Applications affines

ISOMETRIES PLANES

OBJECTIFS :

Ce chapitre vise à :

• compléter l’étude des isométries du plan faite dans les classes précédentes par la composition et la décomposition d’isométries ;

• utiliser les compositions et les décompositions pour résoudre des problèmes ;

• faire la classification des isométries.

Commentaires

En Première, on ne compose que des transformations de même nature et la notion d’isométrie n’est pas au programme. En Terminale, la mise en œuvre de la composition de deux isométries et la décomposition d’une isométrie permettront d’étudier les propriétés de ces isométries.

Volume horaire : 16 heures

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
•Définition d’une isométrie. • Décomposition d’une translation et d’une rotation en un produit de symétries orthogonales. • Composée d’une rotation et d’une translation. • composée d’une rotation et d’une symétrie orthogonale. • Composition d’une translation et d’une symétrie orthogonale. • Symétrie glissée. • Classification des isométries : - à l’aide de leurs points invariants ; - en déplacements et antidéplacements • Conservation du barycentre et du contact par une homothétie ou une isométrie	• Utiliser la composée de deux isométries pour : • Démontre une propriété ; • construire une figure ; • Détermine un ensemble de points. • Détermine la nature de la composée de deux isométries. • Mettre en œuvre la décomposition des isométries pour Détermine les éléments caractéristiques de la composée de deux isométries. • Détermine la nature d’une isométrie connaissant l’ensemble des points invariants.

Remarques et suggestions

Dans les classes antérieures, on a entrainé les élèves à utiliser les transformations, (symétries, translations, rotations, homothéties) aux niveaux I et II (voir document EM 2C page 21) pour résoudre des problèmes de géométrie.

En Terminale, on poursuivra cet entraînement en le complétant par le niveau III : *Utiliser les* composées des isométries pour Démontre une propriété, pour construire une figure, pour Détermine un lieu géométrique.

Au niveau III les isométries intervenant dans cette composition doivent être suggérées.

On traitera les notions suivantes qui n’ont pas été vues en Première :

La définition d’une isométrie ; les propriétés de conservation du produit scalaire, du barycentre et du contact par les isométries. La définition de la symétrie glissée comme composée d’une translation de vecteur $\vec{u}$ et d’une symétrie orthogonale d’axe (D) telle que $\vec{u}$ soit vecteur directeur de (D) est à adopter.

Plan n°1

Elle correspond à la lecture dans l’ordre des différentes rubriques du programme. Après avoir défini les isométries (§I), on compose systématiquement toutes celle que l’on connaît en terminant par l’introduction des symétries glissées, découvertes comme composée d’une translation et d’une symétrie orthogonale (§II). On termine par la classification et l’étude des déplacements et antidéplacements (§III et IV). L’intérêt de cette approche est de faire beaucoup manipuler les théorèmes de décomposition, principalement sous forme d’activités.

Plan n°2

Elle consiste à ne traiter dans § 1 que les composées qui doivent être traitées directement (deux symétries orthogonales et deux rotations). Les autres seront traitées comme application des classifications. Dans cette approche, la symétrie glissé est découverte par l’étude des isométries sans point invariant. L’intérêt de cette approche est de faire manipuler les différents modes de raisonnement sur les isométries.

<u>Isométries planes : plan n°1</u>

I- <u>Isométries :</u>

1. Définition (livre ISM, page 71)
2. Conservation du produit scalaire (livre ISM, page 71)
3. Conservation du barycentre (livre ISM, page 72)

II- <u>Composition d’isométries</u> :

1. Rotation (Rappels).
2. Composée de deux symétries orthogonales :

a) D’axes parallèles,

b) D’axes sécants (vu en première, à rappeler)
3. Décomposition d’une translation (livre 1 SM, page 64)
4. Décomposition d’une rotation (livre 1 SM, page 67)
5. Composée de deux rotations :
a) De même centre,
b) De centre distinct (vu en première, page 69. Il est bon de refaire la démonstration en utilisant les théorèmes de décomposition).
6. Composée d’une translation et d’une rotation. (traité directement dans le livre TSM page 8. Il vaut mieux utiliser les théorèmes de décomposition).
7. Systèmes glissées (livre TSM page 83. Pour une étude plus complète, on peut utiliser le livre de TC collection IRMA).
8. Composée d’une rotation et d’une symétrie orthogonale (Non traité dans le livre TSM. Utiliser les théorèmes de décomposition).

III – Classification des isométries (livre TSM page 86) :

1. Isométrie admettant trois points invariants non alignés
2. Isométries distinctes de l’identité admettant deux points invariants distincts
3. Isométries admettant un unique point invariant
4. Isométries sans point invariant.

VI – Déplacement, antidéplacement :

1. Propriété.
   Théorème : Toute symétrie orthogonale transforme un angle orienté en son opposé. (Ce résultat, vu dans les classes précédentes, n’a jamais été démonté, on peut le faire en utilisant l’expression analytique d’une symétrie orthogonale dans un repère convenablement choisi).
2. Définition (livre TSM page 88)
3. Propriétés (livre TSM page 88)
4. Détermination (livre TSM page 89).

Isométries planes : plan n°2

I- Isométries :
1. Définition
2. Conservation du produit scalaire
3. Conservation du barycentre

II- Composition d’isométries
1. Rotation
2. Composée de deux symétries orthogonales :
   a) D’axes parallèles ;
   b) D’axes sécants

3. Décomposition d'une translation
4. Décomposition d'une rotation
5. Composition de deux rotations :
   a) De même centre,
   b) De centres distincts.

III- <u>Classification des isométries</u>

1. Propriété : Toute symétrie orthogonale transforme un angle orienté en son opposé.
2. Définition.
3. Propriétés
4. Composée d'une translation et d'une rotation. (la composée d'une translation et d'une rotation qui n'est pas l'identité est un déplacement et donc une rotation).
5. Composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale (la composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale est une antidéplacement et donc une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée).
6. Détermination d'une isométrie.

GEOMETRIE PLANE ET NOMBRES COMPLEXES

OBJECTIFS :

Ce chapitre vise à Défini l'écriture complexe des transformations du plan pour résoudre des problèmes et géométrie.

Commentaires

Il ne s'agit pas de faire une théorie sur les transformations et leurs écritures complexes, mais d'utiliser ces écritures.

Volume horaire : 6 heures

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Ecriture complexe des transformations : - Translations - Symétries centrales - Symétries orthogonales par rapport aux axes du repère - Homothéties de centre Ω et de rapport λ.	• Détermine l'écriture complexe associée à une transformation donnée. • Détermine les éléments caractéristiques d'une transformation dont on connaît l'écriture complexe

- Rotation de centre Ω et d'angle Θ	• Utiliser l'écriture complexe pour résoudre des problèmes.

Remarques et suggestions

Ce chapitre doit être traité avant les similitudes. Cependant, il peut être intégré soit aux nombres complexes soit aux similitudes directes. Mais l'écriture complexes d'une similitude directe qui n'est ni une isométrie, ni une homothétie sera traitée dans le chapitre "Similitudes".

SIMILITUDES DIRECTES PLANES

OBJECTIFS :

Ce chapitre vise à :

• compléter l'étude des propriétés des homothéties ;

• Défini les similitudes directes du plan et faire une étude géométrique de ces transformations ;

• utiliser les similitudes directes pour résoudre des problèmes.

Commentaires

En classe de première, les similitudes n'ont pas été vues que les propriétés de conservation du barycentre et du contact par les homothéties.

Lors de l'énoncé de la définition d'une similitude directe « Une similitude directe de rapport ($k > 0$) est la composée d'une homothéties de rapport k et d'un déplacement », on fera remarquer que la décomposition d'une similitude directe en composée d'homothétie et de rotation n'est pas unique.

Les similitudes indirectes ne sont pas au programme.

Volume horaire : 14 heures

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Définition : une similitude directe de rapport λ ($\lambda > 0$) est la composée d'une homothétie de rapport λ et d'un déplacement • Forme réduite et éléments caractéristiques d'une similitude directe • Ecriture complexe d'une similitude directe de centre Ω, de rapport λ ($\lambda > 0$) Et d'angle Θ • Propriétés de conservation • Propriété : toute similitude directe multiplie les distances par le rapport. • La composée d'une homothétie de rapport k et d'un déplacement est une similitude directe de rapport $\|k\|$ • Similitude directe déterminée par deux points et leurs images	• Détermine et construire l'image d'un point, d'une droite, d'un segment, d'un cercle par une similitude directe définie par : - Son centre, son angle et son rapport ; - Son centre, un point et son image ; - Son rapport, son angle, un point et son image • Utiliser une similitude directe du plan pour : - Résoudre des problèmes de construction ; - Calcule des distances et des aires ; - Détermine des lieux géométriques ; - Démontre des propriétés (parallélisme, orthogonalité, contact….). • Détermine les éléments caractéristiques d'une similitude directe définie par : - Son centre, un point et son image ; - Deux points et leurs images.

Remarques et suggestions

Il est indispensable de mettre en place des écritures complexes des translations, les rotations et les homothéties avant d'aborder ce chapitre.

On fera remarquer que les translations, les rotations, et les homothéties sont des cas particuliers de similitudes directes.

L'homothétie de rapport k négatif est la composée d'une homothétie de rapport $|k|$ et d'une rotation d'angle π.

Pour la recherche du centre d'une similitude directe qui n'est pas un déplacement, l'élève sera guidé.

Après avoir défini la similitude directe du plan ; on pourra la Caractérise analytiquement au moyen des écritures complexes.

I- Généralité:

1) Définition

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel. Une application de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$ est dite affine lorsqu'elle est de la forme $\vec{u} \to A + \varphi(\vec{u})$ où φ est une application linéaire de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$ (**endomorphisme** de $\mathcal{E}$) dans l'espace après le choix d'une origine O.

Remarque : φ est appelé **l'endomorphisme** associé à l'application affine f.

Par contre à un même endomorphisme peuvent être associées plusieurs application affines dans les expressions analytiques en changent les constantes.

2) Propriétés

P_1 : Les applications affines conservent le barycentre de n points pondérés : c'est-à-dire si f est une application affine, l'image du barycentre d'un système de n points pondérés est le barycentre du système des images de ces points affectés des mêmes coefficients.

Ainsi nous retenons que :

- L'image une droite est une droite.
- L'image d'un plan est un plan.
- L'image d'un segment est un segment.

P_2 : La réciproque d'une transformation affine du plan est une transformation affine du plan.

Exemples d'applications affines :

L'homothétie de centre Ω et de rapport k ; La translation de vecteur $\vec{u}$; la symétrie et la projection de base et de direction données et la rotation de centre Ω et d'angle θ sont des exemples d'applications affines.

3) Application vectorielle associée à une application affine

a) **Définition** : soit f une application affine du plan P dans P et A ; B ; C et D quatre points du plan d'images respectives A' ; B' ; C' et D'.
On appelle application affine vectorielle associée à f , toute application vectorielle $\boldsymbol{v}$ dans $\boldsymbol{v}$ notée φ tel que : $\forall A \in$ p et $\forall B \in$ p on a : $\overrightarrow{A'B'} = \varphi(\overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{f(A)f(B)}$.
D'où $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$.

b) **Propriétés** :

Soit f une application affine du plan p dans p et φ l'application linéaire associée à f.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan vectorielle $\boldsymbol{v}$ et pour tout réel α donné, on a les propriétés suivantes :

P$_1$: $\varphi(\alpha\vec{u}) = \alpha\varphi(\vec{u})$.

P$_2$:$\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$.

P$_3$: $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$

P$_4$: $\varphi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \varphi(\overrightarrow{u_i})$

4) **<u>Points invariants par une application affine *f*</u>**

a) **<u>Définition</u>**

Soit f une application affine du plan P dans P. L'ensemble des points invariants par f est soit un ensemble **vide**, soit un **singleton**, soit une droite ou encore un **plan** tout entier.

b) **<u>Propriétés :</u>**

P$_1$: L'image d'une droite par une transformation affine est une droite.

P$_2$: Si (AB) et (CD) sont deux droites parallèles du plan et ($A'B'$) et ($C'D'$) leur images respectives par une application affine f du plan, alors les droites ($A'B'$) et ($C'D'$) sont parallèles.

P$_3$: Soit f une application affine du plan P dans P.

- Si f est bijective alors f(P) = P
- Si f n'est pas bijective alors f (P) est un singleton ou une droite.

5) **<u>Expression analytique d'une application affine *f*</u>**

a) **<u>Définition</u> :**

Le plan est muni d'une repère (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$). Soit f une application affine du plan et soit φ sont application linéaire associée. Soit (a ; a') ; (b ; b') et (c ; c') les coordonnées respectives de $\varphi(\vec{\imath})$; $\varphi(\vec{\imath})$ $et\ de\ O'$ avec $O' = f(\mathrm{O})$.

On a : $\overrightarrow{O'M'} = \varphi(\overrightarrow{OM})$

$$= \varphi(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})$$

$$= x\varphi\vec{\imath} + y\varphi\vec{\jmath}$$

$$= x\left(a\vec{\imath} + a'\vec{\jmath}\right) + y\left(b\vec{\imath} + b'\vec{\jmath}\right)$$

$$= xa\vec{\imath} + xa'\vec{\jmath} + yb\vec{\imath} + yb'\vec{\jmath}$$

$= (ax + by)\vec{i} + (a'x + b'y)\vec{j}$

$=> (x' - c')\vec{i} + (y' - c')\vec{i} = (ax + by)\vec{i} + (a'x + b'y)\vec{j}$

Par identification on a :

$=> \begin{cases} (x' - c') = (ax + by) \\ (y' - c') = (a'x + b'y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - c' = ax + by \\ y' - c' = a'x + b'y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax + by + c' \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$

b) **<u>propriété</u>:**

Une application f est dite affine lorsque sont expression analytique est sous la forme :

$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$ Avec $a;\ b; c\ ; a'\ ; b'\ ; c'$ tous des nombres réels.

II- Expressions analytiques des transformations

1) Expression analytique d'une translation de vecteur translateur $\vec{u}\binom{a}{b}$

Soient $M\binom{x}{y}$ **et** $M'\binom{x'}{y'}$ deux points quelconques du plan d'affixes respectives Z et Z'.

Soit $\vec{u}\binom{a}{b}$ un vecteur du plan d'affixe $a + ib$.

La translation de vecteur $\vec{u}$ est donnée par la relation : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow Z' - Z = a + ib$

$\Leftrightarrow (x' + iy') - (x + iy) = a + ib \Leftrightarrow (x' - x) + i(y' - y) = a + ib \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}.$

D'où l'expression analytique d'une translation de vecteur $\vec{u}$ est : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$.

2) Expression analytique d'une homothétie de rapport k et de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$

Soient $M\binom{x}{y}$ **et** $M'\binom{x'}{y'}$ deux points quelconques du plan d'affixes respectives Z et Z' .

Soit $\Omega\binom{x_0}{y_0}$ d'affixe $\omega = x_0 + iy_0$ le centre de l'homothétie.

L'homothétie de rapport k et de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$ est donnée par la relation : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$
$<=> Z' - \omega = k(Z - \omega) \Leftrightarrow (x' + iy') - (x_0 + iy_0) = k[(x + iy) - (x_0 + iy_0)] \Leftrightarrow$

$(x' - x_0) + i(y' - y_0) = k[(x - x_0) + i(y - y_0)] \Leftrightarrow$

$(x' - x_0) + i(y' - y_0) = k(x - x_0) + ki(y - y_0) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x' - x_0 = k(x - x_0) \\ y' - y_0 = k(y - y_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x_0 = kx - kx_0 \\ y' - y_0 = ky - ky_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx - kx_0 + x_0 \\ y' = ky - ky_0 + y_0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + x_0 - kx_0 \\ y' = ky + y_0 - ky_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + x_0(1 - k) \\ y' = ky + y_0(1 - k) \end{cases}.$

D'où l'expression analytique d'une homothétie de rapport k et de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$ est :

$\begin{cases} \boldsymbol{x' = kx + x_0(1 - k)} \\ \boldsymbol{y' = ky + y_0(1 - k)} \end{cases}.$

3) <u>Expression analytique d'une rotation d'angle Θ et de centre</u> $\boldsymbol{\Omega\binom{x_0}{y_0}}$

Soient $\boldsymbol{M}\binom{x}{y}$ **et** $\boldsymbol{M'}\binom{x'}{y'}$ deux points quelconques du plan d'affixes respectives Z et Z' .

Soit $\boldsymbol{\Omega\binom{x_0}{y_0}}$ d'affixe $\omega = x_0 + iy_0$ le centre de la rotation

La rotation d'angle Θ et de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$ est donnée par la relation $\boldsymbol{\overrightarrow{\Omega M'} = e^{i\theta}\,\overrightarrow{\Omega M}} \Leftrightarrow$

$Z' - \omega = e^{i\theta}(Z - \omega) \Leftrightarrow (x' + iy') - (x_0 + iy_0) = e^{i\theta}[(x + iy) - (x_0 + iy_0)] \Leftrightarrow$

$(x' - x_0) + i(y' - y_0) = e^{i\theta}[(x - x_0) + i(y - y_0)]$. Or $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$ =>

$(x' - x_0) + i(y' - y_0) = (cos\theta + isin\theta)[(x - x_0) + i(y - y_0)] \Leftrightarrow$

$(x' - x_0) + i(y' - y_0) =$

$(xcos\theta - x_0cos\theta - ysin\theta + y_0sin\theta) + i(xsin\theta - x_0sin\theta - ycos\theta - y_0cos\theta)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = xcos\theta - ysin\theta - x_0cos\theta + y_0sin\theta + x_0 \\ y' = xsin\theta + ycos\theta - x_0sin\theta - y_0cos\theta + y_0 \end{cases}$

D'où l'expression analytique d'une rotation d'angle Θ et de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$ est:

$\begin{cases} \boldsymbol{x' = xcos\theta - ysin\theta - x_0cos\theta + y_0sin\theta + x_0} \\ \boldsymbol{y' = xsin\theta + ycos\theta - x_0sin\theta - y_0cos\theta + y_0} \end{cases}$

4) Expression analytique d'une symétrie centrale de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$

Soient $\boldsymbol{M}\binom{x}{y}$ un point du plan d'affixe Z et $\boldsymbol{M}''\binom{-x}{-y}$ d'affixe Z'' sont symétrique par rapport à l'origine $O\binom{0}{0}$ d'affixe $Z_0 = 0$. Soient $\boldsymbol{M}'\binom{x'}{y'}$ un point quelconque du plan d'affixe Z' et $\boldsymbol{\Omega}\binom{x_0}{y_0}$ d'affixe $\omega = x_0 + iy_0$ le centre de la symétrie.

La symétrie centrale de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$ est donnée par la relation $\overrightarrow{\boldsymbol{M''M'}} = \mathbf{2}\,\overrightarrow{\mathbf{O}\Omega}$ $\Leftrightarrow$

$Z' - Z'' = 2(Z_0 - \omega) \Leftrightarrow (x' + iy') - (-x - iy) = 2(x_0 + iy_0 - 0) \Leftrightarrow$

$x' + iy' + x + iy = 2(x_0 + iy_0) \Leftrightarrow (x' + x) + i(y' + y) = 2x_0 + 2iy_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases}.$

D'où l'expression analytique d'une symétrie centrale de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$ est:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x'} = -\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{x_0} \\ \boldsymbol{y'} = -\boldsymbol{y} + \mathbf{2}\boldsymbol{y_0} \end{cases}.$$

5) Expression analytique d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ) : $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$

De même l'expression analytique d'une symétrie orthogonale est :

$$\begin{cases} x' = x\cos 2\theta + y\sin 2\theta - 2ab \\ y' = x\sin 2\theta - y\cos 2\theta - 2ac \end{cases}$$

6) Expression analytique d'une similitude directe

Soient $\boldsymbol{M}\binom{x}{y}$ **et** $\boldsymbol{M}'\binom{x'}{y'}$ deux points quelconques du plan d'affixes respectives Z et Z' .

Soit $\boldsymbol{z' = az + b\ \ avec\ a\ \ et\ \ b}\ \in \mathbb{C}^*$,l'expression complexe d'une similitude directe.

On a : $z' = az + b \Leftrightarrow x' + iy' = a(x + iy) + b \Leftrightarrow x' + iy' = ax + aiy + b \Leftrightarrow$

$x' + iy' = (ax + b) + aiy \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax + b \\ y' = ay \end{cases}.$

D'où l'expression analytique d'une similitude directe est : $\begin{cases} \boldsymbol{x' = ax + b} \\ \boldsymbol{y' = ay} \end{cases}.$

7) Expression analytique d'une similitude indirecte

Si $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$ **et** $\boldsymbol{M}'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont deux points quelconques du plan tel que

$\boldsymbol{z' = a\bar{z} + b}$ $\boldsymbol{avec\ a\ \ et\ \ b}\ \in\ \mathbb{C}^*$,

alors l'expression analytique d'une similitude indirecte est : $\begin{cases} x' = ax + b \\ y' = -ay \end{cases}$

8) Expression analytique d'une réflexion d'axe Δ

- Réflexion d'axe **Δ** par rapport à la droite d'équation $y = x$, on a : $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$
- Réflexion d'axe **Δ** par rapport à la droite d'équation $y = 0$, on a : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$
- Réflexion d'axe **Δ** par rapport à la droite d'équation $x = 0$, on a : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

III- Les isométries planes

1) Définition :

On appelle isométrie plane, toute application du plan dans lui-même qui **conserve la distance.**

Pour tous points M et N du plan d'images respectives M' et N', on a : $\boldsymbol{MN = M'N'}$.

2) Classification des isométries

a- Isométrie positive ou déplacement

- **Définition** : une isométrie est dite positive ou déplacement lorsqu'elle conserve les angles orientés.

Exemple : la rotation et la translation

- **Expression analytique** :

L'expression analytique d'une isométrie positive est :

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases} avec\ \ a^2 + b^2 = 1$$

- **Propriétés :**

P$_1$: Tout déplacement (**isométrie positive**) est une similitude directe de rapport $k = 1$

P$_2$: Les déplacements sont des transformations qui conservent l'angle orienté **(Rotation ; translation ; symétrie centrale)**

- **Classification des déplacements à partir de l'ensemble des points invariants**

Ensemble des points invariants par *f*	**Nature de la transformation *f***
Plan P	f est l'identité du plan
Ensemble vide $\emptyset$	f est la translation du vecteur non nul
Singleton $\{A\}$	f est la rotation de centre A

b- Isométrie négative ou antidéplacement

- **Définition** : une isométrie est dite négative ou antidéplacement lorsqu'elle transforme tout angle orienté en son opposé.

Exemple : la symétrie orthogonale et la symétrie glissée

- **Expression analytique** :

L'expression analytique d'une isométrie négative est :

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + c' \end{cases} avec - a^2 - b^2 = -1$$

- **Propriétés**

P$_1$: Tout antidéplacement (**isométrie négative**) est une similitude indirecte de rapport $k = 1$

P$_2$: Les antidéplacements sont des transformations qui conservent l'angle orienté **(symétrie orthogonale ; réflexion ; symétrie glissée)**

- **Classification des antidéplacements à partir de l'ensemble des points invariants**

Ensemble des points invariants par *f*	**Nature de la transformation *f***
Droite (D)	f est la symétrie orthogonale par rapport à (D)
Ensemble vide $\emptyset$	f est la symétrie glissée

IV- Caractérisation des transformations

1) Cas de la transformation f : $Z' = aZ + b$

- $si\ a = 1$, alors f est une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'affixe b.
- si $a = -1$, alors f est une symétrie centrale de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$ d'affixe $w = \frac{1}{2}$b.
- $si\ a \in \mathbb{R}^* - \{-1\,;1\}$, alors f est une homothétie de rapport $k = |a|$ et de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$ d'affixe $w = \dfrac{b}{1-a}$.
- $si\ a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = 1$ $alors\ f$ est une rotation d'angle α = $arg(a)$ et de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$ d'affixe $w = \dfrac{b}{1-a}$.
- $si\ a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1$ $alors\ f$ est une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle α = arg(a) et de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$ d'affixe $w = \dfrac{b}{1-a}$.

2) Cas de la transformation f : $Z' = a\bar{Z} + b$

- Si $|a| = 1$, alors f est une symétrie orthogonale d'axe l'ensemble des solutions de $Z' = Z$.
- Si $|a| \neq 1$ $alors\ f$ est une similitude indirecte de rapport $k = |a|$, d'angle α = arg(a) , $d'\ axe\ (\Delta) :\ y = px + q$ et de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$ d'affixe $w = \dfrac{b+a\bar{b}}{1-a\bar{a}}$

V- Composée des transformations

- La composée de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est **une translation $\vec{u}+\vec{v}$.**

- La composée de deux homothéties $h_1(\Omega\ ;\ k_1)$ et $h_2(\Omega\ ;\ k_2)$ est **une homothétie $h(\Omega\ ;\ k_1 \bullet k_2)$** . $Avec\ k_1 \neq k_2$.

- La composée de deux homothéties $h_1(\Omega_1\ ;\ k_1)$ et $h_2(\Omega_2\ ;\ k_2)$ est :

  - Une homothétie $h(\Omega\ ;\ k_1 \bullet k_2)$ si $k_1 \bullet k_2 \neq 1$.
  - Une translation de vecteur $\vec{u}$ si $k_1 \bullet k_2 = 1$.

- La composée d'une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'une homothétie $h(\Omega\ ;\ k)$ est :
  - Une translation si $k = 1$.
  - Une homothétie si $k \neq 1\ et\ \vec{u} = \vec{0}$.

- La composée d'une homothétie et d'une isométrie est une similitude.

- La composée d'une homothétie et d'une symétrie orthogonale est une similitude indirecte.

- La composée de deux antidéplacements est un déplacement.

- La composée de deux déplacements est un déplacement.

- La composée d'un antidéplacement et un déplacement est un antidéplacement.

- La composée de deux rotations r et r' d'angles respectifs α et α' est :

  - Une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$ si $\alpha + \alpha' \neq 0$
  - Une translation $\alpha + \alpha' = 0$

- La composée d'une rotation et d'une translation est une symétrie orthogonale.

VI- <u>Notion sur les matrices</u>

1- <u>Définition :</u>

Une **matrice** $\boldsymbol{A}$ est un tableau rectangulaire d'éléments de k nombres réels.

Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{1;1}} & \boldsymbol{a_{1;2}} \dots & \boldsymbol{a_{1;j}} \dots & \boldsymbol{a_{1;p}} \\ \boldsymbol{a_{2;1}} & \boldsymbol{a_{2;2}} \dots & \boldsymbol{a_{2;j}} \dots & \boldsymbol{a_{2;p}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a_{i;1}} & \boldsymbol{a_{i;2}} \dots & \boldsymbol{a_{i;j}} \dots & \boldsymbol{a_{i;p}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a_{n;1}} & \boldsymbol{a_{n;2}} & \boldsymbol{a_{n;j}} & \boldsymbol{a_{n;p}} \end{pmatrix} \text{ Ou } A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \text{ ou } \left(a_{i,j}\right)$$

<u>**NB :**</u>

- La matrice A est dite de taille $n \times p$ si le tableau possède $\boldsymbol{n}$ lignes et $\boldsymbol{p}$ colonnes.
- Les nombres du tableau sont appelés les **coefficients** de A.
- Le coefficient situé à la $\boldsymbol{i}$ **−ème ligne** et à la $\boldsymbol{j}$ **−ème colonne** est noté $\boldsymbol{a_{i;j}}$.
- Deux matrices sont **égales** lorsqu'elles ont la même taille et que les coefficients correspondants sont égaux.
- L'ensemble des matrices à $\boldsymbol{n}$ lignes et $\boldsymbol{p}$ colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{R})$. Les éléments de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ sont appelés **matrices réelles.**

<u>**Exemple**</u> : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$ avec $\boldsymbol{a_{1;1}} = \mathbf{1}$ et $\boldsymbol{a_{2;3}} = \mathbf{7}$

2- Matrices particulières :

a- **Matrice carrée :** Une matrice est dite carrée si le nombre de lignes $\boldsymbol{n}$ est égal aux nombres de colonnes p $(n = p)$. On la note :

$$A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{1;1}} & a_{1;2} \dots\dots a_{1;p} & & \\ a_{2;1} & \boldsymbol{a_{2;2}} \dots\dots a_{2;p} & & \\ & \ddots & & \\ a_{n;1} & a_{n;2} \quad \dots \quad \dots & & \boldsymbol{a_{n;n}} \end{pmatrix}$$

Les éléments $\boldsymbol{a_{1;1}}$; $\boldsymbol{a_{2;2}}$; ….; $a_{n;n}$ forment la **diagonale principale** de la matrice.

b- **Matrice ligne :** Une matrice est dite ligne si elle n'a qu'une seule ligne $(\boldsymbol{n} = \mathbf{1})$.

On la note : A= $(\boldsymbol{a_{1;1}} ; \boldsymbol{a_{1;2}} \dots \boldsymbol{a_{1;p}})$

c- **Matrice colonne :** Une matrice est dite colonne si elle n'a qu'une seule colonne $(\boldsymbol{p} = \mathbf{1})$. On la note : A= $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{1;1}} \\ \boldsymbol{a_{2;1}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_{n;1}} \end{pmatrix}$

d- **Matrice nulle :** Une matrice est dite nulle si elle est de taille $n \times p \; et$ que tous ces coefficients sont des zéros. On la note : $0_{n\times p}$ ou plus simplement 0.

3- Opération sur les matrices

a- Somme de deux matrices :

Soient A et B deux matrices ayant la même taille $n \times p$. Leur somme $S = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par : $S_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Autrement dit faire la somme $A + B$, revient à faire la somme des coefficients de même emplacement.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ alors $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

b- Produit d'une matrice par un scalaire :

Le produit d'une matrice $A = (a_{i,j})$ de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ par un scalaire α ∈ ℝ, est la matrice$(\alpha a_{i,j})$formée en multipliant chaque coefficient de A par α.

Ce produit est noté $\boldsymbol{\alpha \bullet A}$ ou simplement $\boldsymbol{\alpha A}$.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\alpha = 2$ alors $\alpha A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

NB : la matrice $(-1)A$ est l'opposée de A et est notée $-A$. La différence $A - B$ est définie par : $A + (-B)$.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ alors $A - B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Propriétés :

Soient A, B et C trois matrices appartenant à $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$ deux scalaires.

1. $A + B = B + A$: la somme est commutative,
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$: la somme est associative,
3. $A + 0 = A$: la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition,
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

c- Produit de deux matrices :

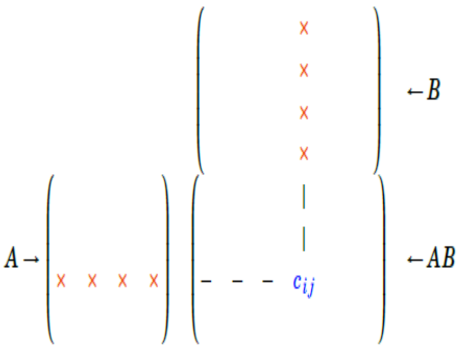
Le produit de deux matrices A et B n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égale au nombre de lignes de B.

A cet effet si $A = (a_{ij})$ est une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ est une matrice $p \times q$.

Alors le produit $P = AB$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients P_{ij} sont définis par :

$P_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + \cdots a_{ik}\, b_{kj} + \cdots a_{ip}\, b_{pj}$.

Ainsi de manière plus pratique, on peut disposer les calculs de la manière suivante :



Avec cette disposition, on considère d'abord la ligne de la matrice A située à gauche du coefficient que l'on veut Calcule (ligne représentée par des $\times$ dans A) et aussi la colonne de la matrice B située au-dessus du coefficient que l'on veut Calcule (colonne représentée par des $\times$ dans B). On calcule le produit du premier coefficient de la ligne par le premier coefficient de la colonne ($a_{i1} \times b_{1j}$), que l'on ajoute au produit du deuxième coefficient de la ligne par le deuxième coefficient de la colonne ($a_{i2} \times b_{2j}$), que l'on ajoute au produit du troisième. . .

<u>Exemple :</u> Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$alors $A - B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

On dispose d'abord le produit correctement (à gauche) : la matrice obtenue est de taille

2×2. Puis on calcule chacun des coefficients, en commençant par le premier coefficient

$C_{11} = 1 \times 1 + 2 \times (-1) + 3 \times 1 = 2$ (au milieu), puis les autres (à droite).

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Un exemple intéressant est le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne :

$$u = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Alors $u \times v$ est une matrice de taille 1×1 dont l'unique coefficient est donnée par :

$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + \cdots a_n b_n$. Ce nombre s'appelle le **produit scalaire** des vecteurs u et v.

Calcule le coefficient c_{ij} dans le produit $A \times B$ revient donc à Calcule le produit scalaire des vecteurs formés par la $i - ème$ ligne de A et la $j - ème$ colonne de B.

<u>Pièges à évité :</u>

- <u>Premier piège</u> : Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.

En effet, il se peut que $\boldsymbol{AB}$ soit défini mais pas $\boldsymbol{BA}$, ou que $\boldsymbol{AB}$ et $\boldsymbol{BA}$ soient tous deux définis mais pas de la même taille. Mais même dans le cas où $\boldsymbol{AB}$ et $\boldsymbol{BA}$ sont définis et de la même taille, on a en général $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{mais} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Deuxième piège : $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.

Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Troisième piège : $AB = AC$ n'implique pas $B = C$ on peut avoir $AB = AC$ et $B \neq 0$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

1. $A(BC) = (AB)C$: associativité du produit,
2. $A(B+C) = AB + AC$ et $(B+C)A = BA + CA$: distributivité du produit par rapport à la somme,
3. $A \cdot 0 = 0$ et $0 \cdot A = 0$.

4- Matrice identité

a- **Définition** : On appelle matrice identité, toute matrice dont ses éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous ses autres éléments sont égaux à 0.
Elle se note $\boldsymbol{I_n}$ ou simplement $\boldsymbol{I}$. Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels. C'est l'élément neutre pour la multiplication.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

b- **Propriété** :

Si A est une matrice $n \times p$, alors : on a : $\boldsymbol{I_n} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$

5- Déterminant d'une matrice (Règle de Sarrus)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. On appelle **déterminant** de A, le réel noté $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{M_A})$ tel que : $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{M_A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

6- Bijection – Projection – Points invariants –Involution

a- Déterminant :

Soit f l'application affine tel qu'on ait : $f : \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$

Soit $mat(f)$ la matrice A de f tel que $mat(f)$ = A = $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$

Soit $det(A)$ le déterminant de la matrice A tel qu'on ait : $det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

b- Bijection

Une application f est dite bijective ou réalise une bijection si et seulement si :

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$$

N.B : On utilise la même méthode pour Montre que trois points A, B, C forment un repère du plan c'est-à-dire $det\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) \neq 0$

c- Projection

Une application f est une projection si et seulement si, $fof = f$, c'est-à-dire s'il existe trois points : $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $M''\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \in P$ tel que : $M'' = f(M) = f(M') \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x'' = ax' + by' + c \\ y'' = a'x' + b'y' + c' \end{cases}$$

d- Points invariants

Une application f admet un point invariant si et seulement si, $\begin{cases} x' = x' \\ y' = y \end{cases}$ c'est-à-dire s'il existe deux points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in P$ tel que : $M' = f(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x = ax + by + c \\ y = a'x + b'y + c' \end{cases}$

e- **Involution**

Une application f est involutive ou réalise une involution si et seulement si : La matrice au carrée de f est égale à la matrice identité c'est-à-dire : $Mat(f^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercices

1 Soit $A(3\,;\ 0)$ et $B(1\,;\ -1)$ deux points du repère $(\,O\,;\ \vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath})$

1) Montre qu'il existe une application affine telle que : $\begin{cases} f(0) = B \\ f(B) = B \\ f(A) = A \end{cases}$

2) Calcule les coordonnées (x', y') de $f(M) = M'$ en fonction des coordonnées (x, y) de M.

3) Calcule fof et déduis la nature et les éléments caractéristiques de l'application f.

2 Détermine la traduction complexe de la transformation f dans chacun des cas :

1) f est la transformation qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$

2) f est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$

3) f est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$ qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + i$

3 Dans le plan $(\,O\,;\ \vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath})$ on considère les points :

$A\binom{2}{0}$; $B\binom{1}{1}$; $C\binom{-2}{-1}$; $A'\binom{3}{10}$; $B'\binom{4}{6}$; $C'\binom{-3}{-1}$

Soit f l'application affine du plan tel que : $f(A) = A'$; $f(B) = B'$; $f(C) = C'$.

1) Montre que f est bijective

2) Détermine l'expression analytique de f.

4 Le plan est muni du repère $(\,O\,;\ \vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath})$.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$

1) Démontre que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe que l'on Précisera.
2) Démontre que $fof = f$
3) a) Détermine l'ensemble des points invariants par f.
   b) En déduis la nature des éléments caractéristiques.

5 On considère dans le plan $(O\ ; \vec{\imath}\ ; \vec{\jmath})$ les points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$$

1) Démontre que $fof = id$

2) Démontre que l'ensemble des points invariants par f est une droite (D) que l'on Précisera.

3) Soit M un point du plan et M' son image par f.

a) Démontre que le point I milieu de $[MM']$ appartient à la droite (D).
b) Démontre que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe orthogonale à celle de (D).
c) En déduis les éléments caractéristiques de f.

6 Le plan euclidien P est rapporté à un repère orthonormé$(O\ ; \vec{\imath}\ ; \vec{\jmath})$.
Etant donné un nombre réel a, on appelle T l'application de P dans P qui a tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

fait correspondre le point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = (a-1)x + 2y \\ y' = ax + y \end{cases}$

1) Détermine le réel a pour que Ta soit bijective.

2) Détermine l'ensemble des points invariants par Ta.

3) Détermine a pour que Ta soit involutive et Caractérise géométriquement l'application Ta correspondant à cette valeur de a obtenue.

7 On considère l'application g de E dans E qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point

$M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -y + 2 \end{cases}$

1) Montre que g est affine, sans point invariant et que son endomorphisme associe φ est involutif.

2) a- Démontre que gog est une translation.

b- Soit $\vec{u}$ le vecteur de cette translation et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$.

Précise la nature de l'application S telle que g = tos puis Prouver que $tos = sot$.

3) Montre que l'image (C') de la courbe (C_{-1}) par g a pour équation $y = -x + 2 + lnx$.

8 Soit l'application affine f.

f: P→P ; $M\binom{x}{y} \rightarrow M'\binom{x'}{y'}$ tel que : $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$

1) Vérifie que f est bijective.

2) Détermine l'ensemble des points invariants par f.

3) On désigne par Z et Z' les affixes respectives des points M et M'. Exprime Z' en fonction de Z.

4) En déduis la nature et les éléments caractéristiques de f.

9 Dans le plan P, on considère la translation $t_{\vec{u}}$ définie par $t_{\vec{u}}$(A) = B où $A\binom{1}{7}$

1) Caractérise cette translation.

2) Détermine le point C' image du point $C\binom{0}{-2}$ par $t_{\vec{u}}$

10 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé$(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives $a = 1 + i$ et $b = -4 - i$
Soit T la transformation du plan P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'
tel que $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$.

1) Exprime z' en fonction de z.

2) Montre que T admet un seul point invariant Ω dont on Donnea l'affixe. En déduis que T est une homothétie dont on Précisera le centre et le rapport.

11 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine f : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$

1) Exprime Z' en fonction de Z.

2) En déduis la nature et les éléments caractéristiques de f.

12 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soient l'application affine f et g deux applications de P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que :

$$f : \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$$

1) Pour chacune des applications f et g :

a- Détermine l'ensemble des points invariants, Précise celles qui sont bijectives.

b- Précise la nature et les éléments caractéristiques de chacune d'elles.

2) Défini analytiquement la réflexion d'axe Δ d'équation $y = x$.

13 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine f : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$$

1) Vérifie que f est bijective.

2) Détermine l'ensemble des points invariants par f

3) f est elle une isométrie ? Justifie votre réponse.

14 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine f : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \rightarrow M'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$$

1) Montre que f admet un seul point invariant J.

2) Montre que $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$ puis en déduis la nature et les éléments caractéristiques de f

3) Détermine le centre et le rayon du cercle (C') image du cercle (C) d'équation :
$x^2 + y^2 - 2y = 0$ par f.

15 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine f : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \rightarrow M'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = -2x - 3y - 2 \end{cases}$$

1) Montre que f est une application et admet un seul point invariant dont on Déterminera les coordonnées.

2) Quels sont la nature géométrique et les éléments caractéristiques de fof ? En déduis

$fofofof$

16 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine T_α : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \rightarrow M'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$$ où α est un paramètre réel.

1) Montre que ∀ α ∈ ℝ, T_α est bijective et admet un unique point invariant que l'on Précisera.

2) Montre qu'il existe une valeur unique de α pour la quelle T_α est une homothétie H dont Précisera le centre et le rapport.

3) a- Montre qu'il existe deux valeurs de α pour les quelles T_α est une isométrie.

b- Vérifie que ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre. On les notera R et R^{-1}

17 Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité $2cm$.

Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ et f_α l'application du plan complexe dans lui-même qui, au point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' telle que : $Z' = (1 + i\tan\alpha)Z - i\tan\alpha$.

1) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f_α .

2) Soit Ω le point d'affixe 1 et M un point du plan distinct de Ω. Montre que si α n'est pas nul, alors $MM'\Omega$ est un triangle rectangle en M. Pour quelle valeur de α, ce triangle est-il isocèle ?

3) On pose dans cette partie $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et on note A; B; C et D les points d'affixes respectives : i ; $2i$; -1 *et* $-1 + i$.

a) Placer les points A; B; C et D dans le plan.

b) Démontre que ABDC est un parallélogramme dont on Précisera l'aire en cm^2

c) Donne l'expression analytique de $f_{\frac{\pi}{4}}$.

d) En déduis les coordonnées des points A' ; B' ; C' *et* D', images respectives par $f_{\frac{\pi}{4}}$ des points A ; B ; C *et* D.

e) Placer ces images dans le plan

18 Dans le plan complexe P, on considère les points A d'affixe $Z_A = 1$; M d'affixe Z et N d'affixe

$Z_N = iZ - (1 + i)$. On note T_λ l'application qui à tout point d'affixe Z, associe le point M', barycentre des points pondérés $(M ; \lambda)$; $(N ; -\lambda)$ et $(A ; 1)$ où λ est un nombre réel non nul.

1-Démontre que pour tout M du plan, le point N est l'image de M par une rotation dont on Précisera les éléments caractéristiques.

2- a- Démontre que l'affixe Z' du point M'est telle que $Z' = \lambda(1 - i)Z + \lambda(1 + i) + 1$.

b- Démontre que T_λ est une similitude directe dont on Précisera l'affixe du centre Ω ; le rapport et l'angle.

c-Pour quelles valeurs de λ , T_λ est-elle une rotation ?

d-Donne dans chacun de ces cas l'angle et l'affixe de son centre.

e- Exprime les coordonnées $(x' ; y')$ du point M' en fonction de celles $(x ; y)$ de M pour chacun des valeurs de λ obtenus.

3- Le nombre réel λ étant strictement positif, on lui associe le point $P(-ln\,\lambda ;\ ln\,\lambda)$.
Soit P' le point du plan tel que $T_\lambda(P) = P'$

a- Détermine les coordonnées de P' en fonction de λ.

b- Démontre que lorsque λ décrit $\mathbb{R}_+^*$; l'ensemble des points P' est la courbe (Γ) d'équation

$y = 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$.

4- On pose $h(x) = y$ de sorte que la courbe de la fonction numérique h est (Γ)

a-Dresse le tableau de variation $de\ h$.

b- Précise une équation de chacune des éventuelles asymptotes à (Γ)

c- Représenter (Γ) dans un repère orthonormé du plan.

19 On donne deux points distincts A et B du plan affine et k un réel non nul. Soit M_1 ; l'image du point M par l'homothétie de centre A et de rapport k.

Soit M' le barycentre des points B et M_1 affectés respectivement des coefficients α et 1, où α est un nombre réel distinct de -1.

Soit f l'application du plan P qui à tout point M du plan associe le point M'.

1) Montre que pour tout point M du plan, on a : $(\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB}$.

2) Montre que si $k = \alpha + 1$ alors f est une translation dont on Déterminera le vecteur translateur.

3) Montre que si $k \neq \alpha + 1$, il existe un unique point invariant G par f puis en déduis alors que f est une homothétie de centre G dont on Déterminera le rapport.

20 On désigne par $(o ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan P. Soit a un nombre réel et f_a l'application affine de P dans luis - même qui au point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = (a+3)x - ay + a + 9 \end{cases}$$

1) a- Démontre que pour toute valeur non nulle de a, f_a est une bijection.

b- Détermine l'application f_a^{-1}, réciproque de f_a pour $a \neq 0$.

c- Détermine l'ensemble des points invariants par f_a. (On discutera suivant les valeurs du un nombre réel a).

2) a- Démontre que seule f_1 est une involution dont on Caractérisera.

b- Démontre que seule f_{-1} est la composée d'une symétrie s et d'une translation t dont le vecteur est un directeur de l'ensemble des points invariants par s, c'est-à-dire que $f_{-1} = tos$.

21 Dans un espace affine euclidienne E rapporté à un repère orthonormé $(o\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$, on donne les points $A\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$

1) Montre qu'il existe un et un seul retournement (demi-tour) noté f tel que $f(O) = A$ et $f(B) = B$. Caractérise géométriquement ce retournement et Donne sa représentation analytique.

2) Soit g l'application de E vers E qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ telle que :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z + 2 \end{cases}$$

Détermine la nature de g et ces éléments caractéristiques. On Précisera $g(A)$ et $g(B)$.

3) Soit $h = fog$. Montre que h est déplacement dont on Déterminera la nature et les éléments caractéristiques.

22 Le plan affine E est rapporté à un repère orthonormé $(o\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$.

On considère l'application f de E dans E qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ telle que : $\begin{cases} x' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

1) a- Montre que pour tout point M, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur constant.

b- Etudier l'ensemble des points invariants par f.

c- Reconnaître la nature de l'application f.

2) Soit g l'application de E dans E qui à tout point $M\binom{x}{y}$associe le point $M''\binom{x''}{y''}$ telle que

: $\begin{cases} x'' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}$

a- Montre que g peut s'écrire hof où h est une application de E dans E que l'on Précisera.

b- Sans Calcule, Vérifie que $hof = foh$.

Solutions

1 Soit $A\binom{3}{0}$ et $B\binom{1}{-1}$ deux points du repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

1) Montrons qu'il existe une application affine telle que : $\begin{cases} f(0) = B \\ f(B) = B \\ f(A) = A \end{cases}$

On a : $\overrightarrow{OA}\binom{3}{0}$ et $\overrightarrow{OB}\binom{1}{-1}$

$$\text{dét}(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow \text{dét}(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) \neq 0$$

Alors $(0 ; \overrightarrow{AB})$est un repère du plan par conséquent il existe une affine car si dét$(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) \neq 0$ alors $O; A ; B$ ne sont pas alignés.

2) Calculons les coordonnées $(x' ; y')$ de $f(M) = M$ en fonction des coordonnées $(x ; y)$ de M.

L'expression analytique de l'application f dans le repère $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ est :

$$f : \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

$$f(0) = B \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c' = -1 \end{cases}$$

$$f(B) = B \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 1 = 1 \\ a' - b' - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a' - b' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a' = b' \end{cases}$$

$f(A) = A \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+1=3 \\ 3a'-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ a' = \frac{1}{3} \end{cases}$. D'où $\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + 1 \\ y' = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - 1 \end{cases}$

3) Calculons fof puis en déduisons la nature et les éléments caractéristiques de f.

Soient $M(x,y)$; $M'(x',y')$; $M''(x'',y'')$ trois points du plan tels que : $f(M) = f(M') = M''$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' + 1 \\ y'' = \frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}y' - 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + 1\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - 1\right) + 1 \\ y'' = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + 1\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - 1\right) - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + 1 \\ y'' = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' \end{cases} \quad \Leftrightarrow fof = f$

<u>Nature et éléments caractéristiques de f:</u>

- $fof = f \Leftrightarrow f$ est une projection

- $f(A) = A$ et $f(B) = B$ alors la droite (AB) est invariante par f ; La projection se fait sur (AB).

- $f(o) = B$ alors la projection de fait parallèlement à la droite (OB).

2 Déterminons la traduction complexe de la transformation f dans chacun des cas :

1) f est la translation qui transforme A d'affixe $-1+i$ en B d'affixe $-2+3i$

La traduction complexe d'une translation est : $f(Z) = Z + q$.

f(A) = B $\Leftrightarrow f(-1+i) = -2+3i \Leftrightarrow -1+i+$ q = $-2+3i$ => q = $-1+2i$

D'où f(Z) = $Z - 1 + 2i$

2) f est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ qui transforme A d'affixe – 1 + i en B d'affixe $-2+3i$

La traduction complexe d'une homothétie est f(Z) = $kZ + q$.

$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1+i) = -2+3i \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(-1+i) + q$ = -2 + 3i => $q = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$

D'où $f(Z) = \frac{1}{2}Z - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$

3) f est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$ qui transforme A d'affixe – 1 + i en B d'affixe – 2 + i

La traduction complexe d'une rotation $est\ f(Z) = e^{i\theta}Z + q$

$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1 + i) = -2 + i \Leftrightarrow e^{i\frac{3\Pi}{4}}\ e^{i\frac{3\pi}{4}}(-1 + i) + q = -2 + i$

=> q = $-2 + i\left(1 + \sqrt{2}\right)$. D'où $f(Z) = Ze^{i\frac{3\pi}{4}} - 2 + i\left(1 + \sqrt{2}\right)$

3 Dans le plan (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) on considère les points :

$A\binom{2}{0}$; $B\binom{1}{1}$; $C\binom{-2}{-1}$; $A'\binom{3}{10}$; $B'\binom{4}{6}$; $C'\binom{-3}{-1}$

Soit f l'application affine du plan tel que : $f(A) = A'$; $f(B) = B'$; $f(C) = C'$.

1) Montrons que f est bijective

f est bijective si et seulement si $det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) \neq 0$ et $det\left(\overrightarrow{A'B'}\,;\overrightarrow{A'C'}\right) \neq 0$

On a $det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = 5$ et $det\left(\overrightarrow{A'B'}\,;\overrightarrow{A'C'}\right) = -13.$

Puisque $det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) \neq 0$ et $det\left(\overrightarrow{A'B'}\,;\overrightarrow{A'C'}\right) \neq 0$. Alors f est une application bijective.

2) Déterminons l'expression analytique de f.

L'expression analytique de f est de la forme $f : \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$

Avec a; b; c ; a' ; b' ; c' tous des nombres réels que l'on Déterminera.

$\begin{cases} \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{A'B'} \\ \varphi\left(\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{A'C'} \end{cases}$ et $\begin{cases} \varphi(\vec{i}) = a\vec{i} + a'\vec{j} \\ \varphi(\vec{j}) = b\vec{i} + b'\vec{j} \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \varphi(-\vec{i} + \vec{j}) = \vec{i} - 4\vec{i} \\ \varphi(-4\vec{i} - \vec{j}) = -6\vec{i} - 11\vec{j} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\varphi(\vec{i}) + \varphi(\vec{j}) = \vec{i} - 4\vec{i} \\ -4\varphi(\vec{i}) - \varphi(\vec{j}) = -6\vec{i} - 11\vec{j} \end{cases}$

En effectuant la somme des équations (1) et (2) , on a :

$-5\varphi(\vec{i}) = -5\vec{i} - 15\vec{j} \Leftrightarrow \varphi(\vec{i}) = \vec{i} + 3\vec{j}$. De même $\varphi(\vec{j}) = 2\vec{i} - \vec{j}$

$$=> \begin{cases} \varphi(\vec{\imath}) = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} \\ \varphi(\vec{\jmath}) = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} \end{cases} => a = 1 \,; b = 3 \,; a' = 3 \text{ et } b' = -1$$

$$=> \begin{cases} x' = x + 2y + c \\ y' = 3x - y + c' \end{cases}$$

D'autre part on a : $f(A) = A => \begin{cases} x'_A = x_A + 2y_A + c \\ y'_A = 3x_A - y_A + c' \end{cases}$ Or $A\binom{2}{0}$ et $A'\binom{3}{10}$ =>

$$\begin{cases} 3 = 2 + 2(0) + c \\ 10 = 3(2) - (0) + c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c' = 4 \end{cases}$$

Ainsi l'expression analytique de f est : $\begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = 3x - y + 4 \end{cases}$

4 Le plan est muni du repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées $(x\,;y)$ associe

le point M' de coordonnées (x', y') tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$

1) Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe que l'on Précisera.

$$\overrightarrow{MM'}\binom{x'-x}{y'-y} => \begin{cases} x' - x = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) - x \\ y' - y = \frac{1}{3}(2x - y - 12) - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = \frac{1}{3}(x - 2y - 6) \\ y' - y = \frac{2}{3}(x - 2y - 6) \end{cases} => \vec{u}\left(\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$$

En posant $k = x - 2y - 6$ on a : $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{MM'}$a même direction que le vecteur $\vec{u}$

2) Démontrons que $fof = f$

Soit $M\binom{x}{y}$; $M'\binom{x'}{y'}$; $M''\binom{x''}{y''}$ tel que : $f(M) = M'$ et $f(M') = M''$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{3}(4x' - 2y' - 6) \\ y'' = \frac{2}{3}(2x' - y' - 12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{3}\left[4\left(\frac{1}{3}(4x - 2y - 6)\right) - 2\left(\frac{1}{3}(2x - y - 12)\right) - 6\right] \\ y'' = \frac{2}{3}\left[2\left(\frac{1}{3}(4x - 2y - 6)\right) - \left(\frac{1}{3}(2x - y - 12)\right) - 12\right] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{3}(4x' - 2y' - 6) \\ y'' = \frac{1}{3}(2x' - y' - 12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' \end{cases} => fof = f.$$

Donc on a : $M' = M''$. Ainsi $fof = f$.

3) a- Déterminons l'ensemble des points invariants par f.

On a $f : \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$ et f admet un point invariant si et seulement si $f(M) = M'$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 6 = 0 \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$

D'où l'ensemble des points invariants par f est la droite (D) d'équation $x - 2y - 6 = 0$

b) En déduisons la nature et les éléments caractéristiques $de\ f$.

* $fof = f$ alors f est une projection

* $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$ alors l'ensemble des points invariants par f est la projection sur (D) et de direction $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

5 On considère dans le plan $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\vec{\jmath})$ les points $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$$

1) Démontrons que $fof = id$

Soient $M(x, y)$; $M'(x', y')$; $M''(x'', y'')$ trois points du plan tels que :

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{13}(5x' - 12y' + 24) \\ y'' = \frac{1}{13}(-12x' - 5y' + 36) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{13}\left[5\left(\frac{1}{13}(5x - 12y + 24)\right) - 12\left(\frac{1}{13}(2x - y - 12)\right) + 24\right] \\ y'' = \frac{1}{13}\left[-12\left(\frac{1}{13}(-12x - 5y + 36)\right) - 5\left(\frac{1}{13}(2x - y - 12)\right) + 36\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{13}(13x) \\ y'' = \frac{1}{13}(13y) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{13}(13x) \\ y'' = \frac{1}{13}(13y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x \\ y'' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x + 0y \\ y'' = 0x + y \end{cases}$. Alors la matrice associée à ce système est :

$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = matrice\ identit\text{é}$. D'où $fof = id$

2) Démontrons que l'ensemble des points invariants par f est une droite (D) que l'on Précisera.

f admet un point invariant si et seulement si il existe deux points $M(x, y)$ et M' (x', y') tel que $f\ (M)\ =\ M'$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{13}x - \frac{13}{13}y + \frac{24}{13} \\ y = -\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y + \frac{36}{13} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y\ =\ -\frac{2}{3}x + 2 \\ y\ =\ -\frac{2}{3}x + 2 \end{cases}$$

D'où l'ensemble des points invariants est la droite (D) d'équation : $y\ =\ -\frac{2}{3}x + 2$

3) Soit M un point du plan et M' son image par f.

a-Démontons que le point I milieu de $[MM']$ appartient à la droite (D).

Les coordonnées du milieu de I du segment $[MM']$ sont données par : $\begin{cases} x_I\ =\ \frac{x_M + x_{M'}}{2} \\ y_I\ =\ \frac{y_M + y_{M'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_I\ =\ \frac{x + x'}{2} \\ y_I\ =\ \frac{y + y'}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I\ =\ \frac{x + \frac{1}{13}(5x - 12y + 24)}{2} \\ y_I\ =\ \frac{y + \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I\ =\ \frac{18x - 12y + 24}{26} \\ y_I\ =\ \frac{-12x + 8y + 36}{26} \end{cases}$$

Ainsi pour que I appartienne à la droite (D) : $y\ =\ -\frac{2}{3}x + 2$ il faut que les coordonnées de I vérifient l'équation de la droite (D).

Alors en remplaçant y par y_{I} et x par x dans (D), on a : 0 = 0

Conclusion I appartient à la droite (D).

b) Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à celle de (D).

$$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' - x = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) - x \\ y' - y = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = \frac{4}{13}(-2x - 3y + 6) \\ y' - y = \frac{6}{13}(-2x - 3y + 6) \end{cases}$$

=> $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{4}{13}\\ \frac{6}{13}\end{pmatrix}$ en posant $k = x - 2y - 6$ on a : $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$

En posant $k = -2x - 3y + 6$, on a : $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$ à une direction fixe orthogonale à celle de (D).

c) En déduisons la nature et les éléments caractéristiques de f.

- $fof = id$ alors f est une involution
- $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$ alors l'ensemble des points invariants par f est la perpendiculaire à (D) et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\frac{4}{13} ; \frac{6}{13}\right)$

6 Le plan euclidien P est rapporté à un repère orthonormé$(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.

Etant donné un nombre réel a, on appelle T l'application de P dans P qui a tout point $M(x, y)$ fait correspondre le point M' (x', y') tel que : $\begin{cases} x' = (a-1)x + 2y \\ y' = ax + y \end{cases}$

1) Déterminons le réel a pour que T_a soit bijective :

T_a est bijective si, et seulement si l'équation $T_a(M) = M'$ où M' est un point donné du plan euclidien P, a une solution et une seule, c'est-à-dire si et seulement si le système linéaire

$\begin{cases} x' = (a-1)x + 2y \\ y' = ax + y \end{cases}$ Admet une solution et une seule. Ainsi il faut et il suffit que le déterminant du système soit nul.

Soit φ l'endomorphisme associé à T_a.

La matrice de T_a dans la base $(\vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ est $M_a = \begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

matrice est $detM_a = \begin{vmatrix} a-1 & 2 \\ a & 1 \end{vmatrix} = (a-1) - 2a = -a - 1 = -(a+1) \neq 0$

Donc T_a est bijective si et seulement si $-(a + 1) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$

2) Déterminons l'ensemble des points invariants par T_a.

T_a admet un point invariant si et seulement si $Ta(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x' = (a-1)x + 2y & (1) \\ y' = ax + y & (2) \end{cases}$

Dans (2), on a : $y = ax + y \Leftrightarrow ax = 0 \Rightarrow a = 0$

Dans (1), on a : $y = x$

Ainsi l'ensemble des points invariants est la première bissectrice d'équation $y = x$

Si $a \neq 0$, alors $x = 0$ et dans (1) $y = 0$

Ainsi l'ensemble des points invariants est l'origine $O\binom{0}{0}$ du repère.

3) Déterminons a pour que Ta soit involutive. T_a est involutive si et seulement si T_a0T_a = Id c'est-à-dire T_a0T_a soit égale à l'application identique de P dans P

Soit A la matrice de l'application linéaire T_a. On a alors : T_a0T_a = id si et seulement si

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Or $A = \begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+1 & 2a \\ a^2 & 2a+1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+1 & 2a \\ a^2 & 2a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+1 = 1 \\ 2a = 0 \\ a^2 = 0 \\ 2a+1 = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 0$$

D'où $a = 0$

L'application T_0 correspondante a pour points invariants ceux de la droite $y = x$ d'après 2°).

Soit f l'application linéaire associée à T_0, cherchons les vecteur $\vec{u}$ du plan vectoriel associé à P tels que $f(\vec{u}) = -\vec{u}$

$f(\vec{u}) = -\vec{u}$ si et seulement si $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\binom{x}{y} = \binom{-x}{-y}$ où $\binom{x}{y}$sont les composantes de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$. D'où $\begin{cases} -x+2y = -x \\ y = -y \end{cases}$

La solution est donnée par $y = 0$ et x quelconque. Les vecteurs $\vec{u}$ sont les vecteurs de composante $(\alpha\,;0)$avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ainsi, ils constituent la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{\imath}$.

L'application T_0 est donc la symétrie affine par rapport à la première bissectrice de direction la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{\imath}$.

7 On considère l'application g de E dans E qui à tout point $M\binom{x}{y}$ associe le point $M'\binom{x'}{y'}$

tel que : $\begin{cases} x' = x+y \\ y' = -y+2 \end{cases}$

1) Montrons que g est affine, sans point invariant et que son endomorphisme associe φ est involutif.

g Admet un point invariant si et seulement si $g(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = x + y \\ y = -y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

(Impossible) donc g n'admet pas de points invariants.

Ainsi l'endomorphisme φ a pour matrice $M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et

$M^2(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Mat\ (id)$. D'où φ est involutif.

2) a- Démontrons que gog est une translation.

$(gog)(M) = M''$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x" = x' + y' \\ y" = -y' + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x" = (x + y) + (-y + 2) \\ y" = -(-y + 2) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x" = x + 2 \\ y" = y \end{cases}$

D'où gog est la translation ponctuelle de vecteur $\vec{u}\binom{2}{0}$

b- Soit $\vec{u}$ le vecteur de cette translation et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$

Précisons la nature de l'application S telle que g = toS puis Prouvons que toS = Sot.

* $\vec{u}\binom{2}{0} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\vec{u}\binom{1}{0}$

* g n'admet pas de point invariant.

* φ est involutif

* gog est la translation du vecteur $\vec{u}$

Ces conditions étant réunis nous dirons que g = toS = Sot avec t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$et S est la symétrie affine par rapport à une droite D engendrée par $\frac{1}{2}\vec{u}$

g = toS (composons à gauche par t^{-1}), on a : S = t^{-1}og => S(M) = M$_1$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x' - 1 \\ y_1 = y' \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x + y - 1 \\ y_1 = -y + 2 \end{cases}$ Avec t^{-1} la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{u}$

S$(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = x + y \\ y = -y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 1 \end{cases}$ .Alors on a la droite (D): $y = 1$

De même $\varphi(\vec{u}) = -\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = x + y \\ -y = y \end{cases}$ .Alors on a la droite (Δ): $2x + y = 0$

S est donc la symétrie affine par rapport à (D) parallèlement à (Δ).

3) Montrons que l'image (C') de la courbe (C_{-1}) par g à pour équation $y = -x + 2 + lnx$.

Avec (C_{-1}) la courbe de la fonction $f_m(x) = mx + e^x$ où $m \in \mathbb{R}$

- La droite (D) à pour équation $x = 0$
- Son image par g est $M\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in (D) \Leftrightarrow g(M) = M'$ avec $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que $\begin{cases} x' = y \\ y' = -y + 2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow y' = -x' + 2$.

D'où l'image de la droite (D) est la droite d'équation $y = -x + 2$

L'image de la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est : $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow x' = 0$

C'est-à-dire l'image de (Δ) est la droite (D) d'équation $x = 0$.

8 Soit l'application affine $f : P \to P$; $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$

1) Vérifions que f est bijective.

Soit φ l'endomorphisme associé à f .

La matrice de f dans la base $(\vec{i}\,;\,\vec{j})$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

Matrice est $det\varphi = \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}$

Alors f est bijective si et seulement si $detM \neq 0$

$detM = \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = (1) + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 1 + 3 = 4 \neq 0$. Alors f est bijective.

2) Déterminons l'ensemble des points invariants par f.

f admet un point invariant si et seulement si $f(M) = M$

$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

D'où $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est le point invariant.

3) Soit Z et Z' d'affixes respectives M et M'.

Exprimons Z' en fonction de Z.

On sait que: $Z' = x' + iy'$. Or $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$

En remplaçant x' et y' par leur valeur dans $Z' = x' + iy'$; on a :

$\Rightarrow Z' = (x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) + i(x\sqrt{3} + y - \sqrt{3})$

$= x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + ix\sqrt{3} + iy - i\sqrt{3}$

$= x + i^2y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + ix\sqrt{3} + iy - i\sqrt{3}$

$= (x + ix\sqrt{3}) + (iy + i^2y\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

$= x(1 + i\sqrt{3}) + iy(1 + i\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

$= (1 + i\sqrt{3})(x + iy) + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$. Or $Z = x + iy$

$\Rightarrow Z' = (1 + i\sqrt{3})Z + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$.

4) En déduisons la nature et les éléments caractéristiques.

NB :

Si $Z' = aZ + b$ avec $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1$. *Alors on a*: une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle $\alpha = arg(a)$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1 - a}$.

On a : $Z' = (1 + i\sqrt{3})Z + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$. Avec $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

Ici $a = 1 + i\sqrt{3} \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = |1 + i\sqrt{3}| = 2 \neq 1$.

Alors f est une similitude directe dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |1 + i\sqrt{3}| = 2$.

a- Angle θ est tel que : $\theta = \arg(a) = \arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

- Centre A$(1 ; 2)$ (point invariant)

9 Dans le plan P, on considère la translation $t_{\vec{u}}$ définie par $t_{\vec{u}}$(A) = B où $A\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$.

1) Caractérisons cette translation.

$t_{\vec{u}}$(A) = B si $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$ => alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}x_B & -x_A\\y_B & -y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3\\7-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$. D'où $\vec{\mathrm{u}}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ est le vecteur de translation.

2) Déterminons le point C′ image du point $C\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ par $t_{\vec{u}}$

On a : $t_{\vec{u}}$(C) = C' ⇔ $\overrightarrow{CC'} = \vec{u}$ ⇔ $\begin{pmatrix}x_{C'} - x_C\\y_{C'} - y_C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_{C'} - 0\\y_{C'} + 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_{C'}\\y_{C'} + 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_{C'} = 4\\y_{C'} = 6-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_{C'} = 4\\y_{C'} = 4\end{cases}$. D'où $C'\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$

10 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé$(\,O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives $a = 1 + i$ et $b = -4 - i$
Soit T la transformation du plan P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$.

1) Exprimons z' en fonction de z.

On a : $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$

$\Leftrightarrow \quad Z_{M'} - Z_0 = 2(Z_M - Z_A) + Z_M - Z_B$

$\Leftrightarrow \quad Z_{M'} - Z_0 = 2Z_M - 2Z_A + Z_M - Z_B$

$\Leftrightarrow \; Z' - 0 = 2Z - 2(1 + i) + Z - (-4 - i)$

$\Leftrightarrow \; Z' = 3Z - 2(1 + i) - (-4 - i)$

$\Leftrightarrow \; Z' = 3Z - 2 - 2i + 4 + i$

$\Leftrightarrow \; Z' = 3Z + 2 - i$

2) Montrons que T admet un seul point invariant Ω dont on Donnea l'affixe.

T admet un seul point invariant si et seulement si $Z' = Z$.

$Z' = Z \; \Leftrightarrow Z = 3Z + 2 - i \; \Leftrightarrow -2Z = 2 - i \; \Leftrightarrow Z = -1 + \frac{1}{2}i$.

D'où $\Omega\left(-1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ est le point invariant.

En déduisons que T est une homothétie dont on Précisera le centre et le rapport.

NB :

Si $Z' = aZ + b$ avec $a \in \mathbb{R}^* - \{-1\ ;1\}$, alors on a : une homothétie de rapport $k = |a|$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.

On a : $Z' = 3Z + 2 - i$. Avec $a = 3$ et $b = 2 - i$

Ici $a = 3 \in \mathbb{R}^* - \{-1\ ;1\}$, alors T est une homothétie dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |3| = 3$

- Centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a} = \frac{2-i}{1-3} = \frac{2-i}{-2} = \frac{2-i}{-2} = -1 + \frac{1}{2}i$

=> $\Omega\left(-1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ est le centre de l'homothétie.

11 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine f : P → P qui à tout point $M\binom{x}{y} \rightarrow M'\binom{x}{y}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$

1) Exprimons Z' en fonction de Z.

On sait que $Z' = x' + iy'$. Or $\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

En remplaçant x' et y' par leur valeur dans $Z' = x' + iy'$; on a :

$Z' = (x - y - 1) + i(x + y - 1)$

$= x - y - 1 + ix + iy - i$

$= x + ix - y + iy - 1 - i$

$= x + ix + i^2y + iy - 1 - i$

$= x(1 + i) + iy(1 + i) - 1 - i$

$= (1+i)(x+iy) - 1 - i$. Or $Z = x + iy$

=>$Z' = (1+i)Z - 1 - i$

2) En déduisons la nature et les éléments caractéristiques de f.

NB :

Si $Z' = aZ + b$ avec $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1$. $Alors\ on\ a$: une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle $\alpha = \arg(a)$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.

On a : $Z' = (1+i)Z - 1 - i$. Avec $a = 1 + i$ et $b = -1 - i$

Ici $a = 1 + i \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = |1+i| = \sqrt{2} \neq 1$.

Alors f est une similitude directe dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |1+i| = \sqrt{2}$

- Centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a} = \frac{-1-i}{1-(1+i)} = \frac{-1-i}{1-1-i} = \frac{-1-i}{-i} = -1 + \frac{1}{2}i = 1 - i$

=> $\Omega(1\,;\,-1)$ est le centre de la similitude directe.

12 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé$(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soient l'application affine f et g deux applications de P → P qui à tout point $M\binom{x}{y} \to M'\binom{x}{y}$ tel que : $f : \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

1) Pour chacune des applications f et g :

a- Déterminons l'ensemble des points invariants, précisons celles qui sont bijectives.

Pour l'application f.

f Admet un point invariant si et seulement si $f(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

=> $\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ => $A(-1\,;\,-1)$ est le point invariant.

f est bijective si et seulement si $detM \neq 0$

Soit φ l'endomorphisme associé à f .

La matrice de f dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ est $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

Matrice est $detM = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

$detM = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Alors f est bijective.

<u>Pour l'application g.</u>

g Admet un point invariant si et seulement si $g(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

=> $\begin{cases} x = x + 2 \\ y = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -1 \\ 0 = -1 \end{cases}$ =>g n'admet pas de point invariant.

g est bijective si et seulement si $detM' \neq 0$

Soit φ' l'endomorphisme associé à g .

La matrice de g dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ est $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

Matrice est $detM' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$detM' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Alors g est bijective.

b- Précisons la nature et les éléments caractéristiques de chacune d'elles.

<u>Pour l'application f.</u>

1ère Méthode

On a f : $\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$

Exprimons Z' en fonction de Z.

On sait que $Z' = x' + iy'$. Or $\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$

En remplaçant x' et y' par leur valeur dans $Z' = x' + iy'$; on a :

$Z' = (2x + 1\,) + i(2y + 1)$

$= 2x + 1 + 2iy + i$

$= 2x + 2iy + 1 + i$

$= 2(x + iy) + 1 + i$. Or $Z = x + iy$

$\Rightarrow Z' = 2Z + 1 + i$

NB :

Si $Z' = aZ + b$ avec $a \in \mathbb{R}^* - \{-1\,;1\}$, alors on a : une homothétie de rapport $k = |a|$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.

On a : $Z' = 2Z + 1 + i$. Avec $a = 2$ et $b = 1 + i$

Ici $a = 2 \in \mathbb{R}^* - \{-1\,;1\}$, alors f est une homothétie dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |2| = 2$

- Centre $A(-1\,;\,-1)$: point invariant.

2ième Méthode

On a $f : \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$ sous la forme $\begin{cases} x' = kx + x_0(1-k) \\ y' = ky + y_0(1-k) \end{cases}$

qui est l'expression analytique d'une homothétie de rapport k et de centre $A(x_0\,;\,y_0)$.

D'où f est une homothétie de rapport $k = 2$ et de Centre $A(-1\,;\,-1)$: point invariant.

Pour l'application g.

1ère Méthode

On a $g : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

Exprimons Z' en fonction de Z.

On sait que $Z' = x' + iy'$. Or $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

En remplaçant x' et y' par leur valeur dans $Z' = x' + iy'$; on a :

$Z' = (x + 2) + i(y - 1)$

$= x + 2 + iy - i$

$= x + iy + 2 - i$

$= (x + iy) + 2 - i$. Or $Z = x + iy$

=>$Z' = Z + 2 - i$

NB :

$si\ \ a\ =\ 1$, alors on a une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'affixe b.

On a : $Z' = Z + 2 - i$. Avec $a = 1$ et $b = 2 - i$

Ici $a = 1$, alors g est une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'affixe $b = 2 - i$ => $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2ième Méthode

On a : g : $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$ sous la forme $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

qui est l'expression analytique d'une translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \end{pmatrix}$.

D'où g est une translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2) Définissons analytiquement la réflexion d'axe Δ d'équation $y = x$.

Soit (S) la réflexion d'axe (Δ) d'équation $y = x$ tel que : $\forall\ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$; on a :

S$(M) = M'$ => $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur normal de (Δ).

Soit I le milieu de $[MM']$ => $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur normal $\vec{n}(-1\ ;\ 1)$.

Alors il existe un réel k tel que $\overrightarrow{MM'} = k\vec{n}$

D'où $\overrightarrow{MM'} = k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = -k \\ y' - y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - k \\ y' = y + k \end{cases}$

Si I est le milieu de $[MM']$ alors : I$\left(\frac{x' + x}{2}\ ;\ \frac{y' + y}{2}\right)$.

I appartient à (Δ) $si\ et\ seulement\ si$ $\frac{x' + x}{2} = \frac{y' + y}{2} \Leftrightarrow x' + x = y' + y$. Or $\begin{cases} x' = x - k \\ y' = y + k \end{cases}$

En remplaçant x' et y' par leur valeur dans $x' + x = y' + y$; on a :

$(x - k) + x = (y + k) + y \Leftrightarrow x - k + x = y + k + y \Leftrightarrow 2x - 2y - 2k = 0$

$\Leftrightarrow x - y - k = 0 \Leftrightarrow k = x - y$

D'où l'expression analytiquement de la réflexion d'axe Δ d'équation $y = x\ est$:

$$\begin{cases} x' = x - (x - y) \\ y' = y + (x - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - x + y \\ y' = y + x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

13 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine f : P → P qui à tout point $M\binom{x}{y} \to M'\binom{x}{y}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$$

1) Vérifions que f est bijective.

f Est bijective si et seulement si $detM \neq 0$

Soit φ l'endomorphisme associé à f .

La matrice de f dans la base $(\vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ est $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

Matrice est : $detM = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

$detM = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \neq 0$. Alors f est bijective.

2) Déterminons l'ensemble des points invariants par f

f Admet un point invariant si et seulement si $f(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y\sqrt{3} = 2 \\ -x\sqrt{3} + y = -2\sqrt{3} \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $x = 2$ et $y = 0$

D'où $A\binom{2}{0}$ est le point invariant.

3) Vérifions si f est une isométrie

f est une isométrie si et seulement si son expression analytique est sous la forme :

$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases}$ C'est-à-dire si $detM = a^2 + b^2 = 1$ avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

On a f : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$ $\Rightarrow detM = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

D'où f est une isométrie et cette isométrie est positive car $a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

14 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine f : P → P qui à tout point $M\binom{x}{y} \rightarrow M'\binom{x}{y}$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$

1) Montrons que f admet un seul point invariant J.

f Admet un point invariant si et seulement si $f(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + 2 \\ 2y = y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$

D'où $J\binom{2}{-4}$ est le point invariant.

2) Montrons que $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$

$\overrightarrow{JM'} = \begin{pmatrix} x' - 2 \\ y' + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + 1 - 2 \\ \frac{1}{2}y - 2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - 1 \\ \frac{1}{2}y + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x-2) \\ \frac{1}{2}(y+4) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$

D'où : $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$

En déduisons la nature et les éléments caractéristiques de f

$\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$ Sous la forme $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega M'}} = \boldsymbol{k}\,\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega M}}$ qui est l'expression d'une homothétie de rapport k et de centre Ω.

D'où f est une homothétie de rapport $k = \frac{1}{2}$ et de centre $J\binom{2}{-4}$

3) Déterminons le centre et le rayon du cercle (C') image du cercle (C) d'équation :
$x^2 + y^2 - 2y = 0$ par f.

On a : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x' = x + 2 \\ 2y' = y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x' - 2 \\ y = 2y' + 4 \end{cases}$

En remplaçant x et y par leur valeur dans $x^2 + y^2 - 2y = 0,$ on a :

$(2x' - 2)^2 + (2y' + 4)^2 - 2(2y' + 4) = 0$

$\Leftrightarrow 4(x' - 1)^2 + 4(y' + 2)^2 - 4(y' + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + (y' + 2)^2 - (y' + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + y'^2 + 4y' + 4 - y' - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + y'^2 + 3y' + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + (y'^2 + 3y') + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + \left[y'^2 - 2\left(-\frac{3}{2}\right)y'\right] + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + \left(y' + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + \left(y' + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + \left(y' + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + \left(y' + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

D'où (C') est le cercle de centre $\left(1\,; -\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $r = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

15 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé$(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine f : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que :

$\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = -2x - 3y - 2 \end{cases}$

1) Montrons que f est une application.

f Est une application si et seulement si $detM \neq 0$

Soit φ l'endomorphisme associé à f .

La matrice de f dans la base $(\vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ est $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

Matrice est : $detM = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$

$detM = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 10 = 1 \neq 0.$ Alors f est une application.

Montrons que f admet un seul point invariant dont on Déterminera les coordonnées.

f Admet un point invariant si et seulement si $f(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

=> $\begin{cases} x = 3x + 5y \\ y = -2x - 3y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ -2x - 4y = 2 \end{cases}$

La résolution de ce système donne : $x = -5$ et $y = 2$

D'où $\Omega(-5\ ;2)$ est le point invariant.

2) Déterminons la nature géométrique et les éléments caractéristiques de fof

fof Est tel que : $\begin{cases} x'' = 3x' + 5y' \\ y'' = -2x' - 3y' - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = 3(3x + 5y) + 5(-2x - 3y - 2) \\ y'' = -2(3x + 5y) - 3(-2x - 3y - 2) - 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = 9x + 15y - 10x - 15y - 10 \\ y'' = -6x - 10y + 6x + 9y + 6 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = -x - 10 \\ y'' = -y + 4 \end{cases}$

Exprimons ainsi Z'' en fonction de Z

$Z'' = x'' + iy''$. Or $\begin{cases} x'' = -x - 10 \\ y'' = -y + 4 \end{cases}$

En remplaçant x'' et y'' par leur valeur dans $Z'' = x'' + iy''$, on a :

$Z'' = (-x - 10\ ) + i(-y + 4)$

$= -x - 10 - iy + 4i$

$= -(x + iy) - 10 + 4i$. Or $Z = x + iy$

=> $Z'' = -Z - 10 + 4i$

NB :

Si $a = -1$, alors f est la symétrie centrale de centre Ω d'affixe $w = \frac{1}{2}$b.

On a : $Z' = Z + 2 - i$. Avec $a = -1$ et $b = -10 + 4i$

Ici $a = -1$, alors f est une symétrie centrale de centre Ω d'affixe $w = \frac{1}{2}$b $= \frac{1}{2}(-10 + 4i)$.

=> $w = -5 + 2i$

D'où $\Omega(-5\,;2)$ est le centre de la symétrie centrale.

En déduisons $fofofof$

Puisque fof est une symétrie centrale alors $fofofof = (fof)o(fof)$ qui est la composée de deux symétries centrales.

Or la composée de deux symétries centrales est une symétrie centrale.

16 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé$(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine T_α : P → P qui à tout point $M\binom{x}{y} \to M'\binom{x}{y}$ tel que :

$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ où α est un paramètre réel.

1) Montrons que ∀ α ∈ ℝ, T_α est bijective

T_α Est bijective si et seulement si $detM_\alpha \neq 0$

Soit φ l'endomorphisme associé à T_α.

La matrice de T_α dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est $M_\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\alpha \\ \alpha & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette matrice est $detM_\alpha = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\alpha \\ \alpha & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (\alpha)^2 = \frac{1}{4} + \alpha^2 \neq 0$. Alors T_α est bijective.

Montrons que T_α admet un unique point invariant que l'on Précisera.

T_α Admet un point invariant si et seulement si $T_\alpha(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

=> $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} 3x + 2\alpha y = 0 \\ 2\alpha x - 3y = 0 \end{cases}$

La résolution de ce système donne : $x = 0$ et $y = 0$

D'où $\Omega(0\,;0)$ est le point invariant.

2) Montons qu'il existe une valeur unique de α pour la quelle T_α est une homothétie H dont Précisera le centre et le rapport.

Pour cela exprimons Z' en fonction de Z.

On sait que $Z' = x' + iy'$. Or $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$

En remplaçant x' *et* y' par leur valeur dans $Z' = x' + iy'$; on a :

$Z' = \left(-\frac{1}{2}x - \alpha y\right) + i\left(\alpha x - \frac{1}{2}y\right)$

$= -\frac{1}{2}x - \alpha y + i\alpha x - \frac{1}{2}yi$

$= \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}yi\right) + (-\alpha y + i\alpha x)$

$= \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}yi\right) + (i^2\alpha y + i\alpha x)$

$= -\frac{1}{2}(x + iy) + i\alpha(x + iy)$

$= \left(-\frac{1}{2} + i\alpha\right)(x + iy)$. Or $Z = x + iy$

=>$Z' = \left(-\frac{1}{2} + i\alpha\right)Z$

<u>NB :</u> Si $Z' = aZ + b$, on dit que T_α est une homothétie $a \in \mathbb{R}^* - \{-1\,;1\}$

Avec $a = -\frac{1}{2} + i\alpha$

Alors $a = -\frac{1}{2} + i\alpha \in \mathbb{R}^* - \{-1\,;1\}$ si et seulement si $\alpha = 0$.

D'où T_α est une homothétie si $\alpha = 0$.

3) a- Montrons qu'il existe deux valeurs de α pour les quelles T_α est une isométrie.

T_α est une isométrie si et seulement si son expression analytique est sous la forme :

$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases}$ C'est-à-dire si $\det(Matf) = a^2 + b^2 = 1$

On a T_α : $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ $\Rightarrow detM_\alpha = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\alpha \\ \alpha & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (\alpha)^2$

$detM_\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (\alpha)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b- Vérifions que ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre. On les notera R et R^{-1}

D'où on a R^+: $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ et R^{-1}: $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$

En observant, on remarque que ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre.

17 Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ d'unité 2cm.

Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et f_α l'application du plan complexe dans lui-même qui, au point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' telle que : $Z' = (1 + i\tan\alpha)Z - i\tan\alpha$.

1) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de f_α .

NB :

Si $Z' = aZ + b$ avec $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1$ alors f est une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle $\alpha = \arg(a)$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.

On a : $Z' = (1 + i\tan\alpha)Z - i\tan\alpha$. Avec $a = 1 + i\tan\alpha$ et $b = -i\tan\alpha$

$|a| = |1 + i\tan\alpha| = \sqrt{1 + \tan^2\alpha} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha} \neq 1$

Alors f_α Est une similitude directe dont les éléments caractéristiques sont :

b- Rapport : $k = |a| = \left|1 + i\tan\alpha\right| = \sqrt{1 + tan^2\alpha} = \sqrt{\frac{1}{cos^2\alpha}} = \frac{1}{cos\alpha}$

c- Angle : $\theta = arg\ (a) = arg\left(1 + i\tan\alpha\right) = \alpha.$

d- Centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a} = \frac{-itan\alpha}{1-(1+itan\alpha)} = \frac{-itan\alpha}{1-1-itan\alpha} = \frac{-itan\alpha}{-itan\alpha} = 1 \Rightarrow$ $\Omega(1;0)$

2) Soit Ω le point d'affixe 1 et M un point du plan distinct de Ω.

e- Montrons que pour $\alpha \neq 0$; alors $MM'\Omega$ est un triangle rectangle en M.

$MM'\Omega$ est un triangle rectangle en M si et seulement si $\frac{Z_\Omega - Z_M}{Z_{M'} - Z_M} = ib$ ou $-ib$

Avec $Z_\Omega = 1$; $Z_{M'} = Z' = (1 + i\tan\alpha)Z - i\tan\alpha$ et $Z_M = Z$

$$\frac{Z_\Omega - Z_M}{Z_{M'} - Z_M} = \frac{(1)-(Z)}{\left[(1+itan\ \alpha)Z - itan\ \alpha\right] - Z} = \frac{1-Z}{Z + iZtan\alpha - itan\ \alpha - Z} = \frac{1-Z}{iZtan\alpha - itan\ \alpha}$$

$$= \frac{1-Z}{-itan\alpha\ (1-Z)} = \frac{1}{-itan\alpha} = \frac{itan\alpha}{tan^2\alpha} = \frac{i}{tan\alpha} = \frac{1}{tan\alpha} i$$ (Sous la forme ib).

D'où $MM'\Omega$ est un triangle rectangle en M.

f- Déterminons la valeur de α pour que ce triangle soit isocèle

$MM'\Omega$ est un triangle isocèle en M si et seulement si $\frac{Z_\Omega - Z_M}{Z_{M'} - Z_M} = i \Leftrightarrow \frac{1}{tan\alpha} i = i \Leftrightarrow$

$\frac{1}{tan\alpha} = 1 \Leftrightarrow tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

3) On pose dans cette partie $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et on note $A; B; C$ et D les points d'affixes respectives : i ; $2i$; $-1\ et\ -1 + i$.

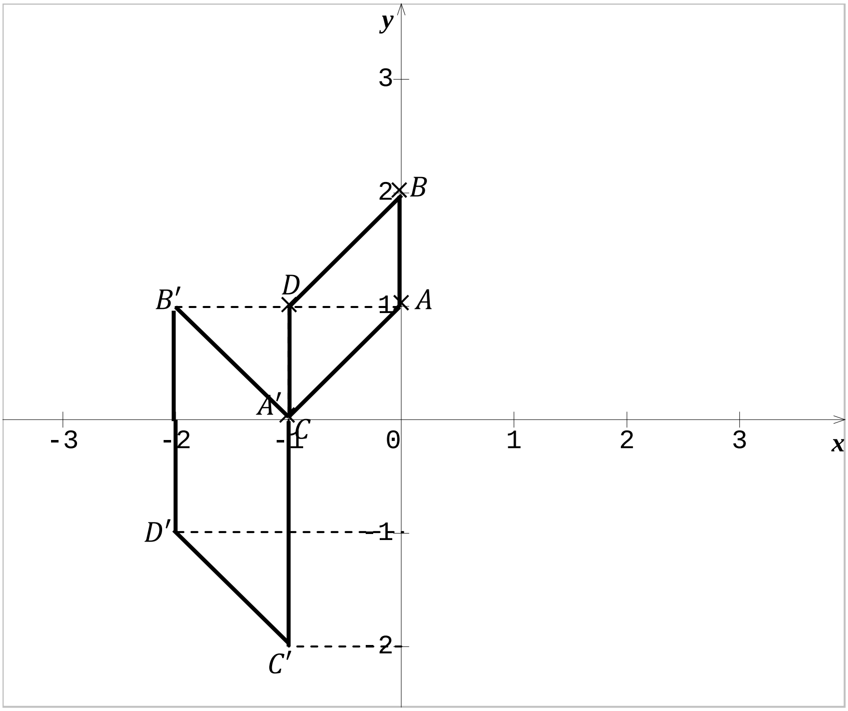
a) Plaçons les points $A; B; C$ et D dans le plan.

$A \rightarrow i \Rightarrow A\binom{0}{1}$

$B \rightarrow 2i \Rightarrow B\binom{0}{2}$

$C \rightarrow -1 \Rightarrow C\binom{-1}{0}$

$D \rightarrow -1 + i \Rightarrow D\binom{-1}{1}$



b) Démontrons que $ABDC$ est un parallélogramme dont on Précisera l'aire en cm^2

$ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\binom{0}{1}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{CD}\binom{0}{1}$

Puisque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $ABDC$ est un parallélogramme.

c) Donnons l'expression analytique de $f_{\frac{\pi}{4}}$.

On a f_α : $Z' = (1 + i\tan\alpha)Z - i\tan\alpha$

=> $f_{\frac{\pi}{4}}$: $Z' = (1 + i\tan\frac{\pi}{4})Z - i\tan\frac{\pi}{4}$

=> $f_{\frac{\pi}{4}}$: $Z' = (1 + i)Z - i$

Alors $Z' = (1 + i)Z - i$

$\Leftrightarrow x' + iy' = (1+i)(x+iy) - i$

$\Leftrightarrow x' + iy' = (x-y) + i(x+y-1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

D'où l'expression analytique de $f_{\frac{\pi}{4}}$ est : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

d) En déduisons les coordonnées des points A' ; B' ; C' *et* D', images respectives par $f_{\frac{\pi}{4}}$ des points A ; B ; C *et* D.

$f_{\frac{\pi}{4}}(A) = A' \Leftrightarrow A'\binom{0-1}{0+1-1} \Rightarrow A'\binom{-1}{0}$

$f_{\frac{\pi}{4}}(B) = B' \Leftrightarrow B'\binom{0-2}{0+2-1} \Rightarrow B'\binom{-2}{1}$

$f_{\frac{\pi}{4}}(C) = C' \Leftrightarrow C'\binom{-1-0}{-1+0-1} \Rightarrow C'\binom{-1}{-2}$

$f_{\frac{\pi}{4}}(D) = D' \Leftrightarrow D'\binom{-1-1}{-1+1-1} \Rightarrow D'\binom{-2}{-1}$

e) Plaçons ces images dans le plan (Voir figure)

18 Dans le plan complexe P, On donne :

$Z_A = 1$

$Z_N = iZ - (1+i)$.

$M' = bary\{(M\,;\,\lambda)\,;\,(N\,;\,-\lambda);\,(A\,;1)\}$

$T_\lambda(M) = M'$ Où λ est un nombre réel non nul.

1-Démontrons que pour tout M du plan, le point N est l'image de M par une rotation dont on Précisera les éléments caractéristiques.

$Z_N = iZ - (1+i)$. (Sous la forme $Z' = aZ + b$) avec $a = i$ et $b = -1 - i$

Puisque $a = i \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = |i| = 1$ *alors* f est une rotation dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |i| = 1$.

- Angle : $\theta = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$

- Centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-1-i}{1-i} = \frac{-(1+i)^2}{2} = -i$ => $\Omega(0\ ;\ -1)$

2- a- Démontrons que l'affixe Z' du point M'est telle que $Z' = \lambda(1-i)\,Z + \lambda(1+i) + 1.$

On a : $M' = bary\{(M\ ;\ \lambda)\ ;\ (N\ ;\ -\lambda);\ (A\ ;1)\}$

=> $Z' = \frac{\lambda Z_M - \lambda Z_N + Z_A}{\lambda - \lambda + 1} = \frac{\lambda Z_M - \lambda Z_N + Z_A}{1} = \lambda Z_M - \lambda Z_N + Z_A$

=> $Z' = \lambda Z - \lambda[iZ - (1+i)] + 1$

$= \lambda Z - \lambda iZ + \lambda(1+i) + 1$

$= \lambda(1-i)\,Z + \lambda(1+i) + 1.$ D'où T_λ: $Z' = \lambda(1-i)\,Z + \lambda(1+i) + 1.$

b- Démontrons que T_λ est une similitude directe dont on Précisera l'affixe du centre Ω ; le rapport et l'angle

<u>NB :</u> Si $Z' = aZ + b\ \ avec\ \ a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1\ alors\ f$ est une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle $\alpha = \arg(a)$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.

On a T_λ: $Z' = \lambda(1-i)\,Z + \lambda(1+i) + 1$. Avec $a = \lambda(1-i)$ et $b = \lambda(1+i) + 1$

Ici $a = \lambda(1-i) \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = |\lambda(1-i)| = \sqrt{2\lambda^2} = \lambda\sqrt{2} \neq 1$

Alors T_λ est une similitude dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |\lambda(1-i)| = \sqrt{2\lambda^2} = \lambda\sqrt{2}$

- Angle : $\theta = \arg[\lambda(1-i)] = -\frac{\pi}{4}$

- Centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{\lambda(1+i)+1}{1-[\lambda(1-i)]} = \frac{1-2i\lambda^2}{(1-\lambda)^2+\lambda^2}$

$= \frac{1}{(1-\lambda)^2+\lambda^2} + i\frac{-2\lambda^2}{(1-\lambda)^2+\lambda^2}$ => $\Omega\left(\frac{1}{(1-\lambda)^2+\lambda^2}\ ;\ \frac{-2\lambda^2}{(1-\lambda)^2+\lambda^2}\right)$

c-Déterminons les valeurs de λ , pour la quelle T_λ est une rotation.

T_λ Est une rotation $si\ a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = 1$ or $a = \lambda(1-i)$

Puis que λ est un nombre réel non nul alors $\lambda(1-i) \in \mathbb{C}^* - \{1\}$

Alors la seconde condition est satisfaite si $|a| = 1 \Leftrightarrow \; |\lambda(1-i)| = 1 \; \Leftrightarrow \sqrt{2\lambda^2} = 1$

$$\Leftrightarrow |\lambda|\sqrt{2} = 1 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} -\lambda\sqrt{2} = 1 \\ ou \\ \lambda\sqrt{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ ou \\ \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

d-Donnons dans chacun de ces cas l'angle et l'affixe de son centre.

g- Pour $\boldsymbol{\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$, on a :

- Angle : $\theta = \arg\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right] = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$
- Centre $\Omega\left(\frac{1}{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \;;\; \frac{-2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right) \Rightarrow \Omega\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} \;;\; -\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$

h- Pour $\boldsymbol{\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}}$, on a :

- Angle : $\theta = \arg\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right] = -\frac{\pi}{4}$
- Centre $\Omega\left(\frac{1}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \;;\; \frac{-2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right) \Rightarrow \Omega\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2} \;;\; -\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$

e- Exprimons les coordonnées $(x' ; y')$ du point M' en fonction de celles $(x ; y)$ de M pour chacun des valeurs de λ obtenus.

i- Pour $\boldsymbol{\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$, on a :

$$T_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} : \; Z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\,Z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) + 1$$

$$\Leftrightarrow x' + iy = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(x+iy) - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) + 1$$

$$\Leftrightarrow x' + iy = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+y+1-\sqrt{2}\right) + i\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+y+1-\sqrt{2}\right) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y-1) \end{cases}$$

j- Pour $\boldsymbol{\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}}$, on a :

$$T_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}:\ Z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\,Z + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)+1$$

$$\Leftrightarrow x' + iy = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(x+iy) - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)+1$$

$$\Leftrightarrow x' + iy = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+y+1+\sqrt{2}\right) + i\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y+1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+y+1+\sqrt{2}\right) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y+1) \end{cases}$$

3- Le nombre réel λ étant strictement positif, on lui associe le point $P(-ln\lambda\,;\ ln\lambda)$.

Soit P' le point du plan tel que $T_\lambda(P) = P'$

a- Déterminons les coordonnées de P' en fonction de λ.

Pour cela Exprimons les coordonnées $(x'\,;y')$ du point M' en fonction de celles $(x\,;y)$ de M

On a : $T_\lambda:\ Z' = \lambda(1-i)\,Z + \lambda(1+i)+1$

$$\Leftrightarrow x' + iy = \lambda(1-i)(x+iy) + \lambda(1+i)+1$$

$$\Leftrightarrow x' + iy = \lambda\left(x+y+1+\frac{1}{\lambda}\right) + i\lambda(-x+y+1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \lambda\left(x+y+1+\frac{1}{\lambda}\right) \\ y' = \lambda(-x+y+1) \end{cases}$$

Alors $T_\lambda(P) = P' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{P'} = \lambda\left(-ln\lambda + ln\lambda + 1 + \frac{1}{\lambda}\right) \\ y_{P'} = \lambda\left(ln\lambda + ln\lambda + 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{P'} = \lambda\left(1+\frac{1}{\lambda}\right) \\ \square_{P'} = \lambda(2ln\lambda + 1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{P'} = \lambda + 1 \\ y_{P'} = 2\lambda ln\lambda + \lambda \end{cases} \Rightarrow P'\left(\lambda+1\ ;\ 2\lambda ln\lambda + \lambda\right)$$

b- Démontrons que lorsque λ décrit $\mathbb{R}_+^*$; l'ensemble des points P' est la courbe (Γ) d'équation

$y = 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$.

On a : $\begin{cases} x_{P'} = \lambda + 1 \\ y_{P'} = 2\lambda ln\lambda + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = 2\lambda ln\lambda + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x - 1 & (\mathbf{1}) \\ y = 2\lambda ln\lambda + \lambda & (\mathbf{2}) \end{cases}$

En éliminant λ entre les équations $(\mathbf{1})$ et $(\mathbf{2})$ **;** on a :

$y = 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$

D'où lorsque λ décrit $\mathbb{R}_+^*$; l'ensemble des points *P'* est la courbe (Γ) d'équation

$y = 2(x-1)ln(x-1) + (x-1).$

4- On pose $h(x) = y$ de sorte que la courbe de la fonction numérique h est (Γ)

a- Dressons le tableau de variation $de\ h$.

$h(x) = y \Leftrightarrow h(x) = 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$

$Dh = \{x/x \in \mathbb{R}\,; x-1 > 0\}$ => $Dh =]1\,; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 1} h(x) = \lim\limits_{x \to 1} 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$

Effectuons un changement de variable en posant $X = x - 1$

Si $x \to 1$ Alors $X \to 0$

D'où $\lim\limits_{x \to 1} h(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{X \to 0} 2XlnX + X = 0$

De même

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$

Effectuons un changement de variable en posant $X = x - 1$

Si $x \to +\infty$ Alors $X \to +\infty$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{X \to +\infty} 2XlnX + X = +\infty$

$h(x) = 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$ => $h'(x) = 2ln(x-1) + 3$

Posons $h'(x) > 0 \Leftrightarrow 2ln(x-1) + 3 > 0 \Leftrightarrow ln(x-1) > -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x - 1 > e^{-\frac{3}{2}}$

$\Leftrightarrow x > e^{-\frac{3}{2}} + 1.$

Ainsi on dira que pour les $x > e^{-\frac{3}{2}} + 1$; on a : $h'(x) > 0$.

D'où le tableau de variation de h est le suivant :

x	1		$e^{-\frac{3}{2}} + 1$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-0{,}44$	$\nearrow$	$+\infty$

b- Précisons une équation de chacune des éventuelles asymptotes à (Γ)

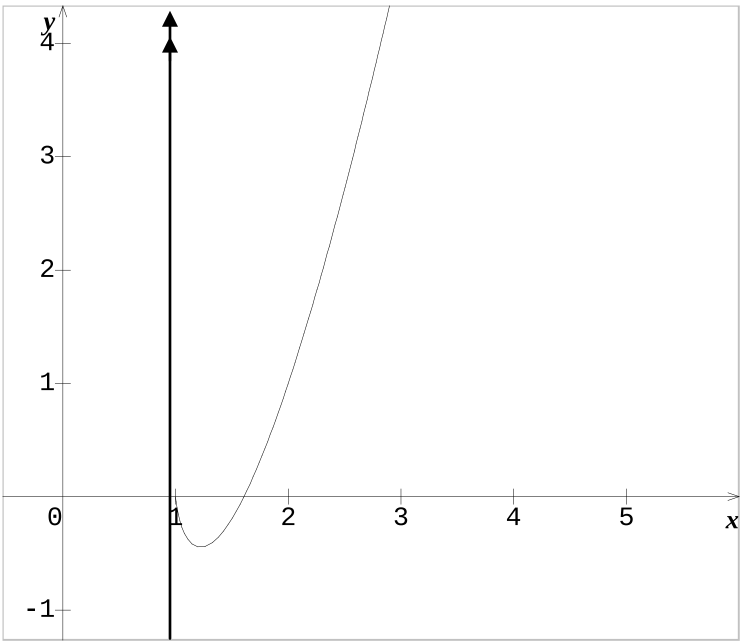
$x = 1$ Est asymptote verticale en $+\infty$

$lim \frac{h(x)}{x} = +\infty$

$x \to +\infty$

Alors la courbe (Γ) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (oy)

c- Représentons (Γ) dans un repère orthonormé du plan.



19 On donne deux points distincts A et B du plan affine et k un réel non nul tel que :

k- M_1; est l'image du point M par l'homothétie de centre A et de rapport k $\Leftrightarrow$

$M_1 = h_{(A;k)}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM_1} = k\overrightarrow{AM}$

l- $M' = bary\{(B,\alpha);(M_1,1)\}$

1) Montrons que pour tout point M du plan, on a : $(\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB}$.

$M' = bary\{(B,\alpha);(M_1,1)\}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\alpha\overrightarrow{M'B}} + \underbrace{\overrightarrow{M'M_1}} = \vec{0}$

Introduisons **Introduisons**

Le point *M* **Le point *A***

$\Rightarrow \alpha\left(\overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM_1}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{0}$.

Or d'après la relation de Chasles on a : $\overrightarrow{M'A} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MA}$

Alors $\alpha\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \left(\alpha\overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{M'M}\right) + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{0}$

Or par hypothèse on a : $\overrightarrow{AM_1} = k\overrightarrow{AM}$

Alors $(\alpha+1)\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{AM} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + (1-k)\overrightarrow{MA} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{M'M} + (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{M'M} = -(1-k)\overrightarrow{MA} - \alpha\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

D'où pour tout point M du plan, on a : $(\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{\square B}$.

2) Montrons que si $k = \alpha + 1$ alors f est une translation dont on Déterminera le vecteur translateur.

On sait que $(\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB}$. Or $k = \alpha + 1$

=> $(1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MM'}$.

D'où $(1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB}$ est un vecteur constant et par conséquent $f(M) = M'$ avec

$\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{\alpha+1}\vec{u}$ Où $\vec{u} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB} + \alpha\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{u} = \alpha\overrightarrow{AB}$

En conclusion f est une translation de vecteur $\vec{v} = \frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{AB}$

3) Montrons que si $k \neq \alpha + 1$, il existe un unique point invariant G par f

Si $k \neq \alpha + 1$, le système $\{(B, 1-k) ; (B, \alpha)\}$ admet un barycentre G tel que :

$\alpha\overrightarrow{GB} + (1-k)\overrightarrow{GA} = \vec{0} \Leftrightarrow f(G) = G$.

D'où G est le seule point invariant par f.

En déduisons alors que f est une homothétie dont on Déterminera les éléments caractéristiques

$(\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MG} + (1-k)\overrightarrow{GA} \Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{GM'} = -k\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = \frac{k}{\alpha+1}\overrightarrow{GM}$

D'où f est une homothétie de rapport $\frac{k}{\alpha+1}$ et de centre G.

20 On désigne par $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan P. Soit a un nombre réel et f_a l'application affine de P dans luis - même qui au point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = (a+3)x - ay + a + 9 \end{cases}$$

1) a- Démontrons que pour toute valeur non nulle de a, f_a est une bijection.

Soit φ l'endomorphisme associé à f_a.

La matrice de f_a dans la base $(\vec{i} ; \vec{j})$ est $M_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a+3 & -a \end{pmatrix}$

Ainsi le déterminant associé à cette matrice est : $detM_a = \begin{vmatrix} a & 0 \\ a+3 & -a \end{vmatrix}$

$detM_a = \begin{vmatrix} a & 0 \\ a+3 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - 0(a+3) = -a^2 \neq 0 \iff a \neq 0.$

D'où pour toute valeur non nulle de a , f_a est bijective.

b- Déterminons l'application f_a^{-1}, réciproque de f_a pour $a \neq 0$.

Pour $a \neq 0$, $f_a(M) = M' \iff f_a^{-1}(M') = M \iff \begin{cases} x' = ax \\ y' = (a+3)x - ay + a + 9 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} x = \frac{1}{a}x' \\ ay = \frac{a+3}{a}x' - y' + a + 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{a}x' \\ y = \frac{a+3}{a^2}x' - \frac{1}{a}y' + \frac{a+9}{a} \end{cases}$

D'où f_a^{-1} est définie par :

f_a^{-1}: $M\binom{x}{y} \mapsto M_1\binom{x_1}{y_1}$ Avec $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a}x \\ y_1 = \frac{a+3}{a^2}x - \frac{1}{a}y + \frac{a+9}{a} \end{cases}$

c- Déterminons l'ensemble des points invariants par f_a**.** (On discutera suivant les valeurs du un nombre réel a).

L'ensemble des points invariants par f_a est donné par $f_a(M) = M \iff$

$\begin{cases} x = ax \\ y = (a+3)x - ay + a + 9 \end{cases} \iff \begin{cases} (a-1)x = 0 \\ (a+3)x - (a+1)y = -a - 9 \end{cases}$

Le déterminant associé à ce système est $detM_a = \begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ a+3 & -(a+1) \end{vmatrix} = -(a-1)(a+1)$

Alors $detM_a = 0 \iff -(a-1)(a+1) = 0 \iff a = 1$ ou $a = -1$

m- <u>**Si $a = 1$**</u>

On a $f_1(M) = M \iff \begin{cases} x = x \\ y = 4x - y + 10 \end{cases} \iff 4x - 2y = -10 \iff 2x - y + 5 = 0$

D'où pour $\boldsymbol{a = 1}$, l'ensemble des points invariants chercher est la droite d'équation :

$2x - y + 5 = 0$

n- <u>**Si $a = -1$**</u>

On a $f_{-1}(M) = M \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x \\ y = 2x + y + 8 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2x = -8 \end{cases}$ ce qui est absurde.

D'où pour $a = -1$, l'ensemble des points invariants n'existe pas.

2) a- Démontrons que seule f_1 est une involution.

On a $f_1 : \begin{cases} x' = x \\ y' = 4x - y + 10 \end{cases}$

Soit φ l'endomorphisme associé à f_1.

Ainsi la matrice de f_1 dans la base $(\vec{i}\,;\,\vec{j})$ est $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Par conséquent f_1 est involutive si et seulement si $M_1 \times M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ = (matrice identique)

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ => $M_1 \times M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'où f est involutive.

Caractérisons cette involution.

- On sait que la droite d'équation : $2x - y + 5 = 0$ est l'ensemble des points invariants par f_1.

- On sait que aussi que $\varphi_{-1}(\vec{u}) = -\vec{u} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x \\ -y = 4x - y \end{cases} \quad \Leftrightarrow x = 0$

Conclusion : f_1 est la symétrie affine par rapport à la droite $2x - y + 5 = 0$ parallèlement à la droite vectorielle $x = 0$.

b- Démontrons que seule f_{-1} est la composée d'une symétrie s et d'une translation $\boldsymbol{t}$ dont le vecteur est un directeur de l'ensemble des points invariants par s, c'est-à-dire que $f_{-1} = tos$.

On a $f_{-1} : \begin{cases} x' = -x \\ y' = 2x + y + 8 \end{cases}$

Soit φ' l'endomorphisme associé à f_{-1}.

Ainsi la matrice de f_{-1} dans la base $(\vec{i}\,;\,\vec{j})$ est $M_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Par conséquent $M_{-1} \times M_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice identique)

D'où f_{-1} est involutive.

D'autre part, f_{-1} n'admet pas de point invariant donc $f_{-1} = tos = sot$ où s est une symétrie et t une translation.

$f_{-1} o f_{-1} = (tos)o(sot) = to(sos)ot = tot$.

Si $\vec{u}$ est le vecteur de la translation t, alors $tot = t_{2\vec{u}}$ et par conséquent $t_{2\vec{u}} = f_{-1} o f_{-1}$.

D'autre part on sait que $f_{-1} o f_{-1}$ est définie par : $\begin{cases} x'' = x \\ y'' = y + 16 \end{cases}$ => $2\vec{u}$ a pour coordonnées $(0\,;16)$ et par conséquent $\vec{u}(0\,;8)$.

$f_{-1} = tos \iff s = t^{-1} o f_{-1} \iff s$ Est définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = 2x + y \end{cases}$

$s(M) = M \iff x = 0$.

L'ensemble des points invariants par s est la droite d'équation $x = 0$.

Nous remarquons que le vecteur $\vec{u}(0\,;8)$ appartient à la direction de cette droite.

21 Dans un espace affine euclidienne E rapporté à un repère orthonormé $(o\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$, on donne les points $A\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$

1) Montrons qu'il existe un et un seul retournement (demi-tour) noté f tel que $f(O) = A$ et $f(B) = B$. Puis caractérisons géométriquement ce retournement et donnons sa représentation analytique.

Un demi-tour étant une rotation d'axe Δ et d'angle π, il est aussi considéré comme une symétrie orthogonale d'axe Δ. Ainsi un demi-tour peut être Détermine par un point invariant (un point de Δ) et un point n'appartenant pas à Δ et son image ; donc $f(O) = A$ et $f(B) = B$ définissent un seul demi-tour f. Soit I le milieu du segment $[O; A]$ alors l'axe du demi-tour f est la droite (IB). Nous avons $I\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (IB) \iff$ il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{IM} = \lambda\overrightarrow{IB} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases}$

L'axe $\Delta = (IB)$ de $\vec{\imath}$ est engendré par $\vec{\jmath}$. Le plan orthogonal à cet axe est donc par $(\vec{\imath}\,;\vec{k})$. Ainsi en désignant par φ l'endomorphisme associé à f, alors on a :

$\varphi(\vec{j}) = \vec{j}$; $\varphi(\vec{\imath}) = -\vec{\imath}$ et $\varphi(\vec{k}) = -\vec{k}$.

La matrice de φ dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de E tel

que $f(M) = M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{f(0)f(M)} = \varphi(\overrightarrow{OM})$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = -z+2 \end{cases}$

2) Soit g l'application de E vers E qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ telle que :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z+2 \end{cases}$$

Déterminons la nature de g et ces éléments caractéristiques. On Précisera $g(A)$ et $g(B)$.

g Est une isométrie affine car son endomorphisme associé est une isométrie vectorielle.

$g(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -z+2 \end{cases} \Leftrightarrow z = 1$. Alors l'ensemble des points invariants par g est le

plan π d'équation $z - 1 = 0$. g est donc la symétrie orthogonale par rapport à π.

Par conséquent $g(A) = C$ et $g(B) = D$.

3) Soit $h = fog$. Montrons que h est déplacement dont on Déterminera la nature et les éléments caractéristiques.

On sait que f est un demi-tour et g la symétrie orthogonale par rapport à π.

Donc fog est un déplacement et nous remarquons que $(fog)(B) = f[g(B)] = f(D) = B$.

De même, $(fog)(I) = f[g(I)] = I$. D'où la droite (IB) est invariante par $fog = h$.

En conclusion : h est la rotation affine d'axe la droite (IB).

22 Le plan affine E est rapporté à un repère orthonormé $(o\,;\vec{\imath}\,;\vec{j}\,)$.

On considère l'application f de E dans E qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ telle que : $\begin{cases}x' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2}\\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

1) a- Montrons que pour tout point M, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur constant.

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} - x\\ \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} - y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$

Avec $\begin{cases}X = -\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2}\\ Y = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}X = -\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2}\\ Y = -\sqrt{3}\left(-\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2}\right)\end{cases} \Leftrightarrow$

$Y = -\sqrt{3}X$. D'où le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ appartient la droite vectorielle d'équation $Y = -\sqrt{3}X \Leftrightarrow$

$\sqrt{3}X + Y = 0$

b- Etudions l'ensemble des points invariants par f.

$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases}x = -\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2}\\ y = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow -x - \sqrt{3} + 2 = 0$

L'ensemble des points invariants par f est donc la droite (D) : $-x - \sqrt{3} + 2 = 0$.

c- Déterminons la nature de l'application f.

Des questions a) et b) , nous déduisons que f est la projection affine sur la droite (D) parallèlement au vecteur $\vec{u}$.

2) Soit g l'application de E dans E qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$associe le point $M''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$ telle que

: $\begin{cases}x'' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\end{cases}$

a- Montrons que g peut s'écrire hof où h est une application de E dans E que l'on Précisera.

$$\begin{cases}x'' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x'' = x' + \frac{\sqrt{3}}{2}\\ y'' = y' + \frac{1}{2}\end{cases}$$

Alors M'' est l'image de M' par la translation de vecteur $\vec{v}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

D'où $g = hof$ où h est la translation de vecteur $\vec{v}$.

b- Sans Calcule, vérifions que $hof = foh$.

h Étant une translation, elle commute avec toute application affine.

D'où $hof = foh$.