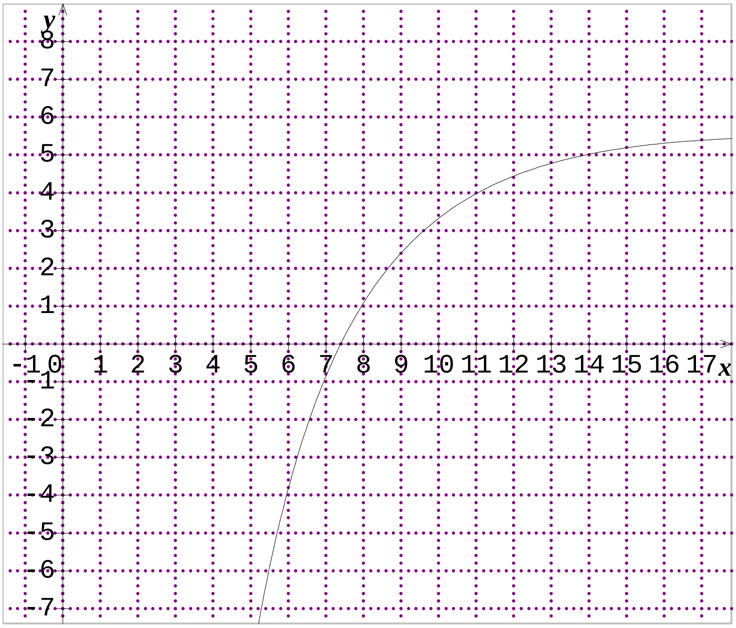
2) Traçons la courbe représentative de g dans un repère orthogonal.
(On prendra en abscisse : 1cm pour 10 ans et en ordonnées 1cm pour 10 litres).

En utilisant le tableau de variation de f, on en déduit celui de g :

x	10		e^3		100
$g'(x)$		+		−	
$g(x)$	$3,3$	↗	$110e^{-3}$	↘	$2,2$

3) Déterminons l'âge à partie du quel la capacité pulmonaire est maximale
En utilisant le tableau de variation ci-dessus, on a :
La capacité pulmonaire est maximale à l'âge de : $e^3 = 20,08 \approx 20$ ans et cette capacité maximale correspond à $110e^{-3} = 5,47\ litres.$

4) Déterminons graphiquement l'intervalle du temps durant lequel la capacité pulmonaire reste supérieure ou égale à 5 litres.



En observant le graphique, la capacité pulmonaire reste supérieure ou égale à 5 litres dans l'intervalle du temps $]14\ ;\ +\infty[$

Problèmes

11

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $]\ 0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$

1) Dressons le tableau de variation de g.

$lim\ g(x) = lim\ -x^2 + 1 - \ln x = -(0)^2 + 1 - (-\infty) = +\infty$

$x \to 0 \qquad x \to 0$

$lim\ g(x) = lim\ -x^2 + 1 - \ln x = -(+\infty)^2 + 1 - (+\infty) = -\infty - \infty = -\infty$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

$g(x) = -x^2 + 1 - \ln x \Rightarrow g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = -\left(2x + \frac{1}{x}\right).$

Alors $\forall x \in]\ 0\ ;\ +\infty[\ \ g'(x) < 0$. D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	0	$-\infty$

2) Calculons $g(1)$ puis en déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

$g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$ => $g(1) = 0$

Alors d'après le tableau de variation de g, on a :

$\forall x \in]\,0\,;\,1[\;\; g(x) > 0$ et $\forall x \in]\,1\,;\,+\infty[\;\; g(x) < 0$

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $]\,0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x}$ et (C) sa courbe dans le repère orthonormé $(o\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

1) Dressons le tableau de variation de f.

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x}$

$lim\, f(x) = lim - \frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x} = -\frac{1}{2}(0) + 1 + \frac{1}{2}(-\infty) = -\infty$

$x \to 0 \qquad x \to 0$

$lim\, f(x) = lim - \frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x} = -\frac{1}{2}(+\infty) + 1 + \frac{1}{2}(0) = -\infty$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x}$ => $f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1 - lnx}{2x^2} = \frac{-x^2 + 1 - lnx}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$

$\forall x \in]\,0\,;\,+\infty[\;, 2x^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$.

Or d'après **Partie A 2)**, on a :

$\forall x \in]\,0\,;\,1[\;\; g(x) > 0$ => $\forall x \in]\,0\,;\,1[\;\; f'(x) > 0$

et $\forall x \in]\,1\,;\,+\infty[\;\; g(x) < 0$ => $\forall x \in]\,1\,;\,+\infty[\;\; f'(x) < 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0		α		1		β		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

2) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec (α $< \beta$)

D'après le tableau de variation de f , $\forall x \in]\, 0\,;\ 1[$ f est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $]\, 0\,;\ 1[$ vers $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$.
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une première solution α

De même , $\forall x \in]\, 1\,;\ +\infty[$ f est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $]\, 1\,;\ +\infty[$ vers $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une deuxième solution β

3) a) Montrons que la droite (Δ)d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f.

La droite (Δ)d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f si et seulement si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x}\right) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x} + \frac{1}{2}x - 1$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{lnx}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} \bullet \frac{lnx}{x} = \frac{1}{2}(0) = 0$$

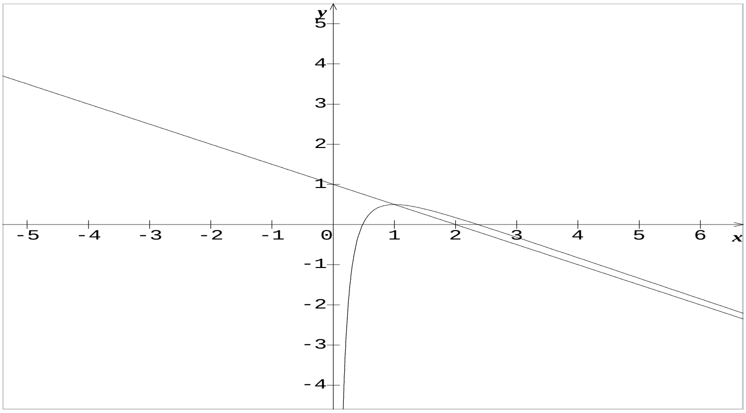
D'où la droite (Δ)d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f

b) Etudions le signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ puis en déduis la position de (C) et (Δ).

L'étude du signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ nous permet d'en déduis que :

- $\forall x \in]\, 0\,;\ 1[$; (C) est en dessous de la droite (Δ)
- $\forall x \in]\, 1\,;\ +\infty[$; (C) est au dessus de la droite (Δ)

4) Traçons (C) et (Δ) dans le même repère.



12 **Partie A** :

On considère la fonction g définie sur $]\,0\,;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$

1- Etudions les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} x^2 + 2 - 2\ln x = (0)^2 + 2 - 2(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 + 2 - 2\ln x = (+\infty)^2 + 2 - 2(+\infty) = +\infty - \infty = "FI"$$

Levons l'indétermination

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 + 2 - 2\ln x = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) = (+\infty)^2(1 + 0 - 0) = +\infty$$

2- Dressons le tableau de variation de g puis en déduis son signe sur $]\,0\,;\ +\infty[$

$$g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x \Rightarrow g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$$

$\forall x \in\ ]\,0\,;\ +\infty[\ ;\ x > 0$ Alors le signe de $g'(x)$ dépend du signe de $x^2 - 1$

Posons $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \notin D_g$ ou $x = 1$

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau de variation de g , $\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[\ g(x) > 0$

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $\left]0\,;\,+\infty\right[$ par : $f(x) = x + 2\frac{lnx}{x}$ et soit (C) sa

courbe représentative dans le repère orthonormé $\left(o\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm)

1) a) Calculons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$lim\ f(x) = lim\ x + 2\frac{lnx}{x} = 0 + 2(-\infty) = -\infty$

$x \to 0 \qquad x \to 0$

$lim\ f(x) = lim\ x + 2\frac{lnx}{x} = +\infty + 2(0) = +\infty$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

b) Etudions les variations de f et Dresse sont tableau de variation.

$f(x) = x + 2\frac{lnx}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{2(1-lnx)}{x^2} = \frac{x^2+2-2lnx}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

$\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[\ , x^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$.

Or d'après **Partie A 2)**, on a : $\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[\ g(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[\ f'(x) > 0$

D'où $\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[$; f est strictement croissante le tableau de variation de f est le suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

c) Montrons que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C), puis étudions la position de (C) par rapport à la droite (Δ).

La droite (Δ)d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) de f si et seulement si

$\lim f(x) - y = 0$

$x \to +\infty$

$\lim f(x) - y = \lim \left(x + 2\,\frac{lnx}{x}\right) - (x) = \lim x + 2\,\frac{lnx}{x} - x = \lim 2\,\frac{lnx}{x} = 2(0) = 0$

$x \to +\infty$ $\quad x \to +\infty$ $\quad x \to +\infty$ $\quad x \to +\infty$

D'où la droite (Δ)d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) de f

Etudions le signe de $f(x) - y$ puis en déduis la position de (C) et (Δ).

L'étude du signe de $f(x) - y$ nous permet d'en déduis que :

- $\forall x \in]\,0\,;\ 1[\,;$ (C) est en dessous de la droite (Δ)
- $\forall x \in]\,1\,;\ +\infty[\,;$ (C) est au dessus de la droite (Δ)

2) Déterminons les coordonnées du point A sachant que la courbe (C) admet au point A une tangente (T) parallèle à (Δ).

- Soit (T) la tangente $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
- Soit la droite (Δ) d'équation $y = x$
- Soit $A\binom{x_0}{y_0}$ ce point

La tangente (T) est parallèle à la droite (Δ) si et seulement si les coefficients directeurs sont égale c'est –à-dire$f'(x_0) = 1$. Or $f'(x_0) = \frac{{x_0}^2 + 2 - 2lnx_0}{{x_0}^2}$

$f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{{x_0}^2 + 2 - 2lnx_0}{{x_0}^2} = 1 \Leftrightarrow {x_0}^2 + 2 - 2lnx_0 = {x_0}^2 \Leftrightarrow 2 - 2lnx_0 = 0 \Leftrightarrow$

$lnx_0 = 1$ => $x_0 = e$ et $y_0 = x_0 = e$.

D'où $A\binom{e}{e}$ est le point cherché.

3) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que α $[0{,}5\ ;\ 1]$

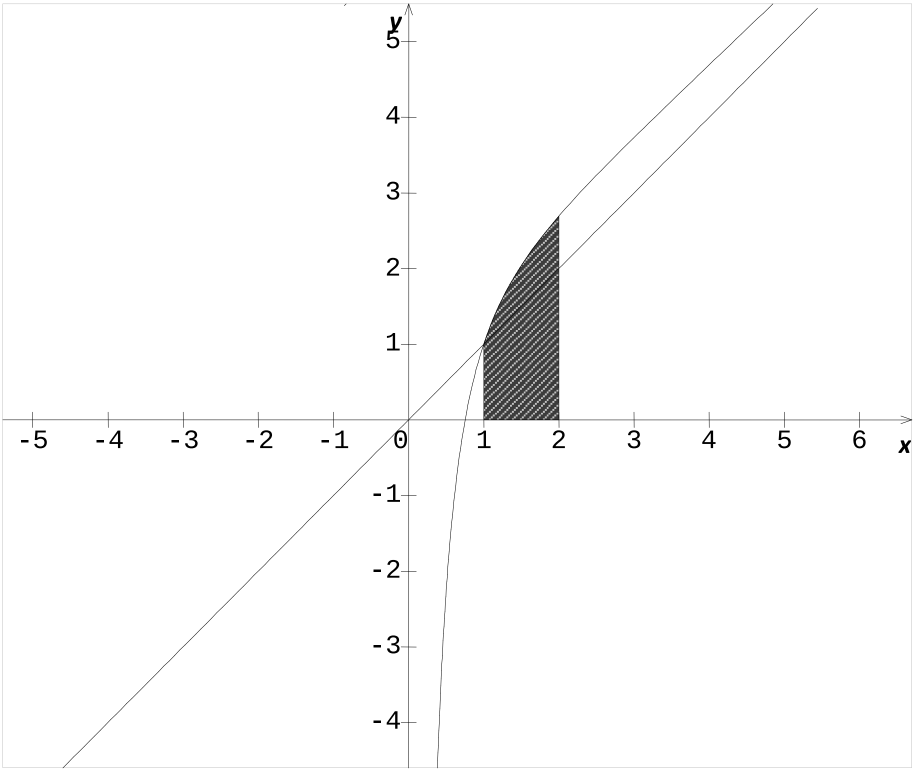
- D'après le tableau de variation de f , $\forall x \in]\,0\,;\ +\infty[$ f est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $]\,0\,;\ +\infty[$ vers $]-\infty\,;\ +\infty\,[$.
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $f(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} f(0,5) = -2,2 \\ f(1) = 1 \end{cases}$ => $f(0,5) \times f(1) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires α $[0,5 \; ; \; 1]$

<u>Conclusion</u> : l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que α $[0,5 \; ; \; 1]$

4) Trace (C) et (Δ) dans le même repère.



5) Hachurons puis calculons l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) ; la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

Soit $A = \int_1^2 [f(x) - y]dx$ cette aire

$A = \int_1^2 [f(x) - y]dx \Leftrightarrow A = \int_1^2 \left[\left(x + 2\,\frac{lnx}{x}\right) - (x)\right]dx \Leftrightarrow A = \int_1^2 \left(2\,\frac{lnx}{x}\right)dx$

=> $A = 2\int_1^2 \frac{lnx}{x}dx = 2\int_1^2 \frac{1}{x}lnxdx = 2\left[\frac{(lnx)^2}{2}\right]_1^2 = [(lnx)^2]_1^2$ =1,92 cm^2

Pour le domaine hachuré, (Voir figure)

13 **Partie A** :

1) On considère la fonction numérique g définie par $g(x) \;=\; 1 + x^2 \;-\; 2x^2 lnx$

a- Dressons le tableau de variation de g.

$D_g \;=]\,0\,;\; +\infty[$

$lim\; g(x) = lim\; 1 + x^2 - 2x^2 lnx \;= 1 + (0)^2 - 2(0) = 1$

$x \to 0 \qquad x \to 0$

$lim\; g(x) = lim\; 1 + x^2 - 2x^2 lnx \;= 1 + (+\infty)^2 - 2(+\infty) = +\infty - \infty = "FI\,"$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

Levons l'indétermination

$lim\; g(x) = lim\; 1 + x^2 - 2x^2 lnx \;= lim\; x^2\left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2lnx\right) = (+\infty)^2(0 + 1 - \infty) = -\infty$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad\qquad\qquad x \to +\infty$

$g(x) \;=\; 1 + x^2 \;-\; 2x^2 lnx$ => $g'(x) = -\;4xlnx$

$\forall x \in]\,0\,;\; +\infty[\,;\; -\;4x \;< 0$. Alors le signe de $g'(x)$ dépend du signe de lnx

Posons $lnx > 0$ => $x > e^0$ => > 1. Ainsi pour les $x > 1$, on a : $lnx > 0$

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0		1		α		$+\infty$
$-4x$	‖	$-$				$-$	
lnx	‖	$-$	0			$+$	
$g'(x)$	‖	$+$				$-$	
$g(x)$	‖ 1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

b- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que :
$1{,}89 \;<\; \alpha \;<\; 1{,}90$.

- D'après le tableau de variation de g , $\forall x \in]\,1\,;\; +\infty[$ f est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $]\,1\,;\; +\infty[$ vers $]-\infty\,;\; 2\,[$.
Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} g(1{,}89) = 0{,}02 \\ g(1{,}90) = -0{,}02 \end{cases}$ => $g(1{,}89) \times g(1{,}90) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a : 1,89 < α < 1,90.

<u>Conclusion</u> : l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $1{,}89 < \alpha < 1{,}90$.

c- Déduis de ce qui précède le signe de $g(x)$.

Alors d'après le tableau de variation de g, on a :

$\forall x \in]\,0\,;\,\alpha[\ \ g(x) > 0$ et $\forall x \in]\,\alpha\,;\,+\infty[\ \ g(x) < 0$

2) On considère la fonction numérique f définie sur $]\,0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{lnx}{1+x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,)$ (unité graphique 2 cm)

a- Dressons le tableau de variation de f.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{lnx}{1+x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{lnx}{1+x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x^2} = 0$$

$$f(x) = \frac{lnx}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2)-2x(lnx)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2lnx}{x(1+x^2)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$$

$\forall x \in]\,0\,;\,+\infty[\,;\ x(1+x^2)^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$

Or d'après **Partie A 1) c)**, on a :

$\forall x \in]\,0\,;\,\alpha[\ \ g(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in]\,0\,;\,\alpha[\ \ f'(x) > 0$ et

$\forall x \in]\,\alpha\,;\,+\infty[\ \ g(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in]\,\alpha\,;\,+\infty[\ \ f'(x) < 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

b- Vérifions que $f(\alpha)\ = \frac{1}{2\alpha^2}$. En déduis un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude $2 \cdot 10^{-1}$

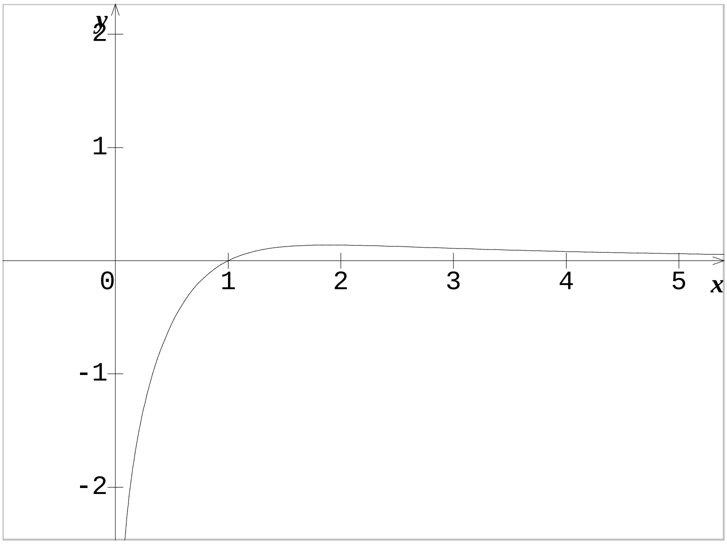
D’après **Partie A 1) b)**,on a : $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha^2\ - 2\alpha^2 ln\alpha = 0 \Rightarrow ln\alpha = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$

D’autre part $f(x) = \frac{lnx}{1+\ x^2} \Rightarrow f(\alpha) = \frac{ln\alpha}{1+\ \alpha^2}$

Remplaçons $ln\alpha = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$ par sa valeur dans $f(\alpha) = \frac{ln\alpha}{1+\ \alpha^2}$. Ainsi on a :

$f(\alpha) = \frac{ln\alpha}{1+\ \alpha^2} \Rightarrow f(\alpha) = \frac{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{1+\ \alpha^2} = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2(1+\ \alpha^2)} = \frac{1}{2\alpha^2}$. D’où $(\alpha)\ = \frac{1}{2\alpha^2}$.

c- Traçons (C) dans le repère.



Partie B :

On considère la fonction numérique définie sur $]\,0\,;\,+\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$

1) a) Prouvons que F est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty[$ et précisons $F'(x)$.

f est une fonction continue sur $]\,0\,;\,+\infty[$. Alors F est donc dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty[$

Sa fonction dérivée est $F'(x) = f(x)$ avec $f(x) = \frac{lnx}{1+\ x^2}$

b) En déduis le sens de variation de F.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	||	$-$	0	$+$	
$F(x)$	||	$\searrow$	0	$\nearrow$	

D’après le tableau :

$\forall\ x\ \in]\ 0\ ;\ 1[$; F est strictement décroissante

$\forall\ x\ \in]\ 1\ ;\ +\infty[$; F est strictement croissante

2) a) Vérifions que $\forall\ t\ \geq 1$; on a : $\frac{lnt}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{lnt}{t^2}$

On sait que $\forall\ t\ \geq 1$; on a : $t^2 \leq 1 + t^2 \leq t^2 + 2t + 1$

En prenant les inverses, on a : $\frac{1}{t^2+2t+1} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$

En multipliant cette dernière par $lnt,$ on a :

$\frac{lnt}{(1+t)^2} \leq \frac{lnt}{1+t^2} \leq \frac{lnt}{t^2} \Leftrightarrow \frac{lnt}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{lnt}{t^2}$ (ce qu’il fallait Démontre)

b) Pour tout $x > 0$ et $t \neq 0$; on pose $I(x) = \int_1^x \frac{lnt}{t^2}\,\mathrm{dt}$ et $J(x) = \int_1^x \frac{lnt}{(1+t)^2}\,\mathrm{dt}$

- A l'aide d'une intégration par parties, Calcule $I(x)$

$I(x) = \int_1^x \frac{lnt}{t^2}\,\mathrm{dt} = \int_1^x \frac{1}{t^2}\,lnt\,\mathrm{dt}$

Posons $u(t) = lnt$ => $u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = \frac{1}{t^2}$ => $v(t) = -\frac{1}{t}$

=> $I(x) = \left[-\frac{lnt}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{dt} = \left[-\frac{lnt}{t}\right]_1^x + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = \left[-\frac{lnt}{t} - \frac{1}{t}\right]_1^x$

=> $I(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{lnx}{x}$

c) A l'aide d'une intégration par partie et de l'égalité : $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$, calculons $J(x)$.

Puis en déduisons de ce qui précède que $\forall\ x\ > 1$; on a :

$ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{lnx}{x} - \frac{1}{\square}$

$J(x) = \int_1^x \frac{lnt}{(1+t)^2}\text{dt} \quad = \int_1^x \frac{1}{(1+t)^2} \times lnt \text{ dt}$

Posons $u(t) = lnt$ => $u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$ => $v(t) = -\frac{1}{1+t}$

=> $J(x) = \left[-\frac{lnt}{1+t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t(1+t)}\text{dt} \ = \left[-\frac{lnt}{1+t}\right]_1^x + \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)\text{dt}$

=> $J(x) = \left[-\frac{lnt}{1+t}\right]_1^x + [lnt - ln(1+t)]_1^x \ = \left[-\frac{lnt}{1+t}\ lnt - ln(1+t)\right]_1^x$

=> $J(x) = ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{1+x}$

En déduisons que $\forall\ x\ > 1$; on a : $ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{x+1} \leq\ F(x) \leq 1 - \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}$

D'après 2) a), on a : $\frac{lnt}{(1+t)^2} \leq\ \int_1^x f(t)\text{dt}\ \leq\ \frac{lnt}{t^2}$. Intégrons cette inégalité sur $[1\ ;\ x]$

$\int_1^x \frac{lnt}{(1+t)^2}\text{dt}\ \leq\ \int_1^x f(t)\text{dt}\ \leq \int_1^x \frac{lnt}{t^2}\text{dt}\ \Leftrightarrow\ J(x) \leq\ F(t) \leq I(x)\ \Leftrightarrow$

$ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{x+1} \leq\ F(x) \leq 1 - \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}$

d) On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \theta$. Sans Calcule θ vérifions que $ln2 \leq \theta \leq 1$

On sait que : $ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{x+1} \leq\ F(x) \leq 1 - \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}$

En appliquant le théorème des gendarmes à l'inégalité :

$ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{x+1} \leq\ F(x) \leq 1 - \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}$, on a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{x+1}\ \leq\ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)\ \leq\ \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}\ \Leftrightarrow$

$ln2 \leq \theta \leq 1$ (Ce qu'il fallait Démontre)

14 L'objectif de ce problème est l'étude complète de la fonction numérique f définie pour tout nombre réel x différent de -1 par :

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| \; si \; x \neq 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

Les parties A et B sont indépendantes.

On notera (Cf)la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

<u>**Partie A**</u> : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$

1) Déterminons l'ensemble de définition Dg

D$g = \left\{x \,/\, x \in \mathbb{R}\,; x(x+1) \neq 0 \; et \; 1 + \frac{1}{x} \neq 0\right\}$ => D$g = \mathbb{R} - \{0\,;\,-1\}$

=> D$g = \,]-\infty\,;\,-1[\, \cup \,]-1\,;0[\, \cup \,]0\,;\,+\infty[$

Déterminons les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^2} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = 0$$

2) Etudions les variations de g ; on ne demande pas de Calcule ses limites en -1 et en 0.

$g(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$ => $g'(x) = \frac{-1}{x^2(x+1)^2}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{0\,;-1\}$; on a : $g'(x) < 0$

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$			‖	$-$	
$g(x)$	0	↘	‖	↘	0	↘	‖	↘	0

3) Calculons $g\left(-\frac{1}{2}\right)$

$g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

D'après le tableau de variation de g ; on a :

$\forall\, x \in\ ]-\infty\,;\,-1[\ \cup \left]-\frac{1}{2}\,;0\right[\ ; g(x) < 0$ et $\forall\, x \in \left]-1\,;\,-\frac{1}{2}\right[\cup\ ]0\,;+\infty[\ ; g(x) > 0$

<u>Partie B</u> : Etude de la limite de f à l'infini.

1) Soient les fonctions h et k définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$h : t \to ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2}\right)$ et $k : t \to ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)$

Après une brève étude sur $[0\ ;\ +\infty[$ des fonctions h et k ; démontrons que :

$\forall\, t \geq 0$; on a : $t - \frac{t^2}{2} \leq\ ln(1+t) \leq\ t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

- Etude brève de $h(t) = ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2}\right)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$

$h'(t) = \frac{t^2}{1+t}$ => $\forall\, t \in$; $[0\ ;\ +\infty[\ \ h'(t) \geq 0$. Alors h est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

De plus $h(0) = 0$. Donc $\forall\, t \geq 0$; on a : $h(t) \geq 0$ et par suite $t - \frac{t^2}{2} \leq\ ln(1+t)$

- Etude brève de $k(t) = ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$

$k'(t) = -\frac{t^3}{1+t}$ => $\forall\, t \in$; $[0\ ;\ +\infty[\ \ k'(t) \leq 0$. Alors k est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

De plus $k(0) = 0$. Donc $\forall\, t \geq 0$; on a : $k(t) \leq 0$ et par suite $ln(1+t) \leq\ t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

<u>Conclusion</u> $\forall\, t \geq 0$; on a : $t - \frac{t^2}{2} \leq\ ln(1+t) \leq\ t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

2) En déduisons que $\lim\limits_{t \to 0} \frac{t - ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$

D'après ce qui précède, on a : $t - \frac{t^2}{2} \leq\ ln(1+t) \leq\ t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

Multiplions tous les membres de l'inégalité par -1. Ainsi on a :

$-t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\leq\ -ln(1+t)\leq\ -t+\frac{t^2}{2}$

Ajoutons t à tous les membres de l'inégalité. Ainsi on a :

$\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\leq\ t-ln(1+t)\leq\ \frac{t^2}{2}$

Divisons tous les membres de l'inégalité part^2. Ainsi on a :

$\frac{1}{2}-\frac{t}{3}\leq\ \frac{t-ln(1+t)}{t^2}\leq\ \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{2}-\frac{t}{3}=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Alors d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t-ln(1+t)}{t^2}=\frac{1}{2}$

3) En utilisant les résultats précédents, démontrons que $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=\frac{1}{2}$

$f(x)=x-\ x^2ln\left|1+\frac{1}{x}\right|$. Posons $x=\frac{1}{t}$ => $f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t}-\ \frac{1}{t^2}ln(1+t)$.

Quand t tend vers 0 , alors x tend vers $+\infty$

Alors $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\ \lim\limits_{t\to 0}\frac{t-ln(1+t)}{t^2}=\frac{1}{2}$ De même $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=\ \lim\limits_{t\to 0}\frac{t-ln(1+t)}{t^2}=\frac{1}{2}$

Interprétation graphique des résultats de la question précédente.

Puisque $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\ \lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=\frac{1}{2}$. Alors la droite d'équation $y=\frac{1}{2}$

Alors la droite d'équation $y=\frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe (Cf)

<u>Partie C</u> : Etude de la fonction f.

$f(x)=x-\ x^2ln\left|1+\frac{1}{x}\right|$

1) Déterminons Df

Df $= \left\{x \,/\, x \in \mathbb{R} \,; x \neq 0 \; et \; 1 + \frac{1}{x} \neq 0\right\}$ => Df $= \mathbb{R} - \{0 \,;\, -1\}$

=> Df $= \,]-\infty \,;\, -1[\, \cup \,]-1 \,; 0[\, \cup \,]0 \,;\, +\infty[$

Calculons la limite de f en -1

$\forall x \in$ Df ; $f(x) = x - x^2 ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$ et on a : $\lim_{x \to -1} ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = -\infty$

Donc $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$

2) Etudions la continuité de f en 0

f est continue en 0 si et seulement si $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x - x^2 ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = \lim_{x \to 0} x - x^2 ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$

$= \lim_{x \to 0} x - x^2 ln|x + 1| + x^2 ln|x|$. Or $\lim_{x \to 0} xlnx = 0$

Donc $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. De plus $f(0) = 0$ donc f est continue en 0

3) Démontrons que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$

f est dérivable en 0 si et seulement si $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - x^2 ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|}{x} = \lim_{x \to 0} 1 - xln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$

$$= \lim_{x \to 0} 1 - x\ln|x+1| + x\ln|x|. \text{ Or } \lim_{x \to 0} x\ln|x| = 0$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$

Conclusion : f est dérivable en 0 et son nombre dérivé est $f'(0) = 1$

4) Calculons la dérivée de f et démontrons que $f'(x) = x \times g(x)$

$\forall x \in \mathrm{D}f$; $f(x) = x - x^2 ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$ => $f'(x) = \frac{2x+1}{x+1} - 2xln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$

=> $f'(x) = x\left[\frac{2x+1}{x(x+1)} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|\right]$ => $f'(x) = x \times g(x)$ (Ce qu'il fallait Démontre)

5) Dressons le tableau de variations de f

D' après **Partie A ; 3)** , et **Partie C ; 4) on a** :

$\forall\, x \in \left]-\infty\,; -1\right[\cup \left]-\frac{1}{2}\,; 0\right[\cup \left]0\,; +\infty\right[\,; f'(x) > 0$ et $\forall\, x \in \left]-1\,; -\frac{1}{2}\right[\,; f'(x) < 0$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	¦	$+$	
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$-\frac{1}{2}$

6) Déterminons une équation de la tangente (T)à (Cf)au point d'abscisse 0

L'équation de la tangente (T)à (Cf)au point d'abscisse 0 est $y = x$

Déterminons les asymptotes à (Cf).

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$. Alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe (Cf).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$. Alors la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote verticale à la Courbe (Cf).

7) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions 0 et β avec $-0,8 < \beta < -0,7$.

- $\forall\, x \in \left]-1\,;-\frac{1}{2}\right]$; f est continue et strictement décroissante de $\left]-1\,;-\frac{1}{2}\right]$ vers $\left[-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β telle que $f(\beta) = 0$

- De plus $\begin{cases} f(-0,8) = 0,087 \\ f(-0,7) = -0,28 \end{cases}$ => $f(-0,8) \times f(-0,7) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\beta \in \left]-0,8\,;\,-0,7\right[$

De même :

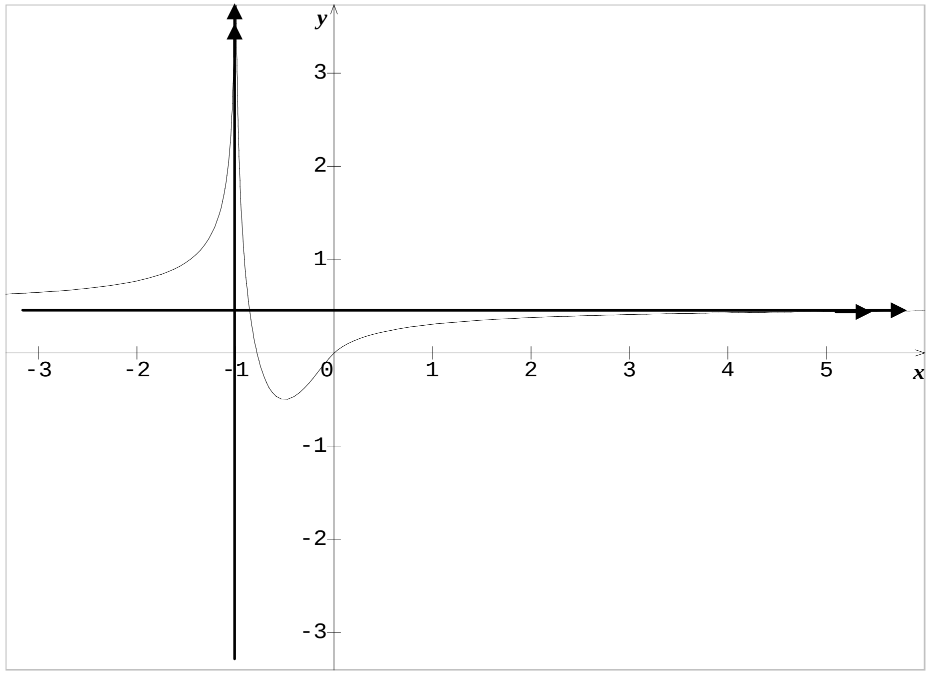
$\forall\, x \in \left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$; f est continue et strictement croissante de $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ vers $\left]-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right[$
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique δ telle que $f(\delta) = 0$

Or $f(0) = 0$ donc $\delta = 0$

$\forall\, x \in \left]-\infty\,;\,-1\right[$; $f(x) > 0$.

<u>Conclusion</u> : l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions 0 et β avec $-0,8 < \beta < -0,7$.

8) Traçons (T) ; les asymptotes et la courbe (Cf)



15 **Partie A** :

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie A la fonction numérique f définie sur

$]\,0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2}$, de Détermine ensuite dans la **partie B** la position de sa

courbe représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite récurrente dans la partie (Γ), cette dernière partie étant dans une large mesure indépendante des deux autres.

1) a) Dérivée de la fonction g

La fonction g, définie sur $]\,0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x - 2\,lnx + 1$est dérivable sur $]\,0\ ;\ +\infty[$ (comme somme algébrique de telles fonctions) et sa dérivée est :

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x} = \frac{(x-1)(3x^2 - x - 2)}{x}$$

b) Variations de g et signe de $g(x)$.

On peut résumer l'étude du sens de variation de g et du signe de $g(x)$ dans le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$3x^2 + 3x + 2$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau de variation, $g(x) > 0$

2) a) Limite de f en 0 et en $+\infty$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2} = +\infty$$

b- Montrons que pour tout $x \in]\,0\ ;\ +\infty[\,,f\,'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ puis donnons le tableau de variations de la fonction f.

La fonction f, définie sur $]\,0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa

dérivée est : $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1-2lnx}{x^3} = \frac{x^3 - x + 1 - 2lnx}{x^3}$ => $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

$\forall x \in]\,0\,;\ +\infty[\,;\ x^3 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$

Or d'après **Partie A 1) b)**, on a :

$\forall x \in]0\,;+\infty[\,;\ g(x) > 0$ => $\forall x \in]0\,;+\infty[\ \ f'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

<u>Partie B</u> :

Soit h la fonction définie sur $]\,0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = x + ln\,x$.

1) Etudions le sens de variation de h puis montrons que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle$[\,0{,}4\ ;\ 0{,}7\,]$

La fonction h définie sur$]\,0\ ;\ +\infty[$ est également dérivable$]\,0\ ;\ +\infty[$ et sa fonction dérivée est $h'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$ =>$\forall x \in]0\,;+\infty[\,;h'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de h est le suivant :

x	0		α		$+\infty$
$h'(x)$		$+$			
$h(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

- D'après le tableau de variation de h , $\forall x \in]\,0\,;\ +\infty[\ \ h$ est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $]\,0\,;+\infty[$ vers $]-\infty\,;+\infty[$.
Alors l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $h(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} h(0{,}4) = -0{,}52 \\ h(0{,}7) = 0{,}34 \end{cases}$ => $h(0{,}4) \times h(0{,}7) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a : $\alpha \in [\ 0{,}4\ ;\ \ 0{,}7\ ]$

Conclusion : l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [\ 0{,}4\ ;\ \ 0{,}7\ ]$

2) Montrons que l'on a : $e^{-\alpha} = \alpha$

D'après **Partie B 1)** on a : $h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \ln \alpha = 0 \Rightarrow \ln \alpha = -\alpha \Rightarrow e^{-\alpha} = \alpha$

3) a- Vérifions que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à Γ en $+\infty$.

La droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (Γ) en $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = 0 = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2}\right) - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2} = 0$$

D'où La droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (Γ) en $+\infty$

b- Utilisons les résultats de la **Partie B** question **1)** pour Détermine les positions relatives de (Γ) et Δ.

Pour étudier la position relative (Γ) et (Δ) nous devons étudier le signe de $f(x) - y$.

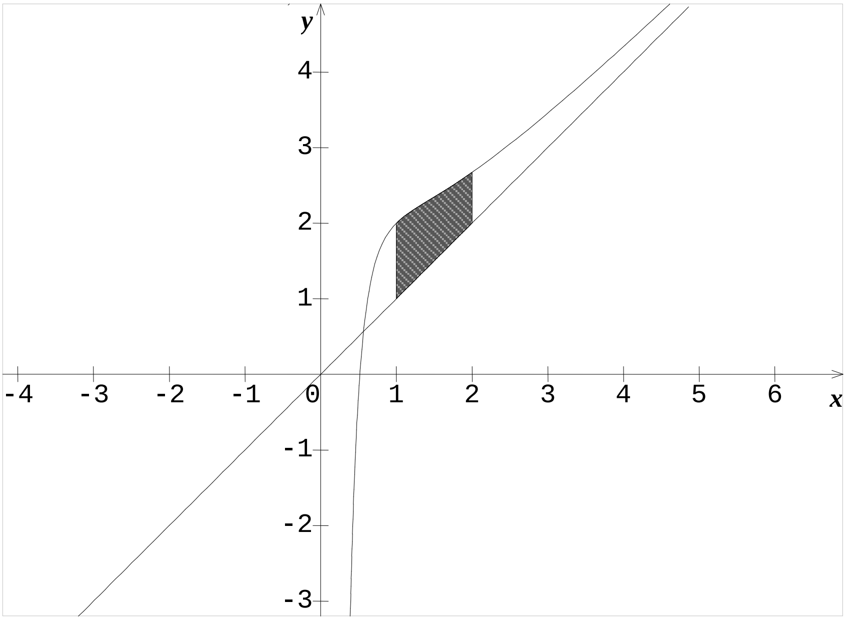
Or $f(x) - y = \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$.
Donc le signe de $f(x) - y$ dépend du signe de $h(x)$.

Or d'après le tableau de variation obtenu dans la **Partie B 1)** on a :

$\forall x \in]\ 0\ ;\ \alpha[\ \ h(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in]\ 0\ ;\ \alpha[\ \ f(x) - y < 0$ et par conséquent $\forall x \in]\ 0\ ;\ \alpha[$; la courbe (Γ) est en dessous de la droite (Δ)

De même $\forall x \in]\ \alpha\ ;\ +\infty[\ \ h(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in]\ \alpha\ ;\ +\infty[\ \ f(x) - y > 0$ et par conséquent $\forall x \in]\ \alpha\ ;\ +\infty[$; la courbe (Γ) est au dessus de la droite (Δ)

4) Construction de la courbe (Γ) et de la droite Δ dans le repère ortho normal $(o\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$



5) a- Calculons au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale I $= \int_1^2 \frac{lnt}{t^2}dt$

I $= \int_1^2 \frac{lnt}{t^2}dt = \int_1^2 \frac{1}{t^2}lnt\, dt$

Posons : $u(t) = lnt$ => $u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = \frac{1}{t^2}$ => $v(t) = -\frac{1}{t}$

=> I $= \left[-\frac{lnt}{t}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t^2}dt = \left[-\frac{lnt}{t}\right]_1^2 + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = \left[-\frac{lnt}{t} - \frac{1}{t}\right]_1^2 = \left[-\frac{1+lnt}{t}\right]_1^2$

=> I $= \frac{1-ln2}{2}$

b- En déduisons l'aire, en cm^2 de la portion de plan limitée par la courbe (Γ) , la droite Δ et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation $x = 1\ et\ x = 2.$

L’aire A de la portion de plan indiquée est, en cm^2, puisque (Γ) est au dessus de (Δ) et puisque (Δ) est au dessus de l’axe des abscisses pour $1 \le x \le 2$

A $= (2\ cm)^2 \int_1^2 (f(x) - y)dt = 4\ cm^2 \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2}\right)dt = 4\ cm^2 \int_1^2 \frac{1}{x}dt + 4\ cm^2 \int_1^2 \frac{lnx}{x^2}dt$

$= 4\ cm^2 \int_1^2 \frac{1}{x}dt + 4I\ cm^2 = 4\ cm^2 [lnt]_1^2 + 4I\ cm^2 = 4\ cm^2 ln2 + 4I\ cm^2$

$= 4\ cm^2 ln2 + 4cm^2\left(\frac{1-ln2}{2}\right) = \ 4cm^2\left(ln2 + \frac{1-ln2}{2}\right) = \ 4cm^2\left(\frac{2ln2+1-ln2}{2}\right)$

$= \ 4cm^2\left(\frac{ln2+1}{2}\right) \ = \ 2cm^2(ln2+1) = (2ln2+2)cm^2 = 3{,}39cm^2$

<u>Partie C</u> : Etude d'une suite

Dans cette partie :

- I désigne l'intervalle [0,4 ; 0,7]
- α est le réel mis en évidence au **B. 1**.
- $\varphi(x)$ est la fonction définie sur ℝ par $\varphi(x) = e^{-x}$

1) u est la suite récurrente définie par $\forall\ n \ \in \ \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_0 = 0{,}4 \\ u_{n+1} = \ \varphi(u_n) \end{cases}$

a) Montrons qu'on a pour tout $x \in I$ on a : $\varphi(x) \in I$

Pour tout x de l'intervalle $I = [\ 0{,}4\ ;\ \ 0{,}7\ ]$; $\varphi(x)$ appartient à l'intervalle I.

On peut résumer l'étude des variations de φ sur I dans le tableau suivant :

x	0,4 → 0,7
$\varphi(x)$	0,670 ↘ 0,497

$\varphi(0{,}4) = 0{,}670 < 0{,}7$ et $\varphi(0{,}7) = 0{,}497 > 0{,}4$

Donc pour tout x de l'intervalle $I = [\ 0{,}4\ ;\ 0{,}7\ ]$; $\varphi(x)$ appartient à l'intervalle I.

b) Montrons qu'on a pour tout $x \in I$ on a : $|\varphi'(x)| \leq 0{,}7$

On sait que : $0{,}4 \ \leq x \leq 0{,}7$

Appliquons $\varphi'(x)$ à l'inégalité : $0{,}4 \ \leq x \leq 0{,}7$

=> $\varphi'(0{,}4) \ \leq \varphi'(x) \ \leq \varphi'(0{,}7)$

=> $-0{,}670 \leq \varphi'(x) \leq -0{,}497$

Appliquons la valeur absolue à l'inégalité : $-0{,}670 \leq \varphi'(x) \leq -0{,}497$

=> $|-0{,}4970| \ \leq |\varphi'(x)| \leq |-0{,}67| \Leftrightarrow 0{,}4970 \leq |\varphi'(x)| \leq 0{,}67$

=>$|\varphi'(x)| \leq 0{,}67$. Or $0{,}67 \approx 0{,}7$. D'où $|\varphi'(x)| \leq 0{,}7$

c) Montrons qu'on a pour tout $x \in I$ on a : $|\varphi(x) - \alpha| \leq 0{,}7|x - \alpha|$

Puisque $|\varphi'(x)| \leq 0{,}7$ alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction φ pour x appartenant à I, on a : $|\varphi(x) - \varphi(\alpha)| \leq 0{,}7|x - \alpha|$

Or d'après **Partie B 2)** on a $\varphi(\alpha) = e^{-\alpha} = \alpha$. Alors $|\varphi(x) - \varphi(\alpha)| \leq 0{,}7|x - \alpha| \Leftrightarrow$

$|\varphi(x) - \alpha| \leq 0{,}7|x - \alpha|$ (Ce qu'il fallait Démontre)

2) a) Montrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}7|u_n - \alpha|$

On sait que : $|\varphi(x) - \alpha| \leq 0{,}7|x - \alpha|$. Posons $x = u_n$

=> $|\varphi(u_n) - \alpha| \leq 0{,}7|u_n - \alpha|$. Or $\varphi(u_n) = u_{n+1}$

=>$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}7|u_n - \alpha|$ (Ce qu'il fallait Démontre)

En déduisons par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_n - \alpha| \leq 0{,}3(0{,}7)^n$

On sait que $\alpha \in [\,0{,}4 \;;\; 0{,}7\,] \Leftrightarrow 0{,}4 \leq \alpha \leq 0{,}7$ et $u_0 = 0{,}4$

Il vient que $0{,}4 - 0{,}4 \leq \alpha - u_0 \leq 0{,}7 - 0{,}4$

$\Leftrightarrow 0 \leq u_0 - \alpha \leq 0{,}3$

$\Leftrightarrow 0 \leq |u_0 - \alpha| \leq 0{,}3$

$\Leftrightarrow 0 \leq |u_0 - \alpha| \leq 0{,}3(0{,}7)^0$

Alors la relation est vraie à l'ordre $n = 0$

Supposons la relation est vraie à l'ordre n c'est-à-dire $\forall\, n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_n - \alpha| \leq 0{,}3(0{,}7)^n$ puis montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$ c'est-à-dire $\forall\, n \in \mathbb{N}$; on a :
$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}3(0{,}7)^{n+1}$

D'après **Partie C 2) a),** on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}7|u_n - \alpha|$

Par suite $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}7|u_n - \alpha| \leq 0{,}7[0{,}3(0{,}7)^n]$

D'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}3(0{,}7)^{n+1}$

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_n - \alpha| \leq 0{,}3(0{,}7)^n$ (Ce qu'il fallait Démontre).

b) Etudions la convergence de la suite u puis.

Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

La suite de terme général $0{,}3(0{,}7)^n$ est convergente $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et converge donc vers 0.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \alpha = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

D'où la suite u_n est convergente et converge vers α

3) Déterminons un entier p tel que pour $n \geq p$ on ait: $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$puis donnons à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de u_p à 10^{-3}près.

On sait que $|u_n - \alpha| \leq 0{,}3(0{,}7)^n$ et d'autre part $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.

Par identification on a : $0{,}3(0{,}7)^n \leq 10^{-3} \Leftrightarrow (0{,}7)^n \leq \frac{10^{-3}}{0{,}3} \Leftrightarrow e^{n\ln 0{,}7} \leq \frac{10^{-3}}{0{,}3}$

$\Leftrightarrow n\ln 0{,}7 \leq \ln\left(\frac{10^{-3}}{0{,}3}\right) \Rightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{10^{-3}}{0{,}3}\right)}{\ln 0{,}7}$ (Car $\ln 0{,}7 < 0$)

=> $n \geq 15{,}99$. On peut donc prendre $p = 16$

Ainsi à l'aide de la calculatrice, on obtient à 10^{-3}près la valeur de $u_{16} \approx 0{,}567$

En déduisons une valeur approchée par défaut et par excès de α à 10^{-3}près

- $0{,}567$ est la valeur approchée à 10^{-3}près par défaut de α.
- $0{,}568$ est la valeur approchée à 10^{-3}près par excès de α.

16

Partie A :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1 + x)$

1) a) Déterminons l'ensemble de définition de f

$Df = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \,; 1 + x \neq 0 \text{ et } 1 + x > 0\} \Rightarrow Df =]-1\,; +\infty[$

Calculons la limite de f aux bornes de cet ensemble.

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \frac{2x}{1+x} - \ln(1 + x) = \lim\limits_{x \to -1} \frac{2x - (1+x)\ln(1+x)}{1+x}$

Effectuons un changement de variable en posant $X = 1 + x \Rightarrow x = X - 1$

Si $x = -1$ alors $X = 0$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{X \to 0} \frac{2(X-1) - X\ln X}{X} = \lim_{X \to 0} \frac{2X - 2 - X\ln X}{X} = \frac{2(0) - 2 - (0)}{0^+} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} - \ln(x) = 2 - (+\infty) = -\infty$$

b) Déterminons la fonction dérivée de f puis établissons son tableau de variations.

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = \frac{2(1+x) - (1)(2x)}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{2(1+x) - (1)(2x)}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1-x}{(1+x)^2}$$

$\forall x \in Df$ $(1+x)^2 > 0$. Alors le signe $f'(x)$ dépend du signe de $1 - x$

Posons $1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$.

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	-1		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0			$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$1 - \ln 2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

2) Démontrons que $\forall x \in [1 ; +\infty[$; l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α. Vérifions qu'une valeur décimale approchée de α à 10^{-3}près est 3,9.

- D'après le tableau de variation de f , $\forall x \in [1 ; +\infty[$ f est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $[1 ; +\infty[$vers $]-\infty ; 1 - \ln 2]$.
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $f(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} f(3,9) = 0,003 \\ f(4) = -0,009 \end{cases}$ $\Rightarrow f(3,9) \times f(4) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit l'encadrement suivant $3{,}9 < \alpha < 4$

3) Précisons, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$

D'après le tableau de variation de f :

$\forall x \in]-\infty\,;0[\, \cup\,]\alpha\,;\,+\infty[\,;\ f(x) < 0$ et $\forall x \in]0\,;\,\alpha\,[\,;\ f(x) > 0$

<u>Partie B :</u> soit g la fonction définie par : $g(0) = 0$ et $g(t) = \frac{ln(1+t)}{\sqrt{t}}$ si $t > 0$

1) Démontrons que g est continue en 0.

g est continue en 0 si te seulement si $\lim\limits_{t \to 0} g(t) = g(0) = 0$

$$\lim_{t \to 0} g(t) = \lim_{t \to 0} \frac{ln(1+t)}{\sqrt{t}} = \lim_{t \to 0} \frac{ln(1+t)}{t} \times \sqrt{t} = (1) \times (0) = 0$$

Puisque $\lim\limits_{t \to 0} g(t) = g(0) = 0$, alors g est continue en 0.

Etudions la dérivabilité de g en 0.

g est dérivable en 0 si te seulement si $\lim\limits_{t \to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t-0} = g'(0) = l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t-0} = \lim_{t \to 0} \frac{g(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{ln(1+t)}{\sqrt{t}}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{ln(1+t)}{t\sqrt{t}} = \lim_{t \to 0} \frac{ln(1+t)}{t} \times \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$= 1 \times (+\infty) = +\infty \neq l \in \mathbb{R}$$

Alors g n'est pas dérivable en 0.

2) Calculons $g'(t)$ et Exprime $g'(t)$ en fonction de $f(t)$

Pour tout $t > 0$; on a : $g(t) = \frac{ln(1+t)}{\sqrt{t}}$ => $g'(t) = \dfrac{\frac{1}{1+t} \times \sqrt{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}} \times ln(1+t)}{(\sqrt{t})^2}$

$$=> g'(t) = \frac{\frac{\sqrt{t}}{1+t} - \frac{ln(1+t)}{2\sqrt{t}}}{t} = \frac{\sqrt{t}}{t(1+t)} - \frac{ln(1+t)}{2t\sqrt{t}} = \frac{1}{2t\sqrt{t}}\left(\frac{2t}{1+t} - ln(1+t)\right)$$

$$=> g'(t) = \frac{1}{2t\sqrt{t}} \times f(t)$$

3) a) Déterminons la limite en $+\infty$ de g.

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{ln(1+t)}{\sqrt{t}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{ln\left[t\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]}{\sqrt{t}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{lnt + ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{lnt}{\sqrt{t}} + \frac{ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{lnt}{t^{\frac{1}{2}}} + \frac{ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}} = 0 + 0 = 0$$

b) Dressons le tableau des variations de g.

$g'(t) = \frac{1}{2t\sqrt{t}} \times f(t)$. $\forall\, t \in D_g$; $2t\sqrt{t} > 0$. Alors le signe de $g'(t)$ dépend du signe de $f(t)$.

Or D'après **<u>Partie B :</u>** 3) on a :

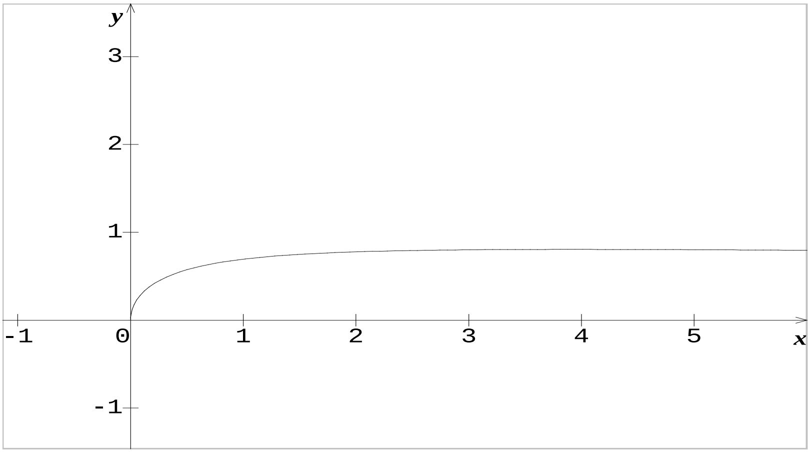
$\forall x \in]-\infty\,;0[\, \cup\,]\alpha\,;\,+\infty[\,;\, f(t) > 0 => \forall x \in]-\infty\,;0[\, \cup\,]\alpha\,;\,+\infty[\,;\, g'(t) < 0$

et $\forall x \in]0\,;\,\alpha\,[\,;\, f(t) < 0$ => $\forall x \in]0\,;\,\alpha\,[\,;\, g'(t) > 0$

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0

4) Le plan est rapporté au repère orthogonal $(o\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$. Construisons la courbe (Γ) représentative de g.



Partie C : Cette partie a pour objectif de Détermine l'aire A, en unités d'aires, de la portion de plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et la droite d'équation $x = 1$.

1) a) Démontrons que la fonction g_1 définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $g_1(x) = \sqrt{x}ln(1+x)$ est dérivable en 0.

g_1 est dérivable en 0 si te seulement si $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g_1(x) - g_1(0)}{x - 0} = g_1{}'(0) = l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{g_1(x) - g_1(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{g_1(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{g_1(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{xln(1+x)}{x\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} g(x) = g(0) = 0 \in \mathbb{R}$$

D'où la fonction g_1 est dérivable en 0 et son nombre dérivé est $g_1{}'(0) = 0$

b) Soit φ la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $\varphi(x) = 2\sqrt{x}ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$

Démontrons que φ est dérivable en tout point de $[0\ ;\ +\infty[$

$$\varphi(x) = 2\sqrt{x}ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt = 2g_1(x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$$

$\forall x \in\ ]0\ ;\ +\infty[$; g_1 est dérivable et sa dérivée est $g'_1(x) = \frac{ln(1+x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ et $g_1(0) = 0$

De plus la fonction δ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $\delta(t)=\frac{2\sqrt{t}}{1+t}$ est continue sur $[0\,;\,+\infty[$

Donc la fonction h définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $h(x)=\int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$ est définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et

$h'(x)=\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$. On en déduit donc que φ est dérivable en tout point de $[0\,;\,+\infty[$.

Montrons que $\varphi'(x)=g(x)$

$\varphi(x)=2\sqrt{x}ln(1+x)-\int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt \Rightarrow \varphi'(x)=2\left[\frac{ln(1+x)}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right]-\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$

$\Rightarrow \varphi'(x)=\frac{ln(1+x)}{\sqrt{x}}=g(x)$

2) En déduisons que A $=\int_0^1 g(t)dt=2ln2-\int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$

A $=\int_0^1 g(t)dt=[\varphi(t)]_0^1=\left(2ln2-\int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt\right)unité\ d'aire$

3) Soit h la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $h(x)=\int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$

et k la fonction définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par $k(\theta)=tan^2\theta$

a) Calculons $(hok)(0)$

$(hok)(0)=h[k(0)]=h[0]=0$

b) Prouvons que $\forall\,\theta\in I$; on a : $(hok)'(\theta)=4tan^2\theta$

$(hok)'(\theta)=k'(\theta)\times h'[k(\theta)]$.

Or $\forall\,\theta\in I$; $h'(\theta)=2tan\theta(tan^2\theta+1)$ et $\forall\,x\in[0\,;\,+\infty[$; $h'(x)=\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

Donc $\forall\,\theta\in I$ $(hok)'(\theta)=2tan\theta(tan^2\theta+1)\left(\frac{2\sqrt{tan^2\theta}}{1+tan^2\theta}\right)=4tan\theta\times|tan\theta|$

$=4tan^2\theta$ Car $\theta\in\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ (ce qu'il fallait Démontre)

D'où $\forall\,\theta\in I$; on a : $(hok)'(\theta)=4tan^2\theta$

c) En écrivant $tan^2\theta=(tan^2\theta+1)-1$; déterminons une primitive de $(hok)'$ puis donnons l'expression de (hok)

$(hok)'(\theta) = 4tan^2\theta \ = 4[(tan^2\theta + 1) - 1\ ] = 4(tan^2\theta + 1) - 4 = 4(tan)'(\theta) - 4$

Soit H une primitive de hok. Alors $H(\theta) = 4(tan)(\theta) - 4\theta$.

Or hok est une primitive de $(hok)'$. D'où $(hok)(\theta) = \ 4(tan)(\theta) - 4\theta + c.\ (\ c \ \in \ \mathbb{R}\ )$. De plus $(hok)(0) = 0$

Donc $(hok)(\theta) = \ 4(tan)(\theta) - 4\theta$

d) Calculons $h(1)$

$h(1) = h\left[k\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = (hok)\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \pi = 4 - \pi$ avec $k\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

4) déduisons des résultats précédents la valeur exacte de A.

$A = 2ln2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt = 2ln2 - h(1) = (2ln2 - 4 + \ \pi\ )unité\ d'aire$

17 **Partie A :**

On considère la fonction f définie par $f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$

1) Déterminons l'ensemble de définition D_f de f.

$Df \ = \left\{x\ /\ x \in \mathbb{R}\ ; 1 - x > 0\ et\ \frac{1-x}{1+x} > 0\right\} \Rightarrow Df\ =]-1\ ;\ 1[$

2) Calculons les limites aux bornes de D_f puis en déduisons que (C) admet deux asymptotes dont on Précisera les équations.

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = +\infty$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\infty$

Alors les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$ sont asymptotes verticales à la courbe (C) de f

3) Dressons le tableau de variation de f

$f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = -\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) = -\left(\frac{2}{1-x^2}\right) = \frac{-2}{1-x^2}$

=> $f'(x) = \frac{-2}{1 - x^2} < 0 \ \forall \ x \in \ D_f$. D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	-1		1
$f'(x)$	$\|$	$-$	$\|$
$f(x)$	$\|+\infty$	$\searrow$	$-\infty\ \|$

4) a-Ecris une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse I où I est le point d'inflexion de la courbe (C).

Déterminons le point d'inflexion de la courbe (C)

$f'(x) = \frac{-2}{1 - x^2}$ => $f''(x) = \frac{-4x}{(1 - x^2)^2}$. Posons $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{(1 - x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow -4x = 0$

=> $x = 0$. Donc $f''(x) > 0$ sur $]-1\ ;\ 0[$ puis $f''(x) < 0$ sur $]0\ ;\ 1[$ d'où le point $I(0\ ; f(0)\ ) = (0\ ; 0\ )$ => $I(0\ ; 0\ )$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

L'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point $I(0\ ; 0\ )$ est :

(T) : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Or $x_0 = 0$ => $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

=> $y = f'(0)(x) + f(0) = -2(x) + 0 = -2x$

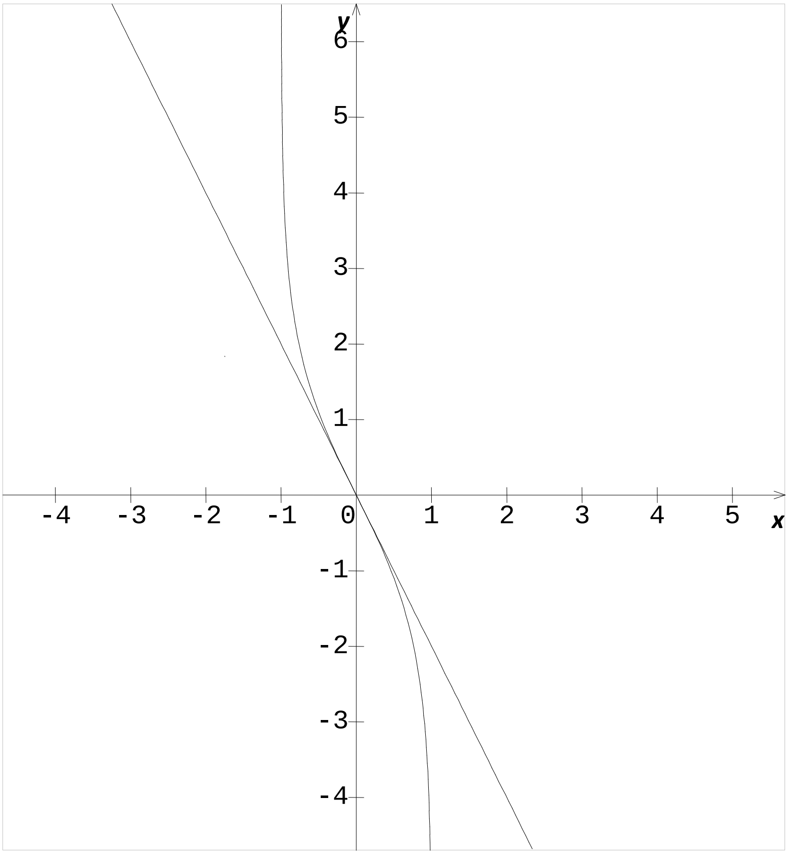
D'où (T) : $y = -2x$ est l'équation de la tangente au point $I(0\ ; 0\ )$

b-Etudions la position de (C) et (T) puis Trace (C) et (T) dans le même repère.

D'après 4) b) , on a :

$\forall \ x \ \in]-1\ ;\ 0[\ ;\ f''(x) > 0$ => $\forall \ x \ \in]-1\ ;\ 0[\ ;$ (C) est au dessus (T)

$\forall \ x \ \in]0\ ;\ 1[\ ;\ f''(x) < 0$ => $\forall \ x \ \in \forall \ x \ \in]0\ ;\ 1[\ ;$ (C) est en dessous (T)



5) On considère l'intégrale I définie par $= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx$.

a-Calculons I en utilisant une intégration par parties.

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} 1 \times f(x)dx$$

Posons $u(x) = f(x)$ => $u'(x) = f'(x)$

$v'(x) = 1$ => $v(x) = x$

=> $I = [xf(x)]_{-\frac{1}{2}}^{0} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} xf'(x)dx = \left[xln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} x \times \frac{-2}{1-x^2}\ dx$

$$= \left[xln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{-2x}{1-x^2}\ dx = \left[xln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} - \ [ln(1-\ x^2)]_{-\frac{1}{2}}^{0}$$

$$= \left[xln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - ln(1-\ x^2)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = \frac{3}{2}ln3 - ln4$$

b- En déduisons en cm^2 l'aire A de la partie du plan délimité par la courbe (C) , la tangente (T) et la droite d'équation $x = \frac{-1}{2}$

$$A = (2cm)^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (f(x) - y)\, dx = 4cm^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (f(x) + \ 2x)\, dx$$

$$= 4cm^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx + 4cm^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{0} 2x\, dx$$

$$= 4cm^2 \left[xln\left(\frac{1-x}{1+\ x}\right) - ln(1-\ x^2)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} + 4cm^2 [x^2]_{-\frac{1}{2}}^{0}$$

$$=> A = 4cm^2 \left[xln\left(\frac{1-x}{1+\ x}\right) - ln(1-\ x^2) + x^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = (6ln3 - 4ln4 - 1)cm^2$$

Partie B :

On considère dans cette partie la fonction numérique h définie sur $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ par

$h\ (x) = \frac{1}{2} f(cosx)$ où f est la fonction définie dans la **Partie A :**

1) Vérifions que h est la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{sinx}$

h est la primitive de la fonction g qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ si et seulement si $h'(x) = \ g(x)$

$h(x) = \ \frac{1}{2} f(cosx)$ => $h'(x) = -\ \frac{1}{2} sinxf^{'}(cosx)$. Or $f'(x) = \ \frac{-2}{1-\ x^2}$

$=> h'\ (x) = -\ \frac{1}{2}\ sinx \times \frac{-2}{1-\ cos^2x}\ = \frac{sinx}{sin^2x}\ = \frac{1}{sinx}\ = g(x)$

$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ \frac{1}{2} f(0)\ = \ 0$. D'où h est la primitive de la fonction g qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$

2) Calculons l'intégrale $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sinx} dx$

$$K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sinx} dx = [h(x)]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = h\left(\frac{\pi}{2}\right) - h\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 - h\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2} ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} ln\frac{1}{3}$$

D'où $K = \frac{1}{2} ln\frac{1}{3}$

3) Soit l'intégrale (I_n); n appartenant à ℕ définie par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x} dx$.

a-Calculons I_0 et I_1

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x} dx \Rightarrow I_0 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^0 x}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3}$$

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x} dx \Rightarrow I_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^1 x}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx = [\ln(\sin x)]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\ln \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b- Calculons l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \times \cos^n x \, dx$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \times \cos^n x dx = \left[-\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

c- En déduisons l'expression de $I_n - I_{n+2}$ en fonction de n

$$I_n - I_{n+2} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x} dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+2} x}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x - \cos^{n+2} x}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x\,(1 - \cos^2 x)}{\sin x} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x \sin^2 x}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \times \cos^n x \, dx \left[-\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow I_n - I_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \Leftrightarrow I_{n+2} = I_n - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

Calculons I_2 ; I_3 et I_4

$$I_{n+2} = I_n - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

- Pour $n = 0$; on a : $I_2 = I_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$.
- Pour $n = 1$; on a : $I_3 = I_1 - \frac{1}{8} = -\ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{8}$.
- Pour $n = 2$; on a : $I_4 = I_2 - \frac{1}{24} = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{13}{24}$

18

PARTIE A :

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 3x - 1 - \ln x$. On désigne par C_g la courbe représentative de g dans un repère orthonormé$(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ d'unité graphique 1cm.

1) Etudions les limites de g en 0 et en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} -x^2 + 3x - 1 - lnx = -(0) + 3(0) - 1 - (-\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 + 3x - 1 - lnx = -(+\infty) + 3(+\infty) - 1 - (+\infty)$

$= -\infty + \infty = "\ FI\ "$. Alors levons l'indétermination.

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 + 3x - 1 - lnx = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{lnx}{x^2}\right)$

$= (+\infty)(-1 + 0 - 0 - 0) = (+\infty)(-1) = -\infty$

2) Etudions les branches infinies de la courbe Cg.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x^2 + 3x - 1 - lnx}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -x + 3 - \frac{1}{x} - \frac{lnx}{x} = -(+\infty) + 3 + 0 - 0 = -\infty$

Alors la courbe (Cg) admet une branche parabolique de direction (oy)

3) Etudions les variations de g.

$g(x) = -x^2 + 3x - 1 - lnx \Rightarrow g'(x) = -2x + 3 - \frac{1}{x} = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x}$

$\forall\ x \in]0\ ;\ +\infty[\ ;\ x > 0$. Alors le signe de $g'(x)$ dépend du signe de $-2x^2 + 3x - 1$.

Posons $-2x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{1}{2}$

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0		1		$\frac{1}{2}$		α		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$			
$g(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

4) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle[2 ; 3].

- D'après le tableau de variation de g , $\forall x \in \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$; g est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$vers$\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$. Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} g(2) = 0{,}3 \\ g(3) = -2{,}09 \end{cases}$ => $g(2) \times g(3) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit l'encadrement suivant $2 \leq \alpha \leq 3$

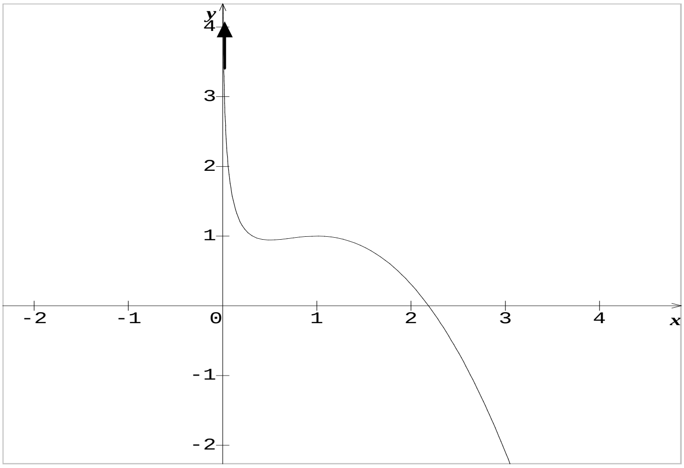
5) Déduisons de ce qui précède le signe de $g(x)$ en fonction de x.

Interprétons graphiquement le résultat.

D'après le tableau de variation de g :

$\forall x \in]0\,;\alpha\,[\,;\ g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha\,;\,+\infty\,[\,;\ g(x) < 0$

6) a- Traçons la courbe (Cg).



b- Discutons graphiquement suivant les valeurs du périmètre réel m, le nombre de solution de l'équation $g(x) = m$

D'après le graphique, $\forall\, y \in]-\infty\ ;\ +\infty[$; l'équation $g(x) = m$ admet une solution unique.

PARTIE B :

Soit la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - x\ln x}$. On désigne par (Cf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ d'unité graphique : 1 cm.

1) a) Montrons que pour tout x de $]\,0\,;\,+\infty[$, on a $x > lnx$.

Posons $p(x) = x - lnx$ puis effectuons une étude brève de la fonction p sur$]\,0\,;\,+\infty[$, affin de Détermine son signe.

$lim\ \ p(x) = \ lim\ x - lnx\ \ = \ (0) - (-\infty) = +\infty$

$x \to 0 \qquad\quad x \to 0$

$lim\ \ p(x) = \ lim\ x - lnx\ \ = \ (+\infty) - (+\infty) = +\infty - \infty = "\ FI\ "$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

Levons l'indétermination

$lim\ \ p(x) = \ lim\ x\left(1 - \frac{lnx}{x}\right) = (+\infty)(1 - 0) = (+\infty)(1) = +\infty$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

$p(x) = x - lnx \Rightarrow\ p'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

$\forall\ x \in\ ]0\,;\,+\infty[\,;\ x > 0$. Alors le signe de $p'(x)$ dépend du signe de $x - 1$.

Posons $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

D'où le tableau de variation de h est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$p'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$p(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau de variation de p , $\forall\ x \in\ ]0\,;\,+\infty[\,;\ p(x) > 0\ \Leftrightarrow\ x - lnx > 0$

$\Rightarrow x > lnx$ (Ce qu'il fallait Démontre)

b) justifions que la fonction f est bien définie sur $]0\,;\,+\infty[$.

$f(x) = \frac{x-1}{x^2 - xlnx}$

- La fonction $x \to x - 1$ est définie sur $]0\,;\,+\infty[$.

- La fonction $x \to x^2 - xlnx$ est définie sur $]0\,;\,+\infty[$.

Alors $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - xlnx}$ est une fonction qui est bien définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2) Etudions les limites de f en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduisons ?

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x-1}{x^2 - xlnx} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x^2 - xlnx} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{lnx}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{lnx}{x}} = \frac{0-0}{1-0} = \frac{0}{1} = 0$$

Ainsi on en déduit que les droites d'équation $x = 0$ et $y = 0$ sont respectivement asymptote verticale et horizontale à la courbe (Cf)

3) a- Montons que pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f\,'(x) = \frac{g(x)}{(x^2 - xlnx)^2}$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2 - xlnx} \Rightarrow f'(x) = \frac{(1)(x^2 - xlnx) - (2x - lnx - 1)(x-1)}{(x^2 - xlnx)^2}$$

$$= \frac{(x^2 - xlnx) - (2x - lnx - 1)(x-1)}{(x^2 - xlnx)^2} = \frac{x^2 - xlnx - 2x^2 + xlnx + x + 2x - lnx - 1}{(x^2 - xlnx)^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 3x - 1 - lnx}{(x^2 - xlnx)^2} = \frac{g(x)}{(x^2 - xlnx)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2 - xlnx)^2}$$ (Ce qu'il fallait Démontre)

b- Dressons le tableau de variation de f.

$\forall\, x \in\ ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ (x^2 - xlnx)^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$.

Or d'après **PARTIE A 5)** on a :

- $\forall x \in\ ]0\ ;\alpha\ [\ ;\ g(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in\ ]0\ ;\alpha\ [\ ;\ f'(x) > 0$
  et
- $\forall x \in\ ]\alpha\ ;\ +\infty\ [\ ;\ g(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in\ ]\alpha\ ;\ +\infty\ [\ ;\ f'(x) < 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

c – Montrons que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}$

D'après **PARTIE A 5)** l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = 0$.

Alors $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\alpha^2 + 3\alpha - 1 - ln\alpha = 0 \Rightarrow ln\alpha = -\alpha^2 + 3\alpha - 1$ $(\mathbf{1})$

D'autre part $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - xlnx}$ => $f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - \alpha ln\alpha}$ $(\mathbf{2})$

Eliminons $ln\alpha$ entre les équations $(\mathbf{1})$ et $(\mathbf{2})$ => $f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - \alpha(-\alpha^2 + 3\alpha - 1)}$

=> $f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - \alpha(-\alpha^2 + 3\alpha - 1)} = \frac{\alpha - 1}{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha} = \frac{\alpha - 1}{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1)} = \frac{\alpha - 1}{\alpha(\alpha-1)^2} = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}$

D'où $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}$ (Ce qu'il fallait Démontre)

En déduisons un encadrement de $f(\alpha)$.

On sait que : $2 \leq \alpha \leq 3$ $(\mathbf{1})$

De même : $2 \leq \alpha \leq 3 \Leftrightarrow 2 - 1 \leq \alpha - 1 \leq 3 - 1 \Leftrightarrow 1 \leq \alpha - 1 \leq 2$ $(\mathbf{2})$

$2 \leq \alpha \leq 3$ $(\mathbf{1})$

$1 \leq \alpha - 1 \leq 2$ $(\mathbf{2})$

Effectuons le produit des relations$(\mathbf{1})$ $\boldsymbol{et}$ $(\mathbf{2})$**. Ainsi on a :**

$(2)(1) \leq (\alpha)(\alpha - 1) \leq (3)(2)$

$\Leftrightarrow 2 \leq \alpha(\alpha - 1) \leq 6$

En prenant l'inverse de l'inégalité précédente, on a :

$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq f(\alpha) \leq \frac{1}{2}$ (Ce qu'il fallait Démontre)

4) Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) de f au point d'abscisse 1.

L'équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) de f au point d'abscisse 1 est :

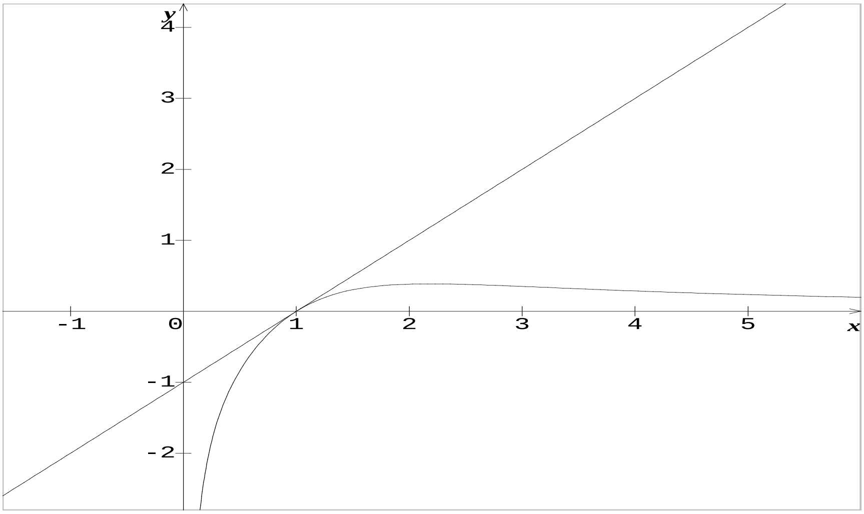
(T) : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ => $y = x - 1$

5) Résolvons l'équation $f(x) = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2 - xlnx} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.

Alors la courbe (Cf) coupe l'axe (ox) en $x = 1$

Traçons la courbe (Cf) et la tangente (T) dans le même repère.



6) a- Montrons que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, on a : $f(x) = \frac{1-\frac{1}{x}}{x - lnx}$

$f(x) = \frac{x-1}{x^2 - xlnx} \Rightarrow f(x) = \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x(x - lnx)} = \frac{1-\frac{1}{x}}{x - lnx}$ (Ce qu'il fallait Démontre)

b- Soit $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (Cf) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

Montrons que $A(\alpha) = 2ln(\alpha - 1)$

$A(\alpha) = \int_1^\alpha f(x)dx = \int_1^\alpha \frac{x-1}{x^2 - xlnx}dx = \int_1^\alpha \frac{1-\frac{1}{x}}{x - lnx}dx = [ln(x - lnx)]_1^\alpha$

$\Rightarrow A(\alpha) = ln(\alpha - ln\alpha) = ln[\alpha - (ln\alpha)]$. Or dans la **PARTIE A 5),** on a :

$ln\alpha = -\alpha^2 + 3\alpha - 1$

$\Rightarrow A(\alpha) = ln[\alpha - (-\alpha^2 + 3\alpha - 1)] = ln(\alpha + \alpha^2 - 3\alpha + 1) = ln(\alpha^2 - 2\alpha + 1)$

$= ln(\alpha - 1)^2 = 2ln(\alpha - 1)$

D'où $A(\alpha) = 2ln(\alpha - 1)$ (Ce qu'il fallait Démontre)

En déduisons un encadrement de $A(\alpha)$.

$2 \leq \alpha \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq \alpha - 1 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq ln(\alpha - 1) \leq ln2 \Leftrightarrow 0 \leq 2ln(\alpha - 1) \leq 2ln2 \Leftrightarrow$

$0 \leq 2ln(\alpha - 1) \leq ln4 \Leftrightarrow 0 \leq A(\alpha) \leq ln4$ (Ce qu'il fallait Démontre)

7) Soit n un entier naturel supérieur ou égale 0 .

a- Calculons $a_n = \int_1^n f(x)dx$.

$a_n = \int_1^n f(x)dx = 2ln(n-1)$

Interprétons graphiquement ce résultat.

a_n est l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (Cf) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = n$.

b- Calculons la limite de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} 2ln(n-1) = \lim_{n \to +\infty} 2ln(n) = +\infty$

PARTIE C :

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \int_1^{e^x} f(t)dt$. On désigne par (C$_h$) la courbe représentative de h dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) d'unité graphique : 1 cm.

1) a- Montrons que $h(x) = ln(e^x - x)$.

$$h(x) = \int_1^{e^x} f(t)dt = \int_1^{e^x} \frac{1-\frac{1}{t}}{t - lnt} dt = ln(e^x - lne^x) = ln(e^x - x)$$

b- Montrons que pour tout x de $\mathbb{R}$; on a : $e^x > x$.

Posons $k(x) = e^x - x$ puis effectuons une étude brève de la fonction k sur $\mathbb{R}$; affin de Détermine son signe.

$\lim_{x \to -\infty} k(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x - x = 0 - (-\infty) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} k(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x - x = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$

$k(x) = e^x - x$ => $k'(x) = e^x - 1$

Posons $k'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = ln1 = 0$

D'où le tableau de variation de k est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$k'(x)$	$-$	0	$+$
$k(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

D'après le tableau de variation de k , $\forall x \in \mathbb{R}$; $k(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - x > 0$

=> $e^x > x$.(Ce qu'il fallait Démontre)

2) a-Calculons $limite\ de\ h(x)\ limite\ de\ \frac{h(x)}{x}$ en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln(e^x - x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln\left[e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)\right]}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln\,e^x + ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x + ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}{x} = 1 + 0 = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) - ax = \lim_{x \to +\infty} ln(e^x - x) - x = \lim_{x \to +\infty} x + ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) - x = \lim_{x \to +\infty} ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = ln(1 - 0) = 0$$

On peut en déduis que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique pour la courbe $(Ch)\ en + \infty$

b- Montrons que pour tout nombre réel , on a : $h(x) = x + ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$.

$$h(x) = ln(e^x - x) = ln\left[e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)\right] = lne^x + ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = x + ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right).$$

D'où $h(x) = x + ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$ (Ce qu'il fallait Démontre)

En déduisons de $lim\, h(x)$ en $+\infty$

$lim\, h(x) = lim\, x + ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = +\infty + 0 = +\infty$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty$

3) Etudions la position relative de la coure (Ch) et de la droite (Δ): $y = x$.

Pour cela, étudions le signe de $h(x) - y$

L'étudions le signe de $h(x) - y$ montre que :

$\forall\, x \in\,]-\infty\ ; 0]\ ;\ h(x) - y > 0$. Alors $\forall\, x \in\,]-\infty\ ; 0]$; (Ch) est au dessus (Δ)

$\forall\, x \in [0\ ; +\infty[\ ;\ h(x) - y < 0$. Alors $\forall\, x \in [0\ ; +\infty[$; (Ch) est en dessous (Δ)

4) Dressons le tableau de variation de h puis Trace.

$lim\, h(x) = lim\, x + ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = +\infty + 0 = +\infty$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty$

$lim\, h(x) = lim\, ln(e^x - x) = +\infty$

$x \to -\infty \quad x \to -\infty$

$h(x) = ln(e^x - x) \Rightarrow h'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$

D'après **PARTIE C** 1) b) , on a : $e^x - x > 0$; alors le signe de $h'(x)$ dépend du signe de

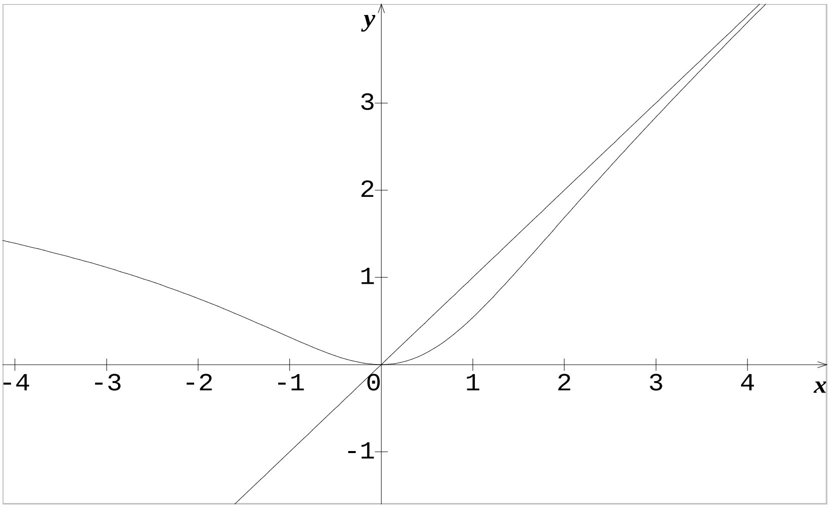
$e^x - 1$. Posons $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Rightarrow x > ln1 \Leftrightarrow x > 0$

Ainsi on dira que pour les $x > 0$; $h'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de h est le suivant

D'où le tableau de variation de k est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



19 **PARTIE A :**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right)$. On désigne par (Cf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1cm.

1) Montrons que f est impaire

f est impaire si et seulement si $f(-x) = -f(x)$

$$f(-x) = ln\left(-2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right) = ln\left[\frac{\left(-2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\left(-2x-\sqrt{4x^2+1}\right)}{-2x - \sqrt{4x^2+1}}\right]$$

$$= ln\left[\frac{(-2x)^2 - \left(\sqrt{4x^2+1}\right)^2}{-2x - \sqrt{4x^2+1}}\right] = ln\left[\frac{4x^2 - (4x^2+1)}{-2x - \sqrt{4x^2+1}}\right] = ln\left(\frac{4x^2 - 4x^2 - 1}{-2x - \sqrt{4x^2+1}}\right)$$

$$= ln\left(\frac{-1}{-2x - \sqrt{4x^2+1}}\right) = ln\left(\frac{1}{2x + \sqrt{4x^2+1}}\right) = -ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right) = -f(x)$$

D'où f est impaire

2) Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f(x) = ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right)$.

- $2x$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

- $\sqrt{4x^2 + 1}$ est aussi une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Montrons que $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$.

$$f(x) = ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{2 + \frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}}{2x + \sqrt{4x^2+1}} = \frac{2 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}}{2x + \sqrt{4x^2+1}} = \frac{\frac{2\sqrt{4x^2+1}+4x}{\sqrt{4x^2+1}}}{2x + \sqrt{4x^2+1}}$$

$$= \frac{\frac{2\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}}}{2x + \sqrt{4x^2+1}} = \frac{2\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}\right)} = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}\,;\ f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$

3) Dressons le tableau de variation de f.

$\forall x \in \mathbb{R}\,;\ f'(x) > 0$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}\,;\ f$ est strictement croissante.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right) = \lim_{x \to +\infty} ln\left[2x + \sqrt{4x^2\left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} ln\left[2x + |2x|\sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}}\right] = \lim_{x \to +\infty} ln\left[2x + 2x\sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} ln\left[2x\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}}\right)\right] = ln[(+\infty)(2)] = ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} ln\left[\frac{\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)\left(2x - \sqrt{4x^2+1}\right)}{2x - \sqrt{4x^2+1}}\right] = \lim_{x \to -\infty} ln\left[\frac{(2x)^2 - \left(\sqrt{4x^2+1}\right)^2}{2x - \sqrt{4x^2+1}}\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \ln\left[\frac{4x^2 - (4x^2+1)}{2x - \sqrt{4x^2+1}}\right] = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{4x^2 - 4x^2 - 1}{2x - \sqrt{4x^2+1}}\right) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{-1}{2x - \sqrt{4x^2+1}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{-1}{2x - \sqrt{4x^2\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)}}\right) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{-1}{2x - |2x|\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{-1}{2x - (-2x)\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}}\right) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{-1}{2x + 2x\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{-1}{\left[2x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}\right)\right]}\right) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{-1}{2x}\right) = -\infty$$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

4) Etudions les branches infinies de la courbe (Cf).

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)}{x} = 0$$

Alors la courbe (Cf) admet une branche parabolique de direction (ox)

5) Trouvons une équation cartésienne de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse nul.

L'équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse nul est $y = f'(0)(x) + f(0)$

=> $y = f'(0)(x) + f(0) = 2x$. D'où on a (T) : $y = 2x$

6) Précisons la position de (T) et (Cf).

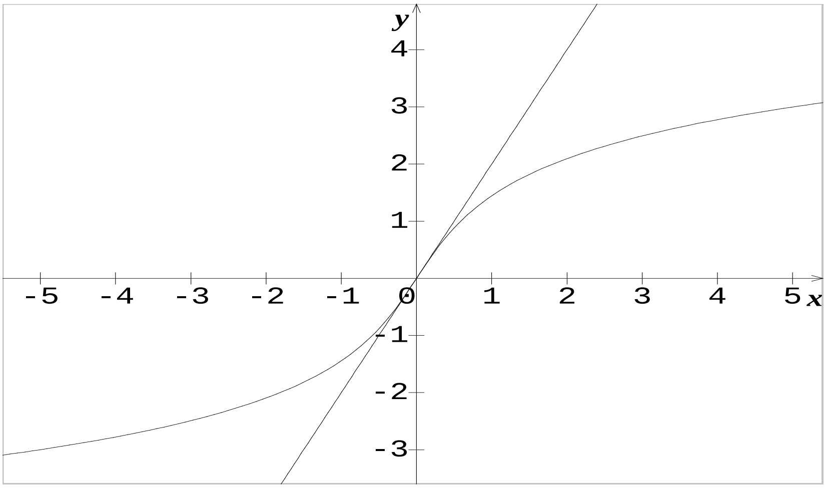
Pour cela, étudions le signe de $f(x) - y$

L'étudions le signe de $f(x) - y$ montre que :

$\forall\, x \in]-\infty\ ; 0]\ ;\ f(x) - y > 0$. Alors $\forall\, x \in]-\infty\ ; 0]\ ;\ (Cf)$ est au dessus (T)

$\forall\, x \in [0\ ; +\infty[\ ;\ f(x) - y < 0$. Alors $\forall\, x \in [0\ ; +\infty[\ ;\ (Cf)$ est en dessous (T)

7) Traçons la droite (T) et la courbe (Cf)



8) Soit α un réel strictement positif. Calculons en fonction de , l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (Cf) et les droites d'équations respectives $x = 0\ , y = 0\ et\ x = \ \alpha$.

$A(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)dx = \int_0^{\alpha} ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right)dx$

Posons $u(x) = \ ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right)$ => $u'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$

$v'(x) = \ 1 \Rightarrow v(x) = x$

=> $A(\alpha) = \left[xln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right) \right]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}dx$

$= \left[xln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right) - 2\sqrt{4x^2 +\ 1}\right]_0^{\alpha}$

$= \alpha ln\left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 1}\right) - 2\sqrt{4\alpha^2 +\ 1} + 2$

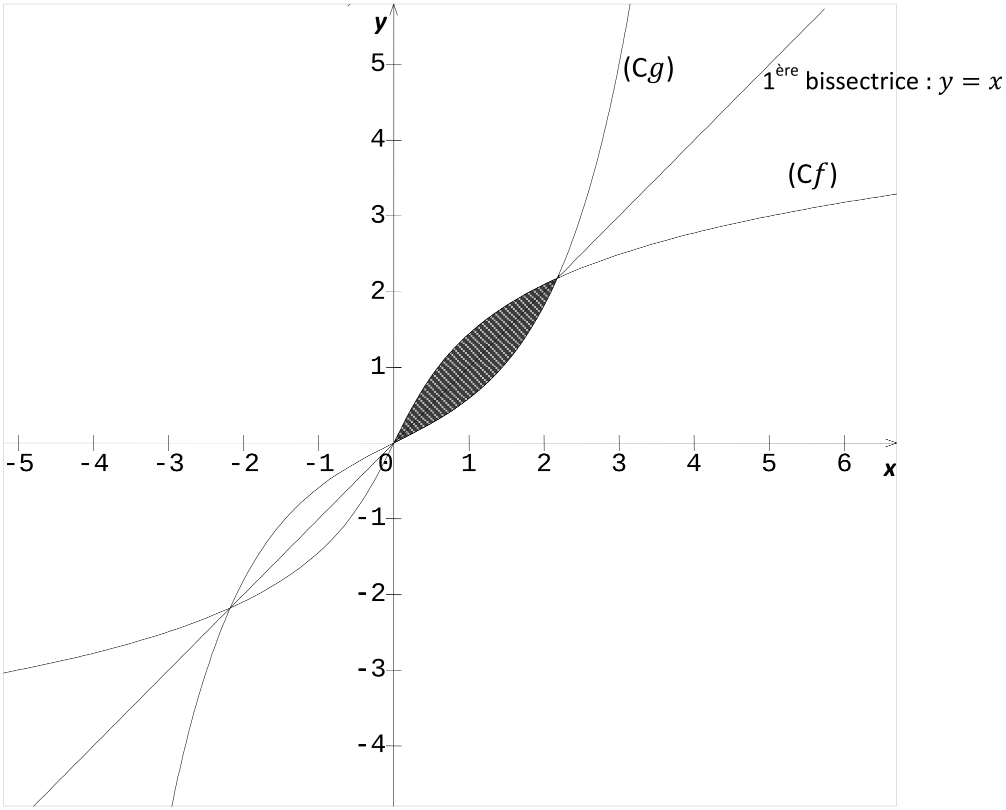
PARTIE B :

1) Montrons que la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle I que l'on Précisera.

D'après le tableau de variation f ; f est définie ; continue et strictement croissante de $]-\infty\,;\,+\infty[$ vers $]-\infty\,;\,+\infty[$.

D'où la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur l'intervalle $I =]-\infty\,;+\infty[$

2) Construisons dans le même repère que (Cf) , la courbe (Cg) de la fonction g.



3) Montrons que pour tout $x \in$ I, on a : $g(x) = \frac{1}{4}(e^{x} - e^{-x})$.

$f(x) = ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)$. Posons $f(x) = y \Leftrightarrow ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right) = y \Leftrightarrow$

$2x + \sqrt{4x^2+1} = e^{y} \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+1} = e^{y} - 2x \Leftrightarrow \left(\sqrt{4x^2+1}\right)^2 = (e^{y} - 2x)^2 \Leftrightarrow$

$4x^2 + 1 = e^{2y} - 4xe^{y} + 4x^2 \Leftrightarrow e^{2y} - 4xe^{y} = 1 \Leftrightarrow 4xe^{y} = e^{2y} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{4e^{y}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{(e^{2y}-1)e^{-y}}{4} = \frac{e^{2y}\times e^{-y}-e^{-y}}{4} = \frac{e^{y}-e^{-y}}{4} = \frac{1}{4}(e^{y} - e^{-y})$.

=> $f^{-1}(x) = g(x) = \frac{1}{4}(e^{x} - e^{-x})$. (Ce qu'il fallait Démontre)

4) Montrons que l'équation $g(x) = x$ admet dans l'intervalle $]\,0\ ;\ +\infty\,[$ une solution unique α et que $\alpha \in \left]\frac{-\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$.

- D'après le tableau de variation de g, $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[$; g est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[$ vers $]-\infty\ ;\ +\infty[$. Alors l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = \alpha$.

- De plus $\left[g\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \times \left[g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\alpha \in \left]\frac{-\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$.

5) Calculons en fonction de α l'aire du domaine limité par les deux courbes (Cf) et (Cg) et situées dans le demi-plan $x \geq 0$.

$B(\alpha) = \int_0^{\alpha}[f(x) - g(x)\,]dx = \int_0^{\alpha} f(x)dx - \int_0^{\alpha} g(x)dx$

$= \alpha ln\left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 1}\right) - 2\sqrt{4\alpha^2 + 1} + 2 + \frac{1}{4}\int_0^{\alpha}(e^{x} - e^{-x})dx$

$= \alpha ln\left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 1}\right) - 2\sqrt{4\alpha^2 + 1} + 2 + \left[\frac{1}{4}e^{x} + \frac{1}{4}e^{-x}\right]_0^{\alpha}$

$= \alpha ln\left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 1}\right) - 2\sqrt{4\alpha^2 + 1} + 2 + \frac{1}{4}e^{\alpha} + \frac{1}{4}e^{-\alpha} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$

PARTIE C :

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$.

1) Montrons que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on Précisera.

$\varphi(x) = \frac{g(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{4}(e^{x}-e^{-x})}{\frac{1}{4}(e^{x}+e^{-x})} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \frac{e^{x}-\frac{1}{e^{x}}}{e^{x}+\frac{1}{e^{x}}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x}} = 1$

$lim\ \varphi(x) = lim\ \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{0-1}{0+1} = \frac{-1}{1} = -1$

$x \to -\infty \quad\quad x \to -\infty$

$\varphi(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ => $\varphi'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ => $\forall\ x \in \mathbb{R}\ ;\ \varphi'(x) > 0$

D’où le tableau de variation de φ est le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$	
$\varphi(x)$	-1	1

D’après le tableau de variation φ : φ est définie ; continue et strictement croissante de $]-\infty\ ;\ +\infty[$ vers$]-1\ ;\ 1[$.

D’où la fonction φ admet une fonction réciproque $\varphi^{-1}(x)$ définie sur l’intervalle

$J =]-1\ ;\ 1[$.

2) On pose $h(x) = \varphi^{-1}(x)$. Donnons les expressions de $h(x)$ et $h^{'}(x)$.

$\varphi(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. Posons $\varphi(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = y \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = y(e^{2x}+1) \Leftrightarrow$

$e^{2x} - 1 = ye^{2x} + y \Leftrightarrow e^{2x} - ye^{2x} = 1 + y \Leftrightarrow e^{2x}(1-y) = 1 + y$ => $e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$ =>

$2x = ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$ => $x = \frac{1}{2}\, ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$ => $\varphi^{-1}(x) = ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

D’où $h(x) = \varphi^{-1}(x) = ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$h(x) = ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ => $h'(x) = \frac{\frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{1}{1-x^2}$

D’où $h'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

3) Etudions puis représentons le fonction h sur $]-1\ ;\ 1[$.

$$\lim_{x \to -1^+} h(x) = \lim_{x \to -1^+} ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^+} ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = ln\sqrt{\frac{2}{0^+}} = +\infty$$

$h(x) = ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ => $h'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

Alors le signe de $h'(x)$ dépend du signe de $1 - x^2$. Posons $1 - x^2 = 0$ => $x^2 = 1$

=> $x = -1$ ou $x = 1$

D'où le tableau de variation de h est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

La représentation de la courbe (Ch) sur $]-1\ ;\ 1[$ est le suivant :