

Suites numériques

OBJECTIFS :

Ce thème vise à :

- étudier le comportement global d'une suite numérique (majoration, minoration, convergence, variations) ;
- mettre en œuvre le raisonnement par récurrence ;
- Donner des outils pour traiter des problèmes d'approximation.

Commentaires

Les suites bornées et suites monotones sont nouvelles en Terminale.

En Première, la notion de limite de fonction a été introduite de façon intuitive. De même, ici on pourra s'appuyer sur l'utilisation de la calculatrice et des graphiques pour introduire la notion de convergence d'une suite. On peut faire comprendre à l'élève :

- que pour certaines suites, tous les termes à partir d'un certain rang, sont aussi proches que l'on veut d'un nombre réel a ;
- que pour d'autres suites, les termes à partir d'un certain rang, prennent des valeurs aussi grandes que l'on veut ;
- qu'il existe des suites qui ont des comportements irréguliers.

On apprendra à l'élève à mettre en œuvre un raisonnement par récurrence. Ce type de raisonnement sera suggéré dans l'énoncé des exercices et des évaluations, lorsque son utilisation est indispensable.

Les suites géométriques permettront d'établir la convergence de certaines suites en utilisant des majorations. Dans le cas notamment des suites définies par récurrence, on pourra majorer $|u_n - a|$, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis ; toute étude de ce type de suites devra comporter des indications sur la méthode à suivre.

L'étude des suites sera étroitement liée à celle des fonctions. Ainsi, pour Donner des approximations des valeurs attachées à des fonctions, on utilisera des suites (méthode du point fixe). Le calcul différentiel ou les propriétés asymptotiques de certaines fonctions permettront de conclure sur le comportement des suites.

Le calcul d'une valeur approchée d'une intégrale sera aussi un moyen de mettre en œuvre des suites.

Volume horaire : 16 heures

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"> • Suites monotones • Suites majorées, minorées, bornées • Suites convergentes : <ul style="list-style-type: none"> - Notion de convergence. - Unicité de la limite (admise) - Toute suite croissante et majorée converge - Toute suite décroissante et minorée converge. 	<ul style="list-style-type: none"> • Démonstre qu'une suite est monotone : <ul style="list-style-type: none"> - Par comparaison de deux termes généraux consécutifs ; - Par l'étude des variations d'une fonction ; - Par un raisonnement par récurrence. • Démonstre qu'une suite est majorée et/ou minorée : <ul style="list-style-type: none"> - Par un calcul direct ;

<ul style="list-style-type: none"> - Si f est une fonction numérique telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = l$ alors la suite définie par $u_n = f(n)$ converge vers l. • si (u_n) est une suite convergeant vers a et f une fonction continue en a alors la suite $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(a)$. • Convergence des suites géométriques (suites du type (a^n)). • Suites divergentes • Convergence des suites géométriques et des suites du type n^α • Suites divergentes • Théorèmes de comparaison : Soient les suites (v_n) et (u_n) <ol style="list-style-type: none"> 1) Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n$ et si (v_n) tend vers $+\infty$, alors (u_n) tend vers $+\infty$. 2) Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n$ et si (u_n) tend vers $-\infty$, alors (v_n) tend vers $-\infty$. 3) Si à partir d'un certain rang, $v_n - l \leq u_n$ et si (u_n) tend vers 0, alors (v_n) tend vers l. 4) Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si (v_n) et (w_n) tend vers l, alors (u_n) tend vers l. 5) Si à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n$ et (u_n) tend vers l et (v_n) tend vers l' alors $l' \leq l$. • suites (a^n) et (n^α). Croissance comparée Limites et comportements asymptotiques comparés des suites $(\ln n)$; (a^n), $a > 0$ et (n^α), $\alpha > 0$. Suites récurrentes définies par une relation du type : $u_{n+1} = f(u_n)$. Soit (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers l et si f est continue en l alors $f(l) = l$. 	<ul style="list-style-type: none"> - Par l'étude des variations d'une fonction ; - Par un raisonnement par récurrence. • Démontre qu'une suite est convergente ou divergente par : <ul style="list-style-type: none"> - L'étude du comportement d'une fonction ; - L'utilisation des opérations sur les limites ; - L'utilisation des théorèmes de comparaison. • conjecturer à partir d'une représentation graphique et comportement d'une suite récurrente.
---	---

Remarques et suggestions

Le programme de Première a pour objectif de permettre aux élèves de se familiariser avec le concept de suite numérique. Il n'en reste pas moins vrai que l'acquisition de ces notions reste à consolider en terminale, en particulier, les notions de suites arithmétiques et géométriques.

On doit d'abord considérer qu'en classe de terminale, il est utile, voir indispensable, de retravailler les notions de base.

On traitera sur des exemples guidés quelques méthodes de recherches de solution approchées d'une équation numérique (dichotomie, tangente, interpolation linéaire...) et de calcul approché d'une intégrale.

Dans le cas de l'approximation d'un point fixe a de f , on soulignera l'intérêt (théorique et numérique) d'une inégalité de type $|f(x) - a| \leq k|x - a|$, où $0 < k < 1$.

Pour la recherche de la convergence d'une suite numérique, on veillera à choisir des exemples ne posant pas de difficultés majeures et à apporter dans les énoncés toutes les indications utiles à cette étude. On insistera également sur les méthodes d'étude de convergence (étude du comportement d'une fonction, opérations sur les limites, théorèmes de comparaison).

I- Généralité :

1) Définition :

On appelle suite numérique toute fonction définie de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. On note

$$U : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow u(n) = u_n$$

2) Mode de définition d'une suite :

-Une suite peut être définie par une formule explicite c'est-à-dire u_n en fonction de n :

$$u_n = f(n).$$

Exemple : $u_n = n + 3$; $v_n = \frac{2n-4}{n+1}$; $w_n = 4n^2 - 3n + 1$

-Une suite peut être définie par son 1^{er} terme et une formule de récurrence, c'est-à-dire u_{n+1} s'exprime en fonction de u_n .

Exemple : Soit la suite :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 4 \end{cases}$$

3) Sens de variation d'une suite

- Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est croissante
- Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est décroissante
- Si $u_{n+1} - u_n = 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est constante

4) Représentation des termes d'une suite :

Pour représenter les termes d'une suite u_n sur l'axe des abscisses, on trace la 1^{ère} bissectrice (D) d'équation $y = x$. Ainsi on trace la fonction associée à la suite u_n en posant $u_n = x$ et $u_{n+1} = f(x)$. On détermine les termes de la suite sur l'axe des abscisses par projection.

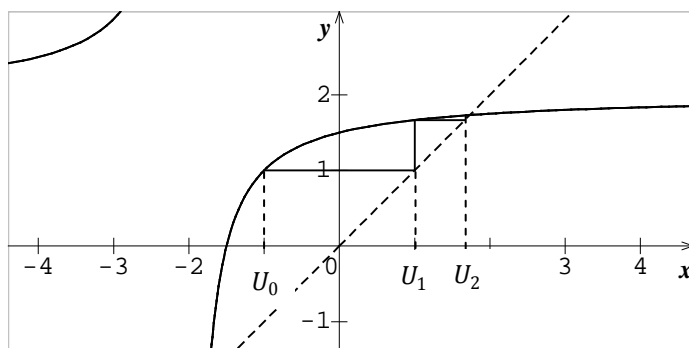
Exemple : Soit (u_n) définie Par :
$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{3+2U_n}{2+U_n} \end{cases}$$

Représenter sur l'axe (ox) les 3 premiers termes de la suite u_n .

Solution

Désignons par f la fonction définie sur $] -2 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3+2x}{2+x}$

En suivant les règles de construction ci-dessus, on a la représentation suivante :



II- Convergence d'une suite

Définitions :

- Une suite u_n est dite **convergente** si et seulement si son terme général u_n admet une limite finie.

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}$. Alors u_n est dite convergente.

- Une suite u_n est dite **divergente** si et seulement si son terme général u_n admet une limite infinie.

On note : $\lim_{n \rightarrow -\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Alors u_n est dite divergente.

III- Suite majorée – minorée – bornée :

1) Définitions :

- Une suite u_n est majorée si et seulement $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq a$.
- Une suite u_n est minorée si et seulement $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq a$.
- Une suite u_n est bornée si et seulement $\forall a \in \mathbb{R} ; b \in \mathbb{R}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$b \leq u_n \leq a$$

2) Théorèmes :

a) Théorème 1 :

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

b) Théorème 2 :

Tout sous-ensemble non vide E de nombres réels a une borne supérieure A, c'est-à-dire :
 $\forall x \in E ; x \leq A$

3) Propriétés :

Soient u_n et v_n deux suites telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$$

On a les propriétés suivantes :

P₁ : Si $u_n \leq v_n$: alors $l \leq l'$

P₂ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = l + l'$

P₃ : Si (u_n) est bornée et si (v_n) est divergente, alors :

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \infty \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = \infty$$

IV- Relations entre les limites :

Théorème : (Théorème des gendarmes).

Considérons les trois suites u_n ; v_n et w_n ($n > n_0$)

Tel que : $u_n \leq v_n \leq w_n$

u_n et w_n Si converge vers la même limite l ; alors v_n converge vers l .

Preuve :

A partir de la relation donnée entre les suites on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$$

V- Suites Adjacentes :

Définition :

Une suite (u_n) est adjacente à une autre suite (v_n) si l'une des deux suites est décroissante tandis que l'autre est croissante et si : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Théorème 1 :

Si les suites u_n et v_n sont adjacentes (u_n croissante et v_n décroissante) alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ on a : } u_n \leq v_n .$$

Preuve :

Supposons que le contraire de la conclusion du théorème soit vrai pour $n = k$, c'est-à-dire :

$$u_k \geq v_k .$$

Pour $n > k$, puisque u_n est décroissante et que v_n est décroissante, on a :

$$u_n \geq u_k \geq v_k \geq v_n$$

$$(u_n - v_n) \geq (u_k - v_k)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) \neq 0$$

Théorème 2 : si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent toutes deux vers une même limite.

Preuve :

Puis que les suites sont adjacentes et que u_n est croissante et v_n décroissante, le **théorème 1** implique : $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$

On note alors que :

- a) u_n est croissante et elle est majorée par v_0 , donc elle converge vers l .
- b) v_n est décroissante et elle est minorée par u_0 donc elle converge vers l' .

Ainsi

$$\lim (u_n - v_n) = l - l' \Rightarrow 0 = l - l' \Leftrightarrow l = l'$$

$$x \rightarrow +\infty$$

Ce qu'il fallait Prouve.

VI- Suite Arithmétique**1) Définition :**

Une suite u_n est dite arithmétique si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - u_n = r$.

Où r est appelée la raison de la suite u_n .

2) Expression du terme général :

D'une façon générale si u_p est le premier terme, l'expression du terme générale d'une suite arithmétique est : $u_n = u_p + (n - p)r$

3) Termes équidistants d'une suite :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite arithmétique p un entier naturel tel que $p \leq n$ les termes u_p et u_{n-p} sont des termes équidistants des termes extrêmes u_0 et u_n car il ya p termes avant le terme u_p et p termes après le terme u_{n-p}

4) Somme des termes équidistants d'une suite arithmétique

Soit p un entier naturel tel que $p \leq n$

Les termes u_p et u_{n-p} sont des termes équidistants des termes extrêmes

$$u_p + u_{n-p} = (u_0 + pr) + (u_0 + (n - p)r) = u_0 + (u_0 + nr) \text{ d'où } u_p + u_{n-p} = u_0 + u_n$$

Théorème :

La somme de deux termes équidistants d'une suite arithmétique est égale à la somme des termes extrêmes.

5) Propriétés :

En application du théorème on a :

P₁ : Trois nombres a ; b ; c forment une progression arithmétique si : $2b = a + c$.

Preuve : Soit a ; b et c trois réels

$$b = a + r$$

$$c = b + r$$

$$a + c = a + b + r = 2a + 2r = 2(a + r). \text{ Alors : } a + c = 2b$$

P₂: Trois nombres **a, b, c** forment une progression arithmétique de raison r si :
 $b = a + r$ et $c = a + 2r$.

P₃: Quatre nombres **a, b, c, d** forment une progression arithmétique de raison r si :
 $3b - d = 2d$

P₄: Soit u_n une suite arithmétique de 1^{er} terme u_0 . La somme de deux termes équidistants est toujours à la somme des extrêmes

$u_0, u_1, u_2 \dots u_{n-2}; u_{n-1}; u_n; u_1; u_{n-1}$ sont équidistants.

D'une manière générale, on a : $u_0 + u_n = u_p + u_{n-p}$

6) Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit u_n une suite arithmétique de raison r . On a : $u_{n+1} - u_n = r$ d'où :

- Si $r > 0$ alors u_n est croissante
- Si $r < 0$ alors u_n est décroissante
- Si $r = 0$ alors u_n est constante

7) Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique :

Soit u_n une suite arithmétique de 1^{er} terme u_p et de raison r .

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est :

$$S_n = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2} \quad \text{ou} \quad S_n = \frac{(n-p+1)[2u_p + (n-p)r]}{2}$$

VII- Suites géométriques

1) Définition :

U_n est une suite géométrique si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N};$ on a : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$ ou $U_{n+1} = qU_n$. Où q est un réel fixé appelé la raison de la suite géométrique.

2) Expression du terme générale

D'une façon générale si u_p est le 1^{er} terme et r sa raison, alors l'expression du terme générale d'une suite géométrique est : $u_n = u_p (q)^{n-p}$

3) Produit des termes équidistants des termes extrêmes d'une suite géométrique :

Théorème :

Le produit de deux termes équidistants des termes extrêmes est égal au produit des termes extrêmes c'est-à-dire : $u_0 \times u_{n-p} = u_0 \times u_n$.

4) Propriétés :

P₁: Trois nombres **a ; b ; c** forment une progression géométrique si : $b^2 = ac$.

P₂: Trois nombres a ; b ; c forment une progression géométrique de raison q si :
 $b = qa$ et $c = q^2a$.

P₃: Quatre nombres a ; b ; c et d forment une progression géométrique de raison q si :
 $b = qa$; $c = q^2a$ et $d = q^3a$

5) Sens de variation d'une suite géométrique :

Soit u_n suite géométrique de raison et de 1^{er} terme u_0 :

- 1^{er} cas $u_0 > 0$: si
 - $q > 1$ alors la suite u_n est croissante
 - $0 < q < 1$ alors la suite u_n est décroissante
 - $q = 1$ alors la suite u_n constante ou stationnaire
- 2^e Cas $u_0 < 0$: si
 - $q > 1$ alors la suite u_n est décroissante
 - $0 < q < 1$ alors la suite u_n est croissante
 - $q = 1$ alors la suite u_n est constante

6) Convergence d'une suite géométrique :

La limite d'une suite étant la limite de son terme général, une suite géométrique est convergente si $-1 < q \leq 1$ et est divergente si $q \in]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$

7) Somme des termes d'une suite géométrique :

D'une manière générale si u_p est le 1^{er} terme alors l'expression de la somme est :

$$S_n = \frac{u_p(1 - q^{n-p+1})}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

8) Cas d'une suite géométrique :

Soit u_n une suite géométrique de raison q

- Si $|q| < 1$ alors la suite u_n converge vers 0
- Si $|q| > 1$ alors la suite u_n est divergente
- Si $|q| = 1$ alors la suite u_n converge vers u_0

VIII- Notion sur les intérêts simples et intérêts composés :

Les intérêts :

L'intérêt est la rémunération d'un placement pendant une période donnée, (c'est-à-dire entre un temps T_1 et un temps T_2).

Ainsi les intérêts sont classés en deux catégories: (**intérêts simples et intérêts composés**).

NB :

- L'intérêt simple est utilisé pour des placements à court et moyen terme.
- L'intérêt composé est utilisé pour des placements à long terme.

a- Intérêts simples :

Un placement est fait à intérêt simple, lorsque, à des époques fixées d'avance celui qui prête ou place son argent en touche les intérêts de façon que le capital placé reste le même jusqu'à l'époque du remboursement.

Sa formule est : $I = \frac{c \cdot t \cdot n}{P} = \frac{(\text{Capital placé}) \cdot (\text{Taux d'intérêt}) \cdot (\text{Durée du placement})}{\text{Période}}$

NB :

- Si : n est en jours, alors la période $P = 36.000$.
- Si : n est en mois, alors la période $P = 1.200$.
- Si : n est en année, alors la période $P = 100$.

b- Intérêts composés :

Un placement est fait à intérêt composé, lorsque, à la fin de chaque unité de temps, l'intérêt est ajouté au capital pour produire un intérêt à son tour, pendant l'unité de temps suivante.

Sa formule est :

$$I_n = C_0[(1 + i)^n - 1] = (\text{Capital initial})[(1 + \text{taux d'intérêt})^{\text{Durée}} - 1]$$

NB :

- 1 an = 2 semestres = 4 trimestres = 12 mois.
- 1 semestre = 2 trimestres = 6 mois = $\frac{1}{2}$ an.
- 1 trimestre = $\frac{1}{2}$ semestre = 3 mois = $\frac{1}{4}$ an.
- 1 bi - an = 4 semestres = 8 trimestres = 24 mois = 2 ans.

c- Valeurs acquises :

$$C_n = C_0(1 + i)^n = (\text{Capital initial})(1 + \text{Taux d'intérêt})^{\text{Durée}}$$

NB : Le taux d'intérêt s'exprime toujours en pourcentage (%)

Exercices

Généralité sur les suites.

- 1** Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses:
- 1) Toute suite bornée est convergente.
 - 2) Toute suite décroissante à termes positifs converge vers 0.
 - 3) La somme de deux suites divergentes est toujours une suite divergente.
 - 4) Toute suite à termes positifs, convergente vers 0 est décroissante.
 - 5) Si une suite à termes positifs diverge, alors sa limite est $+\infty$.
- 2** Etudie la convergence des suites suivantes :
- a) $U_{n+1} = n - U_n$ et $U_0 = -5$; b) $U_n = \sqrt{n^2 + n} - n$; c) $U_n = \sin\left(n\pi - \frac{1}{n}\right)$

- 3** On considère les suites U_n et v_n définies par : $U_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 - \frac{1}{n^2}$
 Montre que les suites U_n et v_n sont adjacentes

- 4** Soit u_n la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$$

Trace la courbe représentation de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ puis en déduire une représentation graphique des 4 premiers termes de la suite u_n

Suites arithmétiques — Suites géométriques.

- 5** 1) Calcule dans chacun des cas suivants d'une suite arithmétique.
- a- La raison r et la somme S_n si : $U_1 = 397$; $U_n = 64$ et $n = 1000$
 - b- L'entier n et la raison r si : $U_1 = -4$; $U_n = 6$ et $S_n = 28$
 - c- Le premier terme U_1 et la somme S_n si : $U_n = 105$; $n = 17$ et $r = -2$

- 2) Calcule dans chacun des cas suivants d'une suite géométrique.
- a- L'expression U_n et la somme S_n si : $U_1 = 2$; $q = 3$ et $n = 5$
 - b- La raison q et la somme S_n si : $U_1 = 162$; $U_n = 32$ et $n = 5$

- 6** Soit u_n une suite géométrique décroissante tel que :
$$\begin{cases} u_0 \times u_3 = 32 \\ u_0 + u_3 = 18 \end{cases}$$
- 1) Calcule u_0 et u_3
 - 2) Détermine la raison de la suite u_n .
 - 3) Donne l'expression de la suite u_n en fonction de n .
 - 4) On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Calcule S_n en fonction de n puis en déduire la somme des 20 premiers termes de la suite u_n

- 7** Détermine une suite arithmétique u_n sachant que la somme de ces n premiers termes est égale à $3n^2 + 4n$ où $n \in \mathbb{N}$

8 Soit les suites u_n et v_n définie par : $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n} \end{cases}$ et $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$

- 1) Calcule v_{n+1} en fonction de u_n puis en fonction de v_n .
- 2) En déduire que v_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme v_1
- 3) Exprime v_n puis u_n en fonction de n .
- 4) On pose $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$
 - a) Exprime S_n en fonction de n
 - b) Calcule la somme de 30 premiers termes de la suite v_n

9 On donne deux suites (u_n) et (v_n) telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$


$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases}$$

- 1) Calcule : u_n et v_n pour $n \in \{1; 2; 3\}$.
- 2) On définit deux suites (X_n) et (Y_n) par : $X_n = u_n + v_n$ et $Y_n = u_n - v_n$
 - a) Montre que (X_n) est une suite géométrique et (Y_n) une suite constante.
 - b) Exprime u_n puis v_n en fonction de n .

10 On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par $u_0 = 1$;

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 \text{ et } v_n = u_{n+1} - u_n$$

- a) Montre que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- b) Exprime, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
- c) Soit la somme $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$
Montre que pour tout entier naturel n , $S_n = u_n - u_0$
Calcule S_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .

11 Soit la suite $S_n = 0,555\dots\dots\dots 5$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

 n Chiffres 5

- 1) Prouve que S_n est la somme des n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 0,5.
- 2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = \frac{5}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right)$

12 1) Soit (u_n) , $n \in \mathbb{N}$, une suite arithmétique de raison r ($r \neq 0$).

On définit la suite (v_n) , $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{1}{4} e^{-2u_n}$.

- a- Montre que (v_n) , est une suite géométrique dont on Détermineras la raison et le premier terme v_0 (on Exprimera v_0 en fonction de u_0).
- b- Etudie suivant les valeurs de r la convergence de la suite v_n

2) Soit w_n , $n \in \mathbb{N}$, la suite définie par $w_n = \int_0^n \frac{1}{4} e^{-2x} dx$.

- a- Calcule w_n en fonction de n .

b- Montre que w_n converge vers un nombre réel l que l'on précisera.

c- On pose $S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n - \frac{n}{8}$. Calcule S_n en fonction de n puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

13 On considère les suites u_n et v_n définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}(u_n)^2 \end{cases} \text{ et } v_n = \ln\left(\frac{3}{2}u_n\right)$$

- 1) Calcule v_0 .
- 2) Démontre que v_n est une suite géométrique de raison 2.
- 3) Exprime v_n en fonction de n .
- 4) Calcule la limite de v_n .
- 5) Exprime u_n en fonction de v_n puis en déduire la limite de u_n .
- 6) Pour tout entier naturel n , on pose :
 $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$
 a- Démontre que : $S_n = (1 - 2^{n+1}) \ln 2$
 b- Justifie que $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ puis en déduire T_n en fonction de n .

14 On considère la suite numérique u_n définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^{2n-1}$

- 1) a) Calcule $u_0, u_1; u_2; u_3$ et u_{n+1}
 b) Démontre que la suite u_n est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 c) Exprime en fonction de n la somme $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
 En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$
 d) Trouve la valeur minimum de n telle que $S_n \geq 10$
- 2) Soit la suite v_n définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$
 a) Exprime la somme $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ en fonction de n
 b) Exprime le produit $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$ en fonction de n

15 Soit la suite $u_n; n \in \mathbb{N}^*$ à termes positifs tel que : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (u_{n+1})^2 = u_n \times e \end{cases}$

- 1) Calcule puis Exprime $u_1; u_2; u_3$ en fonction de e^k où $k \in \mathbb{R}$.
- 2) On pose $v_n = \ln(u_n) - a$ (où $a \in \mathbb{R}^* \text{ net } \mathbb{N}^*$).
 a) Détermine le réel a pour que v_n soit une suite géométrique dont on Déterminera la raison et le premier terme v_1 .
 b) Calcule la limite de v_n puis celle de u_n en $+\infty$

- 16** Après les élections présidentielles 2013 au Mali, l'analyse des résultats a montré que le candidat élu avait obtenu v_1 voies, le 2^e avait obtenu v_2 voies, ainsi de suite jusqu'au dernier des n candidats qui avait obtenu v_n voies. De plus on a constaté que le $k^{\text{ième}}$ candidat avec ($k \geq 1$) avait obtenu le double de voies de son successeur immédiat $(k+1)^{\text{ième}}$ du classement ; définissant ainsi une suite numérique $(v_n)_{n \geq 1}$
- 1) Prouve que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q .
 - 2) Le nombre total de votants appelé suffrage exprimé est $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$. Un candidat est élu président dès le 1^{er} tour, lorsque son nombre de voies v_1 dépasse la moitié de S_n .
 - a) Détermine en fonction de n et v_1 le suffrage exprimé S_n .
 - b) Examine si un deuxième tour à cette élection eut été nécessaire.
 - 3) En effet le nombre total des votants fut 945 et le candidat fut élu par ses 480 voies. Détermine alors le nombre n de candidats qui avaient postulé.

- 17** Soit la suite u_n définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence
- $$u_{n+1} = \frac{4}{4 - u_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$
- 1) a) Détermine u_0 pour que u_n soit constante.
 b) Démontre que si $u_n < 2$ alors $u_n < u_{n+1} < 2$ ($n \in \mathbb{N}$) En déduire que si $u_0 < 2$ alors pour tout entier naturel on a : $u_n < 2$ et que la suite est monotone.
 - 2) On suppose maintenant que $u_0 = -1$
 - a) Calcule u_1 ; u_2 ; u_3 .
 - b) Soit la suite v_n définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$. Démontre que v_n est une suite arithmétique dont on Déterminera le premier terme et la raison.
 - c) Calcule u_n en fonction de n puis étudier sa limite en $+\infty$.

- 18** On ajoute une certaine dose d'un antibiotique à un bouillon de culture contenant des microbes sensibles à cet antibiotique. Un ordinateur compte et indique à chaque heure le nombre de microbes vivants dans le bouillon ; on s'aperçoit qu'à chaque heure, le nombre de microbes vivants est la moitié du nombre de microbes à l'heure précédente.
- 1^o/a) Sachant qu'à 6heures le bouillon contenait N microbes, Calcule le nombre de microbes vivants aux heures suivantes : 7h ; 8h ; 9h ; 10h.
- b) Montre que ces nombres sont en progression géométrique ; Calcule pour un entier positif n la somme S_n des n premiers termes de cette progression.
- 2^o/ A 12heures, on ajoute au bouillon un produit qui annule l'effet de l'antibiotique. On constate alors que le nombre de microbes vivants dans le bouillon augmente de 25% par heure. Calcule le nombre de microbes vivants dans le bouillon à 14h si $N = 10^{10}$.

Progression arithmétiques — Progression géométriques.

19 Trouve 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression arithmétique sachant

$$\text{que : } \begin{cases} a + b + c = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases}$$

Trouve 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression géométrique sachant

$$\text{que : } \begin{cases} a \times b \times c = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases}$$

20 Soient a et b deux réels tel que : $(a ; a + 4b ; 5a + 2b)$ et $(b + 3 ; 3a + 1 ; 6a + b)$ soient des termes consécutifs de suite respectivement arithmétique et géométrique. Trouve a et b .

21 Quatre (4) entiers strictement positifs a, b, c , et d forment dans cet ordre une suite géométrique dont la raison est un entier premier avec a .

Trouve ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation $10a^2 = d - b$.

22 Soit u_n une suite dans laquelle les dix premiers termes de la suite sont en progression arithmétique de raison r et à partir de u_{10} les termes sont en progression géométrique de raison q .

On donne : $u_1 = 0 ; u_{16} = \frac{-1}{27}$ et $qr = 1$

1) Calcule q ; r ; u_{10} et u_{11}

2) Calcule la somme S_n des n premiers termes de la suite u_n dans les deux cas suivants:

a) $n \leq 10$ b) $n > 10$

23 1) Quatre entiers strictement positifs a ; b ; c et , forment dans cet ordre une suite géométrique dont la raison q est un entier premier avec a . Trouve ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation $10a^2 = d - b$.

2) soient Z_1 ; Z_2 et Z_3 trois nombres complexes dont le produit est $3i\sqrt{3}$, les arguments respectifs a_1 ; a_2 et a_3 forment une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$ et les modules

r_1 ; r_2 et r_3 une suite géométrique de raison 2. Sachant que $0 < a_1 < \frac{2\pi}{3}$.

Détermine : Z_1 ; Z_2 et Z_3 .

Suites économiques.

24 Au 1^{er} Janvier 2012, le prix d'un kilo de sucre est de 550 f CFA.

Le prix du kilo subit une augmentation de 50 f CFA au 1^{er} Janvier de chaque année.

1) Quel serait le prix du kilo de sucre au 1^{er} Janvier 2013 ? Au 1^{er} Janvier 2014 ?

2) On désigne par P_n le prix du kilo du sucre au 1^{er} Janvier + n . Calcule P_n en fonction de n

3) Calcule $P_{n+1} - P_n$ puis en déduire la nature de la suite P_n .

25 Le premier Janvier 1999, la population d'une commune rurale était de 3000 habitants. On admet que cette population diminue de 4 % chaque année. Calcule la population de cette commune :

- 1) Au 1^{er} Janvier 2005
- 2) Au 1^{er} Janvier 2006
- 3) Au 1^{er} Janvier 2012

26 La population d'un pays augmente régulièrement de 3% par an. Reproduire et compléter le tableau démographique ci-dessous :

Années	2012	2013	2014	2015	2016
Populations			6415000		

27 Un capital A est placé à intérêts composés aux taux de 3% l'an. On appelle C_0 le capital initial et C_n le capital après n années.

- 1) Expliquer la relation $C_1 = 1,03C_0$ puis écrire le capital C_n en fonction de C_0 et 1,03 .
- 2) Au bout de combien d'années le capital est-il doublé ?
- 3) Au bout de combien d'années le capital est-il triplé ?

28 Ali a reçu de son père une somme de 100.000 FCFA.

Après réception, il dépose cette somme dans une caisse d'épargne le 1^{er} Janvier 2009 à intérêt composé au taux annuel de 5 % en vue d'acheter une moto à 300000 FCFA.

- 1) A partir de quelle année pourra-t-il acheter sa moto sachant qu'il ne dispose que de cette somme ?
- 2) Quelle serait la nouvelle valeur acquise par Ali s'il place un capital de 100.000 FCFA au bout de 30 semestres au taux de 2 % par semestre ?

29 1) Chaque année la grand-mère de Salif dépose de l'argent dans une banque afin de constituer une cagnotte pour son petit-fils.

Elle a commencé le 1^{er} janvier 1982 par un dépôt de 500 F. Depuis lors, elle a effectué un dépôt chaque 1^{er} janvier, en augmentant chaque année le montant de ce dépôt de 50 F.

On note :

- u_n le montant exprimé en francs, de la somme déposée dans la caisse d'épargne le 1^{er} janvier 1982+ n . (Ainsi $u_0 = 500$; $u_1 = 550$; ...)
 - S_n le montant, en francs, de la somme contenue dans la caisse d'épargne après le dépôt de l'année 1982+ n . (Ainsi $S_0 = 500$; $u_1 = 1050$; ...)
- a- Calcule u_2 , puis Exprime u_n en fonction de n .
 - b- Calcule S_2 , puis Exprime S_n en fonction de n .
 - c- Le 1^{er} janvier 2002, la grand-mère de Salif effectue son dépôt habituel (en franc), puis offre l'argent de la caisse à Salif. Quel est le montant de la somme reçue par Salif ? Exprime cette somme en franc puis en euros. (Rappel : 1€ = 6,55957 franc).

2) Avec le cadeau de sa grand-mère, Salif décide d'ouvrir un compte bancaire et d'y placer la plus grande partie de la somme qu'il a reçue.

Le 1^{er} janvier 2002, il effectue un placement de 3000 €, à intérêts composés, aux taux annuel de 4%. (A la fin de chaque année, les intérêts seront incorporés au capital). De plus, chaque 1^{er} janvier des années suivantes, il décide d'ajouter sur son compte la somme de 200€.

On note :

- C_n le montant exprimé en euros, du capital disponible sur le compte bancaire de Salif après n années de placement. (Ainsi $C_0 = 3000$)
- (u_n) la suite définie par $u_n = C_n + 5000$. (Ainsi $u_0 = 8000$)

a- Justifie que pour tout entier naturel n , on a : $C_{n+1} = 1,04C_n + 200$

b- Démontre que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c- Exprime u_n en fonction de n , puis C_n en fonction de n .

d- Combien d'années, au minimum, Salif devra-t-il attendre pour disposer d'une somme de 6000 euros sur son compte bancaire ?

Solutions

Généralité sur les suites.

1 Vérifions si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses:

1) Toute suite bornée est convergente. (**Faux**)

Exemple : la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est bornée mais n'est pas convergente.

2) Toute suite décroissante à termes positifs converge vers 0. (**Faux**)

Puisque cette suite est à termes positifs, elle est minorée par 0. Cette suite étant décroissante et minorée, elle est convergente. Mais elle ne converge pas nécessairement vers 0.

Exemple : la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ est décroissante, à termes positifs. Elle est bien convergente et sa limite est 1.

3) La somme de deux suites divergentes est toujours une suite divergente. (**Faux**)

Exemple : les suites de termes généraux $u_n = (-1)^n$ et $u_n = 1 - (-1)^n$ sont divergentes, mais leur somme est une suite constante, donc convergente.

4) Toute suite à termes positifs, convergente vers 0 est décroissante. (**Faux**)

Exemple : la suite de terme général $\begin{cases} u_n = e^{-n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_n = \frac{10}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$ est à termes positifs et

converge vers 0 car la limite en $+\infty$ de e^{-n} et $\frac{10}{n}$ est 0 mais n'est pas décroissante. En effet, on a par exemple : $u_1 < u_2$

5) Si une suite à termes positifs diverge, alors sa limite est $+\infty$. (**Faux**)

Exemple : les suites de terme général $u_n = 3 + \cos(n)$ est divergente mais sa limite n'est pas $+\infty$

2 Etudions la convergence des suites suivantes :

a) $U_{n+1} = n - U_n$ et $U_0 = -5$

Le calcul des premiers termes montre qu'il semble y avoir un écart de 1 entre deux termes de rangs pairs (ou impairs) consécutifs. Montrons-le.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a $U_{n+1} = n - U_n$ alors : $U_{n+2} = (n+1) - U_{n+1} = (n+1) - (n - U_n)$
 $= n+1 - n + U_n = 1 + U_n \Rightarrow U_{n+2} = 1 + U_n \Leftrightarrow U_{n+2} - U_n = 1$

Ainsi, la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = u_{2n}$ (les termes de rang pairs), est une suite arithmétique de raison 1.

Par conséquent, elle est divergente et sa limite est $+\infty$.

Il en est de même pour la suite (w_n) , définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_n = u_{2n+1}$ (les termes de rang impairs).

On conclut que la suite (u_n) est divergente et sa limite est $+\infty$.

b) $U_n = \sqrt{n^2 + n} - n$

$$U_n = \sqrt{n^2 + n} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{(\sqrt{n^2 + n} + n)} = \frac{(\sqrt{n^2 + n})^2 - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2(1 + \frac{1}{n})} + n} = \frac{n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + n} = \frac{n}{n(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2}$.

D'où la suite U_n est convergente et sa limite est $\frac{1}{2}$

c) $U_n = \sin\left(n\pi - \frac{1}{n}\right)$

Si n est pair, $U_n = -\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ et si n est impair, $U_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

D'où la suite U_n est convergente et sa limite est 0

3 On considère les suites u_n et v_n définies par : $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 - \frac{1}{n^2}$

Montrons que les suites u_n et v_n sont adjacentes

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n - u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n^2} - 1 + \frac{1}{n} = -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} - 1 + \frac{1}{n} = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$
 $\Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$.

On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

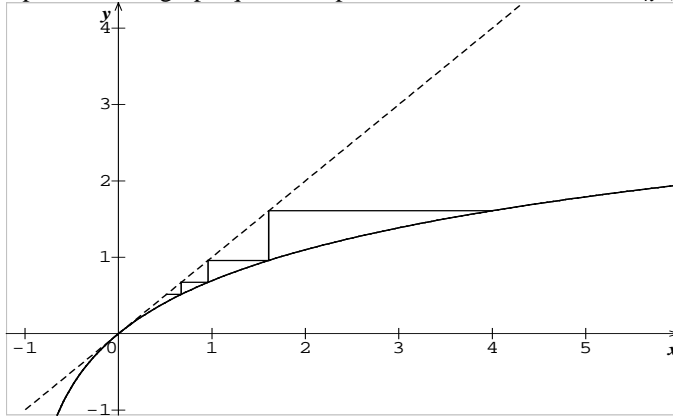
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} - v_n = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} < 0$
 $\Rightarrow v_{n+1} - v_n < 0$.

On en déduit que la suite (v_n) est décroissante.

Comme la suite (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $(v_n - u_n)$ tend vers 0, on conclut que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4 Soit u_n la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$

Traçons la courbe représentation de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ puis en déduisons une représentation graphique des 4 premiers termes de la suite u_n (voir figure ci-dessous).



Suites arithmétiques — Suites géométriques.

5 1) Calcule dans chacun des cas suivants d'une suite arithmétique.

a- La raison r et la somme S_n si : $U_1 = 397$; $U_n = 64$ et $n = 1000$

L'expression des n premiers d'une suite arithmétique de 1^{er} terme U_1 et de raison r est :
 $U_n = U_1 + r(n-1)$.

$$U_n = U_1 + r(n-1) \Leftrightarrow 64 = 397 + r(1000-1) \Leftrightarrow 999r = -333 \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$$

La somme des n premiers d'une suite arithmétique de 1^{er} terme U_1 est $S_n = \frac{n(U_1 + U_n)}{2}$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1000(397 + 64)}{2} = 230500$$

b- L'entier n et la raison r si : $U_1 = -4$; $U_n = 6$ et $S_n = 28$

La somme des n premiers d'une suite arithmétique de 1^{er} terme U_1 est $S_n = \frac{n(U_1 + U_n)}{2}$
 $S_n = \frac{n(U_1 + U_n)}{2} \Leftrightarrow 28 = \frac{n(-4 + 6)}{2} \Leftrightarrow 2n = 56 \Rightarrow n = 28$

L'expression des n premiers d'une suite arithmétique de 1^{er} terme U_1 et de raison r est:
 $U_n = U_1 + r(n - 1)$.

$$U_n = U_1 + r(n - 1) \Leftrightarrow 6 = -4 + r(28 - 1) \Rightarrow r = \frac{10}{27}$$

c- Le premier terme U_1 et la somme S_n si : $U_n = 105$; $n = 17$ et $r = -2$

L'expression des n premiers d'une suite arithmétique de 1^{er} terme U_1 et de raison r est:
 $U_n = U_1 + r(n - 1)$.

$$U_n = U_1 + r(n - 1) \Leftrightarrow 105 = U_1 + 17(-2 - 1) \Rightarrow U_1 = 156$$

2) Calcule dans chacun des cas suivants d'une suite géométrique.

a- L'expression de U_n et la somme S_n si : $U_1 = 2$; $q = 3$

L'expression des n premiers d'une suite géométrique de 1^{er} terme U_1 et de raison q est:
 $U_n = U_1(q)^{n-1}$

$$U_n = U_1(q)^{n-1} \Leftrightarrow U_n = 2(3)^{n-1}$$

La somme des n premiers d'une suite géométrique de 1^{er} terme U_1 est $S_n = \frac{U_1(1 - q^n)}{1 - q}$

$$S_n = \frac{U_1(1 - q^n)}{1 - q} \Leftrightarrow S_n = \frac{2(1 - 3^n)}{1 - 3} \Rightarrow S_n = 3^n - 1$$

b- La raison q et la somme S_n si : $U_1 = 162$; $U_n = 32$ et $n = 5$

L'expression des n premiers d'une suite géométrique de 1^{er} terme U_1 et de raison q est:

$$U_n = U_1(q)^{n-1} \Leftrightarrow 32 = 162(q)^{5-1} \Leftrightarrow 32 = 162q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{32}{162} = \frac{16}{81} \Rightarrow q = \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$$

La somme des n premiers d'une suite géométrique de 1^{er} terme U_1 est $S_n = \frac{U_1(1 - q^n)}{1 - q}$

$$S_n = \frac{U_1(1 - q^n)}{1 - q} \Leftrightarrow S_n = \frac{162(1 - (\frac{2}{3})^5)}{1 - \frac{2}{3}} \Rightarrow S_n = 422$$

6 Soit u_n une suite géométrique décroissante tel que : $\begin{cases} u_0 \times u_3 = 32 \\ u_0 + u_3 = 18 \end{cases}$

1) Calculons u_0 et u_3

$$\begin{cases} u_0 \times u_3 = 32 \\ u_0 + u_3 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 32 \\ S = 18 \end{cases}$$

Alors ce système est solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ où S et P désignent respectivement la somme et le produit.

Résolvons ainsi l'équation $X^2 - SX + P = 0 \Leftrightarrow X^2 - 18X + 32 = 0$. $\Delta = 196 \Rightarrow$

$X_1 = 2$ et $X_2 = 16$

La suite (u_n) étant décroissante, alors $u_0 = 16$ et $u_3 = 2$

2) Déterminons la raison de la suite u_n .

L'expression des n premiers d'une suite géométrique de 1^{er} terme U_0 et de raison q est:

$$U_n = U_0(q)^n$$

Ainsi pour $n = 3$, on a : $U_3 = U_0 q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{U_3}{U_0} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$. Alors $q^3 = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

3) Donnons l'expression de la suite u_n en fonction de n .

$$U_n = U_0(q)^n \Rightarrow U_n = 16 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 16 \times \frac{1}{2^n} = 2^4 \times 2^{-n} = 2^{4-n}$$

4) On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Calculons S_n en fonction de n puis en déduisons la somme des 20 premiers termes de la suite u_n

La somme des n premiers d'une suite géométrique de 1^{er} terme u_0 est $S_n = \frac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q}$

$$S_n = \frac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{16\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{16\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\frac{1}{2}} = 32\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = 32(1 - 2^{-n-1}) = 32 - 32 \times 2^{-n-1} = 32 - 2^5 \times 2^{-n-1} = 32 - 2^{5-n-1}$$

$$= 32 - 2^{4-n} \Rightarrow S_n = 32 - 2^{4-n}$$

7

Déterminons une suite arithmétique u_n sachant que la somme de ces n premiers termes est égale à $3n^2 + 4n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)

La somme des n premiers d'une suite arithmétique de 1^{er} terme U_1 est $S_n = \frac{n(U_1 + U_n)}{2}$

$$S_n = \frac{n(U_1 + U_n)}{2}. \text{ Or } U_n = U_1 + r(n-1)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n[U_1 + U_1 + r(n-1)]}{2} \Leftrightarrow S_n = \frac{n[2U_1 + r(n-1)]}{2} \Leftrightarrow S_n = \frac{n(2U_1 + nr - r)}{2}$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{2nU_1 + n^2r - nr}{2} \Leftrightarrow S_n = \frac{n^2r + n(2U_1 - r)}{2}.$$

Or $S_n = 3n^2 + 4n$. Alors par identification on a : $\frac{n^2r + n(2U_1 - r)}{2} = 3n^2 + 4n \Leftrightarrow$

$$n^2r + n(2U_1 - r) = 6n^2 + 8n \Leftrightarrow \begin{cases} r = 6 \\ 2U_1 - r = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 6 \\ U_1 = 7 \end{cases}. \text{ D'où } U_n = U_1 + r(n-1)$$

$$\Rightarrow U_n = 7 + 6(n-1) = 6n + 1$$

8

Soit les suites u_n et v_n définie par : $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n} \end{cases}$ et $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$

1) Calculons v_{n+1} en fonction de u_n puis en fonction de v_n .

- Expression de v_{n+1} en fonction de u_n

$$v_n = \frac{u_n + 1}{u_n} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1}}. \text{ Or } u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{\left(\frac{u_n}{1-u_n}\right) + 1}{\left(\frac{u_n}{1-u_n}\right)} = \frac{\frac{u_n + 1 - u_n}{1-u_n}}{\frac{u_n}{1-u_n}} = \frac{\frac{1}{1-u_n}}{\frac{u_n}{1-u_n}} = \frac{1}{1-u_n} \times \frac{1-u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n}$$

- Expression de v_{n+1} en fonction de v_n

On sait que $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n - 1}$. En remplaçant $u_n = \frac{1}{v_n - 1}$ par sa valeur dans la relation $v_{n+1} = \frac{1}{u_n}$, on a : $v_{n+1} = \frac{1}{u_n} \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{v_n - 1}} = v_n - 1 \Rightarrow v_{n+1} = v_n - 1$.

2) En déduisons que v_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme v_1

$$v_{n+1} = v_n - 1 \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = -1$$

D'où v_n est une suite arithmétique de raison -1 et de premier terme $v_1 = \frac{u_1 + 1}{u_1} = \frac{1}{2}$.

3) Exprimons v_n puis u_n en fonction de n .

- Expression de v_n en fonction de n

v_n est une suite arithmétique de raison -1 et de premier terme $v_1 = \frac{1}{2}$, alors son expression en fonction de n est : $v_n = v_1 + r(n-1)$.

$$v_n = v_1 + r(n-1) \Leftrightarrow v_n = \frac{1}{2} - 1(n-1) = \frac{1}{2} - n + 1 = -n + \frac{3}{2} \Rightarrow v_n = -n + \frac{3}{2}$$

- Expression de u_n en fonction de n

$$\text{On sait que } u_n = \frac{1}{v_n - 1}. \text{ Or } v_n = -n + \frac{3}{2}$$

En remplaçant $v_n = -n + \frac{3}{2}$ par sa valeur dans $u_n = \frac{1}{v_n - 1}$. Alors on a :

$$u_n = \frac{1}{v_n - 1} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{\left(-n + \frac{3}{2}\right) - 1} = \frac{1}{\left(-n + \frac{3}{2}\right) - 1} = \frac{2}{-2n+1} \Rightarrow u_n = \frac{2}{-2n+1}$$

4) On pose $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

a-Exprimons S_n en fonction de n

La somme des n premiers d'une suite arithmétique de 1^{er} terme v_1 est $S_n = \frac{n(v_1 + v_n)}{2}$

$$S_n = \frac{n(v_1 + v_n)}{2}. \text{ Or } v_1 = \frac{1}{2} \text{ et } v_n = -n + \frac{3}{2} \text{ Alors } S_n = \frac{n(\frac{1}{2} - n + \frac{3}{2})}{2} = \frac{n(\frac{1}{2} - n + \frac{3}{2})}{2} = \frac{2n - n^2}{2}$$

b-Calculons la somme de 30 premiers termes de la suite v_n

$$S_n = \frac{2n - n^2}{2} \Rightarrow S_{30} = \frac{2(30) - (30)^2}{2} = -420$$

9 On donne deux suites (u_n) et (v_n) telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases}$$

1) Calculons : u_n et v_n pour $n \in \{1; 2; 3\}$.

$$\text{Pour } n = 0; \text{ on a : } \begin{cases} u_1 = 3u_0 + 2v_0 \\ v_1 = 2u_0 + 3v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 3 + 4 \\ v_1 = 2 + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ v_1 = 8 \end{cases}$$

$$\text{Pour } n = 1; \text{ on a : } \begin{cases} u_2 = 3u_1 + 2v_1 \\ v_2 = 2u_1 + 3v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = 21 + 16 \\ v_2 = 14 + 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = 37 \\ v_2 = 38 \end{cases}$$

$$\text{Pour } n = 2; \text{ on a : } \begin{cases} u_3 = 3u_2 + 2v_2 \\ v_3 = 2u_2 + 3v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_3 = 111 + 76 \\ v_3 = 74 + 114 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_3 = 187 \\ v_3 = 188 \end{cases}$$

2) On définit deux suites (X_n) et (Y_n) par : $X_n = u_n + v_n$ et $Y_n = u_n - v_n$

a-Montrons que (X_n) est une suite géométrique et (Y_n) une suite constante.

$$\begin{aligned} X_n = u_n + v_n &\Rightarrow X_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = (3u_n + 2v_n) + (2u_n + 3v_n) = 5(u_n + v_n) \\ &\Rightarrow X_{n+1} = 5(u_n + v_n) \Leftrightarrow X_{n+1} = 5X_n. \end{aligned}$$

D'où X_n est une suite géométrique de raisons $q = 5$ et de premier terme $X_0 = u_0 + v_0 = 3$

Donc l'expression de X_n est $X_n = X_0(q)^n = 3(5)^n = 3 \times 5^n = 3 \times 5^n$

$$Y_n = u_n - v_n \Rightarrow Y_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = (3u_n + 2v_n) - (2u_n + 3v_n) = u_n - v_n$$

$$\text{Alors } Y_{n+1} - Y_n = 0$$

D'où Y_n une suite constante de valeur $Y_n = Y_0 = 1 - 2 = -1$

b-Exprimons u_n puis v_n en fonction de n .

On sait que $X_n = u_n + v_n$ et $Y_n = u_n - v_n$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_n = u_n + v_n \\ Y_n = u_n - v_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_n + Y_n = 2u_n \Rightarrow u_n = \frac{X_n + Y_n}{2}. \text{ Or } X_n = 3 \times 5^n \text{ et } Y_n = u_n - v_n \Rightarrow u_n = \frac{3 \times 5^n - 1}{2}$$

$$\text{De même } v_n = \frac{X_n - Y_n}{2} \Rightarrow v_n = \frac{3 \times 5^n + 1}{2}$$

10

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par $u_0 = 1$;

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad \text{et} \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

1) Montrons que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

v_n est une suite géométrique si et seulement si : $v_{n+1} = qv_n$ ou $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$

$$v_n = u_{n+1} - u_n = (2u_n + 1) - u_n = 2u_n + 1 - u_n = u_n + 1$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = (2u_n + 1) + 1 = 2u_n + 1 + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1) \Rightarrow v_{n+1} = 2v_n$$

D'où v_n est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 1 = 2$

2) Exprimons, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .

L'expression des n premiers d'une suite géométrique de 1^{er} terme v_0 et de raison q est :

$$v_n = v_0(q)^n$$

$$v_n = v_0(q)^n \Leftrightarrow v_n = 2(2)^n = 2^{n+1}$$

3) Soit la somme $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

a-Montrons que pour tout entier naturel n , $S_n = u_n - u_0$

On sait que : $v_n = u_{n+1} - u_n$

$$\Rightarrow v_0 = u_1 - u_0$$

$$v_1 = u_2 - u_1$$

$$v_2 = u_3 - u_2$$

$$\vdots$$

$$\vdots \quad u_{n-1} \quad \vdots$$

$$\vdots$$

$$v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

En ajoutant membre à membre les termes de l'égalité ci-dessus, on a :

$$v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = u_n - u_0 \Leftrightarrow S_n = u_n - u_0$$

D'où pour tout entier naturel n , $S_n = u_n - u_0$ (Ce qu'il fallait Démontrer).

b-Calculons S_n en fonction de n

La somme des n premiers d'une suite géométrique de 1^{er} terme v_0 et de raison q est :

$$S_n = \frac{v_0(1-q^{n+1})}{1-q}$$

$$S_n = \frac{v_0(1-q^{n+1})}{1-q} \Leftrightarrow S_n = \frac{2(1-2^{n+1})}{1-2} \Rightarrow S_n = -2(1-2^{n+1})$$

En déduisons u_n en fonction de n .

D'après la question a), $S_n = u_n - u_0$ et D'après la question b), $S_n = -2(1-2^{n+1})$
Par identification, $u_n - u_0 = -2(1-2^{n+1}) \Rightarrow u_n = -2(1-2^{n+1}) + u_0$. Or $u_0 = 1$

$$\Rightarrow u_n = -2(1-2^{n+1}) + 1 = -2 + 2 \times 2^{n+1} + 1 = -1 + 2^{n+2}.$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = -1 + 2^{n+2}$.

11 Soit la suite $S_n = \underbrace{0,555\dots\dots\dots 5}_{n \text{ Chiffres } 5}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Prouvons que est la somme des n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 0,5.

Soit la suite $S_n = \underbrace{0,555\dots\dots\dots 5}_{n \text{ Chiffres } 5}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow S_n = 0,5 + 0,05 + 0,005 + \dots\dots\dots + 0,00000\dots\dots 5$$

$$\text{Donc } u_1 = 0,5 ; u_2 = 0,05 ; u_3 = 0,005 ; \dots\dots\dots ; u_n = 0,00000\dots\dots 5$$

En effectuant les opérations $\frac{u_2}{u_1} ; \frac{u_3}{u_2} ; \frac{u_4}{u_3}$, on obtient :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{0,05}{0,5} = 0,1 ; \frac{u_3}{u_2} = \frac{0,005}{0,05} = 0,1 ; \frac{u_4}{u_3} = \frac{0,0005}{0,005} = 0,1 \text{ et d'une manière générale, on a :}$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \dots\dots\dots \frac{u_n}{u_{n-1}} \dots\dots\dots \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0,1 = q$$

D'où S_n est la somme des n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 0,1$ et de premier terme

$$u_1 = 0,5 \text{ et ce ci peut être traduit par : } S_n = 0,5[(0,1)^0 + (0,1)^1 + (0,1)^2 + \dots + (0,1)^{n+1}]$$

$$2) \text{ En déduisons que } \forall n \in \mathbb{N}^*; S_n = \frac{5}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right)$$

La somme des n premiers d'une suite géométrique de 1^{er} terme u_1 et de raison q est :

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{0,5(1-0,1^n)}{1-0,1} = \frac{0,5(1-0,1^n)}{0,9} = \frac{\frac{5}{10}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]}{\frac{9}{10}} = \frac{5\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]}{9}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{5}{9}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right] = \frac{5}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right). \text{ D'où } \forall n \in \mathbb{N}^*; \text{ on a : } S_n = \frac{5}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

12 1) Soit (u_n) , $n \in \mathbb{N}$, une suite de raison r ($r \neq 0$).

On définit la suite (v_n) , $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_n}$.

a- Montrons que (v_n) , est une suite géométrique dont on Déterminera la raison et le premier terme v_0 (on Exprimera v_0 en fonction de u_0).

On a : $v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_n}$.

Alors (v_n) , est une suite géométrique si et seulement si : $v_{n+1} = qv_n$ ou $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$

$$v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_n} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{4}e^{-2U_{n+1}}.$$

$$\text{Alors on a : } \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{4}e^{-2U_{n+1}}}{\frac{1}{4}e^{-2U_n}} = \frac{e^{-2U_{n+1}}}{e^{-2U_n}} = e^{-2U_{n+1}} \times e^{2U_n} = e^{-2U_{n+1}+2U_n}$$

$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = e^{-2(U_{n+1}-U_n)}$$

Or d'après l'hypothèse, u_n est une suite arithmétique de raison r , par conséquent on a :

$$U_{n+1} - U_n = r. \text{ D'où } \frac{v_{n+1}}{v_n} = e^{-2(U_{n+1}-U_n)} = e^{-2r}$$

Alors (v_n) , est une suite géométrique de raison $q = e^{-2r}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{4}e^{-2U_0}$.

b- Etudions suivant les valeurs de r la convergence de la suite v_n

Pour cela, exprimons v_n en fonction de n .

L'expression des n premiers d'une suite géométrique de 1^{er} terme v_0 et de raison q est:

$$v_n = v_0(q)^n \Leftrightarrow v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_0}(e^{-2r})^n = \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times e^{-2nr} \Rightarrow v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times e^{-2nr}$$

Ainsi pour étudier la convergence suivant les valeurs de r , on calcule la limite de v_n en $+\infty$.

- Pour $r > 0$; on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times e^{-2nr} = \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times (0) = 0$$

- Pour $r < 0$; on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times e^{-2nr} = \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times (+\infty) = 0$$

$$n \rightarrow +\infty \quad n \rightarrow +\infty$$

- Pour $r = 0$; on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} e^{-2U_0} \times e^{-2nr} = \frac{1}{4} e^{-2U_0}$$

2) Soit w_n $n \in \mathbb{N}$, la suite définie par $w_n = \int_0^n \frac{1}{4} e^{-2x} dx$.

a- Calculons w_n en fonction de n .

$$w_n = \int_0^n \frac{1}{4} e^{-2x} dx = \frac{1}{4} \int_0^n e^{-2x} dx = -\frac{1}{8} \int_0^n -2e^{-2x} dx$$

$$\Rightarrow w_n = \left[-\frac{1}{8} e^{-2x} \right]_0^n = -\frac{1}{8} e^{-2n} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-2n} = \frac{1}{8} (1 - e^{-2n})$$

$$\text{D'où } w_n = \frac{1}{8} (1 - e^{-2n})$$

b- Montrons que w_n converge vers un nombre réel l que l'on précisera.

Pour cela, on calcule la limite de w_n en $+\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{8} (1 - e^{-2n}) = \frac{1}{8} (1 - 0) = \frac{1}{8}$$

D'où w_n converge vers le réel $\frac{1}{8}$.

c- On pose $S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n - \frac{n}{8}$.

Calculons S_n en fonction de n puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

$$\text{Posons } S'_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n - \frac{n}{8}$$

Ainsi exprimons S'_n en fonction de n .

$$\text{On sait que : } w_n = \frac{1}{8} (1 - e^{-2n}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-2n}$$

$$\Rightarrow w_1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-2}$$

$$w_2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-4}$$

$$w_3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-6}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$w_n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-2n}$$

En effectuant membre à membre la somme des termes de l'égalité ci-dessus, on a :

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = n \times \frac{1}{8} - n \frac{1}{8} e^{-2n} \Leftrightarrow S'_n = \frac{n}{8} - \frac{n}{8} e^{-2n}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n - \frac{n}{8} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{8} - \frac{n}{8} e^{-2n} \right) - \frac{n}{8} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{8} - \frac{n}{8} e^{-2n} - \frac{n}{8} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{n}{8} e^{-2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{8} \times \frac{n}{e^{2n}} = -\frac{1}{8} \times (0) = 0 \end{aligned}$$

13

On considère les suites u_n et v_n définies pour tout entier naturel n par définies par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}(u_n)^2 \end{cases} \text{ et } v_n = \ln\left(\frac{3}{2}u_n\right)$$

1) Calculons v_0 .

$$v_n = \ln\left(\frac{3}{2}u_n\right) \Rightarrow v_0 = \ln\left(\frac{3}{2}u_0\right) = \ln\left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \Rightarrow v_0 = -\ln 2$$

2) Démontrons que v_n est une suite géométrique de raison 2.

(v_n) , est une suite géométrique si et seulement si : $v_{n+1} = qv_n$ ou $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$

$$\begin{aligned} v_n = \ln\left(\frac{3}{2}u_n\right) &\Rightarrow v_{n+1} = \ln\left(\frac{3}{2}u_{n+1}\right) = \ln\left(\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}(u_n)^2\right) = \ln\left(\frac{9}{4}(u_n)^2\right) = \ln\left(\frac{3}{2}u_n\right)^2 \\ &= 2\ln\left(\frac{3}{2}u_n\right) = 2v_n \end{aligned}$$

Alors v_n est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

3) Exprimons v_n en fonction de n .

L'expression des n premiers d'une suite géométrique de 1^{er} terme v_0 et de raison q est:

$$v_n = v_0(q)^n \Leftrightarrow v_n = -\ln 2(2)^n = -2^n \ln 2.$$

4) Calculons la limite de v_n .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -2^n \ln 2 = -(+\infty) \ln 2 = -\infty \times \ln 2 = -\infty$$

5) Exprimons u_n en fonction de v_n puis en déduisons la limite de u_n

$$v_n = \ln\left(\frac{3}{2}u_n\right) \Leftrightarrow \frac{3}{2}u_n = e^{v_n} \Rightarrow u_n = \frac{2}{3}e^{v_n}. \text{ Ainsi calculons la limite de } u_n \text{ en } +\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}e^{v_n}. \text{ Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{v_n} = 0$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}e^{v_n} = \frac{2}{3}(0) = 0$$

6) Pour tout entier naturel n , on pose :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} \text{ et } T_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$$

a- Démontrons que : $S_n = (1 - 2^{n+1}) \ln 2$

La somme des n premiers d'une suite géométrique de 1^{er} terme v_0 et de raison q est :

$$S_n = \frac{v_0(1-q^{n+1})}{1-q} \Leftrightarrow S_n = \frac{-\ln 2(1-2^{n+1})}{1-2} = \frac{-(1-2^{n+1})\ln 2}{-1} = (1 - 2^{n+1}) \ln 2$$

b- Justifions que $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ puis en déduisons T_n en fonction de n

$$\text{On sait que : } u_n = \frac{2}{3} e^{v_n}$$

$$\Rightarrow u_0 = \frac{2}{3} e^{v_0}$$

$$u_1 = \frac{2}{3} e^{v_1}$$

$$\vdots$$

$$u_n = \frac{2}{3} e^{v_n}$$

En effectuant membre à membre le produit des termes de l'égalité ci-dessus, on a :

$$u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{(v_0+v_1+\dots+v_{n-1})}.$$

Or par hypothèse $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$

Alors on a : $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ (Ce qu'il fallait Démontrer).

Déduisons T_n en fonction de n avec

On sait que : $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ et d'après la question : 6)-a, on a : $S_n = (1 - 2^{n+1}) \ln 2$.

$$\text{Alors } T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{(1-2^{n+1})\ln 2}$$

14 On considère la suite numérique u_n définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^{2n-1}$

1) a- Calculons $u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3$ et u_{n+1}

$$u_0 = e^{-1} ; u_1 = e ; u_2 = e^3 ; u_3 = e^5 ; u_{n+1} = e^{2n+1}$$

b- Démontrons que la suite u_n est une suite géométrique dont on précisera la raison.

u_n est une suite géométrique si et seulement si : $u_{n+1} = qu_n$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$

$$u_n = e^{2n-1} \Rightarrow u_{n+1} = e^{2n+1}. \text{ Alors } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{2n+1}}{e^{2n-1}} = e^{2n+1} \times e^{-2n+1} = e^{2n+1-2n+1} = e^{1+1} = e^2$$

D'où u_n est une suite géométrique de raison $q = e^2$ et de premier terme $u_0 = e^{-1}$

c- Exprimons en fonction de n la somme $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

La somme des n premiers d'une suite géométrique de 1^{er} terme u_0 et de raison q est :

$$S_n = \frac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q} \Leftrightarrow S_n = \frac{(1-(e^2)^{n+1})e^{-1}}{1-e^2} = \frac{(1-e^{2n+2})e^{-1}}{1-e^2} = \frac{e^{-1}-e^{2n+1}}{1-e^2}$$

En déduisons $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-1}-e^{2n+1}}{1-e^2} = -\infty$$

d- Trouvons la valeur minimum de n telle que $S_n \geq 10$

$$S_n \geq 10 \Leftrightarrow \frac{e^{-1}-e^{2n+1}}{1-e^2} \geq 10 \Leftrightarrow e^{-1} - e^{2n+1} \geq 10(1-e^2) \Leftrightarrow e^{2n+1} \leq 63,5$$

$$\Rightarrow 2n+1 \leq \ln(63,5) \Rightarrow n \leq 1,57$$

2) Soit la suite v_n définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n) = \ln(e^{2n-1}) = 2n - 1$

a-Exprimons la somme $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ en fonction de n

Pour cela cherchons la nature de la suite v_n .

$$v_n = \ln(u_n) = \ln(e^{2n-1}) = 2n - 1 \Rightarrow v_n = 2n - 1 \text{ et } v_{n+1} = 2n + 1$$

$$v_{n+1} - v_n = (2n + 1) - (2n - 1) = 2n + 1 - 2n + 1 = 2$$

Alors v_n est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = \ln(u_0) = -1$.

Par conséquent l'expression de v_n est : $v_n = 2n - 1$ et la somme des n premiers termes de la

$$\begin{aligned} \text{suite } v_n \text{ est donnée par : } S'_n &= \frac{(n+1)(v_0+v_n)}{2} = \frac{(n+1)(-1+2n-1)}{2} = \frac{(n+1)(2n-2)}{2} \\ &= \frac{2(n+1)(n-1)}{2} = (n+1)(n-1) = n^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = n^2 - 1$$

b-Exprimons le produit $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$ en fonction de n

On sait que : $v_n = \ln(u_n)$

$$\Rightarrow v_0 = \ln(u_0)$$

$$v_1 = \ln(u_1)$$

$$\vdots$$

$$v_n = \ln(u_n)$$

En effectuant membre à membre la somme des termes de l'égalité ci-dessus, on a :

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n) \Leftrightarrow S'_n = \ln(u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n)$$

$$\Rightarrow u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = e^{S'_n} \Leftrightarrow P_n = e^{S'_n}. \text{ Or } S'_n = n^2 - 1 \Rightarrow P_n = e^{n^2 - 1}$$

D'où le produit $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$ en fonction de n est $P_n = e^{n^2 - 1}$

15 Soit la suite u_n ; $n \in \mathbb{N}^*$ à termes positifs tel que : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (u_{n+1})^2 = u_n \times e \end{cases}$

1) Calculons puis Exprime u_1 ; u_2 ; u_3 en fonction de e^k où $k \in \mathbb{R}$.

$$\text{On sait que } (u_{n+1})^2 = u_n \times e \Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{u_n \times e} = \sqrt{u_n} \times \sqrt{e} = (u_n)^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{2}}$$

$$u_1 = 1 = e^0$$

$$u_2 = (u_1)^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$$

$$u_3 = (u_2)^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{2}} = \left(e^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{4}} \times e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{3}{4}}$$

2) On pose $v_n = \ln(u_n) - a$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ $n \in \mathbb{N}^*$).

a-Déterminons le réel a pour que v_n soit une suite géométrique dont on Déterminera la raison et le premier terme v_1 .

$$v_n = \ln(u_n) - a$$

$$v_1 = \ln(u_1) - a = \ln(1) - a = -a$$

$$v_2 = \ln(u_2) - a = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) - a = \frac{1}{2} - a = \frac{1-2a}{2}$$

$$v_3 = \ln(u_3) - a = \ln\left(e^{\frac{3}{4}}\right) - a = \frac{3}{4} - a = \frac{3-4a}{4}$$

Alors les 3 termes v_1 ; v_2 et v_3 sont en progression géométrique si et seulement si :

$$v_1 \times v_3 = (v_2)^2 \Leftrightarrow (-a) \times \left(\frac{3-4a}{4}\right) = \left(\frac{1-2a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{-3a+4a^2}{4} = \frac{1-4a+4a^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$-3a + 4a^2 = 1 - 4a + 4a^2 \Leftrightarrow 4a - 3a = 1 \Rightarrow a = 1.$$

D'où $v_1 = -1$; $v_2 = -\frac{1}{2}$ et $v_2 = -\frac{1}{4}$ et $v_n = \ln(u_n) - 1$

b-Calculons la limite de v_n puis celle de u_n en $+\infty$

v_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{v_2}{v_1} = \frac{-\frac{1}{2}}{-1} = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = -1$.

Alors son expression est $v_n = v_1(q)^{n-1} \Leftrightarrow v_n = -1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -1\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) = -\frac{1}{2^{n-1}}$

$$\Rightarrow v_n = -\frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2^{n-1}} = 0$$

D'autre part $v_n = \ln(u_n) - 1 \Leftrightarrow \ln(u_n) = v_n + 1 = -\frac{1}{2^{n-1}} + 1 \Rightarrow u_n = e^{\left(-\frac{1}{2^{n-1}} + 1\right)}$

$$\Rightarrow u_n = e^{\left(-\frac{1}{2^{n-1}} + 1\right)} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{(0)} = 1$$

16

Après les élections présidentielles 2013 au Mali, l'analyse des résultats a montré que le candidat élu avait obtenu v_1 voies, le 2^e avait obtenu v_2 voies, ainsi de suite jusqu'au dernier des n candidats qui avait obtenu v_n voies. De plus on a constaté que le $k^{\text{ième}}$ candidat avec ($k \geq 1$) avait obtenu le double de voies de son successeur immédiat ($k+1$)^{ième} du classement ; définissant ainsi une suite numérique $(v_n)_{n \geq 1}$

1) Prouvons que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q .

D'après les renseignements ci-dessus, on a : $v_1 = 2v_2$; $v_2 = 2v_3$; $v_3 = 2v_4$ et de manière générale, on a : $v_n = 2v_{n+1} \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$

D'où v_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme v_1 .

2) Le nombre total de votants appelé suffrage exprimé est : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

Un candidat est élu président dès le 1^{er} tour, lorsque son nombre de voies v_1 dépasse la moitié de S_n .

a-Déterminons en fonction de n et v_1 le suffrage exprimé S_n .

Ici, le suffrage exprimé S_n désigne la somme des n premiers termes de la suite géométrique de 1^{er} terme v_1 et de raison $q = \frac{1}{2}$

$$S_n = \frac{v_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$\text{Alors } S_n = \frac{v_1(1-q^n)}{1-q} \Leftrightarrow S_n = \frac{v_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{v_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\frac{1}{2}} = 2v_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2v_1\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

D'où le suffrage exprimé S_n en fonction de n est : $S_n = 2v_1\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

b-Examinons si un deuxième tour à cette élection eut été nécessaire.

Par hypothèse, candidat est élu président dès le 1^{er} tour, lorsque son nombre de voies v_1 dépasse la moitié de S_n où S_n désigne le suffrage exprimé c'est-à-dire : $v_1 > \frac{1}{2}S_n \Leftrightarrow$

$$v_1 - \frac{1}{2}S_n > 0$$

Ainsi étudions le signe de $v_1 - \frac{1}{2}S_n$.

$$v_1 - \frac{1}{2}S_n = v_1 - \frac{1}{2}\left(2v_1\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right) = v_1 - v_1\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = v_1 - v_1 + \frac{1}{2^n}v_1 = \frac{1}{2^n}v_1$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}; \frac{1}{2^n} > 0$ et $v_1 > 0$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}; v_1 - \frac{1}{2}S_n > 0 \Rightarrow v_1 > \frac{1}{2}S_n$.

Puisque $v_1 > \frac{1}{2}S_n$, alors le candidat est élu président dès le 1^{er} tour.

3) En effet le nombre total des votants fut 945 et le candidat fut élu par ses 480 voix.

Déterminons alors le nombre n de candidats qui avaient postulés.

Par hypothèse : $S_n = 945$ et $v_1 = 480$.

En remplaçant $S_n = 945$ et $v_1 = 480$ par leur valeur dans $S_n = 2v_1\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$, on a :

$$\begin{aligned} 945 &= 2 \times 480 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \Leftrightarrow 945 = 960 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2^n} = \frac{945}{960} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{945}{960} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} &= \frac{15}{960} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^6} \Rightarrow n = 6 \end{aligned}$$

Alors on en déduit qu'il y avait $n = 6$ candidats comme postulant.

17 Soit la suite u_n définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{4}{4 - u_n}$ ($n \in \mathbb{N}$)

1) a- Déterminons u_0 pour que u_n soit constante.

La suite est constante ou stationnaire si et seulement $u_n = u_0$ c'est-à-dire $u_0 = \frac{4}{4 - u_0} \Leftrightarrow$

$$u_0(4 - u_0) = 4 \Leftrightarrow u_0^2 + 4u_0 - 4 = 0 \Rightarrow u_0 = 2$$

b-Démontrons que si $u_n < 2$ alors ($n \in \mathbb{N}$); $u_n < u_{n+1} < 2$

En déduisons que si $u_0 < 2$ alors pour tout entier naturel on a : $u_n < 2$ et que u_n est monotone.

Supposons que $u_n < 2$ alors : $4 - u_n > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{4 - u_n}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}; u_n < 2$ et la suite est croissante (donc monotone).

2) On suppose maintenant que $u_0 = -1$

a) Calculons u_1 ; u_2 ; u_3 .

$$u_{n+1} = \frac{4}{4 - u_n} \text{ et } u_0 = -1$$

$$\text{Alors : } u_1 = \frac{4}{5} ; u_2 = \frac{5}{4} ; u_3 = \frac{16}{11}.$$

b) Soit la suite v_n définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$.

Démontrons que v_n est une suite arithmétique dont on Déterminera le premier terme et la raison.

v_n est une suite arithmétique si et seulement si : $v_{n+1} - v_n = r$ où $r = cste$ = la raison.

$$v_n = \frac{1}{u_n - 2} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 2} = \frac{1}{\frac{4}{4 - u_n} - 2} = \frac{1}{\frac{4 - 8 + 2u_n}{4 - u_n}} = \frac{1}{\frac{-4 + 2u_n}{4 - u_n}}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{4 - u_n}{-4 + 2u_n}$$

$$\text{Alors } v_{n+1} - v_n = \frac{4 - u_n}{-4 + 2u_n} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{4 - u_n}{2(u_n - 2)} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{4 - u_n - 2}{2(u_n - 2)}$$

$$= \frac{2 - u_n}{2(u_n - 2)} = \frac{-(u_n - 2)}{2(u_n - 2)} = \frac{-1}{2}$$

D'où v_n est une suite arithmétique de raison $r = \frac{-1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - 2} = \frac{-1}{3}$

c) Calculons u_n en fonction de n puis étudier sa limite en $+\infty$.

v_n étant une suite arithmétique de raison $r = \frac{-1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{-1}{3}$, alors son

expression est $v_n = v_0 + nr = \frac{-1}{3} + \frac{-1}{2}n = -\frac{2+3n}{6}$.

Puisque $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ alors $u_n = 2 + \frac{1}{v_n}$. Or $v_n = -\frac{2+3n}{6}$.

$$\Rightarrow u_n = 2 + \frac{1}{-\frac{2+3n}{6}} = 2 - \frac{6}{2+3n} = \frac{4+6n-6}{2+3n} = \frac{6n-2}{2+3n}$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n-2}{2+3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n}{3n} = \frac{6}{3} = 2$$

18 1°/a) Sachant qu'à 6 heures le bouillon contenait N microbes, calculons le nombre de microbes vivants aux heures suivantes : 7h ; 8h ; 9h ; 10h.

A 6 heures le bouillon contenait $u_1 = N$ microbes

A 7 heures le bouillon contenait $u_2 = \frac{N}{2}$ microbes

A 8 heures le bouillon contenait $u_3 = \frac{N}{4}$ microbes

A 9 heures le bouillon contenait $u_4 = \frac{N}{8}$ microbes

A 10 heures le bouillon contenait $u_5 = \frac{N}{16}$ microbes

b) Montrons que ces nombres sont en progression géométriques

D'après la question a), on a : $u_2 = \frac{1}{2}u_1$; $u_3 = \frac{1}{2}u_2$; $u_4 = \frac{1}{2}u_3$ et $u_5 = \frac{1}{2}u_4$

Donc ces nombres sont en progression géométriques de raison $q = \frac{1}{2}$

Calculons pour tout entier positif n la somme S_n des n premiers termes de cette progression.

Pour une suite géométrique, on a la somme $S_n = \frac{u_1[1-(q)^n]}{1-q}$ or $u_1 = N$ et $q = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow S_n = \frac{N[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}} = \frac{N[1-\frac{1}{2^n}]}{\frac{1}{2}} = 2N\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

2°/ A 12heures, on ajoute au bouillon un produit qui annule l'effet de l'antibiotique. On constate alors que le nombre de microbes vivants dans le bouillon augmente de 25% par heure. Calculons le nombre de microbes vivants dans le bouillon à 14h si $N = 10^{10}$.

A 12 heures le bouillon contient $v_1 = \frac{N}{64}$ microbes $= \frac{10^{10}}{64}$ microbes

A 13 heures le bouillon contient $v_2 = v_1 + 0,25v_1 = 1,25v_1 = 1,25 \frac{10^{10}}{64}$ microbes

A 14 heures le bouillon contient $v_3 = (1,25)^2 \times \frac{10^{10}}{64} = 244140625$ microbes

Progression arithmétiques — Progression géométriques.

19

1) Trouve 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression arithmétique sachant

$$\text{Que : } \begin{cases} a + b + c = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases}$$

On sait que pour une progression arithmétique de 3 termes a ; b ; c , on a : $a + c = 2b$
Ainsi l'équation devient :

$$\begin{cases} 2b + b = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases}$$

D'autre part $a + b + c = 3 \Rightarrow a + 1 + c = 3 \Rightarrow a + c = 2$

$$\begin{cases} a + c = 2 \\ 3a - 6 + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ 3a + c = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - c = -2 \\ 3a + c = 12 \end{cases} \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \text{ et}$$

$$c = -3$$

D'où les nombres a ; b et c sont tels que $a = 5$; $b = 1$ et $c = -3$

2) Trouve 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression géométrique sachant

$$\text{Que : } \begin{cases} a \times b \times c = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases}$$

On sait que pour une progression géométrique de 3 termes ; b ; c , on a : $a \times c = b^2$
Ainsi l'équation devient :

$$\begin{cases} (a \cdot c) \cdot b = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b^2) \cdot b = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^3 = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \\ c - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \\ c = -3 \end{cases}$$

D'où les nombres a ; b et c sont tels que $a = -4$; $b = 3$ et $c = -3$

20 Soient a et b deux réels tel que : $(a ; a + 4b ; 5a + 2b)$ et $(b + 3 ; 3a + 1 ; 6a + b)$ soient des termes consécutifs de suite respectivement arithmétique et géométrique. Trouvons a et b .

$a ; a + 4b$ et $5a + 2b$ étant dans cet ordre 3 termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors on a : $(a) + (5a + 2b) = 2(a + 4b) \Leftrightarrow 6a + 2b = 2a + 8b \Leftrightarrow 2a - 3b = 0$ (1)

De même $b + 3 ; 3a + 1$ et $6a + b$ étant dans cet ordre 3 termes consécutifs d'une suite géométrique, alors on a : $(b + 3)(6a + b) = (3a + 1)^2 \Leftrightarrow$

$$b^2 + 18a + 3b + 6ab = 9a^2 + 6a + 1 \Leftrightarrow 9a^2 - b^2 - 12a - 3b - 6ab + 1 = 0$$
 (2)

Ainsi formons le système avec les équations (1) et (2)

$$\begin{cases} 2a - 3b = 0 & (1) \\ 9a^2 - b^2 - 12a - 3b - 6ab + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) : 2a - 3b = 0 \Rightarrow b = \frac{2}{3}a$$

En remplaçant ainsi $b = \frac{2}{3}a$ par sa valeur dans l'équation (2), on a : $41a^2 - 126a + 9 = 0$

$$\text{et } \Delta = 14400. \text{ Alors } a_1 = \frac{3}{41} \text{ et } a_2 = 3 \text{ puis } b_1 = \frac{2}{41} \text{ et } b_2 = 2$$

D'où les réels a et b sont tels que : $S = \left\{ (3 ; 2) ; \left(\frac{3}{41} ; \frac{2}{41} \right) \right\}$

21 Quatre (4) entiers strictement positifs a, b, c , et d forment dans cet ordre une suite géométrique dont la raison est un entier premier avec a .

Trouvons ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation $10a^2 = d - b$.

Les 4 entiers a, b, c , et d forment dans cet ordre une suite géométrique si et seulement si :

$$b = qa ; c = q^2a ; d = q^3a.$$

$$\text{Alors } 10a^2 = d - b \Leftrightarrow 10a^2 = q^3a - qa \Leftrightarrow 10a^2 = qa(q^2 - 1) \Leftrightarrow 10a = q(q^2 - 1)$$

Nous en déduisons que q divise 10 car $\text{PGCD}(q ; a) = 1$. Donc $q \in \{1 ; 2 ; 5 ; 10\}$

- Si $q = 1$, on a une absurdité car pour $q = 1$, $a = 0$ (qui contredit l'hypothèse).
- Si $q = 2$, on obtient $5a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{5} \notin \mathbb{N}$
- Si $q = 5$, on obtient $a = 12$; $b = 60$; $c = 300$ et $d = 1500$
- Si $q = 10$, on obtient $a = 99$; $b = 990$; $c = 9900$ et $d = 99000$

22 Soit u_n une suite dans laquelle les dix premiers termes de la suite sont en progression arithmétique de raison r et à partir de u_{10} les termes sont en progression géométrique de raison q .

On donne : $u_1 = 0$; $u_{16} = \frac{-1}{27}$ et $qr = 1$

1) Calcule q ; r ; u_{10} et u_{11}

D'après les hypothèses, nous avons :

$$u_{10} = u_1 + 9r = 9r \quad ; \quad u_{11} = q \times u_{10} = q(9r) = 9qr = 9 \times 1 = 9$$

D'autre part $u_{16} = q^5 \times u_{11} \Leftrightarrow \frac{-1}{27} = q^5 \times u_{11}$. Or $u_{11} = 9$. Alors on a : $\frac{-1}{27} = 9q^5 \Leftrightarrow$

$$q^5 = \frac{-1}{243} \Rightarrow q = \sqrt[5]{\frac{-1}{243}} = \frac{-1}{3}$$

Cherchons maintenant la valeur de r .

D'après les hypothèses, nous avons : $qr = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{q}$. Or $q = \frac{-1}{3}$.

Alors $r = -3$ et $u_{10} = -9 \times 3 = -27$

2) Calcule la somme S_n des n premiers termes de la suite u_n dans les deux cas suivants :

a) $n \leq 10$

Lors que $n \leq 10$, on a une suite arithmétique u_n et :

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)r) = -\frac{3n(n-1)}{2}$$

b) Lors que $n > 10$

Lors que $n > 10$, on a une suite géométrique u_n et :

$$S_n = \frac{u_{11}(1 - q^{n-10})}{1 - q} = \frac{9(1 - (\frac{-1}{3})^{n-10})}{1 - (\frac{-1}{3})} = -135 + \frac{27}{4} \left(1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-10}\right)$$

23 Soient Z_1 ; Z_2 et Z_3 trois nombres complexes.

Déterminons : Z_1 ; Z_2 et Z_3 sachant que :

- Le produit des trois complexes Z_1 ; Z_2 et Z_3 est $3i\sqrt{3}$. Alors on a :

$$Z_1 \times Z_2 \times Z_3 = 3i\sqrt{3} \Leftrightarrow [r_1 \times r_2 \times r_3 ; a_1 + a_2 + a_3] = [3\sqrt{3} ; \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 \times r_2 \times r_3 = 3\sqrt{3} \\ a_1 + a_2 + a_3 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Les arguments a_1 ; a_2 et a_3 forment une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$. Alors on a :

$$a_2 = a_1 + \frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad a_3 = a_1 + 2\frac{\pi}{3}$$

- Les modules r_1 ; r_2 et r_3 une suite géométrique de raison 2. Alors on a :

$$r_2 = 2r_1 \quad \text{et} \quad r_3 = 4r_1$$

Ainsi formons le système avec ces trois conditions énumérées ci-dessus :

$$\begin{cases} 8r_1^3 = 3\sqrt{3} \\ 3a_1 + \pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}}}{2} \\ a_1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

D'autre part, $0 < a_1 < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 0 < -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}$

En simplifiant par π et en multipliant par 6, on obtient :

$$0 < -1 + 4k < 4 \Leftrightarrow 1 < 4k < 5 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < k < \frac{5}{4} \Rightarrow k = 1$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} a_1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \\ a_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \\ a_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ r_2 = \sqrt{3} \\ r_3 = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Ainsi connaissant le module et l'argument de Z_1 ; Z_2 et Z_3 ; on a :

$$\begin{cases} Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ Z_2 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \\ Z_3 = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) \end{cases}$$

Suites économiques.

24

Au 1^{er} Janvier 2012, le prix d'un kilo de sucre est de 550 f CFA.

Le prix du kilo subit une augmentation de 50 f CFA au 1^{er} Janvier de chaque année.

1) Déterminons le prix du kilo de sucre au 1^{er} Janvier 2013 et au 1^{er} Janvier 2014

Soit P_0 le prix d'un kilo de sucre au 1^{er} Janvier 2012 tel que $P_0 = 550$.

- Au 1^{er} Janvier 2013 : le prix d'un kilo de sucre serait $P_1 = P_0 + 50 = 550 + 50 = 600$.
- Au 1^{er} Janvier 2014 : le prix d'un kilo de sucre serait $P_2 = P_1 + 50 = 600 + 50 = 650$.

2) On désigne par P_n le prix du kilo du sucre au 1^{er} Janvier + n .

Calculons P_n en fonction de n

Soit P_n le prix d'un kilo de sucre au 1^{er} Janvier + n .

Calculons : $P_1 ; P_2 ; P_3$ et p_n .

- $P_0 = 550$.
- $P_1 = P_0 + 50 = 550 + 50 = 600$.
- $P_2 = P_1 + 50 = 600 + 50 = 650$.
- $P_3 = P_2 + 50 = 650 + 50 = 700$.
- .
- .
- $p_n = P_0 + 50n = 550 + 50n$.

D'où l'expression de P_n en fonction de n est $p_n = 550 + 50n$

3) Calcule $P_{n+1} - P_n$ puis en déduire la nature de la suite P_n .

Calculons $p_{n+1} - p_n$.

$$p_n = 550 + 50n \Rightarrow p_{n+1} = 550 + 50(n + 1) = 550 + 50 + 50n = 600 + 50n$$

$$\Rightarrow p_{n+1} - p_n = (600 + 50n) - (550 + 50n) = 600 + 50n - 550 - 50n = 50$$

Alors p_n est une suite arithmétique de raison $r = 50$.

25

Le premier Janvier 1999, la population d'une commune rurale était de 3000 habitants. On admet que cette population diminue de 4 % chaque année.

Calculons la population de cette commune :

Soit u_n la population de cette commune au 1^{er} Janvier de l'année n .

Soit $u_1 = 3000$ la population initiale de cette commune. On a :

$$u_1 = 3000.$$

$$u_2 = u_1 - 4\%u_1 \Rightarrow u_2 = u_1 (1 - 4\%) = u_1 \left(1 - \frac{4}{100}\right) = u_1 (0,96)$$

$$u_3 = u_2 (0,96)$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$u_{n+1} = u_n (0,96)$$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0,96.$$

Alors on a : une suite géométrique de raison $q = 0,96$.

D'où son expression est : $u_n = u_1(q)^{n-1} = 3000(0,96)^{n-1}$

Déterminons ainsi la population :

1) Au 1^{er} Janvier 2005

On sait que : $u_n = 3000(0,96)^{n-1}$ et $n = 2005 - 1999 = 6$

D'où la population au 1^{er} Janvier 2005 est : $u_6 = 3000(0,96)^{6-1} = 3000(0,96)^5$

$=> u_6 = 2446,11 \approx 2446$

Ainsi la population au 1^{er} Janvier 2005 est : 2244 habitants.

2) Au 1^{er} Janvier 2006

On sait que : $u_n = 3000(0,96)^{n-1}$ et $n = 2006 - 1999 = 7$

D'où la population au 1^{er} Janvier 2006 est : $u_7 = 3000(0,96)^{7-1} = 3000(0,96)^6$

$=> u_7 = 2348,27 \approx 2348$

Ainsi la population au 1^{er} Janvier 2006 est : 2348 habitants.

3) Au 1^{er} Janvier 2012

On sait que : $u_n = 3000(0,96)^{n-1}$ et $n = 2012 - 1999 = 13$

D'où la population au 1^{er} Janvier 2005 est : $u_{13} = 3000(0,96)^{13-1} = 3000(0,96)^{12}$

$=> u_{13} = 1838,12 \approx 1838$

Ainsi la population au 1^{er} Janvier 20012 est : 1838 habitants.

26 La population d'un pays augmente régulièrement de 3% par an.
Reproduisons et complétons le tableau démographique ci-dessous :

Années	2012	2013	2014	2015	2016
Populations			6415000		

Désignons par :

p_0 La population initiale de ce pays, c'est-à-dire la population en 2012.

p_1 La population de ce pays en 2013.

$p_2 = 6415000$, la population de ce pays en 2014.

p_3 La population de ce pays en 2015.

p_4 La population de ce pays en 2016.

Puisque cette population augmente régulièrement de 3% par an, on a :

- En 2013, $p_1 = p_0 + 3\%p_0 = (1 + 3\%)p_0 = (1 + 0,03)p_0 = 1,03p_0$.
- En 2014, $p_2 = p_1 + 3\%p_1 = (1 + 3\%)p_1 = (1 + 0,03)p_1 = 1,03p_1$.

$$\begin{aligned}
 & \cdot \quad \cdot \\
 & \cdot \quad \cdot \\
 & - \text{ En } 2012 + n, p_{n+1} = p_n + 3\%p_n = (1 + 3\%)p_n = (1 + 0,03)p_n = 1,03p_n. \\
 & \Rightarrow p_{n+1} = 1,03p_n \Leftrightarrow \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1,03
 \end{aligned}$$

Alors p_n est une suite géométrique de raison $q = 1,03$ et de premier terme p_0

Ainsi l'expression de cette suite est $p_n = p_0(q)^n \Leftrightarrow p_n = p_0(1,03)^n$

Puisque $p_2 = 6415000$ est la population de ce pays en 2014, alors on a :

$$p_2 = p_0(1,03)^2 \Rightarrow p_0 = \frac{p_2}{(1,03)^2} = \frac{6415000}{1,0609} = 6046752,757 \approx 6046753.$$

D'où la population initiale est $p_0 = 6046753$.

Ainsi :

La population en 2013 est : $p_1 = p_0(1,03)^1 = 6046753 \times 1,03 = 6228156$

La population en 2014 est : $p_2 = 6415000$

La population en 2015 est : $p_3 = p_0(1,03)^3 = 6046753 \times 1,092727 = 6607450$

La population en 2016 est : $p_4 = p_0(1,03)^4 = 6046753 \times 1,12550881 = 6805674$

D'où le tableau est le suivant :

Années	2012	2013	2014	2015	2016
Populations	6046753	6228156	6415000	6607450	6805674

27 Un capital A est placé à intérêts composés aux taux de 3% l'an. On appelle C_0 le capital initial et C_n le capital après n années.

1) Expliquons la relation $C_1 = 1,03C_0$ puis écrire le capital C_n en fonction de C_0 et 1,03 .

Le capital A est placé à intérêts composés au taux de 3% l'an.

Le capital obtenu au bout d'un an, C_1 , est égal à la somme du capital initial C_0 et des intérêts soit $0,03C_0$.

D'où $C_1 = C_0 + 0,03C_0 = 1,03C_0$.

Plus généralement, le capital obtenu au bout de $n + 1$ années, C_{n+1} , est égal à la somme du capital obtenu au bout de n années C_n et des intérêts soit $0,03C_n$.

D'où $C_{n+1} = C_n + 0,03C_n = 1,03C_n$

Où on en déduit que la suite (C_n) est géométrique de raison 1,03 et de premier terme C_0 .

Ainsi l'expression de C_n en fonction de n est le suivant : $C_n = (1,03)^n C_0$

2) Déterminons le nombre d'années au bout du quelle le capital est doublé

Le capital est doublé au bout de n années si et seulement si $C_n \geq 2C_0$ soit $(1,03)^n C_0 \geq 2C_0$.

On cherche donc le plus petit entier n tel que $(1,03)^n \geq 2$.

A l'aide de la calculatrice, on trouve : $(1,03)^{23} < 2 < (1,03)^{24}$

Alors le capital est doublé au bout de 24 ans

3) Déterminons le nombre d'années au bout du quelle le capital est triplé

De même en raisonnant de manière analogue que précédemment, on obtient :

$(1,03)^n \geq 3$ Puis à l'aide de la calculatrice, on trouve : $(1,03)^{37} < 3 < (1,03)^{38}$

Alors le capital est doublé au bout de 38 ans

28

Ali a reçu de son père une somme de 100.000 FCFA.

Après réception, il dépose cette somme dans une caisse d'épargne le 1^{er} Janvier 2009 à intérêt composé au taux annuel de 5 % en vue d'acheter une moto à 300000 FCFA.

1) Déterminons le temps au bout du quel Ali pourra acheter sa moto.

Soient :

- $C_0 = 100.000$ FCFA : le capital initial.
- $C_n = 300.000$ FCFA : la valeur acquise.
- $i = 5 \% = \frac{5}{100} = 0,05$: le taux d'intérêt.

Calculons ainsi la durée n pour que Ali puisse acheter sa moto.

$$\begin{aligned} \text{On a : } C_n &= C_0 (1 + i)^n \Leftrightarrow (1 + i)^n = \frac{C_n}{C_0} \Leftrightarrow (1 + 0,05)^n = \frac{300000}{100000} \Leftrightarrow (1,05)^n \\ &= 3 \text{ (or } a^n = e^{n \ln a} \text{)} \Leftrightarrow (1,05)^n = 3 \Leftrightarrow e^{n \ln(1,05)} = 3 \text{ (or } e^a = b \Leftrightarrow a = \ln b \text{)} \end{aligned}$$

$$e^{n \ln(1,05)} = 3 \Leftrightarrow n \ln(1,05) = \ln 3 \Rightarrow n = \frac{\ln 3}{\ln(1,05)} \Rightarrow n = \frac{1,09}{0,04} \Rightarrow n = 27,25 \approx 27.$$

Donc Ali pourra acheter sa moto au bout de 27 ans.

2) Déterminons la nouvelle valeur acquise par Ali au bout de 30 semestres au taux de 2 %.

$$C_n = C_0 (1 + i)^n \Rightarrow C_{30} = 100.000 (1 + 2 \%)^{30} \Leftrightarrow C_{30} = 100.000 (1 + 0,02)^{30}$$

$$\Rightarrow C_{30} = 100.000 (1,02)^{30} = 181.136 \text{ FCFA.}$$

Donc Ali aura une valeur acquise de 181.136 FCFA au bout de 30 semestres.

29

1) Chaque année la grand-mère de Salif dépose de l'argent dans une banque afin de constituer une cagnotte pour son petit-fils.

Elle a commencé le 1^{er} janvier 1982 par un dépôt de 500 F. Depuis lors, elle a effectué un dépôt chaque 1^{er} janvier, en augmentant chaque année le montant de ce dépôt de 50 F.

On note :

- u_n le montant exprimé en francs, de la somme déposée dans la caisse d'épargne le 1^{er} janvier 1982+ n . (Ainsi $u_0 = 500$; $u_1 = 550$; ...)
- S_n le montant, en francs, de la somme contenue dans la caisse d'épargne après le dépôt de l'année 1982+ n . (Ainsi $S_0 = 500$; $u_1 = 1050$; ...)

a- Calculons u_2 , puis Exprime u_n en fonction de n .

Par hypothèse, on a :

$$u_0 = 500$$

$$u_1 = u_0 + 50 = 550$$

$$u_2 = u_1 + 50 = 600$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$u_{n+1} = u_n + 50$$

Alors la suite u_n est donc arithmétique de raison $r = 50$ et de premier terme $u_0 = 500$.

Ainsi son expression en fonction de n est $u_n = u_0 + nr \Rightarrow u_n = 500 + 50n$.

b- Calculons S_2 , puis exprimons S_n en fonction de n .

$$S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = 500 + 550 + 600 = 1650$$

Le montant, en francs, de la somme stocké à la banque le 1^{er} janvier 1982 + n est la somme de tous les dépôts effectués entre 1982 et 1982 + n , c'est-à-dire : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$, qui est donc la somme des $n + 1$ premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$$\text{Ainsi on a : } S_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2} = \frac{(n+1)(500 + 500 + 50n)}{2} = (n+1)(25n + 500)$$

c- Le 1^{er} janvier 2002, la grand-mère de Salif effectue son dépôt habituel (en franc), puis offre l'argent de la caisse à Salif.

Déterminons le montant de la somme reçue par Salif

On a : 2002 = 1982 + 20. Donc $n = 20$. Il s'agit de Calculer S_{20} .

$$S_n = (n+1)(25n + 500) \Rightarrow S_{20} = (20+1)(25 \times 20 + 500) = 21000 \text{ Franc ou}$$

$$S_{20} = \frac{21000}{6,55957} = 3201,43\text{€}$$

2) Avec le cadeau de sa grand-mère, Salif décide d'ouvrir un compte bancaire et d'y placer la plus grande partie de la somme qu'il a reçue.

Le 1^{er} janvier 2002, il effectue un placement de 3000 €, à intérêts composés, aux taux annuel de 4%. (A la fin de chaque année, les intérêts seront incorporés au capital). De plus, chaque 1^{er} janvier des années suivantes, il décide d'ajouter sur son compte la somme de 200€.

On note :

- C_n le montant exprimé en euros, du capital disponible sur le compte bancaire de Salif après n années de placement. (Ainsi $C_0 = 3000$)
- (u_n) la suite définie par $u_n = C_n + 5000$. (Ainsi $u_0 = 8000$)

a- Justifions que pour tout entier naturel n , on a : $C_{n+1} = 1,04C_n + 200$

Le 31 décembre de chaque année, le capital C_n augmente de 4%. Il vient donc :

$(1 + i)C_n$. Où C_n est le montant exprimé après n années de placement et $i = 4\% = \frac{4}{100}$ le taux d'intérêt annuel.

Alors on a : $(1 + i)C_n = \left(1 + \frac{4}{100}\right)C_n = 1,04C_n$

De plus, le jour suivant (1^{er} janvier), Salif ajoute 200 € sur son compte.

Le nouveau capital C_{n+1} est donc : $C_{n+1} = 1,04C_n + 200$.

b- Démontrons que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

u_n est une suite géométrique si et seulement si : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ où q est la raison.

Par hypothèse on a : $u_n = C_n + 500 \Rightarrow u_{n+1} = C_{n+1} + 5000$. Or $C_{n+1} = 1,04C_n + 200$.

Alors $u_{n+1} = 1,04C_n + 200 + 5000 = 1,04C_n + 5200 \Rightarrow u_{n+1} = 1,04C_n + 5200$

D'autre part $u_n = C_n + 500 \Leftrightarrow C_n = u_n - 500$

En remplaçant $C_n = u_n - 500$ par sa valeur dans $u_{n+1} = 1,04C_n + 5200$, on a :

$$u_{n+1} = 1,04(u_n - 500) + 5200 = 1,04u_n - 500 \times 1,04 + 5200$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = 1,04u_n - 5200 + 5200 \Leftrightarrow u_{n+1} = 1,04u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,04$$

D'où u_n est une suite géométrique de raison $q = 1,04$ et de premier terme $u_0 = C_0 + 5000$

$$\Rightarrow u_0 = 3000 + 5000 = 8000$$

c- Exprimons u_n en fonction de n , puis C_n en fonction de n .

u_n étant une suite géométrique de raison $q = 1,04$ et de premier terme $u_0 = 8000$, alors son

expression en fonction de n est $u_n = u_0(q)^n = 8000(1,04)^n$.

D'autre part $C_n = u_n - 500 \Rightarrow C_n = 8000(1,04)^n - 500$

d- Déterminons le nombre minimum d'années à partir de laquelle Salif devra attendre pour disposer d'une somme de 6000 euros sur son compte bancaire

Il s'agit de Détermine le plus petit entier n tel que : $C_n \geq 600$.

$$C_n \geq 600 \Leftrightarrow 8000(1,04)^n - 500 \geq 600 \Leftrightarrow 8000(1,04)^n \geq 11000 \Leftrightarrow 8(1,04)^n \geq 11 \\ \Leftrightarrow (1,04)^n \geq \frac{11}{8}$$

$$(\text{En appliquant la formule } a^n = e^{n \ln a}), \text{ on a : } (1,04)^n \geq \frac{11}{8} \Leftrightarrow e^{n \ln 1,04} \geq \frac{11}{8} \Leftrightarrow$$

$$n \ln 1,04 \geq \ln \left(\frac{11}{8} \right) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln \left(\frac{11}{8} \right)}{\ln 1,04} \Leftrightarrow n \geq 8,12 \text{ à } 10^{-2} \text{ près soit } n \geq 9 \text{ car } n \text{ est un entier.}$$

D'où Salif devra attendre au moins 9 ans avant de disposer de 6000 € sur son compte.

seydou Dembele
*223 70030464