Nombres complexes

1- Objectifs :

Ce thème vise à :

Définir l'ensemble des nombres complexes et en dégager les règles de calcul ;

- Utiliser les caractérisations complexes pour interpréter des configurations élémentaires du plan ;
- Utiliser les nombres complexes pour Résous des problèmes.

Commentaires

La notion de nombres complexes est nouvelle pour les élèves. La construction de l'ensemble $\mathbb{C}$ n'est pas au programme ; on pourra en faire une présentation historique. Ce nouvel ensemble qui prolonge $\mathbb{R}$ offre un domaine riche d'activités numériques.

On fera ressortir l'intérêt des relations entre propriétés des complexes et celles des configurations géométriques ainsi que celui de l'utilisation de l'outil " nombres complexes" dans la résolution de problèmes géométriques.

Il ne s'agit pas de faire une théorie sur les transformations et leurs écritures complexes, mais d'utiliser ces écritures pour la résolution de problèmes.

2- Savoir et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Forme algébrique d'un nombre complexe. • Partie réelle (Re), partie imaginaire (Im). • Conjugué d'un nombre complexe, propriétés. •Somme, produit, quotient de deux nombres complexes. • Formule du binôme • Egalité de deux nombres complexes. • Module et argument d'un nombre complexe. • Module et argument du produit, de l'inverse, du quotient et de la puissance entière d'un nombre complexe • Forme trigonométrique. •Affiche d'un point, d'un vecteur • Point image et vecteur image d'un nombre complexe. • Forme exponentielle ($z = re^{i\theta}$).	• Détermine la partie réelle, la partie imaginaire d'un nombre complexe. • Calcule la somme, le produit et le quotient de deux nombres complexes donnés sous forme algébrique. • Développer $(a+b)^n$ • Détermine le conjugué d'un nombre complexe •Détermine le module et un argument d'un nombre complexe non nul donnés sous forme algébrique. • Représenter graphiquement un nombre complexe donné sous forme algébrique. • Calcule le produit et le quotient de deux nombres complexes écrits sous formes trigonométrique. • Passer à la forme trigonométrique à la forme algébrique et inversement.

Remarques et suggestions

Un imaginaire pur est un nombre complexe dont la partie réelle est nulle. (0 est à la fois réel et imaginaire pur).

On s'interdira d'utiliser le symbole √ avec un nombre complexe non réel positif.

L'acquisition des propriétés des nombres complexes pourra être vérifiée par des exercices de ″ méthodes″ dépourvus de lourdeur de calculs.

L'écriture exponentielle sera le plus tôt possible afin d'alléger les expressions dans les calculs.

NOMBRES COMPLEXES ET TRIGONOMETRIE

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
• Formule de Moivre, formule d'Euler	Utiliser les formules de Moivre et d'Euler pour • reTrouve des formules trigonométriques ; • linéariser des puissances de cos$x$ et sin$x$ à l'aide des nombres complexes

Remarques et suggestions

La linéarisation des fonctions trigonométriques sera réinvestie dans le calcul intégral.

Pour la linéarisation des puissances de cosinus et sinus, on se limitera à des exposants peu élevés. Les formules trigonométriques obtenues ne sont pas à apprendre par cœur.

EQUATIONS DANS ℂ

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
• Racines carrées d'un nombre complexe non nul. • Equation du second degré dans ℂ • Racine n$^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe non nul. •Racine n$^{\text{ième}}$ de l'unité ; interprétation graphique	• Détermine les racines carrées d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique. • Résous une équation du second degré dans ℂ ou une équation s'y ramenant. • Détermine sous forme trigonométrique les racines n$^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe et les représenter graphiquement

Remarques et suggestions

La propriété suivante :

" Pour deux complexes z et z', $[z = z'] \Leftrightarrow |z| = |z'|$, Re(z) = $Re(z')$ et Im(z) = $Im(z') \geq 0$ est un outil intéressant pour le calcul des racines carrés d'un nombre complexes.

On pourra intéresser les élèves à Trouve les n racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe connaissant une racine et les n racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
•$arg\left(\frac{ZA-ZB}{ZC-ZD}\right)$ est une mesure de $\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BA}}\right)$• Caractérisations complètes : - D'un cercle ; - D'une droite.	• Détermine que des points sont cocycliques. • Démontre que des points sont alignés. Utiliser les caractérisations complexes pour : - Justifier une priorité géométrique ; - Détermine des lieux géométriques

Remarques et suggestions

A titre d'exercice, on pourra faire Démontre aux élèves que :

A, B, C, D étant quatre points distincts d'affixes respectives $a, b, c\ d,$

A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si et seulement si $arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) = \ arg\left(\frac{d-b}{d-a}\right) + \ k\pi$ avec k entier relatif.

I- Rappels sur l'ensemble $\mathbb{R}$ et ces sous -ensembles

1) Ensemble des entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels est noté : $\mathbb{N}$ tel que : $\mathbb{N} = \{0;\ 1; 2, ; 3; \ldots\}$

L'ensemble des entiers naturels privé de zéro est noté $\mathbb{N}$***** tel que : $\mathbb{N}$***** $= \{1;\ 2;\ 3; \ldots\}$

2) L'ensemble des entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs est noté : $\mathbb{Z}$ tel que : $\mathbb{Z} = \{\ \ldots . -2\ ;\ 0\ ; 1\ ; 2\ ; \ldots\}$.

L'ensemble des entiers relatifs positifs est noté : $\mathbb{Z}^+$ tel que : $\mathbb{Z}^+ = \left\{0\ ;\ +1\ ;\ \ldots\right\}$

L'ensemble des entiers relatifs négatifs est noté : $\mathbb{Z}^-$ tel que **:** $\mathbb{Z}^- = \left\{\ldots -2\ ;\ -1 \ldots 0\right\}$

L'ensemble des entiers relatifs privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}^*$ tel que :

$\mathbb{Z}^* = \left\{\ \ldots -2\ ;\ -1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ; \ldots\right\}$

L'ensemble des entiers relatifs positifs et privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}_+^*$ tel que **:**

$\mathbb{Z}_+^* = \left\{\ 1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\right\}$

L'ensemble des entiers relatifs négatifs et privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}_-^*$ tel que **:**

$\mathbb{Z}_-^* = \left\{\ \ldots -2\ ;\ -1\ \right\}$

3) L'ensemble des nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$ tel que : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{P}{Q}\, avec\ P \in \mathbb{Z}\ ; q \in \mathbb{Z}^*\right\}$

4) L'ensemble des nombres réels

Certains nombre comme : $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et π ne peuvent pas s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs. Ce sont des nombres irrationnels et l'ensemble des nombres irrationnels et rationnels forment l'ensemble des nombres réels.

L'ensemble des nombres réels est noté : $\mathbb{R}$ tel que : $\mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$

RETENONS : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Activités :

Activité 1:

Résous dans $\mathbb{N}$ puis dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x + 7 = 6$. Conclure.

Activité 2:

Résous dans $\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{Q}$ l'équation : $3x = 1$. Conclure.

Activité 3:

Résous dans $\mathbb{Q}$ puis dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 2 = 0$. Conclure.

Activité 4:

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 + 1 = 0$. Conclure.

Remarque : quand une équation n'a pas de solutions, une démarche naturelle (et historique) consiste à en chercher dans un ensemble plus grand. Au stade de nos connaissances actuelles, l'ensemble numérique le plus grand que l'on a rencontré est $\mathbb{R}$.

Ainsi un nouvel ensemble pris naissance au XVI$^{\text{ème}}$ siècle par **JEROME CARDAN (Mathématicien Italien)** afin de Trouve des solutions pour l'équation : $x^2 + 1 = 0$ ou des équations du second degré à discriminant négatif. Cet ensemble s'appellera :
Ensemble des nombres complexes ou ensemble des corps complexes et sera noté $\mathbb{C}$.

Le principal élément de $\mathbb{C}$ sera noté $\boldsymbol{i}$ ($\boldsymbol{i}$ comme imaginaire).
Le nombre $\boldsymbol{i}$ est tel que $\boldsymbol{i}^2 = -1$. L'équation ci-dessus possède alors deux solutions : $x^2 + 1 = 0$ équivaut à $x^2 - \boldsymbol{i}^2 = 0$ soit $(x - \boldsymbol{i})(x + \boldsymbol{i}) = 0$ donc $x = \boldsymbol{i}$ ou $x = -\boldsymbol{i}$.

II- Définition ; vocabulaire et interprétation graphique

1) Définition :

On appelle nombre complexe, tout couple ordonné de deux nombres réels $\boldsymbol{a}$ *et* $\boldsymbol{b}$ tel que : $\boldsymbol{Z = a + ib}$ où $\boldsymbol{i}$ **est un imaginaire** tel que $\boldsymbol{i}^2 = -\mathbf{1}$.

2) Notation et vocabulaire :

Soit Z un nombre complexe tel que $\boldsymbol{Z = a + ib}$.

- l'écriture $\boldsymbol{Z = a + ib}$ est appelée forme algébrique de $\boldsymbol{Z}$.
- le nombre réel $\boldsymbol{a}$ est appelé partie réelle de $\boldsymbol{Z}$ et est noté $\mathrm{Re}(\mathbf{Z})$
- le nombre réel $\boldsymbol{b}$ est appelé partie imaginaire de $\boldsymbol{Z}$ et est noté $\mathrm{Im}(\mathbf{Z})$

NB :

- Si $b = 0$; alors $\boldsymbol{Z} = a$ (**Z est un nombre à la fois réel et complexe**) car $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

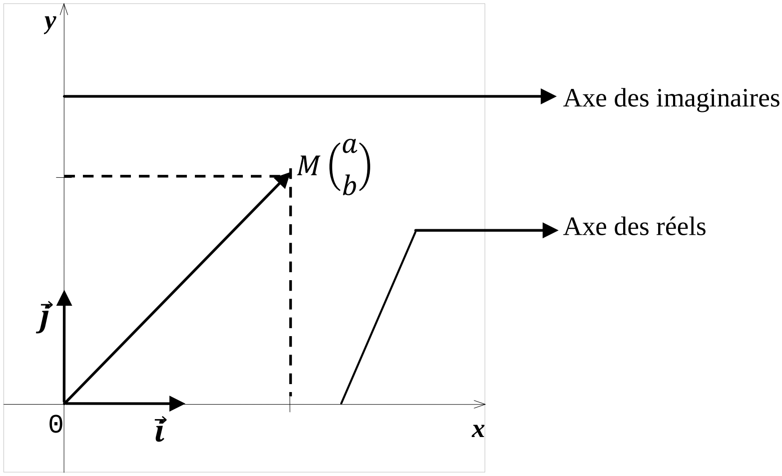
- Si $a = 0$; alors $\boldsymbol{Z} = ib$ (**Z est un imaginaire pur**).

3) <u>Interprétation graphique :</u>

A tout point $M\binom{a}{b}$ du plan P, on peut associer un nombre complexe $Z = a + ib$.

- M est le point image et Z l'affixe du point M.
- $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image du nombre complexe $Z = a + ib$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Ainsi on a la représentation graphique du point M comme suit :



III- <u>Operations dans</u> $\mathbb{C}$:

Soient Z et Z' deux nombres complexes tels que : $Z = a + ib$ et $Z' = a' + ib'$.

1) <u>Egalité :</u>

Deux nombres complexe Z et Z' sont égaux si et seulement si $Z = Z' \Leftrightarrow$
$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.

2) <u>Somme:</u>

La somme des deux complexes $Z\ et\ Z'$ est tel que : $Z + Z' = (a + a') + i(b + b')$.

3) <u>Produit :</u>

Le Produit des deux complexes Z et Z' est tel que :

$Z \times Z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$ **avec** $\boldsymbol{i^2 = -1}$

4) <u>Quotient :</u>

Le quotient de deux complexes Z et Z' est tel que :

$$\frac{Z}{Z'} = \frac{aa' + bb'}{(a')^2 + (b')^2} + i\,\frac{a'b - ab'}{(a')^2 + (b')^2}$$

N.B : Le nombre $\frac{1}{Z}$ est appelé inverse du complexe Z tel que : $\frac{1}{Z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$

IV- Conjugué d'un nombre complexe :

1) Définition :

Soit Z = $a + ib$ l'expression algébrique d'un nombre complexe.

On appelle conjugué de Z, le nombre complexe noté $\bar{Z}$ tel que $\bar{Z}$ = $\boldsymbol{a - ib}$**.**

NB : les images des deux nombres complexes Z et $\bar{Z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

2) Propriétés :

Soient Z et Z' deux complexes :

P₁ : Z = $\bar{Z}$ ⇔ Z est un réel

P₂ : Z = $-\bar{Z}$⇔Z est un imaginaire pur

P₃ : $\overline{Z + Z'} = \bar{Z} + \bar{Z}'$

P₄ : $\overline{Z \times Z'} = \bar{Z} \times \bar{Z}'$

P₅: $\overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z'}}$ $(avec\ Z' \neq 0)$

P₆ : $\overline{\left(\frac{a}{Z}\right)} = \frac{a}{\bar{Z}}$ $(avec\ Z' \neq 0\ \ et\ a \in \mathbb{R})$

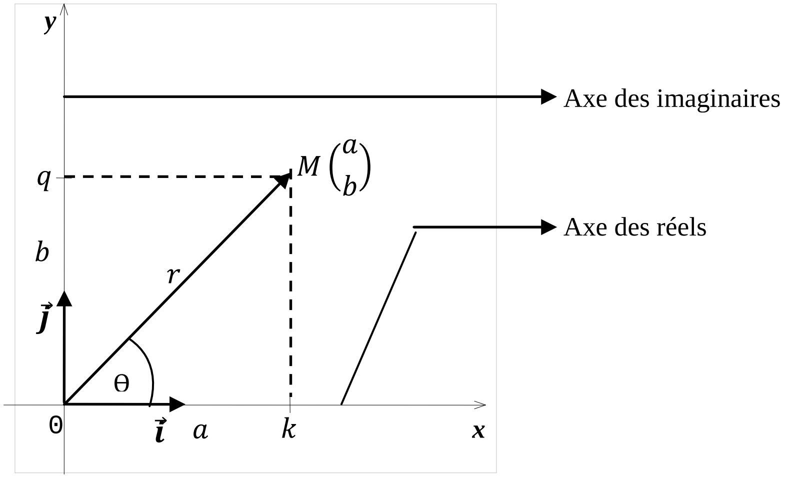
P₇ : $\overline{Z^n} = (\bar{Z})^n$

P₈ : R_e(Z) = $\frac{Z + \bar{Z}}{2}$ et $I_m(Z) = \frac{Z - \bar{Z}}{2i}$

V- Module et argument d'un nombre complexe :

1) Module :

Dans le plan rapporté à un repère $(\,o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\,)$; plaçons le point M de Z dont l'affixe est $Z = a + ib$ => $M\binom{a}{b}$



D'après la figure ci-dessus, on a : $\overline{Ok} = a$; $\overline{Oq} = b$ et $\overline{OM} = r$

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OkM, on a :

$OM^2 = OM^2 + OM^2 \Leftrightarrow r^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ou $|\overrightarrow{OM}| = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

a- Définition :

Soit Z = $a + ib$ un nombre complexe. On appelle module de Z, le nombre réel positif ou nul noté : $|\boldsymbol{Z}|$ ou $\boldsymbol{r}$ tel que $|\boldsymbol{Z}| = \sqrt{\boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b^2}}$

Si M est le point image de Z alors $|Z| = \boldsymbol{d(O\,;\,M)} = \sqrt{\boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b^2}}$

b- Propriétés :

P₁ : $|Z|$ est toujours positif ; **P₅** : $|Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$ $(Inégalité\ triangulaire)$

P₂ : $|Z| = |\bar{Z}|$; **P₆**: $\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$ $(avec\ Z' \neq 0)$;

P₃ : $|Z| = 0 \Leftrightarrow Z = 0$; **P₇** : $\left|\frac{a}{Z}\right| = \frac{a}{|Z|}$ $(avec\ Z \neq 0\ et\ a \in \mathbb{R})$;

P₄ : $|Z \times Z'| = |Z| \times |Z'|$; **P₈** : $|Z^n| = |Z|^n$ $(avec\ n \in \mathbb{N}^*)$

2) Argument :

a- Définition :

En observant la figure ci-dessus représentant un triangle rectangle d'angle θ, on a :

$$\begin{cases} Cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ Sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Soit $\boldsymbol{Z}$ est un nombre complexe de module $|\boldsymbol{Z}|$ ($avec\ |\boldsymbol{Z}| \neq 0$). On appelle argument de $\boldsymbol{Z}$, le

nombre réel noté $\boldsymbol{\theta}$ ou $\boldsymbol{arg(Z)}$ tel que : $\begin{cases} Cos\theta = \dfrac{a}{|\boldsymbol{Z}|} \\ et \\ Sin\theta = \dfrac{b}{|\boldsymbol{Z}|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ Sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$

Propriétés :

Soient Z et Z' deux nombres complexes d'arguments respectifs arg(Z) et arg(Z')

P$_1$: $arg(Z \times Z')= arg(Z) + arg(Z')$; **P$_4$**: $arg\left(\frac{a}{Z}\right)= -\ arg(Z)\ (avec\ Z \neq 0)$

P$_2$: $arg\left(\frac{Z}{Z'}\right)= arg(Z) - arg(Z')$; **P$_5$:** $arg(\bar{Z}) = -\ arg(Z)$

P$_3$: $arg(Z^n) = n\text{arg}(Z)$ $(avec\ n\ \in\ \mathbb{N}^*)$

VI- Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

1) Définition :

Soit $Z = a + ib$ un nombre complexe de module $\boldsymbol{r}$ et d'argument θ. On appelle forme trigonométrique de Z toute écriture de la forme $\boldsymbol{Z = r\ (\cos\theta\ + i\ \sin\theta)}$ **avec** $\boldsymbol{r} = \sqrt{a^2 + b^2}$ et

$\theta \in [-\pi\ ;\ \pi[$ tel que : $\begin{cases} Cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ Sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$

2) Propriétés :

Soient Z et Z' deux complexe tels que $Z = r\ (\cos\theta + i\sin\theta)$ et $Z' = r'\ (\cos\theta' + i\sin\theta')$

P$_1$: $Z \times Z' = r \times r'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')]$

P₂ : $\frac{Z}{Z'} = \frac{r}{r'}\,[\mathrm{Cos}(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')]$

P₃ : $Z^n = r^n[\mathrm{Cos}(n\theta) + i\sin(n\theta)]$

NB : si $r = 1$, on a : $Z^n = [\mathrm{Cos}(n\theta) + i\sin(n\theta)]$ (**formule de Moivre**)

VII- Forme polaire d'un nombre complexe

1) Définition :

Soit Z un nombre complexe de module r et d'argument θ. On appelle forme polaire de Z toute écriture de Z de la forme $\boldsymbol{Z = [r\,;\ \theta\,]}$

2) Propriétés :

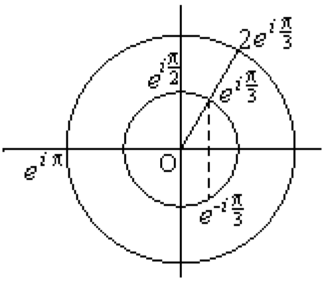
Soient Z et Z' deux complexe tels que $Z = [r\ ;\ \theta]$ et $Z' = [r'\ ;\ \theta']$

P₁ : $Z \times Z' = [r \times r'\ ;\ \theta + \theta']$; **P₂** : $\frac{Z}{Z'} = \left[\frac{r}{r'}\ ;\ \theta - \theta'\right]$; **P₃**: $Z^n = [r^n\,; n\theta]$

VIII- Forme exponentielle d'un nombre complexe :

1) Définition :

Soit Z un nombre complexe de module $\boldsymbol{r}$ et d'argument $\boldsymbol{\theta}$. On appelle forme exponentielle d'un nombre complexe Z, toute écriture de Z se ramenant sous la forme $\boldsymbol{Z = re^{i\theta}}$ où son conjugué est $\boldsymbol{\overline{Z}} = \boldsymbol{re^{-i\theta}}$



2) Propriétés :

Soient Z et Z' deux nombres complexes de formes exponentielles respectives :

$Z = re^{i\theta}$ et $Z' = r'e^{i\theta'}$. On a les propriétés suivantes :

$P_1 : Z \bullet Z' = r \bullet r'e^{i(\theta+\theta')}$; $P_2 : \frac{Z}{Z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$; $P_3 : Z^n = r^n e^{in\theta}$

P_4 : $Z \bullet \bar{Z} = r^2 e^{i(\theta-\theta)} = r^2 e^{i(0)} = r^2 \bullet 1 = r^2$ (Avec $e^0 = 1$)

P_5 : Formule d'Euler $\begin{cases} cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$ et $\begin{cases} e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2cos(n\theta) \\ e^{in\theta} - e^{-in\theta} = 2isin(n\theta) \end{cases}$

IX- Formules de Moivre et formules d'Euler:

1) Formules de Moivre

a- Définition :

Soit Z un nombre complexe **de module 1 et d'argument .** On appelle formule de **Moivre** toute écriture de Z se ramenant sous la forme $\boldsymbol{Z^n}$= $[\boldsymbol{cos(\theta)} + \boldsymbol{isin(\theta)}]$ **avec** $(\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*)$

b- Application de la formule de Moivre :

Soit Z un nombre complexe de module 1 et d'argument θ tel que :

$Z = cos\theta + isin\theta$ et $\bar{Z} = cos\theta - isin\theta$

- **Recherche de :** $\boldsymbol{Z + \bar{Z}}$ **et** $\boldsymbol{cos\theta}$

$$\begin{cases} Z = cos\theta + isin\theta \\ \qquad \text{et} \\ \bar{Z} = cos\theta - isin\theta \end{cases}$$

$$Z + \bar{Z} = 2cos\theta \Rightarrow cos\theta = \frac{Z + \bar{z}}{2}$$

- **Recherche de :** $\boldsymbol{Z - \bar{Z}}$ **et** $\boldsymbol{sin\theta}$

$$\begin{cases} Z = cos\theta + isin\theta \\ \qquad \text{et} \\ \bar{Z} = cos\theta - isin\theta \end{cases}$$

$$Z - \bar{Z} = 2isin\theta \Rightarrow sin\theta = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

- **Recherche de :** $\boldsymbol{Z \times \bar{Z}}$

$$\begin{cases} Z = cos\theta + isin\theta \\ \qquad \text{et} \\ \bar{Z} = cos\theta - isin\theta \end{cases}$$

$$Z \times \bar{Z} = (cos\theta + isin\theta)(cos\theta - isin\theta) = cos^2\theta + sin^2\theta = 1$$

De façons générales on a :

$Z^n + \bar{Z}^n = 2cos(n\theta)$; $Z^n - \bar{Z}^n = 2isin(n\theta)$ et $Z^n \times \bar{Z}^n = 1$

2) Formules d'Euler

a- Définition :

Soit Z un nombre complexe **de module 1 et d'argument .** On appelle formule de **d'Euler** toute écriture de Z se ramenant sous la forme $\boldsymbol{Z^n} = \boldsymbol{e^{in\theta}}$ **avec ($\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$)**

b- Application de la formule d'Euler

En posant $\boldsymbol{Z = e^{i\theta}}$ et $\boldsymbol{\overline{Z} = e^{-i\theta}}$, on a :

$$\boldsymbol{e^{i\theta}} + \boldsymbol{e^{-i\theta}} = 2cos\theta \Rightarrow cos\theta = \frac{\boldsymbol{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}}{2}$$

$$\boldsymbol{e^{i\theta}} - \boldsymbol{e^{-i\theta}} = 2isin\theta \Rightarrow sin\theta = \frac{\boldsymbol{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}}{2i}$$

$$\boldsymbol{e^{i\theta}} \times \boldsymbol{e^{-i\theta}} = 1$$

De façons générales on a :

$$\boldsymbol{e^{in\theta}} + \boldsymbol{e^{-ni\theta}} = 2cos(n\theta)$$

$$\boldsymbol{e^{in\theta}} - \boldsymbol{e^{-in\theta}} = 2isin(n\theta)$$

$$\boldsymbol{e^{in\theta}} \times \boldsymbol{e^{-in\theta}} = 1$$

3) Linéarisation : de $\boldsymbol{cos^n\theta}$ et $\boldsymbol{sin^n\theta}$

Pour **Linéariser $\boldsymbol{cos^n\theta}$ et $\boldsymbol{sin^n\theta}$ ($\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$)** ; on peut utiliser le procédé suivant, mettant en jeu les formules **(d'Euler ou de Moivre)** et du **(binôme de Newton ou du triangle de Pascal).**

Méthode :

- Développer et réduire : $cos^n\theta = \frac{(z+\bar{z})^n}{2^n}$ ou $sin^n\theta = \frac{(z-\overline{z})^n}{(2i)^n}$ **(Moivre)**

  Ou encore $cos^n\theta = \frac{\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^n}{2^n}$ ou $sin^n\theta = \frac{\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^n}{(2i)^n}$ **(Euler)**

- Regrouper deux à deux les termes d'exposants opposés et Exprime chacun deux en fonction des termes de la forme **Cos$\boldsymbol{kx}$** et **Sin$\boldsymbol{kx}$.**

X- Equations dans $\mathbb{C}$

1) Equation du premier degré :

a) Définition :

On appelle équation du premier degré dans $\mathbb{C}$; toute équation de la forme $\boldsymbol{aZ + b} = \mathbf{0}$.

Avec ($\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^*$)

b) Résolution :

L'ensemble solution de l'équation $\boldsymbol{aZ + b} = \mathbf{0}$ **est S =** $\left\{-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\right\}$

2) Racines carrées d'un nombre complexe :

a) Définition :

On appelle racines carrées de Z, tout nombre complexe z tel que Z = z^2.

b) Résolution du cas général :

Si Z = $a + ib$ et z = $x + iy$. On dit que z est une racine carrée de **Z** si et seulement si

$$\begin{cases} z^2 = Z \\ |z^2| = |Z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+iy)^2 = a + ib \\ \left|\sqrt{x^2+y^2}\right|^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2ixy - y^2 = a + ib \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

NB : D'une manière plus concrète, les racines carrée du complexe Z = $a + ib$ sont données par :

$$\delta_1 = -\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\frac{b}{\sqrt{2\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}} \quad \text{et} \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\frac{b}{\sqrt{2\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}}$$

3) Equation du second degré :

a) Définition:

On appelle équation du second degré dans $\mathbb{C}$, toute équation de la forme :

$\boldsymbol{aZ^2 + bZ + c} = \mathbf{0}$ $(\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0})$

b) <u>Résolution</u> :

La résolution de telles équations nécessite d'abords le calcul du discriminant associé Δ tel que $\Delta = \boldsymbol{b}^2 - 4\boldsymbol{ac}$.

- Si $\Delta > 0$; on a : $Z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $Z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$; on a : $Z_1 = Z_2 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$; on a : $Z_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $Z_2 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
- Si $\Delta = x + iy$; on a : $Z_1 = \frac{-b+\delta_1}{2a}$ et $Z_2 = \frac{-b+\delta_2}{2a}$.

Où δ_1 et δ_2 sont les racines carrées de Δ.

4) <u>Racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe :</u>

a) <u>Définition</u> :

On appelle **racine $\boldsymbol{n}^{\text{ième}}$** de Z tout nombre complexe z tel que : $z^n = Z$ **.**

b) <u>Résolution</u> :

Soit Z un complexe de forme polaire : $Z = [r\ ;\ \theta]$**.**

z un complexe de forme polaire: $z = [r'\ ;\ \theta']$**.**

$z^n = Z \Leftrightarrow [r'\ ;\ \theta']^n = [r\ ;\ \theta] \Leftrightarrow [(r')^n\ ;\ n\theta'] = [r\ ;\ \theta]$**.**

Par identification, on a :

$$\begin{cases} (r')^n = r \\ n\theta' = \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r' = \sqrt[n]{r} \\ \theta' = \frac{\theta}{n}\left[\frac{2k\pi}{n}\right] = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases} \quad \text{Avec } k \in [0\ ;n-1]$$

Ainsi les racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z sont données par la formule : $z = [r'\ ;\ \theta'] \Leftrightarrow$

$$Z_k = \left[\sqrt[n]{r}\ ;\ \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right] \text{ ou } Z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

Avec $k \in [0\ ;n-1]$

5) <u>Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité :</u>

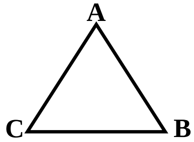
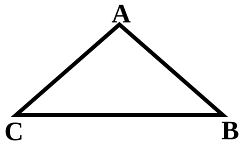
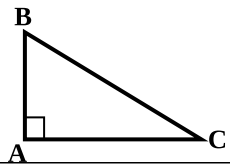
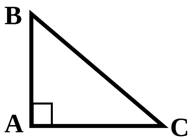
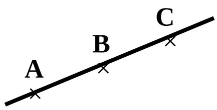
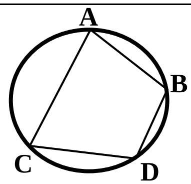
Soit Z un nombre complexe tel que Z = 1.

Les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité c'est-à-dire sont obtenues en utilisant la formule qui suit :

$$Z_k = \left[1\ ;\ \frac{2k\pi}{n}\right]$$

XI- Complexe et configurations géométriques du plan :

Dans le tableau ci-dessous sont caractérisées certaines configurations géométriques à l'aide des complexes :

Configurations géométriques	Figures	Caractérisations géométriques	Caractérisations complexes
Triangle ABC isocèle en A.		$arg\left(\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right) = \alpha$ Avec $\alpha \in [\,0\,;\,\pi]$	$\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A} = e^{i\alpha}$ Avec $\alpha \in [\,0\,;\,\pi]$
Triangle ABC équilatéral.		$arg\left(\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right) = \frac{\pi}{3}\ ou - \frac{\pi}{3}$	$\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle en A.		$arg\left(\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$	$\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A} = ib$ ou $-ib$ Avec $b \in \mathbb{R}^* - \{1\}$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A.		$arg\left(\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ et $\lvert Z_B - Z_A\rvert = \lvert Z_C - Z_A\rvert$	$\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A} = i$ ou $-i$
Points A, B, C alignés		$arg\left(\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right) = 0 + k\boldsymbol{\pi}$	$\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A} = a$ $(a \in \mathbb{R}^*)$
Points A, B, C, D cocycliques		$mes(\hat{C}) \neq 0 + k\pi$ Ou $mes(\hat{C}) = mes(\hat{D}) + k\pi$	$\frac{\frac{Z_C-Z_B}{Z_C-Z_A}}{\frac{Z_D-Z_B}{Z_D-Z_A}} \in \mathbb{R}^*$

XII- Complexe et lieux géométriques :

1) Distance entre deux points A et B :

Soient A et B, deux points d'affixes respectives $Z_A \; et \; Z_B$

$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = |Z_B - Z_A|$

2) Cercle de centre A et de rayon r :

Soit $M\binom{x}{y}$ d'affixe Z_M et A d'affixe Z_A.

$d(A, M) = r \Leftrightarrow |Z_M - Z_A| = r$

3) Médiatrice d'un segment :

Soit $M\binom{x}{y}$ d'affixe Z_M ; A d'affixe Z_A et B d'affixe Z_B.

M appartient à la médiatrice du segment [A, B] si $d(A, M) = d(B, M) \Leftrightarrow$

$|Z_M - Z_A| = |Z_M - Z_B|$

4) Droite passant par un point A et faisant un angle α avec l'horizontale

Soit M$\binom{x}{y}$ d'affixe Z_M ; A un point d'affixe Z_A et (D) une droite du plan.

(D) passe par A et fait un angle α avec l'horizontale si $arg(Z_M - Z_A) = \alpha + k\pi$

<u>NB</u> : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$

XIII- Complexe et transformations géométriques du plan

1) Translation :

La traduction complexe d'une translation est : $\boldsymbol{f(Z) = Z + q}$ **(avec $\boldsymbol{q} \in \mathbb{C}$)**

Ainsi la translation qui transforme un point A d'affixe a + ib en un point B d'affixe $a' + ib'$

est : f(A) = B $\Leftrightarrow (a + ib) + q = (a' + ib') \Rightarrow q = (a' + ib') - (a + ib)$

Ainsi on remplace q par sa valeur dans f(Z) = $Z + q$ pour Trouve la traduction complexe.

2) Homothétie :

La traduction complexe d'une homothétie de rapport k et de centre ω est :

$f(Z) = k Z + q$ (avec $q \in \mathbb{C}$) ou $\overrightarrow{\Omega M'} = K\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow Z' - \omega = k(Z - \omega)$ avec :

- Z' : image de Z
- k : le rapport
- ω : le centre d'affixe Ω

Ainsi l'homothétie de rapport k qui transforme un point A d'affixe $a + ib$ en un point B d'affixe $a' + ib'$ est :

$f(A)$ = B ⇔ $k(a + ib) + q = (a' + ib')$ ⇔ $q = (a' + ib') - k\,(a + ib)$.

Ainsi on remplace q par sa valeur dans f(Z) = $kZ + q$ pour Trouve la traduction complexe.

3) Rotation :

La traduction complexe d'une rotation d'angle θ et de centre ω est :

$\boldsymbol{f(Z)} = Ze^{i\theta} + \boldsymbol{q}$ **(avec $\boldsymbol{q} \in \mathbb{C}$) ou $\overrightarrow{\Omega \boldsymbol{M'}} = \boldsymbol{e^{i\theta}}\overrightarrow{\Omega \boldsymbol{M}}$ $\boldsymbol{Z' - \omega = e^{i\theta}(Z - \omega)}$** avec :

- Z' : image de Z
- ϴ : l'angle
- ω : le centre d'affixe Z_Ω

Ainsi la rotation d'angle θ qui transforme un point A d'affixe a + ib en un point B d'affixe $a' + ib'$ est : $f(A)$ = B ⇔ $(a + ib)e^{i\theta}$ + q = $(a' + ib')$ ⇔ q = $(a' + ib') - (a + ib)e^{i\theta}$ ⇔ $q = -(a + ib)(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Ainsi on remplace q par sa valeur dans $f(Z) = Ze^{i\theta} + q$ pour Trouve la traduction complexe.

4) Similitude du plan :

Expression complexe :

Soit S une similitude directe du plan qui a tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que :

- **Cas d'une similitude directe** :

$Z' = aZ + b$ (où a et b sont des complexes). Ces éléments caractéristiques sont :

- Son rapport $k = |a|$
- Son angle $\theta = arg(a)$
- Son centre Z_Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1 - a}$ avec $a \neq 1$

- **Cas d'une similitude indirecte ou inverse :**

$Z' = a\bar{Z} + b$ (où a et b sont des complexes). Ces éléments caractéristiques sont :

- Son rapport $k = |a|$
- Son axe (D) : $y = px + q$. avec $p = \frac{I_m(a)}{|a|+R_e(a)}$ $(Coéfficient\ directeur)$
- Son centre Z_Ω d'affixe $\omega = \frac{b+a\bar{b}}{1-a\bar{a}}$

5) Caractérisation des transformationsz

Soit f la transformation : $z' = az + b$

- $si\ a = 1$, alors f est une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'affixe b.
- si $a = -1$, alors f est la symétrie centrale de centre Z_Ω d'affixe $w = \frac{1}{2}$b.
- $si\ a \in \mathbb{R}^* - \{-1\,;1\}$, alors f est une homothétie de rapport $k = |a|$ et de centre Z_Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.
- $si\ a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = 1$ $alors\ f$ est une rotation d'angle α, d'argument $\theta = arg(a)$ et de centre Z_Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.
- $si\ a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1$ $alors\ f$ est une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle α ,d'argument $\theta = arg(a)$ et de centre Z_Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.

Soit f la transformation : $z' = a\bar{z} + b$

- Si $|a| = 1$, alors f est une symétrie orthogonale d'axe l'ensemble des solutions de $z' = a\bar{z} + b$.
- Si $|a| \neq 1$ $alors\ f$ est une similitude indirecte de rapport $k = |a|$, d'angle, θ= arg(a) , $d'\ axe\ (\Delta) :\ y = px + q$ et de centre Z_Ω d'affixe $\omega = \frac{b+a\bar{b}}{1-a\bar{a}}$

Exercices

Forme algébrique

1 Ecris sous forme algébrique les nombres complexes donnés puis en déduis la partie réelle et imaginaire de chacun d'eux :

a) $Z = (-1-i)^3$; **b)** $Z = i^5$; **c)** $Z = \frac{i}{(1+i)(3-2i)}$; **d)** $Z = \left(1+\frac{2}{i}\right)(3-2i)$

2 On donne les nombres complexes suivants : $Z_1 = 1-2i$ et $Z_2 = 3+i$.

Ecris sous forme algébrique : $Z_1 + Z_2$; $Z_1 - Z_2$; $Z_1 \times Z_2$; Z_1^2 ; $\frac{1}{Z_2}$; $\frac{Z_2}{Z_1}$

Forme trigonométrique - Forme exponentielle

3 Détermine les formes trigonométriques et exponentielles des nombres complexes suivants :

a) $Z = -i$; **b)** $Z = \sqrt{3} + i$; **c)** $Z = \frac{-1-i}{2}$; **d)** $Z = -1 + i\sqrt{3}$; **e)** $Z = -1 - i$

f) $Z = \left(-\sqrt{3} - i\right)^3$; **g)** $Z = \frac{-\sqrt{3} - i}{1+i}$; **h)** $Z = (1+i)(-2-2i)$; ***i)*** $Z = (-1+i)e^{i\frac{-5\pi}{6}}$

j) $Z = -cos\alpha + isin\alpha$; **k)** $Z = = -cos\alpha - isin\alpha$ ***l)*** $Z = = cos\alpha - isin\alpha$

4 Complète le tableau suivant :

Forme algébrique	$-5\left(1 - i\sqrt{3}\right)$		
Forme trigonométrique			$2\left[cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right]$
Forme exponentielle		$e^{-\frac{5i\pi}{4}}$	

5 On pose : $A = 5\sqrt{2}(1+i)$; $B = -5\left(1 + i\sqrt{3}\right)$

1) Détermine le module et un argument de : A ; B ; $\bar{A}$; $\frac{B}{A}$; $A \times B$ et $\frac{A}{B^2}$
2) Soit Z un nombre complexe tel que : $AZ = B$
a) Ecris Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
b) En déduis les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$
c) Calcule $(Z)^{12}$

6 **On pose :** $Z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

1) Calcule Z^2 puis Détermine son module et son argument.
2) En déduis de ce qui précède le module et un argument Z.

7 Les parties I et II sont indépendant :

I- On pose : $|Z| = 2\sqrt{2}$ et $arg\left[\left(1 + i\sqrt{3}\right)Z\right] = \frac{7\pi}{12}$.

Détermine la forme trigonométrique et exponentielle de Z.

II- On pose : $Z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $Z' = 1 - i$

1) Ecris $\frac{Z}{Z'}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
2) En déduis les valeurs exactes de $\mathrm{Cos}\frac{\pi}{12}$ et $\mathrm{Sin}\frac{\pi}{12}$

Détermination de l'ensemble des points

8 Détermine les ensembles suivants :

1) L'ensemble (Ω) des points M d'affixes Z tels que : $| Z - i | = 2$

2) L'ensemble (Γ) des points M d'affixes Z tels que : $| \bar{Z} - i | = 2$

3) L'ensemble (λ) des points M d'affixes Z tels que : $| Z + 1 - 2i | = | \bar{Z} - 1 - i |$

4) L'ensemble (φ) des points M d'affixes Z tels que : $arg(Z - 1 + 2i) = \frac{\pi}{6} + k\pi$

5) L'ensemble (ω) des points M d'affixes Z tels que : $arg(2\bar{Z} - 2 + i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

9 Le plan est muni d'un repère orthonormal $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe distinct de 1 et soit $Z = \frac{z+1}{z-1}$

Détermine puis construis l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les conditions indiquées :

1) $|Z|=1$; **2)** Z est un réel. ; **3)** Z est un imaginaire

Linéarisation.

10 Linéarise les expressions : $A = sin^3 x$; $B = cos^3 \frac{x}{2}$; $C = sin^2 x \bullet cos^3 x$

Résolution d'équations et systèmes.

11 Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $Z^2 - 2Z + 2 = 0$; **b)** $Z^2 - 2Z + 1 = 0$; ***c)*** $Z^2 + 2sin\alpha Z + 1 = 0$

e) $Z^2 - 2cos\alpha Z + 1 = 0$ ***f)*** $4Z^2 - 4(1 + i) Z - (45 + 26i) = 0$

12 1) Développe le produit de facteurs suivant : $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$

2) Résous l'équation $Z^4 = 1$
3) En déduis des questions 1) et 2) la résolution des équations suivantes :

$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$ Puis $\left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^3 + \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^2 + \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right) + 1 = 0$

13 On donne le nombre complexe Z tel que : $Z = 2 + 3i$

1) Vérifie $Z^4 = -119 - 120i$
2) Détermine les racines quatrièmes de l'unité.
3) En déduis les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $Z^4 = -119 - 120i$

14 Résous dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes :

1) $\begin{cases} Z_1 \times Z_2 = 6 \\ Z_1 + Z_2 = 5 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} (2+3i)Z - 5Z' = -1 \\ (1-i)Z + 2Z' = 2(1+i) \end{cases}$

Résous dans $\mathbb{C}^3$ le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + iz = 0 \\ x + y - z = 0 \\ (1+i)x - 2y = 2z - 2i \end{cases}$$

15 Dans le plan muni d'un repère orthonormé$(o\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, on considère le polynôme $p(Z)$ telque :

$p(Z) = Z^3 - (3+5i)Z^2 + (-4+9i)Z + 6 - 4i$

1) Démontre que l'équation $p(Z) = 0$ admet une solution réelle que l'on notera Z_1, dont on Déterminera la valeur.

2) Factorise P(Z) puis Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation P(Z) = 0

16 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le polynôme $p(Z)$

telque : $p(Z) = Z^3 - 4iZ^2 - (6+i)Z + 3i - 1$

1) Montre que l'équation $p(Z) = 0$ admet une solution imaginaire pure.

2) Factorise $p(Z)$puis Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z) = 0$.

17 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le polynôme $p(Z)$ telque :

$p(Z) = Z^3 + 2(1 - 2cos2\theta)Z^2 + 4(1 - 2cos2\theta)Z + 8$

1) Calcule $p(-2)$.
2) Factorise $p(Z)$ puis Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z) = 0$.
3) On désigne par Z_1 ; Z_2 et Z_3 les solutions de l'équation $p(Z) = 0$.
Calcule le module et un argument de Z_1 ; Z_2 et Z_3.
4) On désigne par A ; B et C les points d'affixes respectives Z_1 ; Z_2 et Z_3.

Pour quelles valeurs de θ, le triangle ABC, est –il équilatérale ?

18

Soit f la fonction à variable complexe Z telle que : $f(Z) = Z^4 - 3Z^3 + \frac{9}{2}Z^2 - 3Z + 1$

1) Prouve que si Z_0 est une solution de l'équation $f(Z) = 0$ alors les complexes : $\overline{Z_0}$ et $\frac{1}{Z_0}$ en sont aussi.

2) Détermine $f(1+i)$ et en exploitant ce qui précède, Trouve toutes les solutions de l'équation $f(Z) = 0$.

19

Soit le polynôme P(Z) définie par : $P(Z) = Z^4 - (1+\sqrt{2})Z^3 + (2+\sqrt{2})Z^2 - (1+\sqrt{2})Z + 1$

1) Vérifie que : $P(Z) = Z^2\left[\left(Z + \frac{1}{Z}\right)^2 - \left(Z + \frac{1}{Z}\right)(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}\right]$ avec $Z \neq 0$

2) En utilisant la question précédente, Résous l'équation $P(Z) = 0$.

20

On considère dans $\mathbb{C}$ le complexe u tel que : $u = -1 - 2i\sqrt{2}$

1- Calcule les racines carrées de u.

2- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2Z^2 + 2iZ + i\sqrt{2} = 0$
(On notera Z_1 et Z_2 les solutions de cette équation).

3- Montre que : $\left|\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right| = \sqrt{2}$

Figures géométriques dans le plan.

21

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs : $-1 - i$; $2 + 3i$; $-10 - 13i$.
Démontre que ces trois points sont alignés. (on fera une figure).

22

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs : $3 + i$; $2i$; $2 - 2i$.

a- Démontre que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

b- Détermine l'affixe de D telque : $ABCD$ soit un parallélogramme. (on fera une figure).

23

Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectifs : $-1 + i$; $-1 - i$; $2i$; $2 - 2i$.

a- Etudie la nature des triangles ABC et BCD.

b- Démontre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on Déterminera le centre et le rayon. (on fera une figure).

24 On considère un repère orthonormé directe (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$)du plan complexe. Soit les points A ; B ; C d'affixes respectives :

$$Z_A = -1 + i \quad ; \quad Z_B = \frac{2\left[Cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + iSin\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right]}{Cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - iSin\left(\frac{\pi}{5}\right)} \quad \text{et} \quad Z_C = 2 - 2i$$

a- Ecris les complexe Z_A ; Z_B et Z_C sous forme exponentielle.

b- Détermine l'affixe Z_D du point D tel que le triangle OBD soit équilatéral direct, c'est-à-dire la mesure de l'angle ($\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OD}$) = $\frac{\pi}{3}$.

25 Le plan est rapporté au repère orthonormé directe (O ; $\vec{U}$; $\vec{V}$).
On considère :

- Le point A d'affixe $Z_A = 5 - i\sqrt{3}$.
- Le point B d'affixe Z_B est tel que OAB soit un triangle équilatéral direct c'est-à-dire la mesure de l'angle ($\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$) = $\frac{\pi}{3}$.
- Le point Q d'affixe Z_Q est tel que le point Q soit milieu du segment $[OB]$.
- Le point K d'affixe Z_K est tel que $ABQK$ soit un parallélogramme.

1) Détermine les affixes Z_B ; Z_Q et Z_K respectivement des points B ; Q et K.

2) Démontre que $\frac{Z_K - Z_A}{Z_K}$ est un imaginaire pur. En déduis la nature du triangle OKA.

3) Soit C la point d'affixe Z_C tel que $Z_C = \frac{2Z_A}{3}$

a- Calcule $\frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C}$. Que peut-on en déduis pour les points B ; C et K ?

26 On considère l'ensemble des complexes Z_n tels que : $\forall\, n \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \frac{1+i}{2} Z_n \end{cases}$$

1) On note M_n le point d'affixe Z_n dans le plan rapporté au repère ($o, \vec{u}, \vec{v}$).

a- Calcule Z_1 ; Z_2; Z_3 et Z_4.

b- Place les points M_1 , M_2 , M_3 , M_4 et M_5.

2) Calcule le quotient : $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}}$ puis en déduis la nature du triangle $OM_{n+1}M_n$

Transformations géométriques du plan.

27 Soit (S) l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe Z associe Z' d'affixe M' tel que

$Z' = (1 + i)Z + 1 - i$. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (S).

28 Soit la similitude directe plane S de centre A (1 ; 1) ; de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ par la similitude S ; le point M d'affixe Z a pour transformer le point M' d'affixe Z'.

Exprime Z' en fonction de Z.

29 Soient A, B, C et D les points d'affixes $Z_A = -1 - i$; $Z_B = i$; $Z_C = 1 + 3i$; $Z_D = 5 + i$.

Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D.

1) Détermine le rapport k et l'angle θ de S

2) Détermine l'écriture complexe f associée à S.
3) Détermine l'affixe de **Ω** le centre de S

30 Détermine la traduction complexe de la transformation (Γ) dans chacun des cas suivants :
1) (Γ) est la translation qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$

2) (Γ) est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$.

3) (Γ) est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$ qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + i$.

31 Soit f la transformation définie par $Z' = aZ + 3i$
1) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f si : $a = 2$ puis si $a = -i$.

2) Soient $A(1)$; $B(2 + i)$; $A'(2i)$; $B'(1 + i)$.Vérifie que $AB = A'B'$

3) Démontre qu'il existe une unique rotation r telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$

32 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : Z^3 - (4 + i\sqrt{3})Z^2 + (3 + 4i\sqrt{3})Z - 3i\sqrt{3} = 0$

1) Montre que (E) admet deux solutions réelles que l'on notera α et β puis une solution imaginaire pure que l'on notera ω.

2) Soit f, l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout nombre complexe Z, on a :

$f(Z) = aZ + b$.

a-Détermine les réels a et b pour que $f(\omega) = \omega$ et $f(\alpha) = \beta$.

b-Calcule le module et un argument de α.

c-Donne la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.

33

Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. A est le point d'affixe $2i$ et P^* le plan privé de A.
Soit T la transformation qui au point M d'affixe $Z \neq 2i$ associe le point M' d'affixe $Z' = \frac{2iZ-5}{Z-2i}$.

1) Montre que pour tout point M de P^*, le point M' est distinct de A.
2) Démontre que Test une bijection de P^* sur lui-même. Détermine sa réciproque T^{-1}.
3) a- Montre qu'un point M de P^* est invariant par T si et seulement si son affixe vérifie la relation : $Z^2 - 4iZ + 5 = 0$.
   b- Trouve le réel α tel que : $Z^2 - 4iZ + 5 = (Z-2i)^2 + \alpha$.
   c- Montre alors que T admet deux points invariants B et C.
4) On appelle (D) la droite passant par O et dirigée par $\vec{v}$ et (D^*) la droite (D) privé de A.
   Montre que (D^*) est globalement invariante par T.
5) a- Montre que pour tout $Z \neq 2i$, $|Z' - 2i| \times |Z - 2i| = 9$.
   b- Soit (Γ)le cercle de centre A et de rayon 3. Montre que (Γ) est globalement invariante par T.

34

Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. On donne quatre points A ; B ; C et D d'affixes respectives : $Z_A = -2+6i$; $Z_B = 1-3i$; $Z_C = 5+5i$ et $Z_D = 2+4i$

1) Soit S la similitude plane directe qui tout point M d'affixe Z, fait correspondre le M' d'affixe Z' tel que : $Z' = 3iZ + 13 - 9i$.
   a- Donne les éléments caractéristiques de S.
   b- Quelle est l'image des points C et D par la similitude S ?
   c- Montre que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{S(C)S(D)}$ sont orthogonaux.
2) Soit R la similitude plane directe qui transforme B et C et D en A.
   a- Trouve la relation liant l'affixe Z d'un point M et l'affixe Z' de son image R(M).
   b- Donne les éléments caractéristiques de cette similitude (on appellera J le point invariant). Montre que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux.
   c- Que représente le point D pour le triangle ABC ?
3) Montre que J est un point de la droite (AB). Donne une mesure en radian de l'angle des vecteurs $\left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA}\right)$.

35

Soit α un nombre complexe.

1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1+i)Z^2 - 2i(\alpha+1)Z + (i-1)(\alpha^2+1) = 0$.
2) Soient Z_1 et Z_2 les solutions de cette équation.
   Trouve entre Z_1 et Z_2, une relation indépendante de α.
3) Caractérise la transformation f du plan complexe qui, à tout point M_1 d'affixe Z_1 associe le point M_2 d'affixe Z_2.

4) On pose $Z_1 = x + iy$ et $Z_2 = x' + iy'$.
   a- Exprime x' et y' en fonction de x et y.
   b- Quelle est l'image par f de la droite (D) d'équation $x + 2y - 1 = 0$?

Problèmes.

36

Soit f l'application de $\mathbb{C} - \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(Z) = \frac{iZ}{Z+i}$. Dans le plan complexe rapporté au repère ortho normal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on note M le point d'affixe Z.

1) Détermine les coordonnées du point B dont l'affixe Z_B et telle que $f(Z_B) = 1 + 2i$

2) Soit Z un élément de E. on note r le module de $Z + i$ et α une mesure de son argument.

Exprime la forme trigonométrique de $f(Z) - i$ en fonction de r et α.

3) Soit A le point d'affixe $-i$

a) Détermine l'ensemble (Γ) des points M vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$

b) Montre que B appartient à (Γ).

37

Partie A : Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct$(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

1) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^2 - (2 + 6i)Z - 16 + 12i = 0$
2) Soit $P(Z) = Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i$

a- Montre que l'équation P(Z) = 0 admet une solution réelle notée z_0 que l'on Déterminera.

b- Factorise P(Z) puis Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation P(Z) = 0

Partie B:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (o, i, j)

On donne les points A ; B et C d'affixes respectives : $Z_A = 2$; $Z_B = 4 + 2i$; $Z_C = -2 + 4i$

1) a- Calcule le rapport : $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ et en déduis la nature du triangle ABC

b-Montre que le point F d'affixe $2i$ est le milieu du segment $[AC]$

c-Détermine (Δ) l'ensemble des points du plan d'affixe Z vérifiant l'équation suivante :

$|Z - 4 - 2i| = |Z + 2 - 4i|$

2) Soit S la similitude du plan telle que $S(A) = A$ et $S(B) = C$.

a- Détermine le rapport k et l'angle θ de la similitude S.

b- Détermine l'expression de la bijection complexe associée à la similitude S.

c- En déduis le centre de la similitude S.

Solutions

Forme algébrique

1 Ecrivons sous forme algébrique les nombres complexes donnés puis en déduisons la partie réelle et imaginaire de chacun d'eux :

a) Z = $(-1-i)^3$ => Z = $(-1)^3(1+i)^3$ = $(-1)^3[(1)^3+3(1)^2(i)+3(1)(i)^2+(i)^3\ ]$ => Z = $-1(-2+2i)=2-2i$ => $Re(Z)=2$ et $Im(Z)=-2$

b) Z = i^5 => Z = $i^2\times i^2\times i=(-1)(-1)\times i=i$ => $Re(Z)=0$ et $Im(Z)=1$

c) Z = $\frac{i}{(1+i)(3-2i)}$ => Z = $\frac{i}{3-2i+3i+2}=\frac{i}{5+i}=\frac{i(5-i)}{(5)^2+(1)^2}=\frac{1+5i}{26}=\frac{1}{26}+i\frac{5}{26}$

=> $Re(Z)=\frac{1}{26}$ et $Im(Z)=\frac{5}{26}$

d) Z = $\left(1+\frac{2}{i}\right)(3-2i)$ => Z = $3-2i+\frac{6}{i}-4=-1-2i-6$ avec $\frac{6}{i}=\frac{6(-i)}{(1)^2}$

=> Z = $-7-2i$ => $Re(Z)=-7$ et $Im(Z)=-2$

2 On donne les nombres complexes suivants : $Z_1=1-2i$ et $Z_2=3+\ i$.

Ecrivons sous forme algébrique : $Z_1+\ Z_2$; $Z_1-\ Z_2$; $Z_1\times\ Z_2$; Z_1^2 ; $\frac{1}{Z_2}$; $\frac{Z_2}{Z_1}$

$Z_1+\ Z_2\ =(1-2i)+(3+\ i)=1-2i+3+\ i=4-i$ => $Z_1+\ Z_2\ =4-i$

$Z_1-\ Z_2\ =(1-2i)-(3+\ i)=1-2i-3-\ i=-2-3i$ => $Z_1-\ Z_2\ =-2-3i$

$Z_1\times\ Z_2\ =(1-2i)\times(3+\ i)=3+i-6i+2=5-5i$ => $Z_1\times\ Z_2\ =5-5i$

$Z_1^2\ =(1-2i)^2=1-4i-4=-3-4i$ => $Z_1^2\ =-3-4i$

$\frac{1}{Z_2}=\frac{1}{3+i}=\frac{3-i}{(3)^2+(1)^2}=\frac{3-i}{10}=\frac{3}{10}-i\frac{1}{10}$ => $\frac{1}{Z_2}=\frac{3}{10}-i\frac{1}{10}$

$\frac{Z_2}{Z_1}=\frac{3+i}{1-2i}=\frac{(3+i)(1+2i)}{(1)^2+(-2)^2}=\frac{3+6i+i-2}{5}=\frac{1+7i}{5}=\frac{1}{5}+i\frac{7}{5}$ => $\frac{Z_2}{Z_1}=\frac{1}{5}+i\frac{7}{5}$

Forme trigonométrique - Forme exponentielle

3 Détermine les formes trigonométriques et exponentielles des nombres complexes suivants :

a) $Z = -i$ => $|Z| = 1$ et $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2}$ alors $Z = cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

b) $Z = \sqrt{3} + i$ => $|Z| = 2$ et $\arg(Z) = \frac{\pi}{6}$ alors $Z = 2\left[cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$

c) $Z = \frac{-1-i}{2}$ => $|Z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arg(Z) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ alors $Z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

d) $Z = -1 + i\sqrt{3}$ => $|Z| = 2$ et $\arg(Z) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ alors $Z = 2\left[cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

e) $Z = -1 - i$ => $|Z| = \sqrt{2}$ et $\arg(Z) = \frac{5\pi}{4}$ alors $Z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

f) $Z = \left(-\sqrt{3} - i\right)^3$. Posons $A = -\sqrt{3} - i$ => $|A| = 2$ et $\arg(A) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

=> $|Z| = |A|^3 = (2)^3 = 8$ et $arg(Z) = arg(A)^3 = 3arg(A) = 3\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{6}$

Alors $Z = 8\left[cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$

g) $Z = \frac{-\sqrt{3} - i}{1 + i}$. Posons :

$A = -\sqrt{3} - i$ => $|A| = 2$ et $arg(A) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

$B = 1 + i$ => $|B| = \sqrt{2}$ et $arg(B) = \frac{\pi}{4}$

Alors $|Z| = \left|\frac{A}{B}\right| = \frac{|A|}{|B|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ et

$arg(Z) = arg\left(\frac{A}{B}\right) = arg(A) - arg(B) = \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$

=> $arg(Z) = \frac{14\pi - 3\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$ alors $Z = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right]$

h) $Z = (1 + i)(-2 - 2i)$. Posons :

$A = 1 + i$ => $|A| = \sqrt{2}$ et $arg(A) = \frac{\pi}{4}$

$B = -2-2i \Rightarrow\ |B| = 2\sqrt{2}$ et $arg(B) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Alors $|Z| = |A| \times |B| = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$ et $arg(Z) = arg(A \times B) = arg(A) + arg(B)$

$\Rightarrow arg(Z) = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$ alors $Z = 4\left[cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$

i) Z = $(-1+i)e^{i\frac{-5\pi}{6}}$. Posons :

$A = -1 + i \Rightarrow\ |A| = \sqrt{2}$ et $\arg(A) = -\frac{\pi}{4}$ alors $A = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}}$

$B = e^{i\frac{-5\pi}{6}} \Rightarrow\ Z = A \times B = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}} \times e^{i\frac{-5\pi}{6}} = \sqrt{2}e^{i\frac{-13\pi}{12}} = \sqrt{2}\left[cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right]$

Alors $Z = \sqrt{2}\left[cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right]$

j) Z $= -cos\alpha + isin\alpha$

$|Z| = \sqrt{(-cos\alpha)^2 + (sin\alpha)^2} = \sqrt{cos^2\alpha + sin^2\alpha} = 1$

$arg(Z)$ est tel que : $\begin{cases} cos\theta = -cos\alpha \\ \quad et \\ sin\theta = sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi - \alpha$

Alors $Z = cos(\pi - \alpha) + isin(\pi - \alpha)$

k) Z = $= -cos\alpha - isin\alpha$

De même, ici : le ***cosinus*** est négatif et le ***sinus*** est négatif donc $\theta = \pi + \alpha$

Alors $Z = cos(\pi + \alpha) + isin(\pi + \alpha)$

l) Z = $= cos\alpha - isin\alpha$

De même, ici : le ***cosinus*** est positif et le ***sinus*** est négatif alors $\theta = -\alpha$

Alors $Z = cos(-\alpha) + isin(-\alpha)$

4 Le tableau Complété est le suivant :

F. Algébrique	$-5(1 - i\sqrt{3})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
F. Trigonométrique	$10\left[cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$	$\left[cos\left(\frac{-5\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{-5\pi}{4}\right)\right]$	$2\left[cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right]$
F. Exponentielle	$10e^{\frac{4i\pi}{3}}$	$e^{-\frac{5i\pi}{4}}$	$2e^{-\frac{3i\pi}{4}}$

5 On pose : $A = 5\sqrt{2}(1+i)$; $B = -5\left(1 + i\sqrt{3}\right)$

1) Déterminons le module et un argument de : A ; B ; $\bar{A}$; $\frac{B}{A}$; $A \times B$ et $\frac{A}{B^2}$

$A = 5\sqrt{2}(1+i) \Rightarrow \ |A| = 10$ et $arg(A) = \frac{\pi}{4}$

$B = -5\left(1 + i\sqrt{3}\right) \Rightarrow \ |B| = 10$ et $arg(B) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$|\bar{A}| = |A| = 10$ et $arg(\bar{A}) = -arg(A) = -\frac{\pi}{4}$

$\left|\frac{B}{A}\right| = \frac{|B|}{|A|} = \frac{10}{10} = 1$ et $arg\left(\frac{B}{A}\right) = arg(B) - arg(A) = \left(\frac{4\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{13\pi}{12}$

$|A \times B| = |A| \times |B| = 10 \times 10 = 100$ et $arg(A \times B) = arg(A) + arg(B) = \left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{19\pi}{12}$

$\left|\frac{A}{B^2}\right| = \frac{|A|}{|B^2|} = \frac{|A|}{|B|^2} = \frac{10}{10^2} = \frac{1}{10}$ et $arg\left(\frac{A}{B^2}\right) = arg(A) - arg(B^2) = arg(A) - 2arg(B)$

$\Rightarrow arg\left(\frac{A}{B^2}\right) = \left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{8\pi}{3} = -\frac{29\pi}{12}$

2) Soit Z un nombre complexe tel que : $AZ = B$

a- Ecrivons Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

Forme algébrique de Z :

$$AZ = B \Rightarrow Z = \frac{B}{A} = \frac{-5\left(1+i\sqrt{3}\right)}{5\sqrt{2}(1+i)} = \frac{-\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}(1+i)} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}+i\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{4} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\,\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{4}$$

D'où la forme algébrique de Z est : $Z = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\,\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{4}$

Forme trigonométrique de Z :

D'après la question 1) on a : $\left|\frac{B}{A}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{13\pi}{12}$

D'où la forme trigonométrique de Z est : $Z = cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$

b- En déduisons les valeurs exactes de Cos$\frac{13\pi}{12}$ et Sin$\frac{13\pi}{12}$

Pour cela on égalise la forme algébrique et la forme trigonométrique.

$$\begin{cases} Z = cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{13\pi}{12}\right) \\ Z = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\,\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{4} \end{cases} \Rightarrow cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\,\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{4}$$

Par identification, on a : $cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{4}$

c- Calculons $(Z)^{12}$

Pour cela on utilise la forme trigonométrique de Z

$$Z = cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{13\pi}{12}\right) \Rightarrow (Z)^{12} = \left[cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right]^{12} \Rightarrow$$

$$(Z)^{12} = cos\left(12 \times \frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(12 \times \frac{13\pi}{12}\right) = cos(13\pi) + isin(13\pi)$$

D'où $(Z)^{12} = cos(13\pi) + isin(13\pi)$

6

On pose : $Z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

1) Calculons Z^2 puis Détermine son module et son argument

$$Z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}} \Rightarrow Z^2 = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$Z^2 = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 - 2i\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) + \left(i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \left(2-\sqrt{3}\right) - 2i\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} - \left(2+\sqrt{3}\right)$$

$$= \left(2-\sqrt{3}\right) - 2i\sqrt{(2)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} - \left(2+\sqrt{3}\right)$$

$$= \left(2-\sqrt{3}\right) - 2i\sqrt{4-3} - \left(2+\sqrt{3}\right)$$

$$= \left(2-\sqrt{3}\right) - 2i\sqrt{1} - \left(2+\sqrt{3}\right) = 2-\sqrt{3} - 2i\sqrt{1} - 2 - \sqrt{3} = -2\sqrt{3} - 2i$$

$$\Rightarrow Z^2 = -2\sqrt{3} - 2i$$

$$|Z^2| = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 \times 3 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

$$arg(Z^2)\text{est tel que : } \begin{cases} cos\theta = \frac{-2\sqrt{3}}{4} \\ et \\ cos\theta = \frac{-2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ et \\ cos\theta = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = arg(Z^2) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

2) En déduisons le module et un argument de Z

$|Z^2| = 4 \Leftrightarrow |Z|^2 = 4 \Rightarrow |Z| = 2$

$arg(Z^2) = \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow 2argZ = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow argZ = \frac{7\pi}{12}$

7 I- On pose : $|Z| = 2\sqrt{2}$ et $\arg[(1+i\sqrt{3})Z] = \frac{7\pi}{12}$.

Déterminons la forme trigonométrique et exponentielle de Z.

$arg[(1+i\sqrt{3})Z] = \frac{7\pi}{12} \Leftrightarrow arg(1+i\sqrt{3}) + arg(Z) = \frac{7\pi}{12} \Rightarrow arg(Z) = \frac{7\pi}{12} - arg(1+i\sqrt{3})$

$\Rightarrow arg(Z) = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}$ avec $arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow arg(Z) = \frac{7\pi - 4\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$

D'où la forme trigonométrique de Z est : $Z = 2\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

Et la forme exponentielle de Z est : $Z = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

II- On pose : $Z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $Z' = 1 - i$

1) Ecrivons $\frac{Z}{Z'}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

Pose $Z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $Z' = 1 - i$

- Forme algébrique :

$$\Rightarrow \frac{Z}{Z'} = \frac{\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}}{1 - i} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

- Forme Trigonométrique

$Z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |Z| = \sqrt{2}$ et $\arg(Z) = -\frac{\pi}{6}$

$Z' = 1 - i \Rightarrow |Z'| = \sqrt{2}$ et $\arg(Z) = -\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \left|\frac{Z}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z') = \left(-\frac{\pi}{6}\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}$$

D'où la forme Trigonométrique de $\frac{Z}{Z'}$ est

$\frac{Z}{Z'} = \frac{|Z|}{|Z'|}\left[cos(\theta - \theta') + isin(\theta - \theta')\right] => \frac{Z}{Z'} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$

$=> \frac{Z}{Z'} = cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

2) En déduisons les valeurs exactes de $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ $et\ sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
Pour cela on égalise la forme algébrique et la forme trigonométrique.

$\begin{cases} \frac{Z}{Z'} = cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ \frac{Z}{Z'} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4} \end{cases} => cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Par identification, on a : $cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Détermination de l'ensemble des points

8 Déterminons les ensembles suivants :

1) L'ensemble (Ω) des points M d'affixes Z tels que : $|\ Z - i\ | = 2$

Posons : $Z_A - i = 0 => Z_A = i => A\binom{0}{1}$

Alors L'ensemble (Ω) des points M cherché est le cercle de centre $A\binom{0}{1}$ et de rayon $r = 2$.

2) L'ensemble (Γ) des points M d'affixes Z tels que : $|\ \bar{Z} - i\ | = 2$

Posons : $\overline{Z_A} - i = 0 => \overline{Z_A} = i => Z_A = -i => \ => A\binom{0}{-1}$

Alors L'ensemble (Γ) des points M cherché est le cercle de centre $A\binom{0}{-1}$ et de rayon $r = 2$.

3) L'ensemble (λ) des points M d'affixes Z tels que : $|\ Z + 1 - 2i\ | = |\ \bar{Z} - 1 - i\ |$

Posons : $\begin{cases} Z_A + 1 - 2i = 0 \\ \text{et} \\ \overline{Z_B} - 1 - i = 0 \end{cases} => \begin{cases} Z_A = -1 + 2i \\ \text{et} \\ \overline{Z_B} = 1 + i \end{cases} => \begin{cases} Z_A = -1 + 2i \\ \text{et} \\ Z_B = 1 - i \end{cases} => \begin{cases} A\binom{-1}{2} \\ \text{et} \\ B\binom{1}{-1} \end{cases}$

Alors L'ensemble (Γ) des points M cherché est la médiatrice du segment $[AB]$

4) L'ensemble (φ) des points M d'affixes Z tels que : arg($Z - 1 + 2i$) = $\frac{\pi}{6} + k\pi$

Posons : $Z_A - 1 + 2i = 0 => Z_A = 1 - 2i => A\binom{1}{-2}$

Alors L'ensemble (φ) des points M cherché est la est la droite (D) passant par le point $A\binom{1}{-2}$ et faisant un angle α = $\frac{\pi}{6} + k\pi$ avec l'horizontale.

5) L'ensemble (ω) des points M d'affixes Z tels que : arg($2\bar{Z} - 2 + i$) = $-\frac{\pi}{4} + k\pi$

$arg(2\bar{Z} - 2 + i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

$=> -arg(2Z + 2 - i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

$=> arg(2Z + 2 - i) = \frac{\pi}{4} - k\pi$

$=> arg\left[2\left(Z + 1 - \frac{1}{2}i\right)\right] = \frac{\pi}{4} - k\pi \Leftrightarrow arg(2) + arg\left(Z + 1 - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{4} - k\pi$

$=> arg\left(Z + 1 - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{4} - k\pi$ => arg$\left[Z - \left(-1 + \frac{1}{2}i\right)\right] = \frac{\pi}{4} - k\pi$

$<=> arg(Z_M - Z_A) = \frac{\pi}{4} - k\pi$ Avec $Z_A = -1 + \frac{1}{2}i$ => A$\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Alors l'ensemble (ω) des points M cherchés est la droite (D) passant par le point A$\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$et faisant un angle α = $\frac{\pi}{4}$ avec l'horizontale.

9 Le plan est muni d'un repère orthonormal $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe distinct de 1 et soit Z = $\frac{z+1}{z-1}$

Déterminons puis construisons l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les conditions indiquées :

1) $|Z| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z+1|}{|z-1|} = 1 \Leftrightarrow |z + 1| = |z - 1|$

Posons : $\begin{cases} Z_A + 1 = 0 \\ \text{et} \\ Z_B - 1 = 0 \end{cases} => \begin{cases} Z_A = -1 \\ \text{et} \\ Z_B = 1 \end{cases} => \begin{cases} A\binom{-1}{0} \\ \text{et} \\ B\binom{1}{0} \end{cases}$

Alors L'ensemble des points M cherché est la médiatrice du segment $[AB]$

2) Z est un réel.

Z = $\frac{z+1}{z-1}$

On sait que : $Z = x + iy$

$$\Rightarrow Z = \frac{(x+iy)+1}{(x+iy)-1} = \frac{(x+1)+i(y)}{(x-1)+i(y)} = \frac{[(x+1)+iy][(x-1)-i(y)]}{(x-1)^2+(y)^2}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{x^2+y^2-1+i(-2y)}{(x-1)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} + i\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}$$

Z est un réel si $-2y = 0 \Rightarrow y = 0$

Alors l'ensemble cherché est l'axe des abscisses.

3) Z est un imaginaire

Z est un imaginaire si $x^2 + y^2 - 1 = 0$

Alors l'ensemble cherché est le cercle de centre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon $r = 1$

Linéarisation.

10 En utilisant les formules de Moivre et d'Euler, linéarisons les expressions suivantes :

$A(x) = \cos^3 x$; $B(x) = \sin^3 x$; $C(x) = cos^5 \frac{x}{2}$; $D(x) = \cos^3 x \bullet \sin^3 x$

Linéarisons A ; B ; C ; D

- Utilisation des formules de Moivre

A(x) = cos^3x

Posons $\theta = x \Rightarrow A(x) = \cos^3\theta = (Cos\theta)^3 = \left(\frac{Z+\bar{Z}}{2}\right)^3 = \frac{(Z+\bar{Z})^3}{(2)^3} = \frac{Z^3+3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2+\bar{Z}^3}{8}$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{(Z^3+\bar{Z}^3)+(3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2)}{8} = \frac{(Z^3+\bar{Z}^3)+(3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2)}{8} = \frac{(Z^3+\bar{Z}^3)+3Z\bar{Z}(Z+\bar{Z})}{8}$$

Or $Z^n + \bar{Z}^n = 2\text{Cos}(n\theta) \Rightarrow Z^3 + \bar{Z}^3 = 2\text{Cos}(3\theta)$ et $Z + \bar{Z} = 2\text{Cos}\Theta$

De même $Z^n\bar{Z}^n = 1 \Rightarrow Z\bar{Z} = 1$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{2\text{Cos}(3\theta)+3(2\text{Cos}(\theta))}{8} = \frac{2\text{Cos}\,3\theta+6\text{Cos}\,\theta}{8} = \frac{2}{8}(Cos3\theta + 3\,Cos\theta)$$

$= >$ A(x) = $\frac{1}{4}(Cos3\theta + 3\ Cos\theta)$ or θ = x

$= >$ A(x) = $\frac{1}{4}(Cos3x + 3\ Cosx)$

B(x) = $\boldsymbol{sin^3x}$

Posons θ = x = > B(x) = $\boldsymbol{sin^3\theta}$ = $(Sin\Theta)^3$ = $\left(\frac{Z-\bar{Z}}{2i}\right)^3 = \frac{(Z-\bar{Z})^3}{(2i)^3} = \frac{Z^3-3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2-\bar{Z}^3}{-8i}$

$= >$ B(x) = $\frac{(Z^3-\bar{Z}^3)+(-3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2)}{-8i} = \frac{(Z^3-\bar{Z}^3)-3Z\bar{Z}(Z-\bar{Z})}{-8i}$

Or $Z^n - \bar{Z}^n$ = 2iSin($n\theta$) = >$Z^3 - \bar{Z}^3$ = 2iSin(3θ) et $Z - \bar{Z}$ = 2iSinθ

De même $Z^n\bar{Z}^n$ = 1 = > $Z\bar{Z}$ = 1

$= >$ B(x) = $\frac{2i\text{Sin}(3\theta)+3(2i\text{Sin}(\theta))}{-8i} = \frac{2i\text{Sin}\,3\theta+6i\text{Sin}\,\theta}{-8i} = \frac{2i}{-8i}(Sin3\theta + 3Sin\theta)$

$= >$ B(x) = $-\frac{1}{4}(Sin3\theta + 3Sin\theta)$ or θ = x

$= >$ B(x) = $-\frac{1}{4}(Sin3x + 3Sinx)$

C(x) = $\boldsymbol{cos^5\frac{x}{2}}$

Posons θ = $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{2}}$ = > C(x) = $\cos^5\theta$ = $(Cos\theta)^5$ = $\left(\frac{Z+\bar{Z}}{2}\right)^5 = \frac{(Z+\bar{Z})^5}{(2)^5}$

C(x) = $\frac{Z^5+5Z^4\bar{Z}+10Z^3\bar{Z}^2+10Z^2\bar{Z}^3+5Z\bar{Z}^4+\bar{Z}^5}{32}$

$=>$ C(x) = $\frac{(Z^5+\bar{Z}^5)+(5Z^4\bar{Z}+5Z\bar{Z}^4)+(10Z^3\bar{Z}^2+10Z^2\bar{Z}^3)}{32}$

$= >$ C(x) = $\frac{(Z^5+\bar{Z}^5)+5Z\bar{Z}(Z^3+\bar{Z}^3)+10Z^2\bar{Z}^2(Z+\bar{Z})}{32}$

Or $Z^n + \bar{Z}^n = 2cos(n\theta)$ => $Z^5 + \bar{Z}^5 = 2cos(5\theta)$; $Z^3 + \bar{Z}^3 = 2cos(3\theta)$ et

$Z + \bar{Z} = 2cos\theta$

De même $Z^n\bar{Z}^n$ = 1 = > $Z\bar{Z}$ = 1 et $Z^2\bar{Z}^2$ = 1

$= >$ C(x) = $\frac{2\text{Cos}(5\theta)+5(2\text{Cos}(3\theta))+10(2\,\text{Cos}\,\theta)}{32} = \frac{2}{32}(Cos5\theta + 5\ Cos3\theta\ +\ 10Cos\theta)$

$= > C(x) = \frac{1}{16}\left(Cos5\theta + 5\,Cos3\theta\; + \;10Cos\theta\right)$ or $\theta = \frac{x}{2}$

$= > C(x) = \frac{1}{16}\left(Cos\,\frac{5x}{2} + 5\,Cos\,\frac{3x}{2}\; + \;10Cos\,\frac{x}{2}\right)$

D(x) = cos^3x•sin^3x

Posons θ = x = >D(x) = cos^{3}θ•sin^{3}θ = $(Cos\theta)^3(Sin\theta)^3 = \left(\frac{Z+\bar{Z}}{2}\right)^3\left(\frac{Z-\bar{Z}}{2i}\right)^3$

$= > D(x) = \frac{(Z+\bar{Z})^3}{(2)^3}\times\frac{(Z-\bar{Z})^3}{(2i)^3} = \frac{(Z+\bar{Z})^3(Z-\bar{Z})^3}{-64i}$

$= > D(x) = \frac{\left(Z^3+3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2+\bar{Z}^3\right)\left(Z^3-3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2-\bar{Z}^3\right)}{-64i}$

Après development, on a :

$D(x) = \frac{\left(Z^6-\bar{Z}^6\right)+\left(-3\,Z^4\bar{Z}^2+3Z^2\bar{Z}^4\right)}{-64i} = \frac{\left(Z^6-\bar{Z}^6\right)-3Z^2\bar{Z}^2\left(Z^2-\bar{Z}^2\right)}{-64i}$

Or $Z^n - \bar{Z}^n = 2i\mathrm{Sin}\,(n\theta) = > Z^6 - \bar{Z}^6 = 2i\mathrm{Sin}(6\theta)$ et $Z^2 - \bar{Z}^2 = 2i\mathrm{Sin}(2\theta)$

De même $Z^n\bar{Z}^n = 1 = > Z^2\bar{Z}^2 = 1$

$= > D(x) = \frac{2i\mathrm{Sin}\,(6\theta) - 3(2i\mathrm{Sin}\,(2\theta))}{-64i} = \frac{2i}{-64i}\left(Sin6\theta\; - 3Sin2\theta\right) = \frac{1}{32}\left(Sin6\theta\; - 3Sin2\theta\right)$

Or θ = x $= > D(x) = \frac{1}{32}\left(Sin6x\; - 3Sin2x\right)$

- Utilisation des formules d'Euler

A(x) = cos^3x

Posons θ = x => A(x) = cos^{3}θ = $(Cos\theta)^3 = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^3}{(2)^3}$

$=> A(x) = \frac{e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}}{8}$

$=> A(x) = \frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}}{8} = \frac{\left(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}\right)+3\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)}{8}$

Or $e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\mathrm{Cos}(n\theta) = > e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} = 2\mathrm{Cos}(3\theta)$

Et $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\mathrm{Cos}\theta$

De même $e^{in\theta} \bullet e^{-in\theta} = 1 => e^{i\theta} \bullet e^{-i\theta} = 1$

$=> A(x) = \frac{2Cos(3\theta) + 3(2Cos(\theta))}{8} = \frac{2Cos\,3\theta + 6Cos\,\theta}{8} = \frac{2}{8}(Cos3\theta + 3\,Cos\theta)$

$=> A(x) = \frac{1}{4}(Cos3\theta + 3\,Cos\theta)$ or $\theta = x => A(x) = \frac{1}{4}(Cos3x + 3\,Cosx)$

Résolution d'équations et systèmes.

11 Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $Z^2 - 2Z + 2 = 0 => \Delta = -4 = 4i^2$ alors :

$Z_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{4i^2}}{2(1)} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$ et $Z_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{4i^2}}{2(1)} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$

$=> S = \{1 - i\,; 1 + i\}$

b) $Z^2 - 2Z + 1 = 0 => \Delta = 0$ alors : $Z_1 = Z_2 = Z_0 = \frac{-(-2)}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1 => S = \{1\}$

c) $Z^2 + 2sin\alpha Z + 1 = 0 => \Delta = 4sin^2\alpha - 4 = -4(1 - sin^2\alpha) = 4i^2(cos^2\alpha) = (2icos\alpha)^2$

$Z_1 = \frac{-(2sin\alpha) - \sqrt{(2icos\alpha)^2}}{2(1)} = \frac{-2sin\alpha - 2icos\alpha}{2} = -sin\alpha - icos\alpha$ et

$Z_2 = \frac{-(2sin\alpha) + \sqrt{(2icos\alpha)^2}}{2(1)} = \frac{-2sin\alpha + 2icos\alpha}{2} = -sin\alpha + icos\alpha$

$=> S = \{-sin\alpha - icos\alpha\,; -sin\alpha + icos\alpha\}$

d) $Z^2 - 2cos\alpha Z + 1 = 0 => \Delta = 4cos^2\alpha - 4 = -4(1 - cos^2\alpha) = 4i^2(sin^2\alpha) = (2isin\alpha)^2$

$Z_1 = \frac{-(-2cos\alpha) - \sqrt{(2isin\alpha)^2}}{2(1)} = \frac{2cos\alpha - 2isin\alpha}{2} = cos\alpha - isin\alpha$ et

$Z_2 = \frac{-(-2cos\alpha) + \sqrt{(2isin\alpha)^2}}{2(1)} = \frac{2cos\alpha + 2isin\alpha}{2} = cos\alpha + isin\alpha$

$=> S = \{cos\alpha - isin\alpha\,; cos\alpha + isin\alpha\}$

e) $4Z^2 - 4(1 + i)Z - (45 + 26i) = 0$

$\Delta = [-4(1 + i)]^2 - 4(4)[-(45 + 26i)] = 16(1 + 2i - 1) - 16(-45 - 26i)$

⇨ $\Delta = 720 + 448i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 720 \\ 2xy = 448 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(720)^2 + (448)^2} \end{cases} <=> \begin{cases} x^2 - y^2 = 720 & (1) \\ xy = 224 & (2) \\ x^2 + y^2 = 848 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

On a : $2x^2 = 1568 => x^2 = 784 => x = -28 \quad ou \quad x = 28$

(2) : $xy = 224 => y = \frac{224}{x}$

- Si $x = -28 \quad => y = \frac{224}{-28} = -8$ et $\delta_1 = x + iy \quad => \delta_1 = -28 - 8i$
- Si $x' = 28 \quad => y' = \frac{224}{28} = 8$ et $\delta_2 = x' + iy' \quad => \delta_2 = 28 + 8i$

Alors les racines carrées de Z_2 sont $\delta_1 = -28 - 8i$ et $\delta_2 = 28 + 8i$

$$Z_1 = \frac{-[-4(1+i)] + (-28 - 8i)}{2(4)} = \frac{-24 - 4i}{8} = -3 - \frac{1}{2}i$$

$$Z_2 = \frac{-[-4(1+i)] + (28 + 8i)}{2(4)} = \frac{-24 - 4i}{8} = 4 + \frac{3}{2}i \quad => S = \left\{-3 - \frac{1}{2}i \,;\, 4 + \frac{3}{2}i \;\, i\right\}$$

12

1) Développons le produit de facteurs suivant : $(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$

$(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 - 1$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^4 = 1$

$Z^4 = 1 \Leftrightarrow Z^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (Z^2 - 1)(Z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (Z^2 - 1) = 0$ ou $(Z^2 + 1) = 0$

Alors $Z^2 - 1 = 0 => Z^2 = 1 => Z = -1$ ou $Z = 1$
De même $Z^2 + 1 = 0 => Z^2 = -1 \Leftrightarrow Z^2 = i^2 => Z = -i$ ou $Z = i$
=> S = $\{-1 \,;\, 1 \,;\, -i \,;\, i\}$

3) En déduis des questions 1) et 2) , la résolution des équations :

$(Z-1)(Z^3 + Z^2 + Z + 1) = 0$ et

$$\left[\left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right) - 1\right]\left[\left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^3 + \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^2 + \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right) + 1\right] = 0$$

- $(Z-1)(Z^3 + Z^2 + Z + 1) = 0 \Leftrightarrow Z^4 - 1 = 0$. D'après les questions 1) et 2), on a :

$Z_1 = -1 \;;\; Z_2 = 1 \;;\; Z_3 = -i \;;\; Z_4 = i$

- $\left[\left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)-1\right]\left[\left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^3+\left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^2+\left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)+1\right]=0$

En effectuant un changement de variable, on pose : $Z=\left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)$ ainsi l'équation dévient :

$(Z-1)(Z^3+Z^2+Z+1)=0$ => $Z_1=-1$; $Z_2=1$; $Z_3=-i$; $Z_4=i$

– Si $Z_1=-1 \Leftrightarrow \frac{3Z+i}{Z-1}=-1 \Leftrightarrow 3Z+i=-1(Z-1) \Leftrightarrow 4Z=1-i$

=> $Z=\frac{1-i}{4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$

– Si $Z_2=1 \Leftrightarrow \frac{3Z+i}{Z-1}=1 \Leftrightarrow 3Z+i=1(Z-1) \Leftrightarrow 2Z=-1-i$

=> $Z=\frac{-1-i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

– Si $Z_3=-i \Leftrightarrow \frac{3Z+i}{Z-1}=-i \Leftrightarrow 3Z+i=-i(Z-1) \Leftrightarrow Z(3+i)=0$ => $Z=0$

– Si $Z_4=i \Leftrightarrow \frac{3Z+i}{Z-1}=i \Leftrightarrow 3Z+i=i(Z-1) \Leftrightarrow Z(3-i)=-2i$ => $Z=\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$

=> $S=\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i\ ;-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\ ;0\ ;\ \frac{1}{5}-\frac{3}{5}i\right\}$

13 On donne le nombre complexe Z tel que : $Z=2+3i$

1) Vérifions que $Z^4=-119-120i$

$Z^4=(2+3i)^4=(2)^4+4(2)^3(3i)+6(2)^2(3i)^3+4(2)(3i)^3+(3i)^4$

$=16+96i-216-216i+81=-119-120i$ => $Z^4=-119-120i$

2) Déterminons les racines 4^{èmes} de 1

Les racines 4ème de 1 sont les racines 4ème de l'unité qui sont données par la formule : $\left[1\ ;\ \frac{2k\pi}{n}\right]$
or $n=4$ => $z_0=1$; $z_1=i$; $z_2=-1$; $z_3=-i$

3) En déduisons les solutions de $Z^4=-119-120i$
On a $Z^4=-119-120i \Leftrightarrow Z^4=(2+3i)^4$.

Donc pour Trouve les solutions de $Z^4=-119-120i$, on multiplie les racines 4ème de l'unité par $(2+3i)$ Ainsi :

$Z_1=z_0\times(2+3i)$ => $Z_1=1\times(2+3i)=2+3i$

$Z_2 = z_1 \times (2 + 3i) \Rightarrow Z_2 = i \times (2 + 3i) = -3 + 2i$

$Z_3 = z_2 \times (2 + 3i) \Rightarrow Z_3 = -1 \times (2 + 3i) = -2 - 3i$

$Z_4 = z_3 \times (2 + 3i) \Rightarrow Z_4 = -i \times (2 + 3i) = 3 - 2i$

14 Résolvons dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes :

1) $\begin{cases} Z_1 \times Z_2 = 6 \\ Z_1 + Z_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 6 \\ S = 5 \end{cases}$ Résolvons ainsi l'équation : $X^2 - SX + P = 0$

$\Rightarrow X^2 - 5X + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 1$ alors $X_1 = 2$ et $X_1 = 3 \Rightarrow \Rightarrow S = \{(2\,;3)\ ;\ (3\,;2)\}$

2) $\begin{cases} (2+3i)Z - 5Z' = -1 & (\mathbf{1}) \\ (1-i)Z + 2Z' = 2(1+i) & (\mathbf{2}) \end{cases}$

En multipliant l'équation $(\mathbf{1})$ par 2 et l'équation $(\mathbf{2})$ par 5, on a :

$$\begin{cases} (4+6i)Z - 10Z' = -2 & (\mathbf{1}) \\ (5-5i)Z + 10Z' = 10(1+i) & (\mathbf{2}) \end{cases}$$

$\Rightarrow Z[(4+6i) + (5-5i)] = -2 + 10(1+i)$

$\Rightarrow Z(4 + 6i + 5 - 5i) = -2 + 10 + 10i \Leftrightarrow Z(9+i) = 8 + 10i \Rightarrow Z = \dfrac{8+10i}{9+i}$

$\Rightarrow Z = \dfrac{(8+10i)(9-i)}{(9)^2 + (1)^2} = \dfrac{82 + 82i}{82} = 1 + i \Rightarrow Z = 1 + i$

En Remplaçant Z par sa valeur dans l'équation $(\mathbf{1})$, on a : $-5Z' = -5i \Rightarrow Z' = i$

$\Rightarrow S = \{(1+i\ ;\ i)\ ;\ (i\ ;\ 1+i)\}$

Résolvons dans $\mathbb{C}^3$ le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + iz = 0 \\ x + y - z = 0 \\ (1+i)x - 2y = 2z - 2i \end{cases}$$

En utilisant la méthode triangulaire (méthode du pivot de Gauss), le système dévient :

$$\begin{cases} x - y + iz = 0 \\ x + y - z = 0 \\ (1+i)x - 2y = 2z - 2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + iz = 0 \\ \quad 2y - z(1+i) = 0 \\ \qquad Z(2+i) = 2i \\ \qquad\quad z = \dfrac{2i}{2+i} \end{cases}$$

$=> Z = \frac{2i}{2+i} = \frac{2i(2-i)}{(2)^2+(1)^2} = \frac{2+4i}{5} = \frac{2}{5} + i\frac{4}{5}$ $=> Z = \frac{2}{5} + i\frac{4}{5}$

$y = -\frac{3}{10} + i\frac{3}{5}$ et $x = \frac{1}{2} + i\frac{1}{5}$ => $S = \{(\frac{1}{2} + i\frac{1}{5} ; -\frac{3}{10} + i\frac{3}{5} ; \frac{2}{5} + i\frac{4}{5})\}$

15 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le polynôme P(Z) telque :

$P(Z) = Z^3 - (3+5i)Z^2 + (-4+9i)Z + 6 - 4i$

1) Démontrons que l'équation P(Z) = 0 admet une solution réelle que l'on notera Z_1, dont on Déterminera la valeur.

Soit $Z_1 = a$ cette solution réelle telle que :

$Z_0^3 - (3+5i)Z_0^2 + (-4+9i)Z_0 + 6 - 4i = 0,$

$\Leftrightarrow (a)^3 - (3+5i)(a)^2 + (-4+9i)(a) + 6 - 4i = 0$

$\Leftrightarrow a^3 - 3a^2 - 5ia^2 - 4a + 9ai + 6 - 4i = 0$

$\Leftrightarrow (a^3 - 3a^2 - 4a + 6) + i(-5a^2 + 9a - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a^3 - 3a^2 - 4a + 6) = 0 \ (1) \\ (-5a^2 + 9a - 4) = 0 \quad (2) \end{cases}$

<u>NB :</u> On résous toujours l'équation qui semble la plus facile.

Ainsi résolvons l'équation **(2)** : $-5a^2 + 9a - 4 = 0$ $=> \Delta = (9)^2 - 4(-5)(-4) = 1$

$=> a_1 = 1 \quad et \ a_2 = \frac{4}{5}$

Et par vérification dans **(1)** , on remarque que :

$a_1 = 1$ est la seule solution qui vérifie l'équation (1)

D'où $Z_1 = a = 1$ est la solution réelle

2) Factorisons P(Z) puis résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation P(Z) = 0

$P(Z) = Z^3 - (3+5i)Z^2 + (-4+9i)Z + 6 - 4i$ (En utilisant la méthode d'Horner)

	1	$-3-5i$	$-4+9i$	$6-4i$
1		1	$-2-5i$	$-6+4i$
	1	$-2-5i$	$-6+4i$	0

Z_1 a b c

$=> Z^3 - (3+5i)Z^2 + (-4+9i)Z + 6 - 4i = (Z - Z_1)(aZ^2 + bZ + c)$

$\Leftrightarrow Z^3 - (3+5i)Z^2 + (-4+9i)Z + 6 - 4i = (Z-1)\left[Z^2 + (-2-5i) - 6 + 4i\right]$

D'où P(Z) = 0 $\Leftrightarrow Z^3 - (3+5i)Z^2 + (-4+9i)Z + 6 - 4i = 0 \Leftrightarrow$

$(Z-1)\left[Z^2 + (-2-5i)Z - 6 + 4i\right] = 0 \Leftrightarrow Z - 1 = 0$ ou $Z^2 + (-2-5i)Z - 6 + 4i = 0$

$=> Z = 1 => Z_1 = 1$ ou $Z^2 + (-2-5i)Z - 6 + 4i = 0$

Si $Z^2 + (-2-5i)Z - 6 + 4i = 0 => \Delta = [-(2+5i)]^2 - 4(1)(-6+4i) = 3 + 4i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} \end{cases} <=> \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ xy = 2 & (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

On a : $2x^2 = 8 => x^2 = 4 => x = -2 \quad ou \quad x = 2$

(2) : $xy = 2 => y = \frac{2}{x}$

- Si $x = -2 => y = \frac{2}{-2} = -1$ et $\delta_1 = x + iy => \delta_1 = -2 - i$
- Si $x' = 2 => y' = \frac{2}{2} = 1$ et $\delta_2 = x' + iy' => \delta_2 = 2 + i$

Alors les racines carrées de Z $sont$: $\delta_1 = -2 - i$ et $\delta_2 = 2 + i$

$Z_2 = \frac{-(-3i) + (-2-i)}{2(1)} = \frac{4i}{2} = 2i$

$Z_3 = \frac{-(-3i) + (2+i)}{2(1)} = \frac{4+6i}{2} = 2 + 3i => S = \{1 \; ; \; 2i \; ; \; 2+3i\}$

16 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le polynôme P(Z) telque :

$P(Z) = Z^3 - 4iZ^2 - (6+i)Z + 3i - 1.$

1) Montrons que l'équation P(Z) = 0 admet une solution imaginaire pure.

Soit $Z_0 = ib$ cette solution imaginaire telle que :

$Z_0^3 - 4iZ_0^2 - (6+i)Z_0 + 3i - 1 = 0,$

$\Leftrightarrow (ib)^3 - 4i(ib)^2 - (6+i)(ib) + 3i - 1 = 0$

$\Leftrightarrow -ib^3 + 4ib^2 - 6ib + b + 3i - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (b - 1) + i(-b^3 + 4b^2 - 6b + 3) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (b - 1) = 0 & (1) \\ (-b^3 + 4b^2 - 6b + 3) = 0 & (2) \end{cases}$

NB : On résous toujours l'équation qui semble la plus facile.

Ainsi résolvons l'équation **(1)** qui est la plus facile à Résous : $b - 1 = 0 => b = 1$

Et par vérification dans **(2)** , on obtient :

$-(1)^3 + 4(1)^2 - 6(1) + 3 = 0$

$\Leftrightarrow -1 + 4 - 6 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow -3 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0$ Vraie

D'où $Z_0 = ib = i$ est la solution réelle

2) Factorisons P(Z) puis résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation P(Z) = 0.

Factorisons : $Z^3 - 4i\,Z^2 - (6 + i)\,Z + 3i - 1$

	1	$-4i$	$-6 - i$	$3i - 1$
$\boldsymbol{i}$		i	3	$-3i + 1$
	1	$-3i$	$-3 - i$	0

$\boldsymbol{Z_0}$ $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{c}$

$=> Z^3 - 4i\,Z^2 - (6 + i)\,Z + 3i - 1 = (Z - Z_0)(aZ^2 + bZ + c)$

$\Leftrightarrow Z^3 - 4i\,Z^2 - (6 + i)\,Z + 3i - 1 = (Z - i)(Z^2 - 3iZ - 3 - i)$

D'où $Z^3 - 4i\,Z^2 - (6 + i)\,Z + 3i - 1 = 0 \Leftrightarrow (Z - i)(Z^2 - 3iZ - 3 - i) = 0$ =>

$Z - i = 0$ ou $Z^2 - 3iZ - 3 - i = 0 \Leftrightarrow Z = i => Z_0 = i$ ou $Z^2 - 3iZ - 3 - i = 0$

$=> \Delta = (-3i)^2 - 4(1)(-3 - i) = 3 + 4i$

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ xy = 2 & (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & (3) \end{cases}$

Effectuons : (1) + (3)

On a : $2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 \quad ou \quad x = 2$

(2) : $xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x}$

- Si $x = -2 \Rightarrow y = \frac{2}{-2} = -1$ et $\delta_1 = x + iy \Rightarrow \delta_1 = -2 - i$
- Si $x' = 2 \Rightarrow y' = \frac{2}{2} = 1$ et $\delta_2 = x' + iy' \Rightarrow \delta_2 = 2 + i$

Alors les racines carrées de Z $sont$: $\delta_1 = -2 - i$ et $\delta_2 = 2 + i$

$$Z_1 = \frac{-(-3i) + (-2 - i)}{2(1)} = \frac{-2+2i}{2} = -1 + i$$

$$Z_2 = \frac{-(-3i) + (2 + i)}{2(1)} = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i$$

$\Rightarrow$S = { i ; $-1 + i$; $1 + 2i$ }

17 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le polynôme P(Z) telque :

$$P(Z) = Z^3 + 2(1 - 2cos2\theta)Z^2 + 4(1 - 2cos2\theta)Z + 8$$

1) Calcule $P(-2)$.

$P(-2) = (-2)^3 + 2(1 - 2cos2\theta)(-2)^2 + 4(1 - 2cos2\theta)(-2) + 8$

$= -8 + 8(1 - 2cos2\theta) - 8(1 - 2cos2\theta) + 8 = 0$

$\Rightarrow P(-2) = 0$

2) Factorisons $P(Z)$ puis résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation

	1	$2 - 4cos2\theta$	$4 - 8cos2\theta$	8
-2		-2	$8cos2\theta$	-8
	1	$-4cos2\theta$	4	0

$\boldsymbol{Z_1}$ $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{c}$

$$P(Z) = (Z - Z_1)(aZ^2 + bZ + c)$$

$$\Rightarrow P(Z) = (Z + 2)(Z^2 - 4Zcos2\theta + 4)$$

3) On désigne par Z_1 ; Z_2 et Z_3 les solutions de l'équation $P(Z) = 0$.

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$.

$(Z+2)(Z^2 - 4Zcos2\theta + 4) = 0$ => $Z + 2 = 0$ ou $Z^2 - 4Zcos2\theta + 4 = 0$

$Z + 2 = 0$ => $Z_1 = -2$

$Z^2 - 4Zcos2\theta + 4 = 0$ => $\Delta = (-4cos2\theta)^2 - 4(1)(4) = 16cos^2 2\theta - 16$

=> $\Delta = -16(1 - cos^2 2\theta)$. Or $cos^2 2\theta + sin^2 2\theta = 1$ => $sin^2 2\theta = 1 - cos^2 2\theta$

Donc $\Delta = -16sin^2 2\theta = 16i^2 sin^2 2\theta = (4isin2\theta)^2$

=> $Z_2 = \frac{4cos\,2\theta - \sqrt{(4isin\,2\theta)^2}}{2} = \frac{4cos\,2\theta - 4isin\,2\theta}{2} = 2cos2\theta - 2isin2\theta$

$Z_3 = \frac{4cos\,2\theta + \sqrt{(4isin\,2\theta)^2}}{2} = \frac{4cos\,2\theta + 4isin\,2\theta}{2} = 2cos2\theta + 2isin2\theta$

S= $\{-2\ ;\ 2cos2\theta - 2isin2\theta\ ;\ 2cos2\theta + 2isin2\theta\}$

Calculons le module et un argument de Z_1 ; Z_2 et Z_3.

Pour $\boldsymbol{Z_1 = -2}$

$|Z_1| = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

$arg(Z_1)$ est tel que : $\begin{cases} cos\alpha = \frac{-2}{2} \\ et \\ sin\alpha = \frac{0}{2} \end{cases}$ <=> $\begin{cases} cos\alpha = -1 \\ et \\ sin\alpha = 0 \end{cases}$ => $\alpha = \pi$

D'où $|Z_1| = 2$ et $arg(Z_1) = \pi$

Pour $\boldsymbol{Z_2 = 2cos2\theta - 2isin2\theta}$

$|Z_2| = \sqrt{(2cos2\theta)^2 + (-2sin2\theta)^2} = \sqrt{4(cos^2 2\theta + sin^2 2\theta)} = \sqrt{4} = 2$

$arg(Z_2)$ est tel que : $\begin{cases} cos\alpha = \frac{2cos2\theta}{2} \\ et \\ sin\alpha = \frac{-2sin2\theta}{2} \end{cases}$ <=> $\begin{cases} cos\alpha = cos2\theta \\ et \\ sin\alpha = -sin2\theta \end{cases}$ => $\alpha = -2\theta$

D'où $|Z_2| = 2$ et $arg(Z_2) = -2\theta$

Pour $\boldsymbol{Z_3 = 2cos2\theta + 2isin2\theta}$

$|Z_3| = \sqrt{(2cos2\theta)^2 + (2sin2\theta)^2} = \sqrt{4(cos^2 2\theta + sin^2 2\theta)} = \sqrt{4} = 2$

$arg(Z_3)$ est tel que : $\begin{cases} cos\alpha = \frac{2cos2\theta}{2} \\ et \\ sin\alpha = \frac{2sin2\theta}{2} \end{cases}$ <=> $\begin{cases} cos\alpha = cos2\theta \\ et \\ sin\alpha = sin2\theta \end{cases}$ => $\alpha = 2\theta$

D'où $|Z_3| = 2$ et $arg(Z_3) = 2\theta$

4) On désigne par A ; B et C les points d'affixes respectives Z_1 ; Z_2 et Z_3.

Déterminons les valeurs de θ pour que le triangle ABC soit équilatérale

Le triangle ABC est équilatérale si et seulement si $\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \frac{(2cos\,2\theta + 2isin\,2\theta) - (-2)}{(2cos\,2\theta - 2isin\,2\theta) - (-2)} = cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{2cos\,2\theta + 2isin\,2\theta + 2}{2cos\,2\theta - 2isin\,2\theta + 2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{cos\,2\theta + isin\,2\theta + 1}{cos\,2\theta - isin\,2\theta + 1} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \frac{2cos\,2\theta + 2isin\,2\theta + 2}{cos\,2\theta - isin\,2\theta + 1} = 1 + i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2cos2\theta + 2isin2\theta + 2 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)(cos2\theta - isin2\theta + 1)$

$\Leftrightarrow 2 + 2cos2\theta + 2isin2\theta = \left(1 + cos2\theta + \sqrt{3}sin2\theta\right) + i\left(\sqrt{3} + \sqrt{3}cos2\theta - sin2\theta\right)$

=> $\begin{cases} 2 + 2cos2\theta = 1 + cos2\theta + \sqrt{3}sin2\theta \\ \\ 2sin2\theta = \sqrt{3} + \sqrt{3}cos2\theta - sin2\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cos2\theta - \sqrt{3}sin2\theta + 1 = 0 \\ \\ cos2\theta - \sqrt{3}sin2\theta + 1 = 0 \end{cases}$

$cos2\theta - \sqrt{3}sin2\theta + 1 = 0 \Leftrightarrow cos2\theta - \sqrt{3}sin2\theta = -1 \Leftrightarrow cos\frac{\pi}{3}cos2\theta - sin\frac{\pi}{3}sin2\theta = -\frac{1}{2}$

$cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\theta\right) = -cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\theta\right) = cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\theta\right) = cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ \frac{\pi}{3} + 2\theta = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ 2\theta = -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ 2\theta = -\pi + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ ou \\ \theta = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$ => $\theta \in \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

18 Soit f la fonction à variable complexe Z telle que : $f(Z) = Z^4 - 3Z^3 + \frac{9}{2}Z^2 - 3Z + 1$

1) Prouvons que si Z_0 est une solution de l'équation $f(Z) = 0$ alors les complexes :
$\bar{Z}_0$ et $\frac{1}{Z_0}$ en sont aussi.

Z_0 est solution de l'équation $f(Z) = 0 \Leftrightarrow Z_0^4 - 3Z_0^3 + \frac{9}{2}Z_0^2 - 3Z_0 + 1 = 0$

En appliquant la propriété du conjugué $(\overline{Z + Z'} = \bar{Z} + \bar{Z'})$, on a :

$\Rightarrow \overline{Z_0^4 - 3Z_0^3 + \frac{9}{2}Z_0^2 - 3Z_0 + 1} = \bar{0} \Leftrightarrow \overline{Z_0^4} - 3\overline{Z_0^3} + \frac{9}{2}\overline{Z_0^2} - 3\overline{Z_0} + 1 = 0$

De même $\frac{1}{Z_0}$ est aussi solution si $\left(\frac{1}{Z_0}\right)^4 - 3\left(\frac{1}{Z_0}\right)^3 + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{Z_0}\right)^2 - 3\times\frac{1}{Z_0} + 1 = 0$

Conclusion : si Z_0 est une solution de l'équation $f(Z) = 0$ alors les complexes :
$\bar{Z}_0$ et $\frac{1}{Z_0}$ en sont aussi.

2) Déterminons $f(1+i)$ et en exploitant ce qui précède, trouvons toutes les solutions de l'équation $f(Z) = 0$.

$f(1+i) = (1+i)^4 - 3(1+i)^3 + \frac{9}{2}(1+i)^2 - 3(1+i) + 1 = 0 \Rightarrow$

$Z_0 = 1 + i$; $\bar{Z}_0 = 1 - i$; $\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1)^2+(1)^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et $\overline{\left(\frac{1}{Z_0}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

D'où les solutions de l'équation $f(Z) = 0$ sont : **S** $= \left\{ 1+i ; 1-i ; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i ; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right\}$

19 Soit le polynôme P(Z) définie par : $P(Z) = Z^4 - (1+\sqrt{2})Z^3 + (2+\sqrt{2})Z^2 - (1+\sqrt{2})Z + 1$

1) Vérifions que : $P(Z) = Z^2\left[\left(Z + \frac{1}{Z}\right)^2 - \left(Z + \frac{1}{Z}\right)(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}\right]$ avec $Z \neq 0$

$P(Z) = Z^4 - (1+\sqrt{2})Z^3 + (2+\sqrt{2})Z^2 - (1+\sqrt{2})Z + 1$

En mettant Z^2 en facteur, on a :

$P(Z) = Z^2\left[Z^2 - (1+\sqrt{2})Z + (2+\sqrt{2}) - \frac{1}{Z}(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{Z^2}\right] \Leftrightarrow$

$P(Z) = Z^2\left[Z^2 - Z - \sqrt{2}Z + 2 + \sqrt{2} - \frac{1}{Z} - \frac{\sqrt{2}}{Z} + \frac{1}{Z^2}\right] \Leftrightarrow$

P(Z) = $Z^2\left[\left(Z^2+\ 2+\ \frac{1}{Z^2}\ \right)+\ \left(-Z-\frac{1}{Z}\right)\ +\ \left(-\sqrt{2}\text{Z}-\frac{\sqrt{2}}{Z}\right)+\sqrt{2}\,\right]$ ⇔

P(Z) = $Z^2\left[\left(Z^2+\ 2+\ \frac{1}{Z^2}\ \right)-\left(Z+\frac{1}{Z}\right)-\sqrt{2}\left(\text{Z}+\frac{1}{Z}\right)+\sqrt{2}\,\right]$ ⇔

P(Z) = $Z^2\left[\left(Z+\ \frac{1}{Z}\right)^2-\left(Z+\ \frac{1}{Z}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)+\ \sqrt{2}\,\right]$ ⇔

2) En utilisant la question précédente, résolvons l'équation P(Z) = 0.

P(Z) = 0 ⇔ $Z^2\left[\left(Z+\ \frac{1}{Z}\right)^2-\left(Z+\ \frac{1}{Z}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)+\ \sqrt{2}\,\right]$ ⇔ $Z^2\neq 0$ ou

$\left(Z+\ \frac{1}{Z}\right)^2-\left(Z+\ \frac{1}{Z}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)+\ \sqrt{2}\ =0$

Effectuons un changement de variable en posant X = $+\ \frac{1}{Z}$, alors l'équation dévient :

$\text{X}^2-X\left(1+\sqrt{2}\right)+\ \sqrt{2}\ =0$ => $\Delta=\left[-\left(1+\sqrt{2}\right)\right]^2-4(1)\left(\sqrt{2}\right)=1-2\sqrt{2}\ +\ 2$ =>
$\Delta=\left(1-\sqrt{2}\right)^2$. Ainsi on a :

$$X_1=\frac{-\left[-\left(1+\sqrt{2}\right)\right]-\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}}{2(1)}\ =\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)-\ \left(1-\ \sqrt{2}\right)}{2}=\frac{1+\sqrt{2}-\ 1+\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$X_1=\frac{-\left[-\left(1+\sqrt{2}\right)\right]+\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}}{2(1)}=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)}{2}=\frac{1+\sqrt{2}+\ 1-\ \sqrt{2}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

- Si X = $\sqrt{2}$ ⇔ $Z+\ \frac{1}{Z}=\sqrt{2}$ ⇔ $Z^2-\sqrt{2}Z+1\ =\ 0$ => $\Delta=\left(-\sqrt{2}\right)^2-4(1)(1)\ =\ 2-4$ $=-2$ => $\Delta=2i^2$

Alors $Z_1=\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $Z_2=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

- Si X = 1 ⇔ $Z+\ \frac{1}{Z}=1$ ⇔ $Z^2-Z+1\ =\ 0$ => $\Delta=(-1)^2-4(1)(1)\ =1-4=-3$ => $\Delta=3i^2$

Alors $Z_3=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $Z_4=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

D'où **S** = $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}-\ i\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\frac{\sqrt{2}}{2}+\ i\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ ;\ \frac{1}{2}-\ i\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ ;\ \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ \right\}$

20 On considère dans $\mathbb{C}$ le complexe u tel que : $u = -1 - 2i\sqrt{2}$

1) Calculons les racines carrées de u

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = -2\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 & (1) \\ xy = -\sqrt{2} & (2) \\ x^2 + y^2 = 3 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

On a : $2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \quad ou \quad x = 1$

(2) : $xy = -\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{-\sqrt{2}}{x}$

- Si $x = -1 \Rightarrow y = \frac{-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2}$ et $\delta_1 = x + iy \Rightarrow \delta_1 = -1 + i\sqrt{2}$
- Si $x' = 1 \Rightarrow y' = \frac{-\sqrt{2}}{1} = -\sqrt{2}$ et $\delta_2 = x' + iy' \Rightarrow \delta_2 = 1 - i\sqrt{2}$

Alors les racines carrées de Z $sont$: $\delta_1 = -1 + i\sqrt{2}$ et $\delta_2 = 1 - i\sqrt{2}$

2) Résolution dans $\mathbb{C}$ l'équation $2Z^2 + 2iZ + i\sqrt{2} = 0$

On a = $\Delta' = (i)^2 - (2)(i\sqrt{2}) = -1 - 2i\sqrt{2} = (1 - i\sqrt{2})^2$

D'où :

$$Z_1 = \frac{-b + \delta 1}{2a} = \frac{1 - i\,(1 + 2\sqrt{2})}{2} = \frac{1}{2} - i\,\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}$$

$$Z_2 = \frac{-b + \delta 2}{2a} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{1 - 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{2} - i\,\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} \; ; \; -\frac{1}{2} - i\,\frac{1 - 2\sqrt{2}}{2}\right\}$$

3) Montrons que : $\left|\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right| = \sqrt{2}$

$$\left|\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right| = \left|\frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 \times Z_2}\right| = \left|\frac{-\frac{i}{i\sqrt{2}}}{2}\right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Figures géométriques dans le plan.

21 Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs : $-1 - i$; $2 + 3i$; $-10 - 13i$.
Démontrons que ces trois points sont alignés. (on fera une figure).

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs $-1 - i$; $2 + 3i$; $-10 - 13i$.

$Z_A = -1 - i =>$ $A(-1\,;\,-1)$

$Z_B = 2 + 3i =>$ $B(\,2\,;\,3\,)$

$Z_C = -10 - 13i => C(-10\,;\,-13\,)$

Démontrons que : A ; B ; C sont alignés :

A ; B ; C sont alignés si $det(\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\,) = 0$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} => \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} => \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -9 \\ -12 \end{pmatrix}$

$det(\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\,) = \begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} = (3)(-12) - (4)(-9) = -36 + 36 = 0$

Puis que $det(\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\,) = 0$; alors les points A ; B ; C sont alignés.

22 Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs : $3 + i$; $2i$; $2 - 2i$.

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs : $3 + i$; $2i$; $2 - 2i$.

$Z_A = 3 + i => A(\,3\,;\,1\,)$

$Z_B = 2i =>$ $B(\,0\,;\,2\,)$

$Z_C = 2 - 2i => C(\,2\,;\,-2\,)$

1) Démontrons que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. (on fera une figure).

A ; B ; C est un triangle rectangle et isocèle en A si : $\begin{cases} arg\left(\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = -\dfrac{\pi}{2}\ ou\ \dfrac{\pi}{2} \\ \qquad et \\ AB = AC \end{cases}$

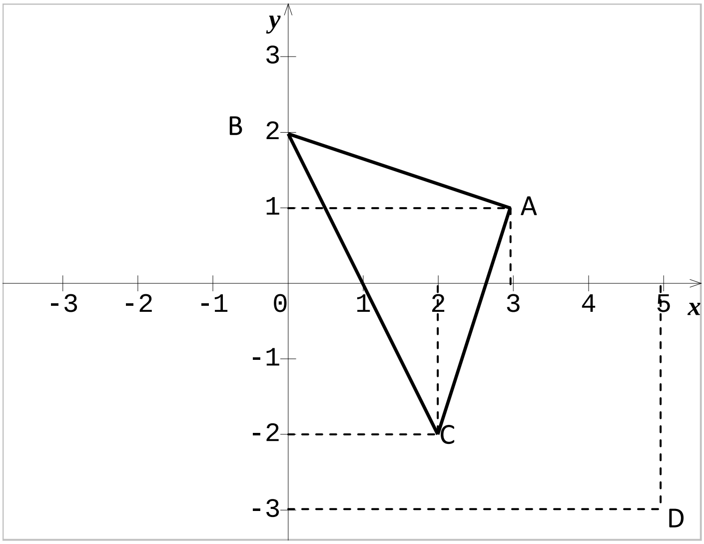
Or $\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \dfrac{(2 - 2\mathrm{i}) - (3 + \mathrm{i})}{(2\mathrm{i}) - (3 + \mathrm{i})} = \dfrac{-1 - 3i}{-3 + i} = \dfrac{(-1 - 3\mathrm{i})(-3 - \mathrm{i})}{(-3)^2 + (1)^2} = \dfrac{10i}{10} = i$

et $arg\left(\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0 - 3)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{10}$

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2 - 3)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{10}$

Conclusion : Puisque : $\begin{cases} arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \\ et \\ AB = AC = \sqrt{10} \end{cases}$



2) Déterminons l'affixe de D tel que ABCD soit un parallélogramme. (on Placea le point D).

ABCD soit un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\Leftrightarrow Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$; où Z_D est l'affixe du point D.

$Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$ => $Z_D = Z_C - Z_B + Z_A$ => $Z_D = (2 - 2i) - (2i) + (3 + i)$

=> $Z_D = 2 - 2i - 2i + 3 + i = 5 - 3i.$

D'où l'affixe du point D est tel que $Z_D = 5 - 3i.$

Autre méthode :

ABCD soit un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Or $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x \\ -2-y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} <=> \begin{pmatrix} 2-x \\ -2-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} <=> \begin{cases} 2 - x = -3 \\ -2 - y = 1 \end{cases} => \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$

D'où D$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et par conséquent l'affixe du point D est tel que $Z_D = 5 - 3i.$

23 Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectifs : $-1+i$; $-1-i$; $2i$; $2-2i$.

$Z_A = -1+i$ => $A(-1\,;1)$

$Z_B = -1-i$ => $B(-1\,;-1)$

$Z_C = 2i$ => $C(0\,;2)$

$Z_D = -2-2i$ => $D(2\,;-2)$

1) Etudions la nature des triangles ABC et BCD.

Pour le triangle ABC

$$\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A} = \frac{(2i)-(-1+i)}{(-1-i)-(-1+i)} = \frac{1+i}{-2i} = \frac{(1+i)(2i)}{(0)^2+(-2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A} = \frac{-2+2i}{4} = \frac{-1}{2}+\frac{1}{2}i$$

Et $arg\left(\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right) = \arg\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{3\pi}{4}$

$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(-1+3)^2+(-1-1)^2} = 2\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2} = \sqrt{(0+1)^2+(2-1)^2} = \sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2} = \sqrt{(0+1)^2+(2+1)^2} = \sqrt{10}$

Alors le triangle ABC est quelconque.

Pour le triangle BCD

$$\frac{Z_D-Z_B}{Z_C-Z_B} = \frac{(2-2i)-(-1-i)}{(2i)-(-1-i)} = \frac{3-i}{1+3i} = \frac{(3-i)(1-3i)}{(1)^2+(3)^2} = \frac{-10i}{10} = -i$$

Et $\arg\left(\frac{Z_D-Z_B}{Z_C-Z_B}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$

$BC = \sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2} = \sqrt{(0+1)^2+(2+1)^2} = \sqrt{10}$

$CD = \sqrt{(x_D-x_C)^2+(y_D-y_C)^2} = \sqrt{(2-0)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{20} = 5\sqrt{2}$

$BD = \sqrt{(x_D-x_B)^2+(y_D-y_B)^2} = \sqrt{(2+1)^2+(-2+1)^2} = \sqrt{10}$

Alors le triangle BCD est rectangle et isocèle en B.

2) Démontrons que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on Déterminera le centre et le rayon.

Soit Ω(x ; y) les coordonnées du centre de ce cercle.

les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle si :

d(A ; Ω) = d(B ; Ω) = d(C ; Ω) = d(D ; Ω) = r

d(A ; Ω) = d(B ; Ω)$\Leftrightarrow\sqrt{(x_\Omega - x_A)^2 + (y_\Omega - y_A)^2} = \sqrt{(x_\Omega - x_B)^2 + (y_\Omega - y_B)^2}$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$

$\Leftrightarrow(x+\cancel{1})^2 + (y-1)^2 = (x+\cancel{1})^2 + (y+1)^2$

$\Leftrightarrow(y-1)^2 = (y+1)^2$

$\Leftrightarrow -2y = 2y \quad => \quad y = 0$

d(C ; Ω) = d(D ; Ω) $\Leftrightarrow\sqrt{(x_\Omega - x_C)^2 + (y_\Omega - y_C)^2} = \sqrt{(x_\Omega - x_D)^2 + (y_\Omega - y_D)^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2}$

$\Leftrightarrow(x-0)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2$

En remplaçant $y = 0$ par sa valeur dans l'équation ci-dessus, on a :

$-4x + 4 = 0 \quad => x = 1$

D'où $\Omega\binom{1}{0}$

Or le rayon r est tel que r = d(A ; Ω) = d(B ; Ω) = d(C ; Ω) = d(D ; Ω)

$=>$ r = $\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(1+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5}$

D'où les points A, B, C,D appartiennent à un même cercle de centre $\Omega\binom{1}{0}$ et de rayon r = $\sqrt{5}$

24 On considère un repère orthonormé directe (O ; $\vec{U}$; $\vec{V}$)du plan complexe. Soit les points A ; B ; C d'affixes respectives :

$$Z_A = -1 + i \quad ; \quad Z_B = \frac{2\left[Cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + iSin\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right]}{Cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - iSin\left(\frac{\pi}{5}\right)} \quad \text{et} \quad Z_C = 2 - 2i$$

1) Ecrivons les complexe Z_A ; Z_B et Z_C sous forme exponentielle.

$Z_A = -1 + i \Rightarrow |Z_A| = \sqrt{2}$ et $\arg(Z_A) = \frac{3\pi}{4}$ $\Rightarrow Z_A = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}i}$

$$Z_B = \frac{2\left[Cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + iSin\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right]}{Cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - iSin\left(\frac{\pi}{5}\right)} \Rightarrow Z_B = \frac{2e^{\frac{7\pi}{15}i}}{e^{-\frac{\pi}{5}i}} = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} \Rightarrow Z_B = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$Z_C = 2 - 2i \Rightarrow |Z_C| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(Z_C) = -\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow Z_C = 2\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i}$

2) Déterminons l'affixe Z_D du point D tel que le triangle OBD soit équilatéral direct, c'est-à-dire la mesure de l'angle ($\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OD}$) = $\frac{\pi}{3}$.

OBD est équilatéral direct si et seulement si : $\frac{Z_D - Z_O}{Z_B - Z_O} = e^{\frac{\pi}{3}i} \Leftrightarrow \frac{Z_D}{Z_B} = e^{\frac{\pi}{3}i}$ (car l'affixe de l'origine $Z_O = 0$). Alors $Z_D = Z_B e^{\frac{\pi}{3}i} = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} \times e^{\frac{\pi}{3}i} = 2e^{\pi i} = 2(-1) = -2 \Rightarrow Z_D = -2$

25

Le plan est rapporté au repère orthonormé directe (O ; $\vec{U}$; $\vec{V}$).
On considère :

- Le point A d'affixe $Z_A = 5 - i\sqrt{3}$.
- Le point B d'affixe Z_B est tel que OAB soit un triangle équilatéral direct c'est-à-dire la mesure de l'angle ($\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$) = $\frac{\pi}{3}$.
- Le point Q d'affixe Z_Q est tel que le point Q soit milieu du segment $[OB]$.
- Le point K d'affixe Z_K est tel que ABQK soit un parallélogramme.

1) Déterminons les affixes Z_B ; Z_Q $et\ Z_K$ respectivement des points B ; Q et K.

- OAB est équilatéral direct si et seulement si : $\frac{Z_B - Z_O}{Z_A - Z_O} = e^{\frac{\pi}{3}i} \Leftrightarrow \frac{Z_B}{Z_A} = e^{\frac{\pi}{3}i}$

(car l'affixe de l'origine $Z_O = 0$). Alors $Z_B = Z_A e^{\frac{\pi}{3}i} = (5 - i\sqrt{3}) \times \left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$

$Z_B = (5 - i\sqrt{3}) \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow Z_B = 4 + 2i\sqrt{3}$ et $B\binom{4}{2\sqrt{3}}$

- Q est milieu du segment $[OB]$ si et seulement si :

$x_Q = \frac{x_O + x_B}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2$ et $y_Q = \frac{y_O + y_B}{2} = \frac{0 + 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ $\Rightarrow Z_Q = 2 + i\sqrt{3}$ et $Q\binom{2}{\sqrt{3}}$

- $ABQK$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KQ} \Leftrightarrow \binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \binom{x_Q - x_K}{y_Q - y_K} \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} 4-5 \\ 2\sqrt{3}+\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x_K \\ \sqrt{3}-y_K \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x_K \\ \sqrt{3}-y_K \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x_K = -1 \\ \sqrt{3} - y_K = 3\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_K = 3 \\ y_K = -2\sqrt{3} \end{cases}$

$\Rightarrow Z_K = 3 - 2i\sqrt{3}$ et $K\begin{pmatrix} 3 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

2) Démontrons que $\frac{Z_K - Z_A}{Z_K}$ est un imaginaire pur et en déduisons la nature du triangle OKA.

$\frac{Z_K - Z_A}{Z_K} = \frac{(3-2i\sqrt{3})-(5-i\sqrt{3})}{(3-2i\sqrt{3})} = \frac{3-2i\sqrt{3} - 5 + i\sqrt{3}}{3-2i\sqrt{3}} = \frac{-2-i\sqrt{3}}{3-2i\sqrt{3}} = \frac{(-2-i\sqrt{3})(3+2i\sqrt{3})}{(3)^2+(2\sqrt{3})^2}$

$\Rightarrow \frac{Z_K - Z_A}{Z_K} = \frac{-7\sqrt{3}}{21}i$

D'où $\frac{Z_K - Z_A}{Z_K}$ est un imaginaire pur. D'où le triangle OKA est rectangle en O.

3) Soit C la point d'affixe Z_C tel que $Z_C = \frac{2Z_A}{3}$

a- Calculons $\frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C}$. Puis en déduisons une relation entre les points B ; C et K

$Z_C = \frac{2Z_A}{3} = \frac{2}{3}Z_A = \frac{2}{3}(5 - i\sqrt{3}) = \frac{10}{3} - i\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C} = \frac{(3-2i\sqrt{3})-(4+2i\sqrt{3})}{(3-2i\sqrt{3})-\left(\frac{10}{3}-i\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{3-2i\sqrt{3} - 4-2i\sqrt{3}}{3-2i\sqrt{3}-\frac{10}{3}+i\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{-1-4i\sqrt{3}}{-\frac{1}{3}-\frac{4i\sqrt{3}}{3}} = \frac{-(1+4i\sqrt{3})}{\frac{-(1+4i\sqrt{3})}{3}}$

$\Rightarrow \frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ alors $\frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C}$ est un réel. D'où les points B ; C et K sont alignés.

26 On considère l'ensemble des complexes Z_n tels que : $\forall\, n \in \mathbb{C}$ on a :

$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \frac{1+i}{2}Z_n \end{cases}$

1) On note M_n le point d'affixe Z_n dans le plan rapporté au repère $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$

Calculons Z_1 ; Z_2; Z_3 et Z_4.

$Z_1 = \frac{1+i}{2}Z_0 \Rightarrow Z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; $Z_2 = \frac{1+i}{2}Z_1 \Rightarrow Z_2 = \frac{1}{2}i$

$Z_3 = \frac{1+i}{2}Z_2 \Rightarrow Z_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$; $Z_4 = \frac{1+i}{2}Z_3 \Rightarrow Z_4 = -\frac{1}{4}$

2) Calcule le quotient : $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}}$ puis en déduis la nature du triangle $OM_{n+1}M_n$

On sait que $Z_{n+1} = \frac{1+i}{2} Z_n$ => $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}} = \frac{\left(\frac{1+i}{2} Z_n\right) - Z_n}{\frac{1+i}{2} Z_n}$ (car $Z_{n+1} = \frac{1+i}{2} Z_n$)

=> $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}} = \frac{Z_n\left(\frac{1+i}{2} - 1\right)}{Z_n\left(\frac{1+i}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{1+i}{2} - 1\right)}{\left(\frac{1+i}{2}\right)} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{(1)^2 + (1)^2} = \frac{-1+i+i+1}{2}$

$= \frac{2i}{2} = i$ => $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}}$ est un imaginaire pur. Alors $OM_{n+1}M_n$ est un triangle rectangle en O.

Transformations géométriques du plan.

27 Soit (S) l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe Z associe Z' d'affixe M' tel que

$Z' = (1 + i)Z + 1 - i$. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de (S).

- Rapport : $k = |1 + i| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$
- Angle : $\theta = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$
- Centre : $\omega = \frac{b}{1 - a}$ avec $a = 1 + i$ et $b = 1 - i$ => $\omega = \frac{1-i}{1 - (1+i)}$ =>

$\omega = \frac{1-i}{1 - 1 - i} = \frac{1-i}{-i} = \frac{(1-i)(i)}{1} = 1 + i$ alors le centre a pour coordonnées $\Omega\binom{1}{1}$

28 Soit la similitude directe plane S de centre $A(1\,;\,1)$; de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ par la similitude S ; le point M d'affixe Z a pour transformer le point M' d'affixe Z'.

Exprimons Z' en fonction de Z.

On a : le centre $A(1\,;\,1)$; rapport $k = \sqrt{2}$ et l'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$

L'expression de Z' en fonction de Zest donné par la formule suivante : $Z' = aZ + b$
Cherchons ainsi les complexes a et b.

$a = |a|(\cos\theta + i\sin\theta) \Leftrightarrow a = k(\cos\theta + i\sin\theta)$ => $a = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ => $a = 1 + i$

On sait que le centre A(1 ; 1) à pour affixe $\frac{b}{1-a} \Leftrightarrow 1 + i = \frac{b}{1-a}$ or $a = 1 + i \Leftrightarrow$

$1 + i = \frac{b}{1 - (1+i)} \Leftrightarrow 1 + i = \frac{b}{1 - 1 - i} \Leftrightarrow 1 + i = \frac{b}{-i}$ => $b = 1 - i$

D'où $Z' = (1 + i)\,Z + 1 - i$

29 Soient A, B, C et D les points d'affixes $Z_A = -1 - i$; $Z_B = i$; $Z_C = 1 + 3i$; $Z_D = 5 + i$.

Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D.

1) Détermine le rapport k et l'angle θ de S

La traduction schématique d'une similitude directe S qui transforme A en C et B en D est :

S

A	C
B	D
[AB]	[CD]

- $k = \frac{[CD]}{[AB]} = \left|\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right| = \left|\frac{(5+i)-(1+3i)}{i-(-1-i)}\right| = \frac{|4-2i|}{|1+2i|} = \frac{\sqrt{16+4}}{\sqrt{1+4}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{4}} = \sqrt{4} = 2$

- θ = mes (AB ; CD) = $arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) = arg\left(\frac{4-2i}{i+2i}\right) = arg\,(-2i) = -\frac{\pi}{2}$

2) Déterminons l'écriture complexe f associée à S.
L'écriture complexe f associée à S est : $f(Z) = aZ + b$.

La traduction algébrique d'une similitude directe S qui transforme A en C et B en D est :

$$S(A) = C \quad \text{et} \quad S(B) = D \Leftrightarrow \begin{cases} aZ_A + b = Z_C & (1) \\ aZ_B + b = Z_D & (2) \end{cases}$$

(1) – (2) => $a(Z_A - Z_B) = Z_C - Z_D$ => $a = \frac{Z_C - Z_D}{Z_A - Z_B} = \frac{-4+2i}{-1-2i} = -2i$

Dans (2) on a: $aZ_B + b = Z_D$ => $b = Z_D - aZ_B$ => $b = (5 + i) - (-2i)(i)$

=> $b = 5 + i + 2i^2 = 5 + i - 2 = 3 + i$ => $b = 3 + i$

D'où l'écriture complexe f est $f(Z) = -2iZ + 3 + i$

3) Déterminons l'affixe du centre Ω de S.

Soit ω l'affixe du centre de Ω tel que : $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{3+i}{1-(-2i)} = \frac{(3+i)(1-2i)}{(1)^2+(2)^2} = 1 - i$.

30 Détermine la traduction complexe de la transformation (Γ) dans chacun des cas suivants :

1) La traduction complexe d'une translation est : $f(Z) = Z + q$.
f(A) = B $\Leftrightarrow f(-1 + i) = -2 + 3i \Leftrightarrow -1 + i$ + q = $-2 + 3i$ => q = $-1 + 2i$

D'où f(Z) = $Z - 1 + 2i$

2) La traduction complexe d'une homothétie est f(Z) = kZ + q.
$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1 + i) = -2 + 3i \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(-1 + i) + q = -2 + 3i$ => $q = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$

D'où f(Z) = $\frac{1}{2}Z - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$

3) La traduction complexe d'une rotation est $f(Z) = e^{i\theta}Z + q$.

$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1 + i) = -2 + i \Leftrightarrow e^{i\frac{3\pi}{4}}(-1 + i) + q = -2 + i$
=> $q = -2 + i\,(1 + \sqrt{2})$

D'où f(Z) = $Ze^{i\frac{3\pi}{4}} - 2 + i\left(1 + \sqrt{2}\right)$

31 Soit f la transformation définie par Z' = aZ + 3i
1) Soit f la transformation définie par Z' = aZ + 3i

Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de f si : a = 2 puis si $a = -i$

$\underline{Si\ a = 2}$

Z' = aZ + 3i $\Leftrightarrow$ f(Z) = 2Z + 3i

- Montrons que f admet un point invariant :
  f admet un point invariant si : $f(\omega) = \omega \Leftrightarrow 2\omega+3i = \omega \Leftrightarrow \omega = -3i$ => $\Omega(0\,;-3)$

- Ainsi déterminons la nature de f
  Pour cela, on exprime Z'$-\omega$ en fonction de Z$-\omega$ $\Leftrightarrow$

  Z' = 2Z + 3i **(1)**

  $\omega = 2\omega+3i$ **(2)**

  En effectuant **(1)** $-$ **(2)** ; on a : Z'$-\omega$ = 2(Z$-\omega$) ; sous la forme :

  Z' – ω = k(Z – ω) qui est l'écriture complexe d'une Homothétie

- Ces éléments caractéristiques sont :
- Centre : $\Omega(0\,;-3)$
- Rapport : k = 2

Si $\boldsymbol{a = -i}$

Z' = aZ + 3i⇔f(Z) = $-i$Z + 3i

- Montrons que f admet un point invariant :
  f admet un point invariant si : f(ω) = ω ⇔ $-i\omega + 3i = \omega$ ⇔ $\omega = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$
  => $\Omega\left(\frac{3}{2}\ ;\frac{3}{2}\right)$

- Ainsi déterminons la nature de f
  Pour cela, on exprime $Z'-\omega$ en fonction de $Z-\omega$ ⇔

  Z' = $-i$Z + 3i **(1)**

  ω = $-i\omega+3i$**(2)**

En effectuant (1) $-$ (2) ; on a : Z'$-$ ω = $-\ i$(Z$-$ ω) ; sous la forme

Z' – ω = $e^{i\alpha}$(Z – ω) qui est l'écriture complexe d'une Rotation

- Ces éléments caractéristiques sont :

- Centre : $\Omega\left(\frac{3}{2}\ ;\frac{3}{2}\right)$
- Angle = $arg\ (-\ i\ ) = -\frac{\pi}{2}$

2) Soient A(1) ; B(2+ i) ; A'(2i) ; B'(1 $+$ i)

Vérifions que AB = A'B'

Puis démontrons qu'il existe une unique rotation r telle que r(A) = A' et r(B) = B'

AB = A'B' $= \sqrt{2}$

r(A) = A' => A'$-$ ω = $e^{i\alpha}$(A$-$ ω) => $2i$ $-$ ω = $e^{i\alpha}$(1$-$ ω) (1)

r(B) = B' => B'$-$ ω = $e^{i\alpha}$(B$-$ ω) => $1 + i$ $-$ω = $e^{i\alpha}$(2+ i $-$ ω) (2)

(1) $-$ (2) donne : $e^{i\alpha} = -\ i$ => $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

On en déduit que $2i$ $-$ω = $-\ i$(1 – ω) => $\omega = \frac{3+i}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

On en déduit que $2i$ $-$ω = $-\ i$(1 – ω) => $\omega = \frac{3+i}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

32 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^3 - \left(4 + i\sqrt{3}\right)Z^2 + \left(3 + 4i\sqrt{3}\right)Z - 3i\sqrt{3} = 0$

1) Montrons que (E) admet deux solutions réelles que l'on notera α et β puis une solution imaginaire pure que l'on notera ω.

<u>Recherche des solutions réelles :</u>

Soient $\alpha = a_1$, et $\beta = a_2$ les solutions réelles de l'équation (E) telle que :

$a^3 - \left(4 + i\sqrt{3}\right)a^2 + \left(3 + 4i\sqrt{3}\right)a - 3i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$

$$(a^3 - 4a^2 + 3a) + i\left(-a^2\sqrt{3} + 4a\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 4a^2 + 3a = 0 \\ et \\ -a^2\sqrt{3} + 4a\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

En utilisant l'équation (2), on a : $-a^2\sqrt{3} + 4a\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow -a^2 + 4a - 3 = 0$

=> $a_1 = 1$ ou $a_2 = 3$

D'où les solutions réelles de l'équation (E) sont telles que : $\alpha = 1$ et $\beta = 3$

<u>Recherche de la solution imaginaire pure:</u>

Soient $\omega = ib$, la solution imaginaire pure de l'équation (E) telle que :

$(ib)^3 - \left(4 + i\sqrt{3}\right)(ib)^2 + \left(3 + 4i\sqrt{3}\right)(ib) - 3i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$

$$\left(4b^2 - 4b\sqrt{3}\right) + i\left(-b^3 + b^2\sqrt{3} + 3b - 3\sqrt{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2 - 4b\sqrt{3} = 0 \\ et \\ -b^3 + b^2\sqrt{3} + 3b - 3\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

En utilisant l'équation (1), on a : $4b^2 - 4b\sqrt{3} = 0 = 0 \Leftrightarrow b^2 - b\sqrt{3} = 0$

=> $b_1 = 0$ (à rejeté) ou $b_2 = \sqrt{3}$ (à retenir)

D'où la solution imaginaire pure de l'équation (E) est telle que : $\omega = ib = i\sqrt{3}$

2) Soit f, l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout nombre complexe Z, on a :

$f(Z) = aZ + b$.

a-Déterminons les réels a et b pour que $f(\omega) = \omega$ et $f(\alpha) = \beta$.

$$\begin{cases} f(\omega) = \omega \\ \text{et} \\ f(\alpha) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\omega + b = \omega \\ \\ a\alpha + b = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\omega + b = \omega \\ \\ -a\alpha - b = -\beta \end{cases}$$

$$=> a\omega - a\alpha = \omega - \beta$$

$$\Leftrightarrow a(\omega - \alpha) = \omega - \beta => a = \frac{\omega-\beta}{\omega-\alpha} => a = \frac{(i\sqrt{3})-(3\ )}{(i\sqrt{3})-(1)} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{(-3+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$=> a = \frac{6+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad => a = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi en remplaçant $a = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ par sa valeur dans l'équation (1), on a : $b = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

b-Calculons le module et un argument de a.

$$a = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} => |a| = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad arg(a) = \frac{\pi}{6}$$

c-Donnons la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.

$f(Z) = aZ + b$ avec $a = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C} - \{-1\,;1\}$ et $b = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$

Alors la transformation f est une similitude directe dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = \sqrt{3}$
- Angle : $\theta = arg(a) = \frac{\pi}{6}$
- Centre : Ω d'affixe $\frac{b}{1-a} = \frac{\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = i\sqrt{3} => \Omega\binom{0}{\sqrt{3}}$

33 Montrons que pour tout point M de P^*, le point M' est distinct de A.

Posons $M' = A => Z' = 2i \Leftrightarrow \frac{2iZ-5}{Z-2i} = 2i \Leftrightarrow 2iZ - 5 = 2iZ + 4 \Leftrightarrow -5 = 4$ impossible, donc $M' \neq A$

1) Démontrons que Test une bijection de P^* sur lui-même.

   Résolvons l'équation $Z' = b \Leftrightarrow \frac{2iZ-5}{Z-2i} = b \Leftrightarrow 2iZ - 5 = b(Z - 2i\ ) \Leftrightarrow Z(b - 2i = -5+2ib$

   $=> Z = \frac{2ib-5}{b-2i}$ si $b \neq 2i$.

   Puis que l'équation $Z' = b$ admet une unique solution Z donc Test une bijection de P^* sur lui-même.

   Déterminons sa réciproque T^{-1}.

$Z = \frac{2ib-5}{b-2i}$ => $T^{-1}: P^* \to P^*$

$$M(Z) \to M'(Z')/\ Z' = \frac{2iZ-5}{Z-2i}$$

2) a- Montrons qu'un point M de P^* est invariant par T si et seulement si son affixe vérifie la relation : $Z^2 - 4iZ + 5 = 0$.

M est invariant par T si et seulement si $Z' = Z \Leftrightarrow \frac{2iZ-5}{Z-2i} = Z \Leftrightarrow$
$2iZ - 5 = Z(Z-2i) \Leftrightarrow Z^2 - 4iZ + 5 = 0$. D'où la relation vérifiée.

b- Trouvons le réel α tel que : $Z^2 - 4iZ + 5 = (Z-2i)^2 + \alpha$.
$Z^2 - 4iZ + 5 = (Z-2i)^2 + \alpha. \Leftrightarrow Z^2 - 4iZ + 5 = Z^2 - 4iZ - 4 + \alpha \Leftrightarrow 5 = -4 + \alpha$ => $\alpha = 9$.
D'où $Z^2 - 4iZ + 5 = (Z-2i)^2 + 9$.

c- Montrons alors que T admet deux points invariants B et C.
T admet deux points invariants si $Z^2 - 4iZ + 5 = 0 \Leftrightarrow (Z-2i)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow$
$(Z - 2i - 3i)(Z - 2i + 3i) = 0 \Leftrightarrow (Z-5i)(Z+i) = 0$ => $Z = 5i$ ou $Z = -i$
D'où $B\binom{0}{5}$ et $B\binom{0}{-1}$

3) On appelle (D) la droite passant par O et dirigée par $\vec{v}$ et (D^*) la droite (D) privé de A.

Montrons que (D^*) est globalement invariante par T.
(D^*) passant par O et dirigée par $\vec{v}$ donc $(D^*) = (Oy) - \{A\}$. Or B et $C \in (Oy)$ => $(Oy) = (BC)$
Si B et C sont les points invariants alors $T(BC) = (BC) = (Oy) = (D)$ => $T(D^*) = (D^*)$.
Donc (D^*) est globalement invariante par T.

4) a- Montrons que pour tout $Z \neq 2i$, $|Z' - 2i| \times |Z - 2i| = 9$.

$Z' = \frac{2iZ-5}{Z-2i}$ (en ajoutant $-2i$ à tous les membres de l'égalité), on a : $Z' - 2i = \frac{2iZ-5}{Z-2i} - 2i$
=> $Z' - 2i = \frac{2iZ-5-2iZ-4}{Z-2i} \Leftrightarrow Z' - 2i = \frac{-9}{Z-2i} \Leftrightarrow |Z' - 2i| = \left|\frac{-9}{Z-2i}\right| \Leftrightarrow$
$|Z' - 2i| = \frac{9}{|Z-2i|} \Leftrightarrow |Z' - 2i| \times |Z - 2i| = 9$. Ce qu'il fallait Montre.

b- Soit (Γ)le cercle de centre A et de rayon 3. Montrons que (Γ) est globalement invariante par T.
On sait que $|Z' - 2i| \times |Z - 2i| = 9 \Leftrightarrow AM \times AM' = 9 \Leftrightarrow AM \times AM' = 3 \times 3$ => $AM' = 3$ et $AM = 3$.
Si $AM' = 3$ alors M' appartient au cercle de centre A et de rayon $r = 3$.
De même Si $AM = 3$ alors M appartient au cercle de centre A et de rayon $r = 3$.
Conclusion : $AM = AM' \Leftrightarrow M$ et M' appartiennent à un même cercle (T).
D'où (Γ) est globalement invariante par T c'est-à-dire $T(\Gamma) = (\Gamma)$.

34 On donne: $Z_A = -2+6i$; $Z_B = 1-3i$; $Z_C = 5+5i$ et $Z_D = 2+4i$

1) Soit S la similitude plane directe qui tout point M d'affixe Z, fait correspondre le M' d'affixe Z' tel que : $Z' = 3iZ + 13 - 9i$.
a- Donnons les éléments caractéristiques de S.

- Rapport : $k = |3i| = \sqrt{3^2} = 3$
- Angle : $\theta = arg(3i) = \frac{\pi}{2}$
- Centre : $\omega = \frac{b}{1-a}$ avec $a = 3i$ et $b = 13-9i$ => $\omega = \frac{13-9i}{1-3i} = \frac{(13-9i)(1+3i)}{10}$
$= 4+3i$

Alors le centre a pour coordonnées $\Omega\binom{4}{3}$

b- Déterminons l'image des points C et D par la similitude S

L'image C'de C est telle que $Z_{C'} = 3iZ_C + 13 - 9i = 3i(5+5i) + 13 - 9i = -2+6i = Z_A$.
Alors $S(C) = A$
L'image D' de D est telle que : $Z_{D'} = 3iZ_D + 13 - 9i = 3i(2+4i) + 13 - 9i = 1-3i = Z_B$. Alors $S(D) = B$

c-Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{S(C)S(D)}$ sont orthogonaux.

$1^{ière}$ méthode :

S est une similitude directe d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$. Alors les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{S(C)S(D)}$ sont orthogonaux.

$2^{ième}$ méthode :

$Z_A = -2+6i$ => $A\binom{-2}{6}$; $Z_B = 1-3i$ => $B\binom{1}{-3}$; $Z_C = 5+5i$ => $C\binom{5}{5}$ et $Z_D = 2+4i$ => $D\binom{2}{4}$

$\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{S(C)S(D)}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$
$\overrightarrow{CD}\binom{x_D - x_C}{y_D - y_C} = \binom{2-5}{4-5}$ => $\overrightarrow{CD}\binom{-3}{-1}$ et $\overrightarrow{S(C)S(D)} = \overrightarrow{AB}$ => $\overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \binom{1+2}{-3-6}$ => $\overrightarrow{AB}\binom{3}{-9}$

$\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} = \binom{-3}{-1} \bullet \binom{3}{-9} = (-3)(3) + (-1)(-9) = -9 + 9 = 0$

Alors les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{S(C)S(D)}$ sont orthogonaux.

2) Soit R la similitude plane directe qui transforme B et C et D en A.
a-Trouvons la relation liant l'affixe Z d'un point M et l'affixe Z' de son image $R(M)$.
La relation liant Z et Z' est : $Z' = aZ + b$.

$$S(B) = C \quad \text{et} \quad S(D) = A \Leftrightarrow \begin{cases} aZ_B + b = Z_C & (1) \\ aZ_D + b = Z_A & (2) \end{cases}$$

(1) – (2) => a(Z_B – Z_D) = Z_C – Z_A => $a = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_D} = \frac{7-i}{-1-7i} = i$

Dans (2) on a: $aZ_D + b = Z_A$ => $b = Z_A - aZ_D$ => $b = (-2 + 6i) - (i)(2 + 4i)$ => $b = 2 + 4i$

D'où l'écriture complexe f est $Z' = iZ + 2 + 4i$

b-Donnons les éléments caractéristiques de la similitude R (on appellera J le point invariant).

- Rapport : $k = |i| = 1$
- Angle : $\theta = arg(i) = \frac{\pi}{2}$
- Centre : $Z_J = \frac{b}{1-a}$ avec $a = i$ et $b = 2 + 4i$ => $Z_J = \frac{2+4i}{1-i} = \frac{(2+4i)(1+i)}{2} = -1 + 3i$

Alors $Z_J = -1 + 3i$

Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux.
R est une similitude directe d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$. Alors les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux.

c- D'après les quadrilatères $DBCA$ et $CDAB$, le point D représente l'orthocentre du triangle ABC

3) Montrons que J est un point de la droite (AB).
$Z_{\overrightarrow{AB}} = (1 - 3i) - (-2 + 6i) = 3 - 9i$
$Z_{\overrightarrow{AJ}} = (-1 + 3i) + (-2 + 6i) = 1 - 3i$
Alors $Z_{\overrightarrow{AB}} = 3Z_{\overrightarrow{AJ}}$. Donc J est un point de la droite (AB).

Donnons une mesure en radian de l'angle des vecteurs $(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$.
$mes(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA}) = arg\left(\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}\right) = arg\left(\frac{-3+9i}{4+8i}\right) = \frac{\pi}{4}$

35 Soit α un nombre complexe.

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1 + i)Z^2 - 2i(\alpha + 1)Z + (i - 1)(\alpha^2 + 1) = 0$.

$\Delta = [-2i(\alpha + 1)]^2 - 4(1 + i)(i - 1)(\alpha^2 + 1) = 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 = (2\alpha - 2)^2$
$Z_1 = \frac{2i(\alpha+1)-(2\alpha-2)}{2(1+i)} = \frac{-(\alpha-1)+(\alpha+1)i}{1+i} = \frac{[-(\alpha-1)+(\alpha+1)i](1-i)}{2} = \frac{2+2\alpha i}{2} = 1 + \alpha i$

$Z_2 = \frac{2i(\alpha+1)+(2\alpha-2)}{2(1+i)} = \frac{(\alpha-1)+(\alpha+1)i}{1+i} = \frac{[(\alpha-1)+(\alpha+1)i](1-i)}{2} = \frac{2\alpha+2i}{2} = \alpha + i$

S= $\{1 + \alpha i\ ;\ \alpha + i\}$

2) Soient Z_1 et Z_2 les solutions de cette équation.

Trouvons entre Z_1 et Z_2, une relation indépendante de α.
$Z_1 = 1 + \alpha i$ => $\alpha = \frac{Z_1 - 1}{i} = -i(Z_1 - 1)$
$Z_2 = \alpha + i$ => $Z_2 = -i(Z_1 - 1) + i = -iZ_1 + i + i = -iZ_1 + 2i \Leftrightarrow Z_2 + iZ_1 - 2i = 0$

3) Caractérisons la transformation f du plan complexe qui, à tout point M_1 d'affixe Z_1 associe le point M_2 d'affixe Z_2.

On sait que : $Z_2+iZ_1-2i=0 \Rightarrow Z_2=-iZ_1+2i$. Ici $a=-i$ et $b=2i$

- Angle : $\theta = arg(-i) = \frac{\pi}{2}$
- Centre Ω est telque: $Z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{2} = i(1-i) = 1+i$. D'où $\Omega\binom{1}{1}$

Alors f est une rotation de centre $\Omega\binom{1}{1}$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$

4) On pose $Z_1 = x+iy$ et $Z_2 = x'+iy'$.

a- Exprimons x' et y' en fonction de x et y.

On sait que : $Z_2 = -iZ_1 + 2i \Leftrightarrow x'+iy' = -i(x+iy)+2i \Leftrightarrow x'+iy' = -ix+y+2i \Leftrightarrow$ $x'+iy' = y+i(-x+2)$. Par identification, on a : $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x+2 \end{cases}$

b- Déterminons l'image par f de la droite (D) d'équation $x+2y-1=0$

On sait que : $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x' \\ x = -y'+2 \end{cases}$. Ainsi remplaçons x et y par leur valeurs dans l'équation de la droite (D): $x+2y-1=0$. D'où l'image (D')de la droite (D) est : (D'):
$-y'+2+2x'-1=0 \Leftrightarrow$
(D'): $-y'+2x'+1=0 \Leftrightarrow (D')$: $y'-2x'-1=0$

Problèmes.

36 Soit f l'application de $\mathbb{C}-\{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :$f(Z) = \frac{iZ}{Z+i}$. Dans le plan complexe rapporté au repère ortho normal direct$(o, \vec{u}, \vec{v})$, on note M le point d'affixe Z.

1) Déterminons les coordonnées du point B dont l'affixe Z_B et telle que $f(Z_B) = 1+2i$

$$f(Z_B) = 1+2i \Leftrightarrow \frac{iZ_B}{Z_B+i} = 1+2i \Leftrightarrow iZ_B = (1+2i)(Z_B+i) \Leftrightarrow iZ_B = Z_B + i + 2iZ_B - 2$$

$$iZ_B - Z_B - 2iZ_B = -2+i \Leftrightarrow Z_B(1+i) = 2-i \Rightarrow Z_B = \frac{2-i}{1+i}$$

$$\Rightarrow Z_B = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

D'où $B\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

2) Soit Z un élément de E. On note r le module de $Z+i$ et α une mesure de son argument.

Exprimons la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et α.

$$|f(z)-i| = \left|\frac{iZ}{Z+i} - i\right| = \left|\frac{iZ-iZ+1}{Z+i}\right| = \left|\frac{1}{Z+i}\right| = \frac{1}{|Z+i|} \text{ or } |Z+i| = r \Rightarrow |f(z)-i| = \frac{1}{r}$$

$arg\big(f(z) - i\big) = arg\left(\frac{iZ}{Z+i} - i\right) = arg\left(\frac{iZ - iZ + 1}{Z+i}\right) = arg\left(\frac{1}{Z+i}\right) = -arg(Z+i) = -\alpha$

D'où la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et α est :

$f(z) - i = \frac{1}{r}\,[cos(-\alpha) + \; isin(-\alpha)]$

3) Soit A le point d'affixe $-\,i$

a- Déterminons l'ensemble (Γ) des points M vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$

$|f(z) - i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{|Z+i|} = \sqrt{2} \;\Leftrightarrow |Z \; + \; i| = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\Leftrightarrow |Z \; + \; i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Posons $Z_A + i = 0 \Rightarrow Z_A = -i$

Alors l'ensemble (Γ) des points M cherchés est le cercle de centre $\Omega\binom{0}{-1}$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b- Montrons que B appartient à (Γ).

B appartient à (Γ) si et seulement si la distance du centre A à B vaut le rayon, c'est-à-dire $|Z_B - \; Z_A| = \sqrt{2}$

$|Z_B - \; Z_A| = \left|\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right) - \; (-i\,)\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i + i\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = r$

D'où B appartient à (Γ).

37

Partie A : Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

1) Résolvons dans ℂ, l'équation $Z^2 - (\,2 \; + \; 6i\,)Z - 16 \; + \; 12i \; = \; 0$

$\Delta = [-\,(\,2 \; + \; 6i\,)]^2 - 4(1)(-\,16 \; + \; 12i\,) = \; 32 \; - 24i$

$\begin{cases} x^2 - \; y^2 = 32 \\ 2xy = \; -24 \\ x^2 + \; y^2 = \sqrt{(32)^2 + (-24)^2} \end{cases} <=> \begin{cases} x^2 - \; y^2 = 32 & (\,1\,) \\ xy = \; -12 & (\,2\,) \\ x^2 + \; y^2 = 40 & (\,3\,) \end{cases}$

Effectuons : (1) + (3)

On a : $2x^2 \; = \; 72 => x^2 = 36 \; => x = \; -6 \;\; ou \;\; x = 6$

(2) : $xy = \; -12 \; => y = \frac{-12}{x}$

- Si $x = -6 \quad => y = \dfrac{-12}{-6} = 2$ et $\delta_1 = x + iy \quad => \delta_1 = -6 - 2i$
- Si $x' = 6 \quad => y' = \dfrac{-12}{6} = -2$ et $\delta_2 = x' + iy' \quad => \delta_2 = 6 - 2i$

Alors les racines carrées de Δ $sont$: $\delta_1 = -6 - 2i$ et $\delta_2 = 6 - 2i$

$Z_1 = \dfrac{(2 + 6i) + (-6 - 2i)}{2(1)} = -2 + 2i$ et $Z_2 = \dfrac{(2 + 6i) + (6 - 2i)}{2(1)} = 4 + 2i$

$=> S = \{-2 + 2i \; ; \; 4 + 2\}$

2) Soit P(Z) = $Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i$
a- Montrons que l'équation P(Z) = 0 admet une solution réelle notée Z_0 que l'on Déterminera.

Soit $Z_0 = a$ cette solution réelle telle que :

$Z_0^3 - (4 + 6i)Z_0^2 - (12 - 24i)Z_0 + 32 - 24i = 0$

$\Leftrightarrow (a)^3 - (4 + 6i)(a)^2 - (12 - 24i)(a) + 32 - 24i = 0$

$\Leftrightarrow a^3 - 4a^2 - 6ia^2 - 12a + 24ai + 32 - 24i = 0$

$\Leftrightarrow (a^3 - 4a^2 - 12a + 32) + i(-6a^2 + 24a - 24) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 4a^2 - 12a + 32 = 0 \; (1) \\ -6a^2 + 24a - 24 = 0 \quad (2) \end{cases}$

<u>NB :</u> On résous toujours l'équation qui semble la plus facile.

Ainsi résolvons l'équation (2) : $-6a^2 + 24a - 24 = 0 \Leftrightarrow -a^2 + 4a - 4 = 0$

$=> \Delta = 16 - 16 = 0 \; => a = 2$

D'où $Z_0 = a = 2$ est la solution réelle

b- Factorisons P(Z) puis résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation P(Z) = 0

P(Z) = $Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i$

Factorisons : $Z^3 - 4i\,Z^2 - (6 + i)\,Z + 3i - 1$

	1	$-4-6i$	$-12+24i$	$32-24i$
2		2	$-4-12i$	$-32+24i$
	1	$-2-6i$	$-16+12i$	0
$\boldsymbol{Z_0}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	

$= > Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i = (Z - Z_0)(aZ^2 + bZ + c)$

$\Leftrightarrow Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i = (Z - 2)\left[Z^2 - (2 + 6i) - 16 + 12i\right]$

D'où P(Z) = 0 $\Leftrightarrow (Z - 2)\left[Z^2 - (2 + 6i) - 16 + 12i\right]$

$\Leftrightarrow Z - 2 = 0$ ou $Z^2 - (2 + 6i) - 16 + 12i = 0$

$= >$ Z – 2 = 0 => $Z_0 = 2$ ou $Z^2 - (2 + 6i) - 16 + 12i = 0$

D'après la question 1), la résolution de l'équation $Z^2 - (2 + 6i) - 16 + 12i = 0$ donne pour

Solution $Z_1 = \dfrac{(2 + 6i) + (-6 - 2i)}{2(1)} = -2 + 2i$ et $Z_2 = \dfrac{(2 + 6i) + (6 - 2i)}{2(1)} = 4 + 2i$

Alors l'ensemble solution de l'équation P(Z) = 0 est $S = \{-2\ ;\ -2 + 2i\ ;\ 4 + 2i\}$

Partie B:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (o, i, j)

On donne les points A(2), B($4 + 2i$) et C($-2 + 4i$).

1) a- Calculons le rapport $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ puis en déduisons la nature du triangle ABC.

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{(-2 + 4i) - (2)}{(4 + 2i) - (2)} = \frac{-2 + 4i - 2}{4 + 2i - 2} = \frac{-4 + 4i}{2 + 2i} = \frac{-2 + 2i}{1 + i} = \frac{(-2 + 2i)(1 - i)}{2} = \frac{4i}{2} = 2i$$

=> $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ est un imaginaire pur. Alors le triangle ABC est rectangle en A.

b-Montrons que le point F d'affixe $2i$ est le milieu du segment $[AC]$

F est milieu du segment $[AC]$ si $x_F = 0$ et $y_F = 2$

$x_F = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{2 - 2}{2} = 0$ et $y_F = \dfrac{0 + 4}{2} = 2$

D'où le point F d'affixe $2i$ est le milieu du segment $[AC]$

c-Déterminons (Δ) l'ensemble des points du plan d'affixe Z vérifiant :

$|Z - 4 - 2i| = |Z + 2 - 4i|$

Posons : $\begin{cases} Z_D - 4 - 2i = 0 \\ \text{et} \\ Z_E + 2 - 4i = 0 \end{cases}$ => $\begin{cases} Z_D = 4 + 2i \\ \text{et} \\ Z_E = -2 + 4i \end{cases}$ => $\begin{cases} D\binom{4}{2} \\ \quad \text{et} \\ E\binom{-2}{4} \end{cases}$

Alors L'ensemble (Δ) des points M cherché est la médiatrice du segment $[DE]$

2) Soit S la similitude du plan telle que $S(A) = A$ et $S(B) = C$.

a- Déterminons le rapport k et l'angle θ de la similitude S

La traduction schématique d'une similitude directe S qui transforme A en A et B en C est :

S

A	A
B	C
[AB]	[AC]

Rapport $k = \frac{[AC]}{[AB]} = \left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = \left|\frac{(-2+4i)-(2)}{(4+2i)-(2)}\right| = \frac{|-4+4i|}{|2+2i|} = \frac{\sqrt{16+16}}{\sqrt{4+4}} = \sqrt{2}$

- Angle $\theta = arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = arg\left(\frac{-4+4i}{2+2i}\right) = arg\,(2i) = \frac{\pi}{2}$

b- Détermine l'expression de la bijection complexe associée à la similitude S.

L'écriture complexe f associée à S est : $f(Z) = aZ + b$.

La traduction algébrique d'une similitude directe S qui transforme A en C et B en D est :

$S(A) = A$ et $S(B) = C \Leftrightarrow \begin{cases} aZ_A + b = Z_A & (1) \\ aZ_B + b = Z_C & (2) \end{cases}$ on a : (1) – (2) => $a(Z_A - Z_B) = Z_A - Z_C$

=> $a = \frac{Z_A - Z_C}{Z_A - Z_B} = \frac{-4+4i}{2+2i} = 2i$. Dans (2) on a: $aZ_B + b = Z_C$ => $b = Z_C - aZ_B$

=> $b = (-2+4i) - (2i)(4+2i)$ => $b = 2 - 4i$. D'où $f(Z) = 2iZ + 2 - 4i$

c- En déduisons l'affixe du centre Ω de S.

Soit ω l'affixe du centre de Ω tel que : $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{2-4i}{1-(2i)} = \frac{10}{(1)^2+(2)^2} = \frac{10}{5} = 2$