# Primitives – Intégrales –Calculs d'aires

## Primitives

### OBJECTIFS :

Ce chapitre vise à :

• mettre en place la notion de primitive

•initier les élèves au calcul de primitives à partir des formules de dérivation.

### Commentaires

La notion de primitive servira à définir la fonction logarithme népérien et sera réinvestie dans le calcul intégral.

### Volume horaire : 6 heures

| SAVOIR | SAVOIR-FAIRE |
|---|---|
| • Définition d'une primitive.<br>•Existence de primitives d'une fonction continue sur un intervalle (admis).<br>•Ensemble des primitives d'une fonction continue<br>•Unicité de la primitive d'une fonction prenant une valeur donnée en un point donné<br>•primitives des fonctions de référence.<br>• Primitive de u + v, $\lambda$u ($\lambda \in$ IR), v'× (u'ov), u'× $u^m$ ($m \in Q \setminus \{-1\}$) ; | • Détermine les primitives d'une fonction en utilisant les primitives des fonctions de référence.<br>• Détermine la primitive d'une fonction qui prend une valeur donnée en un point donné.<br>• Détermine les primitives d'une fonction du type :<br>- $\alpha u + \beta v$, $(\alpha; \beta) \in IR^2$ ;<br>- v'x (u' ov) ;<br>- u'x $u^m$ ($m \in Q \setminus \{-1\}$). |

### Remarques et suggestions

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont toutes continues sur un intervalle et toutes les primitives sont définies sur un intervalle.

On introduira les primitives comme opération inverse des dérivées. Cette mise en place pourra se faire par les fonctions polynômes. On fera fonctionner abondamment le tableau des primitives de fonctions de référence, ce qui permettra de les mémoriser, avant d'aborder des exemples plus complexes.

Il ne faut pas présenter le tableau des primitives des fonctions de référence ou les opérations sur les primitives comme de nouvelles formules à savoir toutes par cœur mais plutôt comme des savoirs qui découlent directement de la dérivation et qu'on peut donc retrouver. Notamment, la connaissance d'une primitive de $u'u^r$ où $r \epsilon \mathbb{Q} -\{-1\}$ permet d'en retrouver beaucoup d'autres. On pourra faire remarquer aux élèves que pour vérifier un calcul de primitive, il suffit de dériver la fonction trouvée.

Les différentes techniques pour Détermine des primitives (décomposition en éléments simples, linéarisation, utilisation des formules de trigonométrie) doivent être guidées.

# Intégrales

## OBJECTIFS :

Ce thème vise à :

• calcule des intégrales à l'aide de techniques particulières (utilisation des primitives, intégration par partie, changement de variable affine) ;

• réinvestir dans les calculs aires les techniques du calcul intégral ;

• élargir le champ des fonctions étudiées à des fonctions définies par une intégrale.

## Commentaires

La notion de calcul intégral est nouvelle en Terminale. Elle est introduite à partir de celle de primitive. Aussi, le professeur veillera à ce que cette dernière notion soit acquise par les élèves. Le calcul intégral est un outil qui permettra de Détermine des primitives de fonction. Ici, toutes les fonctions considérées sont continues sur les intervalles d'intégration. Ill permettra en outre de calcule les aires des surfaces planes ou d'en donner une valeur approchée. Cet outil sera réinvesti en physique (volume, moment inertie d'un solide, etc.…).

# Volume horaire : 16 heures

<table>
<tr><th>SAVOIRS</th><th>SAVOIR-FAIRE</th></tr>
<tr><td>
• Définition de l'intégrale d'une fonction continue f :<br>
$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$où $F$ est une primitive de f.<br>
• La fonction $x \mapsto \int_a^x \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$ est l'unique primitive de f qui s'annule en $a$.<br><br>
• Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue positive.<br><br>
• Propriétés :<br>
- Linéarité ;<br>
- Relation de Chasles ;<br>
- Positivité ;<br>
- Si $f \leq$ g sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b \mathrm{g}(t)dt$ ;<br>
- Inégalité de la moyenne :<br>
- Si $\mathrm{m} \leq f \leq M$ sur $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$alors $\mathrm{m}(\mathrm{b}-\mathrm{a}) \leq \int_a^b f(t)dt \leq \mathrm{M}\ (b-a)$ ;<br>
Si $|f| \leq \mathrm{M}$, alors $\left|\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt}\right| \leq \mathrm{M}|\mathrm{b}-\mathrm{a}|$.<br>
• Valeur moyenne d'une fonction ;<br>
• Intégration par parties ;<br>
•Changement de variable affine.<br><br>
•application au calcul d'aire.<br><br>
•La fonction du type F : $x \mapsto \int_a^x \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$
</td><td>
• Calcule une intégrale :<br>
- En utilisant les primitives des fonctions usuelles ;<br>
- En utilisant une intégration par partie ;<br>
- En utilisant un changement de variable affine<br><br>
• Utiliser la relation de Chasles pour effectuer un calcul intégral.<br><br>
• Connaissant un encadrement d'une fonction f sur [a,b], trouver un encadrement de $\int_a^b f(t)dt$.<br><br>
• Calcule l'aire d'une partie du plan limitée par :<br>
-La courbe représentative d'une fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x$ = a et $x$ = b.<br>
- Les courbes représentatives de deux fonctions et les droites d'équation $x$ = a et $x$ = b.<br>
• Etant donné la fonction<br>
F : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$:<br>
-à partir d'une majoration et d'une minoration donnée, déduis l'existence ou non de la limite de F aux bornes de son ensemble de définition ;<br>
-étudier les variations de F ;<br>
-donner une allure de la présentation graphique de F.
</td></tr>
</table>

# Remarques et suggestions

Il faut faire le lien entre intégrale et aire dès l'introduction des intégrales ou tout de suite après la définition. Cela permet alors d'illustrer graphiquement les propriétés de l'intégrale. Lors d'une évaluation, si le calcul d'une intégrale utilise une intégration par parties ou un changement de variable affine, l'énoncé devra l'indiquer.

A l'occasion d'un calcul d'aire, l'unité attendue doit être précisée dans l'énoncé. On pourra calcule, sur des exemples, une valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles. Dans ce cas, on prendra soin de tracer la courbe et de choisir des fonctions pour lesquelles une primitives n'est pas connue. La méthode des rectangles n'est pas à évaluer.

L'étude de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ sera guidée.

# I- Primitives :

## 1) Définition :

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle I. On appelle primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle I toute fonction $F$ dérivable sur I telle que $\forall\ x\ \in I$ ; $\boldsymbol{F'(x)\ =\ f(x)}$

## 2) Propriétés

**P₁ :** Toute fonction continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives sur cet intervalle.

**P₂ :** L'ensemble des primitives d'une fonction $f$ sur un intervalle I est l'ensemble des fonctions définies sur cet intervalle par $x \to \mathrm{F}(x)\ +\ k$ où $k$ est un nombre réel.

## 3) Tableaux des primitives :

### a) Primitives des fonctions usuelles

| Fonctions | Primitives |
|---|---|
| $a$ avec $a \in \mathbb{R}$ | $ax\ +\ k$ |
| $x^n$ avec $n \in\ \mathbb{N}^*$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$ |
| $ax^n$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in\ \mathbb{N}^*$ | $\frac{ax^{n+1}}{n+1} + k$ |
| $\frac{1}{x^2}$ avec $x \neq 0$ | $\frac{-1}{x} + k$ |
| $\frac{a}{x^n}$ avec $x \neq 0$ ; $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\ eta \in\ \mathbb{R}^*$ | $\frac{-a}{(n-1)x^{n-1}} + k$ |
| $\frac{a}{\sqrt{x}}$ avec $x > 0\ \ et\ a \in\ \mathbb{R}^*$ | $2a\sqrt{x} + k$ |
| $\sqrt{x}$ avec $x > 0$ | $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$ |
| $\sqrt{ax+b}$ avec $ax + b > 0$ | $\frac{2}{3a}(ax + b)\sqrt{ax+b} + k$ |
| $cosx$ avec $\in\ [-\pi\ ;\ \pi]$ | $sinx + k$ |
| $sinx$ avec $\in\ [-\pi\ ;\ \pi]$ | $-cosx + k$ |
| $tangx$ avec $x \neq \frac{\pi}{2} +\ 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$ | $cosx + k$ |
| $cos(ax\ +\ b)$ avec $a \in\ \mathbb{R}^*$ | $\frac{1}{a}Sin(ax + b) +\ k$ |
| $sin(ax\ +\ b)$ avec $a \in\ \mathbb{R}^*$ | $-\frac{1}{a}cos(ax + b) +\ k$ |
| $tang(ax + b)$ avec $(ax + b) \neq \frac{\pi}{2} +\ 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$ | $\frac{1}{a}cos(ax + b) +\ k$ |
| $\frac{1}{Cos^2x} = 1 + tang^2x$ avec $x \neq \frac{\pi}{2} +\ 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$ | $tangx + k$ |
| $\frac{1}{Sin^2x} = 1 + cotang^2x$ avec $x \neq k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$ | $-\ \mathrm{cotg}x\ +\ k$ |

### b) Opérations sur les Primitives :

| Fonctions | Primitives |
|---|---|
| $u' + v'$ | $u + v + k$ |
| $u'v + v'u$ | $u \times v + k$ |
| $au'$ ( $a \in \mathbb{R}$) | $au + k$ |
| $u' \times u^n$ | $\frac{-1}{x} + k$ |
| $\frac{u'}{(u)^n}$ | $\frac{(u)^{n+1}}{n+1} + k$ |
| $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u} + k$ |
| $sin(u)$ | $-\frac{1}{u'} Cos(u) + k$ |
| $\cos(u)$ | $\frac{1}{u'} Sin(u) + k$ |
| $\frac{u'}{Cos^2 u} = 1 + tang^2 u$ | $sinx + k$ |
| $\frac{u'}{Sin^2 u} = 1 + cotang^2 u$ | $-cotg(u) + k$ |

# II- Intégrale d'une fonction

### 1) Définition :

Soit $f$ une fonction définie, dérivable sur un intervalle I = [ $a$ ; $b$] et F une primitive de $f$ sur I.

On appelle intégrale de la fonction $f$ entre $a$ et $b$ le nombre réel $A$ tel que :

$$A = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

### 2) Propriétés :

**Propriété 1** : (linéarité)

Soient $f$ $et$ $g$ deux fonctions continues sur I = [ $a$ ; $b$]on a :

- $\int_a^b f'(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$
- $\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}$ ; $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \int_a^b \alpha f(x)dx + \int_a^b \beta g(x)dx$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

- Si $f \geq 0$ ; alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Si $f \geq g$ ; alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- Si $|f|$ est continue sur I, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

**<u>Propriété 2</u>** : (Relation de Chasles).

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle I.

Soient trois réels $a$ ; $b$ ; $c$ éléments de l'intervalle I

D'après Chasles : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + \int_b^c g(x)dx$

**<u>Conséquences</u> :**

- si $a = b$ alors $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

**<u>Propriété 3</u> :** (Inégalité et valeur de la moyenne)

**a) <u>Inégalité de la moyenne</u> :**

Si $a \leq b$ $et$ $m \leq f \leq M$, alors on a : $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$

**b) <u>Valeur moyenne</u> :**

On appelle valeur moyenne de $f$, le réel $\bar{M}$ tel que :

$\bar{M} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ et il existe un réel $c \in [a ; b]$ tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

## III- Intégration par parties – Intégration par changement de variable affine

### 1) Intégration par Parties

**<u>Théorème</u> :**

Si $u$ et $v$ sont deux fonctions différentiables sur un l'intervalle I = [ $a$ ; $b$], tel que : $(u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$ .

On appelle intégration par parties, toutes opérations définie par :

$\int_a^b u(x) \times v'(x)dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x)dx.$

**Preuve :**

$\int_a^b (u \times v)'(x)dx = \int_a^b [u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)]dx$

$= \int_a^b u'(x) \times v(x)dx + \int_a^b u(x) \times v'(x)dx$

Or $\int_a^b (u \times v)'(x)dx = [u(x) \times v(x)]_a^b$

=> $[u(x) \times v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x) \times v(x)dx + \int_a^b u(x) \times v'(x)dx$

=> $\int_a^b u(x) \times v'(x)dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x)dx.$

**Intégration par substitution ou par changement de variable**

Dans certaines intégrales, l'intégration est effectuée plus facilement lorsqu'on substitue à la place de la variable $x$ une autre variable qui est fonction de $x$.

**Méthode pratique :**

Pour calcule l'intégrale : $\int_a^b f(\alpha t + \beta)dt \quad (\alpha \neq 0)$ ; on utilise la méthode suivante :

- Faire le changement de variable en posant : $u = \alpha t + \beta$ et on obtient $du = \alpha dt$
- Utiliser l'égalité : $\int_a^b f(\alpha t + \beta)dt = \int_{\alpha b + \beta}^{\alpha b + \beta} f(u)du$

## IV- Calculs de valeurs approchées d'une intégrale :

**Méthode de rectangles :**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $[a ; b]$, tel que $|f'|$ admet un majorant M sur cet intervalle.

Lorsque l'on partage [a ; b] en $n$ intervalles de même amplitude et d'extrémités

$a = x_0$ ; $x_1$ ; $x_2$ ; $x_3$ ; ... $x_n = b$ ; On a:

Une suite $(S_n)$ $n \in \mathbb{N}^*$ de termes général $S_n$ tel que : $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n=1} f(x_i)$ qui converge vers $A = \int_a^b f(t)dt$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ; $|A - S_n| \leq \frac{M}{2n}(b-a)^2$

## V- Calcul d'aires :

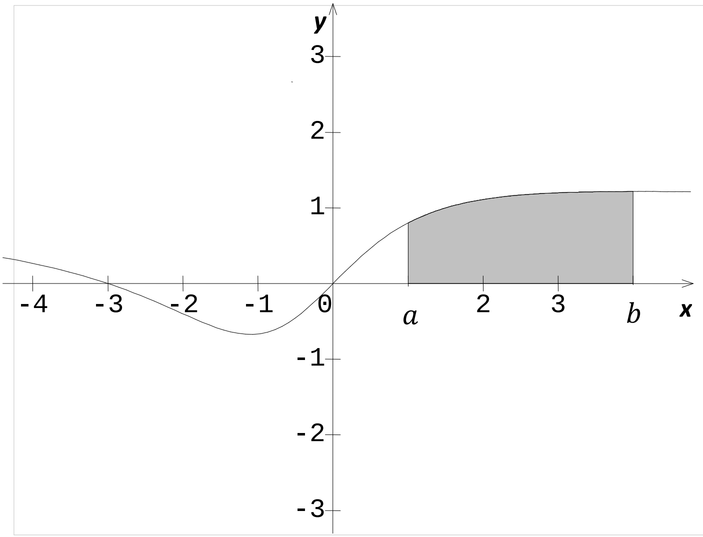
De façon générale nous admettrons que lorsque $f$ est une fonction continue sur un intervalle $[\ a\ ; b]$, alors l'aire du domaine colorié ci-contre est égale à $F(b) - F(a)$ ou $F$ est une primitive de f sur $[\ a\ ; b]$ ; (l'unité d'aire étant l'aire du rectangle $OIAJ$).

Par la définition de l'intégrale définie, la surface entre une fonction $f(x)$ et l'axe des abscisses ou encore entre deux fonctions $f$ et $g$ ( $f > g$) et l'axe des abscisses est donnée respectivement comme suit, lorsque $x$ va de $a$ vers $b$ ($a < b$ ).

$S = \int_a^b f(x)dx$ (Unité d'aire) ou $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ (Unité d'aire).

**NB** : Dans cette intégration, les portions de surfaces au dessus de l'axe des abscisses donnent une contribution positive, tandis que les portions en dessous de l'axe des abscisses donnent une contribution négative. Voici quelques cas de calculs de surfaces :

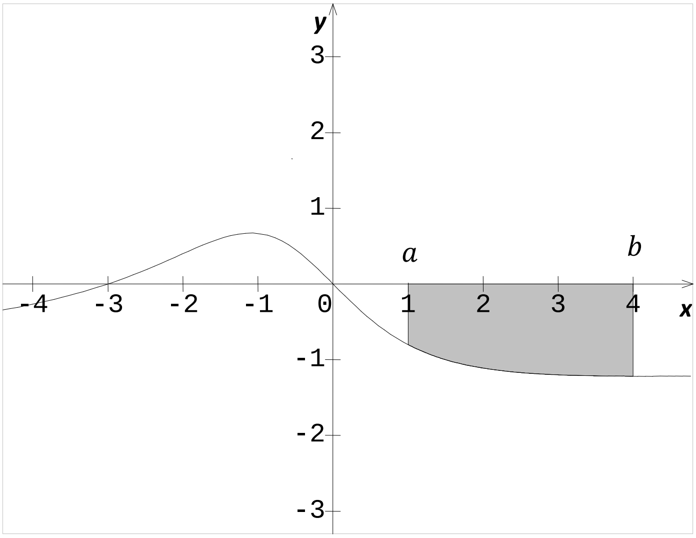
**1er Cas de figure :**




L'aire du domaine plan hachuré par la courbe ( C ), l'axe des abscisses et les droites

d'équation : $\boldsymbol{x = a}$ **et** $\boldsymbol{x = b}$ **est :** $\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)dx}$ **(Unité d'aire)**

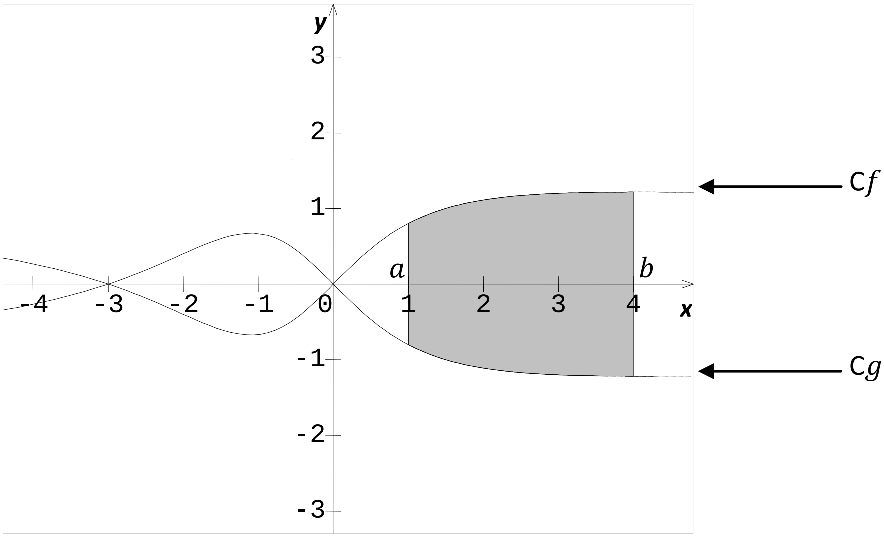
**2$^{\text{ième}}$ Cas de figure :**




L'aire du domaine plan hachuré par la courbe ( C ), l'axe des abscisses et les droites

d'équation : $\boldsymbol{x = a}$ **et** $\boldsymbol{x = b}$ **est :** $\boldsymbol{S = -\int_a^b f(x)dx}$ **(Unité d'aire)**

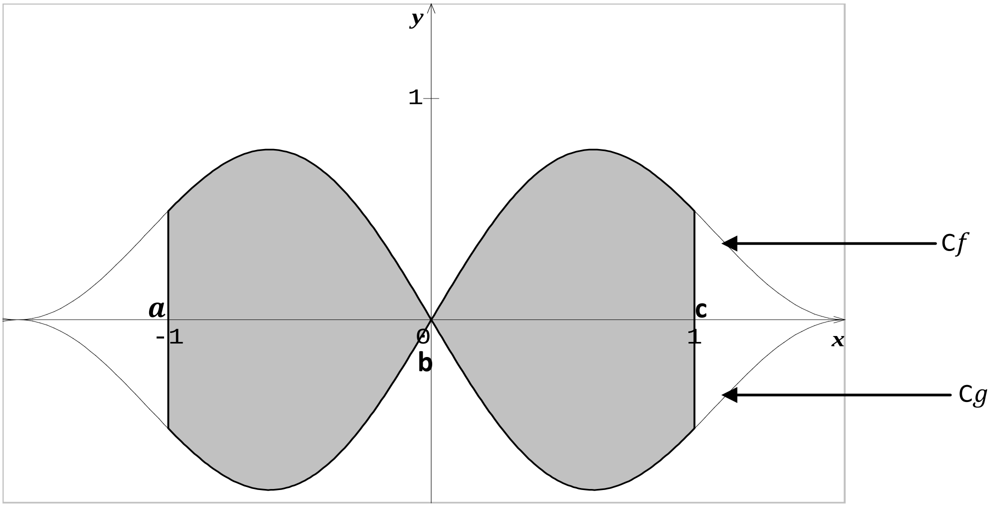
**3$^{\text{ième}}$ Cas de figure :**



L'aire du domaine plan hachuré par les courbes $(Cf)$ , $(Cg)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation : $\boldsymbol{x = a}$ **et** $\boldsymbol{x = b}$ **est :** $\boldsymbol{S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx}$ **(Unité d'aire)**

**NB :** la différence $\boldsymbol{f(x) - g(x)}$ est très importante car la courbe $(Cf)$ est au dessus de la courbe $(Cg)$ dans l'intervalle $[a\ ; b]$

**4ième Cas de figure :**




L'aire du domaine plan hachuré par les courbes $(Cf)$ , $(Cg)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation : $\boldsymbol{x = a}$ **;** $\boldsymbol{x = b}$ **et** $\boldsymbol{x = c}$ **est :**

$\boldsymbol{S = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx + \int_b^c [f(x) - g(x)]dx}$ **(Unité d'aire)**

**NB :** On a la différence $\boldsymbol{g(x) - f(x)}$ **sur l'intervalle** $[a\ ; b]$ car la courbe $(Cf)$ est au dessus de la courbe $(Cg)$ et la différence $\boldsymbol{f(x) - g(x)}$ dans l'intervalle $[b\ ; c]$

# Exercices

## Primitives

### Primitives directes

**1** En utilisant les formules de primitives directes, calcule l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

1- $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4$ ; 2- $f(x) = (x^2 - 3)^3$ ; 3- $f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{4}{3}x^2 - 1$

4- $f(x) = \sqrt{-3x + 2}$ ; 5- $f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ ; 6- $f(x) = 3(-x + 2)(3x + 2)^2$

7- $f(x) = Cos(-6x + 5)$ ; 8- $f(x) = 3Sin(1 - 4x)$ ; 9- $f(x) = \frac{1}{3Cos^2 3x}$

10- $f(x) = \frac{3}{(3x + 1)^3}$ ; 11- $f(x) = (4x - 4)(2x^2 - 4x + 1)^2$ ; 12- $f(x) = \frac{-6}{\sqrt{-6x + 5}}$

13- $f(x) = \frac{-5}{(7x + 3)^3}$ ; 14- $f(x) = (x - 1)(-3x^2 + 6x + 7)^2$ ; 15- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-8x + 1}}$

16- $f(x) = \frac{Sinx - Cosx}{(Cosx + Sinx)^3}$

### Primitives et linéarisation

**2** En utilisant les formules de primitives directes, linéarise puis calcule l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \mathrm{Sin}^3 x$ ; 2) $f(x) = Cos^5 \frac{x}{2}$ ; 3) $f(x) = \mathrm{Sin}^3 x \bullet \mathrm{Cos}^3 x$ ; 4) $f(x) = \mathrm{Sin}^3(-x + 3)$

### Primitives vérifiant une condition

**3** Détermine la primitive F de la fonction $f$ vérifiant les conditions indiquées :

1- $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ et $F(0) = 7$ ; 2- $f(x) = (x - 3)^6$ et $F(3) = 0$

3- $f(x) = \frac{2}{(3 - x)^3}$ et $F(0) = 0$ ; 5- $f(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}$ et $F(0) = \sqrt{5}$

6- $f(x) = \frac{Sinx}{Cos^2 x}$ et $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$ ; 7- $f(x) = \frac{Sinx - Cosx}{Cos^3 x}$ et $F(\pi) = 1$

**4** Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x - 1)^2}$$

1) Détermine l'ensemble de définition

2) Détermine les réels $a$ ; $b$ et $c$ tel que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$

3) En déduis la primitive de $f$ qui s'annule en 0

**5** Soit les fonctions $f$ et F définies par : $f(x) = x\sqrt{3 - 2x}$ et $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x}$

Détermine les réels $a$ ; $b$ et $c$ tel que $\forall x \in \left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$, F soit une primitive de $f$ sur $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$

# Intégrales

### Intégrations à l'aide d'une primitive

**6** En utilisant les formules des primitives, calcule les intégrales suivantes :

**1)** I = $\int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x - 5)dx$ ; **7)** I = $\int_1^2 \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$

**2)** I = $\int_{-\pi}^{\pi} Sin(-2x+\pi)dx$ ; **8)** I = $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Sinx - Cosx}{(Cox + Sinx)^2}dx$

**3)** I = $\int_0^4 \sqrt{4x+9}dx$ ; **9)** I = $\int_0^1 (x^2 - 1)(x^3 - 3x + 1)^3 dx$

**4)** I = $-4\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{5}{x^2}dx$ ; **10)** I = $\int_0^1 (-2x+1)\sqrt{5x^2 - 5x + 4}\,dx$

**5)** I = $\int_{-1}^{2} (x+2)\sqrt{x+2}dx$ ; **11)** I = $\int_0^2 |x^2 - 3x + 2|dx$

**6)** I = $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ ; **12)** I = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} |cos(2x-\pi)|dx$

### Intégrations par parties

**7** En utilisant la formule de l'intégration par partie, calcule les intégrales suivantes :

**1)** I = $\int_0^{\pi} xSin2xdx$ ; **4)** I = $\int_{-2}^{1} (x-5)\sqrt{2-x}dx$

**2)** I = $\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$ ; **5)** I = $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 Cos(x+\pi)dx$

**3)** I = $\int_0^4 x\sqrt{4x+9}dx$

**8** Soient les intégrales I et J définies par : I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)Cos^2 2xdx$ et J =$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)Sin^2 2xdx$

**1)** Calcule : I + J.

**2)** Calcule : I – J en utilisant la technique de l'intégration par parties.

**3)** Déduisez – en les valeurs de I et J.

**Intégrations par changement de variable**

**9** En utilisant un changement de variable, calcule les intégrales suivantes :

**1)** I = $\int_{-1}^{2}\frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$ ; **2)** I = $\int_{-1}^{2}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$

**10** Soit le polynôme p définie par : $p(x) = x^3 - 12x - 16$.

**1)** Montre que $-2$ est un zéro double de $p$.

**2)** En utilisant la méthode de l'intégration par partie et la méthode par changement de variable, calcule l'intégrale : $I = \int_4^5 \sqrt{p(x)}dx$

**Intégrales et suites**

**11** Soit l'intégrale $I_n$ définie par :

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^n xdx$

1) En utilisant la technique d'intégration par parties, trouver une relation entre $I_n$ et $I_{n-2}$ (On posera : $Sin^n x = Sin^{n-1}x \cdot Sinx$).
2) On donne $I_0 = \frac{\pi}{2}$. Calcule : $I_2$ et $I_4$

**12** Soit l'intégrale $I_n$ définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}}dx$ ( $n \geq 0$ )

1) Calcule $I_0$
2) En intégrant par parties, Montre que $\forall\, n \geq 1$ on a : $(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$.
3) En déduis la valeur de $I_1$ ; $I_2$ et $I_3$.

**13** Soit l'intégrale $I_n$ définie par : $I_n = \int_{-1}^{1}(t^2-1)^n dt$ ( $n \in \mathbb{N}$ )

1) Démontre que $I_n = 2\int_0^1(t^2-1)^n dt$ puis calcule $I_0$

2) Démontre que $I_n = -\frac{2n}{1+2n}I_{n-1}$

**14** Soit l'intégrale $I_n$ définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{Cos^{2n+1}x}$

1) Détermine le seul réel $a$ tel que : $\forall \ x \left[0 \ ; \ \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $\frac{1}{Cosx} = \frac{aCosx}{1 - Sinx} + \frac{aCosx}{1 + Sinx}$.
2) Calcule la valeur de $I_0$.

3) Démontre à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall \ n \ \in \mathbb{N}^*$ on a :
$2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^{-n}}{\sqrt{2}}$ $\left(\text{On pourra poser : } \frac{1}{Cos^{2n+1}x} = \frac{1}{Cos^{2n-1}x} \times \frac{1}{Cos^2 x}\right)$

**15** Soit l'intégrale $I_n$ définie par : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1 - x^2}\, dx$

1) Calcule $I_1$.
2) En intégrant par parties, Montre que $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$ (on posera $x^n = x \bullet x^{n-1}$ )

**16** Soit l'intégrale $I_n$ définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{1}{x^n + 1} dx$ avec $n \in \mathbb{N}$

1) Montre que $\forall \ n \ \in \mathbb{N}$ ; $I_n$ est croissante et majorée.
2) Montre que $\forall \ n \ \in \mathbb{N}$ ; on a : $1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$ .En déduis la limite de la suite $I_n$.

**17** Soit l'intégrale $I_n$ définie par : $I_n(x) = \int_1^x t^n lnt \, dx$ ( $n \in \mathbb{N} - \{-1\}$ et $x > 0$)

1) En utilisant une intégration par parties ; calcule $I_n(x)$
2) En déduis le calcul de $J_n(x) = \int_1^x t^n (lnt)^2 \, dt$
3) a) Calcule $I_n(e) - J_n(e)$.
   b) Détermine la limite de $\frac{I_n(e) - J_n(e)}{e^{n+1}}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

## Intégrales linéaires

**18** Soient les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^2 x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^4 x} dx$

1) Calcule I

2) Soit la fonction définie sur $\left[0 \ ; \ \frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \frac{sinx}{cos^3 x}$.

a) Montre que $\forall \ x \in \left[0 \ ; \ \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $f'(x) = \frac{3}{cos^4 x} - \frac{2}{cos^2 x}$.
b) En déduis une relation entre $I$ et $J$.
c) Calcule J.

**19** Soient les intégrales suivantes :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4xdx$ ; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4xdx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2xcos^2xdx$

1) Calcule $I - J$ et $I + J + K$

2) En déduis la valeur de : $I + J - 3K$ puis celles de $I$ ; $J$ et $K$.

**20** Soient les intégrales I et J définies par :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{cosx + sinx}dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{cosx + sinx}dx$

Calcule $I + J$ et $I - J$ puis en déduis les valeurs de $I$ et $J$.

**21** On se propose de calcule l'intégrale $J$ définie par $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}dx$

1) Calcule les deux intégrales A et B tel que $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$ et $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$

2) Détermine les réels $a$ ; $b$ et $c$ tel que : $\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$ **(1)**

3) En posant $t = e^x$ dans l'égalité **(1),** calculé $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}dx$

4) a- A l'aide d'une intégration par partie, exprimer $J$ en fonction de $I$.

b- En déduis la valeur de $J$.

**22** On considère les intégrales $I = \int_0^{\pi} cos^4xdx$ et $J = \int_0^{\pi} sin^4xdx$.

1) a- Montre que l'intégrale $I$ peut s'écrire $I = \int_0^{\pi} cosx(cosx - cosxsin^2x)dx$

b- A l'aide d'une intégration par parties, Montre que $I = \int_0^{\pi} sin^2xdx - \frac{1}{3}J$

c- Montre de même que $J = \int_0^{\pi} cos^2xdx - \frac{1}{3}I$

2) a- Montre que $I + J = \frac{3\pi}{4}$.

b- Montre que $J - I = 0$

c- En déduis les intégrales $I$ et $J$.

## Calculs de valeurs moyennes

**23** L'intensité du courant qui circule dans une bobine en fonction du temps $t$, a été modélisée par la fonction $i$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$; $i(t) = 5sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

1) Détermine la période de cette fonction.

2) Calcule la valeur moyenne de l'intensité $\boldsymbol{i}$ du courant sur cette période.

**24** La variation de la température de la larve d'un volcan, a été modélisée par la fonction $f$ telle que pour tout$t \in [10\,;30]$, $f(t) = 3t^2 + 2t$ où $t$ est exprimé en degré Celsius.

- Si la larve est à la température de $10°C$ alors le volcan est au repos.
- Si la larve est à la température de $30°C$ alors le volcan rentre en éruption.

Qu'elle est la température moyenne de la larve ?

**25** Suite à un début de contamination de la maladie à **Virus Ebola** dans notre pays, on a constaté que le nombre de personnes ayant contracté la maladie $\boldsymbol{t}$ jours après l'apparition des premiers cas est donné par : $f(t) = 45t^2 - t^3$ Avec $t \in [0\,;25]$.

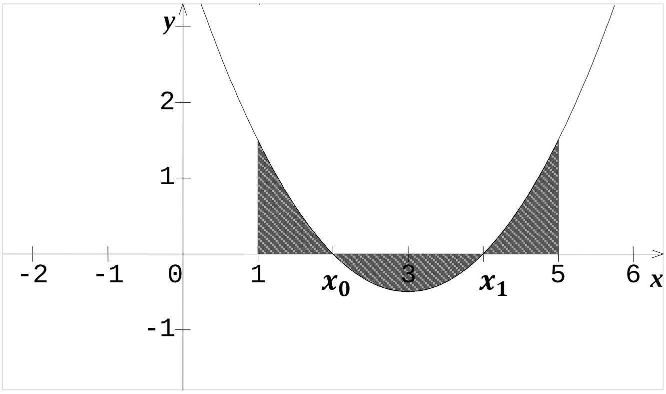
Calcule le nombre moyen de personnes malades durant les huit premiers jours.

## Calculs d'aires

**26** Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

1) Détermine la valeur de l'intégrale $\int_1^5 f(x)dx$

2) Ci-dessous est donnée la courbe $C_f$ représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé( $o$ ; $\vec{\imath}$ ; $\vec{\jmath}$ ).




On souhaite Détermine la valeur de l'aire du domaine plan grisé.

a- Détermine les zéros $\boldsymbol{x_0}$ et $\boldsymbol{x_1}$ de la fonction $f$ (avec $\boldsymbol{x_0} < \boldsymbol{x_1}$).

b- Détermine la valeur de l'intégrale $\int_1^{x_0} f(x)dx + \int_{x_1}^{5} f(x)dx$.

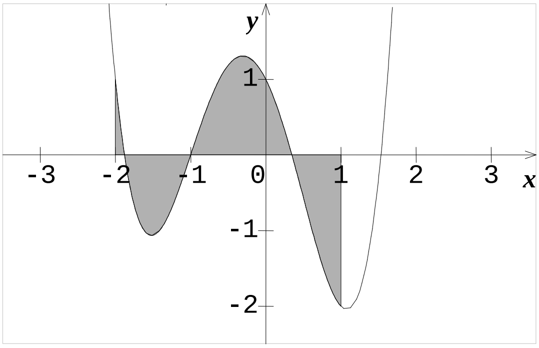
c- Détermine la valeur de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$.

d- En déduis l'aire de la partie grisée sur le graphique. (Unité graphique : $2cm$)

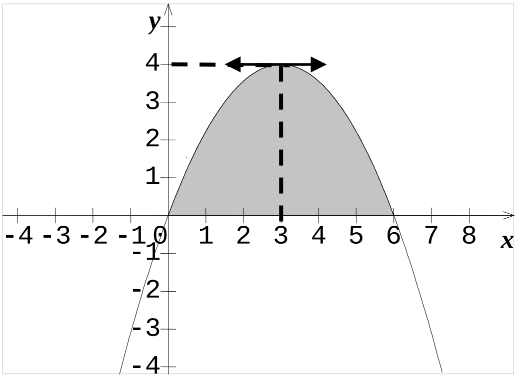
**27** Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 1$.

Soit $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé ( 0 ; $\vec{\imath}$ ; $\vec{\jmath}$ ) dont les unités graphiques sont : $6cm$ sur l'axe des abscisses et $2cm$ sur l'axe des ordonnées

Calcule l'aire du domaine hachuré en $cm^2$




**28** On considère la courbe ci-dessous représentant une fonction polynôme $f$ de degré **2** dans un repère orthonormé ( 0 ; $\vec{\imath}$ ; $\vec{\jmath}$ ) d'unité graphique : $2cm$ .




On rappel que $f(x) = ax^2 + bx + c$

1) En utilisant le graphique, déterminer les réels $a$ ; $b$ $et$ $c$.

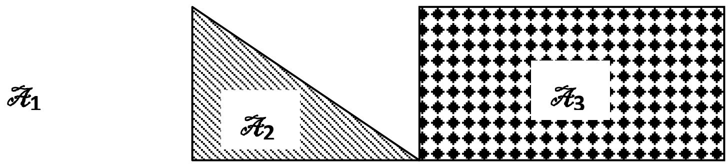
2) En déduire en $cm^2$ l'aire de la partie

Hachurée sur le graphique.

**29** Soient $f : \mapsto 2x^2 - 2x + 1$ et $g : \mapsto x^3 - 3x + 3$ deux fonctions de courbes respectives $(C_f)$ et $(C_g)$ dans un repère orthonormé ( 0 ; $\vec{\imath}$ ; $\vec{\jmath}$ ) d'unité graphique : $2cm$ .

1) Tracer $(C_f)$ et $(C_g)$ dans le même repère.
2) Calcule en $cm^2$ l'aire $\mathscr{A}$ de l'ensemble des points M compris entre les courbes $(C_f)$ ; $(C_g)$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.

**30** On donne la figure suivante dans un repère ( O ; $\vec{\imath}$ ; $\vec{\jmath}$ ) d'unité graphique 1 $cm$ .



1) Calcule en $cm^2$ les aires $\mathcal{A}_1$ ; $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$ hachurer sur le graphique désignant respectivement l'aire d'un demi-cercle, d'un triangle et d'un rectangle.

2) En déduis l'aire totale.

## Solutions

**Primitives directes**

**1** En utilisant les formules de primitives directes, calculons l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

1- $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4$ => $F(x) = \frac{4}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 4x + k = x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 4x + k$

2- $f(x) = (x^2 - 3)^3 = x^6 - 9x^4 + 27x^2 - 27$ => $F(x) = \frac{1}{7}x^7 - \frac{9}{5}x^5 + 3x^3 - 27x + k$

3- $f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{4}{3}x^2 - 1$ => $F(x) = \frac{3}{8}x^4 - \frac{4}{9}x^5 - x + k$

4- $f(x) = \sqrt{-3x + 2}$ => $F(x) = -\frac{2}{9}(-3x + 2)\sqrt{-3x + 2} + k$

5- $f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ => $F(x) = -\frac{3}{x} - 2\sqrt{x} + k$

6- $f(x) = 3(-x + 2)(3x + 2)^2 = -27x^3 - 31x^2 + 60x + 24$ =>

$F(x) = -\frac{27}{4}x^4 - \frac{31}{3}x^3 - 30x^2 + 24x + k$

7- $f(x) = Cos(-6x + 5)$ => $F(x) = -\frac{1}{6}sin(-6x + 5) + k$

8- $f(x) = 3Sin(1 - 4x)$=> $F(x) = \frac{3}{4}cos(1 - 4x) + k$

9- $f(x) = \frac{1}{3Cos^2 3x} = \frac{1}{9} \times \frac{3}{Cos^2 3x}$ => $F(x) = \frac{1}{9} \times (1 + tang^2 3x) + k$

10- $f(x) = \frac{3}{(3x + 1)^3}$ => $F(x) = \frac{-1}{2(3x + 1)^2} + k$

11- $f(x) = (4x - 4)(2x^2 - 4x + 1)^2$ => $F(x) = \frac{1}{3}(2x^2 - 4x + 1)^3 + k$

12- $f(x) = \frac{-6}{\sqrt{-6x + 5}}$ => $F(x) = 2\sqrt{-6x + 5} + k$

13- $f(x) = \frac{-5}{(7x + 3)^3} = \frac{7}{7} \times \frac{-5}{(7x + 3)^3} = \frac{-5}{7} \times \frac{7}{(7x + 3)^3}$ => $F(x) = \frac{-5}{7} \times \frac{-1}{2(7x + 3)^2} + k$

$=> \ F(x) = \frac{5}{14(7x + 3)^2} + k$

14- $f(x) = (x-1)(-3x^2+6x+7)^2 = \frac{-6}{-6} \times (x-1)(-3x^2+6x+7)^2$

$= -\frac{1}{6} \times (-6x+6)(-3x^2+6x+7)^2 => F(x) = \frac{-1}{18} \times (-3x^2+6x+7)^3 + \ k$

15- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-8x+1}} = \frac{-8}{-8} \times \frac{1}{\sqrt{-8x+1}} = \frac{1}{-8} \times \frac{-8}{\sqrt{-8x+1}} => F(x) = -\frac{1}{8} \times 2\sqrt{-8x+1} + k$

$=> \ F(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{-8x+1} + k$

16- $f(x) = \frac{Sinx \ - Cosx}{(Cosx \ + \ Sinx)^3} = \frac{-(-Sinx \ + Cosx)}{(Cosx \ + \ Sinx)^3} = \frac{1}{2(Cosx \ + \ Sinx)^2} + k$

**Primitives et linéarisation**

**2** En utilisant les formules de primitives directes, linéarisons puis calculons l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \text{Sin}^3 x$

Posons $\theta = x => f(x) = \text{Sin}^3\theta = (Sin\theta)^3 = \left(\frac{Z-\bar{Z}}{2i}\right)^3 = \frac{(Z-\bar{Z})^3}{(2i)^3} = \frac{Z^3 - 3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2 - \bar{Z}^3}{-8i}$

$=> f(x) = \frac{(Z^3-\bar{Z}^3) + (-3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2)}{-8i} = \frac{(Z^3-\bar{Z}^3) - 3Z\bar{Z}(Z-\bar{Z})}{-8i}$

Or $Z^n - \bar{Z}^n = 2i\text{Sin}(n\theta) => Z^3 - \bar{Z}^3 = 2i\text{Sin}(3\theta)$ et $Z - \bar{Z} = 2i\text{Sin}\theta$

De même $Z^n \bar{Z}^n = 1 => Z\bar{Z} = 1$

$=> f(x) = \frac{2i\text{Sin}(3\theta) + 3(2i\text{Sin}(\theta))}{-8i} = \frac{2i\text{Sin}\,3\theta + 6i\text{Sin}\,\theta}{-8i} = \frac{2i}{-8i}(Sin3\theta + 3Sin\theta)$

$=> f(x) = -\frac{1}{4}(Sin3\theta + 3Sin\theta)$ or $\theta = x$

$=> f(x) = -\frac{1}{4}(Sin3x + 3Sinx) => \ F(x) = -\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{3}cos3x - 3cosx\right] + k$

$=> \ F(x) = \frac{1}{12}cos3x + \frac{3}{4}cosx + k$

2) $f(x) = Cos^5\frac{x}{2}$

Posons $\theta = \frac{x}{2} => f(x) = \cos^5\theta = (Cos\theta)^5 = \left(\frac{Z+\bar{Z}}{2}\right)^5 = \frac{(Z+\bar{Z})^5}{(2)^5}$

$f(x) = \frac{Z^5 + 5Z^4\bar{Z} + 10Z^3\bar{Z}^2 + 10Z^2\bar{Z}^3 + 5Z\bar{Z}^4 + \bar{Z}^5}{32}$

$=> f(x) = \frac{(Z^5+\bar{Z}^5) + (5Z^4\bar{Z} + 5Z\bar{Z}^4) + (10Z^3\bar{Z}^2 + 10Z^2\bar{Z}^3)}{32}$

$=> f(x) = \frac{(Z^5+\bar{Z}^5) + 5Z\bar{Z}(Z^3+\bar{Z}^3) + 10Z^2\bar{Z}^2(Z+\bar{Z})}{32}$

Or $Z^n + \bar{Z}^n$ = 2Cos( nθ) => $Z^5 + \bar{Z}^5$ = 2Cos(5θ) ; $Z^3 + \bar{Z}^3$ = 2Cos(3θ) et

Z + $\bar{Z}$ = 2Cosθ

De même $Z^n\bar{Z}^n = 1$ = > $Z\bar{Z} = 1$ et $Z^2\bar{Z}^2 = 1$

$=> f(x) = \frac{2\text{Cos}(5\theta) + 5(2\text{Cos}(3\theta)) + 10(2\text{Cos}\,\theta)}{32} = \frac{2}{32}(Cos5\theta + 5\,Cos3\theta + 10Cos\theta)$

$=> f(x) = \frac{1}{16}(Cos5\theta + 5\,Cos3\theta + 10Cos\theta)$ or θ = $\frac{x}{2}$

$=> f(x) = \frac{1}{16}\left(Cos\frac{5x}{2} + 5\,Cos\frac{3x}{2} + 10Cos\frac{x}{2}\right)$

$=> F(x) = \frac{1}{16}\left[\frac{2}{5}sin\frac{5x}{2} + \frac{10}{3}\,sin\frac{3x}{2} + 20sin\frac{x}{2}\right] + k = \frac{1}{40}sin\frac{5x}{2} + \frac{5}{24}\,sin\frac{3x}{2} + \frac{5}{4}sin\frac{x}{2} + k$

3) $f(x) = \text{Cos}^3 x \bullet \text{Sin}^3 x$

Posons θ = $x$ = > $f(x) = \cos^3\theta \bullet \sin^3\theta = (Cos\theta)^3(Sin\theta)^3 = \left(\frac{Z+\bar{Z}}{2}\right)^3\left(\frac{Z-\bar{Z}}{2i}\right)^3$

$=> f(x) = \frac{(Z+\bar{Z})^3}{(2)^3} \times \frac{(Z-\bar{Z})^3}{(2i)^3} = \frac{(Z+\bar{Z})^3(Z-\bar{Z})^3}{-64i}$

$=> f(x) = \frac{(Z^3 + 3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2 + \bar{Z}^3)(Z^3 - 3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2 - \bar{Z}^3)}{-64i}$

Après development, on a :

$f(x) = \frac{(Z^6 - \bar{Z}^6) + (-3Z^4\bar{Z}^2 + 3Z^2\bar{Z}^4)}{-64i} = \frac{(Z^6 - \bar{Z}^6) - 3Z^2\bar{Z}^2(Z^2 - \bar{Z}^2)}{-64i}$

Or $Z^n - \bar{Z}^n = 2i\text{Sin}(n\theta)$ = > $Z^6 - \bar{Z}^6 = 2i$Sin(6θ) et $Z^2 - \bar{Z}^2 = 2i$Sin(2θ)

De même $Z^n\bar{Z}^n = 1$ = > $Z^2\bar{Z}^2 = 1$

$=> f(x) = \frac{2i\text{Sin}(6\theta) - 3(2i\text{Sin}(2\theta))}{-64i} = \frac{2i}{-64i}(Sin6\theta - 3Sin2\theta) = \frac{1}{32}(Sin6\theta - 3Sin2\theta)$

Or θ = $x$ = > $f(x) = \frac{1}{32}(Sin6x - 3Sin2x)$

=> $F(x) = \frac{1}{32}\left[-\frac{1}{6}cos6x + \frac{3}{2}cos2x\right] + k = -\frac{1}{192}cos6x + \frac{3}{64}cos2x + k$

4) $f(x) = \text{Sin}^3(-x+3)$

Posons θ = $-x+3$ = > $f(x)$ = $\text{Sin}^3θ$ = $(Sin\theta)^3$ = $\left(\frac{Z-\bar{Z}}{2i}\right)^3 = \frac{(Z-\bar{Z})^3}{(2i)^3} = \frac{Z^3 - 3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2 - \bar{Z}^3}{-8i}$

= > $f(x) = \frac{(Z^3-\bar{Z}^3)+(-3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2)}{-8i} = \frac{(Z^3-\bar{Z}^3) - 3Z\bar{Z}(Z-\bar{Z})}{-8i}$

Or $Z^n - \bar{Z}^n$ = 2iSin$(n\theta)$ = >$Z^3 - \bar{Z}^3$ = $2i$Sin(3θ) et Z $-\bar{Z}$ = $2i$Sinθ

De même $Z^n\bar{Z}^n$= 1 = > $Z\bar{Z}$ = 1

= > $f(x) = \frac{2i\text{Sin}(3\theta) + 3(2i\text{Sin}(\theta))}{-8i} = \frac{2i\text{Sin }3\theta + 6i\text{Sin }\theta}{-8i} = \frac{2i}{-8i}(Sin3\theta + 3Sin\theta)$

= > $f(x) = -\frac{1}{4}(Sin3\theta + 3Sin\theta)$ or θ = $-x+3$

= > $f(x) = -\frac{1}{4}[Sin3(-x+3) + 3Sin(-x+3)]$

= > $f(x) = -\frac{1}{4}[Sin(-3x+9) + 3Sin(-x+3)]$

=> $F(x) = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}cos(-3x+9) - 3cos(-x+3)\right] + k$

=> $F(x) = -\frac{1}{12}cos(-3x+9) + \frac{3}{4}cos(-x+3) + k$

**Primitives vérifiant une condition**

**3** Détermine la primitive F de la fonction $f$ vérifiant les conditions indiquées :

1- $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ et F(0) = 7

$f(x) = x^3 - x^2 - 1$ => $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + k$. Or F(0) = 7 ⇔ $k = 7$.

D'où $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 7$

2- $f(x) = (x-3)^6$ et F(3) = 0

$f(x) = (x-3)^6$ => $F(x) = \frac{(x-3)^7}{7} + k$. Or F(3) = 0 ⇔ $k = 0$

D'où $F(x) = \frac{(x-3)^7}{7}$

3- $f(x) = \frac{2}{(3-x)^3}$ et F(0) = 0

$f(x) = \frac{2}{(3-x)^3} = -2 \times \frac{-1}{(3-x)^3}$ => $F(x) = -2 \times \frac{-1}{2(3-x)^2} + k = \frac{1}{(3-x)^2} + k$

Or F(0) = 0 ⇔ $k = \frac{1}{9}$. D'où $F(x) = \frac{1}{(3-x)^2} + \frac{1}{9}$

5- $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}$ et F(0) = $\sqrt{5}$

$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \frac{2}{2} \times \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \frac{1}{2} \times \frac{2x-6}{\sqrt{x^2-6x+5}}$

=> $F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2-6x+5} + k$ => $F(x) = \sqrt{x^2-6x+5} + k$. Or F(0) = $\sqrt{5}$ ⇔

$\sqrt{5} + k = \sqrt{5}$ ⇔ $k = 0$ . D'où $F(x) = \sqrt{x^2-6x+5} +$

6- $f(x) = \frac{Sinx}{Cos^2x}$ et $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$

$f(x) = \frac{Sinx}{Cos^2x}$ => $F(x) = -\frac{1}{cosx} + k$ . Or $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$ ⇔ $-\frac{1}{\frac{1}{2}} + k = 1$ ⇔ $-2 + k = 1$

=> $k = 3$ . D'où $F(x) = -\frac{1}{cosx} + 3$

**4** Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x-1)^2}$$

1) Déterminons l'ensemble de définition.

$Df = \mathbb{R} - \{1\} = ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$

2) Déterminons les réels $a, b$ et $c$ tel que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$

La division Euclidienne de $(3x^3 - 7x^2 + 5x + 1)$ par $(x-1)^2$ donne :

$f(x) = 3x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2}$. Par identification avec $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$

On a : $a = 3$ ; $b = -1$ et $c = 2$

3) En déduisons la primitive de $f$ qui s'annule en 0

$f(x) = 3x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2} \Rightarrow F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{2}{x-1} + k$ . Or $F(0) = 0 \Leftrightarrow k = -2$

D'où $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{2}{x-1} - 2$

**5** Soit les fonctions $f$ et F définies par : $f(x) = x\sqrt{3 - 2x}$ et $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3 - 2x}$

Déterminons les réels $a$ ; $b$ et $c$ tel que$\forall\ x \in \left]-\infty\ ;\ \frac{3}{2}\right]$, F soit une primitive de $f$ sur $\left]-\infty\ ;\ \frac{3}{2}\right]$

<u>**NB :**</u> F est une primitive de $f$ si et seulement si $F'(x) = f(x)$

$F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3 - 2x} \Rightarrow F'(x) = \frac{-5ax^2 + x(6a - 3b) + (3b - c)}{\sqrt{3 - 2x}}$ . Or

$f(x) = x\sqrt{3 - 2x}$ . Par identification : $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow$

$\frac{-5ax^2 + x(6a - 3b) + (3b - c)}{\sqrt{3 - 2x}} = x\sqrt{3 - 2x} \Leftrightarrow$

$-5ax^2 + x(6a - 3b) + (3b - c) = x(3 - 2x) \Leftrightarrow$

$-5ax^2 + x(6a - 3b) + (3b - c) = -2x^2 + 3x$. Par identification, on a :

$a = \frac{2}{5}$ ; $b = -\frac{1}{5}$ et $c = -\frac{3}{5}$

D'où $F(x) = \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}\right)\sqrt{3 - 2x} = \frac{1}{5}(2x^2 - x - 3)\sqrt{3 - 2x} + k$

## Intégrales

### Intégrations à l'aide d'une primitive

**6** En utilisant les formules des primitives, calculons les intégrales suivantes :

**1)** $I = \int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x - 5)dx \Rightarrow I = [x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x]_0^1$

$\Rightarrow I = F(1) - F(0) = (-3) - (0) = -3$

**2)** $I = \int_{-\pi}^{\pi} Sin(-2x + \pi)dx \Rightarrow I = \left[\frac{1}{2}cos(-2x + \pi)\right]_{-\pi}^{\pi}$

$\Rightarrow I = F(\pi) - F(-\pi) = \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

**3)** $I = \int_0^4 \sqrt{4x + 9}dx \Rightarrow I = \left[\frac{1}{6}(4x + 9)\sqrt{4x + 9}\right]_0^4$

$=> I = F(4) - F(0) = \left(\frac{125}{6}\right) - \left(\frac{9}{2}\right) = \frac{49}{3}$

**4)** $I = -4\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{5}{x^3}dx = -20\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^3}dx = -20\left[-\frac{1}{x^2}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \left[\frac{20}{x^2}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}$

$=> I = F(\sqrt{3}) - F(\sqrt{2}) = \left(\frac{20}{3}\right) - \left(\frac{20}{2}\right) = -\frac{10}{3}$

**5)** $I = \int_{-1}^{2}(x+2)\sqrt{x+2}dx = \int_{-1}^{2}(x+2)^{\frac{3}{2}}dx => I = \left[\frac{(x+2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_{-1}^{2}$

$=> I = \left[\frac{2}{5}(x+2)^2\sqrt{x+2}\right]_{-1}^{2} => I = F(2) - F(-1) = \left(\frac{64}{5}\right) - \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{62}{5}$

**6)** $I = \int_{2}^{5}\frac{dx}{\sqrt{x-1}} => I = \int_{2}^{5}\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx => I = \left[2\sqrt{x-1}\right]_{2}^{5}$

$=> I = F(5) - F(2) = (4) - (2) = 2$

**7)** $I = \int_{1}^{2}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx => I = \int_{1}^{2}\frac{-2}{-2}\times\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx = \frac{1}{-2}\times\int_{1}^{2}\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$

$=> I = -\frac{1}{2}\times\left[2\sqrt{x^2-2x+5}\right]_{1}^{2} = \left[-\sqrt{x^2-2x+5}\right]_{1}^{2}$

$=> I = F(2) - F(1) = (-\sqrt{5}) - (-2) = -\sqrt{5} + 2$

**8)** $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{Sinx - Cosx}{(Cox + Sinx)^2}dx => I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-(-Sinx + Cosx)}{(Cox + Sinx)^2}dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-Sinx + Cosx}{(Cox + Sinx)^2}dx$

$=> I = -\left[\frac{-1}{Cox + Sinx}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{1}{Cox + Sinx}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} => I = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (1) - (-1)$

$=> I = 2$

**9)** $I = \int_{0}^{1}(x^2-1)(x^3-3x+1)^3dx => I = \int_{0}^{1}\frac{3}{3}(x^2-1)(x^3-3x+1)^3dx$

$=> I = \frac{1}{3}\int_{0}^{1}(3x^2-3)(x^3-3x+1)^3dx => I = \left[\frac{(x^3-3x+1)^4}{4}\right]_{0}^{1}$

$=> I = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) = 0$

**10)** $I = \int_{0}^{1}(-2x+1)\sqrt{5x^2-5x+4}\,dx = \int_{0}^{1}(-2x+1)(5x^2-5x+4)^{\frac{1}{2}}dx$

$=> \ I \ = \frac{-5}{-5} \times \int_0^1 (-2x+1)(5x^2-5x+4)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{-5} \int_0^1 (10x-5)(5x^2-5x+4)^{\frac{1}{2}} dx$

$=> \ I \ = \frac{1}{-5} \left[ \frac{(5x^2-5x+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \left[ -\frac{2}{15}(5x^2 - 5x + 4)\sqrt{5x^2 - 5x + 4} \right]_0^1$

$=> \ I \ = F(1) - F(0) = \left(-\frac{16}{15}\right) - \left(-\frac{16}{15}\right) = 0$

**11)** $I \ = \int_0^2 |x^2 - 3x + 2| dx = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx$

$=> \ I \ = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x\right]_1^2$

$=> \ I \ = [F(0) - F(1)] + [F(1) - F(2)] = [F(0) - F(1)] + [F(1) - F(2)]$

$=> \ I \ = \left[\left(-\frac{1}{6}\right) - (0)\right] + \left[\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{5}{6}\right)\right] = -\frac{1}{6} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = 0$

**12)** $I \ = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |cos(2x - \pi)| dx => \ I \ = \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos(2x - \pi) dx \ => \ I = \left[\frac{1}{2} sin(2x - \pi)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=> \ I = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \left(-\frac{1}{2}\right) - (0) = -\frac{1}{2}$

**Intégrations par parties**

**7** En utilisant la formule de l'intégration par partie, calculons les intégrales suivantes :

**1)** $I \ = \int_0^{\pi} xSin2xdx$

Posons : $u(x) = x => u'(x) = 1$

$v'(x) = sin2x => v(x) = -\frac{1}{2}cos2x$

Alors $I \ = \left[-\frac{x}{2}cos2x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{2}cos2xdx = \left[-\frac{x}{2}cos2x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} cos2xdx \ =>$

$I \ = \left[-\frac{x}{2}cos2x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}sin2x\right]_0^{\pi} = \left[-\frac{x}{2}cos2x\right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{4}sin2x\right]_0^{\pi} = \left[-\frac{x}{2}cos2x + \frac{1}{4}sin2x\right]_0^{\pi}$

$=> \ I = F(\pi) - F(0) = \left(-\frac{\pi}{2}\right) - (0) = -\frac{\pi}{2}$

**2)** $I \ = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx \ = \int_{-1}^2 x \times \frac{1}{\sqrt{x+2}} dx$

Posons : $u(x) = x => u'(x) = 1$

$$v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} \Rightarrow v(x) = 2\sqrt{\square + 2}$$

Alors $I = \left[2x\sqrt{x+2}\right]_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} 2\sqrt{x+2}dx = \left[2x\sqrt{x+2}\right]_{-1}^{2} - 2\int_{-1}^{2}\sqrt{x+2}dx \Rightarrow$

$$I = \left[2x\sqrt{x+2}\right]_{-1}^{2} - 2\left[\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}\right]_{-1}^{2} = \left[2x\sqrt{x+2}\right]_{-1}^{2} - \left[\frac{4}{3}(x+2)\sqrt{x+2}\right]_{-1}^{2}$$

$$\left[2x\sqrt{x+2} - \frac{4}{3}(x+2)\sqrt{x+2}\right]_{-1}^{2}$$

$\Rightarrow I = F(2) - F(-1) = \left(-\frac{8}{3}\right) - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{2}{3}$

**3)** I = $\int_0^4 x\sqrt{4x+9}dx$

Posons : $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$$v'(x) = \sqrt{4x+9} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{6}(4x+9)\sqrt{4x+9}$$

Alors $I = \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9}\right]_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{6}(4x+9)\sqrt{4x+9}dx$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9}\right]_0^4 - \frac{1}{6}\int_0^4 (4x+9)\sqrt{4x+9}dx$$

$$= \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9}\right]_0^4 - \frac{1}{24}\int_0^4 4(4x+9)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9}\right]_0^4 - \frac{1}{24}\left[\frac{(4x+9)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^4$$

$$= \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9}\right]_0^4 - \frac{1}{60}\left[(4x+9)^{\frac{5}{2}}\right]_0^4$$

$$= \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9}\right]_0^4 - \frac{1}{60}\left[(4x+9)^2\sqrt{4x+9}\right]_0^4$$

$$= \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9}\right]_0^4 - \left[\left(\frac{x}{15} + \frac{3}{20}\right)\sqrt{4x+9}\right]_0^4$$

$$= \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9} - \left(\frac{x}{15} + \frac{3}{20}\right)\sqrt{4x+9}\right]_0^4$$

$\Rightarrow I = F(4) - F(0) = \left(\frac{250}{3}\right) - \left(\frac{25}{12}\right) = \frac{325}{4}$

**4)** I = $\int_{-2}^{1}(x-5)\sqrt{2-x}dx$

Posons : $u(x) = x - 5$ => $u'(x) = 1$

$v'(x) = \sqrt{2-x}$ => $v(x) = -\frac{2}{3}(2-x)\sqrt{2-x}$

Alors $I = \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x}\right]_{-2}^{1} + \int_{-2}^{1}\frac{2}{3}(2-x)\sqrt{2-x}dx$

=> $I = \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x}\right]_{-2}^{1} + \frac{2}{3}\int_{-2}^{1}(2-x)^{\frac{3}{2}}dx$

$= \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x}\right]_{-2}^{1} - \frac{2}{3}\int_{0}^{4} -(2-x)^{\frac{3}{2}}\,dx$

$= \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x}\right]_{-2}^{1} - \frac{2}{3}\left[\frac{(2-x)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_{-2}^{1}$

$= \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x}\right]_{-2}^{1} - \frac{4}{15}\left[(2-x)^{\frac{5}{2}}\right]_{-2}^{1}$

$= \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x}\right]_{-2}^{1} - \frac{4}{15}\left[(2-x)^{\frac{5}{2}}\right]_{-2}^{1}$

$= \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x}\right]_{-2}^{1} - \frac{4}{15}\left[(2-x)^{2}\sqrt{2-x}\right]_{-2}^{1}$

$= \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x} - \frac{4}{15}(2-x)^{2}\sqrt{2-x}\right]_{-2}^{1}$

=> $I = F(1) - F(-2) = \left(\frac{12}{5}\right) - \left(\frac{144}{5}\right) = -\frac{132}{5}$

**5)** $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 Cos(x+\pi)dx$

Posons : $u(x) = x^2$ => $u'(x) = 2x$

$v'(x) = cos(x+\pi)$ => $v(x) = sin(x+\pi)$

Alors $I = [x^2 sin(x+\pi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x sin(x+\pi)\,dx$ =>

$I = [x^2 sin(x+\pi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x sin(x+\pi)\,dx$ . Posons $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x sin(x+\pi)\,dx$

=> $I = [x^2 sin(x+\pi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2A$. Intégrons ainsi par partie $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xsin(x+\pi)\, dx$

$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xsin(x+\pi)\, dx$

Posons : $u(x) = x$ => $u'(x) = 1$

$v'(x) = sin(x+\pi)$ => $v(x) = -cos(x+\pi)$

Alors $A = [-xcos(x+\pi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(x+\pi)dx = [-xcos(x+\pi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + [sin(x+\pi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

=> $A = [-xcos(x+\pi) + sin(x+\pi)\,]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

=> $I = [x^2 sin(x+\pi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2A$ . Avec $A = [-xcos(x+\pi) + sin(x+\pi)\,]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

=> $I = [x^2 sin(x+\pi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2[-xcos(x+\pi) + sin(x+\pi)\,]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

=> $I = [x^2 sin(x+\pi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + [2xcos(x+\pi) - 2sin(x+\pi)\,]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

=> $I = [x^2 sin(x+\pi) + 2xcos(x+\pi) - 2sin(x+\pi)\,]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

=> $I = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{-\pi^2+8}{4}\right) - \left(\frac{\pi^2-8}{4}\right) = \frac{-\pi^2}{2}$

**8** Soient les intégrales $I$ et $J$ définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)Cos^2 2xdx$ et J $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)Sin^2 2xdx$

**1)** Calculons : $I + J$.

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)Cos^2 2xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)Sin^2 2xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)(cos^2 2x + sin^2 2x)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

=> $I = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \left(\frac{\pi^2+4\pi}{8}\right) - (0) = \frac{\pi^2+4\pi}{8}$

**2)** Calculons : I – J en utilisant la technique de l'intégration par parties.

$\mathrm{I}-\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)Cos^2 2xdx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)Sin^2 2xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)(cos^2 2x-sin^2 2x)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)(cos4x)dx$

Posons : $u(x)=x+1 \Rightarrow u'(x)=1$

$v'(x)=cos4x \Rightarrow v(x)=\frac{1}{4}sin4x$

Alors $\mathrm{I}-\mathrm{J}=\left[\frac{(x+1)}{4}sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}sin4x\,dx$

$\Rightarrow \mathrm{I}-\mathrm{J}=\left[\frac{(x+1)}{4}sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin4x\,dx=\left[\frac{(x+1)}{4}sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{4}cos4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left[\frac{(x+1)}{4}sin4x+\frac{1}{16}cos4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow \mathrm{I}-\mathrm{J}=F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)=\left(\frac{1}{16}\right)-\left(\frac{1}{16}\right)=0$

**3)** En déduisons les valeurs de I et J.

D'après les questions **1)** et **2)**, on a : $\mathrm{I}+\mathrm{J}=\frac{\pi^2+4\pi}{8}$ et $\mathrm{I}-\mathrm{J}=0$

Formons ainsi le système avec I + J et I − J

$$\begin{cases}\mathrm{I}+\mathrm{J}=\frac{\pi^2+4\pi}{8} & \textbf{(1)}\\ \mathrm{I}-\mathrm{J}=0 & \textbf{(2)}\end{cases}$$

La somme des équations **(1)** **et (2)** donne : $2I=\frac{\pi^2+4\pi}{8} \Rightarrow I=\frac{\pi^2+4\pi}{16}$

En remplaçant $I$ par sa valeur dans l'équation **(2),** on obtient $\frac{\pi^2+4\pi}{16}-\mathrm{J}=0 \Rightarrow$

$J=\frac{\pi^2+4\pi}{16}$

**Intégrations par changement de variable**

**9** En utilisant un changement de variable, calculons les intégrales suivantes :

**1)** $I=\int_{-1}^{2}\frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$

Posons $u=x+2 \Rightarrow x=u-2$. Alors $dx=du$

Si $x = -1$ alors $u = 1$ et Si $x = 2$ alors $u = 4$

$$=> I = \int_1^4 \frac{u-2}{\sqrt{u}} du = \int_1^4 \frac{u}{\sqrt{u}} du - \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{u}} du = \int_1^4 \sqrt{u}\, du - \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{u}} du$$

$$= \int_1^4 \sqrt{u}\, du - 2\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{u}} du \;=> I = \left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_1^4 - 2\left[2\sqrt{u}\right]_1^4 = \left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_1^4 - \left[4\sqrt{u}\right]_1^4$$

$$=> I = \left[\frac{2}{3}u\sqrt{u} - 4\sqrt{u}\right]_1^4$$

$$=> I = F(4) - F(1) = \left(-\frac{8}{3}\right) - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

**2)** $I = \int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$

Posons $u = x^2 - 1 \;=> x^2 = u + 1 \;=> x = \sqrt{u+1}$. Alors $2xdx = du$

$=> dx = \frac{du}{2x}$. Or $x = \sqrt{u+1} \;=> dx = \frac{du}{2\sqrt{u+1}}$

Si $x = -1$ alors $u = 0$ et Si $x = 2$ alors $u = 3$

$$=> I = \int_0^3 \frac{\sqrt{u+1}}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2\sqrt{u+1}} = \int_0^3 \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{u}} du$$

$$=> I = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{u}\right]_0^3 = \left[\sqrt{u}\right]_0^3 \;=> I = F(3) - F(0) = \sqrt{3} - 0 = \sqrt{3}$$

**10** Soit le polynôme p définie par : $p(x) = x^3 - 12x - 16$.

**1)** Montrons que $-2$ est un zéro double de $P$.

$-2$ est un zéro double de $P$ si et seulement si $x^3 - 12x - 16$ est divisible par $(x+2)^2$

La division Euclidienne de $x^3 - 12x - 16$ par $(x+2)^2$ donne pour quotient $x - 4$ et pour reste 0. D'où $-2$ est un zéro double de $P$. Ainsi la forme factorisée de $P$ est :

$p(x) = (x-4)(x+2)^2$.

**2)** En utilisant la méthode de l'intégration par partie et la méthode par changement de variable, calculons l'intégrale : $I = \int_4^5 \sqrt{p(x)} dx$

$$I = \int_4^5 \sqrt{p(x)} dx = \int_4^5 \sqrt{(x-4)(x+2)^2} dx = \int_4^5 (x+2)\sqrt{x-4}\, dx.$$

**- Méthode d'intégration par parties :**

$I = \int_4^5 (x+2)\,\sqrt{x-4}dx$

Posons : $u(x) = x + 2$ => $u'(x) = 1$

$v'(x) = \sqrt{x-4}$ => $v(x) = \frac{2}{3}(x-4)\sqrt{x-4}$

Alors $I = \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4}\right]_4^5 - \int_4^5 \frac{2}{3}(x-4)\sqrt{x-4}dx$

=> $I = \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4}\right]_4^5 - \frac{2}{3}\int_4^5 (x-4)^{\frac{3}{2}}dx$

$= \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4}\right]_4^5 - \frac{2}{3}\left[\frac{(x-4)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_4^5$

$= \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4}\right]_4^5 - \frac{4}{15}\left[(x-4)^{\frac{5}{2}}\right]_4^5$

$= \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4}\right]_4^5 - \frac{4}{15}\left[(x-4)^{\frac{5}{2}}\right]_4^5$

$= \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4}\right]_4^5 - \frac{4}{15}\left[(x-4)^2\sqrt{x-4}\right]_4^5$

$= \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4} - \frac{4}{15}(x-4)^2\sqrt{x-4}\right]_4^5$

=> $I = F(5) - F(4) = \left(\frac{22}{5}\right) - (0) = \frac{22}{5}$

**- Méthode d'intégration par changement de variable :**

$I = \int_4^5 (x+2)\,\sqrt{x-4}dx$

Posons $u = x - 4$ => $= u + 4$ . Alors $dx = du$

Si $x = 4$ alors $u = 0$ et Si $x = 5$ alors $u = 1$

=> $I = \int_0^1 (u+4+2)\,\sqrt{u}\,du = \int_0^1 (u+6)\,\sqrt{u}\,du = \int_0^1 \left(u\sqrt{u} + 6\sqrt{u}\right)du$

$= \int_0^1 \left(u^{\frac{3}{2}} + 6\sqrt{u}\right)du = \int_0^1 u^{\frac{3}{2}}\,du + \int_0^1 6\sqrt{u}\,du = \int_0^1 u^{\frac{3}{2}}\,du + 6\int_0^1 \sqrt{u}\,du$

=> $I = \left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^1 + 6\left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{5}u^2\sqrt{u}\right]_0^1 + \left[4u\sqrt{u}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{5}u^2\sqrt{u} + 4u\sqrt{u}\right]_0^1$

$=> \ I = F(1) - F(0) = \left(\frac{22}{5}\right) - \ (0) = \frac{22}{5}$

**Intégrales et suites**

**11** Soit l'intégrale $I_n$ définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^n x \, dx$

1) En utilisant la technique d'intégration par parties, trouvons une relation entre $I_n$ et $I_{n-2}$ (On posera : $Sin^n x = Sin^{n-1}x \bullet Sinx$)

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{n-1}x \bullet Sinx \, dx$

Posons : $u(x) = Sin^{n-1}x => u'(x) = (n-1)cosxSin^{n-2}x$

$v'(x) = Sinx => v(x) = -cosx$

Alors $I_n = [-cosxSin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -cosx(n-1)cosxSin^{n-2}x \, dx$

$=> I_n = [-cosxSin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2xSin^{n-2}x \, dx$

$= [-cosxSin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \ sin^2x)Sin^{n-2}x \, dx$

$= [-cosxSin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (Sin^{n-2}x - \ sin^n x) \, dx$

$= [-cosxSin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{n-2}x \, dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^n x \, dx$

$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{n-2}x \, dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^n x \, dx.$ Avec $[-cosxSin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$

$=> I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Leftrightarrow I_n + (n-1)I_n = (n-1)I_{n-2} \Leftrightarrow$

$I_n(1 + n - 1) = (n-1)I_{n-2} \Leftrightarrow nI_n = (n-1)I_{n-2} \Leftrightarrow => I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$

D'où la relation entre $I_n$ et $I_{n-2}$ est $I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}.$

2) On donne $I_0 = \frac{\pi}{2}$. Calculons : $I_2$ et $I_4$

On sait que : $I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}.$

- Pour $n = 2$ ; on a : $I_2 = \frac{(2-1)}{2} I_{2-2} = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

- Pour $n = 4$ ; on a : $I_4 = \frac{(4-1)}{4} I_{4-2} = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{16}$.

**12** Soit l'intégrale $I_n$ définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$ $(n \geq 0)$

1) Calculons $I_0$

$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx \Rightarrow I_0 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{2}{2} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$\Rightarrow I_0 = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1$. $\Rightarrow I_0 = F(1) - F(0) = (\sqrt{2}) - (1) = \sqrt{2} - 1$

$\Rightarrow I_0 = \sqrt{2} - 1$

2) En intégrant par parties, montrons que $\forall\, n \geq 1$ on a : $(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$.

$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^{2n} \bullet x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 x^{2n} \bullet \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{2n} \bullet \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

Posons $u(x) = x^{2n} \Rightarrow u'(x) = 2nx^{2n-1}$

$v'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow v(x) = 2\sqrt{1+x^2}$

$\Rightarrow I_n = \frac{1}{2}\left[2x^{2n}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 4nx^{2n-1}\sqrt{1+x^2}\, dx$

$= \left[x^{2n}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - 2n\int_0^1 x^{2n-1}\sqrt{1+x^2}\, dx$

En rendant rationnelle $\sqrt{1+x^2}$ ; on a : $\sqrt{1+x^2} = \frac{(\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Rightarrow I_n = \left[x^{2n}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - 2n\int_0^1 x^{2n-1} \times \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$= \left[x^{2n}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - 2n\int_0^1 \frac{(1+x^2)x^{2n-1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$= \left[x^{2n}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - 2n\int_0^1 \frac{x^{2n-1} + x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$= \left[x^{2n}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - 2n\int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1+x^2}} dx - 2n\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$

Or $\left[x^{2n}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2} \Rightarrow I_n = \sqrt{2} - 2n\int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1+x^2}} dx - 2n\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$$= -2nI_{n-1} \; -2nI_n$$

=> $I_n + 2nI_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1} \Leftrightarrow (2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$

D'où la relation : $(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$

3) En déduisons la valeur de $I_1$ ; $I_2$ et $I_3$.

- Pour $n = 1$ ; on a : $3I_1 = \sqrt{2} - 2I_0 = \sqrt{2} - 2(\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$ => $I_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$
- Pour $n = 2$ ; on a : $5I_2 = \sqrt{2} - 4I_1 = \sqrt{2} - 4\left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}\right)$ => $I_2 = \frac{-8+7\sqrt{2}}{15}$
- Pour $n = 3$ ; on a : $7I_3 = \sqrt{2} - 6I_2$ => $I_3 = \frac{48-27\sqrt{2}}{105}$

**13** Soit l'intégrale $I_n$ définie par : $I_n = \int_{-1}^{1}(t^2-1)^n dt$ ( $n \in \mathbb{N}$ )

1) Démontrons que $I_n = 2\int_0^1 (t^2-1)^n dt$ puis calculons $I_0$

Appliquons la relation de Chasles entre $-1$ et $1$.

=> $I_n = \int_{-1}^{1}(t^2-1)^n dt = \int_{-1}^{0}(t^2-1)^n dt + \int_0^1 (t^2-1)^n dt$

Ainsi posons $A = \int_{-1}^{0}(t^2-1)^n dt$ puis Effectuons un changement de variable.

Posons $t = -X$ => $X = -t$ . Alors $dt = -dX$

Si $t = -1$ alors $X = 1$ et Si $t = 0$ alors $X = 0$

=> $A = \int_{-1}^{0}(t^2-1)^n dt = -\int_{-1}^{0}(t^2-1)^n dt = \int_0^1 (t^2-1)^n dt$

D'où $I_n = \int_0^1 (t^2-1)^n dt + \int_0^1 (t^2-1)^n dt = 2\int_0^1 (t^2-1)^n dt$

=> $I_n = 2\int_0^1 (t^2-1)^n dt$ (ce qu'il fallait Démontre)

En déduisons la valeur de $I_0$

$I_n = 2\int_0^1 (t^2-1)^n dt$ => $I_0 = 2\int_0^1 (t^2-1)^0 dt = 2\int_0^1 1dt = [2t]_0^1 = 2.$

=> $I_0 = 2$

2) Démontrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; on a : $I_n = -\frac{2n}{1+2n} I_{n-1}$

On sait que $I_n = 2\int_0^1 (t^2-1)^n dt$ => $I_{n-1} = 2\int_0^1 (t^2-1)^{n-1} dt$

$I_n = 2\int_0^1 (t^2-1)^n dt = 2\int_0^1 (t^2-1)^{n-1+1} = 2\int_0^1 (t^2-1)^{n-1} \times (t^2-1)dt$

$= 2\int_0^1 t^2(t^2-1)^{n-1}\, dt - 2\int_0^1 (t^2-1)^{n-1}\, dt$

$= 2\int_0^1 t \times t(t^2-1)^{n-1}\, dt - 2\int_0^1 (t^2-1)^{n-1}\, dt$

$= \int_0^1 t \times 2t(t^2-1)^{n-1}\, dt - 2\int_0^1 (t^2-1)^{n-1}\, dt = \int_0^1 t \times 2t(t^2-1)^{n-1}\, dt - I_{n-1}$

$=> I_n = \int_0^1 t \times 2t(t^2-1)^{n-1}\, dt - I_{n-1}$

Intégrons par partie l'intégrale $\int_0^1 t \times 2t(t^2-1)^{n-1}\, dt$

Posons $u(t) = t \; => \; u'(t) = 1$

$v'(t) = 2t(t^2-1)^{n-1} \; => \; v(t) = \frac{(t^2-1)^n}{n}$

$=> \int_0^1 t \times 2t(t^2-1)^{n-1}\, dt = \left[\frac{t\times(t^2-1)^n}{n}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(t^2-1)^n}{n} dx$. Or $\left[\frac{t\times(t^2-1)^n}{n}\right]_0^1 = 0$

$=> \int_0^1 t \times 2t(t^2-1)^{n-1}\, dt = -\frac{1}{2n}\int_0^1 2(t^2-1)^n dx = -\frac{1}{2n} I_n$

D'où $I_n = \int_0^1 t \times 2t(t^2-1)^{n-1}\, dt - I_{n-1} = -\frac{1}{2n} I_n - I_{n-1}$

$=> I_n = -\frac{1}{2n} I_n - I_{n-1} \Leftrightarrow I_n + \frac{1}{2n} I_n = -I_{n-1} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{2n}\right) I_n = -I_{n-1} \Leftrightarrow$

$\left(\frac{2n+1}{2n}\right) I_n = -I_{n-1} \; => I_n = -\frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$

D'où $I_n = -\frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ (ce qu'il fallait Démontre)

**14** Soit l'intégrale $I_n$ définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{Cos^{2n+1}x}$

1) Déterminons le seul réel $a$ tel que : $\forall \; x \left[0 \; ; \; \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $\frac{1}{Cosx} = \frac{aCosx}{1-Sinx} + \frac{aCosx}{1+Sinx}$.

$\frac{1}{Cosx} = \frac{aCosx}{1-Sinx} + \frac{aCosx}{1+Sinx} \Leftrightarrow \frac{1}{Cosx} = \frac{aCosx\,(1+Sinx) + aCosx\,(1-Sinx)}{(1-Sinx)(1+Sinx)}$

$=> \frac{1}{Cosx} = \frac{aCosx\,(1+Sinx+1-sinx)}{1-sin^2x} = \frac{2aCosx}{cos^2x} = \frac{2a}{cosx}$. $=> \frac{1}{Cosx} = \frac{2a}{cosx}$

Par identification, on a : $2a = 1 => a = \frac{1}{2}$

D'où $\frac{1}{Cosx} = \frac{Cosx}{2(1-\ Sinx\ )} + \frac{Cosx}{2(1+\ Sinx\ )}$.

2) Calculons la valeur de $I_0$.

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{Cos^{2n+1}x} \Rightarrow I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{Cosx} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{Cosx}{2(1-\ Sinx\ )} + \frac{Cosx}{2(1+\ Sinx\ )}\right) dx$

$\Rightarrow I_0 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{Cosx}{1-\ Sinx} + \frac{Cosx}{1+\ Sinx}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{Cosx}{1-\ Sinx} dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{Cosx}{1+\ Sinx} dx$

$\Rightarrow I_0 = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-Cosx}{1-\ Sinx} dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{Cosx}{1+\ Sinx} dx$

$\Rightarrow I_0 = -\frac{1}{2}[ln(1-sinx)]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}[ln(1+sinx)]_0^{\frac{\pi}{4}}$. Puisque $\frac{1}{2}\,lna = \sqrt{a}$ , alors :

$I_0 = \left[-ln\sqrt{1-sinx} + ln\sqrt{1+sinx}\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[ln\sqrt{1+sinx} - ln\sqrt{1-sinx}\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

Puisque $lna - lnb = ln\,\frac{a}{b}$ , alors $I_0 = \left[ln\left(\frac{\sqrt{1+sinx}}{\sqrt{1-sinx}}\right)\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[ln\left(\sqrt{\frac{1+sinx}{1-sinx}}\right)\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow I_0 = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

3) Démontrons à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^{-n}}{\sqrt{2}}$ $\left(\text{On pourra poser : } \frac{1}{Cos^{2n+1}x} = \frac{1}{Cos^{2n-1}x} \times \frac{1}{Cos^2 x}\right)$

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{Cos^{2n+1}x} \Rightarrow I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{Cos^{2n-1}x} \bullet \frac{1}{Cos^2 x} dx$

Posons $u(x) = \frac{1}{Cos^{2n-1}x} \Rightarrow u'(x) = \frac{(2n-1)sinx}{Cos^{2n}\,x}$

$v'(x) = \frac{1}{Cos^2 x} \Rightarrow v(x) = tangx = \frac{sinx}{cosx}$

$\Rightarrow I_n = \left[\frac{1}{Cos^{2n-1}x} \times \frac{sinx}{cosx}\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2n-1)sinx}{Cos^{2n}\,x} \times \frac{sinx}{cosx}\ dx$

$= \left[\frac{sinx}{Cos^{2n}\,x}\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2n-1)sinx}{Cos^{2n}\,x} \times \frac{sinx}{cosx}\ dx = \left[\frac{sinx}{Cos^{2n}\,x}\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2n-1)sin^2 x}{Cos^{2n+1}\,x}\ dx$

$= \left[\frac{sinx}{Cos^{2n}\,x}\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2n-1)\left(1-cos^2 x\right)}{Cos^{2n+1}\,x}\ dx = \left[\frac{sinx}{Cos^{2n}\,x}\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-cos^2 x}{Cos^{2n+1}\,x}\ dx$

$$= \left[\frac{\sin x}{Cos^{2n} x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{Cos^{2n+1} x}\, dx + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{cos^2 x}{Cos^{2n+1} x}\, dx$$

$$= \left[\frac{\sin x}{Cos^{2n} x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{Cos^{2n+1} x}\, dx + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{Cos^{2n+1} x \bullet cos^{-2} x}\, dx$$

$$= \left[\frac{\sin x}{Cos^{2n} x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{Cos^{2n+1} x}\, dx + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{Cos^{2n-1} x}\, dx$$

$$= \left[\frac{\sin x}{Cos^{2n} x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - (2n-1)I_n + (2n-1)I_{n-1}.$$

Or $\left[\frac{\sin x}{Cos^{2n} x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\left(cos\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}\right) - (0) = \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n}}\right) = \left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^n}\right]$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{2}{4}\right)^n} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2^n = \sqrt{2} \times 2^n \times 2^{-1} = \sqrt{2} \times 2^{n-1}$$

$=> I_n = \sqrt{2} \times 2^{n-1} - (2n-1)I_n + (2n-1)I_{n-1}$ . Or $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$=> I_n = \frac{2}{\sqrt{2}} \times 2^{n-1} - (2n-1)I_n + (2n-1)I_{n-1}$

$=> I_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}} - (2n-1)I_n + (2n-1)I_{n-1} \Leftrightarrow I_n + (2n-1)I_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}} + (2n-1)I_{n-1}$

$\Leftrightarrow (1 + 2n - 1)I_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}} + (2n-1)I_{n-1} \Leftrightarrow 2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ on a : $2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$

**15** Soit l'intégrale $I_n$ définie par : $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1 - x^2}\, dx$

1) Calculons $I_1$.

$I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1 - x^2}\, dx \;=> I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\, dx = -\int_0^1 -\frac{2}{2}x\sqrt{1 - x^2}\, dx$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 -2x\sqrt{1 - x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 -2x(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\, dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{3}\left[(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}\left[(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}\right]_0^1$$

$\Rightarrow I_1 = F(1) - F(0) = (0) - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

2) En intégrant par parties, montrons que $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$ (on posera $x^n = x \bullet x^{n-1}$ )

$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_0^1 x \bullet x^{n-1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_0^1 x^{n-1} \bullet x\sqrt{1 - x^2}\, dx$

Posons $u(x) = x^{n-1} \Rightarrow u'(x) = (n-1)x^{n-2}$

$v'(x) = x\sqrt{1 - x^2} \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$ . (D'après la question1° )

$\Rightarrow I_n = \left[-\frac{1}{3}x^{n-1} \times (1-x^2)\sqrt{1-x^2}\,\right]_0^1 + \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\, dx$

$\Rightarrow I_n = \left[-\frac{1}{3}x^{n-1} \times (1-x^2)\sqrt{1-x^2}\,\right]_0^1 + \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 (x^{n-2} - x^n)\sqrt{1-x^2}\, dx$

Or $\left[-\frac{1}{3}x^{n-1} \times (1-x^2)\sqrt{1-x^2}\,\right]_0^1 = 0$

$\Rightarrow I_n = \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 (x^{n-2} - x^n)\sqrt{1-x^2}\, dx$

$\Rightarrow I_n = \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\, dx$

$\Rightarrow I_n = \frac{1}{3}(n-1)I_{n-2} - \frac{1}{3}(n-1)I_n \Leftrightarrow I_n + \frac{1}{3}(n-1)I_n = \frac{1}{3}(n-1)I_{n-2} \Leftrightarrow$

$\left(1 + \frac{1}{3}(n-1)\right)I_n = \frac{1}{3}(n-1)I_{n-2} \Leftrightarrow \frac{n+2}{3}I_n = \frac{n-1}{3}I_{n-2} \Leftrightarrow$

$(n+2)I_n = (n-1)I_{n-2} \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}$ .

D'où $I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}$ (ce qu'il fallait Démontre)

**16** Soit l'intégrale $I_n$ définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{1}{x^n+1}dx$ avec $n \in \mathbb{N}$

1) Montrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ; $I_n$ est croissante et majorée.

Pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ ; on a : $x^{n+1} \leq x^n$

$\Rightarrow 1 < 1 + x^{n+1} \leq 1 + x^n$ . D'où $\frac{1}{x^n+1} \leq \frac{1}{x^{n+1}+1}$

En intégrant sur $[0\ ;\ 1]$ ; on a : $\int_0^1 \frac{1}{x^n+1}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^{n+1}+1}dx$ soit $I_n \leq I_{n+1}$

Ainsi on en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ; $I_n$ est croissante.

D'autre part $0 \leq x^n \leq 1$ donc $1 \leq x^n + 1 \leq 2$ d'où $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^n+1} \leq 1$ et en intégrant sur $[0\ ;\ 1]$ ; on a : $\frac{1}{2} \leq I_n \leq 1$ **(1)**

$I_n$ est une suite croissante et majorée donc elle est convergente.

2) Montrons que $\forall\ n \in \mathbb{N}$ ; on a : $1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$ .En déduisons la limite de la suite $I_n$.

Pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $[0\ ; 1]$ ; on a : $\frac{1}{x^n+1} = \frac{x^n+1-x^n}{x^n+1} = 1 - \frac{x^n}{x^n+1}$

$x^n + 1 \geq 1$. D'où $\frac{1}{x^n+1} \leq 1$ soit $-\frac{x^n}{x^n+1} \geq -x^n \Leftrightarrow 1 - \frac{x^n}{x^n+1} \geq 1 - x^n$

En intégrant sur $[0\ ;\ 1]$ ; on a : $\int_0^1 \left(1 - \frac{x^n}{x^n+1}\right) dx \geq \int_0^1 (1 - x^n) dx.$

D'où $I_n \geq 1 - \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$ soit $I_n \geq 1 - \frac{1}{n+1}$.

A l'aide de la relation **(1) ,** on obtient $1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$ et en utilisant le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

**17** Soit l'intégrale $I_n$ définie par : $I_n(x) = \int_1^x t^n lnt\ dx$ ( $n \in \mathbb{N} - \{-1\}$ et $x > 0$)

1) En utilisant une intégration par parties ; calculons $I_n(x)$

Posons $u(t) = lnt \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = t^n \Rightarrow v(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$

$$\Rightarrow I_n(x) = \left[\frac{t^{n+1} \times lnt}{n+1}\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^{n+1}}{t(n+1)} dx. = \left[\frac{t^{n+1} \times lnt}{n+1}\right]_1^x - \frac{1}{n+1}\int_1^x t^n dx$$

$$= \left[\frac{t^{n+1} \times lnt}{n+1}\right]_1^x - \frac{1}{n+1}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_1^x = \left[\frac{t^{n+1} \times lnt}{n+1}\right]_1^x - \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^x$$

$$= \left[\frac{t^{n+1} \times lnt}{n+1} - \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^x = \left[\frac{(n+1)t^{n+1} \times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^x$$

$$\Rightarrow I_n(x) = F(x) - F(1) = \frac{(n+1)x^{n+1} lnx - x^{n+1} + 1}{(n+1)^2}$$

2) En déduisons le calcul de $J_n(x) = \int_1^x t^n (lnt)^2\ dt$

$J_n(x) = \int_1^x t^n (lnt)^2\, dt = \int_1^x t^n \times lnt \times lnt\, dt = \int_1^x lnt \times t^n lnt\, dt$

Posons $u(t) = lnt \;=>\; u'(t) = \frac{1}{t}$

$$v'(t) = t^n lnt \;=>\; v(t) = \frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$=> J_n(x) = \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right] lnt\right]_1^x - \int_1^x \frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{t(n+1)^2}\, dx.$$

$$= \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right] lnt\right]_1^x - \int_1^x \frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt}{t(n+1)^2}\, dx + \int_1^x \frac{t^{n+1}}{t(n+1)^2}\, dx.$$

$$= \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right] lnt\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^n\times lnt}{n+1}\, dx + \int_1^x \frac{t^n}{(n+1)^2}\, dx.$$

$$= \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right] lnt\right]_1^x - \frac{1}{n+1}\int_1^x t^n \times lnt\, dx + \frac{1}{(n+1)^2}\int_1^x t^n dx.$$

$$= \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right] lnt\right]_1^x - \frac{1}{n+1} I_n(x) + \frac{1}{(n+1)^2}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_1^x.$$

$$= \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right] lnt\right]_1^x - \frac{1}{n+1}\left[\frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^x + \frac{1}{(n+1)^2}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_1^x.$$

Avec $I_n(x) = \left[\frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^x$

$$=> J_n(x) = \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right] lnt - \frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^3} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)^3}\right]_1^x$$

$$=> J_n(x) = F(x) - F(1) = \frac{(n+1)x^{n+1}\times lnx\,[(n+1)lnx - 2] - 2}{(n+1)^3}$$

3) a) Calculons $I_n(e) - J_n(e)$.

$I_n(x) = \frac{(n+1)x^{n+1}lnx - x^{n+1} + 1}{(n+1)^2}$ et $J_n(x) = \frac{(n+1)x^{n+1}\times lnx\,[(n+1)lnx - 2] - 2}{(n+1)^3}$

$$=> I_n(e) - J_n(e) = \frac{(n+1)(e^{n+1}+1) + 2}{(n+1)^3}$$

b) Déterminons la limite de $\frac{I_n(e) - J_n(e)}{e^{n+1}}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{I_n(e)-J_n(e)}{e^{n+1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{(n+1)(e^{n+1}+1)+2}{(n+1)^3}}{e^{n+1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)(e^{n+1}+1)+2}{(n+1)^3 e^{n+1}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{ne^{n+1}}{n^3 e^{n+1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{I_n(e)-J_n(e)}{e^{n+1}} = 0$

## Intégrales linéaires

**18** Soient les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$

1) Calculons $I$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx \Rightarrow I = [\tan(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(0) = 1$$

$\Rightarrow I = 1$

2) Soit la fonction définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

a- Montrons que $\forall\, x \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ on a : $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.

$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

Posons $u(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$

$v(x) = \cos^3 x \Rightarrow v'(x) = -3\sin x\cos^2 x$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos^3 x) - (-3\sin x\cos^2 x)(\sin x)}{(\cos^3 x)^2} = \frac{\cos^4 x + 3\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^6 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x(\cos^2 x + 3\sin^2 x)}{\cos^6 x} = \frac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + 3(1-\cos^2 x)}{\cos^4 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + 3 - 3\cos^2 x}{\cos^4 x} = \frac{3 - 2\cos^2 x}{\cos^4 x} = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2\cos^2 x}{\cos^4 x} = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}.$$

D'où $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.

b- En déduisons une relation entre $I$ et $J$.

On sait que : $f'(x) = \frac{3}{cos^4 x} - \frac{2}{cos^2 x}$. En intégrant $f'(x)$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ ; on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{cos^4 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{cos^2 x} dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^4 x} dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^2 x} dx \Leftrightarrow$$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\,dx = 3J - 2I$. Or $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\,dx = [f(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0) = 2$

=> $3J - 2I = 2$

c- Calculons $J$.

$3J - 2I = 2 \Rightarrow J = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}I = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(1) = \frac{4}{3}$. D'où $J = \frac{4}{3}$

**19** Soient les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4 x dx \quad ; J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2 x cos^2 x dx$$

1) Calculons $I - J$ et $I + J + K$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^4 x - sin^4 x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^2 x - sin^2 x)(cos^2 x + sin^2 x) dx$$

Or $cos^2 x - sin^2 x = cos2x$ et $cos^2 x + sin^2 x = 1$

=> $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2x\, dx$ => $I - J = \left[\frac{1}{2} sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = 0$

=> $I - J = 0$

Cacul de $I + J + K$

$$I + J + K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2 x cos^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^4 x + sin^4 x + 2sin^2 x \square os^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^4 x + 2sin^2 x cos^2 x + sin^4 x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^2 x + sin^2 x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow I + J + K = \frac{\pi}{2}$

2) Calcule : $I + J - 3K$ puis en déduis les valeurs de $I$ ; $J$ et $K$.

$$I + J - 3K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4xdx - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2xcos^2xdx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4xdx - 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xcos^2xdx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4xdx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xcos^2xdx - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xcos^2xdx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^4x - 2sin^2xcos^2x + sin^4x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4sin^2xcos^2xdx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^2x - sin^2x)^2dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2cosxsinx)^2dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos2x)^2dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin2x)^2dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^2 2x - sin^2 2x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos4xdx = \left[\frac{1}{4}sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 0$$

$\Rightarrow I + J - 3K = 0$

Ainsi pour en déduis les valeurs de $I$ ; $J$ et $K$ ; on forme le système avec les équations :

$I - J = 0$ ; $I + J + K = \frac{\pi}{2}$ et $I + J - 3K = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} I - J = 0 & (\mathbf{1}) \\ I + J + K = \frac{\pi}{2} & (\mathbf{2}) \\ I + J - 3K = 0 & (\mathbf{3}) \end{cases}$$

L'équation **(1)** donne $I - J = 0 \Rightarrow I = J$ puis en remplaçant $I$ par $J$ dans les equations : **(2)** et **(3)** , on a :

$$\begin{cases} J + J + K = \frac{\pi}{2} \\ J + J - 3K = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2J + K = \frac{\pi}{2} \\ 2J - 3K = 0 \end{cases}$$

La resolution de ce système Donne: $J = \frac{3\pi}{16}$ et $K = \frac{\pi}{8}$.

En remplaçant $J$ par sa valeur dans l'équation **(1) ,** on a : $I = \frac{3\pi}{16}$

**20** Soient les intégrales I et J définies par :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{cosx + sinx} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{cosx + sinx} dx$

Calculons $I + J$ et $I - J$ puis en déduisons les valeurs de $I$ et $J$.

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{cosx + sinx} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{cosx + sinx} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{cosx}{cosx + sinx} + \frac{sinx}{cosx + sinx}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{cosx + sinx}{cosx + sinx}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$=> I + J = \frac{\pi}{2}$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{cosx + sinx} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{cosx + sinx} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{cosx}{cosx + sinx} - \frac{sinx}{cosx + sinx}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{cosx - sinx}{cosx + sinx}\right) dx = [ln(cosx + sinx)]_0^{\frac{\pi}{2}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 0$$

$=> I - J = 0$

Ainsi pour en déduis les valeurs de $I$ $et$ $J$ ; on forme le système avec les équations :

$I + J = \frac{\pi}{2}$ et $I - J = 0$

$$=> \begin{cases} I + J = \frac{\pi}{2} \\ I - J = 0 \end{cases}$$

La resolution de Ce système Donne: $I = \frac{\pi}{4}$ et $J = \frac{\pi}{4}$.

**21** On se propose de calcule l'intégrale $J$ définie par $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} dx$

1) Calculons les deux intégrales A et B tel que $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$ et $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$

$$A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx \;=> A = [ln(1 + e^x)]_0^1 => A = F(1) - F(0) = ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx => B = \left[ln\left(\frac{-1}{1+e^x}\right)\right]_0^1 => B = F(1) - F(0) = \frac{e-1}{2(1+e)}$$

2) Déterminons les réels $a$ ; $b$ et $c$ tel que : $\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$ **(1)**

$$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{a(1+t)^2 + bt(1+t)\ ct}{(1+t)^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(1+t)^2} = \frac{a(1+t)^2 + bt(1+t)\ ct}{(1+t)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{(a+b)t^2 + (2a+b+c)t + a}{(1+t)^2}$$

Par identification ; on a : $a = 1$ ; $b = -1$ et $c = -1$

D'où $\frac{1}{(1+t)^2} = 1 - \frac{t}{1+t} - \frac{t}{(1+t)^2}$ **(1)**

3) En posant $t = e^x$ dans l'égalité **(1),** calculons $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^{\square})^2} dx$

$\frac{1}{(1+t)^2} = 1 - \frac{t}{1+t} - \frac{t}{(1+t)^2}$ En posant $t = e^x$ ; on a :

$$\frac{1}{(1+e^x)^2} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

Alors $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\right) dx$

$$= \int_0^1 1dx - \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx - \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \int_0^1 1dx - A - B$$

$$=[x]_0^1 - A - B = 1 - A - B = 1 - ln\left(\frac{1+e}{2}\right) - \frac{e-1}{2(1+e)}$$

$=> I = \frac{3+e}{2(1+e)} - ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

4) a- A l'aide d'une intégration par partie, exprimons $J$ en fonction de $I$.

$J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} dx = \int_0^1 x \bullet \frac{e^x}{(1+e^x)^3} dx$

Posons $u(x) = x$ => $u'(x) = 1$

$$v'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^3} \quad => \quad v(x) = \frac{-1}{2(1+e^x)^2}$$

$=> J = \left[\frac{-x}{2(1+e^x)^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2(1+e^x)^2} dx = \left[\frac{-x}{2(1+e^x)^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$

$$=> J = \frac{-1}{2(1+e)^2} + \frac{1}{2} I$$

b- En déduisons la valeur de $J$.

$J = \frac{-1}{2(1+e)^2} + \frac{1}{2} I$. Or $I = \frac{3+e}{2(1+e)} - ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

$$=> J = \frac{-1}{2(1+e)^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{3+e}{2(1+e)} - ln\left(\frac{1+e}{2}\right)\right] = \frac{-1}{2(1+e)^2} + \frac{3+e}{4(1+e)} - \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$= \frac{1+4e+e^2}{4(1+e)^2} - \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$. D'où $= \frac{1+4e+e^2}{4(1+e)^2} - \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.

**22** On considère les intégrales $I = \int_0^{\pi} cos^4 x dx$ et $J = \int_0^{\pi} sin^4 x dx$.

1) a- Montrons que l'intégrale $I$ peut s'écrire $I = \int_0^{\pi} cosx(cosx - cosxsin^2 x)dx$

$I = \int_0^{\pi} cos^4 xdx = \int_0^{\pi} cos^2 x \times cos^2 xdx = \int_0^{\pi} cos^2 x \times (1 - sin^2 x)dx$

$= \int_0^{\pi} cosx \times cosx(1 - sin^2 x)dx = \int_0^{\pi} cosx(cosx - cosxsin^2 x)dx$

D'où $I = \int_0^{\pi} cosx(cosx - cosxsin^2 x)dx$

b- A l'aide d'une intégration par parties, montrons que $I = \int_0^{\pi} sin^2 xdx - \frac{1}{3}J$

$I = \int_0^{\pi} cosx(cosx - cosxsin^2 x)dx$

Posons $u(x) = cosx$ => $u'(x) = -sinx$

$v'(x) = cosx - cosxsin^2 x$ => $v(x) = sinx - \frac{1}{3}sin^3 x$

$=> I = \left[\left(sinx - \frac{1}{3}sin^3 x\right) cosx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(-sin^2 x + \frac{1}{3}sin^4 x\right) dx$

Or $\left[\left(sinx - \frac{1}{3}sin^3 x\right) cosx\right]_0^{\pi} = 0$

$=> I = -\int_0^{\pi} \left(-sin^2 x + \frac{1}{3}sin^4 x\right) dx = \int_0^{\pi} \left(sin^2 x - \frac{1}{3}sin^4 x\right) dx$

$= \int_0^{\pi} sin^2 xdx - \int_0^{\pi} \frac{1}{3}sin^4 xdx = \int_0^{\pi} sin^2 xdx - \frac{1}{3}\int_0^{\pi} sin^4 xdx$

$=> I = \int_0^{\pi} sin^2 xdx - \frac{1}{3}J$

c- Montrons de même que $J = \int_0^{\pi} cos^2 xdx - \frac{1}{3}I$

$J = \int_0^{\pi} sin^4 xdx.$

$J = \int_0^{\pi} sin^4 xdx = \int_0^{\pi} sin^2 x \times sin^2 xdx = \int_0^{\pi} sin^2 x \times (1 - cos^2 x)dx$

$= \int_0^{\pi} sinx \times sinx(1 - cos^2 x)dx = \int_0^{\pi} sinx(sinx - sinxcos^2 x)dx$

Ainsi intégrons par parties $\int_0^{\pi} sinx(sinx - sinxcos^2x)dx$

Posons $u(x) = sinx$ => $u'(x) = cosx$

$$v'(x) = sinx - sinxcos^2x \Rightarrow v(x) = -cosx + \frac{1}{3}cos^3x$$

=> $J = \left[\left(-cosx + \frac{1}{3}cos^3x\right) sinx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(-cosx + \frac{1}{3}cos^3x\right) cosxdx$

Or $\left[\left(-cosx + \frac{1}{3}cos^3x\right) sinx\right]_0^{\pi} = 0$

=> $J = -\int_0^{\pi} \left(-cos^2x + \frac{1}{3}cos^4x \right) dx = \int_0^{\pi} \left(cos^2x - \frac{1}{3}cos^4x\right) dx$

$= \int_0^{\pi} cos^2xdx - \int_0^{\pi} \frac{1}{3}cos^4 \square dx = \int_0^{\pi} cos^2xdx - \frac{1}{3}\int_0^{\pi} cos^4xdx$

=> $J = \int_0^{\pi} cos^2xdx - \frac{1}{3}I$

2) a- Montrons que $I + J = \frac{3\pi}{4}$.

On sait que : $I = \int_0^{\pi} sin^2xdx - \frac{1}{3}J$ et $J = \int_0^{\pi} cos^2xdx - \frac{1}{3}I$

$I = \int_0^{\pi} sin^2xdx - \frac{1}{3}J$ et $J = \int_0^{\pi} cos^2xdx - \frac{1}{3}I$

=> $I + J = \int_0^{\pi}(cos^2 + sin^2x)dx - \frac{1}{3}(I + J) = \int_0^{\pi} dx - \frac{1}{3}(I + J)$

=> $I + J = [x]_0^{\pi} - \frac{1}{3}(I + J) = \pi - \frac{1}{3}(I + J)$

=> $I + J = \pi - \frac{1}{3}(I + J) \Leftrightarrow 3(I + J) = 3\pi - (I + J) \Leftrightarrow 3(I + J) + (I + J) = 3\pi$

$\Leftrightarrow 4(I + J) = 3\pi$ => $I + J = \frac{3\pi}{4}$.

b- Montrons que $J - I = 0$

De même : $I - J = \left[\frac{1}{2}sin2x\right]_0^{\pi} - \frac{1}{3}(I - J) = \frac{1}{3}(I - J)$

=> $I - J = \frac{1}{3}(I - J) \Leftrightarrow 3(I - J) = I - J \Leftrightarrow 3(I - J) - (I - J) = 0 \Leftrightarrow 2(I - J) = 0$

=> $I - J = 0$

c- En déduisons les intégrales $I$ et $J$.

Ainsi pour en déduis les valeurs de $I \ et \ \ J$ ; on forme le système avec les équations :

$I + J = \frac{\pi}{2}$ et $I - J = 0$

=> $\begin{cases} I + J = \frac{3\pi}{4} \\ I - J = 0 \end{cases}$ La resolution de Ce système Donne: $I = \frac{3\pi}{8}$ et $J = \frac{3\pi}{8}$

## Calculs de valeurs moyennes

**23** L'intensité du courant qui circule dans une bobine en fonction du temps $t$, a été modélisée par la fonction $i$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$; $i(t) = 5sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

1) Déterminons la période de cette fonction.

**NB :** Toute fonction de la forme $t \mapsto cos(at + b)$ ou $t \mapsto sin(at + b)$, admet comme période $t = \frac{2\pi}{|a|}$

Alors la fonction $t \mapsto 5sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, admet comme période $t = \frac{2\pi}{|100\pi|} = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}$

2) Calculons la valeur moyenne de l'intensité $\boldsymbol{i}$ du courant sur cette période.

La valeur moyenne de l'intensité $\boldsymbol{i}$ du courant sur $\left[-\frac{1}{50} ; \frac{1}{50}\right]$ est :

$$\bar{M} = \frac{1}{\left(\frac{1}{50}\right) - \left(-\frac{1}{50}\right)} \int_{-\frac{1}{50}}^{\frac{1}{50}} 5sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right) dt$$

$$\Rightarrow \bar{M} = \frac{1}{\frac{1}{50} + \frac{1}{50}} \int_{-\frac{1}{50}}^{\frac{1}{50}} 5sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right) dt = \frac{1}{\frac{1}{25}} \int_{-\frac{1}{50}}^{\frac{1}{50}} 5sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right) dt$$

$$= 25 \int_{-\frac{1}{50}}^{\frac{1}{50}} 5sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right) dt$$

$$\Rightarrow \bar{M} = 25\left[-\frac{5}{100\pi} cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\right]_{-\frac{1}{50}}^{\frac{1}{50}} = \left[-\frac{125}{100\pi} cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\right]_{-\frac{1}{50}}^{\frac{1}{50}}$$

$$= \left[-\frac{4}{5\pi} cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\right]_{-\frac{1}{50}}^{\frac{1}{50}}$$

$$\Rightarrow \bar{M} = \left[-\frac{4}{5\pi} cos\left(\frac{100\pi}{50} + \frac{\pi}{3}\right)\right] - \frac{4}{5\pi} cos\left(-\frac{100\pi}{50} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{4}{5\pi}cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{4}{5\pi}cos\left(-2\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{4}{5\pi}cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{4}{5\pi}cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{4}{5\pi}\times\frac{1}{2} - \frac{4}{5\pi}\times\frac{1}{2} = -\frac{2}{5\pi} - \frac{2}{5\pi} = -\frac{4}{5\pi} = -0{,}25$$

$=>\overline{M} = -0{,}25\ A.$

Alors la valeur moyenne de l'intensité $\boldsymbol{i}$ du courant sur cette période est $-0{,}25\ A$.

**24** La température moyenne entre $10°C$ et $30°C$est donnée par : $\overline{M} = \frac{1}{30-10}\int_{10}^{30}(3t^2 + 2t)dt$

$=>\overline{M} = \frac{1}{20}\int_{10}^{30}(3t^2 - 2t)dt = \frac{1}{20}[t^3 - t^2]_{10}^{30} = \left[\frac{t^3}{20} - \frac{t^2}{20}\right]_{10}^{30} = \left[\frac{(30)^3}{20} - \frac{(30)^2}{20}\right] - \left[\frac{(10)^3}{20} - \frac{(10)^2}{20}\right]$

$= \left[\frac{(30)^3}{20} - \frac{(30)^2}{20}\right] - \left[\frac{(10)^3}{20} - \frac{(10)^2}{20}\right] = (1395) - (100) = 1295°C$

**25** Le nombre moyen de personnes malades durant les huis premiers jours est donné par :

$\overline{M} = \frac{1}{8-1}\int_1^8(45t^2 - t^3)dt => \overline{M} = \frac{1}{7}\left[\frac{45t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\right]_1^8 = \frac{1}{7}\left[15t^3 - \frac{t^4}{4}\right]_1^8$

$= \frac{1}{7}\left[15(8)^3 - \frac{(8)^4}{4}\right]_1^8 - \frac{1}{7}\left[15(1)^3 - \frac{(1)^4}{4}\right] = 948{,}75 \approx 949$

D'où Le nombre moyen de personnes malades durant les huis premiers jours est 949.

## Calculs d'aires

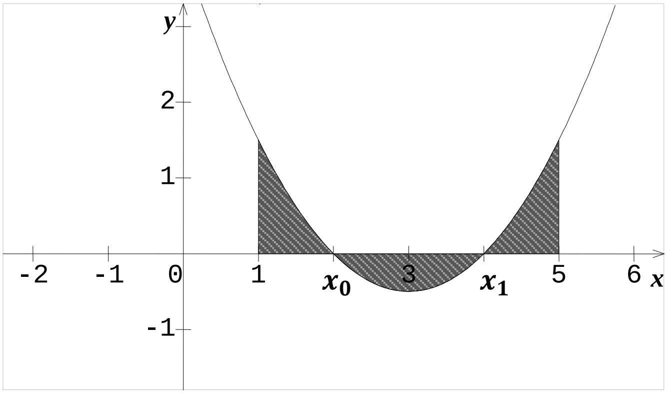
**26** Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

1) Déterminons la valeur de l'intégrale $\int_1^5 f(x)dx$

$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^5\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right)dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_1^5$

$=> \int_1^5 f(x)dx = F(5) - F(1) = \frac{10}{3} - \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$

2) Ci-dessous est donnée la courbe $C_f$ représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé$(\ o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ )$.




On souhaite Détermine la valeur de l'aire du domaine plan grisé.

a- Déterminons les zéros $\boldsymbol{x_0}$ et $\boldsymbol{x_1}$ de la fonction $f$ (avec $\boldsymbol{x_0} < \boldsymbol{x_1}$).

En observant le graphique, on remarque que $\boldsymbol{x_0 = 2}$ et $\boldsymbol{x_1 = 4}$

b- Détermine la valeur de l'intégrale $\int_1^{x_0} f(x)dx + \int_{x_1}^{5} f(x)dx$.

$\int_1^{x_0} f(x)dx + \int_{x_1}^{5} f(x)dx = \int_1^{2} f(x)dx + \int_{4}^{5} f(x)dx$

$= \int_1^{2} \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right) dx + \int_{4}^{5} \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right) dx$

$= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_1^2 + \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_4^5 = \left(\frac{3}{2}\right) + (6) = \frac{15}{2}$

c- Déterminons la valeur de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$ c'est-à-dire $\int_{2}^{4} f(x)dx$

D'après le graphique on a : $\int_1^5 f(x)dx = \int_1^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{5} f(x)dx$.

=> $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx - \int_1^{x_0} f(x)dx - \int_{x_1}^{5} f(x)dx$. Or $\boldsymbol{x_0 = 2}$ et $\boldsymbol{x_1 = 4}$

=> $\int_{2}^{4} f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx - \int_1^{2} f(x)dx - \int_{4}^{5} f(x)dx$

=> $\int_{2}^{4} f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx - \left(\int_1^{2} f(x)dx + \int_{4}^{5} f(x)dx\right) = \left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{15}{2}\right) = -\frac{41}{6}$

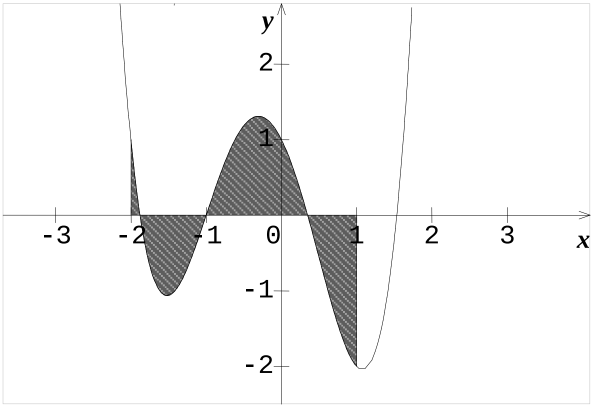
d- En déduisons l'aire de la partie grisée sur le graphique. (Unité graphique : $2cm$)

$\mathbf{A} = \left(\frac{2}{3}\right)(2cm)^2 = \frac{8}{3}\,cm^2$

**27** Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 1$.

Soit $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé ( $0$ ; $\vec{i}$ ; $\vec{j}$ ) dont les unités graphiques sont : $6cm$ sur l'axe des abscisses et $2cm$ sur l'axe des ordonnées

Calculons l'aire du domaine hachuré en $cm^2$



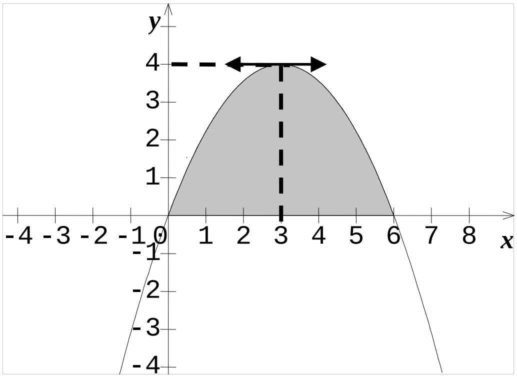

L'aire du domaine hachuré est $A = 6cm \times 2cm \int_{-2}^{1} f(x)dx = 12cm^2 \int_{-2}^{1} f(x)dx$

=> $A = 12cm^2 \int_{-2}^{1}(x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 1)dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - x^3 - x^2 + x\right]_{-2}^{1}$

$$= 12cm^2 \left[\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4} - 1 - 1 + 1\right) - \left(-\frac{32}{5} - \frac{16}{4} + 8 - 4 - 2\right)\right] = -0{,}15 \times 12\ cm^2$$

$$= -1{,}8cm^2$$

**28** On considère la courbe ci-dessous représentant une fonction polynôme $f$ de degré **2** dans un repère orthonormé ( $0$ ; $\vec{i}$ ; $\vec{j}$ ) d'unité graphique : $2cm$ .




On rappelle que $f$ est de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1) Déterminons les réels $a\ ; b\ et\ c$.

D'après le graphique, on a : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(3) = 4 \\ f(6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 9a + 3b = 4 \\ 36a + 6b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 9a + 3b = 4 \\ 6a + b = 0 \end{cases}$

Ainsi la résolution du système $\begin{cases} 9a + 3b = 4 \\ 6a + b = 0 \end{cases}$ donne : $a = -\frac{4}{9}$ et $b = \frac{8}{3}$

Ainsi en remplaçant les réels $a$ ; $b$ et $c$ par leur valeur on a : $f(x) = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x$

2) En déduisons en $cm^2$ l'aire de la partie hachurée sur le graphique.

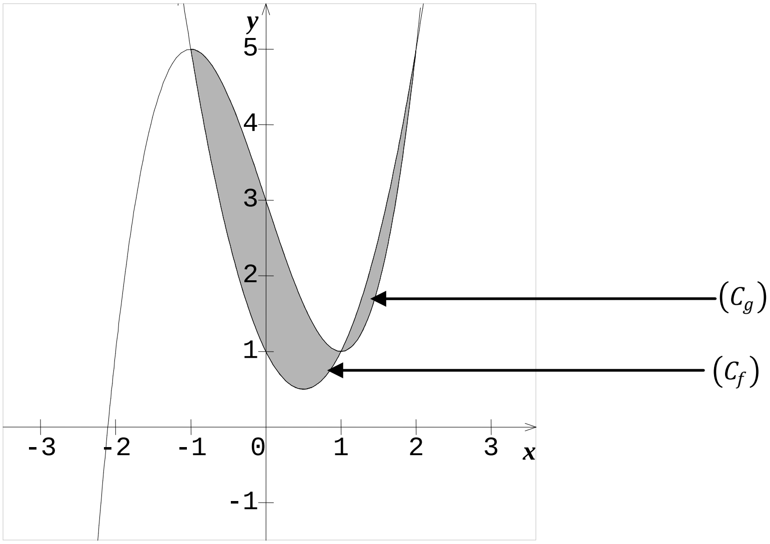
L'aire de la partie hachurée sur le graphique est $A = (2cm)^2 \int_0^6 f(x)dx$

$=> A = 4cm^2 \int_0^6 \left(-\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x\right) dx = 4cm^2 \left[-\frac{4}{27}x^3 + \frac{8}{6}x^2\right]_0^6$

$=> A = 4cm^2 \left[-\frac{4}{27}x^3 + \frac{4}{3}x^2\right]_0^6 = 4cm^2(16) = 64cm^2$

**29** Soient $f : \mapsto 2x^2 - 2x + 1$ et $g : \mapsto x^3 - 3x + 3$ deux fonctions de courbes représentatives respectives $(C_f)$ et $(C_g)$dans un repère orthonormé ( $0 ; \vec{i} ; \vec{j}$ ) d'unité graphique : $2cm$ .

1) Les courbes représentatives $(C_f)$ et $(C_g)$ sont les suivantes :




2) Calculons en $cm^2$ l'aire $\mathscr{A}$ de l'ensemble des points M compris entre les courbes $(C_f)$ ; $(C_g)$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.

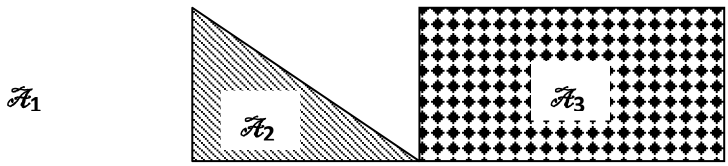
Cette aire est donnée par : $\mathscr{A} = 4cm^2 \left( \int_{-1}^{1} [g(x) - f(x)]\, dx + \int_{1}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx \right)$

=> $\mathscr{A} = 4cm^2 \left[ \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - x + 2)\, dx + \int_{1}^{2} (-x^3 + 2x^2 + x - 2)\, dx \right]$

=> $\mathscr{A} = 4cm^2 \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^{1} + 4cm^2 \left[ -\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_{1}^{2}$

=> $\mathscr{A} = 4cm^2 \times \left(\frac{8}{3}\right) + 4cm^2 \times \left(\frac{5}{12}\right) = 4cm^2 \times \frac{37}{12} = 12{,}33cm^2$

**30** On donne les cas de figures suivantes dans un repère ( O ; $\vec{\imath}$ ; $\vec{\jmath}$ ) d'unité graphique 1 $cm$ sur l'axe des abscisses et 1 $cm$ sur l'axe des ordonnées.




1) Calculons l'aire $\mathcal{A}_1$ ; $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$ du domaine plan hachurer dans les cas des figures : ($fig$ 1) ; ($fig$ 2) et ($fig$ 3).

**La figure (1)** représente un demi-cercle :

L'aire d'un cercle est : $\pi r^2$**.** Alors l'aire du demi-cercle représentée sur la figure est :

$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}\pi r^2$ avec $r = 2cm$ => $\mathcal{A}_1 = 2\pi = 6{,}28\ cm^2$

**La figure (2)** représente un triangle :

L'aire d'un triangle est : $\frac{base \times hauteur}{2}$ alors l'aire du triangle représentée sur la figure est :

$\mathcal{A}_2 = \frac{3\times 2}{2}$ avec $base = 3cm$ et $hauteur = 2cm$ =>$\mathcal{A}_2 = 3\ cm^2$

**La figure (3)** représente un rectangle :

L'aire d'un rectangle est : **Longueur + largeur**. Alors l'aire du triangle représentée sur la figure est :

$\boldsymbol{\mathscr{A}_3} = \mathbf{4} + \mathbf{2}$ avec **Longueur =** $4cm$ **largeur =** $2cm$ => $\boldsymbol{\mathscr{A}_3} = \mathbf{6}\ cm^2$

2) En déduis l'aire totale hachurée.

Ainsi l'aire totale hachurée est : $\boldsymbol{\mathscr{A}} = \boldsymbol{\mathscr{A}_1} + \boldsymbol{\mathscr{A}_2} + \boldsymbol{\mathscr{A}_3} = (6{,}28 + 3 + 6)cm^2$

=> $\boldsymbol{\mathscr{A}} = 15{,}28\ cm^2$