# Sujet 1 (TSE-STI)

## Exercice 1………………..…………………………………………$(5\ points)$

I// On considère dans $\mathbb{C}$ le complexe $u$ tel que : $u = -1 - 2i\sqrt{2}$

1- Calcule les racines carrées de $u$.

2- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2Z^2 + 2i\,Z + i\sqrt{2} = 0$. (On notera $Z_1$ et $Z_2$ les solutions de cette équation).

3- Montre que : $\left|\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right| = \sqrt{2}$

II// 1) Détermine le PGCD de 450 et 320.

2) Une maison a pour dimensions $4{,}5m$ et $3{,}2m$. On souhaite carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe.

Quel est le plus grand côté possible (en c$m$ ) de la dalle carrée ?

## Exercice 2………………..…………………………………………$(5\ points)$

I// Soient l'application affine $f$ et $g$ deux applications de P → P qui à tout point $M\binom{x}{y} \to M'\binom{x}{y}$ tel que : $f : \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

1) Pour chacune des applications $f$ et $g$ :

a- Détermine l'ensemble des points invariants, Précise celles qui sont bijectives.

b- Précise la nature et les éléments caractéristiques de chacune d'elles.

2) Défini analytiquement la réflexion d'axe $\Delta$ d'équation $y = x$.

II// Une urne contient un jeton marqué 1 ; deux jetons marqués 2 et $x$ jetons marqués 3 ($x \geq 2$). On tire simultanément 2 jetons de l'urne. On suppose que le tirage est équiprobable et on désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des points marqués sur les 2 jetons extraits de l'urne.

1) a- Exprime en fonction de $x$ les valeurs prises par X.
b- Détermine la loi de probabilité de X.

2) a- Démontre que l'espérance mathématique E(X) = $\frac{6x^2 + 22x + 20}{x^2 + 5x + 6}$

b- Détermine la valeur de $x$ pour que E(X) soit égale 5

**Problème**........................................................................$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

**Partie A** :

1) On considère la fonction numérique $g$ définie par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 lnx$

a- Dresse le tableau de variation de $g$.

b- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que : $1,89 < \alpha < 1,90$.

c- Déduis de ce qui précède le signe de $g(x)$.

2) On considère la fonction numérique $f$ définie sur $]\ 0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{lnx}{1+\ x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ )$ (unité graphique 2 $cm$ )

a) Dresse le tableau de variation de $f$.

b) Vérifie que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$. En déduis un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude $2 \bullet 10^{-1}$

c) Trace (C) dans le repère.

**Partie B :**

On considère la fonction numérique définie sur $]\ 0\ ;\ +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$

1) a) Prouve que F est dérivable sur $]\ 0\ ;\ +\infty[$ et Précise $F'(x)$.

b) En déduis le sens de variation de $F$.

2) a) Vérifie que $\forall\ t \geq 1$ ; on a : $\frac{lnt}{(1+t\ )^2} \leq f(t) \leq \frac{lnt}{t^2}$

b) Pour tout $x > 0$ et $t \neq 0$ ; on pose $I(x) = \int_1^x \frac{lnt}{t^2}\mathrm{dt}$ et $J(x) = \int_1^x \frac{lnt}{(1+t\ )^2}\mathrm{dt}$

- A l'aide d'une intégration par parties, Calcule $I(x)$

- A l'aide d'une intégration par partie et de l'égalité : $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{1+t}$ , Calcule $J(x)$.

c) Déduis de ce qui précède que $\forall\ x > 1$ ; on a :
$ln2 + ln\left(\frac{x}{x+\ 1}\right) - \frac{lnx}{x+\ 1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}$

d) On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \theta$. Sans Calcule $\theta$ Vérifie que $\ln 2 \leq \theta \leq 1$

# Correction Sujet 1 (TSE-STI)

**Exercice 1**……………………..…………………………………………$(5\ \boldsymbol{points})$

I// On considère dans $\mathbb{C}$ le complexe u tel que : $u = -1 - 2i\sqrt{2}$

1) Calculons les racines carrées de $u$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = -2\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 & (1) \\ xy = -\sqrt{2} & (2) \\ x^2 + y^2 = 3 & (3) \end{cases}$$

**Effectuons : ( 1 ) + ( 3 )**

On a : $2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \quad ou \quad x = 1$

( 2 ) : $xy = -\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{-\sqrt{2}}{x}$

- Si $x = -1 \Rightarrow y = \frac{-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2}$ et $\delta_1 = x + iy \Rightarrow \delta_1 = -1 + i\sqrt{2}$
- Si $x' = 1 \Rightarrow y' = \frac{-\sqrt{2}}{1} = -\sqrt{2}$ et $\delta_2 = x' + iy' \Rightarrow \delta_2 = 1 - i\sqrt{2}$

Alors les racines carrées de Z $sont$ : $\delta_1 = -1 + i\sqrt{2}$ et $\delta_2 = 1 - i\sqrt{2}$

2) Résolution dans $\mathbb{C}$ l'équation $2Z^2 + 2iZ + i\sqrt{2} = 0$

On a $= \Delta' = (i)^2 - (2)(i\sqrt{2}) = -1 - 2i\sqrt{2} = \left(1 - i\sqrt{2}\right)^2$

D'où:

$$Z_1 = \frac{-b + \delta 1}{2a} = \frac{1 - i\left(1 + 2\sqrt{2}\right)}{2} = \frac{1}{2} - i\,\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}$$

$$Z_2 = \frac{-b + \delta 2}{2a} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{1 - 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{2} - i\,\frac{1+2\sqrt{2}}{2}\ ;\ -\frac{1}{2} - i\,\frac{1-2\sqrt{2}}{2}\right\}$$

3) Montrons que : $\left|\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right| = \sqrt{2}$

$$\left|\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right| = \left|\frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 \times Z_2}\right| = \left|\frac{-\frac{i}{i\sqrt{2}}}{2}\right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

II//) 1) Déterminons le $PGCD$ de 450 et 320.

$PGCD(450\ ;\ 320) = 2 \times 5 = 10$

2) Déterminons le plus grand côté possible (en $m$ ) de la dalle carrée ?

On a : $L = 4{,}5\ m = 450\ cm$ et $l = 3{,}2\ m = 320\ cm$.

Ainsi le côté en $cm$ de la dalle carrée est le PGCD (450 ; 320) = 10.

D'où le plus grand côté possible de la dalle est 10 $cm$.

**Exercice 2**……………….……………………………………………$(\boldsymbol{5\ points})$

I// Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé$(\ O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.
Soient l'application affine $f$ et $g$ deux applications de P → P qui à tout point
$M\binom{x}{y} \to M'\binom{x}{y}$ tel que : $f:\begin{cases}x' = 2x+1\\ y' = 2y+1\end{cases}$ et $g:\begin{cases}x' = x+2\\ y' = y-1\end{cases}$

1) Pour chacune des applications $f$ et $g$ :

a- Déterminons l'ensemble des points invariants, précisons celles qui sont bijectives.

**Pour l'application $\boldsymbol{f}$.**

$f$ Admet un point invariant si et seulement si $f(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases}x' = x\\ y' = y\end{cases}$

=> $\begin{cases}x' = 2x+1\\ y' = 2y+1\end{cases}$ ⇔ $\begin{cases}x = -1\\ y = -1\end{cases}$ => $A(-1\ ;\ -1)$ est le point invariant.

$f$ Est bijective si et seulement si $detM \neq 0$

Soit $\varphi$ l'endomorphisme associé à $f$ .

La matrice de $f$ dans la base $(\vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ est $M = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

Matrice est $detM = \begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}$
$detM = \begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Alors $f$ est bijective.

**Pour l'application $\boldsymbol{g}$.**

$g$ Admet un point invariant si et seulement si $g(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases}x' = x\\ y' = y\end{cases}$

=> $\begin{cases}x = x+2\\ y = y-1\end{cases}$ ⇔ $\begin{cases}0 = -1\\ 0 = -1\end{cases}$ =>$g$ n'admet pas de point invariant.

$g$ Est bijective si et seulement si $detM' \neq 0$

Soit $\varphi'$ l'endomorphisme associé à $g$ .

La matrice de $g$ dans la base $(\vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ est $M' = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

Matrice est $detM' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$detM' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Alors $g$ est bijective.

b- Précisons la nature et les éléments caractéristiques de chacune d'elles.

**<u>Pour l'application $f$.</u>**

**1ère Méthode**

On a $f$ : $\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$

Exprimons $Z'$ en fonction de $Z$.

On sait que $Z' = x' + iy'$. Or $\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$

En remplaçant $x'$ $et$ $y'$ par leur valeur dans $Z' = x' + iy'$; on a :

$Z' = (2x + 1\ ) + i(2y + 1)$

$= 2x + 1 + 2iy + i$

$= 2x + 2iy + 1 + i$

$= 2(x + iy) + 1 + i$ . Or $Z = x + iy$

=>$Z' = 2Z + 1 + i$

**<u>NB :</u>**

Si $Z' = aZ + b$ avec $a \in \mathbb{R}^* - \{-1\ ; 1\}$, alors on a : une homothétie de rapport $k = |a|$ et de centre $\Omega$ d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.

On a : $Z' = 2Z + 1 + i$. Avec $a = 2$ et $b = 1 + i$

Ici $a = 2 \in \mathbb{R}^* - \{-1\ ; 1\}$, alors $f$ est une homothétie dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |2| = 2$

- Centre $A(-1\ ;\ -1)$ : point invariant.

**2ième Méthode**

On a $f$ : $\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$ sous la forme $\begin{cases} x' = kx + x_0(1 - k) \\ y' = ky + y_0(1 - k) \end{cases}$

qui est l'expression analytique d'une homothétie de rapport $k$ et de centre $A(x_0 ; y_0)$.

D'où $f$ est une homothétie de rapport $k = 2$ et de Centre $A(-1 ; -1)$ : point invariant.

**<u>Pour l'application $g$.</u>**

**1ère Méthode**

On a $g$ : $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

Exprimons $Z'$ en fonction de $Z$.

On sait que $Z' = x' + iy'$. Or $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

En remplaçant $x'$ $et$ $y'$ par leur valeur dans $Z' = x' + iy'$; on a :

$Z' = (x + 2 ) + i(y - 1)$

$= x + 2 + iy - i$

$= x + iy + 2 - i$

$= (x + iy) + 2 - i$. Or $Z = x + iy$

=>$Z' = Z + 2 - i$

**<u>NB :</u>**

$si$ $a = 1$ , alors $on$ a une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'affixe $b$.

On a : $Z' = Z + 2 - i$. Avec $a = 1$ et $b = 2 - i$

Ici $a = 1$, alors $g$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'affixe $b = 2 - i$ => $\vec{u}\binom{2}{-1}$

**2ième Méthode**

On a : $g$ : $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$ sous la forme $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

Qui est l'expression analytique d'une translation de vecteur $\vec{u}\binom{a}{b}$.

D'où $g$ est une translation de vecteur $\vec{u}\binom{2}{-1}$.

2) Définissons analytiquement la réflexion d'axe $\Delta$ d'équation $y = x$.

Soit ( S ) la réflexion d'axe $(\Delta)$ d'équation $y = x$ tel que : $\forall\ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ; on a :

$\mathrm{S}(M) = M'$ => $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur normal de $(\Delta)$.

Soit I le milieu de $[MM']$ => $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur normal $\vec{n}(-1\,;\ 1)$.

Alors il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{MM'} = k\vec{n}$

D'où $\overrightarrow{MM'} = k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} = k\binom{-1}{1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} = \binom{-k}{k} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x=-k \\ y'-y=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x-k \\ y'=y+k \end{cases}$

Si I est le milieu de $[MM']$ alors : I$\left(\frac{x'+x}{2}\ ;\ \frac{y'+y}{2}\right)$.

I appartient à $(\Delta)$ $si\ et\ seulement\ si$ $\frac{x'+x}{2} = \frac{y'+y}{2} \Leftrightarrow x'+x = y'+y$ . Or $\begin{cases} x'=x-k \\ y'=y+k \end{cases}$

En remplaçant $x'$ et $y'$ par leur valeur dans $x'+x = y'+y$; on a :

$(x-k)+x = (y+k)+y \Leftrightarrow x-k+x = y+k+y \Leftrightarrow 2x-2y-2k = 0$

$\Leftrightarrow x-y-k = 0 \Leftrightarrow k = x-y$

D'où l'expression analytiquement de la réflexion d'axe $\Delta$ d'équation $y = x\ est$ :

$\begin{cases} x' = x-(x-y) \\ y' = y+(x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x-x+y \\ y' = y+x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

II//Une urne contient un jeton marqué 1 ; deux jetons marqués 2 et $x$ jetons marqués 3 $(x \geq 2)$. On tire simultanément 2 jetons de l'urne. On suppose que le tirage est équiprobable et on désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des points marqués sur les 2 jetons extraits de l'urne.

- Une urne contient un jeton marqué 1 ; deux jetons marqués 2 et $x$ jetons marqués 3

=> $n = 1+2+x = x+3$.

- On tire simultanément 2 jetons de l'urne => $p = 2$.
- Le tirage est simultané alors le modèle mathématique utilisé est le $C_n^p$

1) a- Exprimons en fonction de $x$ les valeurs prises par X.

Si X désigne l'ensemble de la somme des points marqués sur les 2 jetons extraits de l'urne alors on a :

$1+2=\mathbf{3}$ ou $2+2=\mathbf{4}$ ou $1+3=\mathbf{4}$ ou $3+2=\mathbf{5}$ ou encore $3+3=\mathbf{6}$
D'où X= {3 ; 4 ; 5 ; 6}
b- Déterminons la loi de probabilité de X.
Le nombre de tirage possibles est Card$(\Omega)=C_{x+3}^{2}=\frac{(x+3)(x+3-1)}{2}=\frac{(x+3)(x+2)}{2}$

Alors calculons : $P(\mathrm{X}=3)$ ; $P(\mathrm{X}=4)$ ; $P(\mathrm{X}=5)$ ; $P(\mathrm{X}=6)$

$P(\mathrm{X}=3)$ ; $P(\mathrm{X}=4)$ ; $P(\mathrm{X}=5)$ ; $P(\mathrm{X}=6)$

$$P(\mathrm{X}=3)=\frac{Card(X=3)}{Card(\Omega)} \text{ avec } \begin{cases} Card(X=3)=C_1^1\times C_2^1=2 \\ et \\ Card(\Omega)=C_{x+3}^2=\frac{(x+3)(x+2)}{2} \end{cases}$$

$$=>P(\mathrm{X}=3)=\frac{2}{\frac{(x+3)(x+2)}{2}}=\frac{4}{(x+3)(x+2)}=\frac{4}{x^2+5x+6}$$

$$P(\mathrm{X}=4)=\frac{Card(X=4)}{Card(\Omega)} \text{ avec } \begin{cases} Card(X=4)=C_1^1\times C_x^1+C_2^2=x+1 \\ et \\ Card(\Omega)=C_{x+3}^2=\frac{(x+3)(x+2)}{2} \end{cases}$$

$$=>P(\mathrm{X}=4)=\frac{x+1}{\frac{(x+3)(x+2)}{2}}=\frac{2x+2}{(x+3)(x+2)}=\frac{2x+2}{x^2+5x+6}$$

$$P(\mathrm{X}=5)=\frac{Card(X=5)}{Card(\Omega)} \text{ avec } \begin{cases} Card(X=5)=C_x^1\times C_2^1=2x \\ et \\ Card(\Omega)=C_{x+3}^2=\frac{(x+3)(x+2)}{2} \end{cases}$$

$$=>P(\mathrm{X}=5)=\frac{2x}{\frac{(x+3)(x+2)}{2}}=\frac{4x}{(x+3)(x+2)}=\frac{4x}{x^2+5x+6}$$

$$P(\mathrm{X}=6)=\frac{Card(X=6)}{Card(\Omega)} \text{ avec } \begin{cases} Card(X=6)=C_x^2=\frac{x^2-x}{2} \\ et \\ Card(\Omega)=C_{x+3}^2=\frac{(x+3)(x+2)}{2} \end{cases}$$

$$=>P(\mathrm{X}=6)=\frac{\frac{x^2-x}{2}}{\frac{(x+3)(x+2)}{2}}=\frac{x^2-x}{(x+3)(x+2)}=\frac{x^2-x}{x^2+5x+6}$$

**<u>NB :</u>** Chercher par exemple $Card(X=3)$, revient à chercher la somme des numéros possible porté par deux jetons affins d'obtenir le chiffre 3.
Ainsi pour obtenir le chiffre 3, il suffit de faire la somme de : ≪ un jeton numéroté 1 ≫ parmi le seule jeton numéroté 1 et de ≪ un jeton numéroté 2 ≫ parmi les deux jetons numéroté 2.
Et ceci se traduit par $C_1^1\times C_2^1$ en sachant bien sûr que le ≪ $et$ ≫ signifie ≪ × ≫ et

le ≪ $ou$ ≫ signifie ≪ $+$ ≫. D'où le tableau de la loi de probabilité est le suivant :

| $x_i$ | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{4}{x^2 + 5x + 6}$ | $\frac{2x + 2}{x^2 + 5x + 6}$ | $\frac{4x}{x^2 + 5x + 6}$ | $\frac{x^2 - x}{x^2 + 5x + 6}$ |

2) a- Démontrons que l'espérance mathématique E(X) = $\frac{6x^2 + 22x + 20}{x^2 + 5x + 6}$

$E(X) = \sum x_i \times P_i = 3 \times \frac{4}{x^2 + 5x + 6} + 4 \times \frac{2x + 2}{x^2 + 5x + 6} + 5 \times \frac{4x}{x^2 + 5x + 6} + 6 \times \frac{x^2 - x}{x^2 + 5x + 6}$

$\Rightarrow E(X) = \frac{12 + 8x + 8 + 20x + 6x^2 - 6x}{x^2 + 5x + 6} = \frac{6x^2 + 22x + 20}{x^2 + 5x + 6}$

D'où E(X) = $\frac{6x^2 + 22x + 20}{x^2 + 5x + 6}$ ( Ce qu'il fallait Démontre ).

b- Déterminons la valeur de $x$ pour que E(X) soit égale 5

E(X) = 5 $\Leftrightarrow \frac{6x^2 + 22x + 20}{x^2 + 5x + 6} = 5 \Leftrightarrow 6x^2 + 22x + 20 = 5(x^2 + 5x + 6) \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$

et $\Delta = 49 \Rightarrow x_1 = -2$ (à $rejeté$) et $x_2 = 5$ (à $reténir$) (Car $x \geq 2$)

## <u>Problème</u>........................................................($\mathbf{10}$ $\boldsymbol{points}$)

**<u>Partie A</u>** :

1) On considère la fonction numérique $g$ définie par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 lnx$

a- Dressons le tableau de variation de $g$.

$D_g = ]0 ; +\infty[$

$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} 1 + x^2 - 2x^2 lnx = 1 + (0)^2 - 2(0) = 1$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 + x^2 - 2x^2 lnx = 1 + (+\infty)^2 - 2(+\infty) = +\infty - \infty = "FI"$

Levons l'indétermination

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 + x^2 - 2x^2 lnx = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2lnx\right) = (+\infty)^2(0 + 1 - \infty) = -\infty$

$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 lnx$ => $g'(x) = -4xlnx$

$\forall x \in ]0 ; +\infty[ ; -4x < 0$. Alors le signe de $g'(x)$ dépend du signe de $lnx$

Posons $lnx > 0$ => $x > e^0$ => $> 1$. Ainsi pour les $x > 1$, on a : $lnx > 0$

D'où le tableau de variation de $g$ est le suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-4x$ | | $-$ | | | $-$ | |
| $lnx$ | | $-$ | $0$ | | $+$ | |
| $g'(x)$ | | $+$ | | | $-$ | |
| $g(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $2$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

b- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ telle que :
$1{,}89 < \alpha < 1{,}90$.

- D'après le tableau de variation de $g$ , $\forall x \in ]1 ; +\infty[$ $f$ est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $]1 ; +\infty[$ vers $]-\infty ; 2[$.
Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ telle que $g(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} g(1{,}89) = 0{,}02 \\ g(1{,}90) = -0{,}02 \end{cases}$ => $g(1{,}89) \times g(1{,}90) < 0$
Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a : $1{,}89 < \alpha < 1{,}90$.

**Conclusion** : l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ telle que $1{,}89 < \alpha < 1{,}90$.

c- Déduis de ce qui précède le signe de $g(x)$.

Alors d'après le tableau de variation de $g$, on a :

$\forall x \in ]0 ; \alpha[$ $g(x) > 0$ et $\forall x \in ]\alpha ; +\infty[$ $g(x) < 0$

2) On considère la fonction numérique $f$ définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{lnx}{1 + x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité graphique 2 $cm$ )

a- Dressons le tableau de variation de $f$.

$lim f(x) = lim \frac{lnx}{1 + x^2} = -\infty$

$x \to 0$ $\quad$ $x \to 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{lnx}{1+\ x^2} \ = \lim_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x^2} = 0$$

$$f(x) = \frac{lnx}{1+\ x^2} \ => f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+\ x^2) - 2x(lnx)}{(1+\ x^2)^2} \ = \frac{1 + x^2\ - 2x^2 lnx}{x(1+\ x^2)^2} \ = \frac{g(x)}{x(1+\ x^2)^2}$$

$\forall x \in ]\,0\,;\,+\infty[\,;\ x(1+x^2)^2\ > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$

Or d'après **Partie A 1) c)**, on a :

$\forall x \in ]\,0\,;\,\alpha[\ \ g(x) > 0$ => $\forall x \in ]\,0\,;\,\alpha[\ \ f'(x) > 0$ et

$\forall x \in ]\,\alpha\,;\,+\infty[\ \ g(x) < 0$ => $\forall x \in ]\,\alpha\,;\,+\infty[\ \ f'(x) < 0$

D'où le tableau de variation de $f$ est le suivant :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $\Vert -\infty$ | $\nearrow$ | $f(\alpha)$ | $\searrow$ | $0$ |

b- Vérifions que $f(\alpha)\ = \frac{1}{2\alpha^2}$. En déduis un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude $2 \cdot 10^{-1}$

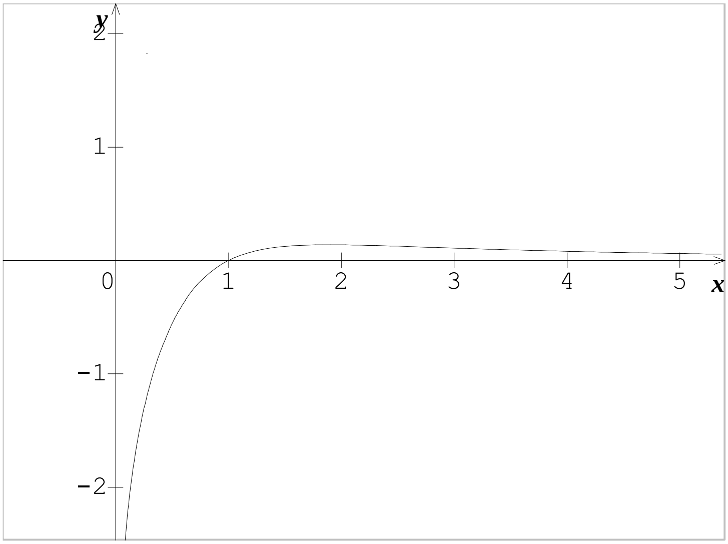
D'après **Partie A 1) b)**,on a : $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha^2\ - 2\alpha^2 ln\alpha = 0 => ln\alpha = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$

D'autre part $f(x) = \frac{lnx}{1+\ x^2} => f(\alpha) = \frac{ln\alpha}{1+\ \alpha^2}$

Remplaçons $ln\alpha = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$ par sa valeur dans $f(\alpha) = \frac{ln\alpha}{1+\ \alpha^2}$. Ainsi on a :

$$f(\alpha) = \frac{ln\alpha}{1+\ \alpha^2} => f(\alpha) = \frac{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{1+\ \alpha^2} = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2(\,1+\ \alpha^2)} = \frac{1}{2\alpha^2}. \quad \text{D'où } f(\alpha)\ = \frac{1}{2\alpha^2}.$$

c- Traçons (C) dans le repère.




**Partie B :**

On considère la fonction numérique définie sur $] 0 ; +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$

1) a) Prouvons que F est dérivable sur $] 0 ; +\infty[$ et précisons $F'(x)$.

$f$ est une fonction continue sur $] 0 ; +\infty[$ . Alors F est donc dérivable sur $] 0 ; +\infty[$

Sa fonction dérivée est $F'(x) = f(x)$ avec $f(x) = \frac{lnx}{1 + x^2}$

b) En déduis le sens de variation de $F$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $F(x)$ | \|\| | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

D'après le tableau :

$\forall x \in ] 0 ; 1[$; F est strictement décroissante

$\forall x \in ] 1 ; +\infty[$; F est strictement croissante

2) a) Vérifions que $\forall t \geq 1$ ; on a : $\frac{lnt}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{lnt}{t^2}$

On sait que $\forall t \geq 1$; on a : $t^2 \leq 1 + t^2 \leq t^2 + 2t + 1$

En prenant les inverses, on a : $\frac{1}{t^2+2t+1} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$

En multipliant cette dernière par $lnt,$ on a :

$\frac{lnt}{(1+t)^2} \leq \frac{lnt}{1+t^2} \leq \frac{lnt}{t^2} \Leftrightarrow \frac{lnt}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{lnt}{t^2}$ ( ce qu'il fallait Démontre )

b) Pour tout $x > 0$ et $t \neq 0$ ; on pose $I(x) = \int_1^x \frac{lnt}{t^2}\mathrm{dt}$ et $J(x) = \int_1^x \frac{lnt}{(1+t)^2}\mathrm{dt}$

- A l'aide d'une intégration par parties, Calcule $I(x)$

$I(x) = \int_1^x \frac{lnt}{t^2}\mathrm{dt} \quad = \int_1^x \frac{1}{t^2} lnt\mathrm{dt}$

Posons $u(t) = lnt$ => $u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = \frac{1}{t^2}$ => $v(t) = -\frac{1}{t}$

=> $I(x) = \left[-\frac{lnt}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}\mathrm{dt} = \left[-\frac{lnt}{t}\right]_1^x + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = \left[-\frac{lnt}{t} - \frac{1}{t}\right]_1^x$

=> $I(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{lnx}{x}$

c) A l'aide d'une intégration par partie et de l'égalité : $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$ , calculons $J(x)$.

Puis en déduisons de ce qui précède que $\forall\, x > 1$ ; on a :
$ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}$

$J(x) = \int_1^x \frac{lnt}{(1+t)^2}\mathrm{dt} \quad = \int_1^x \frac{1}{(1+t)^2} \times lnt\ \mathrm{dt}$

Posons $u(t) = lnt$ => $u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$ => $v(t) = -\frac{1}{1+t}$

=> $J(x) = \left[-\frac{lnt}{1+t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t(1+t)}\mathrm{dt} = \left[-\frac{lnt}{1+t}\right]_1^x + \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{dt}$

=> $J(x) = \left[-\frac{lnt}{1+t}\right]_1^x + [lnt - ln(1+t)]_1^x = \left[-\frac{lnt}{1+t}\ lnt - ln(1+t)\right]_1^x$

=> $J(x) = ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{1+x}$

En déduisons que $\forall\, x > 1$ ; on a : $ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}$

D'après 2) a), on a : $\frac{lnt}{(1+t)^2} \leq \int_1^x f(t)\mathrm{dt} \leq \frac{lnt}{t^2}$ . Intégrons cette inégalité sur $[1\ ;\ x]$

$\int_1^x \frac{lnt}{(1+t)^2}\mathrm{dt} \leq \int_1^x f(t)\mathrm{dt} \leq \int_1^x \frac{lnt}{t^2}\mathrm{dt} \Leftrightarrow J(x) \leq F(t) \leq I(x) \Leftrightarrow$

$ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}$

d) On admet que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \theta$. Sans Calcule $\theta$ vérifions que $ln2 \leq \theta \leq 1$

On sait que : $ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}$

En appliquant le théorème des gendarmes à l'inégalité :

$ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}$ , on a :

$\lim_{x \to +\infty} ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{x+1} \leq \lim_{x \to +\infty} F(x) \leq \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow$

$ln2 \leq \theta \leq 1$ ( Ce qu'il fallait Démontre )

# Sujet 2 (TSE-STI)

## Exercice 1……………….………………………………………($5$ $points$)

On considère l'équation $(E)$ définie par : $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$, $35x - 27y = 2$.

1) a- Vérifie que $(-20\,;\,-26)$ est solution de $(E)$.
   b- Démontre que les solutions de $(E)$ sont les couples $(x\,;y)$d'entiers relatifs vérifiant : $x = 27k - 20$ et $y = 35k - 26$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2) Dans un village il ya deux fétiches **Bolifing** et **Boliblen**. Le fétiche **Bolifing** est adoré tous les 140 jours et le fétiche **Boliblen** tous les 180 jours. Les jours où les cultes coïncident sont appelés jours de grâce. Un matin, le village a adoré le fétiche **Boliblen.**
   Détermine le nombre de jours qui séparent ce matin-là du prochain jour de grâce sachant qu'ils avaient adoré le fétiches **Bolifing** 8 jours auparavant.

## Exercice 2……………….………………………………………($5$ $points$)

I// Soient $p$ et $n$ deux entiers naturels.

On pose $I_{n;p} = \int_0^1 x^p(1-x)^n dx$.

1) Calcule $I_{n;0}$ et $I_{n;1}$.
2) Calcule $I_{0;n}$ puis en déduis $I_{1;n}$.
3) Montre que $I_{n;p} = I_{p;n}$ en faisant un changement de variable affine.
4) En déduis la relation $I_{p;n} = \frac{n}{p+1} I_{p+1\,;n-1}$

II// On suppose que la probabilité de faire un garçon est $\frac{1}{4}$. Une famille a 5 enfants.
Calcule la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 garçons.

## Problème…………………………………………………………($10$ $points$)

On considère la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, $\vec{i}$ , $\vec{j}$) .

**Partie A : Etude de la fonction f et construction de la courbe ( C )**.

1) Etudie la limite de la fonction $f$ en $-\infty$ puis en $+\infty$
(on pourra écrire $xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^x$ ).

2) Démontre que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$ et préciser la position de la courbe C par rapport à la droite Δ.

3) a) Calcule la dérivée $f'$ et la dérivée seconde $f''$ de la fonction $f$.

b) Dresse le tableau de variation de la fonction $f'$ en précisant la limite de la fonction $f'$ en $-\infty$.

c) Calcule $f'(1)$ et en déduis le signe de $f'(x)$ pour tout réel $x$.

d) Dresse le tableau de variation de la fonction $f$.

4) Soit I l'intervalle$[1{,}9\ ;\ 2]$.

Démontre que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique, α.

5) Trace la droite Δ et la courbe C (unité graphique : 2 cm).

**<u>Partie B</u> : Recherche d'une approximation de α** :

On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle I par : $g(x) = 1 + ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

1) Démontre, sur I, l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.

2) Etudie le sens de variation de la fonction $g$ sur I et Démontre que, pour tout $x$ appartenant à I, $g(x)$ appartient à I.

3) Démontre que, pour tout x de l'intervalle I, $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$

4) Soit $(u_n)$ la suite de nombres réels définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout $n$ de ℕ, $u_{n+1} = g(u_n)$

a) Démontre que, pour tout $n$ de ℕ, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha|$

b) En déduis, en raisonnant par récurrence que pour tout $n$ de ℕ, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^n$ puis Donne la limite de la suite $u_n$ en $+\infty$

**<u>Partie C</u> : Calcul d'aire** :

1) En intégrant par parties, Calcule l'intégrale $J = \int_1^{\alpha} xe^{x-1}dx$

2) a) Détermine, en unités d'aire, l'aire A de la portion de plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = \alpha$.

b) Démontre qu'on peut écrire $A = (\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$.

# Correction Sujet 2 (TSE-STI)

**Exercice 1………………..…………………………………………($\boldsymbol{5\ points}$)**

On considère l'équation $(E)$ définie par : $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$, $35x - 27y = 2$.

1) a- Vérifions que $(-20\,;\,-26)$ est solution de $(E)$.

On a : $35(-20) - 27(-26) = -700 + 702 = 2$. Donc $(-20\,;\,-26)$ est solution de $(E)$.

b- Démontrons que les solutions de $(E)$ sont les couples $(x\,;y)$d'entiers relatifs vérifiant :
$x = 27k - 20$ et $y = 35k - 26$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

**1ère méthode :**

Si le couple $(x_0\,;\,y_0)$ est une solution particulière de l'équation diophantienne $ax + by = c$, alors l'ensemble solution est donc de la forme $S = \{-bk + x_0\,; ak + y_0\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Donc l'ensemble solution de l'équation $35x - 27y = 2$ ayant pour solution particulière $(-20\,;\,-26)$ est :

$S = \{27k - 20\,;35k - 26\}$ Avec $k \in \mathbb{Z}$.

**2ième méthode :**

Si $(x_0\,;\,y_0)$ est une solution particulière de l'équation $35x - 27y = 2$ alors on a :

$35x_0 - 27y_0 = 2$ . Alors on a le système suivant :

$$\begin{cases} 35x - 27y = 2 & (1) \\ 35x_0 - 27y_0 = 2 & (2) \end{cases}$$

En multipliant l'équation (2) par **– 1** , on a :

$$\begin{cases} 35x - 27y = 2 & (1) \\ -35x_0 + 27y_0 = -2 & (2) \end{cases}$$

En effectuant la somme membre à membre des équations (1) et (2) , on a :
$35(x - x_0) - 27(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow 35(x - x_0) = 27(y - y_0)$ .

Puisque $PGCD(35\,;27)$= 1, c'est-à-dire que 35 et 27 sont premier entre eux, alors d'après Gauss on a : $35/27(y - y_0) \Leftrightarrow 35/(y - y_0)$. Donc il existe un rée $k \in \mathbb{Z}$ tel que :
$35k = y - y_0 \Leftrightarrow y = 35k + y_0$ .
Or $y_0 = -26$ => $y = 35k - 26$.

De même : $27(y - y_0) = 35(x - x_0)$ .

Puisque $PGCD(35\ 27)$= 1, c'est-à-dire que 35 et 27 sont premier entre eux, alors d'après Gauss on a : $27/35(x - x_0) \Leftrightarrow 27/(x - x_0)$.
Donc il existe un rée $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $27k = x - x_0 \Leftrightarrow x = 27k + x_0$ .
Or $x_0 = -20$ => $x = 27k - 20$.

D'où $S = \{27k - 20\,;35k - 26\}$ Avec $k \in \mathbb{Z}$.

2) Dans un village il ya deux fétiches **Bolifing** et **Boliblen**. Le fétiche **Bolifing** est adoré tous les 140 jours et le fétiche **Boliblen** tous les 180 jours. Les jours où les cultes coïncident sont appelés jours de grâce. Un matin, le village a adoré le fétiche **Boliblen.**

Déterminons le nombre de jours qui séparent ce matin-là du prochain jour de grâce sachant qu'ils avaient adoré le fétiches **Bolifing** 8 jours auparavant.
Soit : $n = 140x$ le nombre de jours d'adoration de **Bolifing** avec $x \in \mathbb{N}$
$m = 108y$ le nombre de jours d'adoration de **Boliblen** avec $y \in \mathbb{N}$
Puisqu'il ya eu 8 jours de différence entre le jour d'adoration des deux fétiches, alors on :
$m = n - 8 \Leftrightarrow 108y = 140x - 8 \Leftrightarrow 140x - 108y = 8$

En simplifiant par 4, on a : $35x - 27y = 2$ et on obtient :

$x = 27k - 20$ et $y = 35k - 26$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Ainsi le plus petit entier $k$ telque $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ est $k = 1$.
Par conséquent $x = 7$ et $y = 9$.
D'où le nombre de jours qui séparent ce matin-là du prochain jour de grâce sachant qu'ils avaient adoré le fétiche **Bolifing** 8 jours auparavant est $m = 108 \times 9 = 972$ jours.

## Exercice 2……………….……………………………………………($\mathbf{5}\ \boldsymbol{points}$)

I//Soient $p$ et $n$ deux entiers naturels.
On pose $I_{n;p} = \int_0^1 x^p(1-x)^n dx$.

1) Calculons $I_{n;0}$ et $I_{n;1}$.

$$I_{n;0} = \int_0^1 x^0(1-x)^n dx = \int_0^1 (1-x)^n dx = -\int_0^1 -(1-x)^n dx = -\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 0 - \frac{-1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

=> $I_{n;0} = \frac{1}{n+1}$

$$I_{n;1} = \int_0^1 x(1-x)^n dx$$

Posons : $u(x) = x$ => $u'(x) = 1$

$v'(x) = (1-x)^n$ => $v(x) = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$

$$I_{n;1} = \left[-x \times \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} dx$$

$$= \left[-x \times \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 -(1-x)^{n+1} dx$$

$$= \left[-x \times \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\left[\frac{(1-x)^{n+2}}{n+2}\right]_0^1$$

$$= \left[-\frac{x(1-x)^{n+1}}{n+1} - \frac{(1-x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\right]_0^1 = 0 + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

=> $I_{n;1} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

2) Calculons $I_{0;n}$ puis en déduis $I_{1;n}$.

$$I_{0;n} = \int_0^1 x^n(1-x)^0 dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

=> $I_{0;n} = \dfrac{1}{n+1}$

$$I_{1;n} = \int_0^1 x^n(1-x)dx$$

Posons : $u(x) = 1 - x$ => $u'(x) = -1$

$v'(x) = x^n$ => $v(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

$$I_{1;n} = \left[\frac{(1-x)x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{x^{n+1}}{n+1} dx$$

$$= \left[\frac{(1-x)x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1} dx$$

$$= \left[\frac{(1-x)x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{(1-x)x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + \left[\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{(1-x)x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

=> $I_{1;n} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

3) Montrons que $I_{n;p} = I_{p;n}$ en faisant un changement de variable affine.

$$I_{n;p} = \int_0^1 x^p(1-x)^n dx.$$

Posons : $X = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - X$

Si $x = 0$ ; alors $X = 1$

Si $x = 1$ ; alors $X = 0$

Et $dx = -dX$

Donc $I_{n;p} = \int_1^0 x^p(1-x)^n dx \Leftrightarrow I_{n;p} = \int_1^0 (1-X)^p(X)^n(-dX) \Leftrightarrow$

$I_{n;p} = -\int_0^1 (1-X)^p(X)^n(-dX) \Leftrightarrow I_{n;p} = \int_0^1 (1-X)^p(X)^n dX \Leftrightarrow I_{n;p} = \int_0^1 X^n(1-X)^p dX.$

En posant $X = x$ ; on a : $I_{n;p} = \int_0^1 x^n(1-x)^p dx = I_{p;n}$ .

D'où $I_{n;p} = I_{p;n}$

4) En déduisons la relation $I_{p;n} = \frac{n}{p+1} I_{p+1\,;n-1}$

D'après 3), on a : $I_{n;p} = \int_0^1 x^n(1-x)^p dx$

Posons : $u(x) = x^n$ => $u'(x) = nx^{n-1}$

$v'(x) = (1-x)^p$ => $v(x) = -\frac{(1-x)^{p+1}}{p+1}$

$I_{n;p} = \left[-x^n \times \frac{(1-x)^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 + \frac{n}{p+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{p+1}dx$

Or $\left[-x^n \times \frac{(1-x)^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = 0$

=> $I_{n;p} = \frac{n}{p+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{p+1}dx \Leftrightarrow I_{n;p} = \frac{n}{p+1} I_{p+1\,;n-1}$

D'où la relation $I_{p;n} = \frac{n}{p+1} I_{p+1\,;n-1}$

II// On suppose que la probabilité de faire un garçon est $\frac{1}{4}$ . Une famille a 5 enfants.
Calculons la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 garçons.
Avoir une naissance simple conduit à 2 éventualités : soit on a un garçon, soit on a une fille. C'est donc une épreuve de Bernoulli. On pourrait considérer l'épreuve « avoir un garçon » comme le succès de probabilité p = $\frac{1}{4}$ et l'épreuve « avoir une fille » comme l'échec de probabilité $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
Cinq naissances successives constituent une succession de 5 épreuves de Bernoulli. Pour Calcule la probabilité d'avoir exactement 3 garçons, on utilise alors la loi binomiale de paramètre 5 et $\frac{3}{4}$ tel que : p($x = 3$) = $C_5^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2$ = 10 $\times \frac{1}{64} \times \frac{9}{16} = \frac{90}{1024}$

=> p $(x = 3) = \frac{45}{512} = 0{,}088$

Alors la probabilité d'avoir exactement 3 garçons est p(x = 3) = 0,088.

**Problème**..............................................................**(10 points)**

On considère la fonction numérique $f$ définie sur ℝ par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(0 ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$

**Partie A :** **Etude de la fonction f et construction de la courbe ( C ).**

1) Etudie la limite de la fonction $f$ en $-\infty$ puis en $+\infty$
(on pourra écrire $xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^x$ ).

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x + 1 - xe^{x-1} = \lim_{x \to -\infty} 2x + 1 - \frac{1}{e}xe^x = 2(-\infty) + 1 - \frac{1}{e}(0) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x + 1 - xe^{x-1} = \lim_{x \to +\infty} 2x + 1 - \frac{1}{e}xe^x = \lim_{x \to +\infty} x\left(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{e}e^x\right)$$

$= (+\infty)(2 - \infty) = -\infty$

2) Démontre que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$

La droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$ si et seulement si :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - y = \lim_{x \to -\infty}(2x + 1 - xe^{x-1}) - (2x + 1) = \lim_{x \to -\infty} 2x + 1 - \frac{1}{e}xe^x - 2x - 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{e}xe^x = 0 .$$

D'où la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$

Précisons la position de la courbe C par rapport à la droite Δ.

Pour cela, étudions le signe de $f(x) - y$. Posons $f(x) - y = -\frac{1}{e}xe^x$ .

$\forall x \in D_f$ , $e^x > 0$ Alors le signe de $f(x) - y$ dépend du signe de $-\frac{1}{e}x$. Posons $-\frac{1}{e}x = 0$

=> $x = 0$. D’où le tableau de signe de $f(x) - y$ est le suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) - y$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

D’après le tableau de signe :

$\forall\, x \in D_f$ $]-\infty\,;O[\,;$ $f(x) - y > 0$. Alors $\forall\, x \in D_f$ $]-\infty\,;O[\,;$ C est au dessus de $\Delta$

$\forall\, x \in D_f$ $]0\,;+\infty[\,;$ $f(x) - y < 0$. Alors $\forall\, x \in D_f$ $]0\,;+\infty[$ ; C est en dessous de $\Delta$

3) a) Calcule la dérivée $f\,'$ et la dérivée seconde $f\,''$ de la fonction $f$.

$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$ => $f'(x) = 2 - (x+1)e^{x-1}$ et $f''(x) = -(x+2)e^{x-1}$

b) Dresse le tableau de variation de la fonction $f\,'$ en précisant la limite de la fonction $f'$ en $-\infty$.

$lim\ f'(x) = lim\ 2 - (x+1)e^{x-1} = lim\ 2 - xe^{x-1} - e^{x-1} = 2 - 0 - 0 = 2$

$x \to -\infty$ $\quad x \to -\infty$ $\qquad\qquad x \to -\infty$

$lim\ f'(x) = lim\ 2 - (x+1)e^{x-1} = lim\ 2 - (xe^{x-1} + e^{x-1}) = 2 - (+\infty + \infty) = -\infty$

$x \to +\infty$ $\quad x \to +\infty$ $\qquad\qquad x \to +\infty$

$f''(x) = -(x+2)e^{x-1}$

$\forall\, x \in D_f$ , $e^{x-1} > 0$ Alors le signe de$f''(x)$ dépend du signe de $-(x+2)$.

Posons $-(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2$

D’où le tableau de variation de$f'(x)$ est le suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | | |
| $f'(x)$ | $2$ | $\nearrow$ | $2 + e^{-3}$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $+\infty$ |

c) Calcule $f\,'(1)$

$f\,'(1) = 2 - 2 = 0$

En déduisons le signe de $f\,'(x)$ pour tout réel $x$.

D’après de variation de $f'(x)$ :

$\forall\, x \in\ D_f\ \ ]-\infty\,;1[\,;\ f'(x) > 0.$

$\forall\, x \in\ D_f\ \ ]1\,;+\infty[\,;\ f'(x) < 0.$

d) Dressons le tableau de variation de la fonction $f$.

En utilisant la question précédente, on a le tableau de variation de la fonction $f$ suivante :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

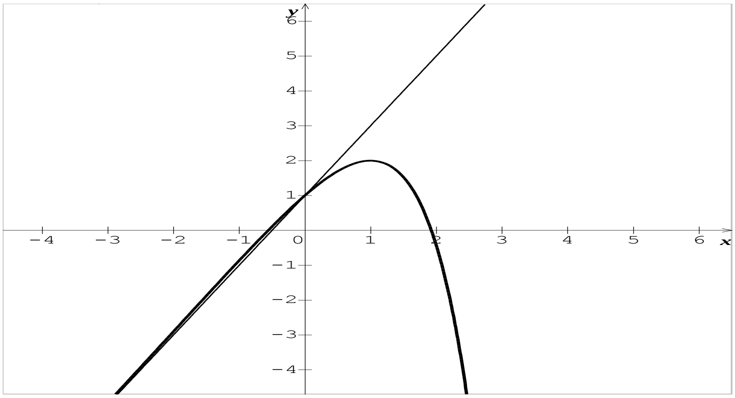
4) Soit $I$ l’intervalle$[1{,}9\ ;\ 2]$. Démontre que, sur $I$, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique, $\alpha$.

- D’après le tableau de variation de $f$ , $\forall x \in\ ]\,1\,;+\infty[$; $f$ est définie, continue et strictement décroissante de l’intervalle $]1\,;+\infty[$vers$]-\infty\,;2\,[$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ telle que $f(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} f(1{,}9) = 0{,}12 \\ f(2) = -0{,}43 \end{cases}$ => $f(1{,}9) \times f(2) < 0$

Alors d’après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α tel que : $\alpha \in [1{,}9\ ;\ 2]$.

5) Traçons la droite Δ et la courbe C (unité graphique : 2 cm).



**<u>Partie B</u> : Recherche d'une approximation de $\alpha$ :**

Soit la fonction $g$ définie sur $I$ par $g(x) \; = 1 + ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle $I$ par : $g(x) \; = 1 + ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

1) Démontre, sur I, l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.

$f(x) = 2x \; + 1 – xe^{x-\,1}$. Alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \; + 1 – xe^{x-\,1} = 0 \Leftrightarrow xe^{x-\,1} = \; 2x \; + 1$

$\Leftrightarrow e^{x-\,1} = \frac{2x+1}{x} \Leftrightarrow e^{x-\,1} = 2 + \; \frac{1}{x}$ => $x - 1 = \; ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 1 + ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) = x \Leftrightarrow$

$g(x) = x$ (Ce qu'il fallait Démontre)

2) Etudions le sens de variation de la fonction $g$ sur $I$.

$g(x) = 1 + ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$ => $g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x+1}{x}} = -\frac{1}{x^2}\times\frac{x}{2x+1} = -\frac{1}{x(2x+1)} < 0$

D'où pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $I \, = [1{,}9 \,; \; 2]$ ; $g$ est strictement décroissante.

Démontre que, pour tout $x$ appartenant à $I$, $g(x)$ appartient à $I$.

$x \; \in [1{,}9 \,; \; 2] \Leftrightarrow 1{,}9 \leq x \; \leq 2$ . $g$ étant décroissante sur $I$ ; on a :

$g(2) \leq g(x) \; \leq g(1{,}9)$

$\Leftrightarrow 1{,}91 \leq g(x) \leq 1{,}96$

$\Leftrightarrow 1{,}9 \leq g(x) \leq 2$

$\Leftrightarrow 1{,}9 \leq g(x) \leq 2$ => $g(x) \in [1{,}9 \,; \; 2] \Leftrightarrow g(x) \in I$(Ce qu'il fallait Démontre)

3) Démontre que, pour tout $x$ de l'intervalle $I$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$

On sait que : $g'(x) = \; -\frac{1}{x(2x+1)}$ et $1{,}9 \leq x \; \leq 2$ **( 1 )**

D'autre part si : $1{,}9 \leq x \; \leq 2$ ; Alors on a :

$$g'(1{,}9) \leq g'(x) \leq g'(2)$$

$$\Leftrightarrow \; -\frac{1}{1{,}9(2\times1{,}9+1)} \leq g'(x) \leq -\frac{1}{2(2\times2+1)}$$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{9{,}12} \leq g'(x) \leq -\frac{1}{10}$ . En appliquant la valeur absolue à l'inégalité on a :

$\Leftrightarrow \quad \left|-\frac{1}{10}\right| \leq |g'(x)| \leq \left|-\frac{1}{9{,}12}\right|$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{10} \leq |g'(x)| \leq \frac{1}{9{,}12}$ . Or $\frac{1}{9{,}12} \approx \frac{1}{9}$ . Donc l'inégalité devient : $\frac{1}{10} \leq |g'(x)| \leq \frac{1}{9}$ .

=> $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$ .

D'où pour tout $x$ de l'intervalle *I* ; on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$ (Ce qu'il fallait démontrer)

4) Soit $(u_n)$ la suite de nombres réels définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$,
$u_{n+1} = g(u_n)$

a-Démontrons que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha|$

- D'après **<u>Partie A -4)</u>** , on a : $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + 1 - \alpha e^{\alpha - 1} = 0 \Leftrightarrow \alpha e^{\alpha - 1} = 2\alpha + 1$

$\Leftrightarrow e^{\alpha - 1} = \frac{2\alpha + 1}{\alpha} \Leftrightarrow e^{\alpha - 1} = 2 + \frac{1}{\alpha}$ => $\alpha - 1 = ln\left(2 + \frac{1}{\alpha}\right) \Leftrightarrow 1 + ln\left(2 + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha \Leftrightarrow$

$g(\alpha) = \alpha$

- D'autre part on a démontré que $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$

Ainsi d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{9}|x - \alpha|$ . Or $g(\alpha) = \alpha$

=> $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{9}|x - \alpha|$ . En posant $x = u_n$ ; on a : $|g(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha|$.

Or $g(u_n) = u_{n+1}$ => $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha|$. (Ce qu'il fallait Démontre)

b-En déduisons, en raisonnant par récurrence que Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^n$

On sait que $\alpha \in [1{,}9\,;\,2] \Leftrightarrow 1{,}9 \leq \alpha \leq 2$ et $u_0 = 2$

Il vient que $1{,}9 - 2 \leq \alpha - u_0 \leq 2 - 2$

$\Leftrightarrow -0{,}1 \leq u_0 - \alpha \leq 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq |u_0 - \alpha| \leq 0{,}1$

$\Leftrightarrow 0 \leq |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{10}$

$$\Leftrightarrow 0 \leq |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^0$$

Alors la relation est vraie à l'ordre $n = 0$

Supposons la relation est vraie à l'ordre $n$ c'est-à-dire $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ; on a :

$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^n$Puis montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$ c'est-à-dire $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ;

on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}$

D'après **Partie B 4) a),** on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha|$.

Par suite $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{9}\left[\frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^n\right]$

D'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}$

**<u>Conclusion</u>** : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ; on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^n$ (Ce qu'il fallait Démontre).

b) Etudions la convergence de la suite $u$ puis donnons sa limite en $+\infty$ .

La suite de terme général $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^n$ est convergente $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et converge donc vers 0.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \alpha = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

D'où la suite $u_n$ est convergente et converge vers $\alpha$

**<u>Partie C</u> : Calcul d'aire**

1) En intégrant par parties, calculons l'intégrale $J = \int_1^{\alpha} xe^{x-1}dx$

$J = \int_1^{\alpha} xe^{x-1}dx$

Posons $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{x-1} \Rightarrow v(x) = e^{x-1}$

$\Rightarrow J = [xe^{x-1}]_1^{\alpha} - \int_1^{\alpha} e^{x-1}dx = [xe^{x-1}]_1^{\alpha} - [e^{x-1}]_1^{\alpha} = [xe^{x-1} - e^{x-1}]_1^{\alpha}$

$\Rightarrow J = (\alpha - 1)e^{\alpha-1}$

2)a) Déterminons, en unités d'aire, l'aire A de la portion de plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = \alpha$.

A= $\int_1^{\alpha} f(x)dx = \int_1^{\alpha}(2x + 1 - xe^{x-1})dx = \int_1^{\alpha}(2x + 1)dx - \int_1^{\alpha} xe^{x-1}dx$

=> A $= \int_1^{\alpha}(2x + 1)dx - J = [x^2 + x]_1^{\alpha} - J = \alpha^2 - \alpha - J$ . Or $J = (\alpha - 1)e^{\alpha-1}$

=> A $= \alpha^2 + \alpha - 2 - (\alpha - 1)e^{\alpha-1}$

b) Démontrons qu'on peut écrire A $= (\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$.

On sait que A $= \alpha^2 + \alpha - 2 - (\alpha - 1)e^{\alpha-1}$

D'autre part d'après **Partie B 1),** on a : $e^{x-1} = \frac{2x+1}{x} \Leftrightarrow e^{\alpha-1} = \frac{2\alpha+1}{\alpha}$

Donc A $= \alpha^2 + \alpha - 2 - (\alpha - 1)\left(\frac{2\alpha+1}{\alpha}\right) = \alpha^2 + \alpha - 2 - \frac{2\alpha^2 - \alpha - 1}{\alpha}$

$$= \frac{\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 2\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha} = \frac{\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1}{\alpha} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha^2 - 1)}{\alpha}$$

=> A $= (\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$.

D'où l'aire A de la portion de plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = \alpha$ est donné par :

A $= (\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$. (Ce qu'il fallait Démontre).

# Sujet 3 (TSE-STI)

## Exercice 1……………….……………………………………….($5\ points$)

I// On dispose d'une feuille de papier. On découpe dans cette feuille le plus grand carré possible. Dans le morçeau restant, on découpe encore le plus grand carré possible, et ainsi de suite….
On continue à découper le plus grand carré possible jusqu'à ce que le morçeau restant soit lui meme un carré.

1) Quelle est la taille du dernier carré si les dimensions de la feuille initiale sont 192 $cm$ sur 84 $cm$?
2) Même question si les dimensions initiales sont deux entiers quelconques.

II// On considère le système suivant, d'équations différentielles du 1er ordre tel que :
$\begin{cases} y' + 4Z = 2e^{2x} \\ Z' - y = e^{2x} \end{cases}$ où $y$ et $Z$ désignent deux fonctions inconnues de variable réel $x$.

1) Forme l'équation différentielle du second ordre (E) à laquelle satisfait $y(x)$

2) Résous l'équation (E) et en déduis la solution générale du système.

3) Précise la solution particulière pour laquelle on a : $y = 1$ et $Z = -1$ pour $x = 0$.

## Exercice 2……………….……………………………………….($5\ points$)

I// Soit l'intégrale $I_n$ définie par : $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1 - x^2}\, dx$

1) Calcule $I_1$.
2) En intégrant par parties, Montre que $I_n=\frac{n-1}{n+2}I_{n-2}$ (on posera $x^n = x \bullet x^{n-1}$ )
3) En déduis les valeurs de $I_3$ et $I_5$.

II// Soit $A, B, C$ un triangle équilatéral de côté 3 ; $B'$ le milieu de $[AC]$et un point $D$ tel que :
$4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$
1) Démontre que $D$ est le barycentre des points pondérés $(A, 3)$ ; $(B, -2)$ ; $(C, 3)$.
En déduis que $D$ appartient à la médiatrice du segment $[AC]$
2)Démontre que $\overrightarrow{BB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$
3)Calcule $DA^2$ et $DB^2$
4)Détermine l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant la relation :
$3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$
5)Vérifie que l'isobarycentre du triangle $A, B, C$ appartient à l'ensemble (E) puis trace (E).
(On fera une figure)

## Problème...........................................................$(10\ points)$

**Partie A** :

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie A la fonction numérique $f$ définie sur

$]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2}$, de Détermine ensuite dans la **partie B** la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite récurrente dans la partie $(\Gamma)$, cette dernière partie étant dans une large mesure indépendante des deux autres.

1) Soit $g$ la fonction numérique définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x - 2\,lnx + 1$

a) Montre que la fonction $g$ est dérivable et que $\forall\, x \in Dg$ $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

b) Etudie les variations de la fonction $g$ puis Détermine le signe de $g(x)$.

2) a- Détermine les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$.

b- Montre que pour tout $x \in ]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ puis donne le tableau de variations de la fonction $f$.

**Partie B** :

$\Gamma$ Désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $(o\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ unité graphique 2 $cm$.

Soit $h$ la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = x + ln\,x$.

1) Etudie le sens de variation de $h$ puis Montre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0{,}4\ ;\ 0{,}7]$

2) Montre que l'on a : $e^{-\alpha} = \alpha$

3) a- Vérifie que la droite $\Delta$ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $\Gamma$ en $+\infty$.

b- Utilise les résultats de la question **1)** pour Détermine les positions relatives de $\Gamma$ et $\Delta$.

4) Construire $\Gamma$ et $\Delta$ dans le repère ortho normal $(o\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$

5) a- Calcule au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{lnt}{t^2}dt$

b- En déduis l'aire, en $cm^2$ de la portion de plan limitée par la courbe $\Gamma$ , la droite $\Delta$ et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation $x = 1 \; et \; x = 2$.

**<u>Partie C</u>** : Etude d'une suite

Dans cette partie :

- I désigne l'intervalle [ 0,4 ; 0,7 ]
- α est le réel mis en évidence au **B. 1**.
- $\varphi$ est la fonction définie sur ℝ par $\varphi(x) = e^{-x}$

1) $u$ est la suite récurrente définie par $\forall \, n \in \mathbb{N}$ : $\begin{cases} u_0 = 0{,}4 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$

Montre qu'on a pour tout $x \in I$ :

a) $\varphi(x) \in I$

b) $|\varphi'(x)| \leq 0{,}7$

c) $|\varphi(x) - \alpha| \leq 0{,}7|x - \alpha|$

2) a) Montre que $\forall \, n \in \mathbb{N}$ ; on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}7|u_n - \alpha|$ puis en déduis par récurrence que $\forall \, n \in \mathbb{N}$ ; on a : $|u_n - \alpha| \leq 0{,}3(0{,}7)^n$

b) Conclus alors quant à la convergence de la suite u.

3) Détermine un entier p tel que pour $n \geq p$ on ait: $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ puis donné à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de $u_p$ à $10^{-3}$près.

En déduis une valeur approchée par défaut et par excès de $\alpha$ à $10^{-3}$près

# Correction Sujet 3 (TSE-STI)

**Exercice 1**……………..…………………………………………$(5\ \boldsymbol{points})$

I// On dispose d'une feuille de papier. On découpe dans cette feuille le plus grand carré possible. Dans le morçeau restant, on découpe encore le plus grand carré possible, et ainsi de suite….
On continue à découper le plus grand carré possible jusqu'à ce que le morçeau restant soit lui meme un carré.

1) Déterminons la taille du dernier carré si les dimensions de la feuille initiale sont 192 $cm$ sur 84 $cm$

La taille du dernier carré est PGCD (192; 84) = 12

2) De même déterminons la taille du dernier carré si les dimensions de la feuille initiale sont deux entiers quelconques.

De manière générale, si on note $x$ et $y$ (avec $x$ et $y$ deux entiers quelconques), les dimensions de la feuille initiale, la taille du dernier carré sera le PGCD $(x\ ;\ y)$

II// On considère le système suivant, d'équations différentielles du 1er ordre tel que :
$\begin{cases} y' + 4Z = 2e^{2x} \\ Z' - y = e^{2x} \end{cases}$ où $y$ et $Z$ désignent deux fonctions inconnues de variable réel $x$.

1) Formons l'équation différentielle du second ordre (E) à laquelle satisfait $y(x)$

(1) $y' + 4Z = 2e^{2x}$ => $y'' + 4Z' = 4e^{2x}$

(2) $Z' - y = e^{2x}$ => $Z' = y + e^{2x}$

En remplaçant $Z' = y + e^{2x}$ par sa valeur dans (1). Alors on a :

$y'' + 4(y + e^{2x}) = 4e^{2x} \Leftrightarrow y'' + 4y + 4e^{2x} = 4e^{2x} \Leftrightarrow y'' + 4y = 0$

D'où l'équation différentielle du second ordre (E) à laquelle satisfait $y(x)$ est

(E) : $y'' + 4y = 0$.

2) Résolvons l'équation (E)

$y'' + 4y = 0$ . Ici $w^2 = 4$ => $w = 2$

Alors $y(x) = C_1 coswx + C_2 sinwx = C_1 cos2x + C_2 sin2x$ avec $(C_1\ ;\ C_2) \in \mathbb{R}^2$

En déduisons la solution générale du système, c'est-à-dire la fonction inconnue $Z$.

D'après l'équation (2), on a : $Z' = y + e^{2x} \Leftrightarrow$

Donc $Z' = y + e^{2x} \Leftrightarrow \int Z'(x)dx = \int y(x)dx + \int e^{2x}dx$

$$\Leftrightarrow Z(x) = \int (C_1 cos2x \ + C_2 sin2x)dx + \int e^{2x} dx$$

$$\Leftrightarrow Z(x) = \int C_1 cos2xdx + \ \int C_2 sin2xdx + \int e^{2x} dx$$

$$\Leftrightarrow Z(x) = C_1 \int cos2xdx + \ C_2 \int sin2xdx + \int e^{2x} dx$$

=> $Z(x) = C_1 \left[\frac{1}{2} sin2x\right] + C_2 \left[-\frac{1}{2} cos2x\right] + \left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]$

=> $Z(x) = \frac{C_1}{2} sin2x + -\frac{C_2}{2} cos2x + \frac{1}{2} e^{2x} = \frac{1}{2}(C_1 sin2x - C_2 cos2x + e^{2x})$

3) Précisons la solution particulière pour laquelle on a : $y \ = 1$ et $Z = -1$ pour $x \ = 0$.

$\boldsymbol{y(x) = C_1 cos2x \ + C_2 sin2x}$

Si $y \ = 1$ Pour $x \ = 0$ alors on a : $1 = C_1 cos0 \ + C_2 sin0 \ \Leftrightarrow C_1 = 1$

$\boldsymbol{Z(x) = \frac{1}{2}(C_1 sin2x - C_2 cos2x + e^{2x})}$

Si $Z = -1$ Pour $x \ = 0$ alors on a : $-1 = \frac{1}{2}(C_1 sin0 - C_2 cos0 + e^0) \Leftrightarrow$

$C_1 sin0 - C_2 cos0 + e^0 = -2 \Leftrightarrow -C_2 + 1 = -2 \Leftrightarrow C_2 = 3$

Alors $y(x) = cos2x \ + 3sin2x$ et $Z(x) = \frac{1}{2}(sin2x - 3cos2x + e^{2x})$

D’où la solution particulière du système est :

$$\begin{cases} y(x) \ = \ cos2x \ + 3sin2x \\ \qquad\qquad et \\ Z(x) = \frac{1}{2}(sin2x - 3cos2x + e^{2x}) \end{cases}$$

## <u>Exercice</u> 2…………………..…………………………………………($\boldsymbol{5\ points}$)

I// Soit l'intégrale $I_n$ définie par : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1 \ - \ x^2}\, dx$

1) Calculons $I_1$.

$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1 \ - \ x^2}\, dx$ => $I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\, dx \ = -\int_0^1 -\frac{2}{2} x\sqrt{1 - x^2}\, dx$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 -2x\sqrt{1 - x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 -2x(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \ -\frac{1}{2}\left[\frac{(1 \ - x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \ -\frac{1}{3}\left[(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}\left[(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}\right]_0^1$$

=> $I_1 = F(1) - F(0) = (0) - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

2) En intégrant par parties, montrons que $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$ (on posera $x^n = x \bullet x^{n-1}$ )

$I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1 - x^2}\,dx = \int_0^1 x \bullet x^{n-1}\sqrt{1 - x^2}\,dx = \int_0^1 x^{n-1} \bullet x\sqrt{1 - x^2}\,dx$

Posons $u(x) = x^{n-1}$ => $u'(x) = (n-1)x^{n-2}$

$v'(x) = x\sqrt{1 - x^2}$ => $v(x) = -\frac{1}{3}(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}$ . (D'après la question1° )

=> $I_n = \left[-\frac{1}{3}x^{n-1} \times (1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 x^{n-2}(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}\,dx$

=> $I_n = \left[-\frac{1}{3}x^{n-1} \times (1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 (x^{n-2} - x^n)\sqrt{1 - x^2}\,dx$

Or $\left[-\frac{1}{3}x^{n-1} \times (1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}\right]_0^1 = 0$

=> $I_n = \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 (x^{n-2} - x^n)\sqrt{1 - x^2}\,dx$

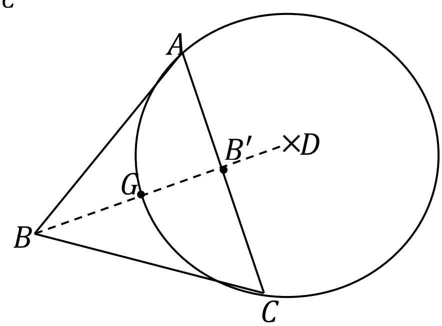
=> $I_n = \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 x^n\sqrt{1 - x^2}\,dx$

=> $I_n = \frac{1}{3}(n-1)I_{n-2} - \frac{1}{3}(n-1)I_n \Leftrightarrow I_n + \frac{1}{3}(n-1)I_n = \frac{1}{3}(n-1)I_{n-2} \Leftrightarrow$

$\left(1 + \frac{1}{3}(n-1)\right)I_n = \frac{1}{3}(n-1)I_{n-2} \Leftrightarrow \frac{n+2}{3}I_n = \frac{n-1}{3}I_{n-2} \Leftrightarrow$

$(n+2)I_n = (n-1)I_{n-2}$ => $I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}$ .
D'où $I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}$ (ce qu'il fallait démontrer)

II//Soit $A, B, C$ un triangle équilatéral de côté 3 ; $B'$ le milieu de $[AC]$et un point $D$ tel que :
$4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$



1) Démontrons que $D$ est le barycentre des points pondérés $(A, 3)$ ; $(B, -2)$ ; $(C, 3)$.

Par hypothèse on a : $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$ (Introduisons le barycentre $D$).

Alors on a : $4(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD}) = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + 3(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC})$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

D'où $D$ = bary $\{(A, 3)$ ; $(B, -2)$ ; $(C, 3)\}$.

En déduisons que $D$ appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

On sait que $D$ = bary $\{(A, 3)$ ; $(B, -2)$ ; $(C, 3)\}$.

D'autre part $B'$ est le milieu de $[AC]$ alors : $\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'C} = \vec{0}$

D'où $3\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow (3\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DC}) - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\underbrace{(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC})}_{\textbf{Introduisons } B'} - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$

$\Rightarrow 3\left[(\overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{B'A}) + (\overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{B'C})\right] - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\left[\underbrace{(\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'C})}_{\vec{0}} + \underbrace{(\overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{DB'})}_{2\overrightarrow{DB'}}\right] - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$

$\Rightarrow 3(2\overrightarrow{DB'}) - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{DB'} - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{DB'} - \overrightarrow{DB} = \vec{0}$

Alors $D$ appartient à la droite $(BB')$ qui est la médiatrice de $[AC]$

**Conclusion :** $D$ appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

2) Démontrons que $\overrightarrow{BB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$

D'après la question 1), on a : $3\overrightarrow{DB'} - \overrightarrow{DB} = \vec{0}$ (Introduisons le point $B$).

=> $3\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BB'}\right) - \left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BB}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{BB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BB'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BB'} = -2\overrightarrow{DB}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BD}$ => $\overrightarrow{BB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$

3) Calculons $DA^2$ et $DB^2$

$D$ = bary $\{(A, 3)\ ;\ (B, -2)\ ;\ (C, 3)\}$.

Alors $\overrightarrow{AD} = \frac{-2}{3-2+3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{3-2+3}\overrightarrow{AC}$

=> $\overrightarrow{AD} = \frac{-2}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

=> $\overrightarrow{AD} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AD}\right)^2 = \left(\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)^2$

$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{1}{4}AB^2 - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} + \frac{9}{16}AC^2$. Or $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$

=> $AD^2 = \frac{1}{4}AB^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}\right) + \frac{9}{16}AC^2$

$= \frac{1}{4}AB^2 - \frac{3AB^2 + 3AC^2 - 3BC^2}{8} + \frac{9}{16}AC^2$

$= \frac{4AB^2 - 6AB^2 - 6AC^2 + 6BC^2 + 9AC^2}{16}$

(Or ABC est un triangle équilatérale tel que AB = AC = BC = 3)

=> $AD^2 = \frac{-2AB^2 + 3AC^2 + 6BC^2}{16} = \frac{-2AB^2 + 3AB^2 + 6AB^2}{16} = \frac{7AB^2}{16} = \frac{7\times(3)^2}{16} = \frac{7\times 9}{16} = \frac{63}{16}$

=> $AD^2 = \frac{63}{16}$

De même d'après la question 2), on a : $\overrightarrow{BB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BD}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}\right)^2$

$\Leftrightarrow BD^2 = \frac{9}{4}BB'^2$

ABC étant équilatérale, on a : $BB' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

D'où $BD^2 = \frac{9}{4}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \times \frac{27}{4} = \frac{243}{16}$

4) Déterminons l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant la relation :

$3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$

Posons $f(M) = 3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2$

Alors $MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12 \Leftrightarrow f(M) = 12$

Exprimons ainsi $f(M)$ en fonction de $MD$ et de $f(D)$

On sait que $f(M) = \sum \alpha_i MD^2 + f(D)$ avec $\alpha_1 = 3$ ; $\alpha_2 = -2$ et $\alpha_3 = 3$

Or $\sum \alpha_i MD^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MD^2 = (3 - 2 + 3)MD^2 = 4MD^2 \Rightarrow f(M) = 4MD^2 + f(D)$

D'autre part $f(D) = \frac{(\alpha_1 \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1 \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2 \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{-6AB^2 + 9AC^2 - 6BC^2}{4}$

Or ABC est équilatérale tel que AB = AC = BC = 3

$\Rightarrow f(D) = \frac{-6(3)^2 + 9(3)^2 - 6(3)^2}{4} = \frac{-27}{4}$

Donc $f(M) = 4MD^2 + f(G) \Leftrightarrow f(M) = 4MD^2 - \frac{27}{4}$

D'autre part $f(M) = 12$

Par identification, on a : $4MD^2 - \frac{27}{4} = 12$

$\Leftrightarrow 4MD^2 = 12 + \frac{27}{4} \Leftrightarrow 4MD^2 = \frac{75}{4} \Leftrightarrow MD^2 = \frac{75}{16} \Rightarrow MD = \sqrt{\frac{75}{16}} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$

Alors l'ensemble (E) des points M cherchés est le cercle de centre $D$et de rayon $r = \frac{5\sqrt{3}}{4}$

5) Vérifions que l'isobarycentre du triangle $A, B, C$ appartient à l'ensemble (E) puis trace (E).

(On fera une figure)

$G$ étant l'isobarycentre des points $A$ ; $B$ et $C$, on a : $D$ ; $B'$ et $G$ sont alignés.

Par conséquent $DG = DB' + B'G \ (voir\ figure)$

Or $B'G = \frac{1}{3}BB' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $DB' = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

=> $DG = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

D'où $G$ appartient à l'ensemble (E)

**Problème**……………………………………………………………$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

**Partie A** :

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie A la fonction numérique $f$ définie sur

$]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2}$, de Détermine ensuite dans la **partie B** la position de sa

courbe représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite récurrente dans la partie $(\Gamma)$, cette dernière partie étant dans une large mesure indépendante des deux autres.

1) a) Dérivée de la fonction $g$

La fonction $g$, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x - 2\ lnx + 1$est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ (comme somme algébrique de telles fonctions) et sa dérivée est :

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x} = \frac{(x-1)(3x^2 - x - 2)}{x}$$

b) Variations de $g$ et signe de $g(x)$.

On peut résumer l'étude du sens de variation de $g$ et du signe de $g(x)$ dans le tableau suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $3x^2 + 3x + 2$ | ‖ | $+$ | | $+$ | |
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

D'après le tableau de variation, $g(x) > 0$

a) Limite de $f$ en 0 et en $+\infty$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2}$$

$$lim\ f(x) = lim\ x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2} = -\infty$$

$x \to 0$ $\qquad$ $x \to 0$

$$lim\ f(x) = lim\ x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2} = +\infty$$

$x \to +\infty$ $\qquad$ $x \to +\infty$

b- Montrons que pour tout $x \in ]\ 0\ ;\ +\infty[$ , $f\ '(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ puis donnons le tableau de variations de la fonction $f$.

La fonction $f$, définie sur $]\ 0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2}$ est dérivable sur $]0\ ; +\infty[$ et sa

dérivée est : $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1-2lnx}{x^3} = \frac{x^3 - x + 1 - 2lnx}{x^3}$ => $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

$\forall x \in ]\ 0\ ;\ +\infty[\ ;\ x^3 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$

Or d'après **Partie A 1) b)**, on a :

$\forall x \in ]0\ ; +\infty[\ ;\ g(x) > 0$ => $\forall x \in ]0\ ; +\infty[\ \ f'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de $f$ est le suivant :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \|\| | $+$ | |
| $f(x)$ | \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**<u>Partie B</u>** :

Soit $h$ la fonction définie sur $]\ 0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = x + ln\ x$.

1) Etudions le sens de variation de $h$ puis montrons que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ sur l'intervalle$[\ 0,4\ ;\ 0,7\ ]$

La fonction $h$ définie sur$]0\ ;\ +\infty[$ est également dérivable$]0\ ;\ +\infty[$ et sa fonction dérivée est $h'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$ $\Rightarrow \forall x \in ]0\ ;+\infty[\ ; h'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de $h$ est le suivant :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | | | |
| $h(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

- D'après le tableau de variation de $h$ , $\forall x \in ]0\ ;\ +\infty[$ $h$ est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ vers $]-\infty\ ;+\infty[$ .
Alors l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ telle que $h(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} h(0{,}4) = -0{,}52 \\ h(0{,}7) = 0{,}34 \end{cases}$ $\Rightarrow h(0{,}4) \times h(0{,}7) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a : $\alpha \in [\,0{,}4\ ;\ 0{,}7\,]$

__**Conclusion**__ : l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [\,0{,}4\ ;\ 0{,}7\,]$

2) Montrons que l'on a : $e^{-\alpha} = \alpha$

D'après **Partie B 1)** on a : $h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \ln \alpha = 0 \Rightarrow \ln \alpha = -\alpha \Rightarrow e^{-\alpha} = \alpha$

3) a- Vérifions que la droite $\Delta$ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $\Gamma$ en $+\infty$.

La droite $\Delta$ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $(\Gamma)$ en $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = 0 = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}\right) - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

D'où La droite $\Delta$ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $(\Gamma)$ en $+\infty$

b- Utilisons les résultats de la **Partie B** question **1)** pour Détermine les positions relatives de $(\Gamma)$ et $\Delta$.

Pour étudier la position relative $(\Gamma)$ et $(\Delta)$ nous devons étudier le signe de $f(x) - y$.

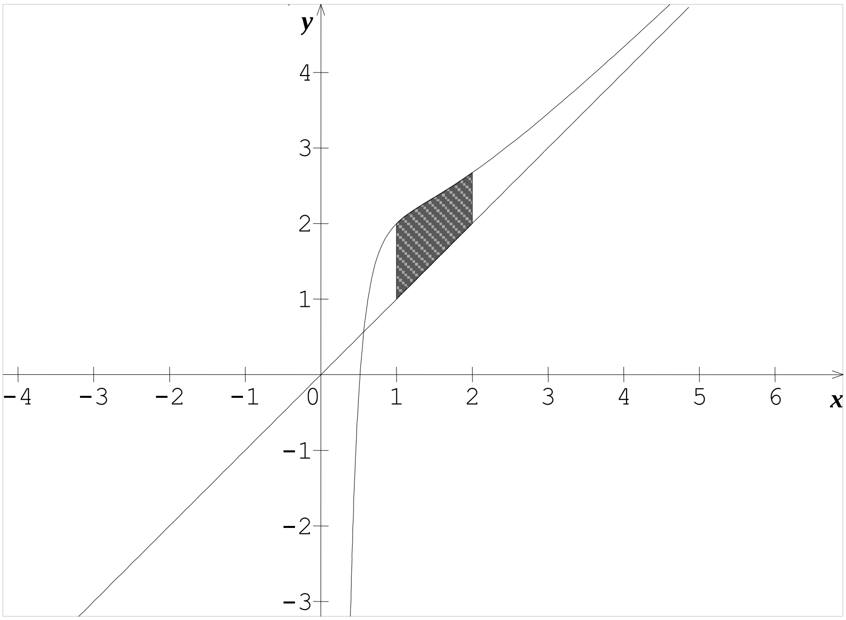
Or $f(x) - y = \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$.
Donc le signe de $f(x) - y$ dépend du signe de $h(x)$.

Or d'après le tableau de variation obtenu dans la **Partie B 1)** on a :

$\forall x \in ]\,0\,;\,\alpha[\;\; h(x) < 0$ => $\forall x \in ]\,0\,;\,\alpha[\;\; f(x) - y < 0$ et par conséquent $\forall x \in ]\,0\,;\,\alpha[$ ; la courbe $(\Gamma)$ est en dessous de la droite $(\Delta)$

De même $\forall x \in ]\,\alpha\,;\,+\infty[\;\; h(x) > 0$ => $\forall x \in ]\,\alpha\,;\,+\infty[\;\; f(x) - y > 0$ et par conséquent $\forall x \in ]\,\alpha\,;\,+\infty[$ ; la courbe $(\Gamma)$ est au dessus de la droite $(\Delta)$

4) Construction de la courbe $(\Gamma)$ et de la droite $\Delta$ dans le repère ortho normal $(o\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$




5) a- Calculons au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale $\mathrm{I} = \int_1^2 \frac{lnt}{t^2}\,dt$

$\mathrm{I} = \int_1^2 \frac{lnt}{t^2}\,dt = \int_1^2 \frac{1}{t^2}\,lnt\;dt$

Posons : $u(t) = lnt$ => $u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = \frac{1}{t^2}$ => $v(t) = -\frac{1}{t}$

=> $\mathrm{I} = \left[-\frac{lnt}{t}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{lnt}{t}\right]_1^2 + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = \left[-\frac{lnt}{t} - \frac{1}{t}\right]_1^2 = \left[-\frac{1+lnt}{t}\right]_1^2$

=> $\text{I} = \frac{1 - ln2}{2}$

b- En déduisons l'aire, en $cm^2$ de la portion de plan limitée par la courbe $(\Gamma)$ , la droite Δ et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation $x = 1 \; et \; x = 2$.

L’aire A de la portion de plan indiquée est, en cm², puisque $(\Gamma)$ est au dessus de (Δ) et puisque (Δ) est au dessus de l’axe des abscisses pour $1 \leq x \leq 2$

$$\text{A} = (2\ cm)^2 \int_1^2 (f(x) - y)dt = 4\ cm^2 \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2}\right)dt = 4\ cm^2 \int_1^2 \frac{1}{x}dt + 4\ cm^2 \int_1^2 \frac{lnx}{x^2}dt$$

$$= 4\ cm^2 \int_1^2 \frac{1}{x}dt + 4I\ cm^2 = 4\ cm^2 [lnt]_1^2 + 4I\ cm^2 = 4\ cm^2 ln2 + 4I\ cm^2$$

$$= 4\ cm^2 ln2 + 4cm^2\left(\frac{1 - ln2}{2}\right) = 4cm^2\left(ln2 + \frac{1 - ln2}{2}\right) = 4cm^2\left(\frac{2ln2 + 1 - ln2}{2}\right)$$

$$= 4cm^2\left(\frac{ln2 + 1}{2}\right) = 2cm^2(ln2 + 1) = (2ln2 + 2)cm^2 = 3{,}39cm^2$$

**<u>Partie C</u>** : Etude d'une suite

Dans cette partie :

- I désigne l'intervalle [ 0,4 ; 0,7 ]
- $\alpha$ est le réel mis en évidence au **B. 1**.
- $\varphi(x)$ est la fonction définie sur ℝ par $\varphi(x) = e^{-x}$

1) $u$ est la suite récurrente définie par $\forall\, n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_0 = 0{,}4 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$

a) Montrons qu'on a pour tout $x \in I$ on a : $\varphi(x) \in I$

Pour tout $x$ de l'intervalle $I = [\,0{,}4\ ;\ 0{,}7\,]$ ; $\varphi(x)$ appartient à l’intervalle $I$.

On peut résumer l’étude des variations de φ sur $I$ dans le tableau suivant :

| $x$ | 0,4 | | 0,7 |
|---|---|---|---|
| $\varphi(x)$ | 0,670 | $\searrow$ | 0,497 |

$\varphi(0{,}4) = 0{,}670 < 0{,}7$ et $\varphi(0{,}7) = 0{,}497 > 0{,}4$

Donc pour tout $x$ de l'intervalle $I = [\,0{,}4\ ;\ 0{,}7\,]$ ; $\varphi(x)$ appartient à l’intervalle $I$.

b) Montrons qu'on a pour tout $x \in I$ on a : $|\varphi'(x)| \leq 0,7$

On sait que : $0,4 \ \leq x \leq 0,7$

Appliquons $\varphi'(x)$ à l'inégalité : $0,4 \ \leq x \leq 0,7$

=> $\varphi'(0,4) \ \leq \varphi'(x) \ \leq \varphi'(0,7)$

=> $-0,670 \leq \varphi'(x) \leq -0,497$

Appliquons la valeur absolue à l'inégalité : $-0,670 \leq \varphi'(x) \leq -0,497$

=> $|-0,4970| \ \leq |\varphi'(x)| \leq |-0,67|$ ⇔$0,4970 \leq |\varphi'(x)| \leq 0,67$

=>$|\varphi'(x)| \leq 0,67$. Or $0,67 \approx 0,7$. D'où $|\varphi'(x)| \leq 0,7$

c) Montrons qu'on a pour tout $x \in I$ on a : $|\varphi(x) - \alpha| \leq 0,7|x - \alpha|$

Puisque $|\varphi'(x)| \leq 0,7$ alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $\varphi$ pour $x$ appartenant à I, on a : $|\varphi(x) - \varphi(\alpha)| \leq 0,7|x - \ \alpha|$

Or d'après Partie **B 2)** on a $\varphi(\alpha) = e^{-\alpha} = \alpha$. Alors $|\varphi(x) - \varphi(\alpha)| \leq 0,7|x - \ \alpha|$ ⇔

$|\varphi(x) - \alpha| \leq 0,7|x - \ \alpha|$ (Ce qu'il fallait Démontre)

2) a) Montrons que $\forall \ n \ \in \ \mathbb{N}$ ; on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,7|u_n - \ \alpha|$

On sait que : $|\varphi(x) - \alpha| \leq 0,7|x - \ \alpha|$ . Posons $x = u_n$

=> $|\varphi(u_n \ ) - \alpha| \leq 0,7|u_n - \ \alpha|$. Or $\varphi(u_n \ ) = u_{n+1}$

=>$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,7|u_n - \ \alpha|$ (Ce qu'il fallait Démontre)

En déduisons par récurrence que $\forall \ n \ \in \ \mathbb{N}$ ; on a : $|u_n - \alpha| \leq 0,3(0,7)^n$

On sait que $\alpha \in [\ 0,4 \ ; \ 0,7 \ ]$ ⇔ $0,4 \ \leq \alpha \leq 0,7$ et $u_0 = 0,4$

Il vient que $0,4 - 0,4 \ \leq \alpha - u_0 \leq 0,7 - 0,4$

⇔ $0 \ \leq u_0 - \alpha \ \leq 0,3$

⇔ $0 \ \leq |u_0 - \alpha| \ \leq 0,3$

⇔ $0 \ \leq |u_0 - \alpha| \ \leq 0,3(0,7)^0$

Alors la relation est vraie à l'ordre $n = 0$

Supposons la relation est vraie à l'ordre $n$ c'est-à-dire $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ; on a : $|u_n - \alpha| \leq 0{,}3(0{,}7)^n$ puis montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$ c'est-à-dire $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ; on a :
$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}3(0{,}7)^{n+1}$

D'après **Partie C 2) a),** on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}7|u_n - \alpha|$

Par suite $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}7|u_n - \alpha| \leq 0{,}7[0{,}3(0{,}7)^n]$

D'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}3(0{,}7)^{n+1}$

**Conclusion** : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ; on a : $|u_n - \alpha| \leq 0{,}3(0{,}7)^n$ (Ce qu'il fallait Démontre).

b) Etudions la convergence de la suite $u$ puis.

Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

La suite de terme général $0{,}3(0{,}7)^n$ est convergente $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et converge donc vers $0$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \alpha = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

D'où la suite $u_n$ est convergente et converge vers $\alpha$

3) Déterminons un entier $p$ tel que pour $n \geq p$ on ait: $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$puis donnons à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de $u_p$ à $10^{-3}$près.

On sait que $|u_n - \alpha| \leq 0{,}3(0{,}7)^n$ et d'autre part $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.

Par identification on a : $0{,}3(0{,}7)^n \leq 10^{-3} \Leftrightarrow (0{,}7)^n \leq \frac{10^{-3}}{0{,}3} \Leftrightarrow e^{nln0{,}7} \leq \frac{10^{-3}}{0{,}3}$

$\Leftrightarrow nln0{,}7 \leq ln\left(\frac{10^{-3}}{0{,}3}\right) \Rightarrow n \geq \frac{ln\left(\frac{10^{-3}}{0{,}3}\right)}{ln0{,}7}$ ( Car $ln0{,}7 < 0$ )

=> $n \geq 15{,}99$. On peut donc prendre $p = 16$

Ainsi à l'aide de la calculatrice, on obtient à $10^{-3}$près la valeur de $u_{16} \approx 0{,}567$

En déduisons une valeur approchée par défaut et par excès de $\alpha$ à $10^{-3}$près

- $0{,}567$ est la valeur approchée à $10^{-3}$près par défaut de $\alpha$.
- $0{,}568$ est la valeur approchée à $10^{-3}$près par excès de $\alpha$.

# Sujet 4 (TSE-STI)

## Exercice 1……………….………………………………………….($5\ points$)

I// Dans le plan muni d'un repère orthonormé ( $O,\vec{i}\ ,\vec{j}$) , on considère le polynôme $p(Z)$ telque : $p(Z)= Z^3 + 2(1 - 2cos2\theta)Z^2 + 4(1 - 2cos2\theta)Z + 8$

1) Calcule $p(-2)$.
2) Factorise $p(Z)$ puis Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z) = 0$.
3) On désigne par $Z_1$ ; $Z_2$ et $Z_3$ les solutions de l'équation $p(Z) = 0$. Calcule le module et un argument de $Z_1$ ; $Z_2$ et $Z_3$.

II// Montre que l'équation : $(x\ ;\ y)$ de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ : $6y - 3x = m$ admet des solutions si et seulement si $m$ est un multiple de 3.

1) Résous dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ les équations suivantes :
   a- $6y - 3x = 5$.
   b- $6y - 3x = 3$.
2) Déduis de ce qui précède les solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation : $(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = 1$.

## Exercice 2……………….………………………………………….($5\ points$)

I// Le plan P est muni d'un repère orthonormé( $O$ ; $\vec{\imath}$ ; $\vec{\jmath}$).

On considère les 4 points $A$ ; $B$ ; $C$ et $D$ tel que : $A\binom{0}{3}$ ; $B\binom{-1}{0}$ ; $C\binom{3}{0}$ et $D\binom{x}{y}$

1) Détermine les coordonnées $x$ et $y$ de $D$ sachant que : $\|\overrightarrow{DA}\| = \|\overrightarrow{DB}\| = \|\overrightarrow{DC}\|$

2) Détermine les réels $m$ et $n$ tels que $D$ soit barycentre des points $(A,1)$; $(B,m)$ ; $(C,n)$

3) Trouve l'ensemble (E) des points $M$ du plan tel que : $4\|\overrightarrow{MA}\|^2 + 3\|\overrightarrow{MB}\|^2 + 5\|\overrightarrow{MC}\|^2 = k$

4) Détermine le réel $k$ $(k > 60)$ tel que $A\binom{0}{3}$ soit élément de (E).

II// 1) Soit $(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$, une suite arithmétique de raison $r$ $(r \neq 0)$.
On définit la suite $(v_n)$, $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_n}$.
a- Montre que $(v_n)$, est une suite géométrique dont on Détermineras la raison et le premier terme $v_0$(on Exprimera $v_0$ en fonction de $u_0$ ).
b- Etudie suivant les valeurs de $r$ la convergence de la suite $v_n$

2) Soit $w_n n \in \mathbb{N}$, la suite définie par $w_n = \int_0^n \frac{1}{4}e^{-2x}dx$.
a- Calcule $w_n$ en fonction de $n$.
b- Montre que $w_n$ converge vers un nombre réel $l$ que l'on précisera.
c- On pose $S_n = w_1 + w_2 + \ldots\ldots\ldots + w_n - \frac{n}{8}$. Calcule $S_n$ en fonction de $n$ puis en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

## <u>Problème</u>..........................................................$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

### PARTIE A :

La fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donnée par une partie de son tableau de variation.
On sait de plus que la droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie pour la courbe C de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | \| | $-$ | \|\| | $-$ | |
| $f(x)$ | | | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | $\searrow$ | $3$ |

1) Trace la courbe $C$ de $f$
2) Complète le tableau de variation de $f$
3) On suppose que $f(x)$ est de la forme $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 + \beta x + \alpha}$

a- Détermine les réels $a$ ; $b$ ; $c$ ; $\beta$ $et$ $\alpha$

b- Montre que la restriction $g$ de $f$ à I = ] 2 ; 4 ] réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

c- Donne l'équation de la tangente à la courbe $C'$ de $g^{-1}$au point d'abscisse 1

d- Trace $C'$

e- Discute graphiquement suivant les valeurs du paramètre $m$, du nombre et des signes des solutions de $l'équation$ $(3 - m)x^2 - (12 - 4m)x + 8 = 0$

### PARTIE B :

Un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 à été piqué de telle sorte que les six faces ne sont pas équiprobables. On note $P_n$ la probabilité d'obtenir le chiffre $n$ lors d'un lancé de dé avec $n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
D'autre part les nombres $P_1$ ; $P_2$; $P_3$; $P_4$; $P_5$ et $P_6$ dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique et que $P_1 \times P_4 = (P_2)^2$.

1) Calcule la probabilité d'apparition de chaque numéro.
2) On lance ce dé une fois et on considère les évènements suivants :

$A$: ≪ Le nombre obtenu est pair ≫.
$B$: ≪ Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 ≫.

a- Calcule la probabilité de chacun des évènements $A$ et $B$.

b- Calcule la probabilité pour que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3 sachant qu'il est pair.

c- Les évènements $A$ et $B$ sont t-ils indépendants ?

# Correction Sujet 4 (TSE-STI)

**Exercice 1……………….……………………………………………($5\ points$)**

I// Dans le plan muni d'un repère orthonormé ( $O, \vec{i}, \vec{j}$) , on considère le polynôme P(Z) telque :
$P(Z) = Z^3 + 2(1 - 2cos2\theta)Z^2 + 4(1 - 2cos2\theta)Z + 8$

1) Calcule $P(-2)$.
$P(-2) = (-2)^3 + 2(1 - 2cos2\theta)(-2)^2 + 4(1 - 2cos2\theta)(-2) + 8$

$= -8 + 8(1 - 2cos2\theta) - 8(1 - 2cos2\theta) + 8 = 0$

=> $P(-2) = 0$

2) Factorisons $P(Z)$ puis résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $2 - 4cos2\theta$ | $4 - 8cos2\theta$ | 8 |
| $-2$ | | $-2$ | $8cos2\theta$ | $-8$ |
| | 1 | $-4cos2\theta$ | 4 | 0 |
| $\boldsymbol{Z_1}$ | $\boldsymbol{a}$ | $\boldsymbol{b}$ | $\boldsymbol{c}$ | |

$P(Z) = (Z - Z_1)(aZ^2 + bZ + c)$

=> $P(Z) = (Z + 2)(Z^2 - 4Zcos2\theta + 4)$

3) On désigne par $Z_1$ ; $Z_2$ et $Z_3$ les solutions de l'équation $P(Z) = 0$.
Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$.

$(Z + 2)(Z^2 - 4Zcos2\theta + 4) = 0$ => $Z + 2 = 0$ ou $Z^2 - 4Zcos2\theta + 4 = 0$

$Z + 2 = 0$ => $Z_1 = -2$

$Z^2 - 4Zcos2\theta + 4 = 0$ => $\Delta = (-4cos2\theta)^2 - 4(1)(4) = 16cos^2 2\theta - 16$

=> $\Delta = -16(1 - cos^2 2\theta)$. Or $cos^2 2\theta + sin^2 2\theta = 1$ => $sin^2 2\theta = 1 - cos^2 2\theta$

Donc $\Delta = -16sin^2 2\theta = 16i^2 sin^2 2\theta = (4isin2\theta)^2$

=> $Z_2 = \frac{4cos2\theta - \sqrt{(4isin2\theta)^2}}{2} = \frac{4cos2\theta - 4isin2\theta}{2} = 2cos2\theta - 2isin2\theta$

$Z_3 = \frac{4cos2\theta + \sqrt{(4isin2\theta)^2}}{2} = \frac{4cos2\theta + 4isin2\theta}{2} = 2cos2\theta + 2isin2\theta$

S= $\{-2\ ;\ 2cos2\theta - 2isin2\theta\ ;\ 2cos2\theta + 2isin2\theta\}$

Calculons le module et un argument de $Z_1$ ; $Z_2$ et $Z_3$.

**Pour $Z_1 = -2$**

$|Z_1| = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

$arg(Z_1)$ est tel que : $\begin{cases} cos\alpha = \frac{-2}{2} \\ et \\ sin\alpha = \frac{0}{2} \end{cases}$ <=> $\begin{cases} cos\alpha = -1 \\ et \\ sin\alpha = 0 \end{cases}$ => $\alpha = \pi$

D'où $|Z_1| = 2$ et $arg(Z_1) = \pi$

**Pour $Z_2 = 2cos2\theta - 2isin2\theta$**

$|Z_2| = \sqrt{(2cos2\theta)^2 + (-2sin2\theta)^2} = \sqrt{4(cos^2 2\theta + sin^2 2\theta)} = \sqrt{4} = 2$

$arg(Z_2)$ est tel que : $\begin{cases} cos\alpha = \frac{2cos2\theta}{2} \\ et \\ sin\alpha = \frac{-2sin2\theta}{2} \end{cases}$ <=> $\begin{cases} cos\alpha = cos2\theta \\ et \\ sin\alpha = -sin2\theta \end{cases}$ => $\alpha = -2\theta$

D'où $|Z_2| = 2$ et $arg(Z_2) = -2\theta$

**Pour $Z_3 = 2cos2\theta + 2isin2\theta$**

$|Z_3| = \sqrt{(2cos2\theta)^2 + (2sin2\theta)^2} = \sqrt{4(cos^2 2\theta + sin^2 2\theta)} = \sqrt{4} = 2$

$arg(Z_3)$ est tel que : $\begin{cases} cos\alpha = \frac{2cos2\theta}{2} \\ et \\ sin\alpha = \frac{2sin2\theta}{2} \end{cases}$ <=> $\begin{cases} cos\alpha = cos2\theta \\ et \\ sin\alpha = sin2\theta \end{cases}$ => $\alpha = 2\theta$

D'où $|Z_3| = 2$ et $arg(Z_3) = 2\theta$

4) On désigne par $A$ ; $B$ $et$ $C$ les points d'affixes respectives $Z_1$ ; $Z_2$ et $Z_3$.
Déterminons les valeurs de $\theta$ pour que le triangle $ABC$ soit équilatérale

Le triangle $ABC$ est équilatérale si et seulement si $\frac{Z_3-Z_1}{Z_2-Z_1} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\frac{Z_3-Z_1}{Z_2-Z_1} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \frac{(2cos2\theta + 2isin2\theta)-(-2)}{(2cos2\theta - 2isin2\theta)-(-2)} = cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{2cos2\theta + 2isin2\theta + 2}{2cos2\theta - 2isin2\theta + 2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{cos2\theta + isin2\theta + 1}{cos2\theta - isin2\theta + 1} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \frac{2cos2\theta + 2isin2\theta + 2}{cos2\theta - isin2\theta + 1} = 1 + i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2cos2\theta + \ 2isin2\theta + 2 = \left(1 + i\sqrt{3}\ \right)(cos2\theta - \ isin2\theta + 1)$

$\Leftrightarrow 2 + 2cos2\theta + \ 2isin2\theta = \left(1 + cos2\theta + \sqrt{3}sin2\theta\ \right) + i\left(\sqrt{3} + \sqrt{3}cos2\theta - \ sin2\theta\right)$

$$=> \begin{cases} 2 + 2cos2\theta = 1 + cos2\theta + \sqrt{3}sin2\theta \\ \\ 2sin2\theta = \sqrt{3} + \sqrt{3}cos2\theta - \ sin2\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cos2\theta - \sqrt{3}sin2\theta + 1 = 0 \\ \\ cos2\theta - \sqrt{3}sin2\theta + 1 = 0 \end{cases}$$

$$cos2\theta - \sqrt{3}sin2\theta + 1 = 0 \ \Leftrightarrow cos2\theta - \sqrt{3}sin2\theta = -1 \Leftrightarrow cos\frac{\pi}{3}cos2\theta - sin\frac{\pi}{3}sin2\theta = -\frac{1}{2}$$

$$cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\theta\right) = -cos\frac{\pi}{3} \ \Leftrightarrow cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\theta\right) = cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\theta\right) = cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \quad ou \\ \frac{\pi}{3} + 2\theta = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \quad ou \\ 2\theta = -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \quad ou \\ 2\theta = -\pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \quad ou \\ \theta = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} => \ \theta \in \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

II//1) Montre que l'équation : $(\ x\ ;\ \ y\ )$ de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$: $6y - 3x \ = \ m$ admet des solutions si et seulement si $m$ est un multiple de 3.

$6y - 3x \ = \ m$ <=> $3(2y - x\ ) = m$ <=>$2y - x = \frac{m}{3}$

Alors l'équation admet donc des solutions dans $\mathbb{Z}$ si 3 divise $m$ ou encore si $m$ est un multiple de 3.

2) Résolvons dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

a- $6y - 3x \ = \ 5$

Puisque 5 n'est pas un multiple de 3, alors l'équation : $6y - 3x \ = \ 5$ n'admet pas de solution.

Par conséquent $S \ = \emptyset$

b- $6y - 3x \ = \ 3$

Puisque 3 est un multiple de 3, alors l'équation : $6y - 3x \ = \ 3$ admet des solutions.

Résolution :

$6y - 3x \ = \ 3$ <=> $2y - x \ = \ 1$ <=> $x = 2y - 1$<=> $x \equiv -1[\ 2\ ]$ => $x = 2k - 1$

En remplaçant $x$ par sa valeur dans l'équation : $2y - x \ = \ 1$, on a : $y = k$

=> $S = \{(2k-1 \; ; \; k)\}$

3) Déduisons de ce qui précède les solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation :

$(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = 1.$

Résous l'équation ( $6y - 3x - 4$ )( $6y - 3x + 4$ ) = 1, revient à Résous les systèmes suivants :

$\begin{cases} 6y - 3x - 4 = 1 \\ 6y - 3x + 4 = 1 \end{cases}$ ( S₁ ) ou $\begin{cases} 6y - 3x - 4 = -1 \\ 6y - 3x + 4 = -1 \end{cases}$ ( S₂ )

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6y - 3x = 5 \\ 6y - 3x = -3 \end{cases}$ ( $S_1$ ) ou $\begin{cases} 6y - 3x = 3 \\ 6y - 3x = -5 \end{cases}$ ( $S_2$ )

D'après les questions précédents, 5 et − 5 ne sont pas des multiples de 3.

Par conséquent aucun des deux systèmes n'admet de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

D'où l'équation : ( $6y - 3x - 4$ )( $6y - 3x + 4$ ) = 1 n'admet pas de solution
$=> S = \emptyset$ .

**<u>Exercice 2</u>..............................................................$(\mathbf{5}\ \boldsymbol{points})$**

I// Le plan P est muni d'un repère orthonormé$(O \; ; \; \vec{i} \; ; \; \vec{j})$.

On considère les 4 points $A$ ; $B$ ; $C$ et $D$ tel que : $A\binom{0}{3}$ ; $B\binom{-1}{0}$ ; $C\binom{3}{0}$ et $D\binom{x}{y}$

1) Déterminons les coordonnées $x$ et $y$ de $D$ sachant que : $\|\overrightarrow{DA}\| = \|\overrightarrow{DB}\| = \|\overrightarrow{DC}\|$

De même $\left(\|\overrightarrow{DA}\|\right)^2 = (x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2 = (0 - x)^2 + (3 - y)^2 = x^2 + (3 - y)^2$

$\left(\|\overrightarrow{DB}\|\right)^2 = (x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2 = (-1 - x)^2 + (0 - y)^2 = (1 + x)^2 + y^2$

$\left(\|\overrightarrow{DC}\|\right)^2 = (x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 = (3 - x)^2 + (0 - y)^2 = (3 - x)^2 + y^2$

Alors $\|\overrightarrow{DA}\| = \|\overrightarrow{DB}\| \Leftrightarrow \left(\|\overrightarrow{DA}\|\right)^2 = \left(\|\overrightarrow{DB}\|\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + (3 - y)^2 = (1 + x)^2 + y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 9 - 6y + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 \Leftrightarrow 2x + 1 - 9 + 6y = 0 \Leftrightarrow 2x + 6y - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x + 3y - 4 = 0$ **(1)**

De même $\|\overrightarrow{DB}\| = \|\overrightarrow{DC}\| \Leftrightarrow \left(\|\overrightarrow{DB}\|\right)^2 = \left(\|\overrightarrow{DC}\|\right)^2 \Leftrightarrow x = 1$ **(2)**

Ainsi des équations **(1) et (2),** on en déduit que $y = 1$

D'où $D\binom{1}{1}$

2) Déterminons les réels $m$ et $n$ tels que $D$ soit barycentre des points $(A,1)$; $(B,m)$ ; $(C,n)$

Si $D$ est le barycentre des points $(A,1)$; $(B,m)$ ; $(C,n)$; alors les coordonnées de $D$ sont telles que :

$$\begin{cases} x_D = \dfrac{\alpha_1 x_A + \alpha_2 x_B + \alpha_3 x_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ et \\ y_D = \dfrac{\alpha_1 y_A + \alpha_2 y_B + \alpha_3 y_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{(1)(0) + (m)(-1) + (n)(3)}{1 + m + n} = \dfrac{-m + 3n}{m + n + 1} \\ et \\ 1 = \dfrac{(1)(3) + (m)(0) + (n)(0)}{1 + m + n} = \dfrac{3}{m + n + 1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{-m + 3n}{m + n + 1} = 1 \\ \dfrac{3}{m + n + 1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 3n = m + n + 1 \\ 3 = m + n + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m + 2n = 1 \\ m + n = 2 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $m = \frac{3}{4}$ et $n = \frac{5}{4}$

=> $D = \text{bary}\left\{(A,1); \left(B, \frac{3}{4}\right); \left(C, \frac{5}{4}\right)\right\}$

**<u>NB :</u>** Le barycentre d'un système ne change pas en multipliant ou en divisant chaque coefficient de pondération par une même constante non nulle.

D'où $D = \text{bary}\left\{(A,1); \left(B, \frac{3}{4}\right); \left(C, \frac{5}{4}\right)\right\}$ ou $D = \text{bary}\ \{(A,4); (B,3) ; (C,5)\}$

3) Trouvons l'ensemble (E) tel que : $4\|\overrightarrow{MA}\|^2 + 3\|\overrightarrow{MB}\|^2 + 5\|\overrightarrow{MC}\|^2 = k$

$4\|\overrightarrow{MA}\|^2 + 3\|\overrightarrow{MB}\|^2 + 5\|\overrightarrow{MC}\|^2 = k \Leftrightarrow 4MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2 = k$

Posons $f(M) = 4MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2$

(Les points de pondérations sont égaux à celui du barycentre $D$).

Alors on a : $f(M) = \sum \alpha_i\, MD^2 + f(D)$

Or $\sum \alpha_i\, MD^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MD^2 = (4 + 3 + 5)MG^2 = 12MD^2$

Et $f(D) = \dfrac{(\alpha_1\,\alpha_2)AB^2 + (\alpha_1\,\alpha_3)AC^2 + (\alpha_2\,\alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \dfrac{12AB^2 + 20AC^2 + 15BC^2}{12}$

Avec $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (-1 - 0)^2 + (0 - 3)^2 = 10$

$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (3 - 0)^2 + (0 - 3)^2 = 18$

$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (3 + 1)^2 + (0 - 0)^2 = 16$

$A\binom{0}{3}$ ; $B\binom{-1}{0}$ ; $C\binom{3}{0}$ et $D\binom{x}{y}$

=> $f(D) = \frac{12\times10 + 20\times18 + 15\times16}{12}$ =60

Alors $f(M) = k \Leftrightarrow 12MD^2 + f(D) = k \Leftrightarrow 4MD^2 + 60 = k \Leftrightarrow MD^2 = \frac{k-60}{4}$

=> $MD = \sqrt{\frac{k-60}{4}} = \frac{\sqrt{k-60}}{2}$

- Si $k < 60$; alors l'ensemble (E) des points M cherchés est vide.
- Si $k = 60$; alors $MG = 0$. Ainsi l'ensemble (E) des points M cherchés est le point $D$.
- Si $k > 60$; alors l'ensemble (E) des points M cherchés est le cercle de centre $D\binom{1}{1}$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{k-60}}{2}$

4) Déterminons le réel $k$ $(k > 60)$tel que $A\binom{0}{3}$ soit élément de (E).

Pour $k > 60$ , on a : le cercle de centre $D\binom{1}{1}$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{k-60}}{2}$

Alors le point $A\binom{0}{3}$ est élément du ce cercle si et seulement si : $d(A\,;D) = r$, c'est-à-dire que le point $A$ appartient au cercle (E) si la distance du centre $D$ au point $A$ vaut le rayon $r$.

Donc $d(A\,;D) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \frac{\sqrt{k-60}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \frac{\sqrt{k-60}}{2} \Leftrightarrow$

$2\sqrt{5} = \sqrt{k-60} \Leftrightarrow \left(2\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{k-60}\right)^2 \Leftrightarrow 20 = k - 60 \Rightarrow k = 80$

II// 1) Soit $(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de raison $r$ $(r \neq 0)$.

On définit la suite $(v_n)$, $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_n}$.

a- Montrons que $(v_n)$, est une suite géométrique dont on Déterminera la raison et le premier terme $v_0$( on Exprimera $v_0$ en fonction de $u_0$ ).

On a : $v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_n}$.

Alors $(v_n)$, est une suite géométrique si et seulement si : $v_{n+1} = qv_n$ ou $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$

$v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_n}$ => $v_{n+1} = \frac{1}{4}e^{-2U_{n+1}}$.

Alors on a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{4}e^{-2U_{n+1}}}{\frac{1}{4}e^{-2U_n}} = \frac{e^{-2U_{n+1}}}{e^{-2U_n}} = e^{-2U_{n+1}} \times e^{2U_n} = e^{-2U_{n+1}+2U_n}$

$=> \frac{v_{n+1}}{v_n} = e^{-2(U_{n+1} - U_n)}$

Or d'après l'hypothèse, $u_n$ est une suite arithmétique de raison$r$, par conséquent on a :
$U_{n+1} - U_n = r$ . D'où $\frac{v_{n+1}}{v_n} = e^{-2(U_{n+1} - U_n)} = e^{-2r}$
Alors $(v_n)$, est une suite géométrique de raison $q = e^{-2r}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{4}e^{-2U_0}$.

b- Etudions suivant les valeurs de $r$ la convergence de la suite $v_n$

Pour cela, exprimons $v_n$ en fonction de $n$.
L'expression des $n$ premiers d'une suite géométrique de 1er terme $v_0$ et de raison $q$ est:

$v_n = v_0(q)^n \Leftrightarrow v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_0}(e^{-2r})^n = \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times e^{-2nr} => v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times e^{-2nr}$

Ainsi pour étudier la convergence suivant les valeurs de $r$ , on cacule la limite de $v_n$ en $+\infty$.

- Pour $r > 0$; on a :

$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times e^{-2nr} = \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times (0) = 0$

- Pour $r < 0$; on a :

$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times e^{-2nr} = \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times (+\infty) = 0$

- Pour $r = 0$; on a :

$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times e^{-2nr} = \frac{1}{4}e^{-2U_0}$

2) Soit $w_n$ $n \in \mathbb{N}$, la suite définie par $w_n = \int_0^n \frac{1}{4}e^{-2x}dx$.
a- Calculons $w_n$ en fonction de $n$.

$w_n = \int_0^n \frac{1}{4}e^{-2x}dx = \frac{1}{4}\int_0^n e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{8}\int_0^n -2e^{-2x}\,dx$

$=> w_n = \left[-\frac{1}{8}e^{-2x}\right]_0^n = -\frac{1}{8}e^{-2n} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-2n} = \frac{1}{8}(1 - e^{-2n})$

D'où $w_n = \frac{1}{8}(1 - e^{-2n})$
b- Montrons que $w_n$ converge vers un nombre réel $l$ que l'on précisera.

Pour cela, on calcule la limite de $w_n$ en $+\infty$.
$\lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{8}(1 - e^{-2n}) = \frac{1}{8}(1 - 0) = \frac{1}{8}$

D'où $w_n$ converge vers le réel $l = \frac{1}{8}$.

c- On pose $S_n = w_1 + w_2 + \ldots\ldots\ldots + w_n - \frac{n}{8}$.

Calculons $S_n$ en fonction de $n$ puis en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Posons $S'_n = w_1 + w_2 + \ldots\ldots\ldots + w_n$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} S'_n - \frac{n}{8}.$$

Ainsi exprimons $S'_n$ en fonction de $n$.

On sait que : $w_n = \frac{1}{8}(1 - e^{-2n}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-2n}$

$\Rightarrow w_1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-2}$

$w_2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-4}$

$w_3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-6}$

. .

. .

. .

$w_n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-2n}$

En effectuant membre à membre la somme des termes de l'égalité ci-dessus, on a :

$w_1 + w_2 + \ldots\ldots\ldots + w_n = n \times \frac{1}{8} - n\frac{1}{8}e^{-2n} \Leftrightarrow S'_n = \frac{n}{8} - \frac{n}{8}e^{-2n}$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} S'_n - \frac{n}{8} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{8} - \frac{n}{8}e^{-2n}\right) - \frac{n}{8} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{8} - \frac{n}{8}e^{-2n} - \frac{n}{8}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} -\frac{n}{8}e^{-2n} = \lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{8} \times \frac{n}{e^{2n}} = -\frac{1}{8} \times (0) = 0$$

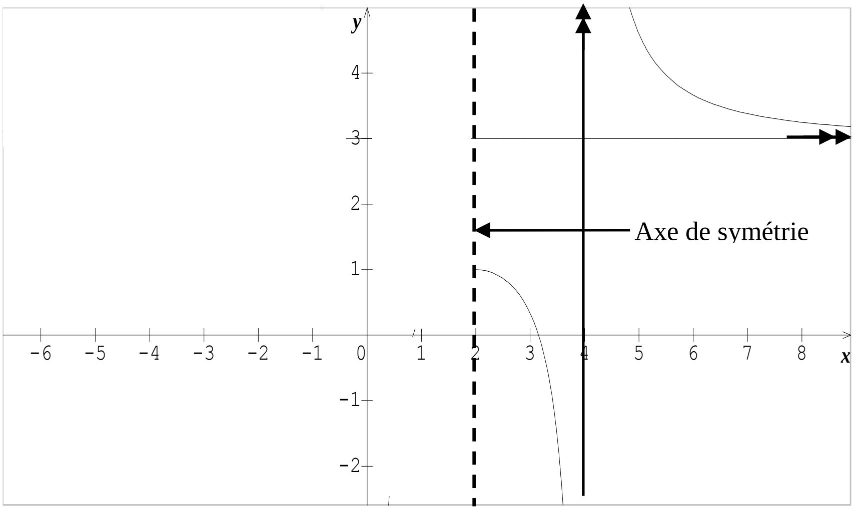
## **<u>Problème</u>**……………………………………………………………$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

**<u>Partie A</u>** :

1) Traçons la courbe C de $f$.

- La droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie.
- La droite d'équation $x = 4$ est asymptote verticale.
- La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale.
- Le point $(2\,;1)$ est extremum locale de la courbe (C) de $f$.

De ces renseignements nous obtenons une partie de la courbe qui est le suivant :




2) Complétons le tableau de variation de $f$ .

Par symétrie par rapport à la droite d’équation $x = 2$ , on a :

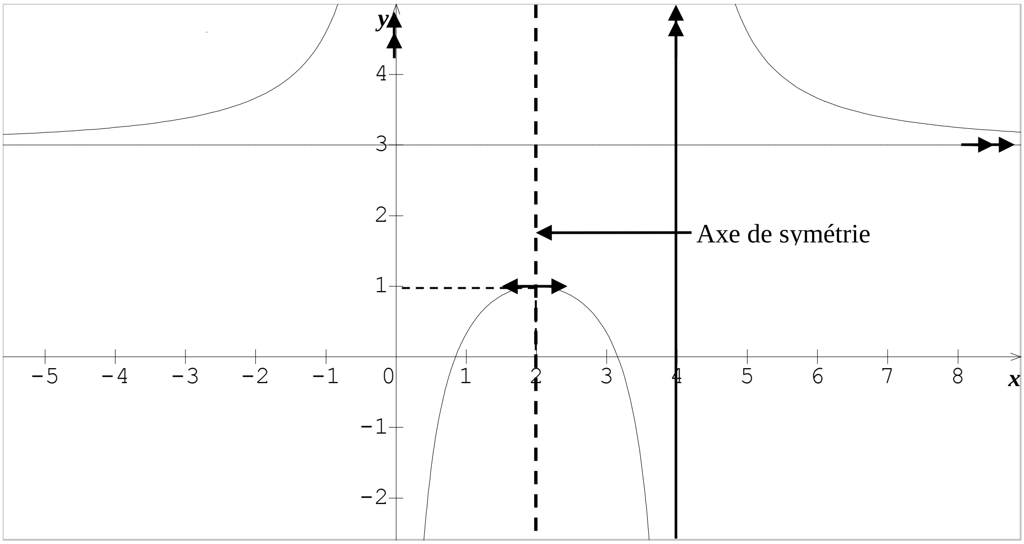
- La droite d'équation $x = 0$ est aussi asymptote verticale.
- La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale.

D’où le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}-\{0\,;4\}$ est le suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | $3$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $3$ |

1) Traçons la courbe (C) de $f$.

En utilisant le tableau de variation ci-dessus, la courbe représentative de $f$ est donc le suivant :




3) On suppose que $f(x)$ est de la forme $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + \beta x + \alpha}$

a- Déterminons les réels $a$ ; $b$ ; $c$ ; $\beta$ et $\alpha$

- D$f = \mathbb{R} - \{0 ; 4\}$ => $x^2 + \beta x + \alpha = (x - 0)(x - 4) \Leftrightarrow x^2 + \beta x + \alpha = x^2 - 4x$

Par identification, on obtient : $\beta = -4$ et $\alpha = 0$

=> $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4x}$ et $f'(x) = \frac{-x^2(4a+b) - 2cx + 4c}{(x^2 - 4x)^2}$

- La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale => $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 3 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4x} = 3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{ax^2}{x^2} = 3$ => $a = 3$

=> $f(x) = \frac{3x^2 + bx + c}{x^2 - 4x}$ et $f'(x) = \frac{-x^2(12+b) - 2cx + 4c}{(x^2 - 4x)^2}$

D'après le tableau de variation, le point $(2 ; 1)$ est extremum alors $f'(2) = 0$ et $f(2) = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(2) = 0 \\ f(2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 + b = 0 \\ 2b + c = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -12 \\ -24 + c = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -12 \\ c = 8 \end{cases}$

D'où $a = 3$ ; $b = -12$ ; $c = 8$ ; $\beta = -4$ et $\alpha = 0$ et $f(x) = \frac{3x^2 - 12x + 8}{x^2 - 4x}$

b- Montrons que la restriction $g$ de $f$ à I = ] 2 ; 4 ] réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

D'après le tableau de variation ;$\forall x \in$ ] 2 ; 4 ], $f$ est définie, continue et strictement décroissante ] 2 ; 4 ] vers J = ]$-\infty$ ; 1 ].

D'où la restriction $g$ de $f$ réalise une bijection de ] 2 ; 4 ] sur l'intervalle J= ]$-\infty$ ; 1 ].

c- Donnons l'équation de la tangente à la courbe C′ de $g^{-1}$ au point d'abscisse 1.

$y = [g^{-1}(x_0)]'(x - x_0) + g^{-1}(x_0)$. Or $x_0 = 1$ => $= [g^{-1}(1)]'(x-1) + g^{-1}(1)$.

$[g^{-1}(1)]' = \frac{1}{g' o g^{-1}(1)} = \frac{1}{g'[g^{-1}(1)]}$ avec $g^{-1}(x) = \frac{-6 + 2x + 2\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x - 3}$

=> $[g^{-1}(1)]' = \frac{1}{g'(2)} = \frac{1}{2}$ et $g^{-1}(1) = 2$=> $y = \frac{1}{2}(x-1) + 2$ => $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

d- Traçons C′

**<u>NB</u> :** La courbe représentative d'une fonction et celle de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

Pour le tracé de C′, (Voir figure).

e- Discutons graphiquement suivant les valeurs du paramètre $m$, du nombre et des signes des solutions de $l'équation$ $(3-m)x^2 - (12 - 4m)x + 8 = 0$

Pour cela, exprimons $m$ en fonction de $x$ :

$(3-m)x^2 - (12 - 4m)x + 8 = 0$ => $m = \frac{3x^2 - 12x + 8}{x^2 - 4x} = f(x)$

En faisant glisser une règle du bas vers le haut tout le long du graphique, on remarque :

- $\forall\, m \in ]-\infty\, ;\, 1[ \cup ]3\, ;\, +\infty[$ , la règle coupe deux fois la courbe et par conséquent l'équation $x^2 + 2(1 - m)x + 4 = 0$ admet deux solutions distinctes $x_1$ et $x_1$ .

$\forall\, m \in ]1\, ;\, 3[$, la règle ne coupe pas la courbe et par conséquent l'équation $x^2 + 2(1 - m)x + 4 = 0$ n'admet pas de solution.

**<u>Partie B</u>** :

Un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 à été piqué de telle sorte que les six faces ne sont pas équiprobables. On note $P_n$ la probabilité d'obtenir le chiffre $n$ lors d'un lancé de dé avec $n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

D'autre part les nombres $P_1$ ; $P_2$; $P_3$; $P_4$; $P_5$ et $P_6$ dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique et que $P_1 \times P_4 = (P_2)^2$.

1) Calculons la probabilité d'apparition de chaque numéro.

Soit $r$ la raison de cette suite telle que :

$P_2 = P_1 + r$

$P_3 = P_2 + r = P_1 + r + r = P_1 + 2r$

$P_4 = P_3 + r = P_1 + 2r + r = P_1 + 3r$

$P_5 = P_4 + r = P_1 + 3r + r = P_1 + 4r$

$P_6 = P_5 + r = P_1 + 4r + r = P_1 + 5r$

On sait que : $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$ (Car$\sum P_i = 1$) $(\mathbf{1})$

D'autre part : $P_1 \times P_4 = (P_2)^2$. $(\mathbf{2})$

- La relation $(\mathbf{1})$ donne :

$P_1 + (P_1 + r) + (P_1 + 2r) + (P_1 + 3r) + (P_1 + 4r) + (P_1 + 5r) = 1 \Leftrightarrow 6P_1 + 15\text{r} = 1$ $(\mathbf{1})$

- La relation $(\mathbf{2})$ donne :

$P_1 \times (P_1 + 3r) = (P_1 + r)^2 \Leftrightarrow P_1^2 + 3r\, P_1 = P_1^2 + 2r\, P_1 + r^2 \Leftrightarrow r^2 - r\, P_1 = 0 \Leftrightarrow$

$r(r - P_1) = 0 \Rightarrow r = 0\ (impossible)$ ou $r = P_1$

D'où le système $\begin{cases} r = P_1 \\ 6P_1 + 15r = 1 \end{cases}$

De ce système on a : $6P_1 + 15\,P_1 = 1 \Leftrightarrow 21P_1 = 1 \Rightarrow P_1 = \frac{1}{21}$

$P_2 = P_1 + r = P_1 + P_1 = 2P_1 = 2 \times \frac{1}{21} = \frac{2}{21}$

$P_3 = P_2 + r = 2P_1 + P_1 = 3P_1 = 3 \times \frac{1}{21} = \frac{3}{21}$

$P_4 = 4P_1 = 4 \times \frac{1}{21} = \frac{4}{21}$

$P_5 = 5P_1 = 5 \times \frac{1}{21} = \frac{5}{21}$

$P_6 = 6P_1 = 6 \times \frac{1}{21} = \frac{6}{21}$

D'où le tableau de la loi de probabilité est le suivant :

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_n$ | $\frac{1}{21}$ | $\frac{2}{21}$ | $\frac{3}{21}$ | $\frac{4}{21}$ | $\frac{5}{21}$ | $\frac{6}{21}$ |

2) On lance ce dé une fois et on considère les évènements suivants :
$A$: ≪ Le nombre obtenu est pair ≫.

$B$: ≪ Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 ≫.

a- Calculons la probabilité de chacun des évènements $A$ et $B$.

$P(A) = P_2 + P_4 + P_6 = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

$P(B) = P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = \frac{3}{21} + \frac{4}{21} + \frac{5}{21} + \frac{6}{21} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$

b- Calculons la probabilité pour que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3 sachant qu'il est pair.

$P(B/A) = P_4 + P_6 = \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{10}{21}$

c- Vérifions si les évènements $A$ et $B$ sont indépendants

Les évènements $A$ et $B$ sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) \neq P(B/A) \times P(A)$

On sait que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{4}{7} \times \frac{6}{7} = \frac{24}{49}$ et $P(B/A) \times P(A) = \frac{10}{21} \times \frac{4}{7} = \frac{40}{147}$

Puisque $P(A \cap B) \neq P(B/A) \times P(A)$. Alors les évènements $A$ et $B$ sont indépendants

# Sujet 5 (TSE-STI)

## Exercice 1……………………..……………………………………………$(5\ \boldsymbol{points})$

I// On considère l'ensemble des complexes $Z_n$ tels que : $\forall\ n\ \in\ \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \frac{1+\ i}{2} Z_n \end{cases}$$

1) On note $M_n$ le point d'affixe $Z_n$dans le plan rapporté au repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

   a- Calcule $Z_1$ ; $Z_2$; $Z_3$et $Z_4$.
   b- Placer les points $M_1$ , $M_2$ , $M_3$ , $M_4$ et $M_5$.

2) Calcule le quotient : $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}}$ puis en déduis la nature du triangle $OM_{n+1}M_n$

II// Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à l'instant $t$, exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction numérique $N$ à variable réelle $t$. La vitesse de prolifération à l'instant $t$ du nombre de microbes est la dérivée $N'$ de cette fonction. On a constaté que : $N'(t)\ = -kN(t)$ où $k$ est un coefficient réel strictement positif. On désigne par $N_0$ le nombre de microbes à l'instant $t\ =\ 0$

**1**°/ Détermine $N(t)$ en fonction de $N_0$ , $k$ et $t$.

**2**°/ Détermine le nombre de microbes au bout de 1 heures si $N_0 = 1000$ et $k = 1$.

**3**°/ Soit T la période de reproduction du nombre de microbes, c'est-à-dire le temps au bout duquel le nombre de microbes a été divisé par 2. Montre que $e^{kT} = 2$.

**4**°/ Détermine la période de reproduction T sachant que $k = 6{,}66 \bullet 10^{-5}$.

## Exercice 2……………………..……………………………………………$(5\ \boldsymbol{points})$

I// Soit l'intégrale $I_n$ définie par : $I_n = \int_{-1}^{1}(t^2 - 1)^n dt$ ( $n\ \in \mathbb{N}$ )

1) Démontre que $I_n = 2\int_0^1 (t^2 - 1)^n dt$ puis calcule $I_0$

2) Démontre que $I_n = -\frac{2n}{1+\ 2n} I_{n-1}$

II// Le plan $P$ est rapporté à un repère orthonormé$(\ O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives $a = 1\ +\ i$ et $b\ = -\ 4 - i$
Soit T la transformation du plan $P$ qui à tout point M d'affixe $z$ associe le point $M'$d'affixe $z'$ tel que $\overrightarrow{OM'} =\ 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$.
1) Exprime $z'$ en fonction de $z$.

2) Montre que T admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduis que T est une homothétie dont on Précisera le centre et le rapport.

## Problème..........................................................($\mathbf{10}$ $\boldsymbol{points}$)

**Partie A** : Résolution de l'équation différentielle $(\boldsymbol{E_1})$ : $y' - 2y = xe^x$

1) Résous l'équation différentielle $(\boldsymbol{E_2})$ : $y' - 2y = 0$ où $y$ désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Soient $a$ et $b$ deux réels et soit $u$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$.

   a) Détermine $a$ et $b$ pour que $u$ soit solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$.

   b) Montre qu'une fonction $v$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$si et seulement si $u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$.

   c) En déduis l'ensemble des solutions de $(\boldsymbol{E_1})$.

3) Détermine la solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ qui s'annule en 0.

**Partie B** : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1) Détermine la limite de $g$ en $-\infty$ et la limite de $g$ en $+\infty$.

2) Etudie le sens de variation de $g$, puis Dresse son tableau de variation.

3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

a) Vérifie que 0 est l'une de ces solutions.

b) L'autre solution est appelée α. Montre que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.

4) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel $x$.

**Partie C** : Etude de la fonction principale

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)\, e^x$

1) Détermine la limite de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$. (On pourra mettre $e^{2x}$ en facteur).

2) Calcule $f\,'(x)$ et Montre que $f\,'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Etudie le sens de variation de $f$.

3) Montre que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α est défini dans la **partie B**. En déduis un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$).

4) Etablie le tableau de variation de $f$.

5) Trace la courbe (C), représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal

(Unité graphique 2 cm).

**Partie D** : Calcul d'aire

1) Soit $m$ un réel négatif, interpréter graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x)dx$
2) a) Calcule $\int_m^0 xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

b) En déduis $\int_m^0 f(x)dx$

3) Calcule la limite de $\int_m^0 f(x)dx$, lorsque $m$ tend vers $-\infty$.

# Correction Sujet 5 (TSE-STI)

## Exercice 1………………..…………………………………………(5 points)

I// On considère l'ensemble des complexes $Z_n$ tels que : $\forall\, n \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \frac{1+i}{2} Z_n \end{cases}$$

1) On note $M_n$ le point d'affixe $Z_n$ dans le plan rapporté au repère $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$

Calculons $Z_1$ ; $Z_2$; $Z_3$ et $Z_4$.

$Z_1 = \frac{1+i}{2} Z_0$ => $Z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$ ; $Z_2 = \frac{1+i}{2} Z_1$ => $Z_2 = \frac{1}{2} i$

$Z_3 = \frac{1+i}{2} Z_2$ => $Z_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} i$ ; $Z_4 = \frac{1+i}{2} Z_3$ => $Z_4 = -\frac{1}{4}$

2) Calcule le quotient : $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}}$ puis en déduis la nature du triangle $OM_{n+1}M_n$

On sait que $Z_{n+1} = \frac{1+i}{2} Z_n$ => $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}} = \frac{\left(\frac{1+i}{2} Z_n\right) - Z_n}{\frac{1+i}{2} Z_n}$ ( car $Z_{n+1} = \frac{1+i}{2} Z_n$ )

=> $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}} = \frac{Z_n\left(\frac{1+i}{2} - 1\right)}{Z_n\left(\frac{1+i}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{1+i}{2} - 1\right)}{\left(\frac{1+i}{2}\right)} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{(1)^2 + (1)^2} = \frac{-1+i+i+1}{2}$

$= \frac{2i}{2} = i$ => $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}}$ est un imaginaire pur. Alors $OM_{n+1}M_n$ est un triangle rectangle en O.

II//Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à l'instant $t$, exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction numérique $N$ à variable réelle $t$. La vitesse de prolifération à l'instant $t$ du nombre de microbes est la dérivée $N'$ de cette fonction. On a constaté que : $N'(t) = -kN(t)$ où $k$ est un coefficient réel strictement positif. On désigne par $N_0$ le nombre de microbes à l'instant $t = 0$

**1**°/ Déterminons $N(t)$ en fonction de $N_0$ , $k$ et $t$.

$N'(t) = -kN(t)$ => $N(t) = Ce^{-kt}$.

D'autre part, $N(0) = Ce^0 = C = N_0$.

D'où $N(t) = N_0 e^{-kt}$.

**2**°/ Déterminons le nombre de microbes au bout de 1 heures si $N_0 = 1000$ et $k = 1$.

$N(1) = 1000e^{-1} \approx 368$

Alors le nombre de microbes au bout de 1 heures est de 368 individus.

**3**°/ Soit T la période de reproduction du nombre de microbes, c'est-à-dire le temps au bout duquel le nombre d'atome a été divisé par 2. Montrons que $e^{kT} = 2$.

Si, après un temps T, le nombre de microbes a été divisé par 2, on peut écrire $N(t) = \frac{N_0}{2}$.

On a donc : $N(t) = N_0 e^{-kT} = \frac{N_0}{2} \Leftrightarrow e^{-kT} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{kT}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{kT} = 2$.

**4**°/ Déterminons la période de reproduction T sachant que $k = 6{,}66 \bullet 10^{-5}$.

$e^{kT} = 2 \Leftrightarrow kT = ln2 \quad => T = \frac{ln2}{k}$

Si $k = 6{,}66 \bullet 10^{-5}$, on obtient $T \approx 10407{,}6$ heures.

**<u>Exercice 2</u>..........................................................($\boldsymbol{5\ points}$)**

I// Soit l'intégrale $I_n$ définie par : $I_n = \int_{-1}^{1}(t^2-1)^n dt \ \ (n \in \mathbb{N})$

1) Démontrons que $I_n = 2\int_0^1 (t^2-1)^n dt$ puis calculons $I_0$

Appliquons la relation de Chasles entre $-1$ et $1$.

$=> I_n = \int_{-1}^{1}(t^2-1)^n dt = \int_{-1}^{0}(t^2-1)^n dt + \int_0^1 (t^2-1)^n dt$

Ainsi posons $A = \int_{-1}^{0}(t^2-1)^n dt$ puis Effectuons un changement de variable.

Posons $t = -X$ => $X = -t$ . Alors $dt = -dX$

Si $t = -1$ alors $X = 1$ et Si $t = 0$ alors $X = 0$

$=> A = \int_{-1}^{0}(t^2-1)^n dt = -\int_{-1}^{0}(t^2-1)^n dt = \int_0^1 (t^2-1)^n dt$

D'où $I_n = \int_0^1 (t^2-1)^n dt + \int_0^1 (t^2-1)^n dt = 2\int_0^1 (t^2-1)^n dt$

$=> I_n = 2\int_0^1 (t^2-1)^n dt$ (ce qu'il fallait Démontre)

En déduisons la valeur de $I_0$

$I_n = 2\int_0^1 (t^2-1)^n dt \ => I_0 = 2\int_0^1 (t^2-1)^0 dt = 2\int_0^1 1dt = [2t]_0^1 = 2$.

$=> I_0 = 2$

2) Démontrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; on a : $I_n = -\frac{2n}{1+2n} I_{n-1}$

On sait que $I_n = 2\int_0^1 (t^2-1)^n dt \ => I_{n-1} = 2\int_0^1 (t^2-1)^{n-1} dt$

$I_n = 2\int_0^1 (t^2-1)^n dt = 2\int_0^1 (t^2-1)^{n-1+1} = 2\int_0^1 (t^2-1)^{n-1} \times (t^2-1)dt$

$= 2\int_0^1 t^2(t^2-1)^{n-1}\,dt - 2\int_0^1 (t^2-1)^{n-1}\,dt$

$= 2\int_0^1 t\times t(t^2-1)^{n-1}\,dt - 2\int_0^1 (t^2-1)^{n-1}\,dt$

$= \int_0^1 t\times 2t(t^2-1)^{n-1}\,dt - 2\int_0^1 (t^2-1)^{n-1}\,dt = \int_0^1 t\times 2t(t^2-1)^{n-1}\,dt - I_{n-1}$

=> $I_n = \int_0^1 t\times 2t(t^2-1)^{n-1}\,dt - I_{n-1}$

Intégrons par partie l'intégrale $\int_0^1 t\times 2t(t^2-1)^{n-1}\,dt$

Posons $u(t) = t$ => $u'(t) = 1$

$v'(t) = 2t(t^2-1)^{n-1}$ => $v(t) = \frac{(t^2-1)^n}{n}$

=> $\int_0^1 t\times 2t(t^2-1)^{n-1}\,dt = \left[\frac{t\times(t^2-1)^n}{n}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(t^2-1)^n}{n}dx$. Or $\left[\frac{t\times(t^2-1)^n}{n}\right]_0^1 = 0$

=> $\int_0^1 t\times 2t(t^2-1)^{n-1}\,dt = -\frac{1}{2n}\int_0^1 2(t^2-1)^n dx = -\frac{1}{2n}I_n$

D'où $I_n = \int_0^1 t\times 2t(t^2-1)^{n-1}\,dt - I_{n-1} = -\frac{1}{2n}I_n - I_{n-1}$

=> $I_n = -\frac{1}{2n}I_n - I_{n-1} \Leftrightarrow I_n + \frac{1}{2n}I_n = -I_{n-1} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{2n}\right)I_n = -I_{n-1} \Leftrightarrow$

$\left(\frac{2n+1}{2n}\right)I_n = -I_{n-1}$ => $I_n = -\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$

D'où $I_n = -\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$ (ce qu'il fallait Démontre)

II//Le plan $P$ est rapporté à un repère orthonormé$(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.
Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives $a = 1 + i$ et $b = -4 - i$
Soit T la transformation du plan $P$ qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$.
1) Exprimons $z'$ en fonction de $z$.

On a : $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$

$\Leftrightarrow \quad Z_{M'} - Z_0 = 2(Z_M - Z_A) + Z_M - Z_B$

$\Leftrightarrow \quad Z_{M'} - Z_0 = 2Z_M - 2Z_A + Z_M - Z_B$

$\Leftrightarrow\ Z' - 0 = 2Z - 2(1 + i) + Z - (-4 - i)$

$\Leftrightarrow\ Z' = 3Z - 2(1 + i) - (-4 - i)$

$\Leftrightarrow\ Z' = 3Z - 2 - 2i + 4 + i$

$\Leftrightarrow\ Z' = 3Z + 2 - i$

2) Montrons que T admet un seul point invariant **Ω** dont on donnera l'affixe.

T admet un seul point invariant si et seulement si $Z' = Z$.

$Z' = Z \Leftrightarrow Z = 3Z + 2 - i \Leftrightarrow -2Z = 2 - i \Leftrightarrow Z = -1 + \frac{1}{2}i$.

D'où $\Omega\left(-1\,;\,\frac{1}{2}\right)$ est le point invariant.

En déduisons que T est une homothétie dont on Précisera le centre et le rapport.

**NB :**

Si $Z' = aZ + b$ avec $a \in \mathbb{R}^* - \{-1\,;1\}$, alors on a : une homothétie de rapport $k = |a|$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.

On a : $Z' = 3Z + 2 - i$ . Avec $a = 3$ et $b = 2 - i$

Ici $a = 3 \in \mathbb{R}^* - \{-1\,;1\}$, alors $T$ est une homothétie dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |3| = 3$

- Centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a} = \frac{2-i}{1-3} = \frac{2-i}{-2} = \frac{2-i}{-2} = -1 + \frac{1}{2}i$

=> $\Omega\left(-1\,;\,\frac{1}{2}\right)$ est le centre de l'homothétie.

## **<u>Problème</u>**……………………………………………………………$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

**<u>Partie A</u>** : Résolution de l'équation différentielle $(\boldsymbol{E_1})$ : $y' - 2y = xe^x$

1) Résolvons l'équation différentielle $(\boldsymbol{E_2})$ : $y' - 2y = 0$

On a $(\boldsymbol{E_2})$ : $y' - 2y = 0$ => $S = ke^{2x}$

2) Soient $a$ et $b$ deux réels et soit $u$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$.

a- Déterminons $a$ et $b$ pour que $u$ soit solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$.

$u$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ si et seulement si $u'(x) - 2u(x) = xe^x$ avec

$u(x) = (ax + b)e^x$ et $u'(x) = (ax + a + b)e^x$.

$u'(x) - 2u(x) = xe^x \Leftrightarrow (ax + a + b)e^x - 2(ax + b)e^x = xe^x \Leftrightarrow$

$[(ax + a + b) - 2(ax + b)]e^x = xe^x \Leftrightarrow (ax + a + b) - 2(ax + b) = x \Leftrightarrow$

$-ax + a - b = x \Rightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -1 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$

D'où $u(x) = -(x + 1)e^x$

b- Montrons qu'une fonction $v$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ si et seulement si $u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$**.**

<u>**NB**</u> :

Montre que $\Leftrightarrow B$, revient à montré que $\begin{cases} A \Rightarrow B \\ \quad et \\ B \Rightarrow A \end{cases}$

Ainsi pour Montre qu'une fonction $v$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ si et seulement si $u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$, on montre que

$$\begin{cases} v \text{ est solution de l'équation } (\boldsymbol{E_1}) \Rightarrow u - v \text{ est solution de } (\boldsymbol{E_2}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad et \\ u - v \text{ est solution de } (\boldsymbol{E_2}) \Rightarrow v \text{ est solution de l'équation } (\boldsymbol{E_1}) \end{cases}$$

- Montrons que $v$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1}) \Rightarrow u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$
  - $u$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ si et seulement si $u'(x) - 2u(x) = xe^x$ **(1)**
  - $v$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ si et seulement si $v'(x) - 2v(x) = xe^x$ **(2)**

Effectuons ainsi la différence des relations **(1)** et **(2)** :

**(1) − (2)** : $[u'(x) - v'(x)] - 2[u(x) - v(x)] = xe^x - xe^x$

$\Leftrightarrow (u - v)'(x) - 2(u - v)(x) = 0 \Rightarrow u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$

D'où $v$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1}) \Rightarrow u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$

- Montrons que $u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2}) \Rightarrow v$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$

Si $u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$ alors on a : $(u - v)'(x) - 2(u - v)(x) = 0 \Leftrightarrow$

$[u'(x) - v'(x)] - 2[u(x) - v(x)] = 0 \Leftrightarrow u'(x) - v'(x) - 2u(x) + 2v(x) = 0 \Leftrightarrow$

$v'(x) - 2v(x) = u'(x) - 2\,u(x)$. Avec $u(x) = -(x+1)e^x$ et $u'(x) = -(x+2)e^x$.

Alors $v'(x) - 2v(x) = u'(x) - 2\,u(x) \Leftrightarrow$

$v'(x) - 2v(x) = [-(x+2)e^x] - 2[-(x+2)e^x] \Leftrightarrow v'(x) - 2v(x) = xe^x$

D'où $u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$ => $v$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$

**<u>Conclusion :</u>** puisque $\begin{cases} v \text{ est solution de l'équation } (\boldsymbol{E_1}) \Rightarrow u - v \text{ est solution de } (\boldsymbol{E_2}) \\ \qquad\qquad et \\ u - v \text{ est solution de } (\boldsymbol{E_2}) \Rightarrow v \text{ est solution de l'équation } (\boldsymbol{E_1}) \end{cases}$

Alors une fonction $v$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ si et seulement si $u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$. (Ce qu'il fallait Démontre).

c- En déduisons l'ensemble des solutions de $(\boldsymbol{E_1})$.

- On sait que $u(x) - v(x)$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_2})$
- D'autre part $ke^{2x}$ est aussi solution de l'équation $(\boldsymbol{E_2})$

Par identification, on a : $u(x) - v(x) = ke^{2x}$ => $v(x) = u(x) - ke^{2x}$ .

Or $u(x) = -(x+1)e^x$

=> $v(x) = -(x+1)e^x - ke^{2x}$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ est $v(x) = -(x+1)e^x - ke^{2x}$

3) Déterminons la solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ qui s'annule en 0.

La solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ qui s'annule en 0 est définie par $v(0) = 0 \Leftrightarrow k = -1$

D'où la solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ qui s'annule en 0 est $v(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

**<u>Partie B</u>** : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1) Déterminons la limite de $g$ en $-\infty$ et la limite de $g$ en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2e^x - x - 2 = 2\,(0) - (-\infty) - 2 = +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 2e^x - x - 2 = \lim_{x \to +\infty} x\left(2\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{2}{x}\right) = (+\infty)[2(+\infty) - 1 - 0]$$

$= (+\infty)(+\infty) = +\infty$

2) Etudions le sens de variation de $g$

$g(x) = 2e^x - x - 2$ => $g'(x) = 2e^x - 1$. Posons $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 > 0$ =>

$e^x > \frac{1}{2}$ => $x > ln\frac{1}{2}$ => $x > -ln2$.

Ainsi : pour les $x > -ln2$, on a : $g'(x) > 0$ et pour les $x < -ln2$, on a : $g'(x) < 0$

D'où $\forall\, x \in ]-\infty\,;\, -ln2[$ ; $g$ est strictement décroissante et

$\forall\, x \in ]-ln2\,;\, +\infty[$ ; $g$ est strictement croissante

Dressons le tableau de variation de $g$.

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $-ln2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | | | $0$ | | | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | | $0$ | | $-1 + ln2$ | | $0$ | | $+\infty$ |

3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

a-Vérifions que 0 est l'une de ces solutions.

$g(x) = 2e^x - x - 2$ => $g(0) = 2e^0 - 0 - 2 = 2 - 2 = 0$

D'où 0 est l'une de ces solutions de l'équation $g(x) = 0$.

b-L 'autre solution est appelée$\alpha$. Montrons que $-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$.

- D'après le tableau de variation de $g$ , $\forall x \in ]-\infty\,; -ln2[$; $g$ est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $]-\infty\,; -ln2[$; vers$]-1 + ln2\,; +\infty\,[$. Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution $\alpha$ telle que $g(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} g(-1{,}6) = 0{,}003 \\ g(-1{,}5) = -0{,}05 \end{cases}$ => $g(-1{,}6) \times g(-1{,}5) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ a une deuxième solution $\alpha$ tel que $-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$.

4) Déterminons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel $x$.

D'après le tableau de variation :

- $\forall x \in ]-\infty\,; \alpha[ \cup ]0\,; +\infty[\,; g(x) > 0$.

- $\forall x \in ]\alpha\,;\ 0\,[\ ;\ g(x) < 0$.

**Partie C** : Etude de la fonction principale

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x+1)\,e^x$

1) Déterminons la limite de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$. (On pourra mettre $e^{2x}$ en facteur).

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{2x} - (x+1)e^x = \lim_{x \to -\infty} e^{2x} - xe^x - e^x = 0 - 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{2x} - (x+1)\,e^x = \lim_{x \to +\infty} e^{2x}\left[1 - \frac{(x-1)}{e^x}\right] = \lim_{x \to +\infty} e^{2x}(1-0) = +\infty$$

2) Calculons $f\,'(x)$ et Montre que $f\,'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

$f(x) = e^{2x} - (x+1)\,e^x \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x} - [e^x + (x+1)\,e^x\,] = 2e^{2x} - e^x - (x+1)\,e^x$

$\Rightarrow f'(x) = 2e^{2x} - e^x - (x+1)\,e^x = e^x(2e^x - 1 - x - 1) = e^x \times g(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}\,;\ e^x > 0$. Alors $f\,'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Or d'après **Partie B** 4), on a :

- $\forall x \in ]-\infty\,; \alpha[ \cup ]0\,; +\infty[\,; g(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in ]-\infty\,; \alpha[ \cup ]0\,; +\infty[\,; f'(x) > 0$

- $\forall x \in ]\alpha\,;\ 0\,[\ ;\ g(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in ]\alpha\,;\ 0\,[\ ;\ f'(x) < 0$

Etudions le sens de variation de $f$.

- $\forall x \in ]-\infty\,; \alpha[ \cup ]0\,; +\infty[\,; f$ est strictement croissante.

- $\forall x \in ]\alpha\,;\ 0\,[\ ;\ f$ est strictement décroissante.

3) Montrons que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α est défini dans la **partie B**.

D'après **Partie B** 3) b), on a : $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2e^\alpha - \alpha - 2 = 0 \Rightarrow e^\alpha = \frac{\alpha + 2}{2}$

D'autre part $f(x) = e^{2x} - (x+1)\,e^x \Leftrightarrow f(\alpha) = (e^x)^2 - (\alpha+1)\,e^\alpha$.

Or $e^\alpha = \frac{\alpha+2}{2} \Rightarrow f(\alpha) = \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^2 - (\alpha+1) \times \frac{\alpha+2}{2} = \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^2 - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}$

$$= \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 4}{4} - \frac{\alpha^2 + 3\alpha + 2}{2} = \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 4 - 2\alpha^2 - 6\alpha - 4}{4}$$

$= \frac{-\alpha^2 - 2\alpha}{4} = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$. => $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$. (Ce qu'il fallait Démontre)

En déduisons un encadrement de $f(\alpha)$**.** (On rappelle que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$).

$$-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$$

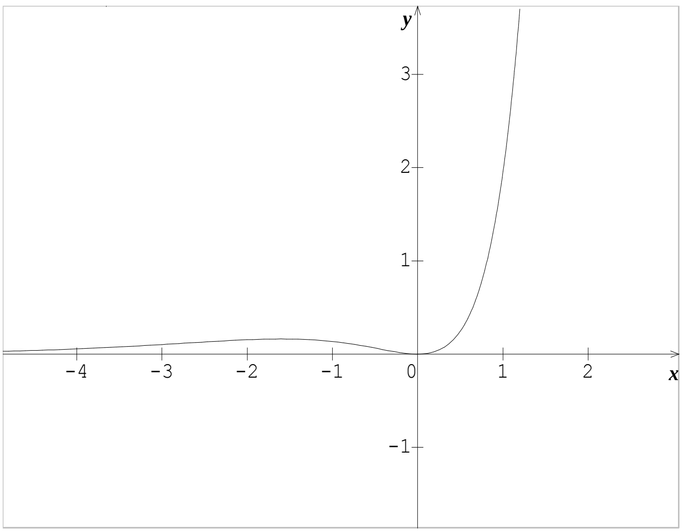
$$\Leftrightarrow f(-1,6) \leq f(\alpha) \leq f(-1,5)$$

$$\Leftrightarrow 0,32 \leq f(\alpha) \leq 0,37$$

1) Etablissons le tableau de variation de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

5) Traçons la courbe (C), représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal



**Partie D** : Calcul d'aire

1) Soit $m$ un réel négatif, Interprétons graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x)dx$

La fonction $f$ est positive sur $[m\,;0]$donc l'intégrale$\int_m^0 f(x)dx$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations $x = m$ et $x = 0$.

2) a-Calculons $\int_m^0 xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

$\int_m^0 xe^x dx$

Posons $u(x) = x$ => $u'(x) = 1$

$v'(x) = e^x$ => $v(x) = e^x$

=> $\int_m^0 xe^x dx = [xe^x]_m^0 - \int_m^0 e^x dx = [xe^x - e^x]_m^0 = (1-m)e^m - 1$

b-En déduisons $\int_m^0 f(x)dx$

$\int_m^0 f(x)dx = \int_m^0 [e^{2x} - (x+1)\,e^x]dx = \int_m^0 e^{2x}dx - \int_m^0 xe^x dx - \int_m^0 e^x dx$

=> $\int_m^0 f(x)dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_m^0 - [xe^x - e^x]_m^0 - [e^x]_m^0 = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_m^0 - [xe^x - e^x]_m^0 - [e^x]_m^0$

=> $\int_m^0 f(x)dx = \frac{-e^{2m} + 2me^m + 1}{2}$

3) Calculons la limite de$\int_m^0 f(x)dx$, lorsque $m$ tend vers $-\infty$.

$$\lim_{m \to -\infty} \int_m^0 f(x)dx = \lim_{m \to -\infty} \frac{-e^{2m} + 2me^m + 1}{2} = \frac{-(0) + 2(0) + 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

D'où $\lim_{m \to -\infty} \int_m^0 f(x)dx = \frac{1}{2}$

# Sujet 6 (TSE-STI)

**Exercice 1**……………………..…………………………………………$(5\ \boldsymbol{points})$

I// Deux voitures A et B démarrent en même temps d'une même ligne de depart et font plusieurs tours d'un même circuit. La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.

1) Determine un autre moment (autres que le depart!) où les voitures A et B se croisent sur la ligne de depart.
2) Precise le nombre de tours effectués par chaque voiture.

II// On considère un repère orthonormé directe (O ; $\vec{u}$ ; $\vec{v}$ )du plan complexe. Soit les points $A$ ; $B$ ; $C$ d'affixes respectives :

$$Z_A = -1 + i \quad ; \quad Z_B = \frac{2\left[Cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + iSin\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right]}{Cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - iSin\left(\frac{\pi}{5}\right)} \quad \text{et} \quad Z_C = 2 - 2i$$

1) Ecris les complexe $Z_A$ ; $Z_B$ et $Z_C$ sous forme exponentielle.

2) Détermine l'affixe $Z_D$ du point D tel que le triangle OBD soit équilatéral direct, c'est-à-dire la mesure de l'angle ( $\overrightarrow{OB}$ ; $\overrightarrow{OD}$ ) = $\frac{\pi}{3}$.

**Exercice 2**……………………..…………………………………………$(5\ \boldsymbol{points})$

Une urne contient des boules noires et des boules rouges. Chaque boule noire porte un nombre entier de trois chiffres multiples de 179 et chaque boule rouge porte un nombre entier de trois chiffres multiples de 159.

Ces boules sont indiscernables au toucher.

1) Trouve le nombre maximal de boules de chaque couleur dans l'urne. (On pourra utiliser les suites arithmétiques).
2) On suppose que l'urne contient cinq boules noires et quinze boules rouges. On considère le jeu suivant : la mise est de 200 F pour chaque partie. Le joueur tire une boule de l'urne :

- Si elle est noire, on lui donne 500 F et la partie est terminée.
- Si elle est rouge, il la remet dans l'urne et procède à un second tirage.
- Si la seconde boule tirée est noire, on lui donne 300 F et la partie est terminée.
- Si la deuxième boule tirée est rouge, il la remet dans l'urne et procède à un troisième tirage et dernier tirage.
- Si la troisième boule tirée est noire, on lui donne 100 F.
- Si la troisième boule tirée est rouge, il n'a rien.

On désigne par X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a- Donne la loi de probabilité de X.
b- Calcule la probabilité $P$ pour que X soit positive.
c- Peut-on espérer gagner ce jeu ?
d- Un joueur fait cinq parties successives. Qu'elle est la probabilité pour qu'il ait exactement trois fois un gain positif lors de ces cinq parties ?

**Problème**…………………………………………………………………$(10\ \boldsymbol{points})$

L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résous une équation différentielle dont elle est solution.

**A) Etude d'une fonction auxiliaire**

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{1 + 2e^x} - ln(1 + 2e^x)$

1) Calcule $g'(x)$ et Montre que ce nombre est strictement négatif pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.

2) Détermine les limites de $g$ en $-\infty$ et $+\infty$.

3) Dresse le tableau de variation de $g$.

4) Donne le signe de $g(x)$.

**B) Etude d'une fonction et calcul d'une aire**.

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x} ln(1 + 2e^x)$.

On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal

(Unités graphiques : 4 $cm$ sur l'axe des abscisses et 1 $cm$ sur l'axe des ordonnées).

1) Calcule $f'(x)$ et Montre que pour tout réel $x$, $f'(x) = 2e^{-2x} g(x)$.

2) a) Détermine la limite de $f$ en $-\infty$.

b) Détermine la limite de $f$ en $+\infty$.

On pourra remarquer que : si on pose $X = 1 + 2e^x$, $f(x)$ s'écrit $4\,\frac{X}{(X-1)^2} \times \frac{lnX}{X}$
Dresse le tableau de variation de $f$.

3) Trace C.

4) Soit $\alpha$ un réel strictement positif.

a) Calcule la valeur de l'intégrale $\mathrm{I}(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{e^x}{1 + 2e^x} dx$

b) En déduis, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : $\mathrm{J}(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)dx$ puis donne une interprétation graphique de $\mathrm{J}(\alpha)$.

**C) Résolution d'une équation différentielle**

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2\frac{e^{-x}}{1 + 2e^x}$

1) Vérifie que la fonction $f$ étudiée dans la partie **B** est solution de (E).

2) Montre qu'une fonction $\varphi$ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle (E ') : $y' + 2y = 0$.

3) Résous (E') et en déduis les solutions de (E).

# Correction Sujet 6 (TSE-STI)

**Exercice 1……………….…………………………………………(5 *points*)**

I// Deux voitures A et B démarrent en même temps de la ligne de depart et font plusieurs tours d'un même circuit. La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.

1) Vérifions s'il ya des moments (autres que le depart!) où les voitures A et B se croisent sur la ligne de depart.

Les voitures A et B se croiseront pour la première fois (autres que le depart) au bout d'un temps égal à PPCM (30; 36).

Pour Calcule PPCM (30; 36), deux solutions sont envisageables:

- Soit on cacule PGCD(30; 36), qui vaut 6 et puisque :
  PGCD(30; 36)×PPCM (30; 36) = 30×36, on en déduira PPCM (30; 36) = $\frac{30\times36}{6}$ = 180
- Soit on utilise la decomposition de 30 et 36 en produits de facteurs premiers, à savoir:
  30 =$2^1 \times 3^1 \times 5^1$et 36 = $2^2 \times 3^2$ puis l'on calcule grâce aux maximums des puissances,
  PPCM (30; 36) = $2^2 \times 3^2 \times 5^1$ = 180.

Alors les voitures A et B se croiseront pour la première fois au bout de 180 minutes.

2) Precisions le nombre de tours effectués par chaque voiture.

La voiture A parcourt $\frac{180}{36} = 5$ tours et la voiture B parcourt $\frac{180}{30} = 6$ tours

II//1) Ecrivons les complexe $Z_A$ ; $Z_B$ et $Z_C$ sous forme exponentielle.

$Z_A = -1 + i \Rightarrow |Z_A| = \sqrt{2}$ et $\arg(Z_A) = \frac{3\pi}{4}$ $\Rightarrow Z_A = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}i}$

$$Z_B = \frac{2\left[Cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + iSin\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right]}{Cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - iSin\left(\frac{\pi}{5}\right)} \Rightarrow Z_B = \frac{2e^{\frac{7\pi}{15}i}}{e^{-\frac{\pi}{5}i}} = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} \Rightarrow Z_B = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$Z_C = 2 - 2i \Rightarrow |Z_C| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(Z_C) = -\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow Z_C = 2\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i}$

2) Déterminons l'affixe $Z_D$ du point D tel que le triangle OBD soit équilatéral direct, c'est-à-dire la mesure de l'angle ( $\overrightarrow{OB}$ ; $\overrightarrow{OD}$ ) = $\frac{\pi}{3}$.

OBD est équilatéral direct si et seulement si : $\frac{Z_D - Z_O}{Z_B - Z_O} = e^{\frac{\pi}{3}i} \Leftrightarrow \frac{Z_D}{Z_B} = e^{\frac{\pi}{3}i}$ (car l'affixe de

L'origine $Z_O = 0$). Alors $Z_D = Z_B e^{\frac{\pi}{3}i} = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} \times e^{\frac{\pi}{3}i} = 2e^{\pi i} = 2(-1) = -2 \Rightarrow Z_D = -2$

**Exercice 2**……………….……………………………………………(**5 *points***)

Une urne contient des boules noires et des boules rouges. Chaque boule noire porte un nombre entier de trois chiffres multiples de 179 et chaque boule rouge porte un nombre entier de trois chiffres multiple de 159.

Ces boules sont indiscernables au toucher.

1) Trouvons le nombre maximal de boules de chaque couleur dans l'urne. (On pourra utiliser les suites arithmétiques).

- Nombre de boules noires : Les multiples de 179constituent une suite arithmétique $(U_n)$ de raison 179 et de premier terme $U_1 = 179$

Donc on a : $U_n = U_1 + (n-1)r \Rightarrow U_n = 179 + (n-1) \times 179 = 179 + 179n - 179 = 179n.$

$\Rightarrow U_n = 179n.$

D'autre part on a : $179 \leq U_n < 1000 \Leftrightarrow 179 \leq 179n < 1000 \Leftrightarrow 1 \leq n < \frac{1000}{179} \Leftrightarrow 1 \leq n < 5{,}58.$

Alors le nombre maximal de boules noires est : $n_1 = 5.$

- Nombre de boules rouges : Les multiples de 3 chiffres de 59 constituent une suite arithmétique $(V_n)$ de raison 59 et de premier terme $V_1 = 118$

Donc on a : $V_n = V_1 + (n-1)r \Rightarrow V_n = 118 + (n-1) \times 59 = 118 + 59n - 59$

$= 59n + 59.$

$\Rightarrow V_n = 59n + 59.$

D'autre part on a : $118 \leq V_n < 1000 \Leftrightarrow 118 \leq 59n + 59 < 1000 \Leftrightarrow 59 \leq 59n < 941 \Leftrightarrow 1 \leq n < \frac{941}{59} \Leftrightarrow 1 \leq n < 15{,}94.$

Alors le nombre maximal de boules rouges est : $n_2 = 15.$

2) On suppose que l'urne contient cinq boules noires et quinze boules rouges. On considère le jeu suivant : la mise est de 200 F pour chaque partie. Le joueur tire une boule de l'urne :

- Si elle est noire, on lui donne 500 F et la partie est terminée.
- Si elle est rouge, il la remet dans l'urne et procède à un second tirage.
- Si la seconde boule tirée est noire, on lui donne 300 F et la partie est terminée.
- Si la deuxième boule tirée est rouge, il la remet dans l'urne et procède à un troisième tirage et dernier tirage.
- Si la troisième boule tirée est noire, on lui donne 100 F.
- Si la troisième boule tirée est rouge, il n'a rien.

On désigne par X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a- Donnons la loi de probabilité de X.

Les valeurs prises par X sont : X= $\{300\,;100\,;-100;-200\,\}$

$P(\mathrm{X}=300)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

$P(\mathrm{X}=100)=\frac{15}{20}\times\frac{5}{20}=\frac{3}{16}$

$P(\mathrm{X}=-100)=\frac{15}{20}\times\frac{15}{20}\times\frac{5}{20}=\frac{9}{64}$

$P(\mathrm{X}=-200)=\frac{15}{20}\times\frac{15}{20}\times\frac{15}{20}=\frac{27}{64}$

D'où le tableau de la loi de probabilité est :

| $x_i$ | $-200$ | $-100$ | $100$ | $300$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{27}{64}$ | $\frac{9}{64}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |

b- Calculons la probabilité $P$ pour que X soit positive.

$$P=P(\mathrm{X}>0)=P(\mathrm{X}=300)+P(\mathrm{X}=100)=\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{7}{16}$$

c- Vérifions si l'on peut espérer gagner ce jeu

Ici, il s'agit de Détermine l'espérance mathématique $E$.

$$E(\mathrm{X})=-200\times\frac{27}{64}-100\times\frac{9}{64}+100\times\frac{3}{16}+300\times\frac{1}{4}=-\frac{75}{16}$$

Puisque $E(\mathrm{X})<0$, alors le jeu est désavantageux et par conséquent l'on ne peut pas espérer gagner ce jeu.

d- Un joueur fait cinq parties successives.
Déterminons la probabilité pour qu'il ait exactement trois fois un gain positif lors de ces cinq parties

On a : $P'=C_5^3\times P^3\times(1-P)^2=10\times\left(\frac{7}{16}\right)^3\times\left(1-\frac{7}{16}\right)^2=0{,}265$

**<u>Problème</u>…………………………………………………………$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$**

L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résous une équation différentielle dont elle est solution.

**A) Etude d'une fonction auxiliaire**

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\frac{e^x}{1+2e^x}-ln(1+2e^x)$

1) Calculons $g'(x)$ et Montre que ce nombre est strictement négatif pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.

$$g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - ln(1+2e^x) \Rightarrow g'(x) = \frac{e^x}{(1+2e^x)^2} - \frac{2e^x}{1+2e^x} = \frac{e^x - 2e^x(1+2e^x)}{(1+2e^x)^2}$$

$\Rightarrow g'(x) = -\frac{e^x(1+4e^x)}{(1+2e^x)^2}$ . Puis que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\frac{e^x(1+4e^x)}{(1+2e^x)^2} > 0$ alors $-\frac{e^x(1+4e^x)}{(1+2e^x)^2} < 0$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$; $g'(x) < 0$

2) Déterminons les limites de $g$ en $-\infty$ et $+\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{1+2e^x} - ln(1+2e^x) = 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1+2e^x} - ln(1+2e^x) = \frac{1}{2} - (+\infty) = -\infty$$

1) Dressons le tableau de variation de $g$.

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $-\infty$ |

4) Donnons le signe de $g(x)$.

D'après le tableau de variation, $\forall x \in \mathbb{R}$; $g(x)$ est strictement négative .

**B) Etude d'une fonction et calcul d'une aire**.

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}ln(1+2e^x)$.

On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 $cm$ sur l'axe des abscisses et 1 $cm$ sur l'axe des ordonnées).

1) Calculons $f'(x)$ et montrons que pour tout réel $x$, $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$.

$$f(x) = e^{-2x}ln(1+2e^x) \Rightarrow f'(x) = -2e^{-2x} \times ln(1+2e^x) + \frac{2e^x}{1+2e^x} \times e^{-2x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2e^{-2x}\left[\frac{e^x}{1+2e^x} - ln(1+2e^x)\right] = 2e^{-2x}g(x).$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$ ; $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$.

1) a) Déterminons la limite de $f$ en $-\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-2x} ln(1 + 2e^{x}) = \lim_{x \to -\infty} \frac{ln(1+2e^{x})}{e^{2x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{x}} \times \frac{ln(1+2e^{x})}{2e^{x}}$$

Effectuons un changement en posant $X = 2e^{x}$. Si $x \to -\infty$ alors $X \to 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{X \to 0} \frac{4}{X} \times \frac{ln(1+X)}{X}$. Or $\lim\limits_{h \to 0} \frac{ln(1+h)}{h} = 1$ est une limite remarquable

Et d'autre part $\lim\limits_{X \to 0} \frac{4}{X} = +\infty$

Alors $\lim\limits_{X \to 0} \frac{4}{X} \times \frac{ln(1+X)}{X} = (+\infty)(1) = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) Déterminons la limite de $f$ en $+\infty$.

On pourra remarquer que : si on pose $X = 1 + 2e^{x}$, $f(x)$ s'écrit $4\frac{X}{(X-1)^2} \times \frac{lnX}{X}$

Si $x \to +\infty$ alors $X \to +\infty$

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{X \to +\infty} 4\frac{X}{(X-1)^2} \times \frac{lnX}{X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{4X}{X^2} \times \frac{lnX}{X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{4}{X} \times \frac{lnX}{X} = 0 \times 0 = 0$

Dressons le tableau de variation de $f$.

$f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$.

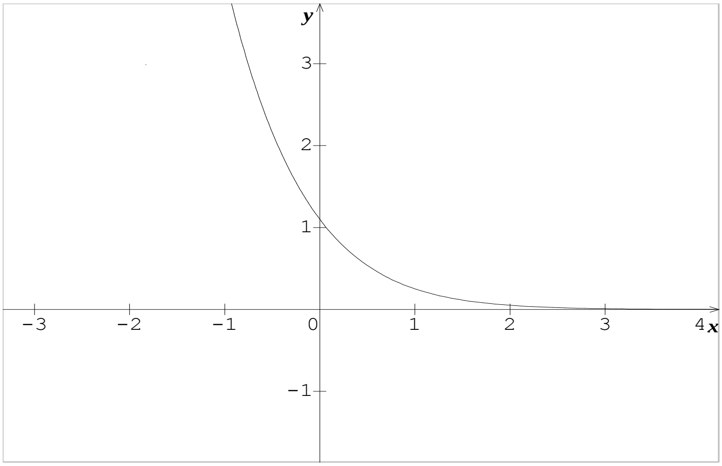
$\forall x \in \mathbb{R}$ ; $2e^{-2x} > 0$ et d'après **Partie A)3),** $g(x) < 0$.

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$ ; $f'(x) < 0$

D'où le tableau de variation de $f$ est le suivant

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ $0$ |

3) Traçons la courbe C.




4) a- Montrons que $\frac{e^{-x}}{1+2e^{x}} = e^{-x} - 2 \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$

$$e^{-x} - 2 \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2} = \frac{e^{-2x} + 2e^{-x} - 2e^{-x}}{e^{-x}+2} = \frac{e^{-2x}}{e^{-x}+2} = \frac{e^{-2x}}{\frac{1}{e^{x}}+2} = \frac{e^{-2x}}{\frac{1+2e^{x}}{e^{x}}} = \frac{e^{-2x}\times e^{x}}{1+2e^{x}} = \frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$$

D’où $\frac{e^{-x}}{1+2e^{x}} = e^{-x} - 2 \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$

b- Soit $\alpha$ un réel strictement positif. Calcule l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{e^{-x}}{1+2e^{x}} dx$

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{e^{-x}}{1+2e^{x}} dx = I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \left(e^{-x} - 2 \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}\right) dx = \left[-e^{-x} - 2ln(\, e^{-x} + 2)\right]_0^{\alpha}$$

$$\Rightarrow I(\alpha) = 1 - e^{-\alpha} - 2ln\left(\frac{e^{-\alpha}+2}{3}\right)$$

c-En déduisons, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : $J(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)dx$

$$J(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)dx = \int_0^{\alpha} e^{-2x} ln(1+2e^{x})dx$$

Posons $u(x) = ln(1 + 2e^x)$ => $u'(x) = \frac{2e^x}{1 + 2e^x}$

$v'(x) = e^{-2x}$ => $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

=> J(α) = $\left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \times ln(1 + 2\,e^x)\right]_0^\alpha + \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1 + 2e^x}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \times ln(1 + 2\,e^x)\right]_0^\alpha$ + I(α)

$= \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \times ln(1 + 2\,e^x)\right]_0^\alpha$ + I(α) . Or I(α) $= 1 - e^{-\alpha} - 2ln\left(\frac{e^{-\alpha} + 2}{3}\right)$

=> $J(\alpha) = 1 + \frac{5}{2}ln3 - \frac{1}{2}e^{-2\alpha} \times ln(1 + 2\,e^\alpha) - 2ln(e^{-\alpha} + 2) - e^{-\alpha}$

Donne une interprétation graphique de J$(\alpha)$.

La fonction $f$ est positive sur $[0\,;\,\alpha]$ avec $\alpha > 0$. Donc $J(\alpha)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe (C), les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

**C) Résolution d'une équation différentielle**

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2\frac{e^x}{1 + 2e^x}$

1) Vérifions que la fonction $f$ étudiée dans la partie **B** est solution de (E).

$f$ est solution de (E) si et seulement si $f'(x) + 2f(x) = 2\frac{e^{-x}}{1 + 2e^x}$

Avec $f(x) = e^{-2x}ln(1 + 2e^x)$ et $f'(x) = 2e^{-2x}\left[\frac{e^x}{1 + 2e^x} - ln(1 + 2e^x)\right]$

Alors $f'(x) + 2f(x) = 2e^{-2x}\left[\frac{e^x}{1 + 2e^x} - ln(1 + 2e^x)\right] + 2e^{-2x}ln(1 + 2e^x)$

$$= \frac{2e^{-x}}{1 + 2e^x} - 2e^{-2x}ln(1 + 2e^x) + 2e^{-2x}ln(1 + 2e^x) = 2\frac{e^{-x}}{1 + 2e^x}$$

D'où $f$ est solution de (E) : $y' + 2y = 2\frac{e^{-x}}{1 + 2e^x}$

2) Montrons qu'une fonction $\varphi$ est solution de $(E)$ si et seulement si $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle $(E\,')$ : $y' + 2y = 0$.

<u>**NB :**</u>

Pour Montre que $A \Leftrightarrow B$,on montre que $\begin{cases} A => B \\ \quad et \\ B => A \end{cases}$

Ainsi pour Montre qu'une fonction $\varphi$ est solution de l'équation $(E)$ si et seulement si $\varphi - f$ est solution de $(E\ ')$ : $y' + 2y = 0$, on montre que :

$$\begin{cases} \varphi \text{ est solution de l'équation (E) } => \varphi - f \text{est solution de } (E\ ') \\ et \\ \varphi - f \text{ est solution de } (E\ ') => \varphi \text{ est solution de l'équation } (E) \end{cases}$$

- Montrons que $\varphi$ est solution de l'équation $(E) => \varphi - f$est solution de $(E\ ')$
  - $\varphi$ est solution de l'équation $(E)$ si et seulement si $\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}$ **(1)**
  - $f$ est solution de l'équation $(E)$ si et seulement si $f'(x) + 2f(x) = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}$ **(2)**

Effectuons ainsi la différence des relations **(1)** et **(2)** :

**(1) – (2)** : $[\varphi'(x) - f'(x)] + 2[\varphi(x) - f(x)] = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x} - 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

$\Leftrightarrow (\varphi - f)'(x) + 2(\varphi - f)(x) = 0 => \varphi - f$ est solution de$(E\ ')$

D'où $\varphi$ est solution de l'équation $(E) => \varphi - f$ est solution de $(E\ ')$

- Montrons que $\varphi - f$ est solution de $(E\ ') => \varphi$ est solution de l'équation $(E)$

Si $\varphi - f$ est solution de $(E\ ')$ alors on a : $(\varphi - f)'(x) + 2(\varphi - f)(x) = 0 \Leftrightarrow$

$[\varphi'(x) - f'(x)] + 2[\varphi(x) - f(x)] = 0 \Leftrightarrow \varphi'(x) - f'(x) + 2\varphi(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\varphi'(x) + 2\varphi(x) = f'(x) + 2f(x)$.

Avec $f(x) = e^{-2x}ln(1 + 2e^x)$ et $f'(x) = 2e^{-2x}\left[\frac{e^x}{1+2e^x} - ln(1+2e^x)\right]$

Alors $\varphi'(x) + 2\varphi(x) = f'(x) + 2f(x) \Leftrightarrow$

$\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 2e^{-2x}\left[\frac{e^x}{1+2e^x} - ln(1+2e^x)\right] + 2e^{-2x}ln(1 + 2e^x) \Leftrightarrow$

$\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

D'où $\varphi - f$ est solution de $(E\ ') => \varphi$ est solution de l'équation $(E)$

**<u>Conclusion :</u>** puisque $\begin{cases} \varphi \text{ est solution de l'équation } (E) => \varphi - f \text{ est solution de } (E\ ') \\ et \\ \varphi - f \text{ est solution de } (E\ ') => \varphi \text{ est solution de l'équation } (E) \end{cases}$

Alors une fonction $\varphi$ est solution de l'équation $(E)$ si et seulement si $\varphi - f$ est solution de $(E')$**.** (Ce qu'il fallait Démontre).

3) Résolvons $(E')$

$(E')$ : $y' + 2y = 0$ => S = $ke^{-2x}$

En déduisons les solutions de (E).

- On sait que $\varphi(x) - f(x)$ est solution de l'équation $(E')$
- D'autre part $ke^{-2x}$ est aussi solution de l'équation $(E')$

Par identification, on a : $\varphi(x) - f(x) = ke^{-2x}$ => $\varphi(x) = f(x) + ke^{-2x}$ .

Or $f(x) = e^{-2x}ln(1 + 2e^{x})$

=> $\varphi(x) = e^{-2x}ln(1 + 2e^{x}) + ke^{-2x}$ .

D'où l'ensemble des solutions de l'équation $(E)$ est $\varphi(x) = e^{-2x}ln(1 + 2e^{x}) + ke^{-2x}$ avec $(k \in \mathbb{R})$

# Sujet 7 (TSE-STI)

**Exercice 1**…………………..……………………………………………($5\ points$)

I// Soit $\alpha$ un nombre complexe.

1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1+i)Z^2 - 2i(\alpha+1)Z + (i-1)(\alpha^2+1) = 0$.

2) Soient $Z_1$ et $Z_2$ les solutions de cette équation.

   Trouve entre $Z_1$ et $Z_2$, une relation indépendante de $\alpha$.

3) Caractérise la transformation $f$ du plan complexe qui, à tout point $M_1$ d'affixe $Z_1$ associe le point $M_2$ d'affixe $Z_2$.

4) On pose $Z_1 = x + iy$ et $Z_2 = x' + iy'$.

   a- Exprime $x'$et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.

   b- Quelle est l'image par $f$ de la droite $(D)$ d'équation $x + 2y - 1 = 0$ ?

II//Résous dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} 3x \equiv 1[5] \\ 5x \equiv 2[7] \end{cases}$

**Exercice 2**…………………..……………………………………………($5\ points$)

I// Soit l'intégrale $I_n$ définie par : $I_n(x) = \int_1^x t^n lnt\ dx$ ( $n \in \mathbb{N} - \{-1\}$ et $x > 0$)

1) En utilisant une intégration par parties ; calcule $I_n(x)$

2) En déduis le calcul de $J_n(x) = \int_1^x t^n (lnt)^2\ dt$

3) a) Calcule $I_n(e) - J_n(e)$.

   b) Détermine la limite de $\frac{I_n(e)-J_n(e)}{e^{n+1}}$ quand $n$ $t$end vers $+\infty$.

II// Dans une classe de terminale 88% des élèves ont déclarés aimer les mathématiques ; 20% ont déclarés aimer la chimie et 15% ont déclarés aimer les mathématiques et la chimie. On choisit un élève au hasard.
1) Quelle est la probabilité que cet élève aime les mathématiques et pas la chimie ?
2) Quelle est la probabilité que cet élève aime la chimie et pas les mathématiques ?
3) Quelle est la probabilité que cet élève n'aime ni les mathématiques ni la chimie ?

**Problème**........................................................................($\mathbf{10}$ ***points***)

Le problème est composé de l'étude d'une suite de fonctions dépendant d'un paramètre, puis de la recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation du type : $f(x) = x$.

**Partie A** :

Pour tout entier $n$ strictement positif, on note $f_n$ la fonction numérique de la variable réelle définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $f_n(x) = \dfrac{e^x}{(x+1)^n}$

On note ($C_n$) la courbe représentative de $f_n$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).

1) Détermine la fonction dérivée $f'_n$ de $f_n$ et donné l'expression de $f'_n$ en fonction de $f_n$ et de $f_{n+1}$.

2) Etudie les variations de $f_n$ et ses limites éventuelles en $-\infty$ ; $-1$ et $+\infty$. (On distinguera les cas où $n$ est pair et $n$ est impair.)

3) Démontre que toutes les courbes ($C_n$) passent par un même point.

4) Détermine la limite de $\frac{f_n(x)}{x}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$**.** Que peut – on en déduis pour les courbes $(C_n)$ ? Trace sur deux figures distinctes les courbes ($C_1$) et ($C_2$).

**Partie B** :

Pour tout entier $n$ strictement positif, on note : $I_n = \int_0^1 f_n dx$.

1) Démontre que la suite $(I_n)$ est décroissante et qu'elle converge.

2) Détermine en utilisant la relation de la question **A).1**), une relation entre $I_n$ et $I_{n+1}$.

**Partie C** :

Dans cette partie, $n = 2$.

1) Démontre que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$

Le but de cette partie est de Détermine une valeur approchée de α.

2) Etudie les variations de $f'_2$ dans $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$et en déduis que pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ ; on a : $0 \leq |f'_2(x)| \leq 0{,}25$

3) Soit $(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f_2(u_n) \end{cases}$

a- Démontre, en utilisant la question **C.2**, que pour tout entier naturel $n$ :
$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$

b- En déduis que pour tout entier naturel $n$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ et que la suite $(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$ converge vers $\alpha$.

# Correction Sujet 7 (TSE-STI)

**Exercice 1……………….……………………………………………(5 *points*)**

I// Soit $\alpha$ un nombre complexe.

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1+i)Z^2 - 2i(\alpha+1)Z + (i-1)(\alpha^2+1) = 0$.

$\Delta = [-2i(\alpha+1)]^2 - 4(1+i)(i-1)(\alpha^2+1) = 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 = (2\alpha-2)^2$

$Z_1 = \frac{2i(\alpha+1)-(2\alpha-2)}{2(1+i)} = \frac{-(\alpha-1)+(\alpha+1)i}{1+i} = \frac{[-(\alpha-1)+(\alpha+1)i](1-i)}{2} = \frac{2+2\alpha i}{2} = 1+\alpha i$

$Z_2 = \frac{2i(\alpha+1)+(2\alpha-2)}{2(1+i)} = \frac{(\alpha-1)+(\alpha+1)i}{1+i} = \frac{[(\alpha-1)+(\alpha+1)i](1-i)}{2} = \frac{2\alpha+2i}{2} = \alpha+i$

S= $\{1+\alpha i\ ;\ \alpha+i\}$

2) Soient $Z_1$ et $Z_2$ les solutions de cette équation.

Trouvons entre $Z_1$ et $Z_2$, une relation indépendante de $\alpha$.

$Z_1 = 1+\alpha i$ => $\alpha = \frac{Z_1 - 1}{i} = -i(Z_1-1)$

$Z_2 = \alpha + i$ => $Z_2 = -i(Z_1-1)+i = -iZ_1 + i + i = -iZ_1 + 2i \Leftrightarrow Z_2 + iZ_1 - 2i = 0$

3) Caractérisons la transformation $f$ du plan complexe qui, à tout point $M_1$ d'affixe $Z_1$ associe le point $M_2$ d'affixe $Z_2$.

On sait que : $Z_2 + iZ_1 - 2i = 0$ => $Z_2 = -iZ_1 + 2i$. Ici $a = -i$ et $b = 2i$

- Angle : $\theta = arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$
- Centre $\Omega$ est telque: $Z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{2} = i(1-i) = 1+i$. D'où $\Omega\binom{1}{1}$

Alors $f$ est une rotation de centre $\Omega\binom{1}{1}$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$

4) On pose $Z_1 = x+iy$ et $Z_2 = x'+iy'$.

   a- Exprimons $x'$et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.

On sait que : $Z_2 = -iZ_1 + 2i \Leftrightarrow x'+iy' = -i(x+iy)+2i \Leftrightarrow x'+iy' = -ix+y+2i \Leftrightarrow$

$x'+iy' = y + i(-x+2)$. Par identification, on a : $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x+2 \end{cases}$

b- Déterminons l'image par $f$ de la droite $(D)$ d'équation $x + 2y - 1 = 0$

On sait que : $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x' \\ x = -y' + 2 \end{cases}$.

Ainsi remplaçons $x$ et $y$ par leur valeur dans l'équation de la droite $(D)$: $x + 2y - 1 = 0$ .
D'où l'image $(D')$de la droite $(D)$ est : $(D')$: $-y' + 2 + 2x' - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$(D')$: $-y' + 2x' + 1 = 0 \Leftrightarrow (D')$: $y' - 2x' - 1 = 0$

II// Résolvons dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} 3x \equiv 1[5] \\ 5x \equiv 2[7] \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x \equiv 1[5] \\ 5x \equiv 2[7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \equiv 6[5] \\ 5x \equiv -5[7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 2[5] \\ x \equiv -1[7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5k + 2 \\ x = 7k' - 1 \end{cases}$$

$x = x \Leftrightarrow 5k + 2 = 7k' - 1 \Leftrightarrow 5k - 7k' + 3 = 0$

Résoudre l'équation $5k - 7k' + 3 = 0$, revient à chercher l'ensemble des couples $(k\,; k')$

$5k - 7k' + 3 = 0 \Leftrightarrow 5k = -3 + 7k' \Leftrightarrow 5k \equiv -3[7] \Leftrightarrow 5k \equiv -10[7] \Leftrightarrow k \equiv -2[7]$

$\Leftrightarrow k = 7u - 2$

En remplaçant $k = 7u - 2$ par sa valeur dans l'équation $5k - 7k' + 3 = 0$, on obtient :

$k' = 5u - 1$

D'où S= $\{7u - 2\,; 5u - 1\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

## <u>Exercice 2</u>……………………..…………………………………………(**5 *points***)

I// Soit l'intégrale $I_n$ définie par : $I_n(x) = \int_1^x t^n lnt\, dx$ ( $n \in \mathbb{N} - \{-1\}$ et $x > 0$)
1) En utilisant une intégration par parties ; calculons $I_n(x)$

Posons $u(t) = lnt$ => $u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = t^n$ => $v(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$

$$=> I_n(x) = \left[\frac{t^{n+1} \times lnt}{n+1}\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^{n+1}}{t(n+1)} dx. = \left[\frac{t^{n+1} \times lnt}{n+1}\right]_1^x - \frac{1}{n+1} \int_1^x t^n dx$$

$$= \left[\frac{t^{n+1} \times lnt}{n+1}\right]_1^x - \frac{1}{n+1}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_1^x = \left[\frac{t^{n+1} \times lnt}{n+1}\right]_1^x - \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^x$$

$$= \left[\frac{t^{n+1} \times lnt}{n+1} - \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^x = \left[\frac{(n+1)t^{n+1} \times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^x$$

$=> I_n(x) = F(x) - F(1) = \frac{(n+1)x^{n+1}lnx - x^{n+1} + 1}{(n+1)^2}$

2) En déduisons le calcul de $J_n(x) = \int_1^x t^n(lnt)^2\, dt$

$J_n(x) = \int_1^x t^n(lnt)^2\, dt = \int_1^x t^n \times lnt \times lnt\, dt = \int_1^x lnt \times t^n lnt\, dt$

Posons $u(t) = lnt \; => \; u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = t^n lnt \; => \; v(t) = \frac{(n+1)t^{n+1} \times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}$

$=> J_n(x) = \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1} \times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right] lnt\right]_1^x - \int_1^x \frac{(n+1)t^{n+1} \times lnt - t^{n+1}}{t(n+1)^2} dx.$

$= \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1} \times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right] lnt\right]_1^x - \int_1^x \frac{(n+1)t^{n+1} \times lnt}{t(n+1)^2} dx + \int_1^x \frac{t^{n+1}}{t(n+1)^2} dx.$

$= \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1} \times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right] lnt\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^n \times lnt}{n+1} dx + \int_1^x \frac{t^n}{(n+1)^2} dx.$

$= \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1} \times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right] lnt\right]_1^x - \frac{1}{n+1} \int_1^x t^n \times lnt\, dx + \frac{1}{(n+1)^2} \int_1^x t^n dx.$

$= \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1} \times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right] lnt\right]_1^x - \frac{1}{n+1} I_n(x) + \frac{1}{(n+1)^2} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_1^x.$

$= \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1} \times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right] lnt\right]_1^x - \frac{1}{n+1} \left[\frac{(n+1)t^{n+1} \times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^x + \frac{1}{(n+1)^2} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_1^x.$

Avec $I_n(x) = \left[\frac{(n+1)t^{n+1} \times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^x$

$=> J_n(x) = \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1} \times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right] lnt - \frac{(n+1)t^{n+1} \times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^3} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)^3}\right]_1^x$

$=> J_n(x) = F(x) - F(1) = \frac{(n+1)x^{n+1} \times lnx[(n+1)lnx - 2] - 2}{(n+1)^3}$

3) a) Calculous $I_n(e) - J_n(e)$.

$I_n(x) = \frac{(n+1)x^{n+1}lnx - x^{n+1} + 1}{(n+1)^2}$ et $J_n(x) = \frac{(n+1)x^{n+1} \times lnx[(n+1)lnx - 2] - 2}{(n+1)^3}$

$=> I_n(e) - J_n(e) = \frac{(n+1)(e^{n+1}+1)+2}{(n+1)^3}$

b) Déterminons la limite de $\frac{I_n(e)-J_n(e)}{e^{n+1}}$ quand $n$ $t$end vers $+\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n(e)-J_n(e)}{e^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)(e^{n+1}+1)+2}{(n+1)^3}}{e^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(e^{n+1}+1)+2}{(n+1)^3 e^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{ne^{n+1}}{n^3e^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n(e)-J_n(e)}{e^{n+1}} = 0$

II//Dans une classe de terminale 88% des élèves ont déclarés aimer les mathématiques ; 20% ont déclarés aimer la chimie et 15% ont déclarés aimer les mathématiques et la chimie.
On choisit un élève au hasard.

**<u>NB :</u>** Tout d'abords, faisons une traduction mathématique des affirmations ci-dessus :

Soit $\mathrm{P}(M) = 88\% = \frac{88}{100} = 0{,}88$ : la probabilité sur le pourcentage des élèves qui déclarent aimer les mathématiques.

Soit $\mathrm{P}(C) = 20\% = \frac{20}{100} = 0{,}2$ : la probabilité sur le pourcentage des élèves qui déclarent aimer la chimie.
Soit $\mathrm{P}(M \cap C) = 15\% = \frac{15}{100} = 0{,}15$ : la probabilité sur le pourcentage des élèves qui déclarent aimer les mathématiques et la chimie.
Soit $\mathrm{P}(\bar{M}) = 1 - \mathrm{P}(M) = 1 - 0{,}88 = 0{,}12$ : la probabilité de l'évènement contraire de $\mathrm{P}(M)$, c'est-à-dire le pourcentage des élèves qui n'aiment pas les mathématiques.

Soit $\mathrm{P}(\bar{C}) = 1 - \mathrm{P}(C) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$ : la probabilité de l'évènement contraire de $\mathrm{P}(C)$, c'est-à-dire le pourcentage des élèves qui n'aiment pas la chimie.

1) Déterminons la probabilité pour que l'élève aime les mathématiques et pas la chimie
Soit $\mathrm{P}(M \cap \bar{C})$ cette probabilité telle que : $\mathrm{P}(M \cap \bar{C}) = \mathrm{P}(M) \times \mathrm{P}(\bar{C}) = 0{,}88 \times 0{,}8 = 0{,}704$

2) Déterminons la probabilité pour que l'élève aime la chimie et pas les mathématiques

Soit $\mathrm{P}(C \cap \bar{M})$ cette probabilité telle que : $\mathrm{P}(C \cap \bar{M}) = \mathrm{P}(C) \times \mathrm{P}(\bar{M}) = 0{,}2 \times 0{,}12 = 0{,}024$

3) Déterminons la probabilité pour que l'élève n'aime ni les mathématiques ni la chimie

Soit $P(\bar{M} \cap \bar{C})$ cette probabilité telle que : $P(\bar{M} \cap \bar{C}) = P(\bar{M}) \times P(\bar{C}) = 0{,}12 \times 0{,}8 = 0{,}096$

**Problème**..........................................................**($\mathbf{10}$ *points*)**

Le problème est composé de l'étude d'une suite de fonctions dépendant d'un paramètre, puis de la recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation du type : $f(x) = x$.

**Partie A** :

Pour tout entier $n$ strictement positif, on note $f_n$ la fonction numérique de la variable réelle définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$

On note $(Cn)$ la courbe représentative de $f_n$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).

1) Déterminons la fonction dérivée $f'_n$ de $f_n$ et donnons l'expression de $f'_n$ en fonction de $f_n$ et de $f_{n+1}$.

$$f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n} \Rightarrow f'_n(x) = \frac{e^x(x+1)^n - n(x+1)^{n-1}e^x}{(x+1)^{2n}} = \frac{e^x(x+1)^n}{(x+1)^{2n}} - n\frac{(x+1)^{n-1}e^x}{(x+1)^{2n}}$$

$$= \frac{e^x}{(x+1)^{-n} \times (x+1)^{2n}} - n\frac{e^x}{(x+1)^{-n+1} \times (x+1)^{2n}} \quad = \frac{e^x}{(x+1)^n} - n\frac{e^x}{(x+1)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f'_n(x) = f_n(x) - nf_{n+1}(x)$$

2) Etudions les variations de $f_n$ et ses limites éventuelles en $-\infty$ ; $-1$ et $+\infty$. (On distinguera les cas où $n$ est pair et $n$ est impair.)

$$\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{(x+1)^n} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{(x+1)^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} f_n(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{e^x}{(x+1)^n} = \frac{e^{-1}}{(0^-)^n} = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est paire} \\ \text{et} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1^+} f_n(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{e^x}{(x+1)^n} = \frac{e^{-1}}{(0^+)^n} = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est paire} \\ \text{et} \\ +\infty \text{ si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

3) Démontrons que toutes les courbes $(C_n)$ passent par un même point.

Soit $A\binom{x_0}{y_0}$ ce point tel que si toutes les courbes $(C_n)$ passent par un même point , alors on a :

$f_0(x_0) = f_1(x_0)$.

$f_0(x_0) = f_1(x_0) \Leftrightarrow \frac{e^{x_0}}{(x_0+1)^0} = \frac{e^{x_0}}{(x_0+1)^1} \Leftrightarrow e^{x_0} = \frac{e^{x_0}}{x_0+1} \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{x_0+1} \Leftrightarrow$

$x_0 + 1 = 1 \Rightarrow x_0 = 0$.

En remplaçant $x = 0$ par sa valeur dans $y_0 = f_1(x_0)$ ou dans $y_0 = f_0(x_0)$ ; on a :

$y_0 = f_1(0) = \frac{e^0}{(0+1)^1} = \frac{1}{1} = 1$ . D'où toutes les courbes $(C_n)$ passent par un même point $A\binom{0}{1}$.

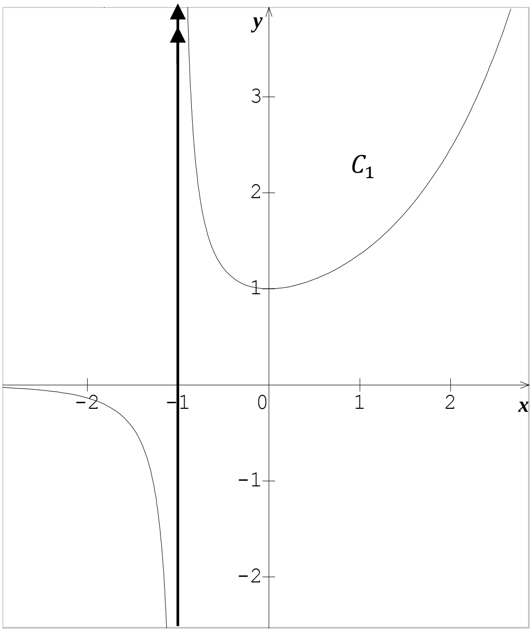
4) Déterminons la limite de $\frac{f_n(x)}{x}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

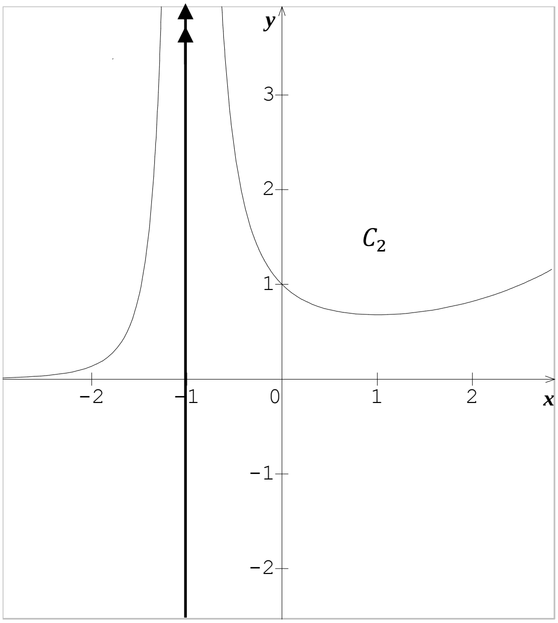
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{e^x}{(x+1)^n}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x(x+1)^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x(x+1)^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x \times x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{n+1}} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = +\infty$$

On peut en déduis que toutes les courbes $(C_n)$ admettent l'axe $(y'0y)$ comme direction parabolique.

Traçons sur deux figures distinctes les courbes $(C_1)$ et $(C_2)$.




**Partie B**

Pour tout entier $n$ strictement positif, on note : $I_n = \int_0^1 f_n dx$.

1) Démontrons que la suite $(I_n)$ est décroissante et qu'elle converge.

La suite $(I_n)$ est décroissante si et seulement si $I_{n+1} - I_n < 0$

Pour tout $x$ appartenant à $[0 ; 1]$ ; $(x+1)^{n+1} > (x+1)^n \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)^{n+1}} < \frac{1}{(x+1)^n}$

Or $e^x > 0$. Alors on a : $\frac{e^x}{(x+1)^{n+1}} < \frac{e^x}{(x+1)^n}$ . En intégrant sur $[0 ; 1]$, on a :

$\int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^{n+1}} dx < \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^n} dx \Leftrightarrow I_{n+1} < I_n \Leftrightarrow I_{n+1} - I_n < 0.$

D'où la suite $(I_n)$ est décroissante.

D'autre part si $x$ appartient à $[0 ; 1]$ ; alors on a :

$0 \leq x \leq 1$

$\Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 2$

$\Leftrightarrow 1 \leq (x+1)^n \leq 2^n$

$\Leftrightarrow\ \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{(x+1)^n} \leq 1$

$\Leftrightarrow\ \frac{e^x}{2^n} \leq \frac{e^x}{(x+1)^n} \leq e^x$ . En intégrant sur $[0\,;1]$ ; on a :

$\int_0^1 \frac{e^x}{2^n}dx \leq \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^n}dx \leq \int_0^1 e^x dx \Leftrightarrow \frac{1}{2^n}\int_0^1 e^x dx \leq I_n \leq \int_0^1 e^x dx \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2^n}[e^x]_0^1 \leq I_n \leq [e^x]_0^1 \Leftrightarrow \frac{e-1}{2^n} \leq I_n \leq e-1$. Alors La suite $(I_n)$ est majorée.

**Conclusion :** La suite $(I_n)$ étant décroissante et majorée, alors elle converge.

2) Déterminons en utilisant la relation de la question **A).1**), une relation entre $I_n$ et $I_{n+1}$.

D'après la relation de la question **A).1**), on a : $f'_n(x) = f_n(x) - nf_{n+1}(x)$.

$f'_n(x) = f_n(x) - nf_{n+1}(x)$ . En intégrant sur $[0\,;1]$ ; on a :

$\int_0^1 f'_n(x)dx = \int_0^1 f_n(x)dx - n\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx \Leftrightarrow [f_n(x)\,]_0^1 = I_n - nI_{n+1}$

$\Leftrightarrow [f_n(1) - f_n(0)\,]_0^1 = I_n - nI_{n+1} \Leftrightarrow [f_n(1) - f_n(0)\,]_0^1 = I_n - nI_{n+1}$

$\Leftrightarrow \frac{e}{2^n} - 1 = I_n - nI_{n+1}$ .

D'où la relation entre $I_n$ et $I_{n+1}$ est : $I_n - nI_{n+1} = \frac{e}{2^n} - 1$

**<u>Partie C</u>** :

Le but de cette partie est de Détermine une valeur approchée de $\alpha$.

On pose : $n = 2$.

1) Démontrons que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$

$f_2(x) = x \Leftrightarrow f_2(x) - x = 0$. Posons $h(x) = f_2(x) - x$

Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ ; $h$ est dérivable et strictement décroissante, donc $h$ réalise une bijection de $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ vers l'intervalle $\left[\,h(1)\,;h\left(\frac{1}{2}\right)\right] = [-0{,}32\,;0{,}22]$.

Donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution notée $\alpha$, dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ telque $h(\alpha) = 0$. Or $h(x) = f_2(x) - x$. Par conséquent l'équation $f_2(x) - x = 0 \Leftrightarrow f_2(x) = x$ admet une solution unique $\alpha$ telle que $f_2(\alpha) = \alpha$

De plus $h\left(\frac{1}{2}\right) \times h(1) < 0$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\alpha \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$

2) Etudions les variations de $f'_2$ dans $\left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$ et en déduisons que pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$ ; on a : $0 \leq |f'_2(x)| \leq 0{,}25$

$f_2(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2}$ => $f'_2(x) = \frac{(x^2-1)e^x}{(x+1)^4}$ et $f''_2(x) = \frac{(x^2-2x+3)e^x}{(x+1)^4} > 0.$

D'où $\forall\, x \in Df'_2;\ f''_2(x) > 0.$ Par conséquent $f'_2$ est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$.

D'où si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ; on a : $f'_2\left(\frac{1}{2}\right) \leq f'_2(x) \leq f'_2(1) \Leftrightarrow -0{,}25 \leq f'_2(x) \leq 0$

En appliquant la valeur absolue, on a : $0 \leq |f'_2(x)| \leq 0{,}25 \Leftrightarrow 0 \leq |f'_2(x)| \leq \frac{1}{4}$

D'où $\forall x \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$ ; on a : $0 \leq |f'_2(x)| \leq \frac{1}{4}$ (Ce qu'il fallait Démontre).

3) Soit $(u_n), n \in \mathbb{N}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f_2(u_n) \end{cases}$

a-Montrons que pout tout $n \in \mathbb{N}^*$ ; on a : $u_n \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$

On sait que : $u_{n+1} = f_2(u_n)$

Pour $n = 0$ ; on a : $u_1 = f_2(u_0) = f_2(0) = 1 \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$. Vraie

Supposons la relation $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$ est vraie et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$ c'est-à-dire $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$

On sait que $x \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$, $f_2(x) \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$ et $u_n \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$. En posant $x = u_n$, on a :

$f_2(u_n) \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right] \Leftrightarrow u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$ car $f_2(u_n) = u_{n+1}$.

D'où la relation est vraie à l'ordre $n+1$.

**Conclusion :** pout tout $n \in \mathbb{N}^*$ ; on a : $u_n \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$ (Ce qu'il fallait démontrer).

b- Démontrons, en utilisant la question **C.2**, que pour tout entier naturel $n$ :

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$

On sait que d'après la question **C.2**, on a : $|f'_2(x)| \leq \frac{1}{4}$.

Alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$|f_2(x) - f_2(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$ . Or d'après la question **C.1**,on a : $f_2(\alpha) = \alpha$ . D'où

$|f_2(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$ . En posant$x = u_n$, on a : $|f_2(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$

Or $f_2(u_n) = u_{n+1}$ . D'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ (Ce qu'il fallait démontrer).

c- En déduisons que pour tout entier naturel $n$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

On sait que $\alpha \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right] \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ et $u_0 = 0$

Il vient que : $u_0 - \frac{1}{2} \leq u_0 - \alpha \leq u_0 - 1$

$$\Leftrightarrow |u_0 - 1| \leq |u_0 - \alpha| \leq \left|u_0 - \frac{1}{2}\right|$$

$$\Leftrightarrow |u_0 - 1| \leq |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^0$. D'où la relation est vraie à l'ordre $n = 0$

Supposons la relation est vraie à l'ordre $n$ c'est-à-dire $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ; on a :

$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ Puis montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$ c'est-à-dire $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ;

on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

D'après **Partie C 3) b),** on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

Par suite $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$

D'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

**Conclusion :** tout entier naturel $n$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$.(Ce qu'il fallait démontrer).

Montrons que la suite $(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$ converge vers $\alpha$.

La suite de terme général $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ est convergente $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et converge donc vers 0.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \alpha = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

D'où la suite $u_n$ est convergente et converge vers $\alpha$

# Sujet 8 (TSE-STI)

## Exercice 1…………………..…………………………………………….($5$ ***points***)

I// Un Champ a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement $119m$ et $91m$; les deux autres cotés mesurent $56m$ et $35m$. Pour la clôture, le propriétaire Mr DEMBELE a besoin des poteaux de support à égale distance mesurée en nombre entier de mètre pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.

1) Quelle est la distance entre deux poteaux quelconques ?

2) Détermine le nombre de poteaux nécessaires à la clôture.

II// Dans un village, on choisit une personne au hasard (tous les choix sont équiprobables). On désigne par :

- $H$ L'évènement : ≪ Cette personne est un homme≫.
- $B$ L'évènement : ≪ Cette personne a les yeux bleus≫.
- $M$ L'évènement : ≪ Cette personne a les yeux marron$s$ ≫.
- $V$ L'évènement : ≪ Cette personne a les yeux verts≫.

1) Exprime par une phrase chacun des évènements suivants :

$H \cap B$ ; $H \cap M$ ; $H \cap V$ ; $\overline{H} \cap B$ ; $\overline{H} \cap M$ ; $\overline{H} \cap V$ ; $\overline{H} \cap \overline{B}$.

2) On donne : $\mathrm{P}(H) = \frac{1}{2}$ ; $\mathrm{P}(B) = \frac{3}{4}$ ; $\mathrm{P}(M) = \frac{2}{7}$ ; $\mathrm{P}(V) = \frac{1}{5}$

Calcule : $\mathrm{P}(H \cap B)$ ; $\mathrm{P}(H \cap M)$ ; $\mathrm{P}(H \cap V)$ ; $\mathrm{P}(\overline{H} \cap B)$ ; $\mathrm{P}(\overline{H} \cap M)$ ; $\mathrm{P}(\overline{H} \cap \overline{B})$

## Exercice 2…………………..…………………………………………….($5$ ***points***)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ ; on considère les points : $A_1$ ; $A_2$ ; ; $A_3$ ; … … . . $A_n$ dont les affixes sont les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^n = 1$ avec $(n \in \mathbb{N}\ ; n \geq 2)$. On désigne par $Z_1$ le complexe telque $Z_1 = cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

1) Exprime en fonction de $Z_1$, les racines de l'équation $Z^n = 1$.

2) Détermine l'isobarycentre des points $A_1$ ; $A_2$ ; ; $A_3$ ; … … . . $A_n$.

3) Détermine l'ensemble des points $M$ du plan tel que :

$$\left\|\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \cdots + \overrightarrow{MA_n}\right\| = n$$

## Problème……………………………………………………………….($10$ ***points***)

L'objectif de ce problème est l'étude complète de la fonction numérique $f$ définie pour tout nombre réel $x$ différent de $-1$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| \; si\ x \neq 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

**Les parties A et B sont indépendantes.**

On notera $(Cf)$la représentation graphique de $f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

**<u>Partie A</u>** : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit $g$ la fonction numérique définie par : $g(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$

1) Détermine D$g$ et Détermine les limites de $g$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Etudie les variations de $g$ ; on ne demande pas de Calcule ses limites en $-1$ et en $0$.

3) Calcule $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ puis démontre que l'on a :

$$\forall\, x \in\ ]-\infty\ ;\ -1[\ \cup \left]-\frac{1}{2}\ ; 0\right[\ ; g(x) < 0 \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \left]-1\ ;\ -\frac{1}{2}\right[ \cup\ ]0\ ; +\infty[\ ; g(x) > 0$$

**<u>Partie B</u>** : Etude de la limite de $f$ à l'infini.

1) Soient les fonctions $h$ et $k$ définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$h : t \to ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad k : t \to ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)$$

Après une brève étude sur $[0\ ;\ +\infty[$ des fonctions $h$ et $k$ ; Démontre que :

$$\forall\, t \geq 0\ ;\ \text{on a} : t - \frac{t^2}{2} \leq\ ln(1+t) \leq\ t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$$

2) En déduis que $\lim\limits_{t \to 0} \frac{t - ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$

3) En utilisant les résultats précédents, Démontre que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

Donne une interprétation graphique des résultats de la question précédente.

**<u>Partie C</u>** : Etude de la fonction $f$.

1) Détermine D$f$ et Détermine la limite de $f$ en $-1$
2) Etudie la continuité de $f$ en 0
3) Démontre que $f$ est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$

4) Calcule la dérivée de $f$ et Démontre que $f'(x) = x \times g(x)$

5) Dresse le tableau de variations de $f$

6) Détermine une équation de la tangente $(T)$à $(Cf)$au point d'abscisse 0

Détermine les asymptotes à $(Cf)$.

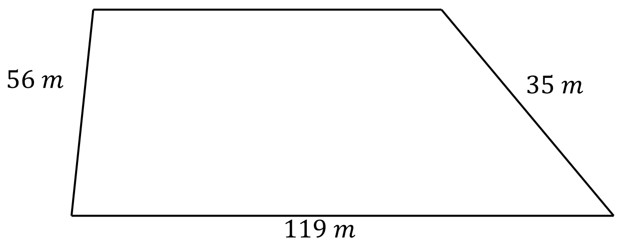
7) Montre que l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions 0 et $\beta$ avec $-0{,}8 < \beta < -0{,}7$.

8) Trace $(T)$ ; les asymptotes et la courbe $(Cf)$.

# Correction Sujet 8 (TSE-STI)

**<u>Exercice 1</u>……………….…………………………………………(5 *points*)**

I// Un Champ a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement 119$m$ et 91$m$; les deux autres cotés mesurent 56$m$ et 35$m$. Pour la clôture, le propriétaire Mr DEMBELE a besoin des poteaux de support à égale distance mesurée en nombre entier de mètre pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.




1) Déterminons la distance entre deux poteaux quelconques

Cette distance correspond au $PGCD(119\ ;\ 91\ ;\ 56\ ;\ 35)$ =>

$PGCD\ (7 \times 17\ ;\ 7 \times 13\ ;\ 7 \times 8\ ;\ 7 \times 5) = 7 \times \text{PGCD}(17\ ;\ 13\ ;8\ ;\ 5) = 7$

Car $PGCD\ (17\ ;\ 13\ ;8\ ;\ 5) = 1$ puisque $17\ ;\ 13\ ;8\ ;\ 5$ sont premiers entre eux.

2) Déterminons le nombre de poteaux nécessaires à la clôture.

Ce nombre de poteaux correspond à : $\frac{119+91+56+35}{7} = 43$

II// Dans un village, on choisit une personne au hasard (tous les choix sont équiprobables). On désigne par :

- $H$ L'évènement : ≪ Cette personne est un homme≫.
- $B$ L'évènement : ≪ Cette personne a les yeux bleus≫.
- $M$ L'évènement : ≪ Cette personne a les yeux marrons ≫.
- $V$ L'évènement : ≪ Cette personne a les yeux verts≫.

1) Exprimons par une phrase chacun des évènements suivants :
$H \cap B$ est l'évènement : ≪ Cette personne est un homme *et a les yeux bleus* ≫.
$H \cap M$ est l'évènement : ≪ Cette personne est un homme *et a les yeux* marrons ≫.

$H \cap V$ est l'évènement : ≪ Cette personne est un homme *et a les yeux* verts ≫.

$\overline{H} \cap B$ est l'évènement : ≪ Cette personne est une femme *et a les yeux bleues* ≫.

$\overline{H} \cap M$ est l'évènement : ≪ Cette personne est une femme *et a les yeux* marrons ≫.

$\overline{H} \cap V$ est l'évènement : ≪ Cette personne est une femme *et a les yeux* verts ≫.

$\overline{H} \cap \overline{B}$ est l'évènement : ≪ Cette personne est une femme *et n'a pasles yeux bleues* ≫.

2) On donne : $\mathrm{P}(H) = \frac{1}{2}$ ; $\mathrm{P}(B) = \frac{3}{4}$; $\mathrm{P}(M) = \frac{2}{7}$ ; $\mathrm{P}(V) = \frac{1}{5}$

Calculons : $\mathrm{P}(H \cap B)$ ; $\mathrm{P}(H \cap M)$ ; $\mathrm{P}(H \cap V)$ ; $\mathrm{P}(\overline{H} \cap B)$ ; $\mathrm{P}(\overline{H} \cap M)$ ; $\mathrm{P}(\overline{H} \cap \overline{B})$

$\mathrm{P}(H \cap B) = \mathrm{P}(H) \times \mathrm{P}(B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

$\mathrm{P}(H \cap M) = \mathrm{P}(H) \times \mathrm{P}(M) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$

$\mathrm{P}(H \cap V) = \mathrm{P}(H) \times \mathrm{P}(V) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

$\mathrm{P}(\overline{H} \cap B) = \mathrm{P}(\overline{H}) \times \mathrm{P}(B) = \left(1 - \mathrm{P}(H)\right) \times \mathrm{P}(B) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

$\mathrm{P}(\overline{H} \cap M) = \mathrm{P}(\overline{H}) \times \mathrm{P}(M) = \left(1 - \mathrm{P}(H)\right) \times \mathrm{P}(M) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{2}{7} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$

$\mathrm{P}(\overline{H} \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(\overline{H}) \times \mathrm{P}(\overline{B}) = \left(1 - \mathrm{P}(H)\right) \times \left(1 - \mathrm{P}(B)\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

**Exercice 2……………….……………………………………….(5 *points*)**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ ; on considère les points : $A_1$ ; $A_2$ ; ; $A_3$ ; … … . . $A_n$ dont les affixes sont les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^n = 1$ avec $(n \in \mathbb{N}\ ; n \geq 2)$. On désigne par $Z_1$ le complexe telque $Z_1 = cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

1) Exprimons en fonction de $Z_1$, les racines de l'équation $Z^n = 1$.

Les racines de l'équation $Z^n = 1$ sont les nombres complexes $z_k$ tels que :

$z_k = cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ Avec $k \in \{1\ ; 2\ ; \ldots . . ;\ (n-1)\}$. Donc :

$Z_1 = cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

$Z_2 = cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{4\pi}{n}\right) = cos2\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isin2\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \left[cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^2 = Z_1^2$

$Z_3 = cos\left(\frac{6\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{6\pi}{n}\right) = cos3\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isin3\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \left[cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^3 = Z_1^3$

=> $Z_n = \left[cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^n = Z_1^n$

2) Déterminons l'isobarycentre des points $A_1$ ; $A_2$ ; ; $A_3$ ; … … . . $A_n$.

L'isobarycentre G associé aux points $A_1$ ; $A_2$ ; ; $A_3$ ; … … . . $A_n$ est défini par :

$\{(A_1\,;1)\,;\,(A_2\,;1)\,;(A_3\,;1)\,\ldots\ldots(A_n\,;1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GA_3}+\cdots\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$

En introduisant le point $A_1$, on a :

$\overrightarrow{GA_1}+\left(\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}\right)+\cdots+\left(\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{A_1A_n}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{A_1A_n}=\vec{0} \Leftrightarrow$

$n\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_1A_n}=\vec{0} \Leftrightarrow$

$n\overrightarrow{GA_1}=-\left(\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_1A_n}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow$

$-n\overrightarrow{A_1G}=-\left(\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_1A_n}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow$

$n\overrightarrow{A_1G}=\left(\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_1A_n}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{A_1G}=\frac{1}{n}\left(\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_1A_n}\right)$

3) Déterminons l'ensemble des points $M$ du plan tel que :

$\left\|\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MA_3}+\cdots+\overrightarrow{MA_n}\right\|=n$

On a $\left\|\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MA_3}+\cdots+\overrightarrow{MA_n}\right\|=n \Leftrightarrow$

$\left\|\sum\alpha_n\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GA_3}+\cdots\overrightarrow{GA_n}\right\|=n \Leftrightarrow$

$\left\|\sum\alpha_n\overrightarrow{MG}+\vec{0}\right\|=n \Leftrightarrow$ (Car $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GA_3}+\cdots\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$ )

$\left\|n\overrightarrow{MG}\right\|=n \Leftrightarrow n\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=n \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MG}\right\|=1 \Leftrightarrow MG=1.$

Alors l'ensemble des points $M$ du plan cherché est le cercle de centre $G$ et de rayon $r=1$.

## <u>Problème</u>……………………………………………………………$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

L'objectif de c e problème est l'étude complète de la fonction numérique $f$ définie pour tout nombre réel $x$ différent de $-1$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x-\ x^2ln\left|1+\frac{1}{x}\right|\ si\ x\neq 0 \\ f(x)=0 \end{cases}$$

**Les parties A et B sont indépendantes.**

On notera $(Cf)$la représentation graphique de $f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

**Partie A** : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit $g$ la fonction numérique définie par : $g(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$

1) Déterminons l'ensemble de définition D$g$

D$g = \left\{x \,/\, x \in \mathbb{R}\,; x(x+1) \neq 0 \;et\; 1 + \frac{1}{x} \neq 0\right\}$ => D$g = \mathbb{R} - \{0\,;\, -1\}$

=> D$g = \left]-\infty\,;\, -1\right[ \cup \left]-1\,; 0\right[ \cup \left]0\,;\, +\infty\right[$

Déterminons les limites de $g$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^2} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = 0$$

2) Etudions les variations de $g$ ; on ne demande pas de Calcule ses limites en $-1$ et en 0.

$g(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$ => $g'(x) = \frac{-1}{x^2(x+1)^2}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{0\,; -1\}$ ; on a : $g'(x) < 0$

D'où le tableau de variation de $g$ est le suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | ↘ | ‖ | ↘ | $0$ | ↘ | ‖ | ↘ | $0$ |

3) Calculons $g\left(-\frac{1}{2}\right)$

$g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

D'après le tableau de variation de $g$ ; on a :

$\forall\, x \in \left]-\infty\,;\, -1\right[ \cup \left]-\frac{1}{2}\,; 0\right[\,; g(x) < 0$ et $\forall\, x \in \left]-1\,;\, -\frac{1}{2}\right[ \cup \left]0\,; +\infty\right[\,; g(x) > 0$

**Partie B** : Etude de la limite de $f$ à l'infini.

1) Soient les fonctions $h$ et $k$ définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$h : t \rightarrow ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2}\right)$ et $k : t \rightarrow ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)$

Après une brève étude sur $[0\ ;\ +\infty[$ des fonctions $h$ et $k$ ; démontrons que :

$\forall\, t \geq 0$ ; on a : $t - \frac{t^2}{2} \leq\ ln(1+t) \leq\ t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

- Etude brève de $h(t) = ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2}\right)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$

$h'(t) = \frac{t^2}{1+t}$ => $\forall\, t \in$ ; $[0\ ;\ +\infty[$ $h'(t) \geq 0$. Alors $h$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

De plus $h(0) = 0$. Donc $\forall\, t \geq 0$ ; on a : $h(t) \geq 0$ et par suite $t - \frac{t^2}{2} \leq\ ln(1+t)$

- Etude brève de $k(t) = ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$

$k'(t) = -\frac{t^3}{1+t}$ => $\forall\, t \in$ ; $[0\ ;\ +\infty[$ $k'(t) \leq 0$. Alors $k$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

De plus $k(0) = 0$. Donc $\forall\, t \geq 0$ ; on a : $k(t) \leq 0$ et par suite $ln(1+t) \leq\ t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

**Conclusion** $\forall\, t \geq 0$ ; on a : $t - \frac{t^2}{2} \leq\ ln(1+t) \leq\ t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

D'après ce qui précède, on a : $t - \frac{t^2}{2} \leq\ ln(1+t) \leq\ t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

Multiplions tous les membres de l'inégalité par $-1$. Ainsi on a :

$-t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \leq\ -ln(1+t) \leq\ -t + \frac{t^2}{2}$

Ajoutons $t$ à tous les membres de l'inégalité. Ainsi on a :

$\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \leq\ t - ln(1+t) \leq\ \frac{t^2}{2}$

Divisons tous les membres de l'inégalité par$t^2$. Ainsi on a :

$\frac{1}{2} - \frac{t}{3} \leq\ \frac{t - ln(1+t)}{t^2} \leq\ \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{2} - \frac{t}{3} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Alors d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{t \to 0} \frac{t - ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$

3) En utilisant les résultats précédents, démontrons que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

$f(x) = x - x^2 ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$. Posons $x = \frac{1}{t}$ => $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} ln(1+t)$.

Quand $t$ tend vers 0 , alors $x$ tend vers $+\infty$

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{t - ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$ De même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{t - ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$

Interprétation graphique des résultats de la question précédente.

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ . Alors la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$

Alors la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe $(Cf)$

**<u>Partie C</u>** : Etude de la fonction $f$.

$f(x) = x - x^2 ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$

1) Déterminons D$f$

D$f$ $= \left\{x \,/\, x \in \mathbb{R} \,; x \neq 0 \; et \; 1 + \frac{1}{x} \neq 0\right\}$ => D$f$ $= \mathbb{R} - \{0\,;\, -1\}$

=> D$f$ $= \left]-\infty\,;\, -1\right[ \cup \left]-1\,;0\right[ \cup \left]0\,;\, +\infty\right[$

Calculons la limite de $f$ en $-1$

$\forall x \in$ D$f$ ; $f(x) = x - x^2 ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$ et on a : $\lim\limits_{x \to -1} ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$

2) Etudions la continuité de $f$ en 0

$f$ est continue en 0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x - x^2 ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = \lim\limits_{x \to 0} x - x^2 ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$

$= \lim\limits_{x \to 0} x - x^2 ln|x+1| + x^2 ln|x|$. Or $\lim\limits_{x \to 0} xlnx = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. De plus $f(0) = 0$ donc $f$ est continue en 0

3) Démontrons que $f$ est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$

$f$ est dérivable en 0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x - x^2 ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 1 - xln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$

$= \lim\limits_{x \to 0} 1 - xln|x+1| + xln|x|$. Or $\lim\limits_{x \to 0} xln|x| = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$

**<u>Conclusion</u>** : $f$ est dérivable en 0 et son nombre dérivé est $f'(0) = 1$

4) Calculons la dérivée de $f$ et démontrons que $f'(x) = x \times g(x)$

$\forall x \in$ D$f$ ; $f(x) = x - x^2 ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$ => $f'(x) = \frac{2x+1}{x+1} - 2xln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$

=> $f'(x) = x\left[\frac{2x+1}{x(x+1)} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|\right]$ => $f'(x) = x \times g(x)$ (Ce qu'il fallait Démontre )

5) Dressons le tableau de variations de $f$

D'après **Partie A ; 3)** , et **Partie C ; 4) on a** :

$\forall\, x \in \left]-\infty\,;\,-1\right[ \cup \left]-\frac{1}{2}\,;0\right[ \cup \left]0\,;+\infty\right[\,; f'(x) > 0$ et $\forall\, x \in \left]-1\,;\,-\frac{1}{2}\right[; f'(x) < 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ¦ | $+$ | |
| $g(x)$ | $\frac{1}{2}$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $-\frac{1}{2}$ | ↗ | $0$ | ↗ | $-\frac{1}{2}$ |

6) Déterminons une équation de la tangente $(T)$à $(Cf)$au point d'abscisse 0

L'équation de la tangente $(T)$à $(Cf)$au point d'abscisse 0 est $y = x$

Déterminons les asymptotes à $(Cf)$.

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$. Alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe $(Cf)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ . Alors la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote verticale à la Courbe $(Cf)$.

7) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions 0 et $\beta$ avec $-0{,}8 < \beta < -0{,}7$.

- $\forall\, x \in \left]-1\,;-\frac{1}{2}\right]; f$ est continue et strictement décroissante de $\left]-1\,;-\frac{1}{2}\right]$ vers $\left[-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\beta$ telle que $f(\beta) = 0$

- De plus $\begin{cases} f(-0{,}8) = 0{,}O87 \\ f(-0{,}7) = -0{,}28 \end{cases}$ => $f(-0{,}8) \times f(-0{,}7) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\beta \in \left]-0{,}8\;;\;-0{,}7\right[$

De même :

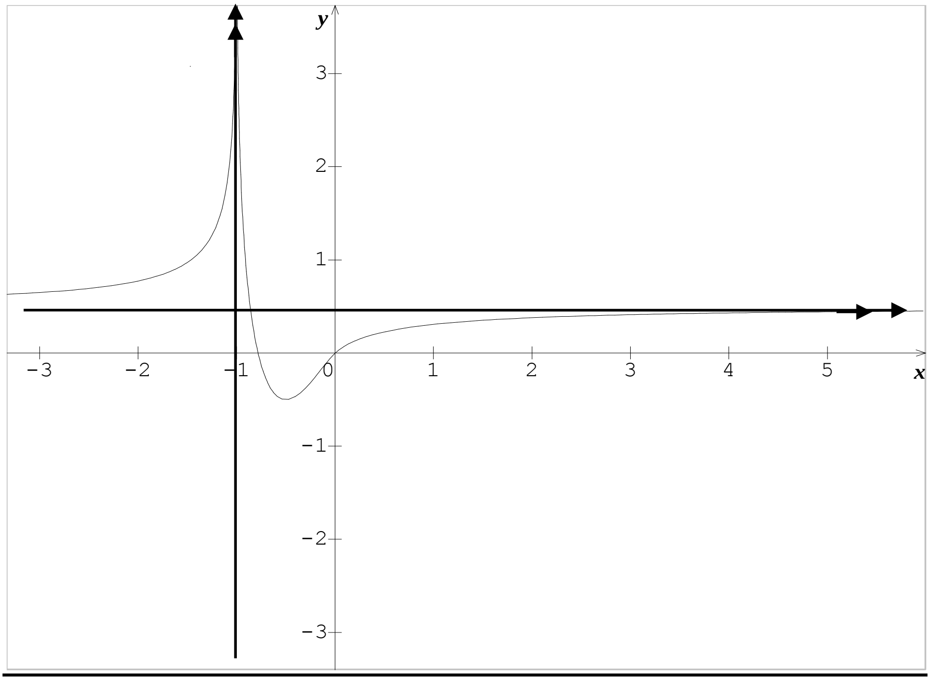
$\forall\, x \in \left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[\,; f$ est continue et strictement croissante de $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ vers $\left]-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right[$
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\delta$ telle que $f(\delta) = 0$

Or $f(0) = 0$ donc $\delta = 0$

$\forall x \in ]-\infty\,;\,-1[\,;\, f(x) > 0.$

**Conclusion** : l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions $0$ et $\beta$ avec $-0{,}8 < \beta < -0{,}7$.

8) Traçons $(T)$ ; les asymptotes et la courbe $(Cf)$



# Sujet 9 (TSE-STI)

## Exercice 1…………………..………………………………………………($5\ points$)

I// Détermine l'ensemble des couples $(a\ ;b)$ d'entiers relatifs vérifiant les conditions données ci-dessous :

1) $\begin{cases} m\ + 3\Delta = 276 \\ 10\ < \Delta < 30 \end{cases}$ ; 2) $\begin{cases} a^2 -\ b^2 = 405 \\ 3m = a \bullet b \end{cases}$

II// Un bloc métallique est déposé dans un four dont la température constante est de 1000°C.

La température $\theta$ est une fonction du temps $t$ $(en\ heures)$ qui vérifie l'équation différentielle

$(E)$: $\theta'(t) = k[1000 - \theta(t)]\ ; k \in \mathbb{R}_+^*$.

1) On pose $y(t) = \theta(t) - 1000$.
   Ecris une équation différentielle $(F)$ satisfaite par $y$.
2) Résous $(F)$ puis $(E)$.
3) Le bloc, initialement à 40°C est déposé dans le four au temps $t_0 = 0$. Sa température est de 160°C au bout d'une heure. En déduis l'expression de $\theta(t)$ en fonction de $t$ uniquement.
4) a- Calcule la température du bloc au temps $t = 3$ heures.
   b- Détermine le temps T à partir duquel la température du bloc dépassera 500°C.
   On donne $\left(\frac{7}{8}\right)^3 = 0{,}7$ ; $ln\left(\frac{7}{8}\right) = -0{,}13$ ; $ln\left(\frac{25}{48}\right) = -0{,}65$

## Exercice 2…………………..………………………………………………($5\ points$)

I// On considère la variable aléatoire prenant ses valeurs dans {2 ; 4 ; 6 ; 8} dont la loi de probabilité est donnée par :

| $x_i$ | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{4}$ | $a$ | $\frac{3}{4}$ | $b$ |

1) Donne une relation entre $a$ et $b$
2) On suppose que l'espérance mathématique est : $E(X) = \frac{21}{4}$. Détermine $a$ et $b$.
3) Calcule La variance V(X) de X.

II// Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé$(\ O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine $f$ : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$$

1) Vérifie que $f$ est bijective.

2) Détermine l'ensemble des points invariants par $f$

3) $f$ est elle une isométrie ? Justifie votre réponse.

**Problème**.............................................................**($10$ *points*)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ , unité graphique : 2 $cm$.

**Partie A :**

Soit $g$ la fonction numérique définie sur $]-\pi\ ;0[$ par $g(x) = cox^2x + cosx - 1$.

1) a) Montrer que $g$ est dérivable sur $]-\pi\ ;0[$ et que $g'(x) = -(1 + 2cosx)sinx$.

b) En déduire que $g'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \left]-\pi\ ;-\frac{2\pi}{3}\right]$ et que $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}\ ;0\right[$.

c) Dresser le tableau de variation de $g$.

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\beta\ sur]-\pi\ ;0[$ et que $\beta \in \left]-\frac{\pi}{3}\ ;-\frac{\pi}{4}\right[$ .

b) En déduire le signe de $g$ sur $]-\pi\ ;0[$

**Partie B :**

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $]-\pi\ ;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2sin(2x)}{1+cosx} + \frac{1}{2} & si\ x \in\ ]-\pi\ ;0] \\ & et \\ f(x) = 2 - \frac{3}{e^{3x}+1} & si\ x \in\ ]0\ ;+\infty[ \end{cases}$$

On note $(Cf)$la courbe représentative de $f$.

1) Etudier la continuité de $f$ en 0.

2) Etudier la dérivabilité de $f$ en 0 puis en déduire une interprétation géométrique des résultats obtenus.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) Montrer que pour tout $x \in\ ]-\pi\ ;0[$, on a : $f(x) = \frac{4(1-cosx)sinxcosx}{1-cos^2x} + \frac{1}{2}$ en déduire que $\lim\limits_{x \to -\pi} f(x) = +\infty$

c) En déduire les asymptotes de la courbe $(Cf)$.

4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in\ ]0\ ;+\infty[$ puis en déduire le sens de variation de $f$ sur $]0\ ;+\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x \in\ ]-\pi\ ;0[$, on a : $f'(x) = \frac{4g(x)}{1+cosx}$ puis en déduire le sens de variation de $f$ sur $]-\pi\ ;0[$.

c) Dresser le tableau de variation de $f$ sur $]-\pi\ ;+\infty[$.

5) Construire la courbe $(Cf)$, ses asymptotes et ses demi-tangentes au point d'abscisse 0.

**Partie C :**

On admet que tout $x \in [1{,}5\ ;2]$, on a : $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ $(\boldsymbol{R})$.

2) Soit $h$ la fonction numérique définie sur $[1{,}5\ ;2]$ par : $h(x) = f(x) - x$.
Etudier les variations de $h$ puis en déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [1{,}5\ ;2]$.

3) Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1{,}5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1{,}5\ ;2]$. (On pourra utiliser la relation $(\boldsymbol{R})$)

b) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ ; on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$ et que :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

c) En déduire par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

d) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

e) Déterminer un entier $p$ tel que pour $n \geq p$ on ait : $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ puis donné à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de $u_p$ à $10^{-3}$près.

# Correction Sujet 9 (TSE-STI)

**Exercice 1**……………….……………………………………………($\mathbf{5\ points}$)

I// b) $\begin{cases} m + 3\Delta = 276 \\ 10 < \Delta < 30 \end{cases}$

Cherchons tous les diviseurs de 276

Par décomposition de 276 en produit de facteurs premiers, on obtient :

$D_{276}$ = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12 ; 23 ; 46 ; 69 }

Soient $a$ et $b$ deux entiers naturels non nuls. Si $\Delta$ et $m$désignent respectivement le

PGCD et le PPCM des entiers naturels : $a$ et $b$ , on a :

- $a \bullet b = m \bullet \Delta$

Ainsi il existe deux entiers $a'$et $b'$ premiers entre eux (PGCD ( $a'$ ; $b'$ ) = 1) tel que :

- $a = a' \bullet \Delta$ et $b = b' \bullet \Delta$ => $a \bullet b = \Delta^2 \bullet a'b'$

=> $\Delta^2 \bullet a'b' = m \bullet \Delta$ <=> $m = a'b' \bullet \Delta$

Alors le système devient :

$$\begin{cases} a'b' \bullet \Delta + 3\Delta = 276 \\ 0 < \Delta < 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta(a'b' + 3) = 276 \\ 0 < \Delta < 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a'b' + 3 = \frac{276}{\Delta} \\ 0 < \Delta < 30 \end{cases}$$

Or $0 < \Delta < 30$ <=> $\Delta \in \{12 ; 23\}$car l'ensemble des diviseurs de 276 comprises entre 0 et 30 sont : 12 et 23

**<u>1[er] cas : Si Δ = 12, on a :</u>**

$a'b' + 3 = \frac{276}{12}$ <=> $a'b' + 3 = 23$ =>$a'b' = 20$

Puisque PGCD( $a'b'$) = 1 alors ( $a'b'$) ∈ {( 4 ; 5 ) ; ( 5 ; 4 ) ; ( 20 ; 1 ) ; ( 1 ; 20 )}

Or $a = 12a'$ et $b = 12b'$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a'$ | 4 | 5 | 20 | 1 |
| $b'$ | 5 | 4 | 1 | 20 |
| $a$ | 48 | 60 | 240 | 12 |
| $b$ | 60 | 48 | 12 | 240 |

=> $\boldsymbol{S_1}$ = {(48 ; 60 ) ; ( 60 ; 48 ); ( 240 ; 12 ) ; ( 12 ; 240 )}

**<u>2[er] cas : Si Δ = 23, on a :</u>**

$a'b' + 3 = \frac{276}{23}$ <=> $(a'b') + 3 = 12$ =>$a'b' = 9$

Puisque PGCD ( $a'b'$) = 1 alors ( $a'b'$) $\in$ $\{(9;1);(1;9)\}$

Or $a = 23a'$ et $b = 23b'$

| | | |
|---|---|---|
| $a'$ | 9 | 1 |
| $b'$ | 1 | 9 |
| $a$ | 207 | 23 |
| $b$ | 23 | 207 |

=> $\boldsymbol{S_2} = \{(207;23);(23;207)\}$

D'où $S = \{(48;60);(60;48);(240;12);(12;240);(207;23);(23;207)\}$

c) $\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = a \bullet b \end{cases}$

Soient $a$ et $b$ deux entiers naturels non nuls. Si $d$ et $m$ désignent respectivement le

PGCD et le PPCM des entiers naturels : $a$ et $b$ , on a :

- $a \bullet b = m \bullet d$

Ainsi il existe deux entiers $a'$ et $b'$ premiers entre eux (PGCD ( $a'$ ; $b'$ ) = 1) tel que :

- $a = a' \bullet d$ et $b = b' \bullet d$

Alors le système devient :

$\begin{cases} (a' \bullet d)^2 - (b' \bullet d)^2 = 405 \\ 3m = m \bullet d \end{cases}$ <=> $\begin{cases} a'^2 \bullet d^2 - b'^2 \bullet d^2 = 405 \\ d = 3 \end{cases}$ <=>

$\begin{cases} d^2(a'^2 - b'^2) = 405 \\ d = 3 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} 3^2(a'^2 - b'^2) = 405 \\ d = 3 \end{cases}$ <=>

$\begin{cases} 9(a'^2 - b'^2) = 405 \\ d = 3 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} a'^2 - b'^2 = 45 \\ d = 3 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} (a' - b')(a' + b') = 45 \\ d = 3 \end{cases}$

Résous ce système, revient à Résous les cas de systèmes suivants :

$\begin{cases} a' - b' = 1 \\ a' + b' = 45 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a' - b' = 5 \\ a' + b' = 9 \end{cases}$ ( Car PGCD( $a'$ ; $b'$ ) = 1 ) Ainsi :

Pour $\begin{cases} a' - b' = 1 \\ a' + b' = 45 \end{cases}$ , on a : $\begin{cases} a' = 23 \\ b' = 22 \end{cases}$ => $\begin{cases} a = 69 \\ b = 66 \end{cases}$ =>$S_1 = \{(69;66)\}$

Pour $\begin{cases} a' - b' = 5 \\ a' + b' = 9 \end{cases}$ , on a : $\begin{cases} a' = 7 \\ b' = 2 \end{cases}$ => $\begin{cases} a = 7 \\ b = 6 \end{cases}$ =>$S_1 = \{(7;6)\}$

=> $\boldsymbol{S} = \{(69;66);(7;6)\}$

II//Un bloc de métallique est déposé dans un four dont la température constante est de 1000°C. La température $\theta$ est une fonction du temps $t$ $(en\ heures)$ qui vérifie l'équation différentielle

$(E)$: $\theta'(t) = k[1000 - \theta(t)]$ ; $k \in \mathbb{R}_+^*$.

1) On pose $y(t) = \theta(t) - 1000$.

Ecrivons une équation différentielle $(F)$ satisfaite par $y$.

On a $y(t) = \theta(t) - 1000$ => $y'(t) = \theta'(t)$. Or $\theta'(t) = k[1000 - \theta(t)]$

=> $y'(t) = k[1000 - \theta(t)] = 1000k - k\theta(t)$. Or $\theta(t) = y(t) + 1000$

Donc $y'(t) = 1000k - k[y(t) + 1000]$

=> $y'(t) = 1000k - ky(t) - 1000k = -ky(t) \Leftrightarrow y'(t) + ky(t) = 0$

D'où $(\boldsymbol{F})$: $\boldsymbol{y'(t) + ky(t) = 0}$

2) Résolvons $(F)$: $y'(t) + ky(t) = 0$

$(F)$: $y'(t) + ky(t) = 0$

Ainsi la solution générale de $(F)$ est : $t \mapsto y(t) = Ae^{-kt}$ ; avec $k \in \mathbb{R}$.

**D'où $\boldsymbol{y(t) = Ae^{-kt}}$ avec $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$.**

Résolvons $(E)$: $\theta'(t) = k[1000 - \theta(t)]$

On sait que $y(t) = \theta(t) - 1000$ => $\theta(t) = y(t) + 1000 \Leftrightarrow \theta(t) = Ae^{-kt} + 1000$

Ainsi la solution générale de $(E)$ est : $t \mapsto \theta(t) = Ae^{-kt} + 1000$ ; avec $k \in \mathbb{R}$.

**D'où $\boldsymbol{\theta(t) = Ae^{-kt} + 1000}$ ; avec $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$.**

3) En déduisons l'expression de $\theta(t)$ en fonction de $t$ uniquement.

- Le bloc, initialement à 40°C est déposé dans le four au temps $t_0 = 0$.

=> $\theta(0) = 40 \Leftrightarrow Ae^0 + 1000 = 40 \Leftrightarrow A + 1000 = 40$ => $A = -960$

Donc $\theta(t) = -960e^{-kt} + 1000$

- Sa température est de 160°C au bout d'une heure.

=> $\theta(1) = 160 \Leftrightarrow -960e^{-k} + 1000 = 160 \Leftrightarrow -960\, e^{-k} = -840$

$\Leftrightarrow e^{-k} = \frac{-840}{-960} \Leftrightarrow e^{-k} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow -k = ln\left(\frac{7}{8}\right)$

D'où l'expression de $\theta(t)$ en fonction de $t$ uniquement est :

$\theta(t) = -960 \ \ e^{tln\left(\frac{7}{8}\right)} \ + 1000$ ou $\theta(t) = -960 \ \ e^{-tln\left(\frac{8}{7}\right)} \ + 1000$

4) a- Calculons la température du bloc au temps $t = 3$ heures.

$\theta(3) = -960 \ \ e^{3ln\left(\frac{7}{8}\right)} \ + 1000 = -960 \times 0{,}7 + 1000 = 328°C$

D'où la température du bloc au bout de 3 heures est $328°C$ .

b- Déterminons le temps T à partir duquel la température du bloc dépassera 500°C.

On a : $\theta(t) \geq 500 \Leftrightarrow -960 \ \ e^{tln\left(\frac{7}{8}\right)} \ + 1000 \geq 500 \ \ \Leftrightarrow e^{tln\left(\frac{7}{8}\right)} \leq \frac{500}{960}$

$\Leftrightarrow tln\left(\frac{7}{8}\right) \leq ln\left(\frac{500}{960}\right) \Rightarrow t \geq \frac{ln\left(\frac{500}{960}\right)}{ln\left(\frac{7}{8}\right)}$ car $ln\left(\frac{7}{8}\right) < 0 \ \Rightarrow t \geq 5$. D'où $T = 5$ heures.

D'où la température du bloc dépassera 500°C au bout de 5 heures.

**Exercice 2**……………….………………………………………(**5 *points***)

I// On considère la variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$ dont la loi de probabilité est donnée par :

| $x_i$ | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{4}$ | $a$ | $\frac{3}{4}$ | $b$ |

1) Donnons une relation entre $a$ et $b$

La somme des lois de probabilités étant égale à 1, on a : $\frac{1}{4} + a + \frac{3}{4} + b = 1 \Leftrightarrow$
$a + b + 1 = 1 \Leftrightarrow \ a + b = 0 \ (1)$

2) On pose $E(X) = \frac{21}{4}$. Déterminons $a$ et $b$

$E(X) = \frac{21}{4} \Leftrightarrow 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times a + 6 \times \frac{3}{4} + 8 \times b = \frac{21}{4} \Leftrightarrow \ 16a + 32b = 1 \ (2)$

$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 & (1) \\ 16a + 32b = 1 & (2) \end{cases}$

La résolution de ce système donne : $a = -\frac{1}{16}$ et $b = \frac{1}{16}$ . D'où on a :

| $x_i$ | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{16}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{16}$ |

3) Calculons La variance V(X) de X

$V(X) = \sum {x_i}^2 \times P_i - E^2(X) = 2^2 \times \frac{1}{4} - 4^2 \times \frac{1}{16} + 6^2 \times \frac{3}{4} + 8^2 \times \frac{1}{16} - \left(\frac{21}{4}\right)^2 = -\frac{131}{10}$

II// Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé$(\ O \ ; \ \vec{u} \ ; \ \vec{v})$ et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine $f$ : P → P qui à tout point $M\binom{x}{y} \to M'\binom{x}{y}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$$

1) Vérifions que $f$ est bijective.

$f$ Est bijective si et seulement si $detM \neq 0$

Soit $\varphi$ l'endomorphisme associé à $f$ .

La matrice de $f$ dans la base $(\vec{i}\,;\,\vec{j})$ est $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

Matrice est : $detM = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

$detM = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \neq 0$. Alors $f$ est bijective.

2) Déterminons l'ensemble des points invariants par $f$

$f$ Admet un point invariant si et seulement si $f(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

$$=> \begin{cases} x = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y\sqrt{3} = 2 \\ -x\sqrt{3} + y = -2\sqrt{3} \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $x = 2$ et $y = 0$

D'où $A\binom{2}{0}$ est le point invariant.

3) Vérifions si $f$ est une isométrie

$f$ est une isométrie si et seulement si son expression analytique est sous la forme :

$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases}$ C'est-à-dire si $detM = a^2 + b^2 = 1$ avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

On a $f : \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$ => $detM = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

D'où $f$ est une isométrie et cette isométrie est positive car $a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

## **Problème**……………………………………………………………$(\mathbf{10\ points})$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ , unité graphique : 2 $cm$.

**Partie A :**

1) Soit $g$ la fonction numérique définie sur $]-\pi\ ; 0[$ par $g(x) = cox^2x + cosx - 1$.

a) Montrons que $g$ est dérivable sur $]-\pi\ ; 0[$ et que $g'(x) = -(1 + 2cosx)sinx$.

$g$ est la somme de deux fonctions dérivables sur $]-\pi\ ; 0[$ , alors $g$ est donc dérivable sur $]-\pi\ ; 0[$.

$g(x) = cox^2x + cosx - 1$ => $g'^{(x)} = 2(-sinx)cosx - sinx = -2sinxcosx - sinx = -(1 + 2cosx)sinx$.

D'où $g'(x) = -(1 + 2cosx)sinx$.

b) En déduisons que $g'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \left]-\pi\ ; -\frac{2\pi}{3}\right]$ et que $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}\ ; 0\right[$.

$\forall x \in\ ]-\pi\ ; 0[$ , $-sinx > 0$ alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $1 + 2cosx$. Posons $1 + 2cosx = 0 \Leftrightarrow cosx = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow cosx = -cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow cosx = cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$.

Or $cos\alpha = cos\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \quad ou \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc $cosx = cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \\ \quad ou \\ x = -\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \quad ou \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

Puisque $x \in\ ]-\pi\ ; 0[$, alors la seule valeur à retenir est $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

Etudions ainsi le signe de $1 + 2cosx$ sur $\left]-\pi\ ; -\frac{2\pi}{3}\right]$ et sur $\left[-\frac{2\pi}{3}\ ; 0\right[$.

Sur $\left]-\pi\ ; -\frac{2\pi}{3}\right]$, on a : $-\pi < x \leq -\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow\ cos(-\pi) < cosx \leq cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow\ cos(\pi) < cosx \leq cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow\ cos(\pi) < cosx \leq cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow\ cos(\pi) < cosx \leq -cos\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow\ -1 < cosx \leq -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\ -2 < 2cosx \leq -1$

$\Leftrightarrow\ -1 < 1 + 2cosx \leq 0$

Donc $\forall x \in \left]-\pi\,;-\frac{2\pi}{3}\right], 1+2cosx \leq 0$

Etudions ainsi le signe de $1+2cosx$ sur $\left[-\frac{2\pi}{3}\,;0\right[$

Sur $\left[-\frac{2\pi}{3}\,;0\right[$, on a : $-\frac{2\pi}{3} \leq x < 0$

$\Leftrightarrow \; cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \leq cosx < cos(0)$

$\Leftrightarrow \; cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \leq cosx < cos(0)$

$\Leftrightarrow \; cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) \leq cosx < cos(0)$

$\Leftrightarrow \; -cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq cosx < cos(0)$

$\Leftrightarrow \; -\frac{1}{2} \leq cosx < 1$

$\Leftrightarrow \; -1 \leq 2cosx < 2$

$\Leftrightarrow \; 0 \leq 1+2cosx < 3$

Donc $\forall x \in \left[-\frac{2\pi}{3}\,;0\right[, 1+2cosx \geq 0$

Par conséquent $g'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \left]-\pi\,;-\frac{2\pi}{3}\right]$ et $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}\,;0\right[$.
c) Dressons le tableau de variation de $g$.

| $x$ | $-\pi$ | | $-\frac{2\pi}{3}$ | | $\beta$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-sinx$ | | $+$ | | | | $+$ | |
| $1+2cosx$ | | $-$ | $0$ | | | $+$ | |
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | | | $+$ | |
| $g(x)$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\frac{5}{4}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |

2) a) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\beta$ sur $]-\pi\,;0[$ et que $\in \left]-\frac{\pi}{3}\,;-\frac{\pi}{4}\right[$ .
D'après le tableau de variation de $g$, on a :

- Pour tout $x \in \left]-\pi\,;-\frac{2\pi}{3}\right]$, $g$ est définie continue et strictement décroissante sur $\left]-\pi\,;-\frac{2\pi}{3}\right]$. Donc $g$ réalise une bijection de $\left]-\pi\,;-\frac{2\pi}{3}\right]$ vers $g\left(\left]-\pi\,;-\frac{2\pi}{3}\right]\right) = \left[-\frac{5}{4}\,;\,-1\right[$. Comme $0 \notin \left[-\frac{5}{4}\,;\,-1\right[$, alors l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $\left]-\pi\,;-\frac{2\pi}{3}\right]$.

- Pour tout $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}\,;0\right[$, $g$ est définie continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{2\pi}{3}\,;0\right[$. Donc $g$ réalise une bijection de $\left[-\frac{2\pi}{3}\,;0\right[$ vers

$g\left(\left[-\frac{2\pi}{3}\,;0\right[.\right) = \left[-\frac{5}{4}\,;\,1\right[$. Comme $0 \in \left[-\frac{5}{4}\,;\,-1\right[$, alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\beta$ dans $\left[-\frac{2\pi}{3}\,;0\right[$

Montrons que $\beta \in \left]-\frac{\pi}{3}\,;-\frac{\pi}{4}\right[$

$$\begin{cases} g\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4} \\ \quad et \\ g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \end{cases} \Rightarrow g\left(-\frac{\pi}{3}\right) \times g\left(-\frac{\pi}{4}\right) < 0.$$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\beta \in \left]-\frac{\pi}{3}\,;-\frac{\pi}{4}\right[$

**<u>Conclusion :</u>**

L'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\beta$ sur $]-\pi\,;0[$ avec $\beta \in \left]-\frac{\pi}{3}\,;-\frac{\pi}{4}\right[$.

b) En déduisons le signe de $g$ sur $]-\pi\,;0[$

De ce qui précède et d'après le tableau de variation de $g$, on a :

- Pour tout $x \in ]-\pi\,;\beta[$, $g(x) < 0$.
- Pour tout $x \in ]\beta\,;0[$, $g(x) > 0$.
- Pour $x = \beta$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow g(\beta) = 0$

**<u>Partie B :</u>**

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $]-\pi\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2sin(2x)}{1+cosx} + \frac{1}{2} \qquad si\ x \in ]-\pi\,;0] \\ \qquad\qquad et \\ f(x) = 2 - \frac{3}{e^{3x}+1} \qquad si\ x \in ]0\,;+\infty[ \end{cases}$$

On note $(Cf)$la courbe représentative de $f$.

1) Etudions la continuité de $f$ en 0.

$f$ est continue en 0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

**Continuité à gauche :**

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{2sin(2x)}{1+cosx} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2(0)}{1+0} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

**Continuité à droite :**

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+}\left(2 - \frac{3}{e^{3x}+1}\right) = 2 - \frac{3}{1+1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

**Puis que** $\boldsymbol{\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = \frac{1}{2}}$ **. Alors $f$ est continue en 0.**

2) Etudions la dérivabilité de $f$ en 0.

$f$ est continue en 0 si et seulement si $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

**Dérivabilité à gauche :**

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{2sin(2x)}{1+cosx}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2sin(2x)}{x(1+cosx)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{4sinxcosx}{x(1+cosx)}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} 4\frac{sinx}{x} \times \frac{cosx}{1+cosx} = 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = 2$$

Donc $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2$

**Dérivabilité à droite :**

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2-\frac{3}{e^{3x}+1}-\frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{3}{2}-\frac{3}{e^{3x}+1}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{3}{2}\left(1-\frac{2}{e^{3x}+1}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{3}{2} \times \frac{e^{3x}-1}{x(e^{3x}+1)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{9}{2} \times \frac{e^{3x}-1}{3x} \times \frac{1}{e^{3x}-1} = \frac{9}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$$

Donc $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{9}{4}$

**Puis que** $\boldsymbol{\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}}$**. Alors $f$ n'est pas dérivable en 0.**

En déduisons une interprétation géométrique des résultats obtenus.

La courbe $(Cf)$ admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes $(T_1)$ et $(T_2)$ de coefficients directeurs respectifs 2 à gauche de 0 et $\frac{9}{4}$ à droite de 0.

3) a) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{3}{e^{3x}+1}\right) = 2 - 0 = 2$$

b) Montrons que pour tout $x \in ]-\pi\,;0[$, on a : $f(x) = \frac{4(1-cosx)sinxcosx}{1-cos^2x} + \frac{1}{2}$

$$f(x) = \frac{2sin(2x)}{1+cosx} + \frac{1}{2} = \frac{1-cosx}{1-cosx} \times \left(\frac{2sin(2x)}{1+cosx}\right) + \frac{1}{2} = \frac{(1-cosx)(2sin2x)}{(1-cosx)(1+cosx)} + \frac{1}{2} = \frac{(1-cosx)(4sinxcosx)}{1-cos^2} + \frac{1}{2}$$

En déduisons $\lim\limits_{x \to -\pi} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to -\pi} \left(\frac{4(1-cosx)sinxcosx}{1-cos^2x} + \frac{1}{2}\right) = \lim_{x \to -\pi} \left(\frac{4(1-cosx)sinxcosx}{sin^2x} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\pi} \left(\frac{4(1-cosx)cosx}{sinx} + \frac{1}{2}\right) = \frac{-8}{0} + \frac{1}{2} = +\infty$$

c) En déduisons les asymptotes de la courbe $(Cf)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$. Alors la droite **d'équation $\boldsymbol{y = 2}$ est asymptote horizontale**

$\lim\limits_{x \to -\pi} f(x) = +\infty$. Alors la droite **d'équation $\boldsymbol{x = -\pi}$ est asymptote verticale**

4) a) Calculons $f'(x)$ pour tout $x \in ]0\,;+\infty[$

Pour tout $x \in ]0\,;+\infty[$ ,  on a : $f(x) = 2 - \frac{3}{e^{3x}+1}$ => $'(x) = \frac{3e^{3x}}{\left(e^{3x}+1\right)^2} > 0$.

En déduisons le sens de variation de $f$ sur $]0\,;+\infty[$.

De ce qui précède, on en déduit que $\forall x \in ]0\,;+\infty[$,  $f$  est strictement croissante.

b) Montrons que pour tout $x \in ]-\pi\,;0[$, on a : $f'(x) = \frac{4g(x)}{1+cosx}$

Pour tout $x \in ]-\pi\,;0[$ , on a : $f(x) = \frac{2sin(2x)}{1+cosx} + \frac{1}{2}$

$$=> f'(x) = 2 \times \frac{2cos2x(1+cosx)+sinx(sin2x)}{(1+cosx)^2} = 2 \times \frac{2cos^3x+4cos^2x-2}{(1+cosx)^2} = 4 \times \frac{cos^3x+2cos^2x-1}{(1+cosx)^2}$$

La forme factorisée de $cos^3x + 2cos^2x - 1$ en posant $cosx = X$, on a :

$X^3 + 2X^2 - 1 = (X+1)(X^2 + X - 1)$

Donc pour tout $x \in ]-\pi\,;0[$, $f'(x) = 4 \times \frac{(cosx+1)\left(cos^2x+cosx-1\right)}{(1+cosx)^2}$

$$= 4 \times \frac{g(x)}{(1+cosx)^2} = \frac{4g(x)}{(1+cosx)^2}$$

En déduisons le sens de variation de $f$ sur $]-\pi\,;0[$.

Pour tout $x \in ]-\pi\,;0[, \frac{4}{(1+cosx)^2} > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe $g(x)$.

Or d'après **<u>Partie A</u> 2) b)** , on a :

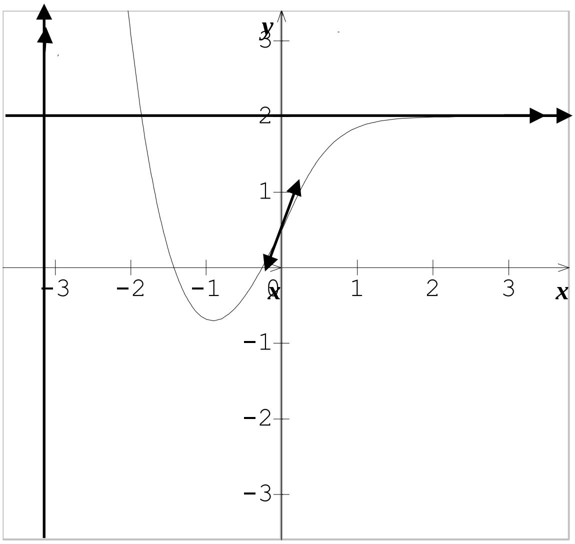
- Pour tout $x \in ]-\pi\,;\beta[$ , $g(x) < 0$ => $\forall x \in ]-\pi\,;\beta[$ , $f'(x) < 0$

- Pour tout $x \in ]\beta\,;0[$ , $g(x) > 0$ => $\forall x \in ]\beta\,;0[$ , $f'(x) > 0$

c) Dressons le tableau de variation de $f$ sur $]-\pi\,;+\infty[$.

| $x$ | $-\pi$ | | $\beta$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ¦ | | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(\beta)$ | ↗ | $\frac{1}{2}$ | ↗ | $2$ |

5) Construisons la courbe $(Cf)$, ses asymptotes et ses demi-tangentes au point d'abscisse 0.




**Partie C :**

On admet que tout $x \in [1{,}5\ ;2]$, on a : $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ $(\boldsymbol{R})$.

1) Soit $h$ la fonction numérique définie sur $[1{,}5\ ;2]$ par : $h(x) = f(x) - x$.

Etudions les variations de $h$

$\forall\, x \in [1{,}5\ ;2]$, $h(x) = f(x) - x$. $h$ est dérivable sur $[1{,}5\ ;2]$ comme somme de deux fonctions dérivables sur .

$h(x) = f(x) - x$ => $h'(x) = f'(x) - 1$ . Or $'(x) \leq \frac{1}{2} < 1$. D'où $h'(x) < 0$ et par conséquent $h$ est strictement décroissante sur $[1{,}5\ ;2]$.

En déduisons que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [1{,}5\ ;2]$.

$$\begin{cases} h(1{,}5) = f(1{,}5) - 1{,}5 = 0{,}5 - \frac{3}{e^{4,5}+1} \approx 0{,}45 \\ \qquad\qquad et \\ h(2) = f(2) - 2 = -0{,}007 = -7.10^{-3} \end{cases} \Rightarrow \quad h(1{,}5) \times h(2) < 0.$$

$h$ est continue et strictement décroissante sur $[1{,}5\ ;2]$. Alors $h$ réalise une bijection de $[1{,}5\ ;2]$ sur $h([1{,}5\ ;2]) = [-7 \bullet 10^{-3}\ ;\ 0{,}45]$. $0 \in [-7 \bullet 10^{-3}\ ;\ 0{,}45]$, donc 0 admet un antécédent unique $\alpha \in [1{,}5\ ;2]$ telque $h(\alpha) = 0$ et par conséquent l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$. Or $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.

D'où pour tout $x \in [1{,}5\ ;2]$, $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [1{,}5\ ;2]$

2) Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1{,}5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1{,}5\,;2]$. (On pourra utiliser la relation $(\boldsymbol{R})$)

Soit $P_n$ la propriété : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ; $u_n \in [1{,}5\,;2]$.

- Pour $n = 0$ , on a : $u_0 = 1{,}5 \in [1{,}5\,;2]$. D'où $P_0$ vraie.
- Supposons $P_n$ vraie et montrons $P_{n+1}$ vraie : Puisque $u_n \in [1{,}5\,;2]$ ; $\alpha \in [1{,}5\,;2]$ et pour tout $x \in [1{,}5\,;2]$ ; on a : $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

**Supposons $\boldsymbol{u_n \leq \alpha}$, alors on a :** $\int_{u_n}^{\alpha} 0\,dx \leq \int_{u_n}^{\alpha} f'(x)\,dx \leq \int_{u_n}^{\alpha} \frac{1}{2}dx \Leftrightarrow$

$$0 \leq [f(x)]_{u_n}^{\alpha} \leq \left[\frac{1}{2}x\right]_{u_n}^{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$0 \leq f(\alpha) - f(u_n) \leq \frac{1}{2}(\alpha - u_n) \Leftrightarrow$$

$$0 \leq \alpha - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\alpha - u_n) \Leftrightarrow$$

$$\alpha \leq \alpha - u_{n+1} + \alpha \leq \frac{1}{2}(u_n - \alpha) + \alpha \Leftrightarrow$$

$\alpha \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n + \alpha)$. Or $u_n \leq 2$ et $\alpha \leq 2 \Rightarrow u_n + \alpha \leq 4$. Donc :

$1{,}5 \leq \alpha \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n + \alpha) \leq 2 \Rightarrow 1{,}5 \leq u_{n+1} \leq 2$

Ainsi $u_{n+1} \in [1{,}5\,;2]$ et par conséquent $P_{n+1}$ vraie.

**Supposons maintenant $\boldsymbol{u_n \geq \alpha}$, alors on a :**

$$\int_{\alpha}^{u_n} 0\,dx \leq \int_{\alpha}^{u_n} f'(x)\,dx \leq \int_{\alpha}^{u_n} \frac{1}{2}dx \Leftrightarrow$$

$$0 \leq [f(x)]_{\alpha}^{u_n} \leq \left[\frac{1}{2}x\right]_{\alpha}^{u_n} \Leftrightarrow$$

$$0 \leq f(u_n) - f(\alpha) \leq \frac{1}{2}(u_n - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{2}(u_n - \alpha) \Leftrightarrow$$

$\alpha \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n + \alpha)$. Or $u_n \leq 2$ et $\alpha \leq 2 \Rightarrow u_n + \alpha \leq 4$. Par suite :

$1{,}5 \leq \alpha \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n + \alpha) \leq 2 \Rightarrow 1{,}5 \leq u_{n+1} \leq 2$
De même $u_{n+1} \in [1{,}5\,;2]$ et par conséquent $P_{n+1}$ vraie.

**Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1{,}5\,;2]$.

b) Montrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ ; on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$ et que :
$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$
Pour tout $x \in [1{,}5\,;2]$ ; on a : $f'(x) \leq \frac{1}{2}$ et $f'$ est continue sur $[1{,}5\,;2]$ ; de même :

$u_n \in [1{,}5\,;2]$ ; $\alpha \in [1{,}5\,;2]$. D'après l'inégalité de la moyenne on a :

$\left|\int_{\alpha}^{u_{n-1}} f'(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$. Soit $|f(u_{n-1}) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha| \Leftrightarrow$

$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$

Considérons la propriété $P_n$ la propriété : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ; $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$ .

- Pour $n = 0$ , on a : $|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^0}|u_0 - \alpha|$. D'où $P_0$ vraie.

- Supposons $P_n$ vraie et montrons $P_{n+1}$ vraie :

On a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$. Or $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$

$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|\right)$

$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|u_0 - \alpha|$ et par conséquent $P_{n+1}$ vraie.

Par suite $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ; $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$ .

c) En déduisons par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

De ce qui précède on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$ .

D'autre part on a : $1{,}5 \leq \alpha \leq 2 \Leftrightarrow$
$-2 \leq -\alpha \leq -1{,}5 \Leftrightarrow$

$u_0 - 2 \leq u_0 - \alpha \leq u_0 - 1{,}5$ . Or $u_0 = 1{,}5$

$-0{,}5 \leq u_0 - \alpha \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq u_0 - \alpha \leq 0$

$\Rightarrow \quad |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$.

Ce qui donne alors $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} \bullet \frac{1}{2} \Leftrightarrow |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

d) En déduisons que la suite $(u_n)$ est convergente.

On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$: $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ . Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0 \quad \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

D'où $(u_n)$ est convergente et converge vers $\alpha$.

e) Déterminons un entier $p$ tel que pour $n \geq p$ on ait : $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

On sait que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Pour avoir $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ ; il suffit d'avoir $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3}$ . Or $a^p = e^{p\ln a}$

=> $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow e^{(n+1)\ln\frac{1}{2}} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \ln\left[e^{(n+1)\ln\frac{1}{2}}\right] \leq \ln 10^{-3}$

$\Leftrightarrow (n+1)\ln\frac{1}{2} \leq -3\ln 10 \Leftrightarrow -(n+1)\ln 2 \leq -3\ln 10 \Leftrightarrow (n+1)\ln 2 \geq 3\ln 10$

=> $n + 1 \geq \frac{3\ln 10}{\ln 2} \Leftrightarrow n \geq \frac{3\ln 10}{\ln 2} - 1 \Leftrightarrow n \geq \frac{3\times 2{,}30}{0{,}69} - 1$

=> $n \geq 9$

D'où $p = 9$ => $|u_9 - \alpha| \leq 10^{-3}$

**Remarque :** $u_9$ est une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.

# Sujet 10 (TSE-STI)

## Exercice 1……………….……………………………………………(5 *points*)

I// Un grand-père dit à son petit-fils : ≪ La somme des quatres chiffres de ma date de naissance est 23. Le chiffre des centaines est inférieur de 1 à celui des dizaines et celui-ci dépasse de 4 celui des unités≫.

1) En quelle année suis-je né ?
2) Ecris cette l'année de ma date de naissance en base 12.

II// Soit $f$ l'application de $\mathbb{C}-\{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :$f(Z)=\frac{iZ}{Z+i}$. Dans le plan complexe rapporté au repère ortho normal direct $(o,\ \vec{u},\vec{v})$, on note M le point d'affixe Z.
1) Détermine les coordonnées du point B dont l'affixe $Z_B$ est telle que $f(Z_B)=1+2i$
2) Soit Z un élément de E. on note $r$ le module de $Z+i$ et α une mesure de son argument. Exprime la forme trigonométrique de $f(Z)-i$ en fonction de $r$ et α.
3) Soit A le point d'affixe $-i$

a) Détermine l'ensemble $(\Gamma)$ des points M vérifiant $|f(z)-i|=\sqrt{2}$

b) Montre que $B$ appartient à $(\Gamma)$.

## Exercice 2……………….……………………………………………(5 *points*)

Soient les intégrales I et J définies par : I $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{cos^2x}dx$ et J $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{cos^4x}dx$

1) Calcule I

2) Soit la fonction définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x)=\frac{sinx}{cos^3x}$.

a) Montre que $\forall\ x\in\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ on a : $f'(x)=\frac{3}{cos^4x}-\frac{2}{cos^2x}$.

b) En déduis une relation entre $I$ et $J$.

c) Calcule J.

## Problème…………………………………………………………(10 *points*)

On considère la fonction $f$, définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\frac{e^x}{(1+x)^2}$

On désigne par (C) la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$

### A) Etude de la fonction $f$ et tracé de (C)

1) a) Calcule la limite de cette fonction lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

b) Calcule la limite de cette fonction lorsque $x$ tend vers – 1. Que peut – on en déduis pour la courbe (C) ?

2) Calcule $f\,'(x)$ et Montre que son signe est celui de $\frac{x-1}{x+1}$

3) Dresse le tableau de variation de $f$.

4) Trace la courbe (C), les droites d'équations respectives $x = -1$ et $y = 1$, ainsi que la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0.

(Unité graphique : 4 cm)

5) Montre que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[1;\ 10]$.

Utilise le graphique précédent pour Donne deux nombres entiers consécutifs $a$ et $b$ tels que $\alpha$ appartient à l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

**B) Calcul d'une aire**

1) Soit $g$ la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x+1}$

a) Etudie le sens de variation de $g$ dans l'intervalle [1 ; 2].

b) Montre que, pour tout $x$ appartenant à $[1\ ;\ 2]$. on a : $1 \leq g(x) \leq 2{,}5$.

c) En déduis un encadrement de $A_1 = \int_1^2 g(x)dx$

2) Soit $A_2$ l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$, la courbe (C) et l'axe des abscisses.

A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $A_2$ en fonction de $A_1$ et en déduis un encadrement de $A_2$.

**C) Approximation d'un nombre à l'aide d'une suite**

Pour cette partie, on utilisera sans justification le fait que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution $\beta$ et que celle – ci est élément de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$

Soit $h$ la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \frac{e^x}{(1+\ x)^3}$

1) a) Vérifie que, pour tout x appartenant à $]-1\ ;\ +\infty[$, on a : $f\,'(x) = f(x) - 2h(x)$.

a) Calcule $h'(x)$.

b) En utilisant la question **a),** Calcule $f\,''(x)$**.** En déduis le sens de variation de $f\,'$ dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$

2) En déduis que, pour tout $x$ appartenant $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ à, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

3) On définit la suite $(u_n)$, pour tout nombre entier naturel $n$, par :

$u_0$= 1 et $u_{n+1}$ = $f(u_n)$, pour $n \geq 0$

On admet que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

a) Montre que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a : $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$

b) Montre par récurrence que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a : $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

c) En déduis une valeur approchée numérique de $\beta$ à $10^{-3}$ près.

# Correction Sujet 10 (TSE-STI)

## Exercice 1…………………..……………………………………………$(5\ \boldsymbol{points})$

I// Un grand-père dit à son petit-fils : ≪ La somme des quatres de ma date de naissance est 23. Le chiffre des centaines est inférieur de 1 à celui des dizaines et celui-ci dépasse de 4 celui des unités≫.

1) Déterminons l'année de naissance du grand-père

Soient $x\ ;\ y\ ;\ z$ et $t$ les 4 chiffres qui composent la date de naissance du grand-père tel que :

$x + y + z + t = 23$

D'autre part le chiffre des centaines est inférieur de 1 à celui des dizaines et celui-ci dépasse de 4 celui des unités, donc on a : $z = y + 1$ et $z = t + 4$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 23 \\ z = y + 1 \\ z = t + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 23 \\ y = z - 1 \\ t = z - 4 \end{cases}$$

L'équation (2) donne $y = z - 1$ et l'équation (3) donne $t = z - 4$

Remplaçons ainsi $y = z - 1$ et $t = z - 4$ par leur valeur dans l'équation (1) :

$x + y + z + t = 23$

On a : $x + (z - 1) + z + (z - 4) = 23 \Leftrightarrow x + 3z - 5 = 23 \Leftrightarrow x + 3z = 28$

$\Leftrightarrow x = 28 - 3z \Leftrightarrow x \equiv 28[3]$. Or $28 \equiv 1[3]$

Donc $x \equiv 1[3] \Leftrightarrow x = 3k + 1$

En remplaçant $x = 3k + 1$ par sa valeur dans $x + 3z = 28$

Donc on a : $(3k + 1) + 3z = 28 \Leftrightarrow 3z = 27 - 3k \Leftrightarrow z = 9 - k$

Si $k = 0,$ on a : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \\ z = 9 \\ t = 5 \end{cases}$

D'où l'année de naissance du grand-père est : 1895

2) Ecrivons cette année en base 12.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1895 | 12 | | | |
| 11 | 157 | 12 | | |
| | 1 | 13 | 12 | |
| | | 1 | 1 | 12 |
| | | | 1 | 0 |

En recopiant la suite des différents restes du bas vers le haut et sachant que $\beta$=11, on obtient :

$\overline{1895}^{10} = 1895 \ = \overline{111\beta}^{\,12}$

II// Soit $f$ l'application de $\mathbb{C} - \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :$f$(Z) = $\frac{iZ}{Z+i}$. Dans le plan complexe rapporté au repère ortho normal direct$(o,\ \vec{u}, \vec{v})$, on note M le point d'affixe $Z$.
1) Déterminons les coordonnées du point $B$ dont l'affixe $Z_B$ et telle que $f(Z_B) = 1 + 2i$

$f(Z_B) = 1 + 2i \Leftrightarrow \frac{iZ_B}{Z_B + i} = 1 + 2i \Leftrightarrow iZ_B = (1 + 2i)(Z_B + i) \Leftrightarrow iZ_B = Z_B + i + 2iZ_B - 2$

$iZ_B - Z_B - 2iZ_B = -2 + i \Leftrightarrow Z_B(1 + i) = 2 - i \Rightarrow Z_B = \frac{2-i}{1+i}$

$\Rightarrow Z_B = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

D'où $B\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

2) Soit Z un élément de E. On note $r$ le module de $Z + i$ et α une mesure de son argument.

Exprimons la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de $r$ et α.

$|f(z) - i| = \left|\frac{iZ}{Z+i} - i\right| = \left|\frac{iZ - iZ + 1}{Z+i}\right| = \left|\frac{1}{Z+i}\right| = \frac{1}{|Z+i|}$ or $|Z + i| = r \Rightarrow |f(z) - i| = \frac{1}{r}$

$arg(f(z) - i) = arg\left(\frac{iZ}{Z+i} - i\right) = arg\left(\frac{iZ - iZ + 1}{Z+i}\right) = arg\left(\frac{1}{Z+i}\right) = -arg(Z + i) = -\alpha$

D'où la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de $r$ et α est :

$f(z) - i = \frac{1}{r}\,[cos(-\alpha) + \ isin(-\alpha)]$

3) Soit A le point d'affixe $-i$

a- Déterminons l'ensemble ($\Gamma$) des points M vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$

$|f(z) - i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{|Z+i|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |Z + i| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |Z + i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Posons $Z_A + i = 0 \Rightarrow Z_A = -i$

Alors l'ensemble ($\Gamma$) des points M cherchés est le cercle de centre $\Omega\binom{0}{-1}$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b- Montrons que $B$ appartient à ($\Gamma$).

B appartient à $(\Gamma)$ si et seulement si la distance du centre A à B vaut le rayon, c'est-à-dire $|Z_B - Z_A| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$|Z_B - Z_A| = \left|\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right) - (-i)\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i + i\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = r$$

D'où $B$ appartient à $(\Gamma)$.

## Exercice 2………………..……………………………………………(5 points)

Soient les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^2x}dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^4x}dx$

1) Calculons $I$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^2x}dx \Rightarrow I = [tan(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - tan(0) = 1$$

$\Rightarrow I = 1$

2) Soit la fonction définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \frac{sinx}{cos^3x}$.

a- Montrons que $\forall\, x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ on a : $f'(x) = \frac{3}{cos^4x} - \frac{2}{cos^2x}$.

$f(x) = \frac{sinx}{cos^3x}$.

Posons $u(x) = sinx \Rightarrow u'(x) = cosx$

$v(x) = cos^3x \Rightarrow v'(x) = -3sinxcos^2x$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(cosx)(cos^3x) - (-3sinxcos^2x)(sinx)}{(cos^3x)^2} = \frac{cos^4x + 3sin^2xcos^2x}{cos^6x} = \frac{cos^2x(cos^2x + 3sin^2x)}{cos^6x}$$

$$= \frac{cos^2x + 3sin^2x}{cos^4x} = \frac{cos^2x + 3(1 - cos^2x)}{cos^4x} = \frac{cos^2x + 3 - 3cos^2x}{cos^4x} = \frac{3 - 2cos^2x}{cos^4x}$$

$= \frac{3}{cos^4x} - \frac{2cos^2x}{cos^4x} = \frac{3}{cos^4x} - \frac{2}{cos^2x}$. D'où $f'(x) = \frac{3}{cos^4x} - \frac{2}{cos^2x}$.

b- En déduisons une relation entre $I$ et $J$.

On sait que : $f'(x) = \frac{3}{cos^4x} - \frac{2}{cos^2x}$. En intégrant $f'(x)$ sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ ; on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{cos^4x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{cos^2x}dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^4x}dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^2x}dx \Leftrightarrow$$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f\,'(x)\,dx = 3J - 2I$. Or $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f\,'(x)\,dx = [f(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0) = 2$
=> $3J - 2I = 2$

c- Calculons $J$.

$3J - 2I = 2$ => $J = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}I = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(1) = \frac{4}{3}$. D'où $J = \frac{4}{3}$

**<u>Problème</u>**................................................................**$(10\ points)$**

On considère la fonction $f$, définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{(1+\,x)^2}$

On désigne par (C) la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$

**A) Etude de la fonction $f$ et tracé de (C)**

1) a) Calculons la limite de cette fonction lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{(1+\,x)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

b) Calculons la limite de cette fonction lorsque $x$ tend vers – 1.

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{e^x}{(1+\,x)^2} = \frac{e^{-1}}{0^+} = +\infty$$

On peut en déduis que la courbe (C) admet une possibilité d'asymptote oblique et admet la droite d'équation $x = -1$ comme asymptote verticale.

2) Calculons $f\,'(x)$ et Montre que son signe est celui de $\frac{x\,-\,1}{x\,+\,1}$

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+\,x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x(1+\,x)^2 - 2(1+x)e^x}{(1+\,x)^4} = \frac{e^x(1+x)[(1+x)-2]}{(1+\,x)^4} = \frac{e^x(1+x-2)}{(1+\,x)^3}$$

$$= \frac{e^x(x-1)}{(1+\,x)^3} = \frac{e^x}{(1+\,x)^2}\times\frac{x\,-\,1}{x\,+\,1}$$

Or $\forall\, x \in D_f$ ; $\frac{e^x}{(1+\,x)^2} > 0$. Alors le signe de $f\,'(x)$ dépend du signe de $\frac{x\,-\,1}{x\,+\,1}$.

Etudions le signe de $\frac{x\,-\,1}{x\,+\,1}$. Posons $x - 1 = 0$ et $x + 1 = 0$

=> $x = 1$ et $x = -1$

D’où le tableau de signe de $\frac{x-1}{x+1}$ est le suivant :

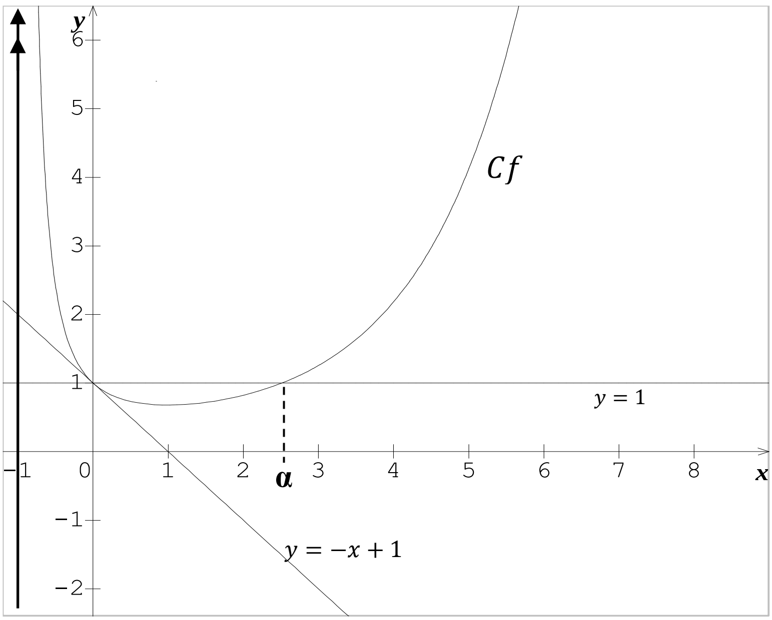
| $x$ | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{x-1}{x+1}$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

3) Dressons le tableau de variation de $f$.

| $x$ | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{e}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

4) Traçons la courbe (C), les droites d'équations respectives $x = -1$ et $y = 1$, ainsi que la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0. (Unité graphique : 4 $cm$)

La tangente a pour équation $y = -x + 1$.



5) Montrons que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, notée $\alpha$, dans l'intervalle $[1\,;10]$.

Sur l'intervalle $[1\,;10]$ ; $f$ est dérivable et strictement croissante, donc $f$ réalise une bijection

de $[1\,;10]$ vers l'intervalle $[\,f(1); f(10)] = \left[\frac{e}{4}\ ;\frac{e^{10}}{121}\right] =\ [0{,}67\,;182{,}03]$.

Nous en déduisons 1 appartient à l'intervalle$\left[\frac{e}{4}\ ;\frac{e^{10}}{121}\right]$. Donc l'équation $f(x) = 1$ admet une

unique solution notée $\alpha$, dans l'intervalle $[1\,;10]$ telque $f(\alpha) = 1$

Utilisons le graphique précédent pour Donne deux nombres entiers consécutifs $a$ et $b$ tels que $\alpha$ appartient à l'intervalle $[a\,;\ b]$.

Ainsi à l'aide du graphique, nous remarquons $\alpha$ appartient à l'intervalle$[a\,;\ b] = [2\,;3]$.

**B) Calcul d'une aire**

1) Soit $g$ la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x+1}$

a-Etudions le sens de variation de $g$ dans l'intervalle$[1\,;2]$.

$g$ est dérivable sur $[1\,;2]$ comme quotient des deux fonctions dérivables non nulles :

$x \to e^x$ et $x \to 1 + x$ ; et nous avons $g'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$.

De plus $g'(x)$ est strictement positif sur $[1\,;2]$ , alors $g$ est strictement croissante.

b-Montrons que, pour tout $x$ appartenant à $[1\,;\ 2]$. on a : $1 \le g(x) \le 2{,}5$.

$g$ étant croissante sur $[1\,;\ 2]$ alors on a l'encadrement suivant : $g(1) \le g(x) \le g(2)$.

Or $g(1) = \frac{e}{4} \approx 1{,}35$ et $g(2) = \frac{e^2}{3} \approx 2{,}46$. Nous avons : $g(1) > 1$ et $g(2) < 2{,}5$.

Alors pour tout $x \in [1\,;\ 2]$ : $1 \le g(x) \le 2{,}5$

c-En déduisons un encadrement de $A_1 = \int_1^2 g(x)dx = \int_1^2 \frac{e^x}{x+1}dx$

Nous avons : $1 < 2$ et $1 \le g(x) \le 2{,}5$; d'après les théorèmes d'encadrement d'nue intégrale nous déduisons que : $\int_1^2 1dx \le \int_1^2 g(x)dx \le \int_1^2 2{,}5dx \Leftrightarrow$

$[x]_1^2 \le \int_1^2 g(x)dx \le [2{,}5x]_1^2 \Leftrightarrow 2 - 1 \le \int_1^2 g(x)dx \le (2-1) \times 2{,}5$

$\Leftrightarrow 1 \leq \int_1^2 g(x)dx \leq 2{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq A_1 \leq 2{,}5$

2) Soit $A_2$ l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$, la courbe (C) et l'axe des abscisses.

A l'aide d'une intégration par parties, exprimons $A_2$ en fonction de $A_1$

La fonction $f$ est positive sur $[1\ ;\ 2]$ , donc l'aire $A_2$ cherchée est donnée par :

$A_2 = \int_1^2 \frac{e^x}{(1+x)^2}dx$

Posons : $u(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = e^x$

$v'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{1+x}$

$\Rightarrow A_2 = \left[-\frac{e^x}{1+x}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{e^x}{1+x}dx = -\frac{e^2}{3} + \frac{e}{2} + A_1$

$\Rightarrow A_2 = A_1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e}{2}$

En déduisons un encadrement de $A_2$.

On sait que l'encadrement de $A_1$ est : $1 \leq A_1 \leq 2{,}5$ .

Or $A_2 = A_1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e}{2} \Rightarrow A_1 = A_2 + \frac{e^2}{3} - \frac{e}{2}$

Alors $1 \leq A_1 \leq 2{,}5 \Leftrightarrow 1 \leq A_2 + \frac{e^2}{3} - \frac{e}{2} \leq 2{,}5 \Leftrightarrow 1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e}{2} \leq A_2 \leq 2{,}5 - \frac{e^2}{3} + \frac{e}{2}$

**C) Approximation d'un nombre à l'aide d'une suite**

Pour cette partie, on utilisera sans justification le fait que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution $\beta$ et que celle – ci est élément de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$

Soit $h$ la fonction définie sur $]-1\ ;+\infty[$ par $h(x) = \frac{e^x}{(1+x)^3}$

1) a- Vérifions que, pour tout $x$ appartenant à $]-1\ ;+\infty[$, on a : $f'(x) = f(x) - 2h(x)$.

On sait que $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{(1+x)^3} = \frac{e^x(x+1-2)}{(1+x)^3} = \frac{(x+1)e^x - 2e^x}{(1+x)^3} = \frac{(x+1)e^x}{(1+x)^3} - 2\frac{e^x}{(1+x)^3}$

$= \frac{e^x}{(1+x)^2} - 2\frac{e^x}{(1+x)^3} = f(x) - 2h(x).$

b-Calculons $h'(x)$.

$$h(x) = \frac{e^x}{(1+ x)^3} \Rightarrow h'(x) = \frac{(1+x)^3e^x - 3(1+x)^2e^x}{(1+x)^6} = \frac{(x-2)e^x}{(1+x)^4}$$

c- En utilisant la question **a),** calculé $f''(x)$.

$$f'(x) = f(x) - 2h(x) \Rightarrow f''(x) = f'(x) - 2h'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(1+x)^3} - 2\frac{(x-2)e^x}{(1+x)^4}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{(x^2-2x+3)e^x}{(1+x)^4}$$

En déduisons le sens de variation de $f'$ dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$

Pour tout $x$ de l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ ; $x^2 - 2x + 3$ est positif, donc $f''(x)$ est strictement positif sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, nous en déduisons que $f'$ est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$

2) En déduisons que, pour tout $x$ appartenant à $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

$x \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right] \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$

D'autre part $f'$ est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, donc pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ ; on a :

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) \leq f'(x) \leq f'(1) \Leftrightarrow -\frac{4e^{\frac{1}{2}}}{27} \leq f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow -0{,}24 \leq f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq |f'(x)| \leq \left|-\frac{1}{4}\right| \Leftrightarrow 0 \leq |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$$

Alors pour tout $x$ appartenant à $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ (Ce qu'il fallait Démontre)

3) On définit la suite$(u_n)$, pour tout nombre entier naturel $n$, par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour $n \geq 0$

On admet que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1.$

a-Montrons que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a : $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$

Puis que $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$, alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$|f(x) - f(\beta)| \leq \frac{1}{4}|x - \beta|$ . Or $f(\beta) = \beta.$ $\Rightarrow |f(x) - \beta| \leq \frac{1}{4}|x - \beta|$

D'où $\forall\, x \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$; on a : $|f(x)-\beta| \leq \frac{1}{4}|x-\beta|$

Posons $u_n = x$ . Alors on a : $|f(u_n)-\beta| \leq \frac{1}{4}|u_n-\beta|$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$

D'où pour tout nombre entier naturel $n$, on a : $|u_{n+1}-\beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$

b-Montre par récurrence que, pour tout nombre entier nature$l$ $n$, on a : $|u_n-\beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

- si $n = 0$; $u_0 = 1$ et $\beta \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$. Alors $|1-\beta| \leq 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^0$ vraie $\forall\, x \in \mathbb{N}$.
- Supposons que la propriété est vraie au rang $n$, c'est-à-dire $|u_n-\beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire $|u_{n+1}-\beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

En utilisant le résultat de la question précédente, nous pouvons écrire :

$|u_{n+1}-\beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta| \Leftrightarrow |u_{n+1}-\beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

D'où la relation est vraie à l'ordre $n+1$.

**Conclusion** : pour tout nombre entier nature$l$ $n$, on a : $|u_n-\beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

(Ce qu'i fallait démontrer)

c- En déduisons une valeur approchée numérique de $\beta$ à $10^{-3}$ près.

Cherchons $n$ tel que $|u_n-\beta| < 10^{-3}$. D'après ce qui précède, il suffit que $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ soit inférieur à $10^{-3}$ si $nln\left(\frac{1}{4}\right) < ln10^{-3} \Leftrightarrow -nln4 < ln10^{-3} \Leftrightarrow nln4 > -ln10^{-3}$ => $n > -\frac{ln10^{-3}}{ln4}$

=> $n > 4{,}98$. Puisque $n$ est un entier alors il suffit de prendre $n = 5$.

D'où $u_5$ est donc une valeur approchée de $\beta$ à $10^{-3}$ près.

Ainsi $u_5 \approx 0{,}697$ est une valeur approchée numérique de $\beta$ à $10^{-3}$ près.

# Sujet 11 (TSE-STI)

**Exercice 1**……………………………………………………………**($5$ *points*)**

1) a) Détermine, suivant les valeurs de $n$, le reste de la division par 7 de l'entier $3^n$.

En déduis le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$

b) Dans le système de numération décimale, on considère l'entier naturel $\overline{651x}$.

Détermine $x$ pour que $(506390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par 7.

2) a) Détermine le plus grand diviseur commun des nombres 21590 et 9525

b) Détermine l'ensemble des entiers $x$ tels que $34x \equiv 2[15]$.

c) Résous l'équation : $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2\,; 21590x + 9525y = 1270$

d) Quel est le chiffre des unités de l'entiers naturels $7^{1980}$ écrit dans le système décimal ?

**Exercice 2**……………………………………………………………**($5$ *points*)**

I// Dans le plan complexe $\mathbb{C}$ muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ ; on considère le polynôme $p$ telque : $p(Z) = Z^3 - (3+4i)Z - 2 + 8i$

1) Montre que l'équation $p(Z) = 0$ admet une solution réelle $Z_0$ que tu détermineras.

2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z) = 0$. On désignera par $Z_1$ la solution dont la partie imaginaire est positive.

3) Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on considère les points $G_0$ ; $A$ et $B$ d'affixes respectives $Z_0$ ; $Z_1$ et $Z_2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle $G_n$ l'isobarycentre des points $A$ ; $B$ et $G_{n-1}$.

a- Détermine l'affixe de $G_1$.

b- Soit $Z_n$ l'affixe de $G_n$. Exprime $Z_n$ en fonction de $Z_{n-1}$.

4) On pose $U_n = Z_n + 1$.

a- Quelle est la nature de la suite $U_n$?

b- Etudie la convergence de la suite $U_n$.

II// Soit la suite $u_n$ ; $n \in \mathbb{N}^*$ à termes positifs tel que : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (u_{n+1})^2 = u_n \times e \end{cases}$

1) Calcule puis Exprime $u_1$; $u_2$ ; $u_3$ en fonction de $e^k$ où $k \in \mathbb{R}$.
2) On pose $v_n = ln(u_n) - a$ (où $a \in \mathbb{R}^*$net $\mathbb{N}^*$).

a) Détermine le réel $a$ pour que $v_n$ soit une suite géométrique dont on Déterminera la raison et le premier terme $v_1$.

b) Calcule la limite de $v_n$ puis celle de $u_n$ en $+\infty$

**Problème**..............................................................$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

**Partie A**

A l'instant $t = 0$ on injecte dans le sang d'un patient une dose de 3ml d'un médicament. On veut étudier le processus d'élimination du produit au cours des douze heures suivant l'injection. La quantité de médicament présente dans le sang en $ml$ en fonction du temps $t$ en heures est $f(t)$, où $f$ est définie sur $[0\,;12]$par : $f(t) = 3\mathrm{e}^{-0{,}1\mathrm{t}}$.

**1)** Déterminez $f\,'(t)$ et justifier que pour tout $t \in [0\,;12]\,, f\,'(t) < 0$.

**2)** Dressez le tableau de variation de f sur [0 ; 12].

**3)** Calcule $f(2)\,;\ f(3)\,;\ f(4)\,;\ f(6)\ et\ f(8)$. Que représente chacune de ces valeurs ?

**4)** Trace la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques (1cm sur $(Ox)$ et 4 cm sur $(Oy)$).

**Partie B**

Le médicament est inefficace lorsque la quantité contenue dans le sang est inférieure à $\mathbf{1{,}25}\boldsymbol{ml}$, ainsi on procède à une seconde injection
1°/ Au bout de combien de temps on procèdera à la seconde injection ?
(On Déterminera ce temps graphiquement et par calcul).
2°/ On rappelle que le seuil de toxicité du médicament est de $\mathbf{4{,}5}\boldsymbol{ml}$**.**
Le patient court –il un risque d'intoxication par le médicament à la seconde injection ?

**Partie C**

Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé$(\,O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine $T_\alpha$ : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$$ où α est un paramètre réel.

1) Montre que ∀ α ∈ ℝ, $T_\alpha$ est bijective et admet un unique point invariant que l'on Précisera.

2) Montre qu'il existe une valeur unique de α pour laquelle $T_\alpha$ est une homothétie H dont Précisera le centre et le rapport.

3) a- Montre qu'il existe deux valeurs de α pour lesquelles $T_\alpha$ est une isométrie.

b- Vérifie que ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre. On les notera $R$ et $R^{-1}$

# Correction Sujet 11 (TSE-STI)

**Exercice 1**……………..……………………………………….($\boldsymbol{5\ points}$)

1) a) Déterminons, suivant les valeurs de $n$, le reste de la division par 7 de l'entier $3^n$ puis en déduisons le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$

- Déterminons, suivant les valeurs de $n$, le reste de la division par 7 de l'entier $3^n$

$3^0 \equiv 1[7]$ $\quad 3^2 \equiv 2[7]$ $\quad 3^4 \equiv 4[7]$ $\quad 3^6 \equiv 1[7]$

$3^1 \equiv 3[7]$ $\quad 3^3 \equiv 6[7]$ $\quad 3^5 \equiv 5[7]$

Alors d'une manière générale, $\forall\ k \ \in\ \mathbb{N}$, on a :

$3^{6k} \equiv 1[7]$ $\quad 3^{6k\,+\,2} \equiv 2[7]$ $\quad 3^{6k\,+\,4} \equiv 4[7]$

$3^{6k\,+\,1} \equiv 3[7]$ $\quad 3^{6k+3} \equiv 6[7]$ $\quad 3^{6k\,+\,5} \equiv 5[7]$

- En déduisons le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$

$506390 \equiv 3[7]$ et $128 = 6 \times 21 + 2$

Alors $(506390)^{128} \equiv 3^{128}[7]$

$$\equiv 3^{6\times 21+2}[7]$$

$$\equiv 3^2[7]$$

$$\equiv 2[7]$$

D'où le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$ est 2.

b) Dans le système de numération décimale, on considère l'entier nature l$\overline{651x}$.

Déterminons $x$ pour que $(506390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par 7.

$(506390)^{128} + \overline{651x} \equiv 0[7] \ \Leftrightarrow 2 + \overline{651x} \equiv 0[7] \ \Leftrightarrow 2 + 6000 + 500 + 10 + x \equiv 0[7]$

$\Leftrightarrow 2 + x \equiv 0[7] \Leftrightarrow x \equiv 5[7] \Leftrightarrow x = 7k + 5$ Avec $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \{0\ ; 1\}$

Donc pour $k = 0$, on a : $x = 5$

2) a) Déterminons le plus grand diviseur commun des nombres 21590 et 9525

En utilisant le tableau d'algorithme, on obtient : PGCD(21590 ; 9525) = 635

b) Déterminons l'ensemble des entiers $x$ tels que $34x \equiv 2[15]$.

$34x \equiv 2[15] \Leftrightarrow 34x \equiv 2[15] \Leftrightarrow 17x \equiv 1[15]$. Or $17 \equiv 2[15]$ => $2x \equiv 1[15]$

$\Leftrightarrow 2x \equiv 16[15] \Leftrightarrow x \equiv 8[15]$ => $x = 15k + 8$ avec $k \in \mathbb{Z}$

c) Résolvons l'équation : $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2\,; 21590x + 9525y = 1270$

$21590x + 9525y = 1270$. En simplifiant cette équation par 635, on a : $34x + 15y = 2$

$34x = 2 - 15y \Leftrightarrow 34x \equiv 2[15]$. Or d'après la question b), $x = 15k + 8$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remplaçons $x$ par sa valeur dans l'équation $34x + 15y = 2$ . Ainsi on obtient :

$34(15k + 8) + 15y = 2$ => $y = -34k - 18$

d) Déterminons le chiffre des unités de l'entiers naturels $7^{1980}$ écrit dans le système décimal.

$7 \equiv (-3)[10]$

$\Leftrightarrow \quad 7^{1980} \equiv (-3)^{1980}[10] \Leftrightarrow 7^{1980} \equiv 3^{1980}[10]$

$\Leftrightarrow \quad 7^{1980} \equiv (3^2)^{990}[10] \Leftrightarrow 7^{1980} \equiv (9)^{990}[10]$. Or $10 \equiv 1[10]$

$\Leftrightarrow \quad 7^{1980} \equiv (1)^{990}[10] \Leftrightarrow 7^{1980} \equiv 1[10]$.

Ainsi le chiffre des unités est le reste de la division de $7^{1980}$ par 10 qui est 1.

**Conclusion** : le chiffre des unités de l'entiers naturels $7^{1980}$ écrit dans le système décimal est 1

**Exercice 2……………….………………………………………(5 *points*)**

I// Dans le plan complexe $\mathbb{C}$ muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ ; on considère le polynôme $p$ telque : $p(Z) = Z^3 - (3 + 4i)Z - 2 + 8i$

1) Montrons que l'équation $p(Z) = 0$ admet une solution réelle $Z_0$ que je déterminerai.

Soit $Z_0 = a$ cette solution réelle telque $a^3 - (3 + 4i)a - 2 + 8i = 0 \Leftrightarrow$

$$(a^3 - 3a - 2) + i(8 - 4a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^3 - 3a - 2 = 0 & (1) \\ 8 - 4a = 0 & (2) \end{cases}$$

En résolvant l'équation (2), on a : $a = 2$. D'où $Z_0 = 2$ est la solution réelle.

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z) = 0$. On désignera par $Z_1$ la solution dont la partie imaginaire est positive.

$p(Z) = 0 \Leftrightarrow (Z_0 - 2)\left(Z_1 + 1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)\left(Z_1 + 1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) = 0$

=> $Z_0 = 2$ ou $Z_1 = -1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ou $Z_2 = -1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

=> $S = \left\{2\,;\, -1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}\,; -1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}\right\}$

3) Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on considère les points $G_0$ ; $A$ et $B$ tels que :

$G_0 \to Z_0$ ; $A \to Z_1$ et $B \to Z_2$ et soit $G_n$ l'isobarycentre des points $A$ ; $B$ et $G_{n-1}$ tel que $G_n = \{(A\,;1)\,;\ (B\,;1)\,;(G_{n-1}\,;1)\}$

a- Déterminons l'affixe de $G_1$.

$G_n = \{(A\,;1)\,;\ (B\,;1)\,;(G_{n-1}\,;1)\}$ => $G_1 = \{(A\,;1)\,;\ (B\,;1)\,;(G_0\,;1)\}$

=> $Z_{G_1} = \frac{Z_1+Z_2+Z_0}{1+1+1} = \frac{(-1+\sqrt{2}+i\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2}-i\sqrt{2})+2}{1+1+1} = \frac{0}{3} = 0$ => $G_1\binom{0}{0}$

Donc l'affixe du point $G_1$ est l'origine du repère.

b- Soit $Z_n$ l'affixe de $G_n$.

Exprimons $Z_n$ en fonction de $Z_{n-1}$.

Si $Z_n$ l'affixe de$G_n = \{(A\,;1)\,;\ (B\,;1)\,;(G_{n-1}\,;1)\}$ alors $Z_n = \frac{Z_1+Z_2+Z_{n-1}}{1+1+1}$

=> $Z_n = \frac{(-1+\sqrt{2}+i\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2}-i\sqrt{2})+Z_{n-1}}{1+1+1} = \frac{-2+Z_{n-1}}{3} = -\frac{2}{3}+\frac{1}{3}Z_{n-1}$

4) On pose $U_n = Z_n + 1$.

a- Déterminons la nature de la suite $U_n$

$U_n = Z_n + 1$ => $U_n = -\frac{2}{3}+\frac{1}{3}Z_{n-1} + 1$

=> $U_n = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}Z_{n-1}$

=> $U_n = \frac{1}{3}(1 + Z_{n-1})$ et $U_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + Z_n) = \frac{1}{3}U_n$

D'où $U_n$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $U_0 = Z_0 + 1 = 3$

b- Etudions la convergence de la suite $U_n$.

Pour étudier la convergence de la suite $U_n$, exprimons $U_n$ en fonction de $n$.

Puisque $U_n$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $U_0 = 3$ alors son expression en fonction de $n$ est : $U_n = U_0(q)^n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$lim\ U_n = \quad lim\ 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car $lim\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \quad (q < 1)$

$n \to +\infty \qquad n \to +\infty \qquad\qquad n \to +\infty$

Par conséquent $U_n$ est une suite convergente et converge vers $0$.

II//Soit la suite $u_n;\ n \in \mathbb{N}^*$ à termes positifs tel que : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (u_{n+1})^2 = u_n \times e \end{cases}$

1) Calculons puis Exprime $u_1;\ u_2\,;u_3$ en fonction de $e^k$ où $k \in \mathbb{R}$.

On sait que $(u_{n+1})^2 = u_n \times e$ =>$u_{n+1} = \sqrt{u_n \times e} = \sqrt{u_n} \times \sqrt{e} = (u_n)^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{2}}$

$u_1 = 1 = e^0$

$u_2 = (u_1)^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$

$u_3 = (u_2)^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{2}} = \left(e^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{4}} \times e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{3}{4}}$

2) On pose $v_n = ln(u_n) - a$ (où $a \in \mathbb{R}^*\ n$ et $\mathbb{N}^*$).

a-Déterminons le réel $a$ pour que $v_n$ soit une suite géométrique dont on Déterminera la raison et le premier terme $v_1$.

$v_n = ln(u_n) - a$

$v_1 = ln(u_1) - a = ln(1) - a = -a$

$v_2 = ln(u_2) - a = ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) - a = \frac{1}{2} - a = \frac{1-2a}{2}$

$v_3 = ln(u_3) - a = ln\left(e^{\frac{3}{4}}\right) - a = \frac{3}{4} - a = \frac{3-4a}{4}$

Alors les 3 termes $v_1$ ; $v_2$ et $v_3$ sont en progression géométrique si te seulement si :

$v_1 \times v_3 = (v_2)^2 \Leftrightarrow (-a) \times \left(\frac{3-4a}{4}\right) = \left(\frac{1-2a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{-3a+4a^2}{4} = \frac{1-4a+4a^2}{4} \Leftrightarrow$

$-3a + 4a^2 = 1 - 4a + 4a^2 \Leftrightarrow 4a - 3a = 1$ =>$a = 1.$

D'où $v_1 = -1$ ; $v_2 = -\frac{1}{2}$ et $v_2 = -\frac{1}{4}$ et $v_n = ln(u_n) - 1$

b-Calculons la limite de $v_n$ puis celle de $u_n$ en $+\infty$

$v_n$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{v_2}{v_1} = \frac{-\frac{1}{2}}{-1} = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = -1$.

Alors son expression est $v_n = v_1(q)^{n-1} \Leftrightarrow v_n = -1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -1\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) = -\frac{1}{2^{n-1}}$

=> $v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{2^{n-1}} = 0$

D'autre part $v_n = ln(u_n) - 1 \Leftrightarrow ln(u_n) = v_n + 1 = -\frac{1}{2^{n-1}} + 1$ => $u_n = e^{\left(-\frac{1}{2^{n-1}}+1\right)}$

=> $u_n = e^{\left(-\frac{1}{2^{n-1}}+1\right)}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e^{(0)} = 1$

## <u>Problème</u>..........................................................$(10\ \boldsymbol{points})$

**Partie A**

A l'instant $t = 0$ on injecte dans le sang d'un patient une dose de $3ml$ d'un médicament. On veut étudier le processus d'élimination du produit au cours des douze heures suivant l'injection. La quantité de médicament présente dans le sang en $ml$ en fonction du temps $t$ en heures est $f(t)$, où $f$ est définie sur $[0\,;12]$ par : $f(t) = 3\mathrm{e}^{-0,1\mathrm{t}}$.

**1)** Déterminons $f\,'(t)$ puis justifions que pour tout $t \in [0\,;12]$ , $f\,'(t) < 0$.

$f(t) = 3\mathrm{e}^{-0,1\mathrm{t}}$ => $f'(t) = -0,1 \times 3\mathrm{e}^{-0,1\mathrm{t}} = -0,3\mathrm{e}^{-0,1\mathrm{t}}$

Pour tout $t \in [0\,;12]$ , $\mathrm{e}^{-0,1\mathrm{t}}) > 0$ alors $f\,'(t) = -0,3\mathrm{e}^{-0,1\mathrm{t}} < 0$.

**2)** Dressons le tableau de variation de $f$ sur [0 ; 12].

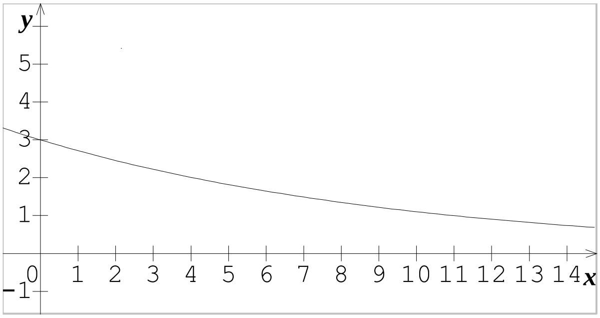
| $t$ | 0 | 12 |
|---|---|---|
| $f'(t)$ | $-$ | |
| $f(t)$ | 3 ↘ | $3\mathrm{e}^{-1.2}$ |

**3)** Calcule $f(2)$ ; $f(3)$ ; $f(4)$ ; $f(6)$ $et$ $f(8)$.

| $t$ | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ | 2,45 | 2,22 | 2,01 | 1,64 | 1,34 |

Ainsi chacune de ces valeurs obtenues représente la quantité de médicament présente dans le sang en $ml$ en fonction du temps $t$

**4)** Traçons la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques (1cm sur $(Ox)$ et 4 cm sur $(Oy)$).




**Partie B**

Le médicament est inefficace lorsque la quantité contenue dans le sang est inférieure à $\mathbf{0,25}\boldsymbol{ml}$, ainsi on procède à une seconde injection
1°/ Déterminons le temps au bout duquel on procèdera à la seconde injection

On procèdera à la seconde injection si et seulement si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) < \mathbf{1,253}$ ⇔ $\mathbf{e^{-0,1t}} < \mathbf{0,253}$

⇔ $\mathbf{-0,1t} < \boldsymbol{ln}(\mathbf{0,253})$ ⇔ $\mathbf{-0,1t < -1,37}$ ⇔ $\mathbf{0,1t > 1,37}$ ⇔$\mathbf{t > 13,7}$

D'où on peut procéder à la seconde injection à partir de $\mathbf{13}\boldsymbol{h}\ \mathbf{7}\boldsymbol{min}$

2°/ On rappelle que le seuil de toxicité du médicament est de $\mathbf{4,5}\boldsymbol{ml}$**.**

Vérifions si le patient court un risque d'intoxication par le médicament à la seconde injection
Pour cela calculons $\boldsymbol{f}(\mathbf{13,7})$
$\boldsymbol{f}(\mathbf{13,7}) = 0{,}76\ ml$

Or $\mathbf{0,76}\ \boldsymbol{ml} < \mathbf{4,5}\boldsymbol{ml}$**.** alors il n'y a aucun risque d'intoxication par le médicament à la seconde injection.

II// Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.
Soit l'application affine $T_\alpha$ : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$$ où α est un paramètre réel.

1) Montrons que ∀ α ∈ ℝ, $T_\alpha$ est bijective

$T_\alpha$ Est bijective si et seulement si $detM_\alpha \neq 0$

Soit $\varphi$ l'endomorphisme associé à $T_\alpha$.

La matrice de $T_\alpha$ dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ est $M_\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\alpha \\ \alpha & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette matrice est $detM_\alpha = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\alpha \\ \alpha & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (\alpha)^2 = \frac{1}{4} + \alpha^2 \neq 0.$ Alors $T_\alpha$ est bijective .

Montrons que $T_\alpha$ admet un unique point invariant que l'on Précisera.

$T_\alpha$ Admet un point invariant si et seulement si $T_\alpha(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

=> $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} 3x + 2\alpha y = 0 \\ 2\alpha x - 3y = 0 \end{cases}$

La résolution de ce système donne : $x = 0$ et $y = 0$

D'où $\Omega(0\,;0)$ est le point invariant.

2) Montons qu'il existe une valeur unique de α pour laquelle $T_\alpha$ est une homothétie H dont Précisera le centre et le rapport.

Pour cela exprimons $Z'$ en fonction de $Z$.

On sait que $Z' = x' + iy'$. Or $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$

En remplaçant $x'$ $et$ $y'$ par leur valeur dans $Z' = x' + iy'$; on a :

$Z' = \left(-\frac{1}{2}x - \alpha y\right) + i\left(\alpha x - \frac{1}{2}y\right)$

$= -\frac{1}{2}x - \alpha y + i\alpha x - \frac{1}{2}yi$

$= \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}yi\right) + (-\alpha y + i\alpha x)$

$= \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}yi\right) + (i^2\alpha y + i\alpha x)$

$= -\frac{1}{2}(x + iy) + i\alpha(x + iy)$

$= \left(-\frac{1}{2} + i\alpha\right)(x + iy)$. Or $Z = x + iy$

=>$Z' = \left(-\frac{1}{2} + i\alpha\right)Z$

**<u>NB :</u>** Si $Z' = aZ + b$, on dit que $T_\alpha$ est une homothétie $a \in \mathbb{R}^* - \{-1\,;1\}$

Avec $a = -\frac{1}{2} + i\alpha$

Alors $a = -\frac{1}{2} + i\alpha \in \mathbb{R}^* - \{-1\,;1\}$ si et seulement si $\alpha = 0$.

D'où $T_\alpha$ est une homothétie si $\alpha = 0$.

3) a- Montrons qu'il existe deux valeurs de α pour lesquelles $T_\alpha$ est une isométrie.

$T_\alpha$ est une isométrie si et seulement si son expression analytique est sous la forme :

$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases}$ C'est-à-dire si $\det(Matf) = a^2 + b^2 = 1$

On a $T_\alpha$ : $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ => $detM_\alpha = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\alpha \\ \alpha & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (\alpha)^2$

$detM_\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (\alpha)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \alpha^2 = 1$ => $\alpha^2 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{3}{4}$

=> $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b- Vérifions que ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre. On les notera $R$ et $R^{-1}$

D'où on a $R^+$: $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ et $R^{-1}$: $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$

En observant, on remarque que ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre.

# Sujet 12 (TSE-STI)

## Exercice 1…………………..……………………………………………$(5\ points)$

I// La magnitude apparente d'un astre d'éclat $E$ est $M = log_a\left(\frac{E}{E_0}\right)$ où $E_0$ est l'éclat de référence.

1) Exprime $M$ en fonction de $lna$ et $ln\left(\frac{E}{E_0}\right)$.
2) Calcule $lna$ sachant que $E_0 = \frac{E}{10}$ et M= 5
3) En déduis la magnitude apparente des astres suivants :
   a- Soleil : $E = 4{,}786\times10^{10}E_0$ ; b- Lune : $E = 1{,}2\times10^{5}E_0$

II// Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine $f$ : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \rightarrow M'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$$

1) Montre que $f$ admet un seul point invariant J.

2) Montre que $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$ puis en déduis la nature et les éléments caractéristiques de $f$

3) Détermine le centre et le rayon du cercle (C') image du cercle ( C) d'équation :
$x^2 + y^2 - 2y = 0$ par $f$.

## Exercice 2…………………..……………………………………………$(5\ points)$

I// Soit $x$ un entier naturel $x \geq 5$ on considère les entiers $n = \overline{100x}$ et $n' = \overline{x001}$ dans le système de base $(x + 1)$
a-Ecris $n$ et $n'$ dans le système de base $x$.

b-Ecris $n\ +\ n'$ dans le système de base $x$ et Vérifie que $n\ +\ n'$ est divisible par $(x + 1)$ puis donne le quotient $q$ de cette division en base $x$.
c-Détermine les entiers a et b tel que : $q\ = \overline{ab}^x \bullet \overline{aaa}^x$.

II//Dresse le tableau de variation de la fonction numérique $f$ donnée, partant de ses renseignements fournis :

- $f$ est définie sur $]-\infty\ ;\ 0\,] \cup \left[\frac{5}{2}\ ;\ +\infty\right[$ et admet des demi tangentes verticales aux points d'abscisses 0 et $\frac{5}{2}$
- $f$ est strictement décroissante sur son ensemble de dérivabilité.
- La droite y = $-\ x$ est à la fois asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$
- Les points de coordonnées $(0\ ;\ -3\ )$ et $\left(\frac{5}{2}\ ;\ 1\right)$ sont sur la courbe de $g$.

**Problème**................................................................$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

On considère la fonction $f$, définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+\ x)^2}$

On désigne par (C) la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$

**D) Etude de la fonction $f$ et tracé de (C)**

1) a) Calcule la limite de cette fonction lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

b) Calcule la limite de cette fonction lorsque $x$ tend vers – 1. Que peut – on en déduis pour la courbe (C) ?

2) Calcule $f\,'(x)$ et Montre que son signe est celui de $\dfrac{x-\ 1}{x+\ 1}$

3) Dresse le tableau de variation de $f$.

4) Trace la courbe (C), les droites d'équations respectives $x\ =\ -1$ et $y\ =\ 1$, ainsi que la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0.

(Unité graphique : 4 cm)

5) Montre que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[1;\ 10]$.

Utilise le graphique précédent pour Donne deux nombres entiers consécutifs $a$ et $b$ tels que $\alpha$ appartient à l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

**E) Calcul d'une aire**

3) Soit $g$ la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{e^x}{x+\ 1}$

d) Etudie le sens de variation de $g$ dans l'intervalle [1 ; 2].

e) Montre que, pour tout $x$ appartenant à $[1\ ;\ 2]$. On a : $1\ \leq\ g(x)\ \leq\ 2{,}5$.

f) En déduis un encadrement de $A_1 = \int_1^2 g(x)dx$

4) Soit $A_2$ l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x\ =\ 1$ et $x\ =\ 2$, la courbe (C) et l'axe des abscisses.

A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $A_2$ en fonction de $A_1$ et en déduis un encadrement de $A_2$.

### F) Approximation d'un nombre à l'aide d'une suite

Pour cette partie, on utilisera sans justification le fait que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution $\beta$ et que celle – ci est élément de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$

Soit $h$ la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \frac{e^x}{(1+\ x)^3}$

4) a) Vérifie que, pour tout x appartenant à $]-1\ ;\ +\infty[$, on a : $f\ '(x) = f(x) - 2h(x)$.

c) Calcule $h'(x)$.

d) En utilisant la question **a),** Calcule $f\ ''(x)$. En déduis le sens de variation de $f\ '$ dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$

5) En déduis que, pour tout $x$ appartenant $\left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$ à, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

6) On définit la suite $(u_n)$, pour tout nombre entier naturel $n$, par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour $n \geq 0$

On admet que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a : $\frac{1}{2} \leq\ u_n \leq\ 1$.

d) Montre que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a : $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n -\ \beta|$

e) Montre par récurrence que, pour tout nombre entier nature$l$ $n$, on a : $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

f) En déduis une valeur approchée numérique de $\beta$ à $10^{-3}$ près.

# Correction Sujet 12 (TSE-STI)

**Exercice 1…………………..……………………………………………(5 *points*)**

I// La magnitude apparente d'un astre d'éclat $E$ est M = $log_a\left(\frac{E}{E_0}\right)$ où $E_0$ est l'éclat de référence.

1) Exprimons M en fonction de $lna$ et $ln\left(\frac{E}{E_0}\right)$

M = $log_a\left(\frac{E}{E_0}\right)$ ⇔ M = $\frac{ln\left(\frac{E}{E_0}\right)}{lna}$

2) Calculons $lna$ sachant que $E_0 = \frac{E}{10}$ et M = 5

M = $\frac{ln\left(\frac{E}{E_0}\right)}{lna}$. Or $E_0 = \frac{E}{10}$ => M = $\frac{ln\left(\frac{E}{\frac{E}{10}}\right)}{lna}$ ⇔ M = $\frac{ln(10)}{lna}$ ⇔ $lna = \frac{ln(10)}{M}$

Or M= 5 => $lna = \frac{ln(10)}{5}$ = 0,46

2) En déduisons la magnitude apparente des astres suivants :

a- Soleil : $E$ = 4,786×$10^{10}E_0$

M = $log_a\left(\frac{E}{E_0}\right)$ ⇔ M = $\frac{ln\left(\frac{E}{E_0}\right)}{lna}$ ⇔M = $\frac{ln\left(\frac{4,786\times10^{10}E_0}{E_0}\right)}{lna} = \frac{ln(4,786\times10^{10})}{lna}$

$= \frac{10ln(4,786\times10)}{lna} = \frac{10ln(47,86)}{lna}$. Or $lna$ = 0,46 => M = $\frac{10ln(47,86)}{0,46}$ ≈ 84

b- Lune : $E$ = 1,2×$10^5E_0$

M = $log_a\left(\frac{E}{E_0}\right)$ ⇔ M = $\frac{ln\left(\frac{E}{E_0}\right)}{lna}$ ⇔M = $\frac{ln\left(\frac{1,2\times10^5E_0}{E_0}\right)}{lna} = \frac{ln(1,2\times10^5)}{lna}$

$= \frac{5ln(1,2\times10)}{lna} = \frac{5ln(12)}{lna}$. Or $lna$ = 0,46 => M = $\frac{5ln(12)}{0,46}$ ≈27

II// Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ et on désigne par ℂ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine $f$ : P → P qui à tout point $M\binom{x}{y} \to M'\binom{x}{y}$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$

1) Montrons que $f$ admet un seul point invariant $J$.

$f$ Admet un point invariant si et seulement si $f(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

=> $\begin{cases} x = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + 2 \\ 2y = y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$

D'où $J\binom{2}{-4}$ est le point invariant.

2) Montrons que $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$

$\overrightarrow{JM'} = \binom{x' - 2}{y' + 4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + 1 - 2 \\ \frac{1}{2}y - 2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - 1 \\ \frac{1}{2}y + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x-2) \\ \frac{1}{2}(y+4) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\binom{x-2}{y+4} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$

D'où : $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$

En déduisons la nature et les éléments caractéristiques de $f$

$\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$ Sous la forme $\overrightarrow{\Omega \boldsymbol{M'}} = \boldsymbol{k}\,\overrightarrow{\Omega \boldsymbol{M}}$ qui est l'expression d'une homothétie de rapport $k$ et de centre $\Omega$.

D'où $f$ est une homothétie de rapport $k = \frac{1}{2}$ et de centre $J\binom{2}{-4}$

3) Déterminons le centre et le rayon du cercle (C') image du cercle ( C) d'équation :
$x^2 + y^2 - 2y = 0$ par $f$.

On a : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x' = x + 2 \\ 2y' = y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x' - 2 \\ y = 2y' + 4 \end{cases}$

En remplaçant $x$ et $y$ par leur valeur dans $x^2 + y^2 - 2y = 0$, on a :

$(2x' - 2)^2 + (2y' + 4)^2 - 2(2y' + 4) = 0$

$\Leftrightarrow 4(x' - 1)^2 + 4(y' + 2)^2 - 4(y' + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + (y' + 2)^2 - (y' + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + y'^2 + 4y' + 4 - y' - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + y'^2 + 3y' + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + (y'^2 + 3y') + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + \left[y'^2 - 2\left(-\frac{3}{2}\right)y'\right] + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + \left(y' + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x'-1)^2 + \left(y' + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x'-1)^2 + \left(y' + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow (x'-1)^2 + \left(y' + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

D'où (C') est le cercle de centre $\left(1\,; -\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $r = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

**<u>Exercice 2</u>……………….……………………………………….$(5\ \boldsymbol{points})$**

I// Soit $x$ un entier naturel $x \geq 5$. On considère les entiers $n = \overline{100x}$ et $n' = \overline{x001}$ dans le système de base $(x+1)$

1) Ecrivons $n$ et $n'$ dans le système de base $x$.

$n = \overline{100x}^{(x+1)}$ => $n = 1 \times (x+1)^3 + 0(x+1)^2 + 0(x+1) + x = x^3 + 3x^2 + 4x + 1$

=> $n = x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ ou $n = \overline{1341}^x$

$n' = \overline{x001}$ => $n' = x \times (x+1)^3 + 0(x+1)^2 + 0(x+1) + 1 = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 1$

=> $n' = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 1$ ou $n' = \overline{1331}^x$

2) Ecrivons $n + n'$ dans le système de base $x$ et vérifie que $n + n'$ est divisible par $(x+1)$ puis donnons le quotient q de cette division en base $x$.

$n = 1 \times (x+1)^3 + 0(x+1)^2 + 0(x+1) + x = (x+1)^3 + x$

$n' = x \times (x+1)^3 + 0(x+1)^2 + 0(x+1) + 1 = x(x+1)^3 + 1$

Alors $n + n' = [(x+1)^3 + x] + [x(x+1)^3 + 1] = (x+1)^3 + x + x(x+1)^3 + 1$

$= (x+1)^3 + x(x+1)^3 + (x+1) = (x+1)[(x+1)^2 + x(x+1)^2 + 1]$

$= (x+1)^3 + x(x+1)^3 + (x+1) = (x+1)[(x+1)^2(x+1) + 1]$

$= (x+1)[(x+1)^3 + 1] = (x+1)^4 + (x+1)$

D'où $n + n' = \overline{10010}^{(x+1)}$

Vérifions que $n + n'$ est divisible par $(x+1)$ puis donnons le quotient q de cette division en base $x$.

En faisant la division euclidienne de $n + n'$ par $(x+1)$ on aura pour quotient

$q = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ (en base 10) ou q = $\overline{1332}^x$ (en base $x$)

3) Détermination des entiers $a$ et $b$.

$q = \overline{ab}^x \times \overline{aaa}^x \Leftrightarrow$ q = $(ax + b)(ax^2 + ax + a)$
=> q $= a^2x^3 + x^2(a^2 + ab) + x(a^2 + ab) + ab$. Or d'après la question 2), on a :

$q = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$. Ainsi par identification, on a :

$a^2x^3 + x^2(a^2 + ab) + x(a^2 + ab) + ab = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

=> $a = 1$ et $b = 2$. D'où q = $\overline{12}^x \times \overline{111}^x$

II//Dressons le tableau de variation de la fonction numérique $f$ donnée, partant de ses renseignements fournis :

- $f$ est définie sur $]-\infty\ ;\ 0\,] \cup \left[\frac{5}{2}\ ;\ +\infty\right[$ et admet des demi tangentes verticales aux points d'abscisses 0 et $\frac{5}{2}$
- $f$ est strictement décroissante sur son ensemble de dérivabilité.
- la droite $y = -x$ est à la fois asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$
- les points de coordonnées $(0\ ;\ -3)$ et $\left(\frac{5}{2}\ ;\ 1\right)$ sont sur la courbe de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | [redacted] | $\frac{5}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | [redacted] | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-3$ | [redacted] | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**<u>Problème</u>..........................................................($\mathbf{10}$ *points*)**

On considère la fonction $f$, définie sur l'intervalle $]-1\ ;+\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$

On désigne par (C) la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$

**A) Etude de la fonction $f$ et tracé de (C)**

1) a) Calculons la limite de cette fonction lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{(1+x)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

b) Calculons la limite de cette fonction lorsque $x$ tend vers – 1.

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{e^x}{(1+x)^2} = \frac{e^{-1}}{0^+} = +\infty$$

On peut en déduis que la courbe (C) admet une possibilité d'asymptote oblique et admet la droite d'équation $x = -1$ comme asymptote verticale.

2) Calculons $f\,'(x)$ et Montre que son signe est celui de $\frac{x\,-\,1}{x\,+\,1}$

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+\,x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x(1+\,x)^2 - 2(1+x)e^x}{(1+\,x)^4} = \frac{e^x(1+x)[(1+x)-2]}{(1+\,x)^4} = \frac{e^x(1+x-2)}{(1+\,x)^3}$$

$$= \frac{e^x(x-1)}{(1+\,x)^3} = \frac{e^x}{(1+\,x)^2}\times\frac{x\,-\,1}{x\,+\,1}$$

Or $\forall\, x \in D_f$ ; $\frac{e^x}{(1+\,x)^2} > 0$. Alors le signe de $f\,'(x)$ dépend du signe de $\frac{x\,-\,1}{x\,+\,1}$.

Etudions le signe de $\frac{x\,-\,1}{x\,+\,1}$ . Posons $x - 1 = 0$ et $x + 1 = 0$

=> $x = 1$ et $x = -1$

D'où le tableau de signe de $\frac{x\,-\,1}{x\,+\,1}$ est le suivant :

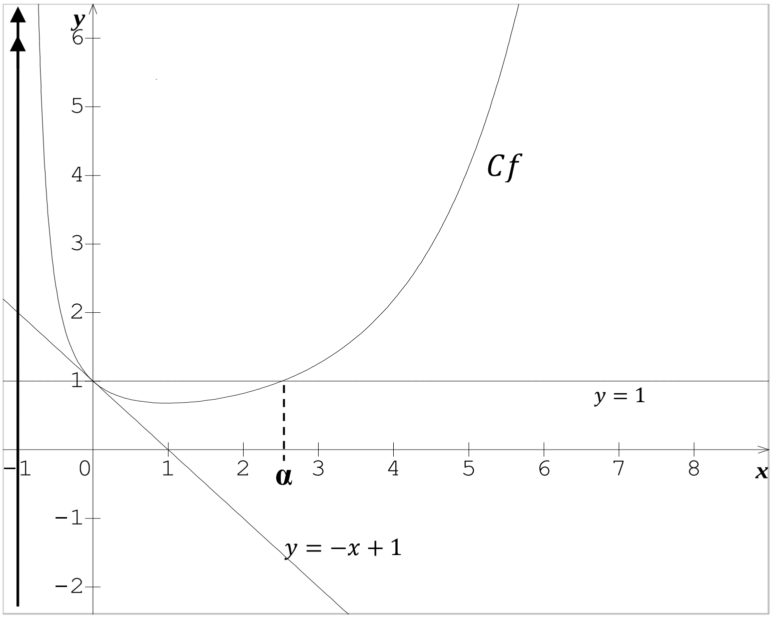
| $x$ | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{x-1}{x+1}$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

3) Dressons le tableau de variation de$f$.

| $x$ | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\Vert$ $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{e}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

4) Traçons la courbe (C), les droites d'équations respectives $x = -1$ et $y = 1$, ainsi que la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0. (Unité graphique : 4 $cm$)

La tangente a pour équation $y = -x + 1$.




5) Montrons que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, notée $\alpha$, dans l'intervalle $[1\,;10]$.

Sur l'intervalle $[1\,;10]$ ; $f$ est dérivable et strictement croissante, donc $f$ réalise une bijection

de $[1\,;10]$ vers l'intervalle $[\,f(1); f(10)] = \left[\frac{e}{4}\ ;\frac{e^{10}}{121}\right] =\ [0{,}67\,;182{,}03]$.

Nous en déduisons 1 appartient à l'intervalle$\left[\frac{e}{4}\ ;\frac{e^{10}}{121}\right]$. Donc l'équation $f(x) = 1$ admet une

unique solution notée $\alpha$, dans l'intervalle $[1\,;10]$ telque $f(\alpha) = 1$

Utilisons le graphique précédent pour Donne deux nombres entiers consécutifs $a$ et $b$ tels que $\alpha$ appartient à l'intervalle $[a\,;\ b]$.

Ainsi à l'aide du graphique, nous remarquons $\alpha$ appartient à l'intervalle$[a\,;\ b] = [2\,;3]$.

**B) Calcul d'une aire**

1) Soit $g$ la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x+1}$

a-Etudions le sens de variation de $g$ dans l'intervalle$[1\,;2]$.

$g$ est dérivable sur $[1\,;2]$ comme quotient des deux fonctions dérivables non nulles :

$x \mapsto e^x$ et $x \mapsto 1 + x$ ; et nous avons $g'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$.

De plus $g'(x)$ est strictement positif sur $[1 ; 2]$ , alors $g$ est strictement croissante.

b-Montrons que, pour tout $x$ appartenant à $[1 ; 2]$. on a : $1 \leq g(x) \leq 2{,}5$.

$g$ étant croissante sur $[1 ; 2]$ alors on a l'encadrement suivant : $g(1) \leq g(x) \leq g(2)$.

Or $g(1) = \frac{e}{4} \approx 1{,}35$ et $g(2) = \frac{e^2}{3} \approx 2{,}46$. Nous avons : $g(1) > 1$ et $g(2) < 2{,}5$.

Alors pour tout $x \in [1 ; 2]$ : $1 \leq g(x) \leq 2{,}5$

c-En déduisons un encadrement de $A_1 = \int_1^2 g(x)dx = \int_1^2 \frac{e^x}{x+1}dx$

Nous avons : $1 < 2$ et $1 \leq g(x) \leq 2{,}5$; d'après les théorèmes d'encadrement d'nue intégrale nous déduisons que : $\int_1^2 1dx \leq \int_1^2 g(x)dx \leq \int_1^2 2{,}5dx \Leftrightarrow$

$[x]_1^2 \leq \int_1^2 g(x)dx \leq [2{,}5x]_1^2 \Leftrightarrow 2 - 1 \leq \int_1^2 g(x)dx \leq (2-1) \times 2{,}5$

$\Leftrightarrow 1 \leq \int_1^2 g(x)dx \leq 2{,}5 \Leftrightarrow 1 \leq A_1 \leq 2{,}5$

2) Soit $A_2$ l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$, la courbe (C) et l'axe des abscisses.

A l'aide d'une intégration par parties, exprimons $A_2$ en fonction de $A_1$

La fonction $f$ est positive sur $[1 ; 2]$ , donc l'aire $A_2$ cherchée est donnée par :

$A_2 = \int_1^2 \frac{e^x}{(1+x)^2}dx$

Posons : $u(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = e^x$

$v'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{1+x}$

$\Rightarrow A_2 = \left[-\frac{e^x}{1+x}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{e^x}{1+x}dx = -\frac{e^2}{3} + \frac{e}{2} + A_1$

$\Rightarrow A_2 = A_1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e}{2}$

En déduisons un encadrement de $A_2$.

On sait que l'encadrement de $A_1$ est : $1 \leq A_1 \leq 2{,}5$ .

Or $A_2 = A_1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e}{2}$ => $A_1 = A_2 + \frac{e^2}{3} - \frac{e}{2}$

Alors $1 \leq A_1 \leq 2{,}5 \Leftrightarrow 1 \leq A_2 + \frac{e^2}{3} - \frac{e}{2} \leq 2{,}5 \Leftrightarrow 1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e}{2} \leq A_2 \leq 2{,}5 - \frac{e^2}{3} + \frac{e}{2}$

**C) Approximation d'un nombre à l'aide d'une suite**

Pour cette partie, on utilisera sans justification le fait que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution $\beta$ et que celle – ci est élément de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$

Soit $h$ la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $h(x) = \frac{e^x}{(1+x)^3}$

1) a- Vérifions que, pour tout $x$ appartenant à $]-1\,;+\infty[$, on a : $f'(x) = f(x) - 2h(x)$.

On sait que $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{(1+x)^3} = \frac{e^x(x+1-2)}{(1+x)^3} = \frac{(x+1)e^x - 2e^x}{(1+x)^3} = \frac{(x+1)e^x}{(1+x)^3} - 2\frac{e^x}{(1+x)^3}$

$$= \frac{e^x}{(1+x)^2} - 2\frac{e^x}{(1+x)^3} = f(x) - 2h(x).$$

b-Calculons $h'(x)$.

$$h(x) = \frac{e^x}{(1+x)^3} \Rightarrow h'(x) = \frac{(1+x)^3e^x - 3(1+x)^2e^x}{(1+x)^6} = \frac{(x-2)e^x}{(1+x)^4}$$

c- En utilisant la question **a),** calculé $f''(x)$.

$f'(x) = f(x) - 2h(x) \Rightarrow f''(x) = f'(x) - 2h'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(1+x)^3} - 2\frac{(x-2)e^x}{(1+x)^4}$

$\Rightarrow f''(x) = \frac{(x^2-2x+3)e^x}{(1+x)^4}$

En déduisons le sens de variation de $f'$ dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$

Pour tout $x$ de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ ; $x^2 - 2x + 3$ est positif, donc $f''(x)$ est strictement positif sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, nous en déduisons que $f'$ est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$

2) En déduisons que, pour tout $x$ appartenant à $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

$x \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right] \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

D'autre part $f'$ est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, donc pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ ; on a :

$f'\left(\frac{1}{2}\right) \leq f'(x) \leq f'(1) \Leftrightarrow -\frac{4e^{\frac{1}{2}}}{27} \leq f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow -0{,}24 \leq f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq |f'(x)| \leq \left|-\frac{1}{4}\right| \Leftrightarrow 0 \leq |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

Alors pour tout $x$ appartenant à $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ (Ce qu'il fallait Démontre)

3) On définit la suite$(u_n)$, pour tout nombre entier naturel $n$, par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour $n \geq 0$

On admet que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

a-Montrons que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a : $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$

Puis que $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$, alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$|f(x) - f(\beta)| \leq \frac{1}{4}|x - \beta|$ . Or $f(\beta) = \beta$. => $|f(x) - \beta| \leq \frac{1}{4}|x - \beta|$

D'où $\forall\, x \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$; on a : $|f(x) - \beta| \leq \frac{1}{4}|x - \beta|$

Posons $u_n = x$ . Alors on a : $|f(u_n) - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$

D'où pour tout nombre entier naturel $n$, on a : $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$

b-Montre par récurrence que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a : $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

- si $n = 0$; $u_0 = 1$ et $\beta \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$. Alors $|1 - \beta| \leq 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^0$ vraie $\forall\, x \in \mathbb{N}$.
- Supposons que la propriété est vraie au rang $n$, c'est-à-dire $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire $|u_{n+1} - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

En utilisant le résultat de la question précédente, nous pouvons écrire :

$|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta| \Leftrightarrow |u_{n+1} - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

D'où la relation est vraie à l'ordre $n + 1$.

**Conclusion** : pour tout nombre entier naturel $n$, on a : $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$(Ce qu'i fallait Démontre)

c- En déduisons une valeur approchée numérique de $\beta$ à $10^{-3}$ près.

Cherchons $n$ tel que $|u_n - \beta| < 10^{-3}$. D'après ce qui précède, il suffit que $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ soit inférieur à $10^{-3}$ si $nln\left(\frac{1}{4}\right) < ln10^{-3} \Leftrightarrow -nln4 < ln10^{-3} \Leftrightarrow nln4 > -ln10^{-3}$ => $n > -\frac{ln10^{-3}}{ln4}$

=> $n > 4{,}98$. Puisque $n$ est un entier alors il suffit de prendre $n = 5$.

D'où $u_5$ est donc une valeur approchée de $\beta$ à $10^{-3}$ près.

Ainsi $u_5 \approx 0{,}697$ est une valeur approchée numérique de $\beta$ à $10^{-3}$ près.

# Sujet 13 (TSE-STI)

## Exercice 1………………..…………………………………………$(5\ points)$

I// A l'instant $t = 0$, un corps à la température $\theta_0 = 60°C$ est placé dans l'air ambiant à la température $\theta_1 = 20°C$. Au bout de 10 $minutes$, la température du corps est 50°C.

Sa température à la date $t$ exprimée en minutes est solution de l'équation différentielle :

$\frac{d\theta(t)}{dt} = -k[\theta(t) - \theta_1]$ où $k$ est une constante réelle. On pose $y(t) = \theta(t) - \theta_1$.

1) a- Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $y$ ?
   b- Détermine $y$.
   c- En déduis $\theta(t)$ en fonction de $k$.
   d- Détermine la constante $k$ puis en déduis l'expression définitive de $\theta(t)$.

2) a- Au bout de combien de minutes la température du corps diminuera-t-elle de moitié ?
   b- Quelle sera la température du corps au bout d'une heure ?
   On donne $ln2 = 0,70$ ; $ln\left(\frac{3}{4}\right) = -0,29$.

II//Une population animale comporte $\frac{1}{3}$ de mâles et $\frac{2}{3}$ de femelles. L'albinisme frappe 6% de mâles et 0,36% de femelles.
Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard (dont on ignore le sexe) soit albinos ?

## Exercice 2………………..…………………………………………$(5\ points)$

I// 1) 1235 personnes (**hommes** $+$ **femmes**) doivent voyagées dans des cars de 45 places.
Combien faut-il de cars, et combien de personnes rempliront le car non plein ?

2) Nous étions vendredi 1er septembre 2006. Quel jour de la semaine serons-nous le 1er septembre 2007 ? Le 1er septembre 2008 ? Le 1er septembre 2009 ?

II// L'aire A (en cm$^2$) de la peau d'un cobaye, en fonction de son poids P (en gramme) est donnée par l'égalité suivante : $lnA = ln(9,85) + 0,64lnP$. ($ln$ désignant le logarithme népérien).

1) Quelle est l'aire $A$ de la peau d'un cobaye de poids $P = 780g$ ?

2) Quel est le poids $P$ d'un cobaye dont la peau a pour aire $A$ = 30cm$^2$ ?

## Problème…………………………………………………………$(10\ points)$

I// Une culture de bactéries a un rythme de croissance modélisé par la fonction $R(x) = \frac{3000}{1 + 0,25x}$
Où $x$ est le temps écoulé en jours.
On admet que ce rythme de croissance est la dérivée de la fonction population $P(x)$ c'est-à-dire que $P'(x) = R(x)$ et au temps $x = 0$, la culture compte $1000$ bactéries c'est-a-dire : $P(0) = 1000$.

1) a- Détermine $P(x)$ désignant la population des bactéries après $x$ jours.
b- Evaluer le nombre de bactérie au bout de 3 jours.
c- Après combien de jours le nombre de bactéries atteindra t-il $12000$ individus ?
2) Etudie le sens de variation de $P(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
(on Calculera la limite de $P(x)$ en $+\infty$)
3) On donne la fonction H définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :
$H(x) = 48000(1 + 0{,}25x)ln(1 + 0{,}25x) - 11000x$
a- Montre que $H$ est une primitive de $P$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
b- Calcule l'intégrale $\mathrm{I} = \int_5^{10} P(x)\,\mathrm{d}x$ puis en déduis une interprétation concrète du résultat.
c- En déduis le nombre moyen de bactéries entre le 5$^{\text{ième}}$ et le 10$^{\text{ième}}$ jour.

II// On considère dans le plan $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ les points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ; $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$$

1) Démontre que $fof = id$

2) Démontre que l'ensemble des points invariants par $f$ est une droite (D) que l'on Précisera.

3) Soit $M$ un point du plan et $M'$ son image par $f$.

a) Démontre que le point I milieu de $[MM']$ appartient à la droite (D).

b) Démontre que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe orthogonale à celle de (D).

c) En déduis les éléments caractéristiques de $f$.

# Correction Sujet 13 (TSE-STI)

**Exercice 1**……………….……………………………………….(**5 *points***)

I//A l'instant $t=0$, un corps à la température $\theta_0 = 60°C$ est placé dans l'air ambiant à la température $\theta_1 = 20°C$. Au bout de 10 $minutes$, la température du corps est 50°C.
Sa température à la date $t$ exprimée en minutes est solution de l'équation différentielle :

$\frac{d\theta(t)}{dt} = -k[\theta(t) - \theta_1]$ où $k$ est une constante réelle. On pose $y(t) = \theta(t) - \theta_1$.

1) a- Déterminons l'équation différentielle vérifiée par $y$

On sait que : $y'(t) = \theta'(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = -k[\theta(t) - \theta_1] = -k\theta(t) + k\theta_1$ .

Or $y(t) = \theta(t) - \theta_1$ => $\theta(t) = y(t) + \theta_1$

Donc $y'(t) = -k\theta(t) + k\theta_1 \Leftrightarrow y'(t) = -k[y(t) + \theta_1] + k\theta_1 = -ky(t) - k\theta_1 + k\theta_1$

=> $y'(t) = -ky(t) \Leftrightarrow y'(t) + ky(t) = 0$

D'où l'équation différentielle vérifiée par $y$ est : $y'(t) + ky(t) = 0$

b- Déterminons $y$.

La solution générale de $y$ est : $y: t \mapsto y(t) = Ae^{-kt}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

c- En déduisons $\theta(t)$ en fonction de $k$.

On sait que $y(t) = \theta(t) - \theta_1 \Leftrightarrow \theta(t) = y(t) + \theta_1$. Or $y(t) = Ae^{-kt}$

=> $\theta(t) = Ae^{-kt} + \theta_1$. Or $\theta_1 = 20°C$

=> $\theta(t) = Ae^{-kt} + 20$.

D'où l'expression $\theta(t)$ en fonction de $k$ est : $\boldsymbol{\theta(t) = Ae^{-kt} + 20}$.

d- Déterminons la constante $k$ puis en déduisons l'expression définitive de $\theta(t)$.

- A l'instant $t = 0\ min$, on a : $\theta_0 = 60°C$
  => $\theta(0) = 60 \Leftrightarrow Ae^0 + 20 = 60 \Leftrightarrow A + 20 = 60$ => $A = 40$
  Donc $\theta(t) = 40e^{-kt} + 20$

- A l'instant $t = 10\ min$, on a : $\theta = 50°C$
  => $\theta(10) = 50 \Leftrightarrow 40e^{-10k} + 20 = 50 \Leftrightarrow 40e^{-10k} = 30 \Leftrightarrow e^{-10k} = \frac{30}{40}$

  $\Leftrightarrow e^{-10k} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow -10k = ln\left(\frac{3}{4}\right)$ => $-k = \frac{1}{10} ln\left(\frac{3}{4}\right)$

D'où l'expression de $\theta(t)$ en fonction de $t$ est : $\boldsymbol{\theta(t) = 40e^{\frac{1}{10}ln\left(\frac{3}{4}\right)t} + 20}$

2) a- Déterminons l'instant au bout duquel la température du corps diminuera de moitié

La température du corps diminuera de moitié si $\theta(t) = 30 \Leftrightarrow 40e^{\frac{1}{10}ln\left(\frac{3}{4}\right)t} + 20 = 30$

$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{10}ln\left(\frac{3}{4}\right)t} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{10}\, ln\left(\frac{3}{4}\right) t = ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{10}\, ln\left(\frac{3}{4}\right) t = -ln4$

$\Leftrightarrow t = -\frac{10ln4}{ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 48\, min.$

D'où la température du corps diminuera de moitié au bout de 48 $minutes$.

b- Déterminons la température du corps au bout d'une heure

La température du corps au bout d'une heure c'est-à-dire au bout de 60 $minutes$ est :

$\theta(60) = 40e^{\frac{1}{10}ln\left(\frac{3}{4}\right)\times 60} + 20 \approx 27$

D'où au bout d'une heure, la température serait de 27°C.

II// Une population animale comporte $\frac{1}{3}$ de mâles et $\frac{2}{3}$ de femelles. L'albinisme frappe 6% de mâles et 0,36% de femelles.

- Soit $p(M) = \frac{1}{3}$; la probabilité sur le nombre de mâles.
- Soit $p(F) = \frac{2}{3}$; la probabilité sur le nombre de femelles.
- Soit $A$; l'évènement : $\ll$ $être\ \ albinos$ $\gg$
- Soit $p(A)$; la probabilité qu'un individu soit albinos
- $p(A/M) = 6\% = \frac{6}{100} = 0{,}06$ et $p(A/F) = 0{,}36\% = \frac{0{,}36}{100} = 0{,}0036$

Déterminons la probabilité pour qu'un individu pris au hasard (dont on ignore le sexe) soit albinos

$M \cup F = \Omega$ et $M \cup F = \emptyset$
Alors $\{M\ ;\ F\}$ forme un système complet d'évènement tel que :

=> $p(A) = p(A \cap M) + p(A \cap F) = p(A/M) \times p(M) + p(A/F) \times p(F)$

$= (0{,}06) \times \frac{1}{8} + 0{,}0036 \times \frac{2}{3} = 0{,}02$=> $p(A) = 0{,}02$

**<u>Exercice 2</u>……………..………………………………………($5$ ***points***)**

I// 1) 1235 personnes (hommes + femmes) doivent voyagées dans des cars de 45 places.
Déterminons le nombre de cars nécessaire, et le nombre de personnes qui rempliront le car non plein

La division euclidienne de 1235 par 45 fourni : 1235 = $45 \times 27 + 20$.

Le voyage nécessitera donc 27 cars $\ll$ *pleins* $\gg$ et un 28$^{\text{ième}}$ car occupé par 20 personnes.

2) Nous étions vendredi 1$^{\text{er}}$ septembre 2006.

Déterminons le jour de la semaine correspondant au 1$^{\text{er}}$ septembre 2007 ; au 1$^{\text{er}}$ septembre 2008 et au 1$^{\text{er}}$ septembre 2009

− Entre le 1$^{\text{er}}$ septembre 2006 et le 1$^{\text{er}}$ septembre 2007 s'écrouleront 365 jours (car 2007 n'est pas bissextile). Or $365 = 7 \times 52 + 1$, donc s'écouleront 52 semaines et 1 jour, faisant tomber le 1$^{\text{er}}$ septembre 2007 un samedi.

− Entre le 1$^{\text{er}}$ septembre 2007 et le 1$^{\text{er}}$ septembre 2008 s'écrouleront 366 jours (car 2008 est bissextile). Or $366 = 7 \times 52 + 2$, donc s'écouleront 52 semaines et 2 jour, faisant tomber le 1$^{\text{er}}$ septembre 2008 un lundi.

− Entre le 1$^{\text{er}}$ septembre 2008 et le 1$^{\text{er}}$ septembre 2009 s'écrouleront 365 jours (car 2009 n'est pas bissextile). Or $365 = 7 \times 52 + 1$, donc s'écouleront 52 semaines et 1 jour, faisant tomber le 1$^{\text{er}}$ septembre 200 un lundi.

II//L'aire A (en cm$^2$) de la peau d'un cobaye, en fonction de son poids P (en gramme) est donnée par l'égalité suivante : $lnA = ln(9{,}85) + 0{,}64lnP$. ($ln$ désignant le logarithme népérien).

**1)** Déterminons l'aire $A$ de la peau d'un cobaye de poids $P = 780g$

$lnA = ln(9{,}85) + 0{,}64lnP$ . Or $P = 780$

=> $lnA = ln(9{,}85) + 0{,}64ln780 \Leftrightarrow lnA = 2{,}28 + 4{,}26 \Leftrightarrow lnA = 6{,}54 \Leftrightarrow A = e^{6{,}54}$

=> $A = 692{,}28\ cm^2$

**2)** Déterminons le poids $P$ d'un cobaye dont la peau a pour aire $A$ = 30 cm$^2$

$lnA = ln(9{,}85) + 0{,}64lnP$. Or $A = 30$

=> $ln30 = ln(9{,}85) + 0{,}64lnP \Leftrightarrow 0{,}64lnP = ln30 - ln(9{,}85) \Leftrightarrow 0{,}64lnP = 3{,}40 - 2{,}28$

$\Leftrightarrow 0{,}64lnP = 1{,}12 \Leftrightarrow lnP = \frac{1{,}12}{0{,}64} \Leftrightarrow lnP = 1{,}75 \Leftrightarrow P = e^{1{,}75} = 5{,}75$

=> $P = 5{,}75\ g$.

**Problème**..........................................................$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

I// Une culture de bactéries a un rythme de croissance modélisé par la fonction $R(x) = \frac{3000}{1 + 0,25x}$
Où $x$ est le temps écoulé en jours.
On admet que ce rythme de croissance est la dérivée de la fonction population $P(x)$ c'est-à-dire que $P'(x) = R(x)$ et au temps $x = 0$, la culture compte $1000$ bactéries c'est-a-dire : $P(0) = 1000$.
1) a- Déterminons $P(x)$ désignant la population des bactéries après $x$ jours.

$P'(x) = R(x)$ => $P(x) = \int R(x)dx = \int \frac{3000}{1 + 0,25x}dx = \frac{0,25}{0,25}\int \frac{3000}{1 + 0,25x}dx = \frac{3000}{0,25}\int \frac{0,25}{1 + 0,25x}dx$

=> $P(x) = 12000 \int \frac{0,25}{1 + 0,25x}dx = 12000[ln(1 + 0,25\boldsymbol{x})] + k$. Or $P(0) = 1000$

=> $P(x) = 12000ln(1 + 0,25\boldsymbol{x}) + k$. Or $P(0) = 1000 \Leftrightarrow k = 1000$

D'où $P(x) = 12000ln(1 + 0,25x) + 1000$
b- Evaluons le nombre de bactérie au bout de 3 jours.

$P(3) = 12000ln(1 + 0,25 \times 3) + 1000 \approx 7715$

D'où le nombre de bactérie au bout de 3 jours est de $7715$ individus.

c- Déterminons le nombre de jours à partir du quels le nombre de bactéries atteindra 12000 individus

Pour cela, posons $P(x) = 12000 \Leftrightarrow 12000ln(1 + 0,25x) + 1000 = 12000$
$\Leftrightarrow 12000ln(1 + 0,25x) = 11000 \Leftrightarrow ln(1 + 0,25x) = \frac{11000}{12000} \Leftrightarrow ln(1 + 0,25x) = 0,91$
$\Leftrightarrow 1 + 0,25x = e^{0,91} \Leftrightarrow 0,25x = e^{0,91} - 1 \Leftrightarrow 0,25x = 2,48 - 1 \Leftrightarrow 0,25x = 1,48$
=>$x = 5,92 \approx 6$
Alors le nombre de jours à partir du quels le nombre de bactéries atteindra $12000$ individus au bout de 6 jours.

2) Etudions le sens de variation de $P(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$
(on Calculera la limite de $P(x)$ en $+\infty$)

$P(x) = 12000ln(1 + 0,25x) + 1000$
$P(0) = 12000ln(1 + 0,25 \times 0) + 1000 = 1000$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$

$P'(x) = R(x) = \frac{3000}{1 + 0,25x} > 0\ \forall\, x \in [0\,;\,+\infty[$

Alors $\forall\, x \in [0\,;\,+\infty[$, $P$ est strictement croissante.

3) On donne la fonction $H$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$H(x) = 48000(1 + 0,25x)ln(1 + 0,25x) - 11000x$

a- Montrons que $H$ est une primitive de $P$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

$H$ est une primitive de $P$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ si et seulement si $H'(x) = P(x)$

$H(x) = 48000(1 + 0{,}25x)ln(1 + 0{,}25x) - 11000x$

$= (48000 + 12000x)ln(1 + 0{,}25x) - 11000x$

=> $H'(x) = 12000 \times ln(1 + 0{,}25x) + \frac{0{,}25}{1 + 0{,}25x} \times (48000 + 12000x) - 11000$

$= 12000ln(1 + 0{,}25x) + \frac{(12000+3000x)}{1 + 0{,}25x} - 11000$

$= 12000ln(1 + 0{,}25x) + \frac{(12000+3000x) - 11000(1 + 0{,}25x)}{1 + 0{,}25x}$

$= 12000ln(1 + 0{,}25x) + \frac{12000+3000x - 11000 - 2750x}{1 + 0{,}25x}$

$= 12000ln(1 + 0{,}25x) + \frac{9250x + 11000}{1 + 0{,}25x}$

$= 12000ln(1 + 0{,}25x) + \frac{1000 + 250x}{1 + 0{,}25x}$

$= 12000ln(1 + 0{,}25x) + \frac{1000(1 + 0{,}25x)}{1 + 0{,}25x}$

$= 12000ln(1 + 0{,}25x) + 1000 = P(x)$

D'où $H$ est une primitive de $P$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$

b- Calculons l'intégrale $\mathrm{I} = \int_5^{10} P(x)\mathrm{d}x$

$\mathrm{I} = \int_5^{10} P(x)\mathrm{d}x = \int_5^{10} P(x)\mathrm{d}x = [H(x)]_5^{10} = H(10) - H(5)$

=> $\mathrm{I} = 100464{,}1787 - 32580{,}46335 = 67883{,}71$

Interprétation concrète du résultat : l'intégrale I correspond l'aire en $cm^2$ de l'espace occupé par les bactéries entre le $5^{\text{ième}}$ et le $10^{\text{ième}}$ jour.

c- Calculons le nombre moyen de bactéries entre le $5^{\text{ième}}$ et le $10^{\text{ième}}$ jour.

$m = \frac{1}{10 - 5}\int_5^{10} P(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\mathrm{I} = 0{,}2\mathrm{I} = 0{,}2 \times 67883{,}71 = 13576{,}74 \approx 13577$

Alors le nombre moyen de bactéries entre le $10^{\text{ième}}$ et le $20^{\text{ième}}$ jour est d'environ 13577 individus.

II// On considère dans le plan $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\vec{\jmath})$ les points $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$$

1) Démontrons que $fof = id$

Soient $M(x,y)$ ; $M'(x',y')$ ; $M''(x'',y'')$ trois points du plan tels que :

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{13}(5x' - 12y' + 24) \\ y'' = \frac{1}{13}(-12x' - 5y' + 36) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{13}\left[5\left(\frac{1}{13}(5x - 12y + 24)\right) - 12\left(\frac{1}{13}(2x - y - 12)\right) + 24\ \right] \\ y'' = \frac{1}{13}\left[-12\left(\frac{1}{13}(-12x - 5y + 36)\right) - 5\left(\frac{1}{13}(2x - y - 12)\right) + 36\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{13}(13x) \\ y'' = \frac{1}{13}(13y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{13}(13x) \\ y'' = \frac{1}{13}(13y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x \\ y'' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x + 0y \\ y'' = 0x + y \end{cases}$$
. Alors la matrice associée à ce système est :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = matrice\ identit$é . D'où $fof = id$

2) Démontrons que l'ensemble des points invariants par $f$ est une droite (D) que l'on Précisera.

$f$ admet un point invariant si et seulement si il existe deux points $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ tel que $f(M) = M'$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{13}x - \frac{13}{13}y + \frac{24}{13} \\ y = -\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y + \frac{36}{13} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y\ =\ -\frac{2}{3}x + 2 \\ y\ =\ -\frac{2}{3}x + 2 \end{cases}$$

D'où l'ensemble des points invariants est la droite (D) d'équation : $y\ =\ -\frac{2}{3}x + 2$

3) Soit $M$ un point du plan et $M'$ son image par $f$.

a-Démontons que le point I milieu de $[MM']$ appartient à la droite (D).

Les coordonnées du milieu de I du segment $[MM']$ sont données par : $\begin{cases} x_I = \frac{x_M + x_{M'}}{2} \\ y_I = \frac{y_M + y_{M'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_I = \frac{x + x'}{2} \\ y_I = \frac{y + y'}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x + \frac{1}{13}(5x - 12y + 24)}{2} \\ y_I = \frac{y + \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{18x - 12y + 24}{26} \\ y_I = \frac{-12x + 8y + 36}{26} \end{cases}$$

Ainsi pour que I appartienne à la droite (D) : $y = -\frac{2}{3}x + 2$ il faut que les coordonnées de I vérifient l'équation de la droite (D).

Alors en remplaçant $y$ par $y_I$ et $x$ par $x$ dans (D), on a : 0 = 0

Conclusion I appartient à la droite (D).

b) Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à celle de (D).

$$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' - x = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) - x \\ y' - y = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = \frac{4}{13}(-2x - 3y + 6) \\ y' - y = \frac{6}{13}(-2x - 3y + 6) \end{cases}$$

=> $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{4}{13} \\ \frac{6}{13} \end{pmatrix}$ en posant $k = x - 2y - 6$ on a : $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$

En posant $k = -2x - 3y + 6$, on a : $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$ à une direction fixe orthogonale à celle de (D).

c) En déduisons la nature et les éléments caractéristiques de $f$.

- $fof = id$ alors $f$ est une involution
- $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$ alors l'ensemble des points invariants par $f$ est la perpendiculaire à (D) et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\frac{4}{13} ; \frac{6}{13}\right)$

# Sujet 14 (TSE-STI)

## Exercice 1…………………..…………………………………………(**5** ***points***)

I// Deux élèves Bakary et Moussa se rendent au marché pour acheter des mangues. Chaque mangue coûte 5 F l'unité. Moussa dit à Bakary, j'ai en poche $n$ F et Bakary lui répond moi aussi j'ai en poche $m$ F. Les entiers $n$ et $m$ s'écrivent respectivement comme suit :

$n = \overline{1x00y2}^{\,8}$ et $m = \overline{x1y003}^{\,7}$.

1) Détermine les nombres $x$ et $y$ sachant que chacun d'eux peuvent, avec la totalité de son argent acheter un nombre entier de mangues.
2) Ecris les entiers $n$ et $m$ dans le système décimal.
3) En déduis le PGCD et le PPCM de $n$ et $m$.

II// Soit le polynôme p définie par : $p(x) = x^3 - 12x - 16$.
1) Montre que $-2$ est un zéro double de $p$.

2) En utilisant la méthode de l'intégration par partie et la méthode par changement de variable, calcule l'intégrale : $I = \int_4^5 \sqrt{p(x)}dx$

## Exercice 2…………………..…………………………………………(**5** ***points***)

Dans le plan complexe P, on considère les points $A$ d'affixe $Z_A = 1$ ; $M$ d'affixe $Z$ et $N$ d'affixe

$Z_N = iZ - (1+i)$. On note $T_\lambda$ l'application qui à tout point d'affixe $Z$, associe le point $M'$, barycentre des points pondérés $(M\ ;\ \lambda)$ ; $(N\ ;\ -\lambda)$ et $(A\ ;\ 1)$ où $\lambda$ est un nombre réel non nul.

1-Démontre que pour tout $M$ du plan, le point $N$ est l'image de $M$ par une rotation dont on Précisera les éléments caractéristiques.

2- a- Démontre que l'affixe $Z'$ du point M'est telle que $Z' = \lambda(1-i)\,Z + \lambda(1+i) + 1$.

b- Démontre que $T_\lambda$ est une similitude directe dont on Précisera l'affixe du centre $\Omega$ ; le rapport et l'angle.

c-Pour quelles valeurs de $\lambda$ , $T_\lambda$ est-elle une rotation ?

d-Donne dans chacun de ces cas l'angle et l'affixe de son centre.

## Problème…………………………………………………………(**10** ***points***)

**PARTIE A :**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right)$. On désigne par $(Cf)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1cm.

1) Montre que $f$ est impaire.

2) Montre que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis Montre que sa dérivée $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$.
3) Dresse le tableau de variation de $f$.
4) Etudie les branches infinies de la courbe (C$f$).
5) Trouve une équation cartésienne de la tangente ( T ) à (C$f$) au point d'abscisse nul.
6) Précise la position de ( T ) et (C$f$).
7) Trace la droite ( T ) et la courbe (C$f$)
8) Soit α un réel strictement positif. Calcule en fonction de α , l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C$f$) et les droites d'équations respectives $x = 0$ , $y = 0$ $et$ $x = \alpha$.

**PARTIE B :**

1) Montre que la fonction $f$ admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle I que l'on Précisera.
2) Construis dans le même repère que (C$f$) , la courbe (C$g$) de la fonction $g$.
3) Montre que pour tout $x \in$ I, on a : $g(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})$.
4) Montre que l'équation $g(x) = x$ admet dans l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ une solution unique $\alpha$ et que α∈ $\left]\frac{-\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$.
5) Calcule en fonction de α l'aire du domaine limité par les deux courbes (C$f$) et (C$g$) et situées dans le demi-plan $x \geq 0$.

**PARTIE C :**

On considère la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{g(x)}{g\,'(x)}$.

1) Montre que $\varphi$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on Précisera.
2) On pose $h(x) = \varphi^{-1}(x)$. Donne les expressions de $h(x)$ et $h'(x)$.
3) Etudie puis représenter le fonction $h\ sur]-1\ ;\ 1[$.

# Correction Sujet 14 (TSE-STI)

**Exercice 1**……………….…………………………………………(**5 points**)

I// Deux élèves Bakary et Moussa se rendent au marché pour acheter des mangues. Chaque mangue coûte 5 F l'unité. Moussa dit à Bakary, j'ai en poche $n$ F et Bakary lui répond moi aussi j'ai en poche $m$ F. Les entiers $n$ et $m$ s'écrivent respectivement comme suit :

$n = \overline{1x00y8}^{\,8}$ et $m = \overline{x1y003}^{\,7}$.

1) Déterminons les nombres $x$ et $y$ sachant que chacun d'eux peuvent, avec la totalité de son argent acheter un nombre entier de mangues.

$n = \overline{1x00y2}^{8} = 1 \times 8^5 + x \times 8^4 + 0 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + y \times 8 + 2$

$= 4096x + 8y + 32770$

$m = \overline{x1y003}^{7} = x \times 7^5 + 1 \times 7^4 + y \times 7^3 + 0 \times 7^2 + 0 \times 7 + 3$

$= 16807x + 343y + 2404$

Puisqu'ils ont dépensé la totalité de leur argent, alors :

$$\begin{cases} n \equiv 0[5] \\ m \equiv 0[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 3y) \equiv 0[5] \\ (2x + 3y + 4) \equiv 0[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 5k \\ 2x + 3y + 4 = 5k' \end{cases}$$

- Encadrement de $5k$

$0 \leq x \leq 6$ (1)

$\Leftrightarrow 0 \leq y \leq 6$

$0 \leq 3y \leq 18$ (2)

(1) + (2) : $0 \leq x + 3y \leq 24$

$\Leftrightarrow 0 \leq 5k \leq 24$

$\Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{24}{5}$

$\Leftrightarrow 0 \leq k \leq 4{,}8$ => $k \in \{0\,;1\,;2\}$

- Encadrement de $5k'$

$0 \leq x \leq 6$

$\Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq 12$

$\Leftrightarrow 4 \leq 2x + 4 \leq 16$ (1)

$\Leftrightarrow 0 \leq y \leq 6$

$\Leftrightarrow 0 \leq 3y \leq 18$ (2)

(1) + (2) : $4 \leq 2x + 3y + 4 \leq 34$

$\Leftrightarrow \frac{4}{5} \leq 5k' \leq \frac{34}{5}$ => $k' \in \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

Ainsi pour $k \in \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$ et $k' \in \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$ on a : $x = 1$ et $y = 3$

2) Ecrivons les entiers $n$ et $m$ dans le système décimal

D'où $n = 8^5 + x \times 8^4 + 0 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 3 \times 8 + 2 = 36890$

Et $m = x \times 7^5 + 1 \times 7^4 + 3 \times 7^3 + 0 \times 7^2 + 0 \times 7 + 3 = 20240$

3) En déduisons le PGCD et le PPCM de $n$ et $m$.

$PGCD(n\,;m) = 10$ et $PPCM(n\,;m) = 74665360$

II// Soit le polynôme p définie par : $p(x) = x^3 - 12x - 16$.

1) Montrons que $-2$ est un zéro double de $P$.

$-2$ Est un zéro double de $P$ si et seulement si $x^3 - 12x - 16$ est divisible par $(x + 2)^2$

La division Euclidienne de $x^3 - 12x - 16$ par $(x + 2)^2$ donne pour quotient $x - 4$ et pour reste 0. D'où $-2$ est un zéro double de $P$. Ainsi la forme factorisée de $P$ est :

$p(x) = (x - 4)(x + 2)^2$.

**2)** En utilisant la méthode de l'intégration par partie et la méthode par changement de variable, calculons l'intégrale : $I = \int_4^5 \sqrt{p(x)}dx$

$I = \int_4^5 \sqrt{p(x)}dx = \int_4^5 \sqrt{(x-4)(x+2)^2}dx = \int_4^5 (x+2)\sqrt{x-4}dx$.

**- Méthode d'intégration par parties :**

$I = \int_4^5 (x+2)\sqrt{x-4}dx$

Posons : $u(x) = x + 2 \Rightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = \sqrt{x-4} \Rightarrow v(x) = \frac{2}{3}(x-4)\sqrt{x-4}$

Alors $I = \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4}\right]_4^5 - \int_4^5 \frac{2}{3}(x-4)\sqrt{x-4}dx$

$\Rightarrow I = \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4}\right]_4^5 - \frac{2}{3}\int_4^5 (x-4)^{\frac{3}{2}}dx$

$= \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4}\right]_4^5 - \frac{2}{3}\left[\frac{(x-4)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_4^5$

$= \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4}\right]_4^5 - \frac{4}{15}\left[(x-4)^{\frac{5}{2}}\right]_4^5$

$= \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4}\right]_4^5 - \frac{4}{15}\left[(x-4)^{\frac{5}{2}}\right]_4^5$

$= \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4}\right]_4^5 - \frac{4}{15}\left[(x-4)^2\sqrt{x-4}\right]_4^5$

$$= \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4} - \frac{4}{15}(x-4)^2\sqrt{x-4}\right]_4^5$$

=> $I = F(5) - F(4) = \left(\frac{22}{5}\right) - (0) = \frac{22}{5}$

**- Méthode d'intégration par changement de variable :**

$I = \int_4^5 (x+2)\sqrt{x-4}dx$

Posons $u = x - 4$ => $= u + 4$ . Alors $dx = du$

Si $x = 4$ alors $u = 0$ et Si $x = 5$ alors $u = 1$

=> $I = \int_0^1 (u+4+2)\sqrt{u}\,du = \int_0^1 (u+6)\sqrt{u}\,du = \int_0^1 \left(u\sqrt{u} + 6\sqrt{u}\right) du$

$$= \int_0^1 \left(u^{\frac{3}{2}} + 6\sqrt{u}\right) du = \int_0^1 u^{\frac{3}{2}}\,du + \int_0^1 6\sqrt{u}\,du = \int_0^1 u^{\frac{3}{2}}\,du + 6\int_0^1 \sqrt{u}\,du$$

=> $I = \left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^1 + 6\left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{5}u^2\sqrt{u}\right]_0^1 + \left[4u\sqrt{u}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{5}u^2\sqrt{u} + 4u\sqrt{u}\right]_0^1$

=> $I = F(1) - F(0) = \left(\frac{22}{5}\right) - (0) = \frac{22}{5}$

## <u>Exercice 2</u>……………….…………………………………………($\mathbf{5\ points}$)

Dans le plan complexe P, On donne :

$Z_A = 1$

$Z_N = iZ - (1+i)$.

$M' = bary\{(M\,;\,\lambda)\,;\,(N\,;\,-\lambda);\,(A\,;1)\}$

$T_\lambda(M) = M'$ Où $\lambda$ est un nombre réel non nul.

1-Démontrons que pour tout $M$ du plan, le point $N$ est l'image de $M$ par une rotation dont on Précisera les éléments caractéristiques.

$Z_N = iZ - (1+i)$. (Sous la forme $Z' = aZ + b$) avec $a = i$ et $b = -1 - i$

Puisque $a = i \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = |i| = 1$ $alors\ f$ est une rotation dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |i| = 1$.

- Angle : $\theta = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$

- Centre $\Omega$ d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-1-i}{1-i} = \frac{-(1+i)^2}{2} = -i$ => $\Omega(0\,;\,-1)$

2- a- Démontrons que l'affixe $Z'$ du point $M'$est telle que $Z' = \lambda(1-i)\,Z + \lambda(1+i) + 1.$

On a : $M' = bary\{(M\,;\,\lambda)\,;\,(N\,;\,-\lambda);\,(A\,;1)\}$

=> $Z' = \frac{\lambda Z_M - \lambda Z_N + Z_A}{\lambda - \lambda + 1} = \frac{\lambda Z_M - \lambda Z_N + Z_A}{1} = \lambda Z_M - \lambda Z_N + Z_A$

=> $Z' = \lambda Z - \lambda[iZ - (1+i)] + 1$

$= \lambda Z - \lambda iZ + \lambda(1+i) + 1$

$= \lambda(1-i)\,Z + \lambda(1+i) + 1.$ D'où $T_\lambda$: $Z' = \lambda(1-i)\,Z + \lambda(1+i) + 1.$

b- Démontrons que $T_\lambda$ est une similitude directe dont on Précisera l'affixe du centre $\Omega$ ; le rapport et l'angle

**<u>NB :</u>** Si $Z' = aZ + b$ $avec$ $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1$ $alors$ $f$ est une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle α $= \arg(a)$ et de centre $\Omega$ d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.

On a $T_\lambda$: $Z' = \lambda(1-i)\,Z + \lambda(1+i) + 1$. Avec $a = \lambda(1-i)$ et $b = \lambda(1+i) + 1$

Ici $a = \lambda(1-i) \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = |\lambda(1-i)| = \sqrt{2\lambda^2} = \lambda\sqrt{2} \neq 1$

Alors $T_\lambda$ est une similitude dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |\lambda(1-i)| = \sqrt{2\lambda^2} = \lambda\sqrt{2}$

- Angle : $\theta = \arg[\lambda(1-i)] = -\frac{\pi}{4}$

- Centre $\Omega$ d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{\lambda(1+i)+1}{1-[\lambda(1-i)]} = \frac{1-2i\lambda^2}{(1-\lambda)^2+\lambda^2}$

$= \frac{1}{(1-\lambda)^2+\lambda^2} + i\frac{-2\lambda^2}{(1-\lambda)^2+\lambda^2}$ => $\Omega\left(\frac{1}{(1-\lambda)^2+\lambda^2}\,;\,\frac{-2\lambda^2}{(1-\lambda)^2+\lambda^2}\right)$

c-Déterminons les valeurs de $\lambda$ , pour la quelle $T_\lambda$ est une rotation.

$T_\lambda$ Est une rotation $si\ a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = 1$ or $a = \lambda(1-i)$

Puis que $\lambda$ est un nombre réel non nul alors $\lambda(1-i) \in \mathbb{C}^* - \{1\}$

Alors la seconde condition est satisfaite si $|a| = 1 \Leftrightarrow |\lambda(1-i)| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2\lambda^2} = 1$

$$\Leftrightarrow |\lambda|\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda\sqrt{2} = 1 \\ ou \\ \lambda\sqrt{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ ou \\ \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

d-Donnons dans chacun de ces cas l'angle et l'affixe de son centre.

**a- Pour $\boldsymbol{\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$, on a :**

- Angle : $\theta = \arg\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right] = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$
- Centre $\Omega\left(\frac{1}{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\ ;\ \frac{-2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right) \Rightarrow \Omega\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\ ;\ -\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$

**b- Pour $\boldsymbol{\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}}$, on a :**

- Angle : $\theta = \arg\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right] = -\frac{\pi}{4}$
- Centre $\Omega\left(\frac{1}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\ ;\ \frac{-2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right) \Rightarrow \Omega\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\ ;\ -\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$

e- Exprimons les coordonnées $(x'\,;y')$ du point $M'$ en fonction de celles $(x\,;y)$ de $M$ pour chacun des valeurs de $\lambda$ obtenus.

**c- Pour $\boldsymbol{\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$, on a :**

$$T_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} :\ Z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\,Z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) + 1$$

$$\Leftrightarrow x' + iy = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(x+iy) - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) + 1$$

$$\Leftrightarrow x' + iy = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+y+1-\sqrt{2}\right) + i\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+y+1-\sqrt{2}\right) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y-1) \end{cases}$$

**d- Pour $\boldsymbol{\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}}$, on a :**

$$T_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} :\ Z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\,Z + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) + 1$$

$$\Leftrightarrow x' + iy = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(x+iy) - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) + 1$$

$\Leftrightarrow x' + iy = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + y + 1 + \sqrt{2}\right) + i\frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y + 1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + y + 1 + \sqrt{2}\right) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y + 1) \end{cases}$

3- Le nombre réel $\lambda$ étant strictement positif, on lui associe le point $P(-ln\lambda\ ;\ ln\lambda)$.

Soit $P'$ le point du plan tel que $T_\lambda(P) = P'$

a- Déterminons les coordonnées de $P'$ en fonction de $\lambda$.

Pour cela Exprimons les coordonnées $(x'\ ; y')$ du point $M'$ en fonction de celles $(x\ ; y)$ de $M$

On a : $T_\lambda$: $Z' = \lambda(1 - i)\,Z + \lambda(1 + i) + 1$

$\Leftrightarrow x' + iy = \lambda(1 - i)(x + iy) + \lambda(1 + i) + 1$

$\Leftrightarrow x' + iy = \lambda\left(x + y + 1 + \frac{1}{\lambda}\right) + i\lambda(-x + y + 1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \lambda\left(x + y + 1 + \frac{1}{\lambda}\right) \\ y' = \lambda(-x + y + 1) \end{cases}$

Alors $T_\lambda(P) = P'$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_{P'} = \lambda\left(-ln\lambda + ln\lambda + 1 + \frac{1}{\lambda}\right) \\ y_{P'} = \lambda(ln\lambda + ln\lambda + 1) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_{P'} = \lambda\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \\ y_{P'} = \lambda(2ln\lambda + 1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{P'} = \lambda + 1 \\ y_{P'} = 2\lambda ln\lambda + \lambda \end{cases}$ => $P'(\lambda + 1\ ;\ 2\lambda ln\lambda + \lambda)$

b- Démontrons que lorsque $\lambda$ décrit $\mathbb{R}_+^*$ ; l'ensemble des points $P'$ est la courbe $(\Gamma)$ d'équation

$y = 2(x - 1)ln(x - 1) + (x - 1)$.

On a : $\begin{cases} x_{P'} = \lambda + 1 \\ y_{P'} = 2\lambda ln\lambda + \lambda \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = 2\lambda ln\lambda + \lambda \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x - 1 & (\mathbf{1}) \\ y = 2\lambda ln\lambda + \lambda & (\mathbf{2}) \end{cases}$

En éliminant $\lambda$ entre les équations $(\mathbf{1})$ et $(\mathbf{2})$ **;** on a :

$y = 2(x - 1)ln(x - 1) + (x - 1)$

D'où lorsque $\lambda$ décrit $\mathbb{R}_+^*$ ; l'ensemble des points $P'$ est la courbe $(\Gamma)$ d'équation

$y = 2(x - 1)ln(x - 1) + (x - 1)$.

4- On pose $h(x) = y$ de sorte que la courbe de la fonction numérique $h$ est $(\Gamma)$

a- Dressons le tableau de variation $de\ h$.

$h(x) = y \Leftrightarrow h(x) = 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$

$Dh = \{x/x \in \mathbb{R}\,; x-1 > 0\}$ => $Dh = ]1\,;+\infty[$

$lim\ h(x) = lim\ 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$

$x \to 1 \qquad x \to 1$

Effectuons un changement de variable en posant $X = x - 1$

Si $x \to 1$ Alors $X \to 0$

D'où $lim\ h(x) \Leftrightarrow lim\ 2XlnX + X = 0$

$x \to 1 \qquad X \to 0$

De même

$lim\ h(x) = lim\ 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

Effectuons un changement de variable en posant $X = x - 1$

Si $x \to +\infty$ Alors $X \to +\infty$

D'où $lim\ h(x) \Leftrightarrow lim\ 2XlnX + X = +\infty$

$x \to +\infty \qquad X \to +\infty$

$h(x) = 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$ => $h'(x) = 2ln(x-1) + 3$

Posons $h'(x) > 0 \Leftrightarrow 2ln(x-1) + 3 > 0 \Leftrightarrow ln(x-1) > -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x - 1 > e^{-\frac{3}{2}}$

$\Leftrightarrow x > e^{-\frac{3}{2}} + 1.$

Ainsi on dira que pour les $x > e^{-\frac{3}{2}} + 1;$ on a : $h'(x) > 0.$

D'où le tableau de variation de $h$ est le suivant :

| $x$ | $1$ | | $e^{-\frac{3}{2}}+1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | ‖ $0$ | ↘ | $-0,44$ | ↗ | $+\infty$ |

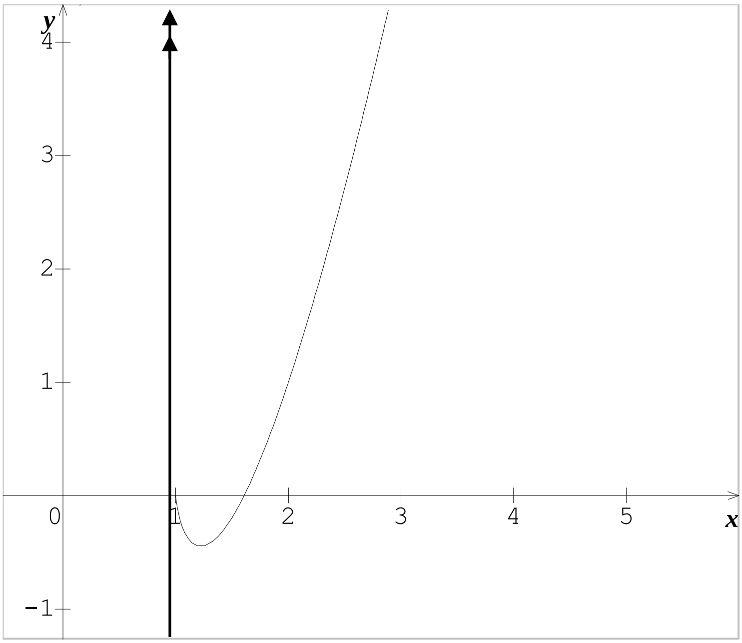
b- Précisons une équation de chacune des éventuelles asymptotes à $(\Gamma)$

$x = 1$ Est asymptote verticale en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty$$

Alors la courbe $(\Gamma)$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction $(oy)$

c- Représentons $(\Gamma)$ dans un repère orthonormé du plan.



**<u>Problème</u>……………………………………………………………($\mathbf{10}$ $\boldsymbol{points}$)**

**PARTIE A :**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ln\left( 2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right)$. On désigne par (C$f$) la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1cm.

1) Montrons que $f$ est impaire

$f$ est impaire si et seulement si $f(-x) = -f(x)$

$$f(-x) = ln\left(-2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right) = ln\left[\frac{\left(-2x + \sqrt{4x^2+1}\right)\left(-2x - \sqrt{4x^2+1}\right)}{-2x - \sqrt{4x^2+1}}\right]$$

$$= ln\left[\frac{(-2x)^2 - \left(\sqrt{4x^2+1}\right)^2}{-2x - \sqrt{4x^2+1}}\right] = ln\left[\frac{4x^2 - (4x^2+1)}{-2x - \sqrt{4x^2+1}}\right] = ln\left(\frac{4x^2-4x^2-1}{-2x - \sqrt{4x^2+1}}\right)$$

$$= ln\left(\frac{-1}{-2x - \sqrt{4x^2+1}}\right) = ln\left(\frac{1}{2x + \sqrt{4x^2+1}}\right) = -ln\left( 2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right) = -f(x)$$

D'où $f$ est impaire

2) Montrons que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f(x) = ln\left( 2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right)$.

- $2x$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$
- $\sqrt{4x^2 + 1}$ est aussi une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

Alors $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Montrons que $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$.

$$f(x) = ln\left( 2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{2 + \frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}}{2x + \sqrt{4x^2+1}} = \frac{2 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}}{2x + \sqrt{4x^2+1}} = \frac{\frac{2\sqrt{4x^2+1} + 4x}{\sqrt{4x^2+1}}}{2x + \sqrt{4x^2+1}}$$

$$= \frac{\frac{2\left(\sqrt{4x^2+1} + 2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}}}{2x + \sqrt{4x^2+1}} = \frac{2\left(\sqrt{4x^2+1} + 2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+1} + 2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}\right)} = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$$

D'où $\forall\, x \in \mathbb{R}\ ;\ f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$

3) Dressons le tableau de variation de $f$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}\,;\ f'(x) > 0$

D'où $\forall\, x \in \mathbb{R}\,;\ f$ est strictement croissante.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right) = \lim_{x \to +\infty} ln\left[2x + \sqrt{4x^2\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} ln\left[2x + |2x|\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}\right] = \lim_{x \to +\infty} ln\left[2x + 2x\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} ln\left[2x\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}\right)\right] = ln[(+\infty)(2)] = ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} ln\left[\frac{\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\left(2x-\sqrt{4x^2+1}\right)}{2x - \sqrt{4x^2+1}}\right] = \lim_{x \to -\infty} ln\left[\frac{(2x)^2 - \left(\sqrt{4x^2+1}\right)^2}{2x - \sqrt{4x^2+1}}\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} ln\left[\frac{4x^2 - (4x^2+1)}{2x - \sqrt{4x^2+1}}\right] = \lim_{x \to -\infty} ln\left(\frac{4x^2 - 4x^2 - 1}{2x - \sqrt{4x^2+1}}\right) = \lim_{x \to -\infty} ln\left(\frac{-1}{2x - \sqrt{4x^2+1}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} ln\left(\frac{-1}{2x - \sqrt{4x^2\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)}}\right) = \lim_{x \to -\infty} ln\left(\frac{-1}{2x - |2x|\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} ln\left(\frac{-1}{2x - (-2x)\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}}\right) = \lim_{x \to -\infty} ln\left(\frac{-1}{2x + 2x\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} ln\left(\frac{-1}{\left[2x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}\right)\right]}\right) = \lim_{x \to -\infty} ln\left(\frac{-1}{2x}\right) = -\infty$$

D'où le tableau de variation de $f$ est le suivant :

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow +\infty$ |

4) Etudions les branches infinies de la courbe (C$f$).

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)}{x} = 0$$

Alors la courbe (C$f$) admet une branche parabolique de direction $(ox)$

5) Trouvons une équation cartésienne de la tangente ( T ) à (C$f$) au point d'abscisse nul.

L'équation de la tangente (T) à (C$f$) au point d'abscisse nul est $y = f'(0)(x) + f(0)$

=> $y = f'(0)(x) + f(0) = 2x$. D'où on a ( T ) : $y = 2x$

6) Précisons la position de ( T ) et (C$f$).

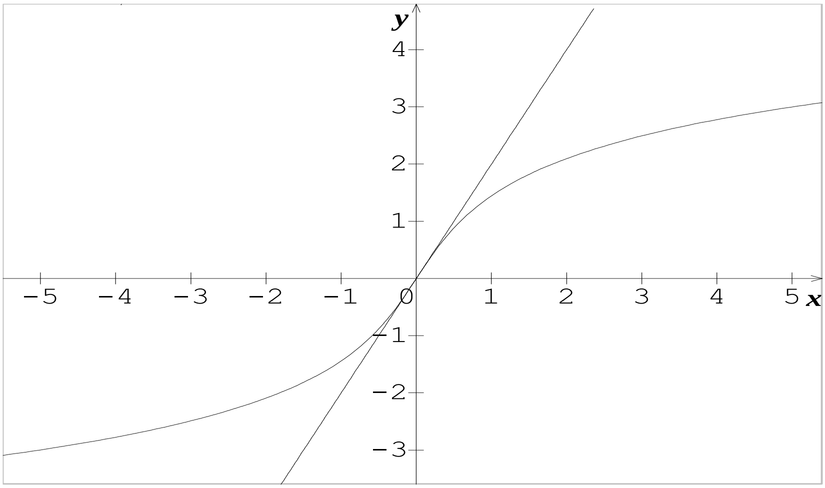
Pour cela, étudions le signe de $f(x) - y$

L'étudions le signe de $f(x) - y$ montre que :

$\forall\, x \in\ ]-\infty\ ;0]\ ;\ f(x) - y > 0$. Alors $\forall\, x \in\ ]-\infty\ ;0]$ ; $(Cf)$ est au dessus $(T)$

$\forall\, x \in\ [0\ ;+\infty[\ ;\ f(x) - y < 0$. Alors $\forall\, x \in\ [0\ ;+\infty[$ ; $(Cf)$ est en dessous $(T)$

7) Traçons la droite ( T ) et la courbe (C$f$)




8) Soit $\alpha$ un réel strictement positif. Calculons en fonction de $\alpha$, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C$f$) et les droites d'équations respectives $x = 0$ , $y = 0$ $et$ $x = \alpha$.

$A(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)dx = \int_0^\alpha ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)dx$

Posons $u(x) = ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)$ => $u'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$

$v'(x) = 1$=> $v(x) = x$

=> $A(\alpha) = \left[xln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)\right]_0^\alpha - \int_0^\alpha \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}dx$

$= \left[xln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right) - 2\sqrt{4x^2+1}\right]_0^\alpha$

$= \alpha ln\left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2+1}\right) - 2\sqrt{4\alpha^2+1} + 2$

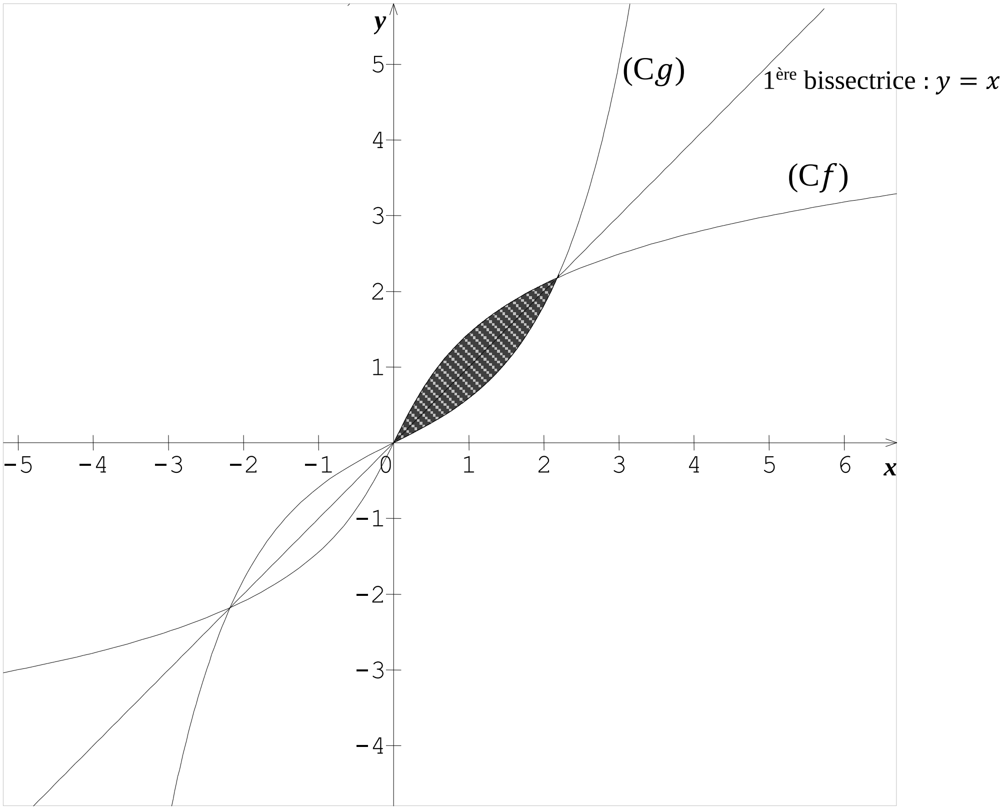
**PARTIE B :**

1) Montrons que la fonction $f$ admet une fonction réciproque $g$ définie sur un intervalle I que l'on Précisera.

D'après le tableau de variation $f$ ; $f$ est définie ; continue et strictement croissante de $]-\infty\,;\,+\infty[$ vers $]-\infty\,;\,+\infty[$.

D'où la fonction $f$ admet une fonction réciproque $g$ définie sur l'intervalle $I = ]-\infty\,;+\infty[$

2) Construisons dans le même repère que (C$f$) , la courbe (C$g$) de la fonction $g$.




3) Montrons que pour tout $x \in$ I, on a : $g(x) = \frac{1}{4}(e^{x} - e^{-x})$.

$f(x) = ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)$. Posons $f(x) = y \Leftrightarrow ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right) = y \Leftrightarrow$

$2x + \sqrt{4x^2+1} = e^{y} \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+1} = e^{y} - 2x \Leftrightarrow \left(\sqrt{4x^2+1}\right)^2 = (e^{y} - 2x)^2 \Leftrightarrow$

$4x^2 + 1 = e^{2y} - 4xe^{y} + 4x^2 \Leftrightarrow e^{2y} - 4xe^{y} = 1 \Leftrightarrow 4xe^{y} = e^{2y} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{4e^{y}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{(e^{2y}-1)e^{-y}}{4} = \frac{e^{2y}\times e^{-y} - e^{-y}}{4} = \frac{e^{y} - e^{-y}}{4} = \frac{1}{4}(e^{y} - e^{-y})$.

=> $f^{-1}(x) = g(x) = \frac{1}{4}(e^{x} - e^{-x})$. ( Ce qu'il fallait démontrer)

4) Montrons que l'équation $g(x) = x$ admet dans l'intervalle $]\,0\ ;\ +\infty\,[$ une solution unique $\alpha$ et que $\alpha \in \left]\frac{-\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$.

- D'après le tableau de variation de $g$ , $\forall x \in ]0\ ;\ +\infty[$; $g$ est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[$ vers $]-\infty\ ;\ +\infty[$ . Alors l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique $\alpha$ telle que $g(\alpha) = \alpha$.

- De plus $\left[g\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \times \left[g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\alpha \in \left]\frac{-\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$.

5) Calculons en fonction de $\alpha$ l'aire du domaine limité par les deux courbes $(Cf)$ et $(Cg)$ et situées dans le demi-plan $x \geq 0$.

$$B(\alpha) = \int_0^\alpha [f(x) - g(x)]dx = \int_0^\alpha f(x)dx - \int_0^\alpha g(x)dx$$

$$= \alpha ln\left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 1}\right) - 2\sqrt{4\alpha^2 + 1} + 2 + \frac{1}{4}\int_0^\alpha (e^x - e^{-x})dx$$

$$= \alpha ln\left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 1}\right) - 2\sqrt{4\alpha^2 + 1} + 2 + \left[\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x}\right]_0^\alpha$$

$$= \alpha ln\left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 1}\right) - 2\sqrt{4\alpha^2 + 1} + 2 + \frac{1}{4}e^\alpha + \frac{1}{4}e^{-\alpha} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

**PARTIE C :**

On considère la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$.

1) Montrons que $\varphi$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle $J$ que l'on Précisera.

$$\varphi(x) = \frac{g(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{4}(e^x - e^{-x})}{\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x}} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\varphi(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R};\ \varphi'(x) > 0$$

D'où le tableau de variation de $\varphi$ est le suivant :

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $\varphi'(x)$ | $+$ |
| $\varphi(x)$ | $-1 \nearrow 1$ |

D'après le tableau de variation $\varphi$ : $\varphi$ est définie ; continue et strictement croissante de $]-\infty\ ;\ +\infty[$ vers$]-1\ ;\ 1[$.

D'où la fonction $\varphi$ admet une fonction réciproque $\varphi^{-1}(x)$ définie sur l'intervalle

$J = ]-1\ ;\ 1[$.

2) On pose $h(x) = \varphi^{-1}(x)$. Donnons les expressions de $h(x)$ et $h'(x)$.

$\varphi(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. Posons $\varphi(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = y \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = y(e^{2x}+1) \Leftrightarrow$

$e^{2x} - 1 = ye^{2x} + y \Leftrightarrow e^{2x} - ye^{2x} = 1 + y \Leftrightarrow e^{2x}(1-y) = 1 + y \Rightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \Rightarrow$

$2x = ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \Rightarrow \varphi^{-1}(x) = ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

D'où $h(x) = \varphi^{-1}(x) = ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$h(x) = ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Rightarrow h'(x) = \frac{\frac{1}{(1-x)^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{1}{1-x^2}$. D'où $h'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

3) Etudions puis représentons le fonction $h$ sur $]-1\ ;\ 1[$.

$lim\ h(x) = lim\ ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = -\infty$

$x \to -1^+ \quad x \to -1^+$

$lim\ h(x) = lim\ ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = ln\sqrt{\frac{2}{0^+}} = +\infty$

$x \to 1^- \quad x \to 1^+$

$h(x) = ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

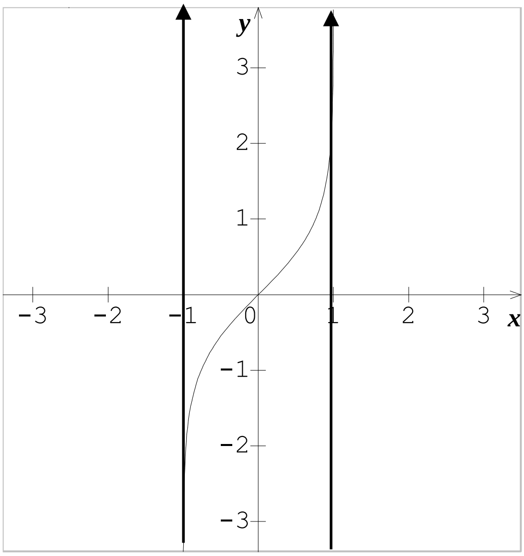
Alors le signe de $h'(x)$ dépend du signe de $1 - x^2$. Posons $1 - x^2 = 0$ => $x^2 = 1$

=> $x = -1$ ou $x = 1$

D'où le tableau de variation de $h$ est le suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | | $+$ | |
| $\varphi(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

La représentation de la courbe $(Ch)$ sur $]-1\,;\,1[$ est le suivant :



# Sujet 15 (TSE-STI)

## Exercice 1……………….……………………………………….$(5\ points)$

I// Soient les intégrales I et J définies par :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{cosx + sinx} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{cosx + sinx} dx$

Calcule $I + J$ et $I - J$ puis en déduis les valeurs de $I$ et $J$.

II// Un récepteur radio possède cinq (05) transistors dont deux (02) défectueux. On effectue simultanément un contrôle sur deux (02)

1) Combien y-a-t-il de contrôles possibles ?
2) Soit x la variable aléatoire égale au nombre de transistor défectueux décelés lors des contrôlés.
   a- Détermine l'ensemble des valeurs prises par X.
   b- Détermine la loi de probabilité de X.
   c- Calcule l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

## Exercice 2……………….……………………………………….$(5\ points)$

On donne trois points $A$ ; $B$ et $C$ distinctes non alignés du plan et on note $a$ ; $b$ et $c$ les longueurs des côtés du triangle $ABC$ tel que $BC = a$ ; $AC = b$ et $AB = c$.

On se propose d'étudier l'ensemble (E) des points $M$ du plan tels que :

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

1) Soit $G$ le centre de gravité du triangle $ABC$ et soit $I$ le milieu du segment$[BC]$.

a- Calcule $2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$ puis en déduis que $AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

On calculera de même les expressions de $BG^2$ et de $CG^2$

b- Montre que $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

2) a- Reconnaître le nature de (E).

b- On donne $a = 5$ ; $b = 4$ et $c = 3$. Trace le triangle $ABC$ puis dessiné (E) dans ce cas particulier.

## Problème……………………………………………………….$(10\ points)$

I// On étudie l'évolution d'une colonie de bactéries placée dans une pétrie. Le nombre de bactéries en centaines est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle$[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{4e^t - 1}{e^t + 2}$ où $t$ représente le temps en heures. On suppose que l'on peut compter le nombre de bactéries à l'unité près grâce à un compteur de radioactivité.

**1) a)** Calcule $f(0)$ et interpréter ce résultat.

**b)** Montre que $f(t) = 4 - \frac{9}{\mathrm{e^t} + 2}$. En déduis la limite de $f$ en $+\infty$

On appelle cette valeur, la saturation. Que peut-on en conclure pour la courbe (C ) de $f$ ?

**c)** L'équation $f(t) \ = 4$ admet-elle des solutions ? Justifier la réponse.

**2)** Montre que la dérivée $f'$de $f$ vérifie $f'(t) = \frac{9\mathrm{e^t}}{(\mathrm{e^t} + 2)^2}$. En déduis le tableau de variation de $f$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$

**3)** Soit (T) la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe (C). Détermine une équation de (T).

**4)** Recopie et complète le tableau ci-dessous en arrondissant à$10^{-2}$ près

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ | | | | | | | | |

**5)** Trace (C), (T) ainsi que toutes les asymptotes éventuelles à (C).

**6)** Calcule à la minute près l'instant $t_0$ où le nombre de bactéries sera égal à 200

**7)** Détermine le temps au bout duquel la population de cette colonie serrait égale à 80% de sa saturation

II// On désigne par $(o\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ un repère orthonormé du plan P. Soit $a$ un nombre réel et $f_a$ l'application affine de P dans luis - même qui au point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = (a+3)x - ay + a + 9 \end{cases}$$

1) a- Démontre que pour toute valeur non nulle de $a$, $f_a$ est une bijection.

b- Détermine l'application $f_a^{-1}$, réciproque de $f_a$ pour $a \neq 0$.

c- Détermine l'ensemble des points invariants par $f_a$. (On discutera suivant les valeurs du un nombre réel $a$).

# Correction Sujet 14 (TSE-STI)

**Exercice 1………………..……………………………………………$(5\ points)$**

I// Soient les intégrales I et J définies par :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{cosx +\ sinx} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{cosx +\ sinx} dx$

Calculons $I\ + J$ et $I - J$ puis en déduisons les valeurs de $I$ et $J$.

$$I\ + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{cosx +\ sinx} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{cosx +\ sinx} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{cosx}{cosx +\ sinx} + \frac{sinx}{cosx +\ sinx}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{cosx + sinx}{cosx +\ sinx}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

=> $I\ + J = \frac{\pi}{2}$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{cosx +\ sinx} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{cosx +\ sinx} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{cosx}{cosx +\ sinx} - \frac{sinx}{cosx +\ sinx}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{cosx - sinx}{cosx +\ sinx}\right) dx = [ln(cosx\ + sinx)]_0^{\frac{\pi}{2}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 0$$

=> $I - J = 0$

Ainsi pour en déduis les valeurs de $I\ et\ J$ ; on forme le système avec les équations :

$I\ + J = \frac{\pi}{2}$ et $I - J = 0$

=> $\begin{cases} I\ + J = \frac{\pi}{2} \\ I - J = 0 \end{cases}$

La resolution de Ce système Donne: $I = \frac{\pi}{4}$ et $J = \frac{\pi}{4}$.

II// Un récepteur radio possède cinq ( 05 ) transistors dont deux ( 02 ) défectueux. On effectue simultanément un contrôle sur deux ( 02 )

- Un récepteur radio possède 5 transistors => $n = 5$.
- On effectue simultanément un contrôle sur 2 => $p = 2$.
- Le tirage est simultané alors le modèle mathématique utilisé est le $C_n^p$

1) Déterminons le nombre de contrôles possibles
Le nombre de contrôles possibles est Card$(\Omega) = C_5^2 = 10$

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de transistor défectueux décelés lors des contrôlés.

a- Déterminons l'ensemble des valeurs prises par X.

Le contrôle consiste à chercher 2 transistors défectueux sur les 5.

Puisque le tirage est simultané, alors le tirage peut être donc porté soit sur **0** transistors, soit sur **1** transistors , soit sur **2** transistors.
D'où l'ensemble des valeurs prises par X est : X = {0 ; 1 ; 2}.

b-Déterminons la loi de probabilité de X.

Alors calculons : $P(\mathrm{X}=0)$ ; $P(\mathrm{X}=1)$ ; $P(\mathrm{X}=2)$

$P(\mathrm{X}=0) = \frac{C_2^0 \times C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$; $P(\mathrm{X}=1) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10}$; $P(\mathrm{X}=2) = \frac{C_2^2 \times C_3^0}{C_5^2} = \frac{1}{10}$

D'où le tableau de la loi de probabilité est le suivant :

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X = x_i)$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |

c-Calculons l'espérance mathématique, la variance de X.

$\mathrm{E}(X)= \sum x_i \times P_i = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = 0{,}8$ => $\mathrm{E}(X) = 0{,}8$

L'écart-type de X est $\delta(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$

Or $\mathrm{V}(X)= \sum {x_i}^2 \times P_i - E^2(X) = 0^2 \times \frac{3}{10} + 1^2 \times \frac{6}{10} + 2^2 \times \frac{1}{10} - 0{,}8^2 = 0{,}36$

Alor $\delta(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V}(X)} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$

**Exercice 2……………….…………………………………………(5 *points*)**

On donne trois points $A$ ; $B$ et $C$ distinctes non alignés du plan et on note $a$ ; $b$ et $c$ les longueurs des côtés du triangle $ABC$ tel que $BC = a$ ; $AC = b$ et $AB = c$.
On se propose d'étudier l'ensemble (E) des points $M$ du plan tels que :

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

1) Soit $G$ le centre de gravité du triangle $ABC$ et soit $I$ le milieu du segment$[BC]$.

a- Calculons $2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$

On sait que : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$ => $2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

Or $BC = a$ ; $AC = b$ et $AB = c$.

=> $2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = c^2 + b^2 - a^2$

En déduisons que $AG^2 = \frac{1}{9}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$.

Puisque : $G$ est le centre de gravité du triangle $ABC$; alors on a :

$G =$ bary$\{(A; 1)$ ; $(B; 1)$ ; $(C; 1)\}$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$

=> $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

=>$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{1+1+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{1+1+1}\overrightarrow{AC}$

=> $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

=> $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

⇔ $AG^2 = \frac{1}{9}\left(AB^2 + 2\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AC} + AC^2\right) = \frac{1}{9}(c^2 + c^2 + b^2 - a^2 + b^2)$

=> $AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$

De même on a : $BG^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$ et $CG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2a^2 - c^2)$

b- Montrons que $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

D'après 1) a-), on a :

$AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$ **(1)**

$BG^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$ **(2)**

$CG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2a^2 - c^2)$ **(3)**

En effectuant la somme membre à membre des relations : **(1) ; (2) et (3),** on obtient :

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{9}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right) + \frac{1}{9}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right) + \frac{1}{9}\left(2b^2 + 2a^2 - c^2\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2b^2 + 2a^2 - c^2\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(3b^2 + 3c^2 + 3a^2\right) = \frac{3}{9}\left(b^2 + c^2 + a^2\right) = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

D'où $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ (ce qu'il fallait Démontre)

2) a- Déterminons la nature de (E).

On a (E) : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2$ .

Posons $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$

Alors $MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow f(M) = a^2 + b^2 + c^2$

Exprimons ainsi $f(M)$ en fonction de $MG$ et de $f(G)$

On sait que $f(M) = \sum \alpha_i MG^2 + f(G)$ avec $\alpha_1 = 1$ ; $\alpha_2 = 1$ et $\alpha_3 = 1$

Or $\sum \alpha_i MG^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MG^2 = (1 + 1 + 1)MG^2 = 3MG^2 \Rightarrow f(M) = 3MG^2 + f(G)$

D'autre part $f(G) = \frac{(\alpha_1\, \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1\, \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2\, \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{3}$

Avec $AB^2 = c^2$ ; $AC^2 = b^2$ $et$ $BC^2 = a^2$

$\Rightarrow f(G) = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$

D'où $f(M) = 3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$

D'autre part, on a : $f(M) = a^2 + b^2 + c^2$

Alors par identification on a : $3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = a^2 + b^2 + c^2$

$\Leftrightarrow 3MG^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$

$\Leftrightarrow 3MG^2 = \frac{3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - a^2 - b^2 - c^2}{3}$

$\Leftrightarrow 3MG^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}{3}$

$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}{9}$

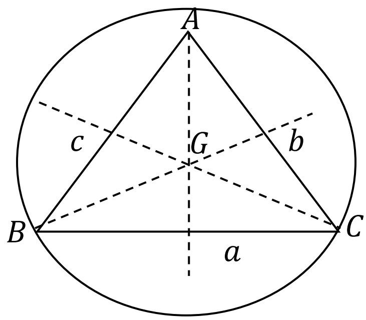
$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{9} \Rightarrow MG = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}}{3}$

Donc l'ensemble (E) des points M du plan cherché est le cercle de centre $G$et de rayon $r = \frac{\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}}{3}$

b- On donne $a = 5$ ; $b = 4$ et $c = 3$.

Si $a = 5$ ; $b = 4$ et $c = 3$, alors :

L'ensemble (E) des points M du plan cherché est le cercle de centre $G$et de rayon $r = \frac{10}{3}$




**<u>Problème</u>**.........................................................**(10 *points*)**

I// On étudie l'évolution d'une colonie de bactéries placée dans une pétrie. Le nombre de bactéries en centaines est modélisé par la fonction $f$ définie sur l'intervalle$[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{4e^t - 1}{e^t + 2}$ où $t$ représente le temps en heures. On suppose que l'on peut compter le nombre de bactéries à l'unité près grâce à un compteur de radioactivité.

**1) a)** Calculons $f(0)$

$$f(0) = \frac{4e^0 - 1}{e^0 + 2} = \frac{4 - 1}{1 + 2} = \frac{3}{3} = 1$$

<u>Interprétation du résultat</u> : A l' instant $t = 0$, on a une centaine de bactéries

**b)** Montrons que $f(t) = 4 - \frac{9}{e^t + 2}$.

$f(t) = \frac{4e^t - 1}{e^t + 2}$ . En effectuant la division Euclidienne de $4e^t - 1$ par $e^t + 2$, on obtient bien :

$$f(t) = 4 - \frac{9}{e^t + 2}.$$

En déduisons la limite de $f$ en $+\infty$

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} 4 - \frac{9}{e^t + 2}. = \lim_{t \to +\infty} 4 - \frac{9}{e^t} = 4 - 0 = 4$$

Si cette valeur est la saturation, alors on peut conclure que pour la courbe (C ) admet 4 centaines de bactéries comme valeur seille.

**c)** Vérifions si l'équation $f(t) = 4$ admet-elle des solutions

$$f(t) = 4 \Leftrightarrow 4 - \frac{9}{e^t + 2} = 4 \Leftrightarrow -\frac{9}{e^t + 2} = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{e^t + 2} = 0 \Leftrightarrow 9 = 0\ (absurde).$$

Alors l'équation $f(t) = 4$ n'admet pas de solution.

**2)** Montrons que la dérivée $f'$de $f$ vérifie $f'(t) = \frac{9e^t}{(e^t + 2)^2}$.

$$f(t) = \frac{4e^t - 1}{e^t + 2}$$

Posons $u(t) = 4e^t - 1 \Rightarrow u'(t) = 4e^t$

$v(t) = e^t + 2 \Rightarrow v'(t) = e^t$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{(4e^t)(e^t + 2) - (e^t)(4e^t - 1)}{(e^t + 2)^2} = \frac{e^t(4e^t + 8 - 4e^t + 1)}{(e^t + 2)^2} = \frac{e^t \times 9}{(e^t + 2)^2} = \frac{9e^t}{(e^t + 2)^2}$$

En déduisons le tableau de variation de $f$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$

$f'(t) = \frac{9e^t}{(e^t + 2)^2} > 0$. Alors pour tout $t \in [0; +\infty[$, $f$ est strictement croissante.

D'où le tableau de variation de $f$ est le suivant :

| $t$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | |
| $f(t)$ | $1$ | $\nearrow$ | $4$ |

**3)** Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0

On a : (T) :$y = f'(0)(t - 0) + f(0) = t \times f'(0) + f(0) = t \times 1 + 1 = t + 1$

D'où l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 est $y = t + 1$

**4)** Complétons le tableau ci-dessous en arrondissant à$10^{-2}$ près

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ | 1 | 2,09 | 3,04 | 3,59 | 3,84 | 3,94 | 3,97 | 3,99 |

**5)** Traçons (C), (T) ainsi que toutes les asymptotes éventuelles à (C ).

II// On désigne par $(o\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ un repère orthonormé du plan P. Soit $a$ un nombre réel et $f_a$ l'application affine de P dans luis - même qui au point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que :

$\begin{cases} x' = ax \\ y' = (a+3)x - ay + a + 9 \end{cases}$

1) a- Démontrons que pour toute valeur non nulle de $a, f_a$ est une bijection.

Soit $\varphi$ l'endomorphisme associé à $f_a$.

La matrice de $f_a$ dans la base $(\vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath})$ est $M_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a+3 & -a \end{pmatrix}$

Ainsi le déterminant associé à cette matrice est : $detM_a = \begin{vmatrix} a & 0 \\ a+3 & -a \end{vmatrix}$

$detM_a = \begin{vmatrix} a & 0 \\ a+3 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - 0(a+3) = -a^2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow a \neq 0.$

D'où pour toute valeur non nulle de $a$ , $f_a$ est bijective.

b- Déterminons l'application $f_a^{-1}$, réciproque de $f_a$ pour $a \neq 0$.

Pour $a \neq 0$, $f_a(M) = M' \quad \Leftrightarrow f_a^{-1}(M') = M \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax \\ y' = (a+3)x - ay + a + 9 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = \frac{1}{a}x' \\ ay = \frac{a+3}{a}x' - y' + a + 9 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{a}x' \\ y = \frac{a+3}{a^2}x' - \frac{1}{a}y' + \frac{a+9}{a} \end{cases}$

D'où $f_a^{-1}$ est définie par :

$f_a^{-1}:\ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ Avec $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a}x \\ y_1 = \frac{a+3}{a^2}x - \frac{1}{a}y + \frac{a+9}{a} \end{cases}$

c- Déterminons l'ensemble des points invariants par $f_a$. (On discutera suivant les valeurs du un nombre réel $a$).

L'ensemble des points invariants par $f_a$ est donné par $f_a(M) = M \quad \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = ax \\ y = (a+3)x - ay + a + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)x = 0 \\ (a+3)x - (a+1)y = -a - 9 \end{cases}$

Le déterminant associé à ce système est $detM_a = \begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ a+3 & -(a+1) \end{vmatrix} = -(a-1)(a+1)$

Alors $detM_a = 0 \ \Leftrightarrow -(a-1)(a+1) = 0 \quad \Leftrightarrow a = 1$ ou $a = -1$

a- **Si $\boldsymbol{a = 1}$**

On a $f_1(M) = M \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 4x - y + 10 \end{cases} \Leftrightarrow 4x - 2y = -10 \Leftrightarrow 2x - y + 5 = 0$

D'où pour $\boldsymbol{a = 1}$, l'ensemble des points invariants chercher est la droite d'équation :

$2x - y + 5 = 0$

b- **Si $\boldsymbol{a = -1}$**

On a $f_{-1}(M) = M \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x \\ y = 2x + y + 8 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2x = -8 \end{cases}$ ce qui est absurde.

D'où pour $a = -1$, l'ensemble des points invariants n'existe pas.

2) a- Démontrons que seule $f_1$ est une involution.

On a $f_1 : \begin{cases} x' = x \\ y' = 4x - y + 10 \end{cases}$

Soit $\varphi$ l'endomorphisme associé à $f_1$.

Ainsi la matrice de $f_1$ dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ est $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Par conséquent $f_1$ est involutive si et seulement si $M_1 \times M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ = (matrice identique)

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ => $M_1 \times M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'où $f$ est involutive.

Caractérisons cette involution.

- On sait que la droite d'équation : $2x - y + 5 = 0$ est l'ensemble des points invariants par $f_1$.

- On sait que aussi que $\varphi_{-1}(\vec{u}) = -\vec{u} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x \\ -y = 4x - y \end{cases} \quad \Leftrightarrow x = 0$

Conclusion : $f_1$ est la symétrie affine par rapport à la droite $2x - y + 5 = 0$ parallèlement à la droite vectorielle $x = 0$.

b- Démontrons que seule $f_{-1}$ est la composée d'une symétrie $s$ et d'une translation $\boldsymbol{t}$ dont le vecteur est un directeur de l'ensemble des points invariants par $s$, c'est-à-dire que $f_{-1} = tos$.

On a $f_{-1} : \begin{cases} x' = -x \\ y' = 2x + y + 8 \end{cases}$

Soit $\varphi'$ l'endomorphisme associé à $f_{-1}$.

Ainsi la matrice de $f_{-1}$ dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ est $M_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Par conséquent $M_{-1} \times M_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice identique)

D'où $f_{-1}$ est involutive.

D'autre part, $f_{-1}$ n'admet pas de point invariant donc $f_{-1} = tos = sot$ où $s$ est une symétrie et $t$ une translation.

$f_{-1}of_{-1} = (tos)o(sot) = to(sos)ot = tot.$

Si $\vec{u}$ est le vecteur de la translation $t$, alors $tot = t_{2\vec{u}}$ et par conséquent $t_{2\vec{u}} = f_{-1}of_{-1}$.

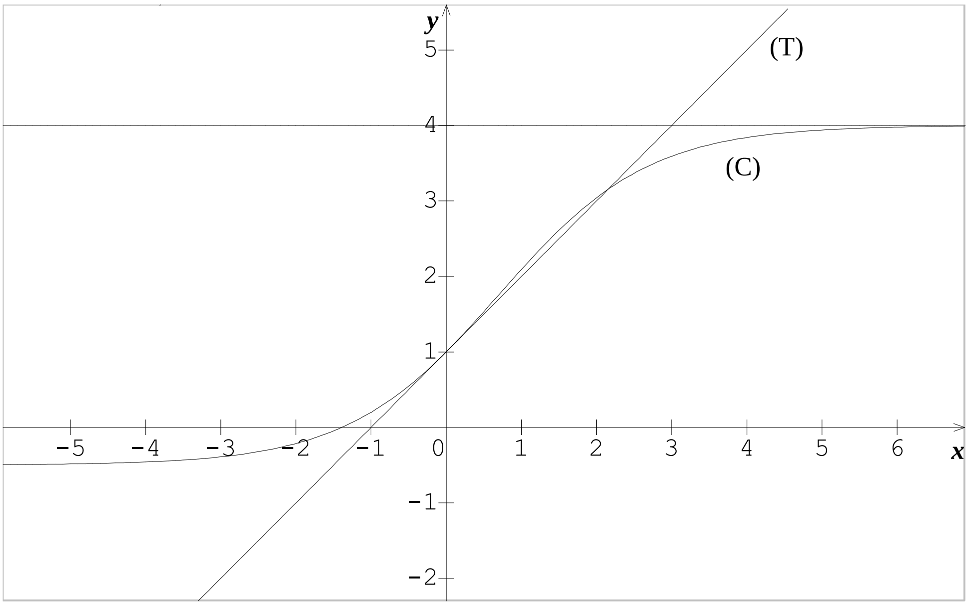
D'autre part on sait que $f_{-1}of_{-1}$ est définie par : $\begin{cases} x'' = x \\ y'' = y + 16 \end{cases}$ => $2\vec{u}$ a pour coordonnées $(0\,;16)$ et par conséquent $\vec{u}(0\,;8)$.

$f_{-1} = tos \Leftrightarrow s = t^{-1}of_{-1} \Leftrightarrow s$ Est définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = 2x + y \end{cases}$

$s(M) = M \Leftrightarrow x = 0.$

L'ensemble des points invariants par $s$ est la droite d'équation $x = 0$.

Nous remarquons que le vecteur $\vec{u}(0\,;8)$ appartient à la direction de cette droite.



**6)** Calculons à la minute près l'instant $t_0$ où le nombre de bactéries sera égal à 200

Le nombre de bactéries sera égal à 200 si et seulement si $f(t) = 2 \Leftrightarrow \frac{4\mathrm{e}^{\mathrm{t}} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{t}} + 2} = 2$

$\Leftrightarrow 4\mathrm{e}^{\mathrm{t}} - 1 = 2(\mathrm{e}^{\mathrm{t}} + 2) \Leftrightarrow 4\mathrm{e}^{\mathrm{t}} - 1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{t}} + 4 \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^{\mathrm{t}} = 5 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{t}} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \mathrm{t} = ln\left(\frac{5}{2}\right)$

=> $\mathrm{t} = 0{,}91$ soit 91 $minutes\ près$

Alors la minute près où le nombre de bactéries sera égal à 200 est $t_0 = 60\ mn$

**7)** Déterminons le temps au bout duquel la population de cette colonie serrait égale à 80% de sa saturation.

La population de cette colonie serrait égale à 80% de sa saturation si et seulement si

$f(t) = 4 \times 80\% \Leftrightarrow f(t) = 4 \times \frac{80}{100} \Leftrightarrow f(t) = 3{,}2 \Leftrightarrow \frac{4\mathrm{e}^{\mathrm{t}} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{t}} + 2} = 3{,}2 \Leftrightarrow$

$4\mathrm{e}^{\mathrm{t}} - 1 = 3{,}2(\mathrm{e}^{\mathrm{t}} + 2) \Leftrightarrow 4\mathrm{e}^{\mathrm{t}} - 1 = 3{,}2\mathrm{e}^{\mathrm{t}} + 6{,}4 \Leftrightarrow 0{,}8\mathrm{e}^{\mathrm{t}} = 7{,}4 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{t}} = \frac{7{,}4}{0{,}8}$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{t}} = 9{,}25 \Leftrightarrow \mathrm{t} = ln(9{,}25) \Leftrightarrow \mathrm{t} = 2{,}22$ Soit 2 $h$ 22 $min$

# Sujet 16 (TSE-STI)

**Exercice 1**……………………………………………………………(**5** $\boldsymbol{points}$)

I// 1) On considère l'équation (1) d'inconnue $(x\ ;\ y)$ de $\mathbb{Z}^2$ : $11x - 24y = 1$.

- a- Justifie à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.
- b- En utilisant l'algorithme d'Euclide, détermine une solution particulière de (1 ).
- c- Détermine l'ensemble solution de l'équation (1)

2) Recherche du PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

a- Justifie que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

b- $(x\ ;\ y)$ Désignant un couple quelconque d'entiers naturels solution de ( 1 ), Montre que l'on peut écrire : $(10^{11x} - 1) - 10(10^{24y} - 1) = 9$.

II// Sur une autoroute, deux carrefours successifs sont munis de feux tricolores A et B.
La couleur du feu B est indépendante de celle du feu A.
La probabilité que le feu A soit vert est $\frac{3}{4}$.
La probabilité que le feu B soit vert est $\frac{1}{2}$.
La probabilité de couleur orange est toujours nulle.

1) Un automobiliste passe aux deux carrefours

a- Calcule la probabilité qu'il rencontre deux feux verts.
b- Calcule la probabilité qu'il rencontre au moins un feu vert.

2) On ne s'occupe plus que du feu A.

Un automobiliste passe quatre fois à ce carrefour.
X est la variable aléatoire qui a pour valeur le nombre de feux verts que l'automobiliste rencontre.
a- Trouve la loi de probabilité de X.
b- Calcule l'espérance mathématique E(X) de X. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

**Exercice 2**……………………………………………………………(**5** $\boldsymbol{points}$)

Dans le plan affine P, on donne les points $A\binom{1}{0}$ et $B\binom{0}{1}$.

1) Détermine puis trace l'ensemble (Γ) des points $M\binom{x}{y}$ du plan tels que le barycentre du système $\{(A, x)\ ;\ (B, y)\ ;\ (C, xy)\}$ n'existe pas.

2) Soit C le point du plan P tel que $ABC$ soit un triangle équilatéral de côté $a$ ( $a \in \mathbb{R}^*$ )

a- Détermine puis construis le barycentre $G$ des points $A$ ; $B$ et $C$ affectés respectivement des coefficients 2 ; 1 et 1

b- Quel est l'ensemble ( δ ) des points $M$ du plan tel que :

$2\overrightarrow{MA^2} + \overrightarrow{MB^2} + \overrightarrow{MG^2} = ka^2$ avec $k \in \mathbb{R}$ (On discutera suivant les valeurs du paramètre $k$)

c- Construis cet ensemble si $k = 2$

**Problème**..........................................................$(\mathbf{10\ points})$

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal$(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ (unité 5 cm).

**Partie A** :

On considère la fonction $f_1$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f'_1(x) = xe^{-x^2}$et on appelle $C_1$ sa courbe représentative.

1) Montre que pour tout réel positif $x$, $f_1(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$ .En déduis le sens de variation de $f_1$.

2) Calcule la limite de $f_1$ en $+\infty$ (on pourra poser $u = x^2$). Interpréter graphiquement ce résultat.

3) Dresse le tableau de variation de $f_1$.

4) On appelle $\Delta$ la droite d'équation $y = x$. Détermine la position de $C_1$ par rapport à $\Delta$.

5) Trace $C_1$ et $\Delta$.

**Partie B** :

On considère la fonction $f_3$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f_3(x) = x^3e^{-x^2}$ et on appelle $C_3$ sa courbe représentative.

2) Montre que pour tout réel $x$ positif, $f'_3(x)$ a même signe que $3 – 2x^2$. En déduis le sens de variation de $f_3$.

3) Détermine les positions relatives de $C_1$ et $C_3$.

4) Trace $C_3$ dans le même repère que $C_1$ .
(on admettra que $C_3$ a la même asymptote que $C_1$ en $+\infty$).

5) On appelle D la droite d'équation $y = 1$. Soit $A_1$ l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe $C_1$, les deux axes de coordonnées et la droite D et soit $A_3$ l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe $C_3$, les deux axes de coordonnées et la droite D.

a) Calcule $A_1$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, Montre que $A_3 = -\frac{1}{2e} + A_1$

**Partie C** :

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction $f_n$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$.

On note $(C_n)$ la courbe représentative de $f_n$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$

1) Montre que pour tout entier $n \geq 1$, $f_n$ admet un maximum pour $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$ On note $\alpha_n$ ce maximum.

2) On appelle $S_n$ le point de $(C_n)$ d'abscisse $\sqrt{\frac{n}{2}}$. Montre que, pour tout $n$, $(C_n)$ passe par $S_2$. Placer $S_1$, $S_2$, $S_3$ sur la figure.

3) Soit la fonction $g$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = e^{\frac{x}{2}\left[-1+ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]}$

a) Etudie le sens de variation de $g$.

b) Montre que pour tout entier $n \geq 1$, $\alpha_n = g(n)$. En déduis que tout point $S_n$, on a une ordonnée supérieure à celle de $S_2$.

# Correction Sujet 16 (TSE-STI)

## Exercice 1……………….……………………………………(5 *points*)

I// 1) On considère l'équation (1) d'inconnue $(x\,;\,y)$ de $\mathbb{Z}^2$ : $11x - 24y = 1$.

a- Justifions à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

Les entiers 11 et 24 sont premiers entre eux, puis que 11 est premier et ne divise pas 24.

Le **théorème de Bézout** affirme : deux entiers $a$ et $b$ sont premiers entre eux si et seulement si, il existe $(u\,;v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $au + bv = 1$.

Les entiers 11 et 24 étant premiers entre eux, il existe $(u\,;v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $11u + 24v = 1$.

Le couple $(u\,;-v)$ est solution de l'équation (1).

b- En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminons une solution particulière de $11x - 24y = 1$

En utilisant l'algorithme d'Euclide, on a : $11(11) - 24(5) = 1$ =>$(x_0\,;\,y_0) = (11\,;5)$ est une solution particulière de l'équation (1).

c- Déterminons l'ensemble solution de l'équation (1)

**<u>NB :</u>** Si $(x_0\,;\,y_0)$ est une solution particulière de l'équation $ax + by = c$ alors l'ensemble solution de l'équation $ax + by = c$ est donné par : S = $\{(-bk + x_0\,; ak + y_0)\}$. Or :

$a = 11\,;\ b = -24\,;\ x_0 = 11\ et\ y_0 = 5$ => S = $\{(24k + 11\,; 11k + 5)\}\ avec\ k \in \mathbb{Z}$

2) Recherche du PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

a- Justifions que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

L'écriture décimale de $10^{11}$ comprend un ≪ 1 ≫ suvit de ≪ *onze* 0 ≫.

Par le jeu des retenues, on obtient : $10^{11} - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{\textbf{Onze 9}} = 9\times \underbrace{11\ldots1}_{\textbf{Onze 1}}$

Ce qui montre que 9 divise $10^{11} - 1$.

De même on obtient : $10^{24} - 1 = 9\times \underbrace{11\ldots1}_{\textbf{Vingt-quatre 1}}$

Ce qui montre que 9 divise $10^{24} - 1$

b- $(x\,;\,y)$ désignant un couple quelconque d'entiers naturels solution de (1), montrons que l'on peut écrire : $(10^{11x} - 1) - 10(10^{24y} - 1) = 9$.

Le couple $(11\,;5)$ est solution de (1). Alors :

$(10^{11x} - 1\,) - 10(10^{24y} - 1) = 10^{11x} - 1 - \ 10^{24y+1} + 10 = \ 10^{11x} - 10^{24y+1} + 9$

Or par hypothèse $11x - 24y \ = \ 1$ et donc $11x = 1 + 24y$ .

On en déduit donc que $(10^{11x} - \ 1) - \ 10(10^{24y} - \ 1) = 9$

II// Sur une autoroute, deux carrefours successifs sont munis de feux tricolores A et B.
La couleur du feu B est indépendante de celle du feu A.
La probabilité que le feu A soit vert est $\frac{3}{4}$.
La probabilité que le feu B soit vert est $\frac{1}{2}$.
La probabilité de couleur orange est toujours nulle.

**1) Un automobiliste passe aux deux carrefours**

a- Calculons la probabilité qu'il rencontre deux feux verts.
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

b- Calculons la probabilité qu'il rencontre au moins un feu vert.

Soit $C$ l'évènement ≪ il rencontre au moins un feu vert ≫

$P(C) = P(A) \times P(B) + P(A) \times P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \times P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$

**2) On ne s'occupe plus que du feu A.**

Un automobiliste passe quatre fois à ce carrefour.
X est la variable aléatoire qui a pour valeur le nombre de feux verts que l'automobiliste rencontre.

a- Trouvons la loi de probabilité de X.

Il s'agit d'une épreuve de BERNOULLI qui se répète 4 fois.
En effet, à chaque passage, soit il rencontre le feu vert avec une probabilité $P = \frac{3}{4}$ ou il ne le rencontre pas avec une probabilité $q = 1 - P = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Ainsi les différentes valeurs de la variable aléatoire sont X= $\{0; 1; 2; 3; 4\}$.

D'où :
$P(\mathrm{X} = 0) = C_4^0 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$

$P(\mathrm{X} = 1) = C_4^1 \left(\frac{3}{4}\right)^1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 4 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{12}{256}$

$P(\mathrm{X}=2)=C_4^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=6\times\frac{9}{16}\times\frac{1}{16}=\frac{54}{256}$

$P(\mathrm{X}=3)=C_4^3\left(\frac{3}{4}\right)^3\times\left(\frac{1}{4}\right)^1=4\times\frac{27}{64}\times\frac{1}{4}=\frac{108}{256}$

$P(\mathrm{X}=4)=C_4^4\left(\frac{3}{4}\right)^4\times\left(\frac{1}{4}\right)^0=1\times\frac{81}{256}\times 1=\frac{81}{256}$

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{1}{256}$ | $\frac{12}{256}$ | $\frac{54}{256}$ | $\frac{108}{256}$ | $\frac{81}{256}$ |

b- Calculons l'espérance mathématique E(X) de X.

E($X$)= $\sum x_i\times P_i=0\times\frac{1}{256}+1\times\frac{12}{256}+2\times\frac{54}{256}+3\times\frac{108}{256}+4\times\frac{81}{256}=\frac{768}{256}=3$

L'on pouvait prévoir ce résultat car la probabilité de rencontrer le feu vert au feu A est $\frac{3}{4}$ .

Comme il passe 4 fois à ce feu, il a alors 3 chances de rencontrer le feu vert d'où la valeur de E($X$)= 3.

**<u>Exercice 2</u>………………..………………………………………(5 *points*)**

Dans le plan affine P rapporté à un repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$, on donne les points $A\binom{1}{0}$ et $B\binom{0}{1}$.

1) Déterminons puis traçons l'ensemble ( Γ ) des points $M\binom{x}{y}$ du plan tels que le barycentre du système $\{(A\,,x)\ ;\ (B\,,y)\ ;\ (C\,,xy)\}$ n'existe pas.

Le barycentre du système $\{(A\,,x)\ ;\ (B\,,y)\ ;\ (C\,,xy)\}$ n'existe pas si et seulement si :

$x+y+xy=0 \Leftrightarrow y(x+1)+x=0 \Rightarrow y=-\frac{x}{x+1}$ avec $x\neq -1$

L'ensemble cherché est donc l'équation d'une hyperbole

Pour la construction, posons $f(x)=-\frac{x}{x+1}$

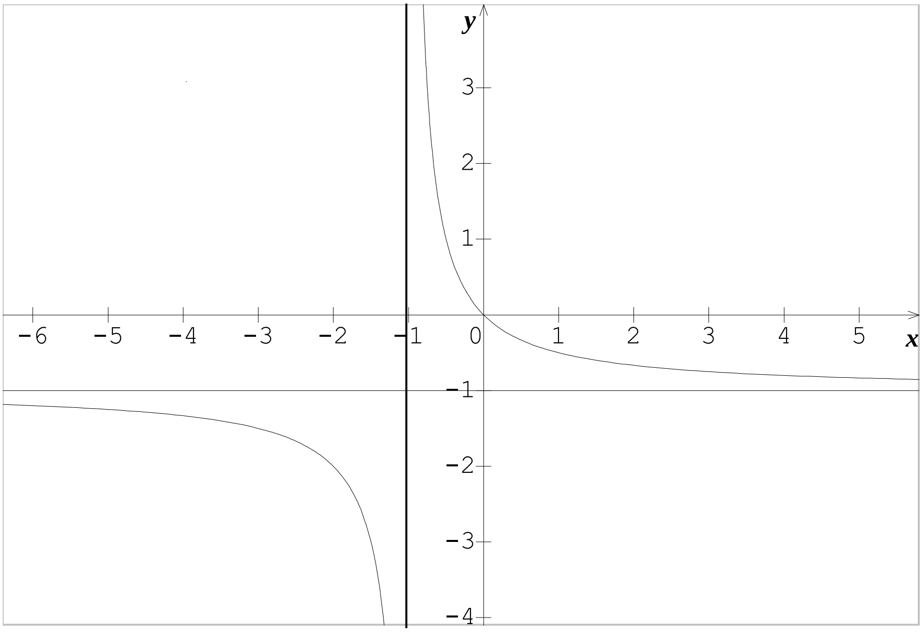
$Df=\mathbb{R}-\{-1\}=\left]-\infty\,;\,-1\right[\cup\left]-1\,;\,+\infty\right[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+} f(x)=-1$ ; $\lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$ *et* $\lim_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$

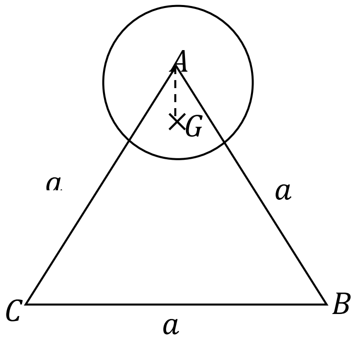
$$f(x) = -\frac{x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$$

D'où le tableau de variation de $f$ est le suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | \|\| | $-$ |
| $f(x)$ | $-1 \searrow -\infty$ | \|\| | $+\infty \searrow -1$ |




2) Soit C le point du plan P tel que $ABC$ soit un triangle équilatéral de côté $a$ ( $a \in \mathbb{R}^*$ )



a- Déterminons puis construisons le barycentre $G$ des points $A$ ; $B$ et $C$ affectés respectivement des coefficients 2 ; 1 et 1

$G = bary\{(A\,,2)\ ;\ (B\,,1)\ ;\ (C\,,1)\}$ Avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 + 1 + 1 = 4 \neq 0$

=> $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

=>$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2+1+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2+1+1}\overrightarrow{AC}$

=> $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

b- Déterminons l'ensemble ( δ ) des points $M$ du plan tel que :

$2\overrightarrow{MA^2} + \overrightarrow{MB^2} + \overrightarrow{MG^2} = ka^2$ avec $k \in \mathbb{R}$ (On discutera suivant les valeurs du paramètre $k$)

Posons $f(M) = 2\overrightarrow{MA^2} + \overrightarrow{MB^2} + \overrightarrow{MG^2}$

(Les points de pondérations sont égaux à celui du barycentre $G$).

Alors on a : $f(M) = \sum \alpha_i\, MG^2 + f(G)$

Or $\sum \alpha_i\, MG^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MG^2 = (2+1+1)MG^2 = 4MG^2$

Et $f(G) = \frac{(\alpha_1\,\alpha_2)AB^2 + (\alpha_1\,\alpha_3)AC^2 + (\alpha_2\,\alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{2AB^2 + 2AC^2 + BC^2}{4}$

Or $ABC$ est équilatérale de côté $a$ => $AB = AC = BC = a$

=> $f(G) = \frac{2a^2 + 2a^2 + a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

Alors $f(M) = ka^2 \Leftrightarrow 4MG^2 + f(G) = ka^2 \quad \Leftrightarrow 4MG^2 + \frac{5a^2}{4} = ka^2 \Leftrightarrow 4MG^2 = \frac{a^2(4k-5)}{4}$

$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{a^2(4k-5)}{16}$ => $MG = \sqrt{\frac{a^2(4k-5)}{16}} = \frac{a}{4}\sqrt{4k-5}$

- si $k < \frac{5}{4}$ ; alors l'ensemble (E) des points M cherchés est vide.

- si $k = \frac{5}{4}$ ; alors $MG = 0$. Ainsi l'ensemble (E) des points M cherchés est le point $G$.

- si $k > \frac{5}{4}$ ; alors l'ensemble (E) des points M cherchés est le cercle de centre $G$ et de rayon $r = \frac{a}{4}\sqrt{4k-5}$

c- Construisons cet ensemble si $k = 2$

Si $k = 2$; alors l'ensemble (E) des points M cherchés est le cercle de centre $G$ et de rayon $r = \frac{a}{4}\sqrt{3}$

## **Problème**..............................................................$(\mathbf{10\ points})$

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal$(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ (unité 5 cm).

**Partie A** :

On considère la fonction $f_1$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f_1(x) = xe^{-x^2}$et on appelle $C_1$ sa courbe représentative.

1) Montrons que pour tout réel positif $x$, $f'_1(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$

$f_1(x) = xe^{-x^2} \Rightarrow f'_1(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$

En déduis le sens de variation de $f_1$.

$f'_1(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} \Rightarrow f'_1(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ ; $e^{-x^2} > 0$ alors le signe de $f'_1(x)$ dépend du signe de $1 - 2x^2$.

Posons $1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'_1(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

D'après le tableau ci-dessus :

$\forall\, x \in \left[0\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ ; $f'_1(x) > 0$.Par conséquent $\forall\, x \in \left[0\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$; $f_1$ est strictement croissante.

$\forall\, x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ +\infty\right[$; $f_1(x) < 0$. Par conséquent $\forall\, x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ +\infty\right[$; $f_1$ est strictement décroissante.

2) Calculons la limite de $f_1$ en $+\infty$ (on pourra poser $u = x^2$).

$\lim f_1(x) = \lim xe^{-x^2}$ . Posons $u = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{u} \Leftrightarrow x = u^{\frac{1}{2}}$ .

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

Si $x \to +\infty$ alors $u \to +\infty$

Alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{u \to +\infty} f_1(u) = \lim\limits_{u \to +\infty} u^{\frac{1}{2}} e^{-u}$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ ; $\lim\limits_{u \to +\infty} u^n e^{-u} = 0$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$

Interprétons graphiquement ce résultat.

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$ . Alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la Courbe $C_1$ de $f_1$

2) Dressons le tableau de variation de $f_1$. D'où le tableau de signe de $f'_1(x)$ est le suivant :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'_1(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_1(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$ | $\searrow$ | $0$ |

4) On appelle $\Delta$ la droite d'équation $y = x$. Déterminons la position de $C_1$ par rapport à $\Delta$.

Pour Détermine la position de $C_1$ par rapport à $\Delta$, nous étudions le signe de $h(x)$ avec :

$h(x) = x - f_1(x)$.

$h(x) = x - f_1(x) = x - xe^{-x^2} = x\left(1 - e^{-x^2}\right)$.

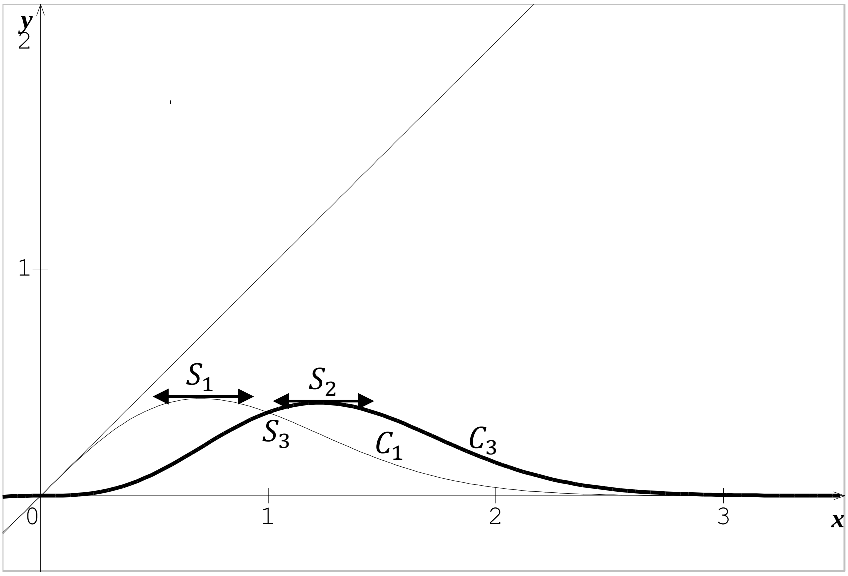
$x$ est positif ou nul sur $[0\ ;\ +\infty[$ ; $h(x)$ a donc le signe de $1 - e^{-x^2}$.

Posons $1 - e^{-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq \ln 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$. En posant $x^2 = 0$ ; on a : $x = 0$

Alors nous en déduisons que $h(x)$ est positif ou nul sur $[0\ ;\ +\infty[$.

D'où $\forall\, x \in [0\ ;\ +\infty[$ ; la courbe $C_1$ est au-dessus de la droite $\Delta$.

5) Traçons $C_1$ et $\Delta$.




**Partie B** :

On considère la fonction $f_3$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f_3(x) = x^3e^{-x^2}$ et on appelle $C_3$ sa courbe représentative.

1) Montrons que pour tout réel $x$ positif, $f'_3(x)$ a même signe que $3 - 2x^2$.

$f_3(x) = x^3e^{-x^2}$ => $f'_3(x) = 3x^2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \times x^3 = 3x^2e^{-x^2} - 2x^4e^{-x^2}$

$= (3 - 2x^2)x^2e^{-x^2}$.

$\forall\ x\ \in \mathbb{R}$ , $x^2e^{-x^2} > 0$ ; Alors le signe de $f'_3(x)$ dépend du signe de $3 - 2x^2$.

En déduisons le sens de variation de $f_3$.

Posons $3 - 2x^2 = 0$ => $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$. D'où le tableau de signe de $f'_3(x)$ est le suivant :

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{\frac{3}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'_3(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

D'après le tableau ci-dessus :

$\forall\ x \in \left[0\ ;\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right[$ ; $f'_3(x) > 0$.Par conséquent $\forall\ x \in \left[0\ ;\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right[$ ; $f_3$ est strictement croissante.

$\forall\, x \in \left]\sqrt{\frac{3}{2}}\ ;\ +\infty\right[\ ;\ f_3(x) < 0$. Par conséquent $\forall\, x \in \left]\sqrt{\frac{3}{2}}\ ;\ +\infty\right[\ ;\ f_3$ est strictement décroissante.

2) Déterminons les positions relatives de $C_1$ et $C_3$.

Pour Détermine la position de $C_1$ et $C_3$ par rapport à $\Delta$, nous étudions le signe de $h(x)$ avec :

$k(x) = f_1(x) - f_3(x) = xe^{-x^2} - x^3e^{-x^2} = (1 - x^2)xe^{-x^2}$.

$xe^{-x^2}$est positif ou nul sur $[0\ ;\ +\infty[$ . Donc le signe de $k(x)$dépend du signe de $1 - x^2$.

Posons $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 1$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $k(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

D'après le tableau ci-dessus :

$\forall\, x \in [0\ ;\ 1\ [\ ;\ k(x) > 0$.Par conséquent $\forall\, x \in [0\ ;\ 1\ [$ ; la courbe $C_1$ est au-dessus de la courbe $C_3$

$\forall\, x \in\ ]1\ ;\ +\infty[;\ k(x) < 0$.Par conséquent $\forall\, x \in\ ]1\ ;\ +\infty[$ ; la courbe $C_1$ est en dessous de la courbe $C_3$

3) Traçons $C_3$ dans le même repère que $C_1$ **(Voir figure dans la partie A)**

4) On appelle D la droite d'équation $x = 1$. Soit $A_1$ l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe $C_1$, les deux axes de coordonnées et la droite D et soit $A_3$ l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe $C_3$, les deux axes de coordonnées et la droite D.

a-Calculons $A_1$.

Sur $[0\ ;1\ ]$ ; $f_1(x) \geq 0$. Donc $A_1 = \int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 xe^{-x^2}dx = \int_0^1 \frac{-2}{-2} \times xe^{-x^2}dx$

$= -\frac{1}{2}\int_0^1 -2xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^1 = \left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^1 = \left(-\frac{e^{-1}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{e^{-1}}{2} + \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) u.a \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) u.a$

b-A l'aide d'une intégration par parties, montrons que $A_3 = -\frac{1}{2e} + A_1$

$A_3 = \int_0^1 f_3(x)dx = \int_0^1 x^3e^{-x^2}dx = \int_0^1 x^2 \times xe^{-x^2}dx$

Posons : $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$

$v'(x) = xe^{-x^2} \Rightarrow v(x) = -\frac{e^{-x^2}}{2}$

$\Rightarrow A_3 = \left[-\frac{x^2\, e^{-x^2}}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 xe^{-x^2}dx\ A_3 = -\frac{e^{-1}}{2} + A_1$ . Or $e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\Rightarrow A_3 = -\frac{1}{2e} + A_1$

**<u>Partie C</u>** :

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction $f_n$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$. On note $(C_n)$ la courbe représentative de $f_n$ dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

1) Montrons que pour tout entier $n \geq 1$, $f_n$ admet un maximum pour $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$ On note $\alpha_n$ ce maximum.

Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ ; $f_n$ est dérivable et sa dérivée est telle que :

Si $f_n(x) = x^n e^{-x^2} \Rightarrow f'_n(x) = nx^{n-1} \times e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \times x^n = x^{n-1}(n-2x^2)e^{-x^2}$

$\Rightarrow f'_n(x) = x^{n-1}(n-2x^2)e^{-x^2}$.

Pour tout $\in [0\,;+\infty[$ ; $x^{n-1}e^{-x^2} > 0$. Alors le signe de $f'_n(x)$ dépend du signe de

$n - 2x^2$. Posons $n - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{n}{2}}$

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{\frac{n}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'_n(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

D'après le tableau ci-dessus :

$\forall\, x \in \left]0\,;\sqrt{\frac{n}{2}}\right[$ ; $f'_n(x) > 0$ et $\forall\, x \in \left]\sqrt{\frac{n}{2}}\,;+\infty\right[$ ; $k(x) < 0$.

D'où $f_n$ admet un maximum pour $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$ et ce maximum est noté $\alpha_n$

2) On appelle $S_n$ le point de $(C_n)$ d'abscisse $\sqrt{\frac{n}{2}}$.

Montrons que, pour tout $n$, $(C_n)$ passe par $S_2$.

$S_2$ est le point d'abscisse $\sqrt{\frac{2}{2}} = 1$. Son ordonnée est $f_2(1) = \frac{1}{e}$.

Calculons $f_n(1)$

$f_n(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Donc $S_2$ appartient à toutes les courbes $(C_n)$

Plaçons $S_1$ , $S_2$ , $S_3$ ( Voir la figure ).

3) Soit la fonction $g$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = e^{\frac{x}{2}\left[-1+ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]}$

a-Etudions le sens de variation de $g$.

La fonction $g$ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables et sa dérivée est $g'(x) = \left[\frac{x}{2} \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\left(-1 + ln\frac{x}{2}\right)\right] \times g(x)$ => $g'(x) = \frac{1}{2} ln\frac{x}{2} \times g(x)$

$g(x) = e^{\frac{x}{2}\left(-1 + ln\frac{x}{2}\right)}$ est positif pour tout $x \in ]0\,;\,+\infty[$ ; donc $g'(x)$ a le signe de $ln\frac{x}{2}$.

Posons $ln\frac{x}{2} > 0$ => $\frac{x}{2} > e^0$ ⇔ $\frac{x}{2} > 1$ => $x > 2$.

Ainsi pour les $x > 2$ ; on a $g'(x) > 0$ et les $x < 2$ ; on a $g'(x) < 0$.

D'où le tableau de variation de $g$ est le suivant :

| $x$ | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | 0 | $+$ | |
| $g(x)$ | ‖ 1 | ↘ | $e^{-1}$ | ↗ | $+\infty$ |

- $\forall\, x \in\ ]0\,;2[$ ; $g$ est strictement décroissante.

- $\forall\, x \in\ ]2\,;+\infty[$ ; $g$ est strictement croissante.

b-Montrons que pour tout entier $n \geq 1$, $\alpha_n = g(n)$.

$\alpha_n = \left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)^n \times e^{-\frac{n}{2}} = e^{nln\sqrt{\frac{n}{2}}} \times \ e^{-\frac{n}{2}} = e^{\frac{n}{2}\left(ln\frac{n}{2} - 1\right)} = g(n)$ => $\alpha_n = g(n)$

En déduisons que tout point $S_n$ , on a une ordonnée supérieure à celle de $S_2$.

$S_n$ est le point de coordonnées $\left(\sqrt{\frac{n}{2}} \ \ ; \ g(n)\right)$; $S_2$ est le point de coordonnées $\left(1 \ ; \ g(2)\right)$.

Puisque $g$ est croissante sur $]2 \ ; \ +\infty[$ et décroissante sur $]0 \ ; \ 2[$ ; alors admet un minimum pour la valeur 2.

Pour tout $x$ de $]0 \ ; \ +\infty[$ ; $g(x) \geq g(2)$. Alors on en déduit que, pour tout $n \geq 1$ ; on a :

$g(n) \geq g(2)$.

D'où le point $S_n$ a une ordonnée supérieure à celle de $S_2$.

# Sujet Bac 2014. (TSE - STI)

## Exercice 1……………….………………………………………(5 *points*)

**1-/** Soit l'équation ($\boldsymbol{E}$) : $z^2 - 6z + 12 = 0$ où z est l'inconnue complexe.

**a-/** Montrez que ($\boldsymbol{E}$) admet deux solutions complexes conjuguées $u$ et $\bar{u}$, $u$ étant celle dont la partie imaginaire est positive.

**b-/** Calcule le module et un argument de $u$. En déduis le module et un argument de $\bar{u}$.

**c-/** Écris $u - 4$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

**d-/** Calcule le module et un argument de $\frac{u}{u-4}$. En déduis le module et un argument de $\frac{\bar{u}}{\bar{u}-4}$.

**2-/** Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O ; I, J). On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $Z_A = -3$ ; $Z_B = 2 + 2i$ et $Z_C = 7i$.

**a-/** Construis le triangle ABC.

**b-/** Calcule les distances AB et BC.

**c-/** Écris le nombre complexe $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$ sous forme trigonométrique.

**d-/** Déduis des questions **a-/** et **b-/** la nature du triangle ABC.

## Exercice 2……………….………………………………………(5 *points*)

**I./** Dans une classe de terminale, la taille moyenne des élèves est de 167 cm. La taille moyenne des filles est de 160 cm et la taille moyenne des garçons est de 173,5 cm.

Quelle est l'effectif de la classe sachant qu'il est compris entre 50 et 60.

**II./** Le vieux Yara a laissé son héritage dans un coffre dont la combinaison comporte les cinq chiffres $x$, $y$, $z$, $t$ et $h$ dans cet ordre, du système décimal. Il a mentionné sur son testament que sa fortune reviendrait à celui de ses héritiers qui trouverait la combinaison à partir des données suivantes :

- Le 1er chiffre est pair ;
- La somme des deux premiers chiffres est 15 ;
- Le troisième est la différence des deux premiers (le 1er moins le 2ème) ;
- Le 1er chiffre est le produit du troisième par le quatrième ;
- Le nombre est divisible par 9.

Quelle est la combinaison cherchée ? **(*2pts*)**

***NB : Les parties I./ et II./ sont indépendantes***

## Problème………………………………………………………(10 *points*)

**A**// Soit $\varphi$ la fonction *définie* sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$

**1-/ a-/** Détermine les limites de $\varphi$ en $-\infty$ puis en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat de

$\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$

**b-/** Calcule $\varphi'(x)$ et Étudie son signe. Dressez le tableau de variation de $\varphi$.
**2-/** Démontre que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans IR, dont l'une notée α est dans $[1 ; +\infty[$. Vérifie que $1{,}79 < \alpha < 1{,}80$.

**3-/** En déduis le signe de φ sur ℝ.

**B-//** On donne les fonctions $f$ et $g$ définies par $f(x) = (2x + 1)\, e^{-x}$ et $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ Leurs courbes sont respectivement notées $(C_f)$ et $(C_g)$

**1-/** Détermine les domaines de définition de $f$ et de $g$ puis Calcule leurs limites aux bornes de ces domaines de définition.

**2-/** Montrez que $(C_f)$ et $(C_g)$ admettent au point A(0 ; 1) une tangente commune (**T**). Donne une équation cartésienne de (**T**).

**3-/ a-/** Vérifie que pour tout $x \in$ IR, $f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où $\varphi$ est la fonction définie dans la partie A **.**

**b-/** Étudie le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

**c-/** En déduis la position relative des courbes $(C_f)$ et $(C_g)$**.**

**4-/ a-/** Détermine une primitive G de la fonction $g$ sur ℝ.

**b-/** Détermine les réels $a$ et $b$ tels que la fonction F définie par $F(x) = (ax + b)\, e^{-x}$ soit une primitive de $f$ sur ℝ.

**c-/** Déduis une primitive H de $f - g$ sur ℝ.

**d-/** Calcule l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par les courbes $(C_f)$ et $(C_g)$ et les droites d'équations : $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 0$
**NB** : **Les tracés de $(C_f)$ et $(C_g)$ ne sont pas demandés**

# Correction Bac 2014. (TSE - STI)

**Exercice 1**……………….……………………………………………$(5\ points)$

**1°**/ (E) : $z^2 - 6z + 12 = 0$

a) (E) est une équation complexe à coefficients réels et dont le discriminant
$\Delta = 9 - 12 = -3$ est négatif d'où elle admet deux solutions complexes conjuguées. Notons u celle dont la partie imaginaire est positive.

b) Nous avons $u = 3 + i\sqrt{3}$ et $\bar{u} = 3 - i\sqrt{3}$. Alors $|u| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$et un argument de $u$ est $\theta = \frac{\pi}{6}$ ; On en déduit $|\bar{u}| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$ et un argument de $\bar{u}$ est $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

c) $u - 4 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right)$

d) Calcul du module et d'un argument de

Donc $h_n(z) = h_0(z) \Leftrightarrow z^n(1-z) = 1 - z \Leftrightarrow (z^n - 1)(1-z) = 0$
$\Leftrightarrow z^n = 1\ ou\ 1 - z = 0$, alors on a :
$z = 1\ ou\ z^n = 1$, ce qui revient à chercher les racines n$^{-ieme}$ de l'unité.
Ainsi les solutions sont : $z_k = \left[1; \frac{2k\pi}{n}\right]\ avec\ k \in \{0,1,2,3,\dots,n-1\}$, on pourra ecrire aussi $z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ . L'ensemble solution est :

$$S = \left\{\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\ , aveck \in \{0,1,2,3,\dots,n-1\}\right\}$$

**2-**/ a) Montrons que l'équation $|z| = |1 - z|$ a une infinité de solutions :
Soit $z = x + iy$, $|z| = |1 - z| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (1-x)^2 + y^2$
$\Leftrightarrow x^2 = (1-x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ et\ y \in \mathbb{R}$
$z = \frac{1}{2} + iy\ avec\ y\ \in \mathbb{R}$ L'équation admet donc une infinité de solutions.

**<u>AUTRE METHODE</u>** :
Soient les points $M(z) et\ A(1), on\ a$:
$|z| = |1 - z| \Leftrightarrow OM = AM$ , les solutions sont les points appartenant à la médiatrice du segment $[OA]$ d'où l'equation admet une infinite de solutions.

b) soit $z_0$ l'une des solutions telle que $z_0 = [\rho, \theta]$
$|z_0| = |1 - z_0| \Longrightarrow |1 - z_0| = \rho$
$z_0 = \frac{1}{2} + iy_0 \Longrightarrow 1 - z_0 = \frac{1}{2} - iy_0\ donc\ 1 - z_0 = \overline{z_0}$ , par conséquent $\arg(1 - z_0) = -\theta$
$|{z_0}^n(1 - z_0)| = \rho^{n+1}$ et $\arg\left({z_0}^n(1 - z_0)\right) = n\theta - \theta = (n-1)\theta$

c) En déduisons que le système (1) n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$

(1) $\begin{cases} h_n(z) = 1 \\ |z| = |1 - z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^n(1-z) = 1 \\ |z| = |1 - z| \end{cases}$

Comme $z_0$ est solution alors, on a : ${z_0}^n(1 - z_0) = 1$ donc $\begin{cases} \rho^{n+1} = 1 \\ (n-1)\theta = 2k\pi \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$

$z_0 = \frac{1}{2} + iy_0\ alors\ |z_0| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + {y_0}^2 = 1\ donc\ y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ou\ y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Pour $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on a $z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{3}$ ; $(n-1)\theta = 2k\pi \Longrightarrow (n-1)\frac{\pi}{3} = 2k\pi$
c'est-à-dire $n - 1 = 6k\ ou\ encore\ n \equiv 1[6]$

De même si $y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $z_0 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $et\ \theta = -\frac{\pi}{3}$ ; on demontre alors que $n - 1 = 6k'$ c'est-à-dire $n \equiv 1[6]$.
En conclusion le système n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$
L'ensemble solution est $\left\{\boldsymbol{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right\}$

**II-/**

1) $(E): 11x + 8y = 79$

   a) Montrons que si $(x; y)$ $est\ solution\ de (E)\ alors\ y \equiv 3[11]$
   $11x + 8y = 79 \Leftrightarrow 8y \equiv 79[11] \Leftrightarrow 56y \equiv 14[11]$, alors $y \equiv 3[11]$

   b) Résolvons $(E)$:
   $\begin{cases} 11x + 8y = 79 \\ y \equiv 3[11] \end{cases}$,
   On a : $y = 11k + 3\ avec\ k \in \mathbb{Z}$, donc
   $11x + 8y = 79 \Leftrightarrow 11x + 8(11k + 3) = 79$
   $\Leftrightarrow 11x = -88k + 55 \Leftrightarrow x = -8k + 5, k \in \mathbb{Z}$

   $S = \{(\boldsymbol{-8k + 5; 11k + 3}), \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\}$ .

2) Soient $x, y, z$ respectivement le nombre de pièce du $1^{er}, 2^e\ et\ du\ 3^e$ lot

Le problème peut être traduit par le système suivant : $\begin{cases} x + y + z = 41 \\ 4800x + 3600y + 400z = 48000 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x + y + z = 41 & (1) \\ 12x + 9y + z = 120 & (2) \end{cases}$
En effectuant l'opération $(2) - (1)$, on obtient $11x + 8y = 79$, donc $x = -8k + 5$ et $y = 11k + 3$ or $z = 41 - x - y\ donc\ z = -3k + 33$
$(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$, ona $k = 0\ ce\ qui\ implique\ que$ $\boldsymbol{x = 5}$ ; $\boldsymbol{y = 3}$ ; $\boldsymbol{z = 33}$
Le $1^{er}$ lot comprend 5 pièces
Le $2^e$ lot comprend 3 pièces
Le $3^e$ lot comprend 33 pieces.

## <u>Exercice 2</u>……………….……………………………………….$(\boldsymbol{5\ points})$

**I-** Soit $x$ le nombre de filles et soit $y$ le nombre de garçons
Soit $(x_i)$ $les\ tailles\ des\ filles\ et\ (y_i)\ celles\ des\ garçons$ on a :
$\frac{\sum x_i}{x} = 160\ et\ \frac{\sum y_i}{y} = 173{,}5$ Alors $\sum x_i = 160x\ et\ \sum y_i = 173{,}5y\ donc\ \frac{\sum x_i + \sum y_i}{x+y} = 167$
$il\ s'ensuit\ que\ 7x - 6{,}5y = 0\ ou\ 14x - 13y = 0$
Donc $\begin{cases} x = 13k \\ y = 14k \end{cases}, k \in \mathbb{N}^*$
$50 < x + y < 60 alors\ 50 < 27k < 60\ donc\ 1{,}85 < k < 2{,}22\ d'ou`k = 2$
Par conséquent $\boldsymbol{x = 26\ et\ y = 28}$

**L'effectif de la classe est donc 54**

**II-** $x \in \{2,4,6,8\}$ $et$ $x + y = 15$ $et$ $z = x - y$ $et$ $x = zt$
$x + y + z + t + h \equiv 0[9] \Longrightarrow 6 + z + t + h \equiv 0[9]$
Les valeurs 2 et 4 pour $x$ sont écartées car $x + y = 15$ $et$ $0 \leq y \leq 9$
Pour $x = 6$ , $on\ a$: $x + y = 15 \Leftrightarrow y = 9$ $or$ $x - y = z$
$donc$ $6 - 9 = z$ $(absurde)$
On montre que $\boldsymbol{x = 8}$ ; $\boldsymbol{y = 7}$; $\boldsymbol{z = 1}$ ; $\boldsymbol{t = 8}$ ; $\boldsymbol{h = 3}$.
La combinaison cherchée est $\mathbf{87183}$

## <u>Problème</u>……………………………………………………………$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

**A//** $\boldsymbol{\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1}$

**1-/ a)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty$ $et$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -1$ ; $y = -1$ est asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$

**b) Calcul de $\boldsymbol{\varphi'(x)}$**

$\varphi'(x) = (2x + 1)e^{-x} - e^{-x}(x^2 + x + 1)$

$\boldsymbol{\varphi'(x) = e^{-x}(-x^2 + x)}$

**Signe de $\boldsymbol{\varphi'(x)}$**
$\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} > 0$, $le\ signe\ de\ \varphi'(x) est\ celui\ de$ $(-x^2 + x)$
**Le tableau de signe**

| $\boldsymbol{x}$ | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | |

$\boldsymbol{si\ x} \in ]-\infty; \mathbf{0}[ \cup ]\mathbf{1}; +\infty[$, $\boldsymbol{\varphi'(x)} < 0$
$\boldsymbol{si\ x} \in [\mathbf{0}; \mathbf{1}]$, $\boldsymbol{\varphi'(x) \geq 0}$
**Le tableau de variation**

| $\boldsymbol{x}$ | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | |
| $\boldsymbol{\varphi(x)}$ | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | $\frac{3}{e} - 1$ | ↘ | -1 |

**2 -/** $\varphi(0) = 0$ $d'ou$` 0 est solution

$\varphi$ est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ d'où $\varphi$ est bijective de $[1; +\infty[$ vers

$\left]-1; -1 + \frac{3}{e}\right]$ d'où il existe $\alpha \in [1; +\infty[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$

$\varphi(1{,}79) = 9{,}610^{-4} > 0$ $et$ $\varphi(1{,}80) = -0{,}001 < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires $1,79 < \alpha < 1,80$

**3/ le signe de $\varphi$ sur $\mathbb{R}$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi(x)$ | | + | 0 | + | 0 | - | |

**B-//** $f(x) = (2x+1)e^{-x}$ ; $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$
**1-/** $Df = \mathbb{R}$ $et\ Dg = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ; $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

**2-/** Montrons que $C_f\ et\ C_g$ admettent au point $A(0;1)$ une tangente commune $(T)$
$f(0) = 1\ et\ g(0) = 1; A \in C_f \cap C_g$

$f'(x) = 2e^{-x} - e^{-x}(2x+1)$

$f'(x) = e^{-x}(-2x+1)$

$g'(x) = \frac{2(x^2+x+1)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$f'(0) = 1\ et\ g'(0) = 1$ Soit $\begin{cases} f(0) = g(0) = 1 \\ f'(0) = g'(0) = 1 \end{cases}$ donc $C_f$ $et\ C_g$ admettent une tangente commune en $A\ et$ $(T): y = x+1$ $est$ l'equation de cette tangente.

**3/ a)** $f(x) - g(x) = (2x+1)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

$$= \frac{(2x+1)\left[e^{-x}(x^2+x+1)-1\right]}{x^2+x+1} = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$$

b) le signe de $f(x) - g(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-1}{2}$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+1$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\varphi(x)$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x) - g(x)$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ | | $-$ | |

$\forall\ x \in \left]-\infty; \frac{-1}{2}\right[ \cup \left]\alpha; +\infty\right[$, $f(x) - g(x) < 0$

$\forall\ x \in \left[\frac{-1}{2}; \alpha\right]$, $f(x) - g(x) \geq 0$

C) **Position relative des courbes $\boldsymbol{C_f}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{C_g}$**

Pour tout $x \in \left]-\infty; \frac{-1}{2}\right[ \cup \left]\alpha; +\infty\right[$, $, (\boldsymbol{C_f})$ $est\ en\ dessous\ de$ $(\boldsymbol{C_g})$

Pour tout $x \in \left]\frac{-1}{2}; 0\right[ \cup \left]0; \alpha\right[, (\boldsymbol{C_f})$ $est\ au\ dessus\ de$ $(\boldsymbol{C_g})$

$(\boldsymbol{C_f})$ $\boldsymbol{et}$ $(\boldsymbol{C_g})$ $\boldsymbol{se\ coupent\ en} \left\{\left(\frac{-1}{2}; \boldsymbol{0}\right), (\boldsymbol{0}; \boldsymbol{1}), \left(\boldsymbol{\alpha}; \frac{\boldsymbol{2\alpha+1}}{\boldsymbol{\alpha^2+\alpha+1}}\right)\right\}$

4-/ **a)** $\boldsymbol{G(x) = ln(x^2 + x + 1)}$

**b)** $F'(x) = ae^{-x} - e^{-x}(ax + b) = e^{-x}(-ax + a + b)$

$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 2 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$ => $\boldsymbol{F(x) = (-2x - 3)e^{-x}}$

**C)** Une primitive $H\ de\ f - g\ \ sur\ \mathbb{R}\ \ est\ \ H(x) = F(x) - G(x)$

$\boldsymbol{H(x) = (-2x - 3)e^{-x} - ln(x^2 + x + 1)}$

**d)** $\int_{\frac{-1}{2}}^{0} [f(x) - g(x)]\, d = [H(x)]_{\frac{-1}{2}}^{0}$

$$= H(0) - H\left(\frac{-1}{2}\right) = -3 - ln1 — (-2e^{\frac{1}{2}} - ln\frac{3}{4}) = 0{,}0096$$

L'aire est $\boldsymbol{0,0096\ Ua}$

# Sujet Bac 2015

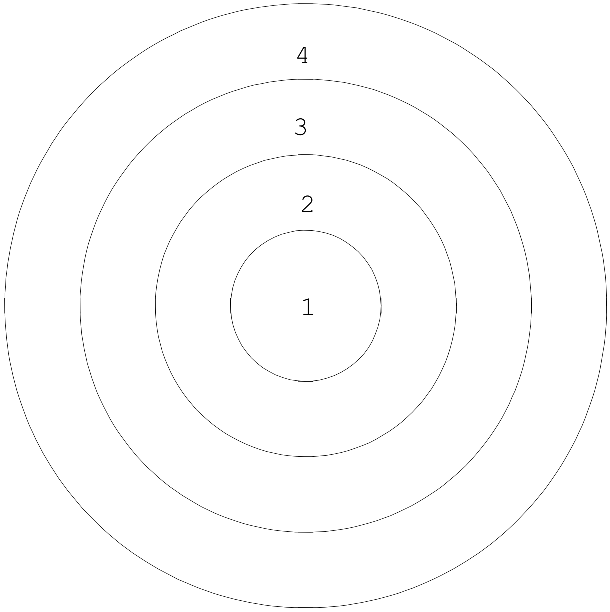
**Exercice 1**...........................................................($\mathbf{5}$ $\boldsymbol{points}$)

**I//** Une cible est constituée de cercles concentriques de rayon respectifs $1$ ; $2$ ; $3$ ; $4$ déterminant quatre (04) zones numérotées $(1)$ ; $(2)$ ; $(3)$ ; $(4)$ (chaque zone est une couronne), on considère l'extérieur de la cible comme 5$^{\text{ième}}$ zone.

1) Un joueur lance une flèche. La probabilité d'atteindre l'une des zones $1$ ; $2$ ; $3$ ; $4$ est proportionnelle à l'aire de cette zone. (**Rappel :** l'aire du disque de rayon $\boldsymbol{r}$ est **A=** $\boldsymbol{\pi r^2}$)

Montrer que les probabilités $P_1$ ; $P_2$ ; $P_3$ ; $P_4$ d'atteindre respectivement les zones $(1)$ ; $(2)$ ; $(3)$ ; $(4)$ sont égales à $K$ ; $3K$ ; $5K$ ; $7K$ où $K$ est un nombre que l'on ne demande pas de Calcule dans cette question.

2) – Si la flèche touche la zone $(1)$, le joueur gagne 4000 F.
- Si la flèche touche la zone $(2)$, le joueur gagne 3000 F.
- Si la flèche touche la zone $(3)$, le joueur gagne 2000 F.
- Si la flèche touche la zone $(4)$, le joueur gagne 1000 F.
- Si la flèche touche la zone $(5)$, le joueur perd 30000 F.




On suppose que l'espérance mathématique de X est nulle.
On rappelle que X est le gain obtenu à l'issue d'une partie (lancée d'une flèche).

a- Détermine les probabilités $P_1$ ; $P_2$ ; $P_3$ ; $P_4$ et $P_5$ de manquer la cible.

b- Donner sous forme de tableau la loi de probabilité de X.

**II**// Trois villages désignés par les lettres $A$ ; $B$ ; $C$ sont disposés en triangle comme suit :
Le village $A$ est à 4 $km$ de $B$ ; à 3 $Km$ de $C$ et le village $B$ est à 5 $Km$ de $C$.
Ces trois villages décident de creuser un forage situé à égale distance des villages, Détermine son emplacement en précisant la distance qui le sépare de chacun des villages.

**<u>Exercice 2</u>………………..…………………………………………(5 *points*)**

**I**// α et β sont deux entiers naturels et $N = 2^{\alpha} \times 3^{\beta}$ tels que le nombre de diviseurs de $N^2$ est le triple du nombre de diviseurs de $N$.

1) Prouver que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.
2) Déduisez-en les valeurs de $N$.

**II**// Le plan affine est muni d'un repère orthonormé $(o\,;\vec{u}\,;\ \vec{v})$ et $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Soient $A$ ; $B$ *et* $C$ trois points d'affixes respectives : $a = -1 + 3i$ ; $b = -4 + 2i$ et $c = 1 + 4i$.
Soit $f$ la transformation du plan dans lui-même qui à tout point $M$ d'affixe $Z$ associe le point $M'$ d'affixe $Z'$ définie par : $Z' = (2 - 2i)Z + 1$.

1) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de $f$.
2) Détermine l'affixe du point $B'$ image du point $B$ par la transformation $f$. Vérifié que les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux.
3) Soit $M\binom{x}{y}$ où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs et $M'\binom{x'}{y'}$ son image par $f$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.
4) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $x + 3y = 2$ puis en déduis l'ensemble des points $M$ dont les coordonnées sont des entiers appartenant à $[-5\,;5]$.

**<u>Problème</u>……………………………………………………………(10 *points*)**

**A**// Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.
1) On désigne par $M\binom{x}{y}$ un point du plan, $M_1\binom{x_1}{y_1}$ son image par la symétrie orthogonale d'axe la droite $y = x$ et $M'\binom{x'}{y'}$ l'image de $M_1$ par la symétrie d'axe $(o\ ;\ \vec{\imath})$.
a- Exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.
b- Caractériser l'application qui transforme $M$ en $M'$.
c- On désigne par $\boldsymbol{r}$ l'application qui au point $M\binom{x}{y}$ associe le point $M''\binom{x''}{y''}$ définie par :
$\begin{cases} x'' = 1 + y \\ y'' = 1 - x \end{cases}$. Montrer que $\boldsymbol{r}$ est une rotation dont précisera le centre Ω et l'angle θ.
2) Lorsque le point $M$ décrit la droite d'équation $y = x$, Détermine l'ensemble décrit par le point $M''$ ainsi que l'ensemble décrit par le milieu du segment $[MM'']$.
3) Au point $M\binom{x}{y}$, on associe le point $M_2\binom{x_2}{y_2}$ définie par : $\begin{cases} x_2 = 1 + 3y \\ y_2 = 1 - 2x \end{cases}$
a- Quelle est la nature de l'ensemble $(E)$ des points $M_2$ lorsque $M$ décrit le cercle unité de centre O ?
b- Caractériser l'image de $(E)$ par la rotation $\boldsymbol{r}$ définie en 1) –c.

**B**// Soit la fonction numérique $f$ à variable réelle $x$ définie par $f(x) = (2x-1)\sqrt{\frac{x+1}{2}}$.

1) Etudier les variations de $f$ et tracer sa courbe C$f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$. Préciser les tangentes à C$f$ aux points d'abscisses $-1$ et $-\frac{1}{2}$

2) Soit C$'f$ l'image de la courbe C$f$ par la symétrie orthogonale par rapport à $(o\ ;\ \vec{\imath}\ )$.
On pose $\Gamma$= C$f$ ∪ C$'f$. Tracer $\Gamma$ dans le même repère que C$f$.

3) On considère le point $A\binom{-1}{0}$ et la droite Δ d'équation $x = -2$. Soit $m$ un paramètre non nul, D la droite d'équation $y = mx$ et $D'$ la droite orthogonale à D en $O\binom{0}{0}$. Les droites D et $D'$coupent Δ en P et P' respectivement.
Soit K le milieu du segment $[PP']$, la droite (AK) coupe D et $D'$ en Met M' respectivement.
a- Détermine les coordonnées de M et M' en fonction de $m$.
b- On appelle $\Gamma_1$ , l'ensemble des points M lorsque $m \in \mathbb{R}^*$ et $\Gamma_1{}'$ celui des points M' lorsque $m \in \mathbb{R}^*$ . Trouver une relation entre $\Gamma_1$ et $\Gamma_1'$.

# Correction Bac 2015. (TSE)

## Exercice 1…………………..………………………………………($5\ points$)

**I**// 1) Montrer que les probabilités $P_1$ ; $P_2$ ; $P_3$ ; $P_4$ d'atteindre respectivement les zones $(1)$ ; $(2)$ ; $(3)$ ; $(4)$ sont égales à $K$ ; $3K$ ; $5K$ ; $7K$ .
On donne l'aire du disque **A=** $\boldsymbol{\pi r^2}$

- L'aire de la zone $(1)$ est $A_1 = \pi(1)^2 = \pi$
- L'aire de la zone $(2)$ est $A_2 = \pi(2)^2 - \pi = 3\pi$
- L'aire de la zone $(3)$ est $A_3 = \pi(3)^2 - \pi(2)^2 = 5\pi$
- L'aire de la zone $(4)$ est $A_4 = \pi(4)^2 - \pi(3)^2 = 7\pi$

Ainsi la probabilité d'atteindre l'une des zones $(1)$ ; $(2)$ ; $(3)$ ; $(4)$ est proportionnelle à l'aire de cette zone donc on a : $\frac{P_1}{\pi} = \frac{P_2}{3\pi} = \frac{P_3}{5\pi} = \frac{P_4}{7\pi}$.

En posant $P_1 = K$ avec $K \in ]0; 1[$, on a : $\frac{P_1}{\pi} = \frac{P_2}{3\pi}$ => $P_2 = 3P_1 = 3K$ $\frac{P_1}{\pi} = \frac{P_3}{5\pi}$
=> $P_3 = 5K$ $\frac{P_1}{\pi} = \frac{P_4}{7\pi}$ => $P_4 = 7K$

**Autre méthode** :

$\frac{P_1}{\pi} = \frac{P_2}{3\pi} = \frac{P_3}{5\pi} = \frac{P_4}{7\pi} = C \Leftrightarrow P_1 = \frac{P_2}{3} = \frac{P_3}{5} = \frac{P_4}{7} = C\pi = K$ => $P_1 = K$ ; $P_2 = 3K$ ;

$P_3 = 5K$ ; et $P_4 = 7K$

D'où les probabilités $P_1$ ; $P_2$ ; $P_3$ ; $P_4$ d'atteindre respectivement les zones $(1)$ ; $(2)$ ; $(3)$ ; $(4)$ sont égales à $K$ ; $3K$ ; $5K$ ; $7K$ .

2) a- Déterminons les probabilités $P_1$ ; $P_2$ ; $P_3$ ; $P_4$ et $P_5$ de manquer la cible.

Soit X la variable aléatoire telle que X= $\{4000 ; 3000 ; 2000 ; 1000 ; -30\,000\}$

On a : $P(\mathrm{X} = 4000) = P_1$ $P(\mathrm{X} = 3000) = P_2$ $P(\mathrm{X} = 2000) = P_3$ $P(\mathrm{X} = 1000)$
$= P_4$ $P(\mathrm{X} = -30\,000) = P_5$

$P_1 = K$ ; $P_2 = 3K$ ; $P_3 = 5K$ ; $P_4 = 7K$ .

$P_5 = 1 - (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) = 1 - 16K$

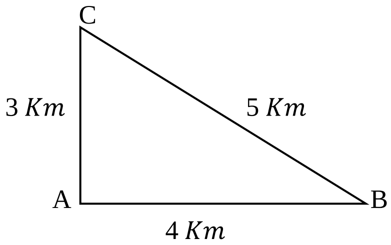
$E(\mathrm{X}) = 0 \Leftrightarrow 4000P_1 + 3000P_2 + 2000P_3 + 1000P_4 - 30\,000P_5 = 0 \Leftrightarrow$

$4K + 9K + 10K + 7K - 30(1 - 16K) = 0$ => $K = \frac{1}{17}$
D'où $P_1 = \frac{1}{17}$ ; $P_2 = \frac{3}{17}$ ; $P_3 = \frac{5}{17}$ ; $P_4 = \frac{7}{17}$ ; $P_5 = \frac{1}{17}$

b- Donnons sous forme de tableau la loi de probabilité de X.

| $x_i$ | $-30\,000$ | $1000$ | $2000$ | $3000$ | $4000$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(\mathrm{X} = x_i)$ | $\frac{1}{17}$ | $\frac{3}{17}$ | $\frac{5}{17}$ | $\frac{7}{17}$ | $\frac{1}{17}$ |

**II**// Trois villages désignés par les lettres $A$ ; $B$ ; $C$ sont disposés en triangle comme suit :
Le village $A$ est à 4 $km$ de $B$ ; à 3 $Km$ de $C$ et le village $B$ est à 5 $Km$ de $C$.
Ces trois villages décident de creuser un forage situé à égale distance des villages.
Déterminons son emplacement en précisant la distance qui le sépare de chacun des villages.




Soit G le point représentant l'emplacement du forage. G est le centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$.
$ABC$ étant un triangle rectangle en $A$ alors on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
Donc le segment $[BC]$ est le diamètre du cercle et G est le milieu de $[BC]$.
Par suite le forage est situé à égale distance des villages $B$ et $C$, c'est-à-dire le milieu de $[BC]$ et la distance qui le sépare de chacun des villages est $2{,}5\ Km$, c'est-à-dire $\frac{BC}{2}$

## <u>Exercice 2</u>………………..…………………………………………$(\mathbf{5}\ \boldsymbol{points})$

**I**// α et β sont deux entiers naturels et $N = 2^\alpha \times 3^\beta$ tels que le nombre de diviseurs de $N^2$ est le triple du nombre de diviseurs de $N$.

1) Prouvons que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.

Le nombre de diviseurs de $N^2$ est le triple du nombre de diviseurs de $N$ ⇔

$(2\alpha + 1)(2\beta + 1) = 3(\alpha + 1)(\beta + 1) \Leftrightarrow \alpha\beta - \beta - \alpha + 1 = 3 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$

2) Déduisons-en les valeurs de $N$.

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3 \times 1 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha - 1 = 3\\ \beta - 1 = 1\end{cases}$ ou $\begin{cases}\alpha - 1 = 1\\ \beta - 1 = 3\end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases}\alpha = 2\\ \beta = 4\end{cases}$ ou $\begin{cases}\alpha = 4\\ \beta = 2\end{cases}$

Donc $N = 2^2 \times 3^2 = 324$ ou $N = 2^4 \times 3^2 = 144$

**II**// Le plan affine est muni d'un repère orthonormé $(o\,;\vec{u}\,;\ \vec{v})$ et $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Soient $A$ ; $B$ $\ et\ $ $C$ trois points d'affixes respectives : $a = -1 + 3i$ ; $b = -4 + 2i$ et $c = 1 + 4i$.

Soit $f$ la transformation du plan dans lui-même qui à tout point $M$ d'affixe $Z$ associe le point $M'$ d'affixe $Z'$ définie par : $Z' = (2 - 2i)Z + 1$.

1) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de $f$.

Puisque la transformation $f$ est de la forme $Z' = aZ + b$ avec $a = 2 - 2i$ et $b = 1$, alors $f$ est une similitude directe dont les éléments caractéristiques sont :

- Son rapport : $k = |a| = |2 - 2i\,| = 2\sqrt{2}$.
- Son angle θ : $\theta = arg(a) = -\frac{\pi}{4}$.
- Son centre Ω d'affixe $Z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1}{1-(2-2i)} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ => $\Omega\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\-\frac{2}{5}\end{pmatrix}$

2) Déterminons l'affixe du point $B'$ image du point $B$ par la transformation $f$.

$Z_{B'} = (2 - 2i)Z_B + 1$

$= (2 - 2i)(-4 + 2i) + 1 = -3 + 12i$ => $Z_{B'} = -3 + 12i$

Vérifions que les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux.
Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{CA}\binom{-2}{-1}\bullet\overrightarrow{CB'}\binom{-4}{8} = 0$

On a : $\overrightarrow{CA}\binom{-2}{-1}$ et $\overrightarrow{CB'}\binom{-4}{8}$ . Donc $\overrightarrow{CA}\binom{-2}{-1}\bullet\overrightarrow{CB'}\binom{-4}{8} = 8 - 8 = 0$

**Autre méthode :**

Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{Z_{\overrightarrow{CA}}}{Z_{\overrightarrow{CB'}}} = ib$ avec $b \in \mathbb{R}^*$

3) Soit $M$où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs et $M'\binom{x'}{y'}$ son image par $f$.

Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.

$Z_{M'} = (2 - 2i)Z_M + 1$

$= (2 - 2i)(x + iy) + 1$

$= (2x + 2y + 1\ ) + i(2y - 2x)$

=> $M'\binom{2x+2y+1}{2y-2x}$

Donc $\overrightarrow{CM'}\binom{2x+2y}{2y-2x-4}$ et $\overrightarrow{CA}\binom{-2}{-1}$

$\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{CM'}\bullet\overrightarrow{CA} = 0 \Leftrightarrow 4x - 4y - 2y + 2x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x + 3y = 0$. D'où $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si $x + 3y = 2$.

4) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $x + 3y = 2$

$x + 3y = 2 \Leftrightarrow x = 2 - 3y \Leftrightarrow x \equiv 2[3] \Leftrightarrow x = 3k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$

En remplaçant $x = 3k + 2$ par sa valeur dans $x + 3y = 2$, on a : $y = -k$

D'où $S = \{3k + 2 ; -k \}$

En déduisons l'ensemble des points $M$ dont les coordonnées sont des entiers appartenant à $[-5 ; 5]$.

$-5 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 3k + 2 \leq 5 \Leftrightarrow -\frac{7}{3} \leq k \leq 1 \Rightarrow k \in \{-2 ; -1 ; 0 ; 1\}$

- Si $k = -2$ alors $x = -4$ et $y = 2 M_1\binom{-4}{2}$.
- Si $k = -1$ alors $x = -1$ et $y = - M_2\binom{-1}{1}$.
- Si $k = 0$ alors $x = 2$ et $y = 0 M_3\binom{-4}{2}$.
- Si $k = 1$ alors $x = 5$ et $y = - M_4\binom{5}{-1}$.

**<u>Problème</u>..............................................................($\mathbf{10}\ \boldsymbol{points}$)**

**A**// Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.

1) On désigne par $M\binom{x}{y}$ un point du plan, $M_1\binom{x_1}{y_1}$ son image par la symétrie orthogonale d'axe la droite $y = x$ et $M'\binom{x\prime}{y\prime}$ l'image de $M_1$ par la symétrie d'axe $(o ; \vec{\imath})$.

a- Exprimons $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.

$M_1\binom{x_1}{y_1}$ image de $M\binom{x}{y}$ par la symétrie orthogonale d'axe la droite $y = x \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = x \end{cases}$

$M'\binom{x\prime}{y\prime}$ image de $M_1\binom{x_1}{y_1}$ par la symétrie orthogonale d'axe la droite $y = x \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x_1 \\ y' = -y_1 \end{cases}$

D'où $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

b- Caractérisons l'application qui transforme $M$ en $M'$.

Soit $f$: $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

$f$ transforme $M$ en $M' \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$ et $y = 0$

L'ensemble des points invariants par $f$ est donc $O\binom{0}{0}$

La matrice de l'application linéaire φ associée à $f$ est $M_\varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

D'où $f$ est une rotation de centre $O\binom{0}{0}$ et d'angle θ tel que $\begin{cases} cos\theta &= 0 \\ sin\theta &= -1 \end{cases}$ => θ= $-\frac{\pi}{2}$

c- On désigne par $\boldsymbol{r}$ l'application qui au point $M\binom{x}{y}$ associe le point $M''\binom{x''}{y''}$ définie par : $\begin{cases} x'' = 1 + y \\ y'' = 1 - x \end{cases}$.

Montrons que $\boldsymbol{r}$ est une rotation dont précisera le centre Ω et l'angle θ.
$Z'' = x'' + iy'' = 1 + y + i(1 - x) = -i(x + iy) + 1 + i$

$Z'' - 1 = -iZ + i = -i(Z - 1) = e^{-i\frac{\pi}{2}}(Z - 1)$ => $Z'' - Z_\Omega = e^{-i\frac{\pi}{2}}(Z - Z_\Omega)$ avec $Z_\Omega = 1$

D'où $\boldsymbol{r}$ est une rotation de centre $\Omega\binom{0}{1}$ et d'angle $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

2) Lorsque le point $M$ décrit la droite d'équation $y = x$,

Déterminons l'ensemble décrit par le point $M''$

$M''\binom{x''}{y''} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = 1 + y \\ y'' = 1 - x \end{cases}$

$x'' + y'' = 2 \Leftrightarrow x'' + y'' - 2 = 0$

Donc l'ensemble décrit par le point $M''$ est la droite d'équation $x + y - 2 = 0$

Ainsi que l'ensemble décrit par le milieu du segment $[MM'']$.

Soit I le milieu du segment $[MM'']$ tel que I$\begin{pmatrix} \frac{x''+x}{2} \\ \frac{y''+y}{2} \end{pmatrix}$ => I$\begin{pmatrix} \frac{1+x+x}{2} \\ \frac{1-x+x}{2} \end{pmatrix}$=> I$\begin{pmatrix} \frac{1+2x}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

D'où l'ensemble décrit par le milieu du segment $[MM'']$ est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$

3) Au point $M\binom{x}{y}$, on associe le point $M_2\binom{x_2}{y_2}$ définie par : $\begin{cases} x_2 = 1 + 3y \\ y_2 = 1 - 2x \end{cases}$

a- Déterminons la nature de l'ensemble $(E)$ des points $M_2$ lorsque $M$ décrit le cercle unité de centre O.

L'ensemble $(E)$ des points $M_2$ lorsque $M$ décrit le cercle unité de centre O est le cercle d'équation : $x^2 + y^2 = 1$

$\begin{cases} x_2 = 1 + 3y \\ y_2 = 1 - 2x \end{cases}$ => $\begin{cases} y = \frac{x_2-1}{3} \\ x = \frac{1-y_2}{2} \end{cases}$

Ainsi l'équation : $x^2 + y^2 = 1$ devient $\left(\frac{1-y_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2-1}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{(x_2-1)^2}{4} + \frac{(y_2-1)^2}{9} = 1$

Donc l'ensemble $(E)$ des points $M_2$ cherché est l'ellipse d'équation : $\frac{(x_2-1)^2}{4}+\frac{(y_2-1)^2}{9}=1.$

b- Caractérisons l'image de $(E)$ par la rotation $\boldsymbol{r}$ définie en 1) –c.

On a : $(E)$: $\frac{(x_2-1)^2}{4}+\frac{(y_2-1)^2}{9}=1$ et $\boldsymbol{r}: \begin{cases} x''=1+y \\ y''=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x''-1 \\ x=1-y'' \end{cases}$

Dans $(E)$, on a : $\frac{\left(1-y''-1\right)^2}{4}+\frac{\left(x''-1-1\right)^2}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{\left(y''\right)^2}{4}+\frac{\left(x''-2\right)^2}{9}=1$

D'où l'image de $(E)$ par la rotation $\boldsymbol{r}$ est l'ellipse d'équation : $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y)^2}{9}=1.$

Ainsi ces éléments caractéristiques sont :

- Centre : $\Omega\binom{2}{0}$
- Excentricité : $e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{5}}{3}$
- Sommets $A\binom{2}{0}$ ; $A'\binom{2}{0}$ ; $B\binom{0}{3}$ ; $B'\binom{0}{-2}$ dans le repère $(\Omega\,;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.
- Foyers :$F\binom{0}{\sqrt{5}}$ ; $F'\binom{0}{-\sqrt{5}}$ dans le repère $(\Omega\,;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.
- Directrice : $D: y=\frac{9}{\sqrt{5}}$ et $D': y=-\frac{9}{\sqrt{5}}$ dans le repère $(\Omega\,;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

**B**// Soit la fonction numérique $f$ à variable réelle $x$ définie par $f(x)=(2x-1)\sqrt{\frac{x+1}{2}}$.
1) Etudier les variations de $f$ et tracer sa courbe C$f$ dans le plan muni d' un repère orthonormé $(o\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

D$f$ $=[-1;+\infty[$ et $f(-1)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\frac{-\frac{3}{2}}{0^+}=-\infty$

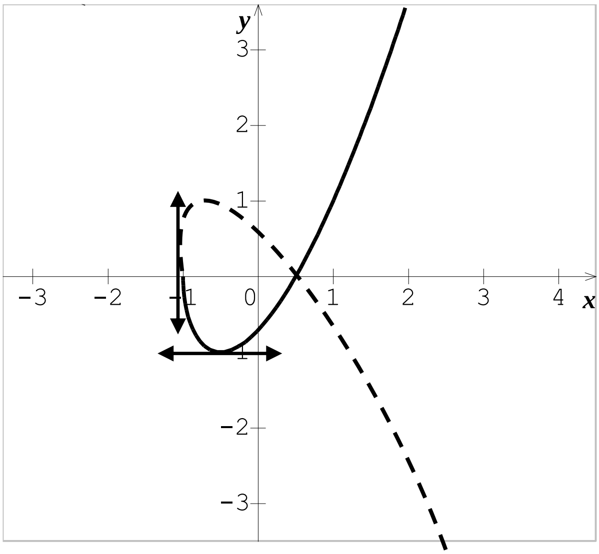
Alors $f$ n'est pas dérivable au point d'abscisse $x_0=-1$ mais admet en ce point une demi tangente verticale.

$\forall x\in]-1;+\infty[,\ f'(x)=2\sqrt{\frac{x+1}{2}}+\frac{(2x-1)}{4\sqrt{\frac{x+1}{2}}}=\frac{8\left(\frac{x+1}{2}\right)+2x-1}{4\sqrt{\frac{x+1}{2}}}=\frac{6x+3}{4\sqrt{\frac{x+1}{2}}}$

Alors le signe de $f'(x)$dépend du signe du numérateur $6x+3$ car $\forall x\in]-1;+\infty[, 2\sqrt{\frac{x+1}{2}}>0$

Posons $6x+3=0$ => $x=-\frac{1}{2}$

| $x$ | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |




Précisons les tangentes à C$f$ aux points d'abscisses $-1$ et $-\frac{1}{2}$

Les tangentes à C$f$ ont pour équation : $x = -1$ aux points d'abscisse $-1$ et $y = -1$ aux points d'abscisse $-\frac{1}{2}$

2) Soit C$'f$ l'image de la courbe C$f$ par la symétrie orthogonale par rapport à $(o\ ;\ \vec{\imath}\ )$.
On pose $\Gamma$= C$f$ ∪ C$'f$.

Traçons $\Gamma$ dans le même repère que C$f$.(voir figure)

3) On considère le point $A\binom{-1}{0}$ et la droite Δ d'équation $x = -2$. Soit $m$ un paramètre non nul,
D la droite d'équation $y = mx$
D' la droite orthogonale à D en $O\binom{0}{0}$ => $y = -\frac{1}{m}x$
Les droites D et $D'$ coupent Δ en P et P' respectivement
$(\Delta)$ ∩ (D): => $\begin{cases} x = -2 \\ y = mx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2m \end{cases}$ => P$(-2\ ;\ -2m)$

$(\Delta)$ ∩ (D$'$): => $\begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{1}{m}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{2}{m} \end{cases}$ => P$'\left(-2\ ;\ \frac{2}{m}\right)$

Soit K le milieu du segment $[PP']$ => K$\left(-2\ ;\ \frac{1-m^2}{m}\right)$

La droite (AK) coupe D et $D'$ en M et M' respectivement.

a- Déterminons les coordonnées de M et M' en fonction de $m$.
$\overrightarrow{\mathrm{AK}}\left(-1\ ;\ \frac{1-m^2}{m}\right)$. Soit $\mathrm{T}(x; y) \in$ (AK) et $\overrightarrow{\mathrm{AT}}(x+1\ ;\ y)$

$\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AT}}$ sont colinéaires si $det\left(\overrightarrow{\mathrm{AK}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AT}}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ y & \frac{1-m^2}{m} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$
$\frac{1-m^2}{m}x + \frac{1-m^2}{m} + y = 0 \Leftrightarrow (1-m^2)x + my + 1 - m^2 = 0$

$(AK)$: $(1-m^2)x + my + 1 - m^2 = 0$

$(AK) \cap (D)$: $\begin{cases} (1-m^2)x + my + 1 - m^2 = 0 & (\mathbf{1}) \\ y = m & (\mathbf{2}) \end{cases}$

$(\mathbf{1})$ $\quad (1-m^2)x + my + 1 - m^2 = 0$ => $x = m^2 - 1$

$(\mathbf{2})$ $\quad y = m(m^2-1)$ => $M\begin{pmatrix} m^2-1 \\ m(m^2-1) \end{pmatrix}$

$(AK) \cap (D')$: $\begin{cases} (1-m^2)x + my + 1 - m^2 = 0 & (\mathbf{1}) \\ y = -\frac{1}{m}x & (\mathbf{2}) \end{cases}$

$(\mathbf{1})$ $\quad (1-m^2)x + my + 1 - m^2 = 0$ => $x = \frac{1-m^2}{m^2}$

$(\mathbf{2})$ $\quad y = -\frac{1}{m}\left(\frac{1-m^2}{m^2}\right)$ => $M'\begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{m^2} \\ -\frac{1}{m}\left(\frac{1-m^2}{m^2}\right) \end{pmatrix}$

b- Soit $\Gamma_1$ , l'ensemble des points M lorsque $m \in \mathbb{R}^*$

Trouvons une relation entre $\Gamma_1$ et $\Gamma_1'$.

$\begin{cases} x = m^2 - 1 \\ y = m(m^2-1) \end{cases}$ => $\begin{cases} m^2 = x+1 \\ y = x\sqrt{x+1} \end{cases}$ => $\Gamma_1$ a pour équation $y = x\sqrt{x+1}$.

Soit $\Gamma_1{}'$ celui des points $M'$lorsque $m \in \mathbb{R}^*$ .

$\begin{cases} x = \frac{1-m^2}{m^2} \\ y = -\frac{1}{m}\left(\frac{1-m^2}{m^2}\right) \end{cases}$ => $\begin{cases} m^2 = \frac{1}{x+1} \\ y = -x\sqrt{x+1} \end{cases}$ => $\Gamma'_1$ a pour équation $y = -x\sqrt{x+1}$.

Ainsi $\Gamma_1$ et $\Gamma'_1$ sont symétriques par rapport à l'axe $(o\ ;\ \vec{\imath})$.

# Sujet Bac 2016

## Exercice 1……………………………………………………(5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(A;\vec{u};\vec{v})$, unité graphique 1cm. On considère les points $B$, $D$ et $C$ définis par : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$ ; $\overrightarrow{AD} = 2\vec{v}$ tel que $ABCD$ soit un rectangle.

**1°/** Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

**2°/** Soit E l'image de $B$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$ . Détermine l'affixe $Z_E$ de $E$. Construis $E$.

**3°/** Détermine les nombres réels $a$ et $b$ tels que le point $F$ d'affixe $Z_F = 6 - 4i$ soit le barycentre des points $A$, $B$ et $C$ affectés respectivement des coefficients $a$, $b$ et 1.

**4°/** On considère la similitude directe $\mathcal{S}$ qui transforme $A$ en $E$ et $B$ en $F$.

a-/ Exprime Z**'** en fonction de Z où Z**'** est l'affixe du point $M'$ image de M par $\mathcal{S}$.

**b-/** Détermine le centre $\Omega$, l'angle $\theta$ et le rapport $k$ de la similitude $\mathcal{S}$

**c-/** Détermine les images de $C$ et $D$ par $\mathcal{S}$.

**d-/** Calcule l'aire de l'image par $\mathcal{S}$ du rectangle $ABCD$.

## Exercice 2……………………………………………………(5 points)

**I-/** On veut entourer avec un minimum d'arbres un champ rectangulaire ayant pour dimensions 525m et 285m. Les arbres seront régulièrement espacés, de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle. Calcule :

**1°/** La distance comprise entre deux arbres.

**2°/** Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.

**II-/** On considère l'équation (**E**) : $11x - 26y = 1$, où $x$ et $y$ désignent deux nombres entiers relatifs.

**1°/** Vérifie que le couple $(-7 ; -3)$ est une solution de (**E**).

**2°/** Résous alors l'équation (**E**).

**3°/** En déduis le couple d'entiers relatifs $(p, q)$ solution de (E) tel que : $0 \leq p \leq 25$.

## Problème……………………………………………………(10 points)

**A-//** A l'instant $t = 0$ ($t$ est exprimé en heures), on injecte dans le sang par piqûre intraveineuse une dose de 2,5 unités d'une substance médicamenteuse. On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée.

On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant $t$, exprimée en unités adaptées. On admet que le processus d'élimination peut être représenté mathématiquement par l'équation différentielle : $Q'(t) = -\beta.Q(t)$, où $\beta$ est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

**1°/** Montre qu'on a $Q(t) = 2{,}5e^{-\beta t}$.

**2°/** Calcule la valeur de $\beta$, sachant qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30%. On donnera d'abord la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à $10^{-4}$ près.

**3°/** Etudie le sens de variation de Q pour $t \geq 0$, détermine sa limite en $+\infty$ , et trace la courbe représentative $(\Gamma)$ de Q dans le plan $\mathcal{P}$.

**4°/** Au bout de combien de temps la quantité de substance présente dans le sang a-t-elle été réduite de moitié ?

On donnera la valeur exacte et une valeur décimale approchée à $10^{-2}$ près.

**B-//** Soit *f* la fonction numérique de la variable réelle *x* définie par :

$f(x) = -\frac{x}{2} + ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

**1°/** Détermine l'ensemble de définition de *f*.

**2°/** Etudie les variations de *f*.

**3°/** Soit ( $\mathcal{C}$) la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormé (unité 2cm).

Montre que ( $\mathcal{C}$) admet une asymptote oblique dont précisera l'équation puis préciser la position de ( $\mathcal{C}$) par rapport à l'asymptote oblique.

**4°/** Montre que le point $I\left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{4}\right)$ est centre de symétrie pour ( $\mathcal{C}$ )

**5°/** Donne une équation de la tangente en I à ( $\mathcal{C}$).

# Correction Bac 2016

**Exercice 1**.........................................................(**5** ***points***)

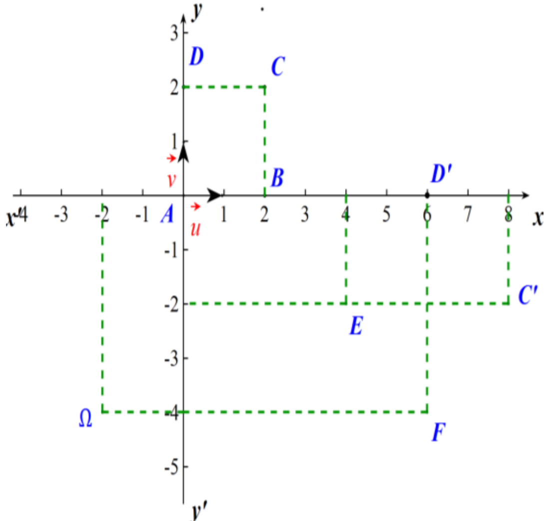
On considère les points $A, B, C$ et $D$.

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$ ; $\overrightarrow{AD} = 2\vec{v}$

**1.** Plaçons les points $A, B, C$ et $D$

$Z_B = 2$ ; $Z_C = 2 + 2i$

$Z_D = 2i$




**2.** Déterminons l'affixe $Z_E$ de E puis construisons E.

TTranslation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.

Première Méthode

$T(B) = E \Leftrightarrow \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DE} \Leftrightarrow Z_E - Z_B = Z_B - Z_D \Leftrightarrow$

$Z_E = 2Z_B - Z_D \Longrightarrow Z_E = 4 - 2i$

Deuxième méthode :

On sait $T : Z' = Z + b$

$b = Z_{\overrightarrow{DB}} = Z_B - Z_D = 2 - 2i$

$T(B) = E \Leftrightarrow Z_E = Z_B + 2 - 2i$

$Z_E = 2 + 2 - 2i = 4 - 2i$

**3.** Déterminons les nombres réels a et b tel que $F = bar\{(A, a); (B, b); (C, 1)\}$

Avec $Z_F = 6 - 4i$.

$F = bar\{(A, a); (B, b); (C, 1)\}$ Signifie que $a\overrightarrow{FA} + b\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \vec{0}$ et $a + b + 1 \neq 0$

**Première Méthode**

$Z_F = \frac{aZ_A + bZ_B + Z_C}{a+b+1} \Leftrightarrow 6 - 4i = \frac{2b+2+2i}{a+b+1} \Leftrightarrow 6 - 4i = \frac{2b+2}{a+b+1} + \frac{2}{a+b+1}i$

Par identification : $\begin{cases} \frac{2b+2}{a+b+1} = 6 \ (1) \\ \frac{2}{a+b+1} = -4 \ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b = -2 \\ -2a - 2b = 3 \end{cases}$

Dans (1) on a :$3 + 2b = -2 \Longrightarrow b = -\frac{5}{2}$

Deuxième méthode : (coordonnées du barycentre).

$$\begin{cases} x_F = \frac{ax_A+bx_B+x_C}{a+b+1} \\ \text{et} \\ y_C = \frac{ay_A+by_B+y_C}{a+b+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = \frac{2b+2}{a+b+1} \\ \text{et} \\ -4 = \frac{2}{a+b+1} \end{cases} \Longrightarrow a = 1 \quad \text{et} \quad b = -\frac{5}{2}$$

**4.** Soit S la similitude directe telle que :

$S(A) = E$et $S(B) = F$

**a.** Exprimons Z′ en fonction de Z.

$S \quad : \quad P \quad \longrightarrow \quad P$

$M(Z) \longmapsto M'(Z')$

$S(A) = E \Leftrightarrow Z_E = \alpha Z_A + \beta$

$S(B) = F \Leftrightarrow Z_F = \alpha Z_B + \beta$

Par suite on a :

$$\begin{cases} \alpha(0) + b = 4 - 2i \\ 2\alpha + \beta = 6 - 4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4 - 2i \\ \alpha = \frac{6-4i-\beta}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4 - 2i \\ \alpha = \frac{6-4i-4+2i}{2} = 1 - i \end{cases}$$

D’où$Z' = (1 - i)Z + 4 - 2i.$

**b.** Déterminons le centre$\Omega$, l’angle $\theta$ et le rapport k de S.

$\alpha = 1 - i = \left[\sqrt{2}\,;\, -\frac{\pi}{4}\right]$

$\theta = -\frac{\pi}{4}(2\pi)$et$k = \sqrt{2}$

Le centre$\Omega$

**<u>Deuxième méthode :</u>**

$Z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{4-2i}{1-1+i} = -2 - 4i$

Deuxième méthode : $\Omega$ point invariant :

$Z' = Z \Leftrightarrow Z = (1 - i)Z + 4 - 2i$

$iZ = 4 - 2i$

$\Rightarrow Z = -2 - 4i$

c) Déterminons les images de C et D par S.

Posons$C' = S(C)$ et$D' = S(D)$

$S(C) = C'$

$Z_{C'} = (1 - i)Z_C + 4 - 2i \ = (1 + i)(2 + 2i) + 4 - 2i = 8 - 2i$

$S(D) = D'$
$Z_{D'} = (1 - i)Z_D + 4 - 2i = (1 + i)(2i) + 4 - 2i = 6$

d) Calculons l'aire de l'image du rectangle ABCD par S.
Soit $\mathcal{A}$ l'aire du rectangle :
$\mathcal{A} = AB \times AD = 4 \text{ cm}^2$
$\mathcal{A}' = S(\mathcal{A}) = k^2 = 2 \times 4 \text{ cm}^2 = 8 \text{ cm}^2$

## <u>Exercice 2</u>……………….……………………………………………(5 *points*)

**I**// $L = 525\ m$ ; $l = 285\ m$
1) Calculons la distance comprise entre deux arbres :
La distance comprise entre deux arbres est le $PGCD(525 ; 285) = 15$
L'espace entre deux arbres est $15\ m$

2) Calculons le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.
Le périmètre du champ :
$P = 2(L + l) = 2(525 + 285) = 1620$ ; $P = 1620\ m$
Le nombre d'arbres est :
$n = \frac{1620}{15} = 108$
Nous avons 108 arbres.

**II**// On considère l'équation$(E)$ : $11x - 26y = 1$où $x, y \in \mathbb{Z}$.

1) Vérifions que le couple$(-7 ; -3)$ est une solution de $(E)$.
$11(-7) - 26(-3) = -77 + 78 = 1$
Donc le couple $(-7 ; -3)$ est une solution de $(E)$.

2) Résolvons l'équation$(E)$ :

**<u>Première méthode : (Gauss)</u>**

D'après 1°) on a :
$$\begin{cases} 11x - 29y = 1 \\ 11(-7) - 26(-3) = 1 \end{cases}$$
$$\overline{11(x + 7) = 26(y + 3)}$$

$11/26(x + 3)$et $11 \wedge 26 = 1$ d'après Gauss il existe un entier relatif $k$ tel que

$y + 3 = 11k \Longrightarrow y = 11k - 3$

$26/11(x + 7)$et$11 \wedge 26 = 1$ d'après Gauss il existe un entier relatif $k$ tel que

$x + 7 = 26k \Longrightarrow x = 26k - 7$

$S = \{(26k - 7 ; 11k - 3) ; k \in \mathbb{Z}\}$

**Deuxième méthode : (congruence)**

$26y = 1 - 11x \Leftrightarrow 26y \equiv -1[11]$
$4y \equiv -1[11]$
$y \equiv -3[11]$Ou $y \equiv 8[11]$donc $y = 11k - 3$ ou $y = 11k + 8$
Si $y = 11k - 3$
$11x - 26(11k - 3) = 1$
$11x = 26 \times 11k - 3 \times 26 + 1$
$x = 26k - 7$
Si $y = 11k + 8$ on a :
$11x = 26 \times 11k + 209$
$x = 26k + 19$
$S = \{(26k - 7\,; 11k - 3)\,; k \in \mathbb{Z}\}$Ou $S = \{(26k + 19\,; 11k + 8)\,; k \in \mathbb{Z}\}$

3) Déduisons – en le couple$(p\,, q)$ solution de$(E)$ tel que $0 \leq p \leq 25$
D'après 2°) :
$p = 26k - 7$et $q = 11k - 3$
$0 \leq p \leq 25$
$0 \leq 26k - 7 \leq 25$
$7 \leq 26k \leq 32$
$\frac{7}{26} \leq k \leq \frac{32}{26}$
$0{,}26 \leq k \leq 1{,}25 \Rightarrow k = 1$ . Donc $p = 26 - 7 = 19$ et $q = 8$ et $S = \{(19\,; 8)\}$ .

**Problème**…………………………………………………………$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

**A.** On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant $t$.
$t = 0\,; Q(0) = 2{,}5$ ; Q'$(t) = -\beta Q(t)$

1) Montrons qu'on a $Q(t) = 2{,}5e^{-\beta t}$
Q'$(t) = -\beta Q(t) \Rightarrow Q(t) = Ce^{-\beta t}$
$Q(0) = 2{,}5 \Rightarrow C = 2{,}5$ D'où $Q(t) = 2{,}5e^{-\beta t}$.

2) Calculons la valeur de $\beta$.

**Première méthode :**

$Q(t + 1) = Q(t) - \frac{30}{100} \Leftrightarrow Q(t)Q(t + 1) = 0{,}7Q(t)$
Pour $t = 0$
$Q(1) = 0{,}7Q(0) \Leftrightarrow 2{,}5e^{-\beta}.= 0{,}7Q(0) \Leftrightarrow 2{,}5e^{-\beta} = 0{,}7 \times 2{,}5 \Leftrightarrow e^{-\beta} = 0{,}7$
$\Longrightarrow -\beta = ln0{,}7$
$\beta = -ln0{,}7$
$\beta = 0{,}3567$

**Deuxième méthode :**

$Q(t) = 2{,}5e^{-\beta}$
Pour $t = 1$, on a :
$Q(1) = Q(0) - \frac{30}{100}Q(0)$
$Q(1) = 0{,}7 \times Q(0)$

$\beta = 0{,}3567$
3)Étudions le sens de variation de $Q$ pour $t \geq 0$.

$D_Q = [0\,,+\infty[$.
$Q(t) = 2{,}5e^{-\beta t}$ , $Q$ est continue et dérivable pour $t \geq 0$.
$Q^{'}(t) = -2{,}5\beta e^{-\beta t}$
$\forall t \geq 0\,, Q^{'(t)} < 0$ Alors $Q$ est strictement décroissante.

$\lim\limits_{x \to +\infty} Q(t) = 0$

| $x$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $Q'(t)$ | $-$ | |
| $Q(t)$ | $2{,}5$ ↘ | $0$ |

3) Le temps au bout duquel la quantité du sang est réduite de moitié.

$Q(t) = \frac{1}{2}Q(0)$
$5{,}2e^{-\beta t} = \frac{1}{2} \times 2{,}5$
$e^{-\beta t} = \frac{1}{2}$
$t = \frac{ln2}{\beta} = -\frac{ln2}{ln0{,}7} = 1{,}94$
Le temps $t \approx 2\ heures$

**B.** Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par :
$f(x) = -\frac{x}{2} + ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

1) Déterminons l'ensemble de définition :

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\,;1\} = ]-\infty\,;0[\, \cup\, ]0\,;1[\, \cup\, ]1\,;+\infty[$$

2) Étudions les variations de $f$

$f$est continue et dérivable sur chacun des intervalles de son $D_f$
$f^{'}(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{-x^2+x+2x-2x+2}{2x(x-1)} = \frac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}$

Signe de $f'(x)$

Posons $f^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0$

$x_1 = -1\,; x_2 = 2$

Tableau de signe de $f^{'}(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2+x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $2x(x-1)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | |

Pour tout $x \in ]-\infty\,;\,-1] \cup ]0\,;1[ \cup [2\,;\,+\infty[$
Pour tout$x \in [-1\,;0[ \cup ]1\,;2]$, $f$ est $f$ est croissante.

3) Montrons que la courbe $(C)$ admet une asymptote oblique :
Posons $y = -\frac{x}{2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x\to-\infty} ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0$

Donc $(D): y = -\frac{x}{2}$
Position de $(C)$ par rapport $(D)$

$f(x) - y = ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

**<u>Première méthode :</u>**

Posons $g(x) = ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$
$D_g = D_f$
$g'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x-1)}$

Tableau de variation$g(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | ‖ | $-$ | | $-$ | ‖ | $+$ | |
| $g(x)$ | $0$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $0$ |

D'après le tableau de variation de $g$, on a :
$\forall\, x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ ; $g(x) > 0$ et par conséquent $\forall\, x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ ; $(C)$ est au-dessus de $(D)$.

$\forall\, x \in \left]\frac{1}{2}\,; +\infty\right[$ ; $g(x) < 0$ et par conséquent $\forall\, x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ ; $(C)$ est en dessous de $(D)$.

Pour $x = \frac{1}{2}$, $(C)$ et $(D)$ sont confondues.

4) Montrons que le point I $\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{-1}{4}\right)$ est centre de symétrie.

$2a - x = 1 - x$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq 1 \Leftrightarrow -x \neq 0$ et $-x \neq -1 \Leftrightarrow 1 - x \neq 1$ et$1 - x \neq 0$ donc $1 - x \in D_f$

$f(1-x) + f(x) = \frac{x-1}{2} + \ln\left|\frac{1-x-1}{1-x}\right| + \frac{x}{2} - \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| = -\frac{1}{2}$

$f(1-x) + f(x) = -\frac{1}{2}$

5) Donnons une équation de la tangente en I à$(C)$ :

$y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}$ => $y = -\frac{9}{2}x + 2.$

6) Construisons la courbe$(C)$ :

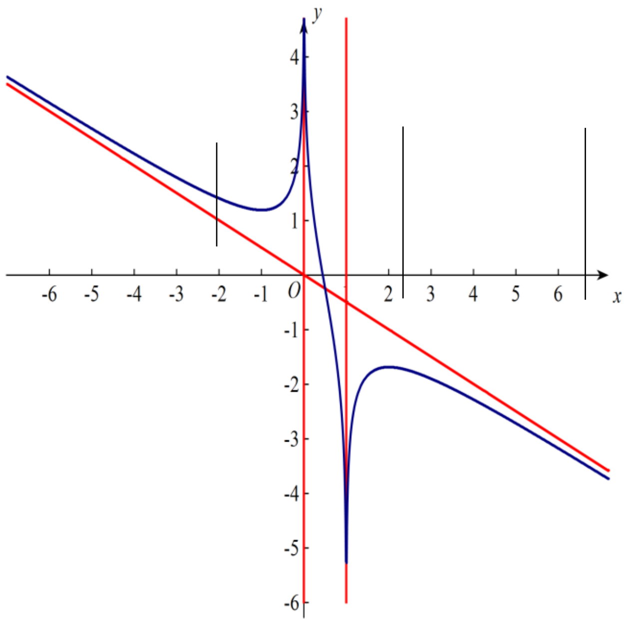
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + \infty$ ; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \infty$ ;

Les extremums :

$f(-1) = \frac{1}{2} + \ln 2$ $=1{,}19 \approx 1{,}2$ ; $f(2) = -1 - \ln 2 = -1{,}69 \approx 1{,}7$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1{,}2$ | $\nearrow$ | $+\infty \Vert +\infty$ | $\searrow$ | $-\infty \Vert -\infty$ | $\nearrow$ | $-1{,}17$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

D'où la courbe



# Sujet Bac 2017

**Exercice 1**……………………………………………………………$(\mathbf{5}\ \boldsymbol{points})$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$, on considère les points $M_n$ d'affixes : $Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n \left(1 + i\sqrt{3}\right)$ où $n$ désigne un entier naturel.

1) Exprime $Z_{n+1}$ en fonction $Z_n$ puis $Z_n$ en fonction de $Z_0$ et $n$.
2) Donne $Z_0$ ; $Z_1$; $Z_2$ ; $Z_3$ et $Z_4$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
3) Place les points $M_0$ ; $M_1$; $M_2$ ; $M_3$ et $M_4$ (unité :4 $cm$).
4) Détermine la distance $OM_n$ en fonction de $n$.
5) a- Montre que $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   b- On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$ (c'est-à-dire$L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots M_nM_{n+1}$).

Détermine $L_n$ en fonction de $n$, puis la limite de $L_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

6) Détermine une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_0}\ ;\ \overrightarrow{OM_n}\right)$ en fonction de $n$.
7) Pour quelles valeurs de $n$ les points $O$ ; $M_0$ et $M_n$ sont ils alignés ?

**Exercice 2**……………..……………………………………………$(\mathbf{5}\ \boldsymbol{points})$

I) Dans le plan affine, on considère le triangle $ABC$ rectangle en $A$, $I$ le milieu du segment $[AB]$ et $J$ le centre de gravité de $ABC$.

Pour tout réel $m$, différent de $-\frac{1}{3}$, on note $G_m$ le barycentre du système de points pondérés : $\{(A;1)\ ;\ (B;m)\ ;\ (C;2m)\}$

Pour tout point $M$ du plan on note $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

1) Montre que $G_1$ est le milieu du segment $[CI]$.
2) Montre que les points $G_1$ ; $J$ et $C$ sont alignés.
3) Montre que pour tout point $M$, $\overrightarrow{V_M} = -\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$.
4) Montre que pour tout réel $m$ distincte de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.
5) Montre que le triangle $IBG_{-1/2}$ est un triangle rectangle en $B$.

II) Dans le plan affine Euclidien rapporté au repère orthonormé, on considère l'application affine $f$ défini par : $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x + 4y + 4) \\ y' = \frac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases}$

1) Démontre que $f$ est une isométrie.
2) Trouve l'ensemble des points invariants par $f$.
3) Caractérise géométriquement l'application $f$.

**<u>Problème</u>………………………………………………………………………………($\mathbf{10}\ \boldsymbol{points}$)**

A) Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$.
On appelle $(C)$ la courbe représentative de $f$.

1) a- Calcule la fonction dérivée de $f$.
b- Dresse le tableau de variation de $f'$ sur $[0;+\infty[$ puis en déduis le signe de $f'$ sur $[0;+\infty[$.
c- Dresse le tableau de variation de $f$ sur $[0;+\infty[$ .
d- Montre que $(C)$ admet une asymptote $(D)$ dont on déterminera une équation.
e- Construit $(C)$ et $(D)$ sur un même graphique.

2) a- Etablis que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[0;+\infty[$ une solution et une seule notée $\alpha$.
b- Justifie l'encadrement : $1 \leq \alpha \leq 2$.

B) Soit la fonction $g$ définie sur l'intervalle $J = [1;+\infty[$ par $g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$.

1) Etudie les variations de $g$ sur $J$ puis en déduis que pour tout $x \in J, g(x) \in J$.

2) Montre que pour tout $x \in J$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$.
En déduis que pour tout $x \in J$, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$.

3) Soit $(u_n)$ la suite d'éléments de $J$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier $n$ positif ou nul.

a- Montre que pour tout entier $n$ positif ou nul, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|u_n - \alpha|$.

b- En déduis que pour tout entier $n$ positif ou nul, on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$.

c- Détermine la limite de la suite $u_n$

d- Détermine un entier $p$ pour lequel on est sûr d'avoir $\left|u_p - \alpha\right| \leq 10^{-3}$.
Calcule $u_p$ à $10^{-3}$ près.

# Correction Bac 2017

**Exercice 1**..........................................................$(\mathbf{5}\ \boldsymbol{points})$

1) Exprimons $Z_{n+1}$ en fonction $Z_n$ puis $Z_n$ en fonction de $Z_0$ et $n$.

- $\boldsymbol{Z_{n+1}}$ **en fonction** $\boldsymbol{Z_n}$

$Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (1+i\sqrt{3})$ => $Z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1}(1+i\sqrt{3}) = \left(\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}i\right)^n(1+i\sqrt{3}) = \frac{1}{2}iZ_n$.
D'où $Z_{n+1} = \frac{1}{2}iZ_n$.

- $\boldsymbol{Z_n}$ **en fonction de** $\boldsymbol{Z_0}$ **et** $\boldsymbol{n}$**.**

$Z_{n+1} = \frac{1}{2}iZ_n$ Signifie que $Z_n$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}i$ et de premier terme $Z_0$.

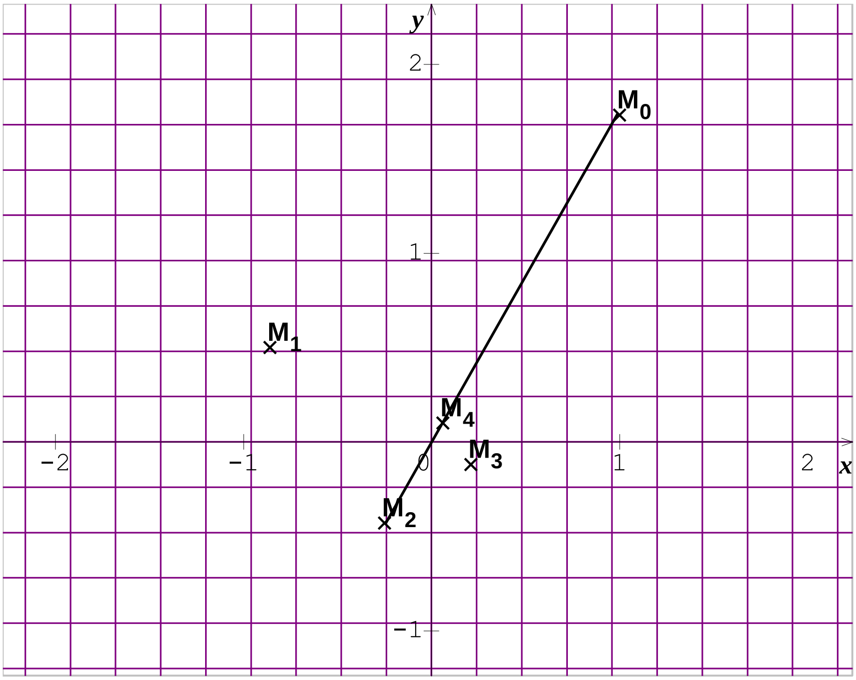
D'où $Z_n = Z_0\left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1}$

2) Donnons $Z_0$ ; $Z_1$; $Z_2$ ; $Z_3$ et $Z_4$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

| | $Z_0$ | $Z_1$ | $Z_2$ |
|---|---|---|---|
| Forme algébrique | $1+i\sqrt{3}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ | $-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i$ |
| Forme trigonométrique | $2\left(cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right)$ | $cos\frac{5\pi}{6}+isin\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}\left(cos\frac{4\pi}{3}+isin\frac{4\pi}{3}\right)$ |

| | $Z_3$ | $Z_4$ |
|---|---|---|
| Forme algébrique | $\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}i$ | $\frac{1}{16}+i\frac{\sqrt{3}}{16}$ |
| Forme trigonométrique | $\frac{1}{4}\left[cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$ | $\frac{1}{8}\left(cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right)$ |

3) Plaçons les points $M_0$ ; $M_1$; $M_2$ ; $M_3$ et $M_4$ (unité :4 $cm$).




4) Déterminons la distance $OM_n$en fonction de $n$.

$$OM_n = |Z_n| = \left|\left(\frac{1}{2}i\right)^n(1+i\sqrt{3})\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2 = \frac{1}{2^{n-1}}$$

5) a- Montrons que $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$M_nM_{n+1} = |Z_{n+1} - Z_n| = \left|\frac{1}{2}iZ_n - Z_n\right| = \left|Z_n\left(\frac{1}{2}i - 1\right)\right| = |Z_n| \times \left|-1 + \frac{1}{2}i\right|$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \times \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2^{n-1}} \times \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2^{n-1}} \times \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$$

D'où $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$

b- On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$ (c'est-à-dire$L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}$).

**- Déterminons $L_n$ en fonction de $n$**

$$L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots M_nM_{n+1}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2^0} + \frac{\sqrt{5}}{2^1} + \frac{\sqrt{5}}{2^2} + \cdots + \frac{\sqrt{5}}{2^n} = \sqrt{5}\left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = \sqrt{5} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{5} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{5} \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

**- Déterminons la limite de $L_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.**

$$\lim_{n \to +\infty} L_n = \lim_{n \to +\infty} 2\sqrt{5} \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 2\sqrt{5} \text{ Car } \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$$

6) Déterminons une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_0} \,;\, \overrightarrow{OM_n}\right)$ en fonction de $n$.

$$Mes\left(\overrightarrow{OM_0} \,;\, \overrightarrow{OM_n}\right) = arg\left(\frac{Z_{M_n - Z_0}}{Z_{M_0 - Z_0}}\right) = arg\left(\frac{Z_{M_n}}{Z_{M_0}}\right) = arg\left[\left(\frac{1}{2}i\right)^n\right] = \frac{n\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

D'où $Mes\left(\overrightarrow{OM_0} \,;\, \overrightarrow{OM_n}\right) = \frac{n\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

7) Déterminons les valeurs de $n$ pour les quelles les points $O$ ; $M_0$ et $M_n$ sont ils alignés

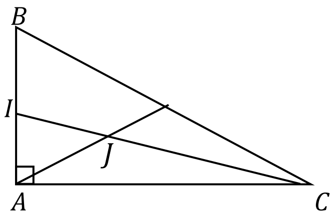
Les points $O$ ; $M_0$ et $M_n$ sont ils alignés si et seulement si $\frac{Z_{M_n - Z_0}}{Z_{M_0 - Z_0}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$arg\left(\frac{Z_{M_n - Z_0}}{Z_{M_0 - Z_0}}\right) = k'\pi \Leftrightarrow \frac{n\pi}{2} + 2k\pi = k'\pi \Leftrightarrow n\pi + 4k\pi = 2k'\pi \Leftrightarrow n = 2k' - 4k$$

$\Leftrightarrow n = 2(k' - 2k)$. En posant $p = k' - 2k$, on a : $n = 2p$.

## <u>Exercice 2</u>……………………..……………………………………………(5 *points*)

I) Dans le plan affine, on considère le triangle $ABC$ rectangle en $A$, $I$ le milieu du segment $[AB]$ et $J$ le centre de gravité de $ABC$.




Pour tout réel $m$, différent de $-\frac{1}{3}$, on note $G_m$ le barycentre du système de points pondérés : $\{(A;1) \,;\, (B;m) \,;\, (C;2m)\}$

Pour tout point $M$ du plan on note $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

1) Montrons que $G_1$ est le milieu du segment $[CI]$.

$G_1$ est le milieu du segment $[CI]$ si et seulement si $\overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$

$G_m = \{(A;1)\ ;\ (B;m)\ ;\ (C;2m)\} \Leftrightarrow G_1 = \{(A;1)\ ;\ (B;1)\ ;\ (C;2)\} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} + 2\overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$ (Introduisons le milieu $I$ du segment $[AB]$ dans $\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B}$)

$\Rightarrow \overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{G_1C} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{G_1I} + 2\overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ (Car $I$ est le milieu du segment $[AB]$ )

$\Rightarrow 2\overrightarrow{G_1I} + 2\overrightarrow{G_1C} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$

D'où $G_1$ est le milieu du segment $[CI]$

2) Montrons que les points $G_1$ ; $J$ et $C$ sont alignés.

Les points $G_1$ ; $J$ et $C$ sont alignés si et seulement si $det\left(\overrightarrow{G_1J} + \overrightarrow{G_1C}\right) = 0$

Cherchons les composantes des vecteurs $\overrightarrow{G_1J}$ et $\overrightarrow{G_1C}$ dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

$J$ Le centre de gravité de $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$ (Introduisons le point $A$ dans $\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC}$)

$\Rightarrow \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{JA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc $J\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

D'autre part $\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} + 2\overrightarrow{G_1C} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Donc $G_1\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

De même $C(0;1)$ dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Ainsi $\overrightarrow{G_1J}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{G_1J}\begin{pmatrix}\frac{1}{12}\\ -\frac{1}{6}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{G_1C}\begin{pmatrix}0-\frac{1}{4}\\ 1-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{G_1J}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow det\left(\overrightarrow{G_1J}\ ;\ \overrightarrow{G_1C}\right) = \begin{vmatrix}\frac{1}{12} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2}\end{vmatrix} = \left(\frac{1}{24}\right) - \left(\frac{1}{24}\right) = 0$

D'où Les points $G_1$ ; $J$ et $C$ sont alignés.

3) Montrons que pour tout point $M, \overrightarrow{V_M} = -\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$.

$\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ (Introduisons le point $A$ dans $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$)

=> $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{V_M} = -\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{V_M} = -\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$.

D'où $\overrightarrow{V_M} = -\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$.

4) Montrons que pour tout réel $m$ distincte de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.

$\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$ si et seulement si $det\left(\overrightarrow{AG_m}\ ;\ \overrightarrow{AG_{-1}}\right) = 0$

Cherchons les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AG_m}$ et $\overrightarrow{AG_{-1}}$ dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

$G_m = \{(A;1)\ ;\ (B;m)\ ;\ (C;2m)\} \Leftrightarrow (1+3m)\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AB} + 2m\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AG_m} = \frac{m}{1+3m}\overrightarrow{AB} + \frac{2m}{1+3m}\overrightarrow{AC}$ . D'où $G_m\left(\frac{m}{1+3m}\ ;\ \frac{2m}{1+3m}\right)$ dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

Pour $m = -1;$ on a : $\overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. D'où $G_{-1}\left(\frac{1}{2};\ 1\right)$ dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

=> $det\left(\overrightarrow{AG_m}\ ;\ \overrightarrow{AG_{-1}}\right) = \begin{vmatrix} \frac{m}{1+3m} & \frac{1}{2} \\ \frac{2m}{1+3m} & 1 \end{vmatrix} = \frac{m}{1+3m} \times 1 - \frac{2m}{1+3m} \times \frac{1}{2} = \frac{m}{1+3m} - \frac{m}{1+3m} = 0$

D'où $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$

5) Montrons que le triangle $IBG_{-1/2}$ est un triangle rectangle en $B$.

$IBG_{-1/2}$ est un triangle rectangle en $B$ si et seulement si en appliquant le théorème de Pythagore on a : $IB^2 + {BG_{-1/2}}^2 = {IG_{-1/2}}^2$

Calculons ainsi les distances $IB$ ; $BG_{-1/2}$ et $IG_{-1/2}$ dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

On sait que $B(1\ ;0)$ ; $I$ est le milieu de $[AB]$ donc $I\left(\frac{1}{2};\ 1\right)$ et $G_{-1/2}(1;\ 2)$

Donc : $IB = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$ ; $BG_{-1/2} = \sqrt{2^2} = 2$ et $IG_{-1/2} = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$IB^2 + {BG_{-1/2}}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (2)^2 = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$

$IG_{-1/2} = \frac{\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow {IG_{-1/2}}^2 = \left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$

Puisque $IB^2 + BG_{-1/2}{}^2 = IG_{-1/2}{}^2 = \frac{17}{4}$ ; alors $IBG_{-1/2}$ est un triangle rectangle en $B$.

II) Dans le plan affine Euclidien rapporté au repère orthonormé, on considère l'application affine $f$ défini par : $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x + 4y + 4) \\ y' = \frac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases}$

1) Démontrons que $f$ est une isométrie.

$f$ étant une application affine, la matrice de l'endomorphisme associé à $f$ est $M_\varphi$ définie par :

$M_\varphi = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ qui est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$.

Vérifions ainsi si $det(M_\varphi) = -1$

$$det(M_\varphi) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = -\frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{25}{25} = -1$$

2) Trouvons l'ensemble des points invariants par $f$.

L'ensemble des points invariants par $f$ est tel que $f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}(-3x + 4y + 4) \\ y = \frac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = (-3x + 4y + 4) \\ 5y = (4x + 3y - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ -2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$$

D'où l'ensemble des points invariants par $f$ est la droite d'équation $2x - y - 1 = 0$.

3) Caractérisons géométriquement l'application $f$.

$f$ Étant une isométrie et admettant la droite d'équation $2x - y - 1 = 0$ comme point invariant, alors $f$ est une symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $2x - y - 1 = 0$.

## <u>Problème</u>………………………………………………………………$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

A) Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$. On appelle $(C)$ la courbe représentative de $f$.

1) a- Calculons la fonction dérivée de $f$.

$f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x \Rightarrow f'(x) = e^{-2x} - 2e^{-2x} - 1 = -[1 + (2x + 1)e^{-2x}]$.

b- Dressons le tableau de variation de $f'$ sur $[0; +\infty[$

$Df = [0; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} - 2xe^{-2x} - 1 = -1$ et $f'(0) = -2$

$f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} - 1 \Rightarrow f''(x) = -(2 - 4x - 2)e^{-2x} = 4xe^{-2x}$

Ainsi pour tout $x \in [0; +\infty[, f''(x) \geq 0$. D'où $f$ est croissante.

D'où le tableau de variation de $f'$ sur $[0; +\infty[$ est le suivant :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | $-2$ $\nearrow$ | $-1$ |

En déduisons le signe de $f'$ sur $[0; +\infty[$.

D'après le tableau de variation de $f'$, pour tout $x \in [0; +\infty[, f'(x) < 0$.

c- Dressons le tableau de variation de $f$ sur $[0; +\infty[$ .

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $2$ $\searrow$ | $-\infty$ |

d- Montrons que $(C)$ admet une asymptote $(D)$ dont on déterminera une équation.

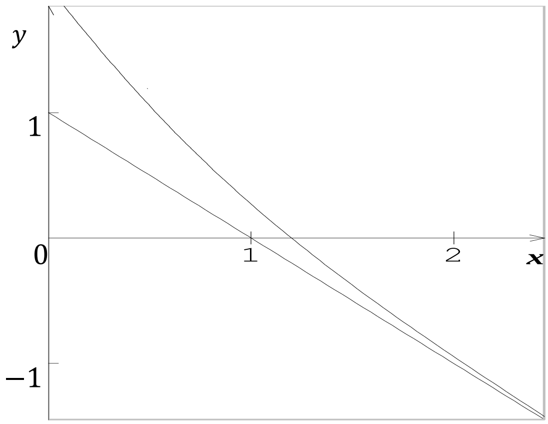
$f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x \Leftrightarrow f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + (1 - x) \Leftrightarrow$

$f(x) - (1 - x) = xe^{-2x} + e^{-2x}$ (Appliquons à cette égalité la limite en $+\infty$). On a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (1 - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (xe^{-2x} + e^{-2x}) = 0$.

Donc la droite $(D)$d'équation $y = 1 - x$ est asymptote oblique à la courbe $(C)$ de $f$ au voisinage de $+\infty$.

e- Construisons $(C)$ et $(D)$ sur un même graphique.




2) a- Etablissons que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[0; +\infty[$ une solution et une seule notée $\alpha$.

D'après le tableau de variation de $f$, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f$ est continue et strictement décroissante donc $f$ réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $]-\infty\,; 2]$. Or $0 \in\, ]-\infty\,; 2]$ donc il existe une solution unique $\alpha \in\, ]-\infty\,; 2]$ telle que $f(\alpha) = 0$

b- Justifions l'encadrement : $1 \leq \alpha \leq 2$.

$$\begin{cases} f(1) = 2e^{-2} > 0 \\ f(2) = \frac{3-e^4}{e^4} < 0 \end{cases} \Rightarrow f(1) \times f(2) < 0.$$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a : l'encadrement : $1 \leq \alpha \leq 2$.

B) Soit la fonction $g$ définie sur l'intervalle $J = [1; +\infty[$ par : $g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$.

1) Etudions les variations de $g$ sur $J$

$g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 \Rightarrow g'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} - 2e^{-2x} = -(2x+1)e^{-2x}$

Ainsi pour tout $x \in [1; +\infty[$, $g'(x) < 0$. Donc $g$ est strictement décroissante.

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 = 1$ et $g(1) = 1 + 2e^{-2}$

D'où le tableau de variation de $f'$ sur $[0; +\infty[$ est le suivant :

| $x$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $1 + 2e^{-2}$ ↘ | $1$ |

En déduisons que pour tout $x \in J$, $g(x) \in J$.

D'après le tableau de variation de $g$, pour tout $x \in J$, $g(x) \in [1\ ;\ 1+2e^{-2}[ \subset J$.

D'où pour tout $x \in J, g(x) \in J$.

2) Montrons que pour tout $x \in J$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$.

$g'(x) = -(2x+1)e^{-2x}$ => $g''(x) = 4xe^{-2x} > 0$.

Donc pour tout $x \in J, g'(x)$ est strictement croissante.
$x \in J \ \Leftrightarrow x \geq 1$. Donc :

$g'(x) \geq g'(1) \Leftrightarrow g'(x) \geq -3e^{-2} \Leftrightarrow g'(x) < 0$

Alors $|g'(x)| \leq |-3e^{-2}| \ \Leftrightarrow |g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$.

En déduisons que pour tout $x \in J$, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$.

On sait que $\alpha \in [1\,;2] \subset J$ et $x \in J$ => $x \in [\alpha\,;x]$ et de plus pour tout $x \in J, |g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$.

En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis à la fonction $g$ sur l'intervalle $[\alpha\,;x]$, on a : $|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$.

D'autre part $f(x) = g(x) - x$ et $f(\alpha) = 0$ => $g(\alpha) = \alpha$. Par suite $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$.

3) Soit $(u_n)$ la suite d'éléments de $J$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier $n$ positif ou nul.

a-Montrons que pour tout entier $n$ positif ou nul, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|u_n - \alpha|$.

D'après la question 2), on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|\ et$ en posant $x = u_n$, on a :

$|g(u_n) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|u_n - \alpha|$. Or $g(u_n) = u_{n+1}$ => $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|u_n - \alpha|$.

D'où pour tout entier $n$ positif ou nul, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|u_n - \alpha|$.

b-En déduisons que pour tout entier $n$ positif ou nul, on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$.

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_{k+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|u_k - \alpha|$.

- Pour $k=0$, on a : $\cancel{|u_1-\alpha|} \leq \frac{3}{e^2}|u_0-\alpha|$.
- Pour $k=1$, on a : $\cancel{|u_2-\alpha|} \leq \frac{3}{e^2}\cancel{|u_1-\alpha|}$.
- Pour $k=2$, on a : $\cancel{|u_3-\alpha|} \leq \frac{3}{e^2}\cancel{|u_2-\alpha|}$.

. . .

. . .

. . .

. . .

- Pour $k=n-2$, on a : $\cancel{|u_{n-1}-\alpha|} \leq \frac{3}{e^2}\cancel{|u_{n-2}-\alpha|}$.
- Pour $k=n-1$, on a : $|u_n-\alpha| \leq \frac{3}{e^2}\cancel{|u_{n-1}-\alpha|}$.

En multipliant membre à membre puis en simplifiant les expressions de chaque égalité, on a :

$$|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n |u_0-\alpha|.$$

D'autre part on a : $1 \leq \alpha \leq 2 \Leftrightarrow$

$$-2 \leq -\alpha \leq -1 \quad \Leftrightarrow$$

$$1-2 \leq u_0-\alpha \leq 1-1 \quad \Leftrightarrow$$

$$-1 \leq u_0-\alpha \leq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$-1 \leq -(\alpha-u_0) \leq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$0 \leq |-(\alpha-u_0)| \leq |-1| \quad \Leftrightarrow$$

$$0 \leq |\alpha-u_0| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |\alpha-u_0| \leq 1$$

Donc $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n |u_0-\alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n \Rightarrow |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$

c-Déterminons la limite de la suite $u_n$

On a : $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n \Leftrightarrow |u_n-\alpha| = \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$(en appliquant la limite à chaque membre de l'égalité), on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-\alpha| = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{e^2}\right)^n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n-\alpha = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

d-Déterminons un entier $p$ pour le quel on est sûr d'avoir $\left|u_p-\alpha\right| \leq 10^{-3}$.

On a : $\left(\frac{3}{e^2}\right)^p \leq 10^{-3} \Leftrightarrow p \geq \frac{-3ln10}{ln\left(\frac{3}{e^2}\right)} \Leftrightarrow p \geq 7{,}66.$ donc $p=8.$

Calculons $u_p$ à $10^{-3}$ près : on a $u_8 = 1.200.$