

Probabilité

OBJECTIFS :

Ce thème vise à :

- consolider les acquis sur le dénombrement.
- Calcule la probabilité d'un événement ;
- Calcule les probabilités d'événement indépendants.

Commentaires

Consolider les connaissances acquises en première sur le dénombrement des ensembles finis à l'occasion d'exercices de probabilité.

Les notions d'expérience aléatoire et de probabilité d'un événement sont totalement nouvelles pour les élèves. On fera le lien entre les fréquences en statistique et la probabilité de l'événement correspondant.

Toute situation de non équiprobabilité est hors programme (par exemple, une situation telle que "des dés pipés" ne sera pas étudiée).

La notion de variable aléatoire permet de synthétiser dans des graphiques et des tableaux les résultats d'une expérience aléatoire.

La loi binomiale est une notion importante qui doit être maîtrisée par les élèves.

Volume horaire ; 14 heures

1. PROBABILITES

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"> • Vocabulaire. • Définition d'une probabilité dans le cas d'une équiprobabilité. • Propriété. • Evénements indépendants <ul style="list-style-type: none"> - Définition ; - Propriétés. 	<ul style="list-style-type: none"> • Dénombrer, dans le cas d'une expérience conduisant à un nombre fini d'éventualités : <ul style="list-style-type: none"> - Les cas possibles d'une expérience ; - Les cas favorables d'un événement • Calcule la probabilité d'un événement. • Démontre que deux événements sont indépendants.

Remarques et suggestions

On introduira le vocabulaire des probabilités au travers de situations concrètes. Les probabilités conditionnelles sont hors programme, ce qui n'empêche pas de définir la notion d'événements indépendants.

On apprendra à reconnaître l'univers et les événements élémentaires d'une expérience aléatoire.

Le choix de l'univers est fondamental et ne modifie pas certains cas les résultats des calculs de probabilité.

L'utilisation des outils de l'analyse combinatoire (arrangements, combinaisons) se fera sans recherche de difficultés techniques.

On se placera dans des situations ayant du sens ; en particulier on présentera des applications des probabilités en biologie et en économie.

2. VARIABLES ALEATOIRES

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"> • Définition • Loi de probabilité. • Fonction de répartition. • Espérance mathématique. • Variance ; écart type 	<ul style="list-style-type: none"> • Une variable aléatoire étant donnée : <ul style="list-style-type: none"> - Détermine sa loi de probabilité et sa fonction de répartition ; - Construire sa fonction de répartition ; - Calcule son espérance mathématique ; - Calcule sa variance et son écart type.

Remarques et suggestions

On fera remarquer aux élèves qu'une "variable aléatoire" est en réalité une fonction. La mise en place des notions d'espérance mathématique et de variance se fera sur des exemples. Les formules générales seront données par comparaison avec leur équivalent en statistique. Par exemple on remarquera le lien entre moyenne et espérance mathématique. Pour les calculs, on privilégiera l'usage de tableaux.

3. LOI BINOMIALE

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"> • Probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves Bernoulli • $E(X) = np$. • $V(X) = np(1 - p)$. 	<ul style="list-style-type: none"> • Calcule la probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli. ($0 \leq k \leq n$).

Remarques et suggestions

On habituera les élèves à reconnaître une situation où la loi binomiale doit être appliquée
On habituera les élèves à reconnaître une situation où la loi binominale doit être appliquée (épreuves répétées identiques indépendantes).

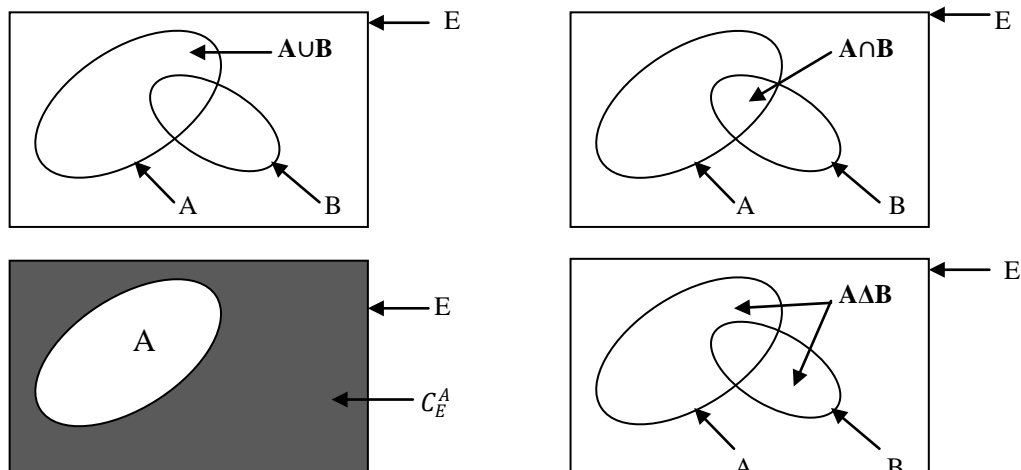
I- Dénombrement :

1) Vocabulaire de la théorie des ensembles :

Soit E un ensemble et soient A et B deux sous-ensembles de E .

- **Expérience aléatoire** : expérience dont le résultat dépend du hasard.
- **Eventualité** : résultat possible d'une expérience aléatoire.
- **Univers ou CardE** = n : ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire.
- **Événement** : sous-ensemble de l'univers.
- **Événement élémentaire** : événement réduit à un seul élément.
- **Union de deux ensembles**: Soient A et B deux ensembles finis. On appelle Union de A et B , l'ensemble des éléments de A ou B . On note : $A \cup B = \{x/x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- **Intersection de deux ensembles** : L'intersection de deux ensembles A et B regroupent les éléments communs à A et B . On note : $A \cap B = \{x/x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- **Différence A moins B** : On appelle différence A moins B , l'ensemble noté $A - B$ tel que : $A - B = \{x \in E; x \in A \text{ et } x \notin B\}$.
- **Différence symétrique de A et B** : On appelle différence symétrique de A et B , l'ensemble noté $A \Delta B$ tel que : $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
- **Produit cartésien de A par B** : On appelle produit cartésien de A par B l'ensemble des couples $(x; y)$ tel que : x appartient à A et y appartient à B . On note : $A \times B = \{(x; y)/ x \in A \text{ et } y \in B\}$.
- **Évènement contraire de A ou complémentaire de A dans E** : On appelle évènement contraire de A , l'ensemble de toutes les issues de E n'appartenant pas à A . On la note : \bar{A} tel que : $\bar{A} = C_E(A) = \{x/x \in E \text{ et } x \notin A\} = \{x/x \in E \text{ et } x \in \bar{A}\}$.

Illustration



2) Propriétés sur les ensembles finis

Soient A ; B et C trois ensembles finis. On admet les propriétés suivantes :

- Propriétés relatives à \cup

$$\underline{P}_1 : A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A \quad (\emptyset \text{ est neutre pour } \cup)$$

$$\underline{P}_2 : A \cup A = A \quad (\text{tout element de l'ensemble } E \text{ est idempotent pour } \cup)$$

$$\underline{P}_3 : A \cup E = E \quad (L'ensemble E \text{ est absorbant pour } \cup)$$

$$\underline{P}_4 : A \cup B = B \cup A \quad (\cup \text{ est commutative})$$

$$\underline{P}_5 : (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (\cup \text{ est associative})$$

$$\underline{P}_6 : A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$$

- Propriétés relatives à \cap

$$\underline{P}_1 : A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset \quad (\emptyset \text{ est absorbant pour } \cap)$$

$$\underline{P}_2 : A \cap A = A \quad (\text{tout element de l'ensemble } E \text{ est idempotent pour } \cap)$$

$$\underline{P}_3 : A \cap E = A \quad (E \text{ est neutre pour } \cap)$$

$$\underline{P}_4 : A \cap B = B \cap A \quad (\cap \text{ est commutative})$$

$$\underline{P}_5 : (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (\cap \text{ est associative})$$

$$\underline{P}_6 : A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$$

- Propriétés relatives à $A-B$; $C_E(A)$ et $A \Delta B$

$$\underline{P}_1 : A - B \Leftrightarrow A \subset B$$

$$\underline{P}_2 : A - B = A \cap C_E(B) = A - (A \cap B)$$

$$\underline{P}_3 : A \Delta B = B \Delta A \quad (\Delta \text{ est commutative})$$

$$\underline{P}_4 : A \Delta \emptyset = A \quad (\emptyset \text{ est neutre pour } \Delta)$$

$$\underline{P}_5 : A \Delta A = \emptyset \quad (\text{tout element de l'ensemble } E \text{ est son symétrique pour } \Delta)$$

$$\underline{P}_6 : A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$\underline{P}_7 : C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B) \text{ et } C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B) \quad (\text{lois de Morgan})$$

- Propriétés relatives à $A \times B$

Soient A ; B et C trois ensembles

P₁ : $A \times B \neq B \times A$ (*le produit cartésien n'est pas commutatif*)

P₂ : $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$

P₃ : $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ ou $A = B$

P₄ : $(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$

P₅ : $(A \times B) \cup (C \times B) = (A \cup C) \times B$

P₆ : $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

- Propriétés relatives à \cup et \cap

P₁ : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (*distributivité de \cap par rapport à \cup*)

P₂ : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*distributivité de \cup par rapport à \cap*)

P₃ : $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$ (*égalités modulaires*)

P₄ : $(\overline{A \cup B}) = (\overline{A} \cap \overline{B})$ et $(\overline{A \cap B}) = (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap B)$

P₅ : $(\overline{A \cap B}) = (\overline{A} \cup \overline{B})$ et $(\overline{A \cup B}) = (\overline{A} \cap \overline{B}) = (A \cup B)$

- Propriétés relatives à $\text{card}E$

P₁ : $\text{Card}\emptyset = 0$

P₂ : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B)$ si $A \cap B \neq \emptyset$

P₃ : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B$ si $A \cap B = \emptyset$

P₄ : $\text{Card}(A \cap B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cup B)$

P₅ : $\text{Card}(A \times B) = \text{Card } A \times \text{Card } B$

P₆ : $\text{Card}C_E^A = \text{Card } E - \text{Card } A$

P₇ : $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$

3) Permutation–Arrangement – combination – P-liste

a) Permutation :

• Définition :

On appelle permutation d'un ensemble fini F de cardinal n , toute bijection de $[1 ; n]$ dans F .
Le nombre de permutation d'un ensemble fini de cardinal n est noté : $n!$ et on lit **Factorielle n**
telque : $n! = n(n-1)(n-2) \dots \times 2 \times 1$

- Propriétés : $P_1: 0! = 1$; $P_2: 1! = 1$; $P_3: 2! = 2$

b) Arrangement :

• Définition:

Soit E un ensemble à n éléments, et P un ensemble fini tel que : $(n \geq P)$.
On appelle arrangement de P éléments de E , toute injection de P dans E .
On le note : A_n^P et on lit : $\ll A, n, P \gg$.

$$A_n^P = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1) \text{ ou } A_n^P = \frac{n!}{(n-p)!}$$

- Propriétés:

$$P_1: A_n^0 = 1 \quad ; \quad P_2: A_n^1 = n \quad ; \quad P_3: A_n^n = n! \quad ; \quad P_4: A_n^{n-1} = n!$$

c) Combinaison :

• Définition :

Soit E un ensemble à n éléments, et P un ensemble fini tel que : $(n \geq P)$. On appelle combinaison de P éléments de E , tout sous ensemble de E ayant P éléments.
On le note : C_n^P et on lit : $\ll C, n, P \gg$.

$$C_n^P = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)}{n(n-1) \dots 2 \times 1} \text{ ou } C_n^P = \frac{A_n^P}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

- Propriétés :

$$P_1: C_n^0 = 1 \quad ; \quad P_2: C_n^1 = n \quad ; \quad P_3: C_n^n = 1 \quad ; \quad P_4: C_n^{n-1} = n$$

N.B : Pour Calculer le C_n^P , on utilise le triangle de Pascal qui est le suivant :

$\begin{smallmatrix} p \\ n \end{smallmatrix}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

d) Nombre d'application d'un ensemble fini dans un autre ensemble fini (P- liste)

• Définition :

Soit **E** et **F** deux ensembles finis. On appelle nombre application de l'ensemble **E** dans **F**, toute relation qui permet d'associer à tout élément de **E**, un élément unique de **F**. Le nombre d'application distinct d'un ensemble fini de cardinal **p** dans un ensemble fini de **Cardinal n** est noté : A_n^p tel que : $A_n^p = n^p$

• Propriétés:

$$P_1 : A_n^0 = n^0 = 1 \quad ; \quad P_2 : A_n^1 = n^1 = n$$

4) Les différents types de tirages

a. Tirages successif et sans remise :

Si l'énoncé contient les mots **successif et sans remise**, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance mais que tous les éléments considérés sont distincts (ou **qu'il n'y a pas de répétition d'éléments**).

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : l'**arrangement** : A_n^p

b. Tirages successif et avec remise :

Si l'énoncé contient les mots **successif et avec remise**, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance et qu'un élément peut éventuellement être répété.

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : la **P-liste**: A_n^p

c. Tirage simultané :

Si l'énoncé contient le mot **simultanément**, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments n'a pas d'importance.

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : la **combinaison** : C_n^p

d. Tirage successif :

Si l'énoncé contient le mot **successif**, il faut en tenir compte de tous les ordres dans lesquels on peut obtenir un événement donné.

On doit souvent multiplier par le nombre d'ordres possibles le résultat trouvé pour un ordre déterminé.

Attention : les affirmations ci-dessus ne sont que des indications, elles admettent donc des exceptions.

NB : En probabilité :

- Le nombre total d'élément qui constitue l'univers est noté : **n**.
- Le nombre de tirage parmi ces **n** éléments est noté : **p**.
- La conjonction de coordination << **et** >> se traduit par la multiplication << x >>.
- La conjonction de coordination << **ou** >> se traduit par l'addition << + >>.

II- Probabilité simple :

1) Définition :

Dans une épreuve où tous les évènements élémentaires d'un univers Ω sont équiprobables, la probabilité d'un évènement A est le nombre réel défini par le rapport entre le Nombre de Cas Favorable à l'évènement A et le Nombre de Cas Possibles. On note P_A ou $P(A)$.

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Nombre de Cas Favorables à la réalisation de } A}{\text{Nombre Total de Cas Possibles à la réalisation de } A}$$

2) Propriétés :

Soit Ω l'univers ou évènement certain. Soient A et B deux évènements élémentaires de Ω .

On a les propriétés suivantes :

- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- Si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

3) Equiprobabilité:

On parle d'équiprobabilité si la probabilité de réalisation de chaque évènement élémentaire est le même.

Exemple : Le lancer du dé est un évènement équiprobable car la probabilité d'apparition de chaque face est $\frac{1}{6}$

III- Probabilités conditionnelles et Indépendance

1) Définition :

Soient A et B deux évènements de probabilité non nulles tels que $A \cap B \neq \emptyset$.

La probabilité de réalisation de A quand B est réalisé s'appelle probabilité conditionnelle de A par rapport à B ou probabilité de A sachant B . $P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

2) Indépendance :

Deux évènements A et B sont indépendants si la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'autre.

On a alors :

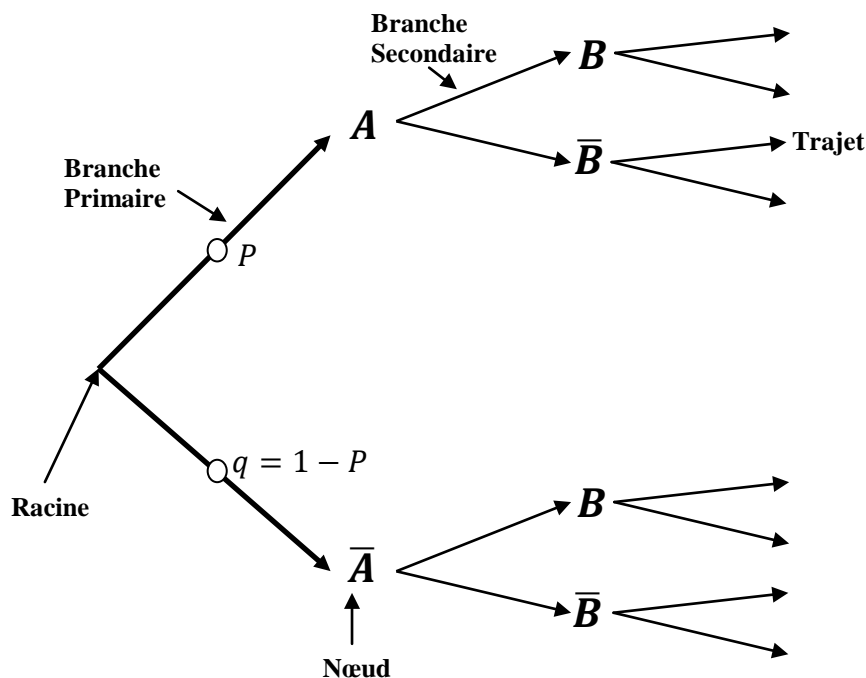
- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

3) Construction d'un arbre pondéré:

Méthode :

Pour construire un arbre pondéré, on applique les règles suivantes :

- Les événements qui se trouvent aux extrémités des branches primaires forment une partition de l'univers Ω .
- Le poids d'une branche primaire est la probabilité de l'évènement qui se trouve à son extrémité.
- La somme des poids des branches primaires vaut 1.
- Le poids d'une branche secondaire est la probabilité conditionnelle de l'évènement qui se trouve à son extrémité sachant que le trajet menant à son origine a été réalisé.
- La somme des poids des branches secondaire issues d'un même nœud vaut 1.
- Le poids ou la probabilité d'un trajet est le produit des branches le constituant.
- La probabilité d'un évènement associé à plusieurs trajets complets est la somme des probabilités de ces trajets.



IV- Loi de probabilité

1) Variable aléatoire :

On appelle variable aléatoire réelle, toute application x de Ω dans \mathbb{R} , l'ensemble des valeurs prises par x , noté $x(\Omega)$ et s'appelle l'univers image de Ω par x .

2) Loi de probabilité d'une variable aléatoire X

On appelle loi de probabilité d'une variable aléatoire X , la fonction : $P : x \mapsto P(X = x)$ qui à toute valeur image on associe la probabilité $P_i = P(X = x_i)$.

N.B : Une loi de probabilité se présente sous forme d'un tableau de valeurs

x_i	x_1	x_2	x_3	x_n
$p_i(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	p_n

Remarque : La somme de toutes les lois de probabilités est toujours égale à **1** c'est-à-dire :

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

3) Valeurs caractéristiques d'une variable aléatoire :

a) Espérance mathématique E(X) ou \bar{X}

On appelle espérance mathématique \bar{X} , le nombre noté : $\bar{X} = E(X)$ tel que :

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n$$

NB : C'est la moyenne pondérée des valeurs images x_i pondérées par les probabilités P_i **Car** :

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

Propriétés :

$$P_1 : E(x - E(x)) = 0 \quad ; \quad P_3 : E(x + k) = E(x) + k$$

$$P_2 : E(k) = k \quad P_4 : E(kx) = k E(x).$$

b) Variance :

On appelle variance d'une variable aléatoire X , le nombre réel noté $V(X)$ telle que :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - [E]^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + \dots + x_n^2 p_n - [E]^2$$

Propriétés :

$$P_1 : V(k) = 0 \quad ; \quad P_2 : V(X+k) = V(x) \quad ; \quad P_3 : V(kx) = k^2 V(x)$$

c) Ecart – type :

On appelle écart-type, la racine carré de la variance. On la note δ tel que : $\delta = \sqrt{V}$.

Propriété:

$$\delta(kx) = k \delta(x)$$

4) Partie associée à une valeur image :

Etant donnée une valeur image x_i ; on désigne par " $X = x_i$ ", l'évènement constitué par l'ensemble des éventualités e_k de Ω ayant pour image x_i par X . On note " $X(e_k) = x_i$ " ou " $X = x_i$ ".

N.B : L'ensemble des évènements " $X = x_i$ ", constitue une partition de Ω et forme un système complet d'évènements.

On définit également les notations : $X > a$; $X \geq a$; qui désigne l'ensemble des éventualités de Ω dont l'image est strictement supérieure à a , supérieure ou égale à a ,

5) Fonction de répartition d'une variable aléatoire X

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire x , la fonction F définie sur \mathbb{R} par :

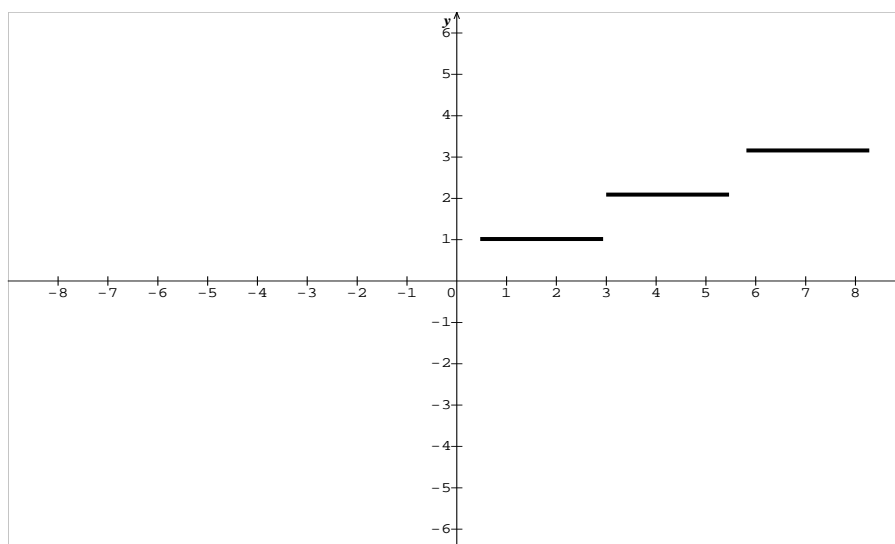
$$F : x \mapsto p(X \leq x)$$

N.B :

Si $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, alors $F(x) = P_1 + P_2 + \dots + P_i$

En particulier : $F(x) = 0$ pour $x < x_1$ et $F(x) = 1$ pour $x > x_n$

La fonction F est une fonction en escalier, croissante de 0 à 1



6) Epreuve de Bernoulli – Loi Binomiale

a- Epreuve de Bernoulli

On appelle épreuve de Bernoulli, toute épreuve ne conduisant qu'à deux éventualités : L'une de ces deux éventualités est appelée **succès** avec pour probabilité p et l'autre **échec** avec pour probabilité $q = 1 - p$.

b- Loi binomiale :

Soit une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Soit p la probabilité du succès et $q = 1 - p$ celle de l'échec.

Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de succès.

La probabilité d'avoir exactement k succès est : $p(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

Exercices

Vocabulaire de la théorie des ensembles

1 Soient A et B deux ensembles finis tels que : $A = \{1 ; a ; c\}$ et $B = \{b ; 1 ; c ; 2\}$

1) Détermine : $A \cap B$; $A \cup B$; $A \times B$.

2) Détermine : $Card(A)$; $Card(B)$; $Card(A \cap B)$; $Card(A \cup B)$; $Card(A \times B)$.

2 Soit E un ensemble non vide et $A ; B ; C ; D$ des parties non vides de E .

1) Montre que $A - B = A \cap \bar{B}$, où $\bar{B} = C_E^B$.

2) En utilisant la question 1), Montre que :

a- $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

b- $A - (B \cup C) = (A - B) - C$.

c- $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.

d- $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

e- $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$

Dénombrements.

3 1) Calcule :

$$A = 5! + 3(4!) ; B = \frac{8!}{3!} ; C = \frac{12!}{10!3!} ; D = \frac{(n+1)!}{(n-1)!} ; E = \frac{n \times n!}{(n-1)!} ; F = \frac{(2n+1)!}{(2n)!}$$

$$G = A_8^5 + A_{13}^2 + 3A_{100}^0 ; H = C_7^4 + C_{15}^{15} + 8C_{100}^{99} ; I = \frac{A_{13}^8}{A_6^4} + \frac{C_{10}^5}{C_3^7}$$

2) Résous dans \mathbb{N} les équations suivantes :

$$a) A_n^2 = n(2n + 5) ; b) C_n^2 = 5n ; c) A_n^2 = C_n^3 ; d) C_n^2 = 45 ; e) n^2 + 3C_n^2 = 1$$

4 Dans une classe de 40 élèves, 25 aiment la mathématique ; 30 aiment le français et 17 aiment la mathématique et le français.

1) Calcule le nombre d'élève qui aiment :

a- Uniquement le français.

b- Uniquement la mathématique.

c- La mathématique ou le français.

2) En déduis le nombre d'élèves qui n'aiment aucune des deux matières

5 Trouve le nombre d'anagrammes des mots suivants : MALI ; CHERE ; RECHERCHER.
(On rappelle qu'une anagramme d'un mot est un mot qui contient les mêmes lettres éventuellement répétées le même nombre de fois).

6 Un sac contient 25 boules dont 9 rouges, 6 vertes et 10 jaunes. On tire 5 boules du sac.

I// Dénombre les cas possible à cette épreuve si :

1) Le tirage est simultané.

2) Le tirage est successif et sans remise.

3) Le tirage est successif et avec remise.

II// Dénombre les cas favorables à cette épreuve si :

1) Le tirage est simultané et le résultat contient exactement 3 boules rouges.

2) Le tirage est successif et sans remise et le résultat contient 2 boules vertes et 2 jaunes.

3) Le tirage est successif et avec remise et le résultat contient 1 boule jaune ou 3 vertes.

4) Le tirage est simultané et le résultat contient 2 boules rouges, 2 vertes et 1 jaune.

5) Le tirage est simultané et le résultat contient au moins 4 boules rouges.

6) Le tirage est successif et sans remise et le résultat contient au plus 3 boules jaunes.

7) Le tirage est successif et avec remise et le résultat est unicolore.

Probabilités simples – Probabilités conditionnelles.

7 Soit une expérience E et P la probabilité modélisant E.

Soient A et B deux événements tels que : $P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

Calcule : $P(A \cup B)$; $P(A \cup \bar{B})$; $P(\bar{A} \cup B)$ et $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

8 Peut-on Trouve une probabilité P sur l'univers $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 \}$ telle que :

$P(\{ 1 ; 2 \}) = \frac{1}{4}$; $P(\{ 1 ; 3 \}) = \frac{1}{4}$ et $P(\{ 2 ; 3 \}) = \frac{1}{2}$?

9 Dans une classe de terminale 88% des élèves ont déclarés aimer les mathématiques ; 20% ont déclarés aimer la chimie et 15% ont déclarés aimer les mathématiques et la chimie. On choisit un élève au hasard.

1) Quelle est la probabilité que cet élève aime les mathématiques et pas la chimie ?

2) Quelle est la probabilité que cet élève aime la chimie et pas les mathématiques ?

3) Quelle est la probabilité que cet élève n'aime ni les mathématiques ni la chimie ?

10 Dans un village, on choisit une personne au hasard (tous les choix sont équiprobables).
On désigne par :

- H l'évènement : « Cette personne est un homme ».

- B l'évènement : « Cette personne a les yeux bleus ».
- M l'évènement : « Cette personne a les yeux marrons ».
- V l'évènement : « Cette personne a les yeux verts ».

1) Exprime par une phrase chacun des évènements suivants :

$$H \cap B ; H \cap M ; H \cap V ; \bar{H} \cap B ; \bar{H} \cap M ; \bar{H} \cap V ; \bar{H} \cap \bar{B}.$$

$$2) \text{ On donne : } P(H) = \frac{1}{2} ; P(B) = \frac{3}{4} ; P(M) = \frac{2}{7} ; P(V) = \frac{1}{5}$$

$$\text{Calcule : } P(H \cap B) ; P(H \cap M) ; P(H \cap V) ; P(\bar{H} \cap B) ; P(\bar{H} \cap M) ; P(\bar{H} \cap \bar{B})$$

11 Deux tireurs A et B font feu simultanément sur une cible.

La probabilité que A touche la cible est estimée à $\frac{4}{5}$; et pour celui de B est de $\frac{3}{4}$.

Calcule la probabilité des évènements suivants :

- 1) Les deux tireurs touchent tous deux la cible.
- 2) Les deux tireurs manquent la cible.
- 3) La cible est atteinte par le tireur A seulement.
- 4) La cible est atteinte par un tireur seulement.
- 5) La cible est atteinte.
- 6) La cible soit manquée

12 Une population animale comporte $\frac{1}{3}$ de mâles et $\frac{2}{3}$ de femelles. L'albinisme frappe 6% de mâles et 0,36% de femelles.

Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard (dont on ignore le sexe) soit albinos ?

13 Dans un village, 1 habitant sur 100 est atteint d'une maladie génétique A.

On fait un test de dépistage puis on note par (T) si le teste est positif et par (\bar{T}) si le teste est négatif. On donne $P(T/A) = 0,8$ et $P(\bar{T}/\bar{A}) = 0,9$

On soumet un patient au test, celui-ci est positif.

Quelle est la probabilité que ce patient soit atteint par la maladie A ?

14 Dans une population, 30% de personnes sont atteintes d'une affection des voies respiratoires supérieures. Il ya 60% de fumeurs parmi les malades et 10% de fumeurs parmi les personnes non atteintes par cette affection. Calcule la probabilité qu'un fumeur soit atteint de l'affection.

15 On lance un dé deux fois.

- 1) Calcule la probabilité que le total des points présentés par la face supérieure du dé soit égale à 6.
- 2) Calcule la probabilité pour que le total des points présentés par la face supérieure du dé soit un nombre pair.

16 On dispose d'un jeu de 32 cartes ordinaires

- 1) Combien de "mains" différentes de 8 cartes peut-on constituer ?
- 2) Combien de "mains" différentes de 8 cartes comprenant 2 as peut-on constituer ?
- 3) Combien de "mains" de 8 cartes ayant au moins 2 cœurs peut-on constituer ?

17 On jette successivement un dé cubique deux fois puis on désigne par :

- A l'évènement : « le 1^{er} jet donne un nombre pair ».
- B l'évènement : « le 2^{ème} jet donne un nombre pair ».
- C l'évènement : « la somme de deux numéros obtenu est paire ».

Les évènements A ; B et C sont-ils deux à deux indépendants ? Mutuellement indépendants ?

18 Une maladie atteint 3% d'une population.

Un test de dépistage donne les résultats suivants :

- Chez les individus malades, 95% de tests sont positifs et 5% négatifs.
- Chez les individus non malades, 1% de tests sont positifs et 99% négatifs.

On note **M** l'évènement : « être malade » et **T** l'évènement : « le test est positif »

- 1) Construire un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.
- 2) Donner la probabilité des évènements : « $M \cap T$ » et « $\bar{M} \cap \bar{T}$ ».
- 3) Détermine $P(T)$ et $P(\bar{T})$.
- 4) a- Calcule la probabilité de ne pas être malade, sachant que le test est positif.
b- Calcule la probabilité d'être malade, sachant que le test est négatif.

19 Les résultats d'une étude présentés par l'Institut National de la statistique révèlent :

- 45% de la population active sont des hommes.
- 25% des femmes et 20% des hommes de cette population active sont au chômage.

On interroge au hasard une personne.

- 1) Construire un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.
- 2) Détermine les probabilités des évènements suivants :
a- H : « être un homme »
b- F : « être une femme »
c- « être au chômage sachant qu'on est homme femme »
d- « être au chômage sachant qu'on est femme »
- 3) Calcule la probabilité pour qu'un individu de cette population active interrogé au hasard soit au chômage.
- 4) Quelle est la probabilité que l'individu interrogé soit une femme sachant qu'il est au chômage.

20 Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel :

Les ingénieurs, les opérateurs de production et les agents de maintenance.

Il y'a 8% d'ingénieurs et 82% d'opérateurs de production.

Les femmes présentent 50% des ingénieurs, 60% des opérateurs de production et 25% des agents de maintenance.

Partie A :

Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise puis on note :

M l'évènement : « le personnel interrogé est un agent de maintenance »;

O l'évènement : « le personnel interrogé est un opérateur de production »;

I l'évènement : « le personnel interrogé est un ingénieur »;

F l'évènement : « le personnel interrogé est une femme ».

- 1) Construire un arbre pondéré correspondant aux données.
- 2) Calcule la probabilité d'interroger :
 - a- Un agent de maintenance ;
 - b- Une femme agent de maintenance ;
 - c- Une femme.

Loi de probabilité

- 21** Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	5	10	15	30
$P(X = x_i)$	0,1	a	$2a$	0,3

- 1) Calcule a .
- 2) En déduis les valeurs de :
 - a- L'espérance mathématique $E(X)$.
 - b- La variance $V(X)$ et L'écart-type $\delta(X)$

- 22** On considère la variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$ dont la loi de probabilité est donnée par :

x_i	2	4	6	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{3}{4}$	b

- 1) Donne une relation entre a et b
- 2) On suppose que l'espérance mathématique est : $E(X) = \frac{21}{4}$. Détermine a et b .
- 3) Calcule La variance $V(X)$ de X .

- 23** Un sac contient 5 boules rouges et 3 boules blanches. On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.

- 1) Calcule la probabilité de chacune des évènements suivants :
 - a- Aucune boule rouge n'est tirée
 - b- Une boule rouge et une seule est tirée
 - c- Deux boules rouges et deux seulement sont tirées
 - d- Une boule rouge au moins est tirée
 - e- Deux boules blanches au plus sont tirées
- 2) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de boules rouges qui se trouvent parmi les 3 boules tirées.
 - a- Donne la loi de probabilité de X
 - b- Calcule l'espérance mathématique et la variance de X
 - c- Calcule la probabilité de l'évènement : $1 \leq X \leq 2$

24

Lors de la coupe du Mali de football 2012, on a donné dans le tableau ci-dessous les résultats des 8 matchs joués le premier jour du tournoi.

Matches	Première Equipe	Deuxième équipe
1 ^{er} Match	2 buts	1 but
2 ^{ème} Match	2 buts	0 but
3 ^{ème} Match	3 buts	3 buts
4 ^{ème} Match	1 but	3 buts
5 ^{ème} Match	0 but	1 but
6 ^{ème} Match	0 but	0 but
7 ^{ème} Match	1 but	4 buts
8 ^{ème} Match	3 buts	2 buts

On choisit un match au hasard parmi les huit matchs du premier jour du tournoi ; tous les matchs ont la même probabilité d'être choisis.

- 1- a) Montre que la probabilité P_1 qu'aucun but n'ait été marqué au cours de ce match est égale à $\frac{1}{8}$

b) Quelle est la probabilité P_2 que le match soit nul (c'est-à-dire que chaque équipe ait marqué le même nombre de buts) ?

- 2- Pour chaque match, on calcule la différence entre les nombres de buts marqués par les équipes, de façon à Trouve un nombre positif ou nul.

On définit ainsi une variable aléatoire X . Par exemple pour le 5^{ème} match, la valeur de X est égale à 1 et pour le 8^{ème} match, elle est aussi égale à 1.

- a) Donne les valeurs possibles de X .
- b) Détermine la loi de probabilité de X .
- c) Calcule l'espérance mathématique de X .

25

Un récepteur radio possède cinq (05) transistors dont deux (02) défectueux. On effectue simultanément un contrôle sur deux (02)

- 1) Combien y-a-t-il de contrôles possibles ?
- 2) Soit x la variable aléatoire égale au nombre de transistor défectueux décelés lors des contrôles.
 - a- Détermine l'ensemble des valeurs prises par X .
 - b- Détermine la loi de probabilité de X .
 - c- Calcule l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X .

26

Une urne contient un jeton marqué 1 ; deux jetons marqués 2 et x jetons marqués 3 ($x \geq 2$). On tire simultanément 2 jetons de l'urne. On suppose que le tirage est équiprobable et on désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des points marqués sur les 2 jetons extraits de l'urne.

- 1) a- Exprime en fonction de x les valeurs prises par X .
- b- Détermine la loi de probabilité de X .

- 2) a- Démontre que l'espérance mathématique $E(X) = \frac{6x^2 + 22x + 20}{x^2 + 5x + 6}$

b- Détermine la valeur de x pour que $E(X)$ soit égale 5

27 Soit le tableau ci – dessous donnant la loi de probabilité de fabrication de voiture d'une société

X	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

- 1) Calcule l'espérance mathématique
- 2) Calcule la variance puis en déduis l'écart – type
- 3) Donne la fonction de répartition de la variable aléatoire X de cette loi de probabilité puis faite sa représentation la graphique.

28 Une étude statistique faite an le nombre de vente de voiture en une journée par un de ses représentants a conduit à la loi de probabilité suivante pour la variable aléatoire X prenant pour valeurs le nombre de ces ventes.

X	0	1	2	3	4	5 et plus
$P(X=x_i)$	0,15	0,40	0,30	0,10	0,05	0

- 1) Dresser le tableau de la fonction de répartition F de la variable aléatoire X et représenter cette fonction dans le plan rapporté à un repère orthogonal convenable
- 2) Calcule l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable X .

29 Un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 à été piqué de telle sorte que les six faces ne sont pas équiprobables. On note P_n la probabilité d'obtenir le chiffre n lors d'un lancé de dé avec $n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
D'autre part les nombres $P_1; P_2; P_3; P_4; P_5$ et P_6 dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique et que $P_1 \times P_4 = (P_2)^2$.

- 1) Calcule la probabilité d'apparition de chaque numéro.
- 2) On lance ce dé une fois et on considère les évènements suivants :
 A : « Le nombre obtenu est pair ».
 B : « Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 ».
 a- Calcule la probabilité de chacun des évènements A et B .
 b- Calcule la probabilité pour que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3 sachant qu'il est pair.
 c- Les évènements A et B sont t-ils indépendants ?
- 3) On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :
 - D'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires.
 - D'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire.

Le joueur lance le dé :

- S'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1 .
- S'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2 .

On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche, on note G cet évènement.

- a- Calcule la probabilité de tirer une boule blanche de l'urne U_1 puis en déduis la probabilité de l'évènement $G \cap A$. Détermine ensuite la probabilité de l'évènement G .

- b- Le joueur est gagnant. Détermine la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé.

30 Une urne contient des boules noires et des boules rouges. Chaque boule noire porte un nombre entier de trois chiffres multiple de 179 et chaque boule rouge porte un nombre entier de trois chiffres multiple de 159.

Ces boules sont indiscernables au toucher.

- 1) Trouve le nombre maximal de boules de chaque couleur dans l'urne. (On pourra utiliser les suites arithmétiques).
- 2) On suppose que l'urne contient cinq boules noires et quinze boules rouges. On considère le jeu suivant : la mise est de 200 F pour chaque partie. Le joueur tire une boule de l'urne :
 - Si elle est noire, on lui donne 500 F et la partie est terminée.
 - Si elle est rouge, il la remet dans l'urne et procède à un second tirage.
 - Si la seconde boule tirée est noire, on lui donne 300 F et la partie est terminée.
 - Si la deuxième boule tirée est rouge, il la remet dans l'urne et procède à un troisième tirage et dernier tirage.
 - Si la troisième boule tirée est noire, on lui donne 100 F.
 - Si la troisième boule tirée est rouge, il n'a rien.

On désigne par X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

- a- Donne la loi de probabilité de X .
- b- Calcule la probabilité P pour que X soit positive.
- c- Peut-on espérer gagner ce jeu ?
- d- Un joueur fait cinq parties successives. Qu'elle est la probabilité pour qu'il ait exactement trois fois un gain positif lors de ces cinq parties ?

Epreuve de Bernoulli – Loi Binomiale

31 On suppose que la probabilité de faire un garçon est $\frac{1}{4}$. Une famille a 5 enfants. Calcule la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 garçons.

32 L'objectif de cet exercice est de Détermine les quels des avions à 2 ou 4 moteurs sont les plus sûrs.

Un avion ne s'écrase pas tant que la moitié au moins de ses moteurs fonctionne. Les moteurs d'un avion tombent en panne de manière indépendante.

Partie A :

Dans cette partie on prend $p = 0,1$

- 1) Calculons la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.
- 2) Calculons la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.
- 3) Calculons la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne
- 4) En déduis la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'crase.

Partie B :

On revient au cas général

- 1) Soit $f(p)$ la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'crase.

Démontre que $f(p) = p^2$

- 2) Soit $g(p)$ la probabilité pour qu'un avion à 4 moteur s'écrase. Démontre que $g(p) = p^2(-3p^2 + 4p)$
 3) On pose $h(p) = f(p) - g(p)$.

a- Etudier le signe de $h(p)$ en fonction de p .

b- En déduis, suivant les valeurs de p dans quels avions il vaut mieux monter.

33

Sur une autoroute, deux carrefours successifs sont munis de feux tricolores A et B. La couleur du feu B est indépendante de celle du feu A.

La probabilité que le feu A soit vert est $\frac{3}{4}$.

La probabilité que le feu B soit vert est $\frac{1}{2}$.

La probabilité de couleur orange est toujours nulle.

1) Un automobiliste passe aux deux carrefours

a- Calcule la probabilité qu'il rencontre deux feux verts.

b- Calcule la probabilité qu'il rencontre au moins un feu vert.

2) On ne s'occupe plus que du feu A.

Un automobiliste passe quatre fois à ce carrefour.

X est la variable aléatoire qui a pour valeur le nombre de feux verts que l'automobiliste rencontre.

a- Trouve la loi de probabilité de X .

b- Calcule l'espérance mathématique $E(X)$ de X . Pouvait-on prévoir ce résultat ?

34

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient 2 boules blanches et 4 boules vertes.

L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 2 boules vertes.

Dans chaque urne les tirages sont équiprobables et les urnes ont la même probabilité d'être choisies. On choisit au hasard l'une des urnes et l'on extrait une boule que l'on ne remet dans aucune urne ; si la boule est verte, on recommence le tirage dans la même urne ; si la boule est blanche, on recommence le tirage dans l'autre urne.

1) Montre que la probabilité de tirer deux boules blanches est $\frac{2}{9}$.

2) Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur $+1$ si l'on obtient deux boules de la même couleur et -1 pour deux couleurs distinctes.

Donne la loi de probabilité de X ; son espérance mathématique $E(X)$ et son écart-type $\delta(X)$.

3) On dit que l'on a obtenu un succès si les deux boules sont de même couleur.

On répète l'expérience précédente 5 fois de suite.

Y est la variable aléatoire qui comprend pour valeur le nombre de «succès» parmi ces 5 épreuves. Quelle est la probabilité P d'avoir 4 succès exactement ?

Donne une valeur approchée de P à 10^{-1} près par excès. Calcule son espérance mathématique $E(Y)$ et son écart-type $\delta(Y)$

Solutions

Vocabulaire de la théorie des ensembles – Dénombrements.

1 Soient A et B deux ensembles finis tels que : $A = \{1 ; a ; c\}$ et $B = \{b ; 1 ; c ; 2\}$

1) Déterminons : $A \cap B$; $A \cup B$; $A \times B$.

$A \cap B$: (C'est l'ensemble des éléments commun de A et B) $\Rightarrow A \cap B = \{1 ; c\}$

$A \cup B$: (C'est l'ensemble des réunis de A et B) $\Rightarrow A \cup B = \{1 ; 2 ; a ; b ; c ;\}$

$A \times B$: (C'est l'ensemble des couples $(x ; y)$ tel que x appartient à A et y appartient à B)

$\Rightarrow A \times B =$

$\{(1 ; b) ; (1 ; 1) ; (1 ; c) ; (1 ; 2) ; (a ; b) ; (a ; 1) ; (a ; c) ; (a ; 2) ; (c ; b) ; (c ; 1) ; (c ; c) ; (c ; 2)\}$

2) Déterminons : $\text{Card}(A)$; $\text{Card}(B)$; $\text{Card}(A \cap B)$; $\text{Card}(A \cup B)$; $\text{Card}(A \times B)$.

$\text{Card}(A) = 3$; $\text{Card}(B) = 4$; $\text{Card}(A \cap B) = 2$; $\text{Card}(A \cup B) = 5$; $\text{Card}(A \times B) = 12$

2 Soit E un ensemble non vide et $A ; B ; C ; D$ des parties non vides de E .

1) Montrons que $A - B = A \cap \bar{B}$, où $\bar{B} = C_E^B$.

$A - B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\} = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in \bar{B}\} = A \cap \bar{B} \text{ ou } \bar{B} = C_E^B.$

2) En utilisant la question 1), montrons que :

a- $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C).$

$(A \cup B) - C = (A \cup B) \cap \bar{C} = (A \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{C}) = (A - C) \cup (B - C).$

D'où $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C).$

b- $A - (B \cup C) = (A - B) - C.$

$A - (B \cup C) = A \cap (\overline{B \cup C}) = A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} = (A - B) - C.$

D'où $A - (B \cup C) = (A - B) - C.$

c- $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C).$

$$\begin{aligned} A - (B - C) &= A \cap (\overline{B - C}) = A \cap (\bar{B} \cup C) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap C) \\ &= (A - B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

D'où $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C).$

d- $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$

$A \cap (B - C) = (A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = (A \cap B) \cap (\bar{A} \cup \bar{C}) = [(A \cap B) \cap \bar{A}] \cup [(A \cap B) \cap \bar{C}]$

$$= [(A \cap \bar{A}) \cap B] \cup [(A \cap B) \cap \bar{C}] = \emptyset \cup [(A \cap B) \cap \bar{C}] = A \cap (B \cap \bar{C})$$

$$= A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$$

D'où $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$

$$\text{e- } (A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$$

$$(A - B) \cap (C - D) = (A \cap \bar{B}) \cap (C \cap \bar{D}) = (A \cap C) \cap (\bar{B} \cap \bar{D}) = (A \cap C) \cap \overline{(B \cup D)}$$

$$= (A \cap C) - (B \cup D)$$

D'où $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$

3 1) Calculons :

$$A = 5! + 3(4!) = (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) + 3(4 \times 3 \times 2 \times 1) = 192$$

$$B = \frac{8!}{3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$$

$$C = \frac{12!}{10! \times 3!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{10! \times 3!} = \frac{12 \times 11}{3!} = \frac{12 \times 11}{3 \times 2 \times 1} = 2 \times 11 = 22$$

$$D = \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \times (n+1-1) \times (n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \times n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n(n+1)$$

$$E = \frac{n \times n!}{(n-1)!} = \frac{n \times n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n \times n = n^2$$

$$F = \frac{(2n+1)!}{(2n)!} = \frac{(2n+1) \times (2n+1-1)!}{(2n)!} = \frac{(2n+1) \times (2n)!}{(2n)!} = 2n+1$$

$$G = A_8^5 + A_{13}^2 + 3A_{100}^0 = (8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4) + (13 \times 12) + 3(1) = 6879$$

$$H = C_7^4 + C_{15}^{15} + 8C_{100}^{99} = \left(\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \right) + (1) + 8(100) = 7 \times 5 + 1 + 800 = 836$$

$$I = \frac{A_{13}^8}{A_6^4} + \frac{C_{10}^5}{C_9^7} = \left(\frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{6 \times 5 \times 4 \times 3} \right) + \left(\frac{\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}}{\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}} \right) = (144144) + (7)$$

$$\Rightarrow I = 144151$$

2) Résolvons dans \mathbb{N} les équations suivantes :

NB : Dans tout l'exercice, D_v désigne le domaine de validité des équations proposées.

$$\text{a) } A_n^2 = n(2n + 5)$$

$$D_v = \{x/x \in \mathbb{N}; x \geq 2\}. \text{ Alors } x \geq 2 \Rightarrow D_v = [2; +\infty[$$

Résolvons ainsi l'équation $A_n^2 = n(2n + 5).$

$$A_n^2 = n(2n + 5) \Leftrightarrow n(n - 1) = n(2n + 5) \Leftrightarrow n - 1 = 2n + 5 \Leftrightarrow n = -6 \notin D_v$$

Alors $S = \emptyset$

b) $C_n^2 = 5n$

$D_v = \{x/x \in \mathbb{N}; x \geq 2\}$. Alors $x \geq 2 \Rightarrow D_v = [2; +\infty[$

Réolvons ainsi l'équation $C_n^2 = 5n$

$$C_n^2 = 5n \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 5n \Leftrightarrow n(n-1) = 10n \Leftrightarrow n-1 = 10 \Rightarrow n = 11 \in D_v$$

Alors $S = \{11\}$

c) $A_n^2 = C_n^3$

$D_v = \{x/x \in \mathbb{N}; x \geq 2 \text{ et } x \geq 3\}$. Alors $x \geq 2 \text{ et } x \geq 3 \Rightarrow D_v = [3; +\infty[$

$$A_n^2 = C_n^3 \Leftrightarrow n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \Leftrightarrow 6n(n-1) = n(n-1)(n-2) \Leftrightarrow n-2 = 6$$

$\Rightarrow n = 8 \in D_v$. Alors $S = \{8\}$

d) $C_n^2 = 45$

$D_v = \{x/x \in \mathbb{N}; x \geq 2\}$. Alors $x \geq 2 \Rightarrow D_v = [2; +\infty[$

Réolvons ainsi l'équation $C_n^2 = 45$

$$C_n^2 = 45 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 45 \Leftrightarrow n(n-1) = 90 \Leftrightarrow n^2 - n = 90 \Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0 \text{ et } \Delta = 361$$

$\Rightarrow n = -9 \notin D_v$ ou $n = 10 \in D_v$. Alors $S = \{10\}$

e) $n^2 + 3C_n^2 = 1$

$D_v = \{x/x \in \mathbb{N}; x \geq 2\}$. Alors $x \geq 2 \Rightarrow D_v = [2; +\infty[$

Réolvons ainsi l'équation $n^2 + 3C_n^2 = 1$

$$n^2 + 3C_n^2 = 1 \Leftrightarrow n^2 + 3 \frac{n(n-1)}{2} = 1 \Leftrightarrow 2n^2 + 3n(n-1) = 2 \Leftrightarrow 2n^2 + 3n^2 - 3n = 2 \Leftrightarrow$$

$$5n^2 - 3n - 2 = 0 \text{ et } \Delta = 49$$

$\Rightarrow n = \frac{2}{5} \notin \mathbb{N}$ ou $n = 1 \notin D_v$. Alors $S = \emptyset$

- 4** Dans une classe de 40 élèves, 25 aiment la mathématique ; 30 aiment le français et 17 aiment la mathématique et le français.

NB : Tout d'abords, faisons une traduction mathématique des affirmations ci-dessus :

- Une classe comporte 40 élèves alors $\text{Card}(E) = 40$
- 25 aiment la mathématique alors $\text{Card}(\text{Maths}) = 25$
- 30 aiment le français alors $\text{Card}(\text{Franc}) = 30$
- 17 aiment les maths et le Français alors $\text{Card}(\text{Maths} \cap \text{Franc}) = 17$

1) Calculons le nombre d'élève qui aiment :

- a) Uniquement le français

Soit $\text{Card}(A)$ cet ensemble tel que :

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(\text{franc}) - \text{card}(\text{Maths} \cap \text{franc}) \Rightarrow \text{Card}(A) = 30 - 17 = 13$$

- b) Uniquement les mathématiques

Soit $\text{Card}(B)$ cet ensemble tel que :

$$\text{Card}(B) = \text{Card}(\text{maths}) - \text{Card}(\text{maths} \cap \text{franc}) \Rightarrow \text{Card}(B) = 25 - 17 = 8$$

- c) Les mathématiques ou le Français.

Soit $\text{Card}(C)$ cet ensemble tel que :

$$\text{Card}(C) = \text{Card}(\text{maths}) + \text{Card}(\text{franc}) - \text{Card}(\text{Maths} \cap \text{français})$$

$$\Rightarrow \text{Card}(C) = 25 + 30 - 17 = 38$$

2) N'aiment aucune des deux matières :

Soit $\text{Card}(D)$ cet ensemble tel que :

$$\text{Card}(D) = \text{Card}(C_E^{\text{Maths} \cup \text{Franc}}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(\text{maths} \cap \text{français})$$

$$\Rightarrow \text{Card}(D) = 40 - 38 = 2$$

5 Trouvons le nombre d'anagrammes des mots suivants : MALI ; CHERE ; RECHERCHER.

NB : On rappelle qu'une anagramme d'un mot est un mot qui contient les mêmes lettres éventuellement répétées le même nombre de fois.

- MALI contient 4 lettres tous distinctes.

Le nombre d'anagrammes de MALI est donc : $4! = 24$

- CHERE contient 5 lettres mais il ya 2E. Notons les E_1 et E_2 pour commencer.

Les classements $CH E_1 RE_2$ et $CH E_2 RE_1$ donnent le même mot. D'une manière générale, cette anagramme est obtenue deux fois : une fois avec E_1 en premier et une fois avec E_2 en premier. Par conséquent le nombre d'anagrammes est donc égal au nombre de classement des cinq lettres, divisé par le nombre de classements des deux E.

Le nombre d'anagrammes de CHERE est donc : $\frac{5!}{2!} = 60$

- RECHERCHER contient 10 lettres dont 3R ; 3E ; 2C et 2H.

Le nombre d'anagrammes de RECHERCHER est donc : $\frac{10!}{3! \times 3! \times 2! \times 2!} = 25\,200$

6

Un sac contient 25 boules dont 9 rouges, 6 vertes et 10 jaunes. On tire 5 boules du sac.

NB : Tout d'abords, faisons une traduction mathématique des affirmations ci-dessus :

- Un sac contient 25 boules alors $n = 25$
- On tire 5 boules du sac alors $p = 5$

I// Ainsi Dénombrons les nombres de cas possibles à cette épreuve si :

- 1) Le tirage est simultané

Si l'énoncé contient le mot : simultanément, cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments n'a pas d'importance.

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la combinaison:** $Card(\Omega) = C_n^p = C_{25}^5 = 53130$

Attention :

Il ne s'agit que d'indications, elles admettent des exceptions.

D'où le nombre de cas possible à cette épreuve est : 53130.

- 2) Le tirage est successif sans remise

Si l'énoncé contient les mots : successif et sans remise, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance mais que tous les éléments considérés sont distincts (ou qu'il n'y a pas de répétition d'éléments).

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **l'arrangement:** $Card(\Omega) = A_n^p = A_{25}^5 = 6375600$

Attention :

Il ne s'agit que d'indications, elles admettent des exceptions.

D'où le nombre de cas possible à cette épreuve est : 6375600.

- 3) Le tirage est successif avec remise

Si l'énoncé contient les mots : successif et avec remise, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance et qu'un élément peut éventuellement être répété.

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la P-liste :**

$Card(\Omega) = A_n^p = n^p = 25^5 = 9765625$

Attention :

Il ne s'agit que d'indications, elles admettent des exceptions.

D'où le nombre de cas possible à cette épreuve est : 9765625.

II// Dénombrons les cas favorables dans chaque cas si :

NB : Tout d'abords, faisons une traduction mathématique des assertions « **et** » et « **ou** »
En probabilité :

- La conjonction de coordination « **et** » est équivalente au signe « \times »
- La conjonction de coordination « **ou** » est équivalente au signe « $+$ »

D'autre part :

- La phrase : « **tirer au plus** », revient à faire un rajout cumulatif de **p** de la gauche vers la droite.
- La phrase : « **tirer au moins** », revient à faire un rajout cumulatif de **p** de la droite vers la gauche.

1) Le tirage est simultané et le résultat contient exactement 3 boules rouges.
 $Card(A) = C_9^3 \times C_{16}^2 = 10080$

2) Le tirage est successif et sans remise et le résultat contient 2 boules vertes et 2 jaunes.
 $Card(B) = A_6^2 \times A_{10}^2 = 2700$

3) Le tirage est successif et avec remise et le résultat contient 1 boule jaune ou 3 vertes.
 $Card(C) = A_{10}^1 + A_6^3 = 226$

4) Le tirage est simultané et le résultat contient 2 boules rouges, 2 vertes et 1 jaune.
 $Card(D) = C_9^2 \times C_6^2 \times C_{10}^1 = 5400$

5) Le tirage est simultané et le résultat contient au moins 4 boules rouges.
 $Card(E) = C_9^4 \times C_{16}^1 + C_9^5 \times C_{16}^0 = 2142$

6) Le tirage est successif et sans remise et le résultat contient au plus 3 boules jaunes.
 $Card(F) = A_{10}^3 \times A_{15}^2 + A_{10}^2 \times A_{15}^3 + A_{10}^1 \times A_{15}^4 + A_{10}^0 \times A_{15}^5 = 1084860$

7) Le tirage est successif et avec remise et le résultat est unicolore.
 $Card(G) = A_9^5 + A_6^5 + A_{10}^5 = 166825$

Probabilités simples – Probabilités conditionnelles.

7 Soit une expérience E et P la probabilité modélisant E.

Soit A et B deux évènements tels que $P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

Calculons : $P(A \cup B)$; $P(A \cup \bar{B})$; $P(\bar{A} \cup B)$ et $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

Effectuons un calcul préliminaire de : $P(\bar{A})$ et $P(\bar{B})$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

$$P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A) \times P(\bar{B}) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{6}$$

$$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A}) \times P(B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

8 Vérifions si l'on peut Trouve une probabilité P sur l'univers $\Omega = \{1 ; 2 ; 3\}$ telle que :

$$P(\{1 ; 2\}) = \frac{1}{4} ; P(\{1 ; 3\}) = \frac{1}{4} \text{ et } P(\{2 ; 3\}) = \frac{1}{2}$$

La probabilité P sur l'univers $\Omega = \{1 ; 2 ; 3\}$ existe si et seulement si la somme des probabilités est égale 1 c'est-à-dire : $P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) = 1$

$$P(\{1 ; 2\}) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(\{1\}) + P(\{2\}) = \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$P(\{1 ; 3\}) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(\{1\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$P(\{2 ; 3\}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(\{2\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{4} \quad (3)$$

Formons ainsi le système avec les équations (1) ; (2) et (3).

$$\begin{cases} P(\{1\}) + P(\{2\}) = \frac{1}{4} & (1) \\ P(\{1\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{4} & (2) \\ P(\{2\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{4} & (3) \end{cases}$$

En effectuant la différence des équations (1) et (2), on a :

$$(1) - (2) : P(\{2\}) - P(\{3\}) = 0 \Rightarrow P(\{2\}) = P(\{3\})$$

Remplaçons ainsi $P(\{2\}) = P(\{3\})$ par valeur dans l'équation (3). Ainsi on a :

$$P(\{3\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2P(\{3\}) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(\{3\}) = \frac{1}{4} \text{ et } P(\{2\}) = \frac{1}{4}$$

Remplaçons de même $P(\{2\}) = \frac{1}{4}$ par valeur dans l'équation (1). Ainsi on a :

$$P(\{1\}) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(\{1\}) = 0$$

$$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) = 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \neq 1$$

Alors il n'existe pas de probabilité P sur l'univers $\Omega = \{1 ; 2 ; 3\}$ telle que :

$$P(\{1; 2\}) = \frac{1}{4} ; P(\{1; 3\}) = \frac{1}{4} \text{ et } P(\{2; 3\}) = \frac{1}{2}$$

9 Dans une classe de terminale 88% des élèves ont déclarés aimer les mathématiques ; 20% ont déclarés aimer la chimie et 15% ont déclarés aimer les mathématiques et la chimie. On choisit un élève au hasard.

NB : Tout d'abords, faisons une traduction mathématique des affirmations ci-dessus :

Soit $P(M) = 88\% = \frac{88}{100} = 0,88$: la probabilité sur le pourcentage des élèves qui déclarent aimer les mathématiques.

Soit $P(C) = 20\% = \frac{20}{100} = 0,2$: la probabilité sur le pourcentage des élèves qui déclarent aimer la chimie.

Soit $P(M \cap C) = 15\% = \frac{15}{100} = 0,15$: la probabilité sur le pourcentage des élèves qui déclarent aimer les mathématiques et la chimie.

Soit $P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0,88 = 0,12$: la probabilité de l'évènement contraire de $P(M)$, c'est-à-dire le pourcentage des élèves qui n'aiment pas les mathématiques.

Soit $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,2 = 0,8$: la probabilité de l'évènement contraire de $P(C)$, c'est-à-dire le pourcentage des élèves qui n'aiment pas la chimie.

1) Déterminons la probabilité pour que l'élève aime les mathématiques et pas la chimie

Soit $P(M \cap \bar{C})$ cette probabilité telle que : $P(M \cap \bar{C}) = P(M) \times P(\bar{C}) = 0,88 \times 0,8 = 0,704$

2) Déterminons la probabilité pour que l'élève aime la chimie et pas les mathématiques

Soit $P(C \cap \bar{M})$ cette probabilité telle que : $P(C \cap \bar{M}) = P(C) \times P(\bar{M}) = 0,2 \times 0,12 = 0,024$

3) Déterminons la probabilité pour que l'élève n'aime ni les mathématiques ni la chimie

Soit $P(\bar{M} \cap \bar{C})$ cette probabilité telle que : $P(\bar{M} \cap \bar{C}) = P(\bar{M}) \times P(\bar{C}) = 0,12 \times 0,8 = 0,096$

10 Dans un village, on choisit une personne au hasard (tous les choix sont équiprobables). On désigne par :

- H l'évènement : « Cette personne est un homme ».
- B l'évènement : « Cette personne a les yeux bleus ».
- M l'évènement : « Cette personne a les yeux marrons ».
- V l'évènement : « Cette personne a les yeux verts ».

1) Exprimons par une phrase chacun des évènements suivants :

$H \cap B$ est l'évènement : « Cette personne est un homme *et a les yeux bleus* ».

$H \cap M$ est l'évènement : « Cette personne est un homme *et a les yeux marrons* ».

$H \cap V$ est l'évènement : « Cette personne est un homme *et a les yeux verts* ».

$\bar{H} \cap B$ est l'évènement : « Cette personne est une femme *et a les yeux bleues* ».

$\bar{H} \cap M$ est l'évènement : « Cette personne est une femme *et a les yeux marrons* ».

$\bar{H} \cap V$ est l'évènement : « Cette personne est une femme *et a les yeux verts* ».

$\bar{H} \cap \bar{B}$ est l'évènement : « Cette personne est une femme *et n'a pas les yeux bleues* ».

2) On donne : $P(H) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{3}{4}$; $P(M) = \frac{2}{7}$; $P(V) = \frac{1}{5}$

Calculons : $P(H \cap B)$; $P(H \cap M)$; $P(H \cap V)$; $P(\bar{H} \cap B)$; $P(\bar{H} \cap M)$; $P(\bar{H} \cap \bar{B})$

$$P(H \cap B) = P(H) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$$P(H \cap M) = P(H) \times P(M) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$$

$$P(H \cap V) = P(H) \times P(V) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

$$P(\bar{H} \cap B) = P(\bar{H}) \times P(B) = (1 - P(H)) \times P(B) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$$P(\bar{H} \cap M) = P(\bar{H}) \times P(M) = (1 - P(H)) \times P(M) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{2}{7} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$$

$$P(\bar{H} \cap \bar{B}) = P(\bar{H}) \times P(\bar{B}) = (1 - P(H)) \times (1 - P(B)) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

11 Deux tireurs A et B font feu simultanément sur une cible.

- Soit $p(A) = \frac{4}{5}$; la probabilité que le tireur A touche la cible

- Soit $p(B) = \frac{3}{4}$; la probabilité que le tireur A touche la cible

Calculons la probabilité des évènements suivants :

1) Les deux tireurs touchent tous deux la cible.

$$p(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5} = 0,6$$

2) Les deux tireurs manquent la cible.

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = (1 - P(A)) \times (1 - P(B)) = \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20} = 0,05$$

3) La cible est atteinte par le tireur A seulement.

$$p(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P(\bar{B}) = P(A) \times (1 - P(B)) = \frac{4}{5} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5} = 0,2$$

4) La cible est atteinte par un tireur seulement.

$$p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) = p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A}) \times p(B) = \frac{1}{5} + \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{7}{20} = 0,35$$

5) La cible est atteinte (C'est-à-dire par un tireur ou par deux tireurs).

$$p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{7}{20} = \frac{19}{20} = 0,95$$

6) La cible soit manquée (C'est-à-dire par les deux tireurs).

$$p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0,28$$

12 Une population animale comporte $\frac{1}{3}$ de mâles et $\frac{2}{3}$ de femelles. L'albinisme frappe 6% de mâles et 0,36% de femelles.

- Soit $p(M) = \frac{1}{3}$; la probabilité sur le nombre de mâles.
- Soit $p(F) = \frac{2}{3}$; la probabilité sur le nombre de femelles.
- Soit A ; l'évènement : « être albinos »
- Soit $p(A)$; la probabilité qu'un individu soit albinos
- $p(A/M) = 6\% = \frac{6}{100} = 0,06$ et $p(A/F) = 0,36\% = \frac{0,36}{100} = 0,0036$

Déterminons la probabilité pour qu'un individu pris au hasard (dont on ignore le sexe) soit albinos

$$M \cup F = \Omega \quad \text{et} \quad M \cap F = \emptyset$$

Alors $\{M ; F\}$ forme un système complet d'évènement tel que :

$$\begin{aligned} \Rightarrow p(A) &= p(A \cap M) + p(A \cap F) = p(A/M) \times p(M) + p(A/F) \times p(F) \\ &= (0,06) \times \frac{1}{3} + 0,0036 \times \frac{2}{3} = 0,02 \Rightarrow p(A) = 0,02 \end{aligned}$$

13 Dans un village, 1 habitant sur 100 est atteint d'une maladie génétique A .

On fait un test de dépistage puis on note par (T) si le teste est positif et par (\bar{T}) si le teste est négatif. On donne $P(T/A) = 0,8$ et $P(\bar{T}/\bar{A}) = 0,9$

On soumet un patient au test, celui-ci est positif.

Déterminons la probabilité pour que ce patient soit atteint par la maladie A

On donne $P(T/A) = 0,8$ et $P(\bar{T}/\bar{A}) = 0,9$

Soit A : l'évènement « être atteint de la maladie »

$$\text{Alors } P(A) = \frac{1}{100} = 0,01 \quad \text{et} \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} = 0,99$$

$$\Rightarrow P(A/T) = \frac{P(A) \times P(T/A)}{P(A) \times P(T/A) + P(\bar{A}) \times P(T/\bar{A})} \quad \text{avec } P(T/\bar{A}) = 1 - P(\bar{T}/\bar{A}) = 1 - 0,9 = 0,1$$

$$\Rightarrow P(A/T) = \frac{0,01 \times 0,8}{0,01 \times 0,08 + 0,99 \times 0,1} = 0,07$$

14 Dans une population, 30% de personnes sont atteintes d'une affection des voies respiratoires supérieures. Il ya 60% de fumeurs parmi les malades et 10% de fumeurs parmi les personnes non atteintes par cette affection.

- Soit $P(M) = 30\% = \frac{30}{100} = 0,3$ la probabilité de l'évènement « être affectés ».
- Soit $P(F/M) = 60\% = \frac{60}{100} = 0,6$ la probabilité de l'évènement « être fumeur ».
- Soit $P(F/\bar{M}) = 10\% = \frac{10}{100} = 0,1$ la probabilité de l'évènement « non affectés ».

Calculons la probabilité qu'un fumeur soit atteint de l'affection.

Soit $P(M/F)$ la probabilité de l'évènement « un fumeur soit atteint de la maladie »

$$\text{telque : } P(M/F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{P(M) \times P(F/M)}{P(M) \times P(F/M) + P(\bar{M}) \times P(F/\bar{M})}$$

$$\text{avec } P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0,3 = 0,72 \Rightarrow P(M/F) = \frac{0,3 \times 0,6}{0,3 \times 0,6 + 0,7 \times 0,1} = 0,72$$

15 On lance un dé deux fois.

Faisons d'abord une illustration tabulaire des deux lancers du dé.

1 ^{er} dé → 2 ^{ème} dé ↓	1	2	3	4	5	6
1	2 Nombre pair	3	4 Nombre pair	5	6 Nombre pair	7
2	3	4 Nombre pair	5	6 Nombre pair	7	8 Nombre pair
3	4 Nombre pair	5	6 Nombre pair	7	8 Nombre pair	9
4	5	6 Nombre pair	7	8 Nombre pair	9	10 Nombre pair
5	6 Nombre pair	7	8 Nombre pair	9	10 Nombre pair	11

6	7	8 Nombre pair	9	10 Nombre pair	11	12 Nombre pair
---	---	---------------------	---	----------------------	----	----------------------

D'après le tableau ci-dessus, on a : $\text{Card}(\Omega) = 36$ (**Nombre de couple possible**)

1) Calculons la probabilité que le total des points présentés par la face supérieure du dé soit égale à 6. En observant le tableau, le nombre de couple dont la somme des points est égale à 6 est estimé à 5. Ainsi en désignant par $P(A)$ cette probabilité, on a : $P(A) = \frac{5}{36}$

2) Calculons la probabilité que le total des points présentés par la face supérieure du dé soit un nombre pair. En observant le tableau, le total couple dont la somme des points est égale à nombre pair est estimé à 18.

Ainsi en désignant par $P(B)$ cette probabilité, on a : $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

16 On dispose d'un jeu de 32 cartes ordinaires

Le nombre total de carte est 32 alors $n = 32$

Le nombre de carte tirée est 8 alors $p = 8$

L'ordre dans lequel on considère les éléments n'a pas d'importance, alors le modèle mathématique utilisé est : **la combinaison**: C_n^p

1) Le nombre de "mains" différentes de 8 cartes que l'on peut constituer est : $C_{32}^8 = 10418300$

2) Le nombre possible de "mains" différentes de 8 cartes comprenant 2 as que l'on peut constituer est : $C_4^2 \times C_{28}^6 = 2260440$ (car on a 4 as).

3) Le nombre possible de "mains" de 8 cartes ayant au moins 2 cœurs que l'on peut constituer est :

$$C_8^2 \times C_{24}^6 + C_8^3 \times C_{24}^5 + C_8^4 \times C_{24}^4 + C_8^5 \times C_{24}^3 + C_8^6 \times C_{24}^2 + C_8^7 \times C_{24}^1 + C_8^8 \times C_{24}^0 = 7013997$$

17 On jette successivement un dé cubique deux fois puis on désigne par :

- A l'évènement : « le 1^{er} jet donne un nombre pair ».
- B l'évènement : « le 2^{ème} jet donne un nombre pair ».
- C l'évènement : « la somme de deux numéros obtenu est paire ».

Vérifions si les évènements A ; B et C sont-ils deux à deux indépendant ou Mutuellement indépendant.

Pour cela, faisons d'abord une illustration tabulaire des deux jets successifs du dé cubique.

1 \ 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

D'après le tableau ci-dessus, on a : $\text{Card}(\Omega) = 36$ (**Nombre de couple possible**)

$$\text{Ainsi } P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}; \quad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}; \quad P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

1^{er} cas : Vérification de l'indépendance de A et B.

Pour que deux évènements soient indépendants, il faut que :

$$P(A \cap C) = P(A) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Puisque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, alors A et C sont indépendants.

2^{ème} cas : Vérification de l'indépendance de A et C.

Pour que deux évènements soient indépendants, il faut que :

$$P(A \cap C) = P(A) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Puisque $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$, alors A et C sont indépendants.

3^{ème} cas : Vérification de l'indépendance de B et C.

Pour que deux évènements soient indépendants, il faut que :

$$P(B \cap C) = P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Puisque $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$, alors B et C sont indépendants.

Donc A ; B ; C sont mutuellement indépendant si et seulement si :

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$ avec C paire car il est la somme des nombres paires A et B.

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \times P(B) \times P(C).$$

Donc A ; B ; C ne sont pas mutuellement indépendant.

18 Une maladie atteint 3% d'une population.

Un test de dépistage donne les résultats suivants :

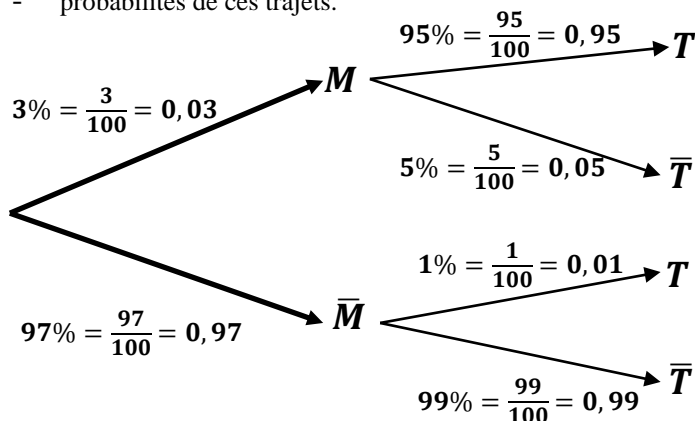
- Chez les individus malades, 95% de tests sont positifs et 5% négatifs.
- Chez les individus non malades, 1% de tests sont positifs et 99% négatifs.

On note **M** l'évènement : « être malade » et **T** l'évènement : « le test est positif »

1) Construisons un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.

L'arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire est :

- probabilités de ces trajets.



2) Déterminons la probabilité des événements : « $M \cap T$ » et « $\bar{M} \cap \bar{T}$ ».

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = \frac{3}{100} \times \frac{95}{100} = \frac{285}{10000} = 0,0285$$

$$P(\bar{M} \cap \bar{T}) = P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(\bar{T}) = \frac{97}{100} \times \frac{99}{100} = \frac{9603}{10000} = 0,9603$$

3) Déterminons $P(T)$ et $P(\bar{T})$.

- $P(T)$ est obtenue en évaluant le poids de l'ensemble des branches terminées par T .

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) = 0,0285 + \frac{97}{100} \times \frac{1}{100} = 0,0285 + 0,0097 = 0,0382$$

- $P(\bar{T})$ est obtenue en évaluant le poids de l'ensemble des branches terminées par \bar{T} .

$$P(\bar{T}) = P(M \cap \bar{T}) + P(\bar{M} \cap \bar{T}) = \frac{3}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{97}{100} \times \frac{99}{100} = 0,9618$$

4) a- Calculons la probabilité de ne pas être malade, sachant que le test est positif.

La probabilité de ne pas être malade, sachant que le test est positif est :

$$P_T(\bar{M}) = \frac{P(\bar{M} \cap T)}{P(T)} = \frac{0,97 \times 0,01}{0,0382} = 0,25393$$

b- Calculons la probabilité d'être malade, sachant que le test est négatif.

La probabilité d'être malade, sachant que le test est négatif est :

$$P_{\bar{T}}(M) = \frac{P(M \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{0,03 \times 0,05}{0,9618} = 0,00156$$

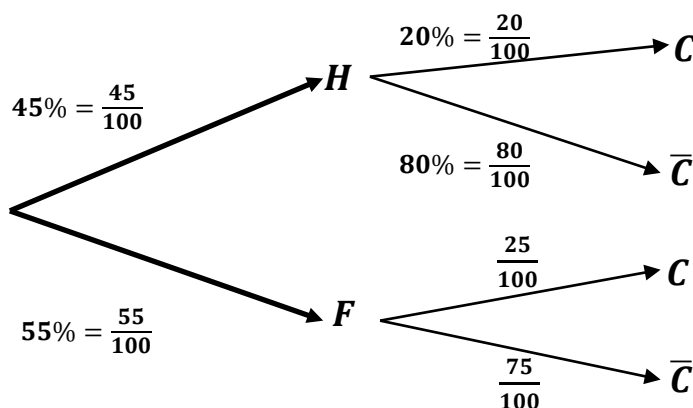
19 Les résultats d'une étude présentés par l'Institut National de la statistique révèlent :

- 45% de la population active sont des hommes.
- 25% des femmes et 20% des hommes de cette population active sont au chômage.

On interroge au hasard une personne.

- 1) Construisons un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.

L'arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire est :



- 2) Déterminons les probabilités des évènements suivants :

a- H : « être un homme »

$$P(H) = \frac{45}{100} = \frac{9}{20} = 0,45$$

b- F : « être une femme »

$$P(F) = \frac{55}{100} = \frac{11}{20} = 0,55$$

c- « être au chômage sachant qu'on est homme femme »

$$P_H(F) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0,20$$

d- « être au chômage sachant qu'on est femme »

$$P_F(C) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0,25$$

- 3) Calculons la probabilité pour qu'un individu de cette population active interrogé au hasard soit au chômage.

$$P(C) = P(H \cap C) + P(F \cap C) = P(H) \times P_H(C) + P(F) \times P_F(C)$$

$$= \frac{45}{100} \times \frac{20}{100} + \frac{55}{100} \times \frac{25}{100} = \frac{2275}{10000} = \frac{91}{400} = 0,228$$

- 4) Déterminons la probabilité que l'individu interrogé soit une femme sachant qu'il est au chômage.

20 Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel : P : 126 Les ingénieurs, les opérateurs de production et les agents de maintenance. Il y'a 8% d'ingénieurs et 82% d'opérateurs de production. Les femmes présentent 50% des ingénieurs, 60% des opérateurs de production et 25% des agents de maintenance.

Partie A :

Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise puis on note :

M l'évènement : « le personnel interrogé est un agent de maintenance »;

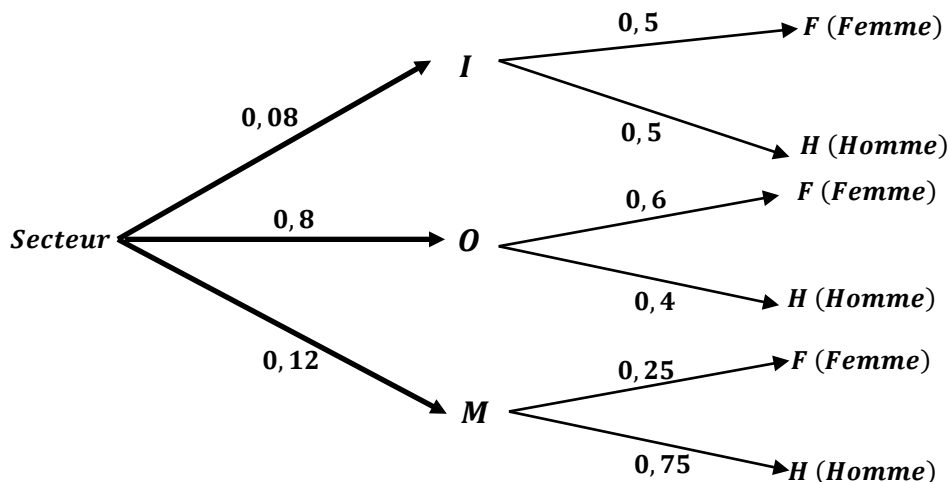
O l'évènement : « le personnel interrogé est un opérateur de production »;

I l'évènement : « le personnel interrogé est un ingénieur »;

F l'évènement : « le personnel interrogé est une femme ».

- 1) Construisons un arbre pondéré correspondant aux données.

L'arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire est :



- 2) Calculons la probabilité d'interroger :

a- Un agent de maintenance ;

$$P(M) = 1 - [P(1) + P(0)] = 1 - [0,08 + 0,8] = 0,12$$

b- Une femme agent de maintenance ;

$$P(F \cap M) = P(F/M) \times P(M) = 0,25 \times 0,12 = 0,03$$

c- Une femme

$$P(F) = P(F \cap M) + P(F \cap I) + P(F \cap O) = 0,03 + 0,6 \times 0,8 + 0,5 \times 0,08 = 0,55.$$

Loi de probabilité

21 Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	5	10	15	30
$P(X = x_i)$	0,1	a	$2a$	0,3

1) Calculons a .

Puisque $\sum P_i = 1$ c'est-à-dire la somme des lois de probabilité est toujours égale à **1** alors on

$$a : 0,1 + a + 2a + 0,3 = 1 \Leftrightarrow 3a = 1 - 0,4 \Rightarrow a = 0,2.$$

D'où le tableau est le suivant :

x_i	5	10	15	30
$P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,4	0,3

2) En déduisons les valeurs de :

a- L'espérance mathématique $E(X)$.

$$E(X) = \sum x_i \times P_i = 5 \times 0,1 + 10 \times 0,2 + 15 \times 0,4 + 30 \times 0,3 = 17,5 \Rightarrow E(X) = 17,5$$

b- La variance $V(X)$.

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum x_i^2 \times P_i - E^2(X) = 5^2 \times 0,1 + 10^2 \times 0,2 + 15^2 \times 0,4 + 30^2 \times 0,3 - 17,5^2 \\ &= 76,25 \Rightarrow V(X) = 76,25 \end{aligned}$$

$$\text{L'écart-type } \delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{76,25} = 8,73$$

22 On considère la variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$ dont la loi de probabilité est donnée par :

x_i	2	4	6	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{3}{4}$	b

1) Donnons une relation entre a et b

La somme des lois de probabilités étant égale à 1, on a : $\frac{1}{4} + a + \frac{3}{4} + b = 1 \Leftrightarrow$

$$a + b + 1 = 1 \Leftrightarrow a + b = 0 \quad (1)$$

2) On pose $E(X) = \frac{21}{4}$. Déterminons a et b

$$E(X) = \frac{21}{4} \Leftrightarrow 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times a + 6 \times \frac{3}{4} + 8 \times b = \frac{21}{4} \Leftrightarrow 16a + 32b = 1 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 & (1) \\ 16a + 32b = 1 & (2) \end{cases}$$

La résolution de ce système donne : $a = -\frac{1}{16}$ et $b = \frac{1}{16}$. D'où on a :

x_i	2	4	6	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{16}$

3) Calculons La variance $V(X)$ de X

$$V(X) = \sum x_i^2 \times P_i - E^2(X) = 2^2 \times \frac{1}{4} - 4^2 \times \frac{1}{16} + 6^2 \times \frac{3}{4} + 8^2 \times \frac{1}{16} - \left(\frac{21}{4}\right)^2 = -\frac{131}{10}$$

23

Un sac contient 5 boules rouges et 3 boules blanches, on tire simultanément et au hasard 3 boules.

- Un sac contient 5 boules rouges et 3 boules blanches : $\Rightarrow n = 5 + 3 = 8$.
- On tire simultanément et au hasard 3 boules : $\Rightarrow p = 3$.
- Puisque le tirage est simultanément alors le modèle mathématique utilisé est le C_n^p .
- Le nombre de cas possible est donc $\text{Card}(\Omega) = C_8^3 = 56$

1) Calculons la probabilité de chacune des évènements suivants :

a-Aucune boule rouge n'est tirée

$$\text{Soit } P(A) \text{ cette probabilité telle que : } P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \text{ avec } \begin{cases} \text{Card}(A) = C_5^0 \times C_3^3 = 1 \\ \text{Card}(\Omega) = C_8^3 = 56 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{56} = 0,018$$

b-Une boule rouge et une seule est tirée

$$\text{Soit } P(B) \text{ cette probabilité telle que : } P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} \text{ avec } \begin{cases} \text{Card}(B) = C_5^1 \times C_3^2 = 15 \\ \text{Card}(\Omega) = C_8^3 = 56 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{15}{56} = 0,268$$

c-Deux boules rouges et deux seulement sont tirées

$$\text{Soit } P(C) \text{ cette probabilité telle que : } P(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} \text{ avec } \begin{cases} \text{Card}(C) = C_5^2 \times C_3^1 = 30 \\ \text{Card}(\Omega) = C_8^3 = 56 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{30}{56} = 0,536$$

d-Une boule rouge au moins est tirée

Soit $P(D)$ cette probabilité telle que : $P(D) = \frac{Card(D)}{Card(\Omega)}$

$$\text{avec } \begin{cases} Card(D) = C_5^1 \times C_3^2 + C_5^2 \times C_3^1 + C_5^3 \times C_3^0 = 55 \\ Card(\Omega) = C_8^3 = 56 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(D) = \frac{55}{56} = 0,982$$

e-deux boules blanches au plus sont tirées

Soit $P(E)$ cette probabilité telle que : $P(E) = \frac{Card(E)}{Card(\Omega)}$

$$\text{avec } \begin{cases} Card(E) = C_3^2 \times C_5^1 + C_3^1 \times C_5^2 + C_3^0 \times C_5^3 = 55 \\ Card(\Omega) = C_8^3 = 56 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{55}{56} = 0,982$$

2) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de boules rouges qui se trouvent parmi les 3 boules tirées.

a-Donnons la loi de probabilité de X

Si l'on effectue un tirage simultané de 3 boules rouges parmi les 5 boules rouges, on obtient : Soit 0 boule rouge ; soit 1 boule rouge ; soit 2 boules rouges 3 boules rouges.

D'où $X = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$.

Alors calculons : $P(X = 0)$; $P(X = 1)$; $P(X = 2)$; $P(X = 3)$

$$P(X = 0) = \frac{C_5^0 \times C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56} \quad ; \quad P(X = 1) = \frac{C_5^1 \times C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_5^2 \times C_3^1}{C_8^3} = \frac{30}{56} \quad ; \quad P(X = 3) = \frac{C_5^3 \times C_3^0}{C_8^3} = \frac{10}{56}$$

D'où le tableau de la loi de probabilité est le suivant :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

NB : Pour une éventuelle vérification, on remarque : $\frac{1}{56} + \frac{15}{56} + \frac{30}{56} + \frac{10}{56} = \frac{56}{56} = 1$

Car la somme des lois de probabilités est toujours égale à 1

b-Calculons l'espérance mathématique et la variance de X

- L'espérance mathématique $E(X)$.

$$E(X) = \sum x_i \times P_i = 0 \times \frac{1}{56} + 1 \times \frac{15}{56} + 2 \times \frac{30}{56} + 3 \times \frac{10}{56} = \frac{105}{56} = 1,875 \Rightarrow E(X) = 1,875$$

- La variance $V(X)$.

$$V(X) = \sum x_i^2 \times P_i - E^2(X) = 0^2 \times \frac{1}{56} + 1^2 \times \frac{15}{56} + 2^2 \times \frac{30}{56} + 3^2 \times \frac{10}{56} - 1,875^2 = 277,48$$

$$\Rightarrow V(X) = 277,48$$

c-Calculons la probabilité de l'évènement $1 \leq X \leq 2$

$$P(1 \leq X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{15}{56} + \frac{30}{56} = \frac{45}{56} = 0,803$$

24

Lors de la coupe du Mali de football 2012, on a donné dans le tableau ci-dessous les résultats des 8 matchs joués le premier jour du tournoi.

Matches	Première Equipe	Deuxième équipe
1 ^{er} Match	2 buts	1 but
2 ^{ème} Match	2 buts	0 but
3 ^{ème} Match	3 buts	3 buts
4 ^{ème} Match	1 but	3 buts
5 ^{ème} Match	0 but	1 but
6 ^{ème} Match	0 but	0 but
7 ^{ème} Match	1 but	4 buts
8 ^{ème} Match	3 buts	2 buts

On choisit un match au hasard parmi les huit matchs du premier jour du tournoi ; tous les matchs ont la même probabilité d'être choisis.

1) a- Montrons que la probabilité P_1 qu'aucun but n'ait été marqué au cours de ce match est égale à $\frac{1}{8}$

En observant le tableau ci-dessus, on remarque qu'il n'y a qu'un seul match parmi les 8 où aucun but n'a été marqué (le 6^{ème} Match). Ce qui explique bien $P_1 = \frac{1}{8}$

b) Déterminons la probabilité P_2 que le match soit nul (c'est-à-dire que chaque équipe ait marqué le même nombre de buts)

En observant le tableau ci-dessus, on remarque qu'il n'y a qu'un seul match parmi les 8 où chaque équipe a marqué le même nombre de buts (le 3^{ème} Match).

$$\text{Alors } P_2 = \frac{1}{8}$$

2) Pour chaque match, on calcule la différence entre les nombres de buts marqués par les équipes, de façon à trouver un nombre positif ou nul.

On définit ainsi une variable aléatoire X . Par exemple pour le 5^{ème} match, la valeur de X est égale à 1 et pour le 8^{ème} match, elle est aussi égale à 1.

a-Donnons les valeurs possibles de X .

Si l'on calcule la différence entre les nombres de buts marqués par les équipes, de façon à Trouve un nombre positif ou nul, on obtient le tableau suivant :

Matches	Première Equipe	Deuxième équipe	Différence des buts
1 ^{er} Match	2 buts	1 but	$2 - 1 = 1$
2 ^{ème} Match	2 buts	0 but	$2 - 0 = 2$
3 ^{ème} Match	3 buts	3 buts	$3 - 3 = 0$
4 ^{ème} Match	1 but	3 buts	$3 - 1 = 2$
5 ^{ème} Match	0 but	1 but	$1 - 0 = 1$
6 ^{ème} Match	0 but	0 but	$0 - 0 = 0$
7 ^{ème} Match	1 but	4 buts	$4 - 1 = 3$
8 ^{ème} Match	3 buts	2 buts	$3 - 2 = 1$

Ainsi la différence entre les nombres de buts marqués par les équipes donne :
 $X = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$.

b-Déterminons la loi de probabilité de X

Alors calculons : $P(X = 0)$; $P(X = 1)$; $P(X = 2)$; $P(X = 3)$

- Pour $P(X = 0)$, il ya **2** Matches parmi les 8 où la différence de but est 0 (3^{ième} et 6^{ième}).

$$\text{Alors } P(X = 0) = \frac{2}{8}.$$

- Pour $P(X = 1)$, il ya **3** Matches parmi les 8 où la différence de but est 1 (1^{er} ; 5^{ième} ; 8^{ième}).

$$\text{Alors } P(X = 1) = \frac{3}{8}.$$

- Pour $P(X = 2)$, il **2** ya Matches parmi les 8 où la différence de but est 2 (2^{ième} et 4^{ième})

$$\text{Alors } P(X = 2) = \frac{2}{8}.$$

- Pour $P(X = 3)$, il n' ya qu'un seule Match parmi les 8 où la différence de but est 3 (7^{ième})

$$\text{Alors } P(X = 3) = \frac{1}{8}.$$

D'où le tableau de la loi de probabilité est le suivant :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

c-Calculons l'espérance mathématique de X.

$$E(X) = \sum x_i \times P_i = 0 \times \frac{2}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{2}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{10}{8} = 1,25 \Rightarrow E(X) = 1,25$$

25 Un récepteur radio possède cinq (05) transistors dont deux (02) défectueux. On effectue simultanément un contrôle sur deux (02)

- Un récepteur radio possède 5 transistors $\Rightarrow n = 5$.
- On effectue simultanément un contrôle sur 2 $\Rightarrow p = 2$.
- Le tirage est simultané alors le modèle mathématique utilisé est le C_n^p

1) Déterminons le nombre de contrôles possibles

Le nombre de contrôles possibles est $\text{Card}(\Omega) = C_5^2 = 10$

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de transistor défectueux décelés lors des contrôlés.

a- Déterminons l'ensemble des valeurs prises par X.

Le contrôle consiste à chercher 2 transistors défectueux sur les 5.

Puisque le tirage est simultané, alors le tirage peut être donc porté soit sur **0** transistors, soit sur **1** transistors, soit sur **2** transistors.

D'où l'ensemble des valeurs prises par X est : $X = \{0 ; 1 ; 2\}$.

b-Déterminons la loi de probabilité de X.

Alors calculons : $P(X = 0)$; $P(X = 1)$; $P(X = 2)$

$$P(X = 0) = \frac{C_2^0 \times C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10} ; P(X = 1) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} ; P(X = 2) = \frac{C_2^2 \times C_3^0}{C_5^2} = \frac{1}{10}$$

D'où le tableau de la loi de probabilité est le suivant :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

c-Calculons l'espérance mathématique, la variance de X.

$$E(X) = \sum x_i \times P_i = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = 0,8 \Rightarrow E(X) = 0,8$$

L'écart-type de X est $\delta(X) = \sqrt{V(X)}$

$$\text{Or } V(X) = \sum x_i^2 \times P_i - E^2(X) = 0^2 \times \frac{3}{10} + 1^2 \times \frac{6}{10} + 2^2 \times \frac{1}{10} - 0,8^2 = 0,36$$

$$\text{Alors } \delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,36} = 0,6$$

26

Une urne contient un jeton marqué 1 ; deux jetons marqués 2 et x jetons marqués 3 ($x \geq 2$). On tire simultanément 2 jetons de l'urne. On suppose que le tirage est équiprobable et on désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des points marqués sur les 2 jetons extraits de l'urne.

- Une urne contient un jeton marqué 1 ; deux jetons marqués 2 et x jetons marqués 3

$$\Rightarrow n = 1 + 2 + x = x + 3.$$

- On tire simultanément 2 jetons de l'urne $\Rightarrow p = 2$.

- Le tirage est simultané alors le modèle mathématique utilisé est le C_n^p

1) a- Exprimons en fonction de x les valeurs prises par X .

Si X désigne l'ensemble de la somme des points marqués sur les 2 jetons extraits de l'urne alors on a :

$$1 + 2 = 3 \text{ ou } 2 + 2 = 4 \text{ ou } 1 + 3 = 4 \text{ ou } 3 + 2 = 5 \text{ ou encore } 3 + 3 = 6$$

$$\text{D'où } X = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$$

b- Déterminons la loi de probabilité de X .

$$\text{Le nombre de tirage possibles est } \text{Card}(\Omega) = C_{x+3}^2 = \frac{(x+3)(x+3-1)}{2} = \frac{(x+3)(x+2)}{2}$$

$$\text{Alors calculons : } P(X = 3) ; P(X = 4) ; P(X = 5) ; P(X = 6)$$

$$P(X = 3) ; P(X = 4) ; P(X = 5) ; P(X = 6)$$

$$P(X = 3) = \frac{\text{Card}(X=3)}{\text{Card}(\Omega)} \text{ avec } \begin{cases} \text{Card}(X = 3) = C_1^1 \times C_2^1 = 2 \\ \text{et} \\ \text{Card}(\Omega) = C_{x+3}^2 = \frac{(x+3)(x+2)}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(X = 3) = \frac{2}{\frac{(x+3)(x+2)}{2}} = \frac{4}{(x+3)(x+2)} = \frac{4}{x^2 + 5x + 6}$$

$$P(X = 4) = \frac{\text{Card}(X=4)}{\text{Card}(\Omega)} \text{ avec } \begin{cases} \text{Card}(X = 4) = C_1^1 \times C_x^1 + C_2^2 = x + 1 \\ \text{et} \\ \text{Card}(\Omega) = C_{x+3}^2 = \frac{(x+3)(x+2)}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(X = 4) = \frac{x+1}{\frac{(x+3)(x+2)}{2}} = \frac{2x+2}{(x+3)(x+2)} = \frac{2x+2}{x^2 + 5x + 6}$$

$$P(X = 5) = \frac{Card(X=5)}{Card(\Omega)} \text{ avec } \begin{cases} Card(X = 5) = C_x^1 \times C_2^1 = 2x \\ \text{et} \\ Card(\Omega) = C_{x+3}^2 = \frac{(x+3)(x+2)}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(X = 5) = \frac{\frac{2x}{(x+3)(x+2)}}{\frac{2}{(x+3)(x+2)}} = \frac{4x}{(x+3)(x+2)} = \frac{4x}{x^2 + 5x + 6}$$

$$P(X = 6) = \frac{Card(X=6)}{Card(\Omega)} \text{ avec } \begin{cases} Card(X = 6) = C_x^2 = \frac{x^2 - x}{2} \\ \text{et} \\ Card(\Omega) = C_{x+3}^2 = \frac{(x+3)(x+2)}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(X = 6) = \frac{\frac{x^2 - x}{2}}{\frac{(x+3)(x+2)}{2}} = \frac{x^2 - x}{(x+3)(x+2)} = \frac{x^2 - x}{x^2 + 5x + 6}$$

NB : Chercher par exemple $Card(X = 3)$, revient à chercher la somme des numéros possible porté par deux jetons afin d'obtenir le chiffre 3.

Ainsi pour obtenir le chiffre 3, il suffit de faire la somme de : « un jeton numéroté 1 » parmi le seule jeton numéroté 1 et de « un jeton numéroté 2 » parmi les deux jetons numéroté 2.

Et ceci se traduit par $C_1^1 \times C_2^1$ en sachant bien sûr que le « et » signifie « \times » et le « ou » signifie « $+$ ». D'où le tableau de la loi de probabilité est le suivant :

x_i	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{x^2 + 5x + 6}$	$\frac{2x + 2}{x^2 + 5x + 6}$	$\frac{4x}{x^2 + 5x + 6}$	$\frac{x^2 - x}{x^2 + 5x + 6}$

2) a- Démontrons que l'espérance mathématique $E(X) = \frac{6x^2 + 22x + 20}{x^2 + 5x + 6}$

$$E(X) = \sum x_i \times P_i = 3 \times \frac{4}{x^2 + 5x + 6} + 4 \times \frac{2x + 2}{x^2 + 5x + 6} + 5 \times \frac{4x}{x^2 + 5x + 6} + 6 \times \frac{x^2 - x}{x^2 + 5x + 6}$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{12 + 8x + 8 + 20x + 6x^2 - 6x}{x^2 + 5x + 6} = \frac{6x^2 + 22x + 20}{x^2 + 5x + 6}$$

D'où $E(X) = \frac{6x^2 + 22x + 20}{x^2 + 5x + 6}$ (Ce qu'il fallait Démontrer).

b- Déterminons la valeur de x pour que $E(X)$ soit égale 5

$$E(X) = 5 \Leftrightarrow \frac{6x^2 + 22x + 20}{x^2 + 5x + 6} = 5 \Leftrightarrow 6x^2 + 22x + 20 = 5(x^2 + 5x + 6) \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

et $\Delta = 49 \Rightarrow x_1 = -2$ (à rejeter) et $x_2 = 5$ (à retenir) (Car $x \geq 2$)

X	0	1	2
P(X=x _i)	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

1) Calculons l'espérance mathématique

$$E(X) = \sum x_i \times P_i = 0 \times \frac{2}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{1}{7} = \frac{6}{7} = 0,857 \Rightarrow E(X) = 0,857$$

2) Calculons la variance puis en déduis l'écart - type

$$\text{Variance : } V(X) = \sum x_i^2 \times P_i - E^2(X) = 0^2 \times \frac{2}{7} + 1^2 \times \frac{4}{7} + 2^2 \times \frac{1}{7} - 0,847^2 = 0,407$$

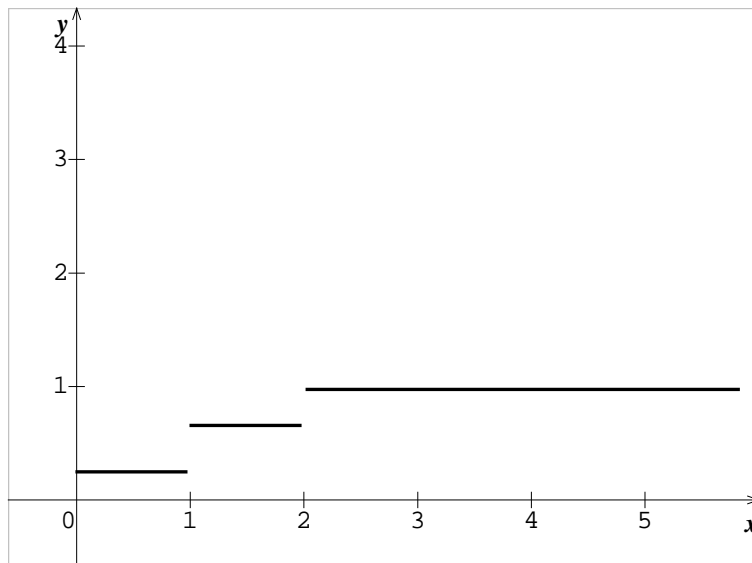
$$\text{L'écart - type : } \delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,407} = 0,637.$$

3) Donnons la fonction de répartition de la variable aléatoire X de cette loi de probabilité puis faite sa représentation la graphique.

$$P(x < 0) = 0 ; P(x \leq 0) = \frac{2}{7} ; \text{ et } P(x \leq 1) = P(x = 0) + P(x = 1) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\text{D'où } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{7} & \text{si } x \in [0 ; 1] \\ \frac{6}{7} & \text{si } x \in [1 ; 2] \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

La présentation graphique est définie par la figure suivante :

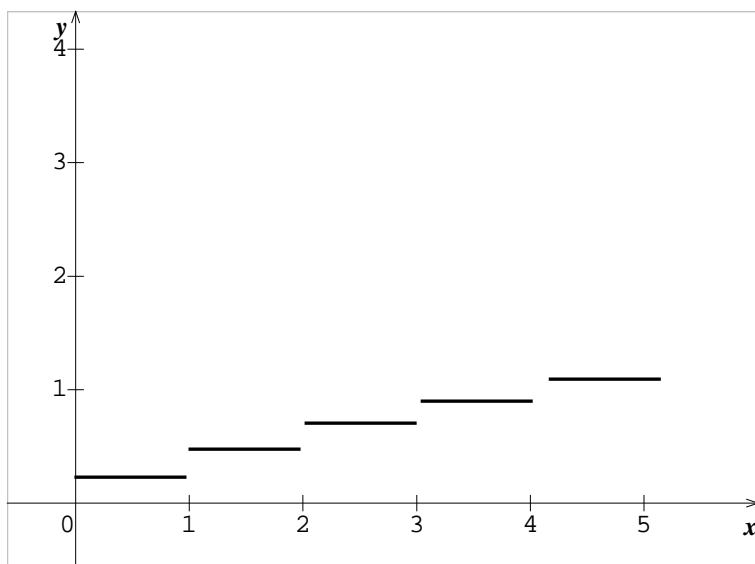


28 Une étude statistique faite an le nombre de vente de voiture en une journée par un de ses représentants a conduit à la loi de probabilité suivante pour la variable aléatoire X prenant pour valeurs le nombre de ces ventes.

X	0	1	2	3	4	5 et plus
P(X=x _i)	0,15	0,40	0,30	0,10	0,05	0

1) Dressons le tableau de la fonction de répartition F de la variable aléatoire X et représenter cette fonction dans le plus rapporté à un repère orthogonal convenable

X		0	1	2	3	4	5
F(X)	0	[0,15	[0,55	[0,85	[0,90	[1	1



2) Calculons l'espérance mathématique

$$E(X) = \sum x_i \times P_i = 0 \times 0,15 + 1 \times 0,40 + 2 \times 0,30 + 3 \times 0,10 + 4 \times 0,05 = 1,5$$

$$\Rightarrow E(X) = 1,5$$

Calculons la variance

$$V(X) = \sum x_i^2 \times P_i - E^2(X)$$

$$\Rightarrow E(X) = 0^2 \times 0,15 + 1^2 \times 0,40 + 2^2 \times 0,30 + 3^2 \times 0,10 + 4^2 \times 0,05 - 1,5^2 = 1,05$$

29 Un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 à été piqué de telle sorte que les six faces ne sont pas équiprobables. On note P_n la probabilité d'obtenir le chiffre n lors d'un lancé de dé avec $n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

D'autre part les nombres $P_1; P_2; P_3; P_4; P_5$ et P_6 dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique et que $P_1 \times P_4 = (P_2)^2$.

1) Calculons la probabilité d'apparition de chaque numéro.

Soit r la raison de cette suite telle que :

$$P_2 = P_1 + r$$

$$P_3 = P_2 + r = P_1 + r + r = P_1 + 2r$$

$$P_4 = P_3 + r = P_1 + 2r + r = P_1 + 3r$$

$$P_5 = P_4 + r = P_1 + 3r + r = P_1 + 4r$$

$$P_6 = P_5 + r = P_1 + 4r + r = P_1 + 5r$$

On sait que : $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$ (Car $\sum P_i = 1$) (1)

D'autre part : $P_1 \times P_4 = (P_2)^2$. (2)

- La relation (1) donne :

$$P_1 + (P_1 + r) + (P_1 + 2r) + (P_1 + 3r) + (P_1 + 4r) + (P_1 + 5r) = 1 \Leftrightarrow 6P_1 + 15r = 1 \quad (1)$$

- La relation (2) donne :

$$P_1 \times (P_1 + 3r) = (P_1 + r)^2 \Leftrightarrow P_1^2 + 3r P_1 = P_1^2 + 2r P_1 + r^2 \Leftrightarrow r^2 - r P_1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$r(r - P_1) = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ (impossible) ou } r = P_1$$

D'où le système $\begin{cases} r = P_1 \\ 6P_1 + 15r = 1 \end{cases}$

De ce système on a : $6P_1 + 15P_1 = 1 \Leftrightarrow 21P_1 = 1 \Rightarrow P_1 = \frac{1}{21}$

$$P_2 = P_1 + r = P_1 + P_1 = 2P_1 = 2 \times \frac{1}{21} = \frac{2}{21}$$

$$P_3 = P_2 + r = 2P_1 + P_1 = 3P_1 = 3 \times \frac{1}{21} = \frac{3}{21}$$

$$P_4 = 4P_1 = 4 \times \frac{1}{21} = \frac{4}{21}$$

$$P_5 = 5P_1 = 5 \times \frac{1}{21} = \frac{5}{21}$$

$$P_6 = 6P_1 = 6 \times \frac{1}{21} = \frac{6}{21}$$

D'où le tableau de la loi de probabilité est le suivant :

n	1	2	3	4	5	6
P_n	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

2) On lance ce dé une fois et on considère les événements suivants :

A: « Le nombre obtenu est pair ».

B: « Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 ».

a- Calculons la probabilité de chacun des événements A et B.

$$P(A) = P_2 + P_4 + P_6 = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

$$P(B) = P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = \frac{3}{21} + \frac{4}{21} + \frac{5}{21} + \frac{6}{21} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

- b- Calculons la probabilité pour que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3 sachant qu'il est pair.

$$P(B/A) = P_4 + P_6 = \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{10}{21}$$

- c- Vérifions si les événements A et B sont indépendants

Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) \neq P(B/A) \times P(A)$

On sait que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{4}{7} \times \frac{6}{7} = \frac{24}{49}$ et $P(B/A) \times P(A) = \frac{10}{21} \times \frac{4}{7} = \frac{40}{147}$

Puisque $P(A \cap B) \neq P(B/A) \times P(A)$. Alors les événements A et B sont indépendants

- 3) On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :
- D'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires.
 - D'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire.

Le joueur lance le dé :

- S'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1 .
- S'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2 .

On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche, on note G cet événement.

- a- Calculons la probabilité de tirer une boule blanche de l'urne U_1
- Si l'urne U_1 contient 1 boule blanche et 3 boules noires alors le total de boules dans l'urne U_1 est 4 et par conséquent on a : $\frac{1}{4}$ de boules blanches et $\frac{3}{4}$ de boules noires.
 - De même Si l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire alors le total de boules dans l'urne U_2 est 3 et par conséquent on a : $\frac{2}{3}$ de boules blanches et $\frac{1}{3}$ de boules noires.

Or tirer une boule blanche équivaut à un gagnant. Donc $P(G/A) = \frac{1}{4}$

En déduisons la probabilité de l'évènement $G \cap A$.

$$P(G \cap A) = P(G/A) \times P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{7} \Rightarrow P(G \cap A) = \frac{1}{7}$$

Déterminons ensuite la probabilité de l'évènement G .

$$P(G) = P(G \cap A) + P(G \cap \bar{A})$$

Or si A est l'évènement : « Le nombre obtenu est pair »

Alors \bar{A} est l'évènement : « Le nombre obtenu est impair ».

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

$$\text{D'autre part } P(G \cap \bar{A}) = P(G/\bar{A}) \times P(\bar{A})$$

$$\text{Or } P(G/\bar{A}) = \frac{2}{3} \text{ (Gagnant dans l'urne } U_2 \text{)}$$

$$\text{D'où } P(G) = \frac{1}{7} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7} \Rightarrow P(G) = \frac{3}{7}$$

- b- Le joueur est gagnant. Déterminons la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé.

$$P(A/G) = \frac{P(A/G)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{3}$$

30 Une urne contient des boules noires et des boules rouges. Chaque boule noire porte un nombre entier de trois chiffres multiple de 179 et chaque boule rouge porte un nombre entier de trois chiffres multiple de 159.

Ces boules sont indiscernables au toucher.

- 1) Trouvons le nombre maximal de boules de chaque couleur dans l'urne. (On pourra utiliser les suites arithmétiques).
- Nombre de boules noires : Les multiples de 179 constituent une suite arithmétique (U_n) de raison 179 et de premier terme $U_1 = 179$

Donc on a : $U_n = U_1 + (n - 1)r \Rightarrow U_n = 179 + (n - 1) \times 179 = 179 + 179n - 179 = 179n$.

$$\Rightarrow U_n = 179n.$$

D'autre part on a : $179 \leq U_n < 1000 \Leftrightarrow 179 \leq 179n < 1000 \Leftrightarrow 1 \leq n < \frac{1000}{179} \Leftrightarrow 1 \leq n < 5,58$.

Alors le nombre maximal de boules noires est : $n_1 = 5$.

- Nombre de boules rouges : Les multiples de 3 chiffres de 59 constituent une suite arithmétique (V_n) de raison 59 et de premier terme $V_1 = 118$

Donc on a : $V_n = V_1 + (n - 1)r \Rightarrow V_n = 118 + (n - 1) \times 59 = 118 + 59n - 59 = 59n + 59$.

$$\Rightarrow V_n = 59n + 59.$$

D'autre part on a : $118 \leq V_n < 1000 \Leftrightarrow 118 \leq 59n + 59 < 1000 \Leftrightarrow 59 \leq 59n < 941 \Leftrightarrow 1 \leq n < \frac{941}{59} \Leftrightarrow 1 \leq n < 15,94$.

Alors le nombre maximal de boules rouges est : $n_2 = 15$.

- 2) On suppose que l'urne contient cinq boules noires et quinze boules rouges. On considère le jeu suivant : la mise est de 200 F pour chaque partie. Le joueur tire une boule de l'urne :
 - Si elle est noire, on lui donne 500 F et la partie est terminée.
 - Si elle est rouge, il la remet dans l'urne et procède à un second tirage.
 - Si la seconde boule tirée est noire, on lui donne 300 F et la partie est terminée.
 - Si la deuxième boule tirée est rouge, il la remet dans l'urne et procède à un troisième tirage et dernier tirage.
 - Si la troisième boule tirée est noire, on lui donne 100 F.
 - Si la troisième boule tirée est rouge, il n'a rien.

On désigne par X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

- a- Donnons la loi de probabilité de X .

Les valeurs prises par X sont : $X = \{300 ; 100 ; -100 ; -200\}$

$$P(X = 300) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 100) = \frac{15}{20} \times \frac{5}{20} = \frac{3}{16}$$

$$P(X = -100) = \frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{5}{20} = \frac{9}{64}$$

$$P(X = -200) = \frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{15}{20} = \frac{27}{64}$$

D'où le tableau de la loi de probabilité est :

x_i	-200	-100	100	300
$P(X = x_i)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$

b- Calculons la probabilité P pour que X soit positive.

$$P = P(X > 0) = P(X = 300) + P(X = 100) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$$

c- Vérifions si l'on peut espérer gagner ce jeu

Ici, il s'agit de Déterminer l'espérance mathématique E .

$$E(X) = -200 \times \frac{27}{64} - 100 \times \frac{9}{64} + 100 \times \frac{3}{16} + 300 \times \frac{1}{4} = -\frac{75}{16}$$

Puisque $E(X) < 0$, alors le jeu est désavantageux et par conséquent l'on ne peut pas espérer gagner ce jeu.

d- Un joueur fait cinq parties successives.

Déterminons la probabilité pour qu'il ait exactement trois fois un gain positif lors de ces cinq parties

$$\text{On a : } P' = C_5^3 \times P^3 \times (1 - P)^2 = 10 \times \left(\frac{7}{16}\right)^3 \times \left(1 - \frac{7}{16}\right)^2 = 0,265$$

Epreuve de Bernoulli – Loi Binomiale

31

On suppose que la probabilité de faire un garçon est $\frac{1}{4}$. Une famille a 5 enfants.

Calculons la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 garçons.

Avoir une naissance simple conduit à 2 éventualités : soit on a un garçon, soit on a une fille.

C'est donc une épreuve de Bernoulli. On pourrait considérer l'épreuve « avoir un garçon »

comme le succès de probabilité $p = \frac{1}{4}$ et l'épreuve « avoir une fille » comme l'échec de

probabilité $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Cinq naissances successives constituent une succession de 5 épreuves de Bernoulli. Pour

Calculer la probabilité d'avoir exactement 3 garçons, on utilise alors la loi binomiale de

paramètre 5 et $\frac{3}{4}$ tel que : $p(x = 3) = C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 10 \times \frac{1}{64} \times \frac{9}{16} = \frac{90}{1024}$

$$\Rightarrow p(x=3) = \frac{45}{512} = 0,088$$

Alors la probabilité d'avoir exactement 3 garçons est $p(x=3) = 0,088$.

32 L'objectif de cet exercice est de Détermine les quels des avions à 2 ou 4 moteurs sont les plus sûrs.

Un avion ne s'écrase pas tant que la moitié au moins de ses moteurs fonctionne. Les moteurs d'un avion tombent en panne de manière indépendante.

Soit p la probabilité pour qu'un moteur tombe en panne

Partie A :

On donne $p = 0,1$

1) Calculons la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.

Un avion à deux moteurs s'écrase si ses deux moteurs sont en panne.

$$\text{Alors } p_1 = p \times p = p^2 = 0,1 \times 0,1 = 0,01$$

2) Calculons la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.

La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne est :

$$p_2 = p \times p \times p \times p = p^4 = 0,1 \times 0,1 \times 0,1 \times 0,1 = 0,0001$$

3) Calculons la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne

L'état de fonctionnement d'un moteur conduit à 2 éventualités : soit il est en panne soit il ne l'est pas. Avoir un moteur en panne est donc une épreuve de Bernoulli.

La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne se détermine par la loi binomiale de paramètre $p = 0,1$ et $k = 3$

$$p_3 = p(x=3) = C_4^3 (0,1)^3 (0,9)^1 = 4 \times (0,001) \times (0,9) = 0,0036$$

4) En déduis la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'crase.

Un avion à 4 moteurs s'écrase si ses 4 moteurs sont en panne ou s'il a 3 moteurs en panne.

$$\text{Alors } p_4 = p_2 + p_3 = 0,0001 + 0,0036 = 0,0037$$

Partie B :

On revient au cas général

1) Soit $f(p)$ la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.

$$\text{Démontrons que } f(p) = p^2$$

Un avions à 2 moteurs s'crase si ses deux moteurs sont en panne.

$$f(p) = p \times p = p^2$$

2) $g(p)$ est la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.

Démontrons que $g(p) = p^2(-3p^2 + 4p)$

Un avion à 4 moteurs s'écrase si ses 4 moteurs sont en panne ou s'il a trois moteurs en panne.

$$g(p) = p^4 + p(X = 3) = p^4 + C_4^3 p^3(1-p) = p^4 + 4p^3(1-p)$$

$$\Rightarrow g(p) = p^4 + 4p^3 - 4p^4 = -3p^4 + 4p^3 = p^2(-3p^2 + 4p).$$

$$\Rightarrow g(p) = p^2(-3p^2 + 4p).$$

3) a- On pose $h(p) = f(p) - g(p)$

$$h(p) = f(p) - g(p) = p^2 - p^2(-3p^2 + 4p) = p^2(1 + 3p^2 - 4p).$$

$$\Rightarrow h(p) = p^2(1 + 3p^2 - 4p).$$

Si $p^2 > 0$ alors le signe de $h(p)$ dépend du signe $1 + 3p^2 - 4p$

$$\text{Or } 1 + 3p^2 - 4p = 3(p - 1)\left(p - \frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow h(p) > 0 \text{ si } p \in]0; \frac{1}{3}[; h(p) < 0 \text{ si } p \in]\frac{1}{3}; 1[; h(p) = 0 \text{ si } p \in \left\{\frac{1}{3}; 1\right\}$$

b- En déduisons, suivant les valeurs de p , dans quels avions il vaut mieux monter.

- Si $p \in]0; \frac{1}{3}[$; alors $h(p) > 0 \Rightarrow f(p) > g(p)$. Un avion à 4 moteurs est plus sûr.
- Si $p \in]\frac{1}{3}; 1[$; alors $h(p) < 0 \Rightarrow f(p) < g(p)$: Un avion à deux (2) moteurs est plus sûr.
- Si $p \in \left\{\frac{1}{3}; 1\right\}$; alors $h(p) = 0 \Leftrightarrow f(p) = g(p)$: le risque est le même.

33

Sur une autoroute, deux carrefours successifs sont munis de feux tricolores A et B.

La couleur du feu B est indépendante de celle du feu A.

La probabilité que le feu A soit vert est $\frac{3}{4}$.

La probabilité que le feu B soit vert est $\frac{1}{2}$.

La probabilité de couleur orange est toujours nulle.

1) Un automobiliste passe aux deux carrefours

a- Calculons la probabilité qu'il rencontre deux feux verts.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

b- Calculons la probabilité qu'il rencontre au moins un feu vert.

Soit C l'évènement « il rencontre au moins un feu vert »

$$P(C) = P(A) \times P(B) + P(A) \times P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \times P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

2) On ne s'occupe plus que du feu A.

Un automobiliste passe quatre fois à ce carrefour.

X est la variable aléatoire qui a pour valeur le nombre de feux verts que l'automobiliste rencontre.

a- Trouvons la loi de probabilité de X .

Il s'agit d'une épreuve de BERNOULLI qui se répète 4 fois.

En effet, à chaque passage, soit il rencontre le feu vert avec une probabilité $P = \frac{3}{4}$ ou il ne le rencontre pas avec une probabilité $q = 1 - P = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Ainsi les différentes valeurs de la variable aléatoire sont $X = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

D'où :

$$P(X = 0) = C_4^0 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$$

$$P(X = 1) = C_4^1 \left(\frac{3}{4}\right)^1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 4 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{12}{256}$$

$$P(X = 2) = C_4^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 6 \times \frac{9}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{54}{256}$$

$$P(X = 3) = C_4^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 = 4 \times \frac{27}{64} \times \frac{1}{4} = \frac{108}{256}$$

$$P(X = 4) = C_4^4 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1 \times \frac{81}{256} \times 1 = \frac{81}{256}$$

X	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{81}{256}$

b- Calculons l'espérance mathématique $E(X)$ de X .

$$E(X) = \sum x_i \times P_i = 0 \times \frac{1}{256} + 1 \times \frac{12}{256} + 2 \times \frac{54}{256} + 3 \times \frac{108}{256} + 4 \times \frac{81}{256} = \frac{768}{256} = 3$$

L'on pouvait prévoir ce résultat car la probabilité de rencontrer le feu vert au feu A est $\frac{3}{4}$.

Comme il passe 4 fois à ce feu, il a alors 3 chances de rencontrer le feu vert d'où la valeur de

$$E(X) = 3.$$

34

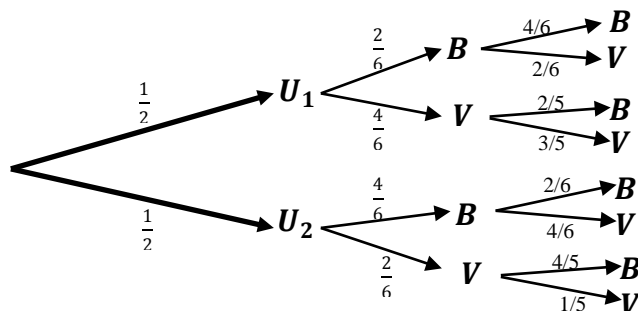
On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient 2 boules blanches et 4 boules vertes.

L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 2 boules vertes.

Dans chaque urne les tirages sont équiprobables et les urnes ont la même probabilité d'être choisies. On choisit au hasard l'une des urnes et l'on extrait une boule que l'on ne remet dans aucune urne ; si la boule est verte, on recommence le tirage dans la même urne ; si la boule est blanche, on recommence le tirage dans l'autre urne.

1) Montrons que la probabilité de tirer deux boules blanches est $\frac{2}{9}$.



A est l'évènement : « tirer deux boules blanches »

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

2) Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur **+1** si l'on obtient deux boules de la même couleur et **-1** pour deux couleurs distinctes.

Donnons la loi de probabilité de X ; son espérance mathématique E(X) et son écart-type $\delta(X)$.

$P(X = 1) = P(A) + P(B)$ où B est l'évènement « tirer deux boules vertes »

$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{148}{60} = \frac{7}{30}$$

$$\text{Donc } P(X = 1) = \frac{2}{9} + \frac{7}{30} = \frac{41}{90}$$

$$P(X = -1) = 1 - P(X = 1) = 1 - \frac{41}{90} = \frac{49}{90}$$

$$E(X) = -1 \times \frac{49}{90} + 1 \times \frac{41}{90} = -\frac{8}{90} = -\frac{4}{45}$$

$$V(X) = (-1)^2 \times \frac{49}{90} + (1)^2 \times \frac{41}{90} - [E(X)]^2 = \frac{90}{90} - \left(\frac{4}{45}\right)^2 = 1 - \frac{16}{2025} = \frac{2009}{2025} = 0,992$$

$$\delta(X) = \sqrt{0,992} = 0,996$$

3) On dit que l'on a obtenu un succès si les deux boules sont de même couleur.

On répète l'expérience précédente 5 fois de suite.

Y est la variable aléatoire qui comprend pour valeur le nombre de « succès » parmi ces 5 épreuves.

Déterminons la probabilité P d'avoir 4 succès exactement

$$P(Y = 4) = 5 \times \left(\frac{41}{90}\right)^2 \times \frac{49}{90} \approx 0,2$$

$$E(Y) = 5 \times \frac{41}{90} = \frac{41}{18} = 2,2777$$

$$V(Y) = 5 \times \frac{41}{90} \times \left(1 - \frac{41}{90}\right) = \frac{2009}{1620} \quad \text{et} \quad \delta(Y) = \sqrt{\frac{2009}{1620}} = 1,114$$