

Fonction Exponentielle -Fonction puissance

OBJECTIFS :

Ce terme vise à :

- Définir et étudier les fonctions exponentielles et puissances ;
- Mettre en place les primitives de fonctions de la forme $u' e^u$ et $u' u^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$).

Commentaires

Les fonctions exponentielles et les fonctions puissances complètent les fonctions étudiées en Terminale. Leurs champs d'application est vaste on les retrouve aussi bien en biologie qu'en science physique, notamment pour résoudre les équations différentielles.

Volume horaire : 10 heures

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"> • Fonction exponentielle népérienne : <ul style="list-style-type: none"> - définitions, notation, propriétés, représentation graphique ; - limite de référence ; - primitive de $u' x e^u$. • Définition de la fonction exponentielle de base a ($a \in \mathbb{R}^{*+} - \{-1\}$). • Définition de la fonction puissance d'exposant réel non nul. • Primitive de $u' x u^m$ ($m \in \mathbb{R} - \{-1\}$) • Croissance comparée des fonctions logarithme népérien, exponentielle et puissances. • Dérivées de fonctions du type expo, u^α ($\alpha \in \mathbb{R}^*$). 	<ul style="list-style-type: none"> • Etant donnée une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne ou une fonction puissance, l'étudier et la Représente graphiquement. • Résous des équations ou inéquations faisant intervenir des fonctions exponentielles. • Détermine les primitives d'une fonction du type : <ul style="list-style-type: none"> - $u' x u^m$ ($m \in \mathbb{R} - \{-1\}$) ; - $u' x e^u$. • Utilise les limites sur la croissance comparée pour Calcule d'autres limites.

Remarques et suggestions

La fonction exponentielle népérienne est définie comme la bijection réciproque de la fonction \ln . Ses propriétés se déduisent naturellement de celles de la fonction \ln .

La notation $\exp(x) = e^x$ et pour tout x appartenant à \mathbb{R} est à la généralisation de $\exp(r) = e^r$ pour tout r appartenant à \mathbb{Q} , qu'on peut justifier.

L'étude des fonctions exponentielles de base a et des fonctions puissances découlent directement de l'étude de la fonction exponentielle népérienne.

On habituera les élèves à retrouver les limites et les dérivées des fonctions exponentielles de base a et puissances à partir des définitions de ces fonctions.

L'étude générale des fonctions \exp_a n'est pas à traiter de manière théorique mais pourra être abordé sur quelques exemples ($0 < a < 1$ et $a > 1$).

Il en est de même pour les fonctions $x \mapsto x^\alpha$. Ce sera l'occasion d'étudier des cas correspondant à des valeurs variées de α et de faire le lien avec les notations $\sqrt[n]{x}$ et $x^{p/q}$.

Les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ sont définies sur $]0 ; +\infty[$ mais, pour certaines valeurs de α ($\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, etc.), elles peuvent être définies sur un ensemble contenant $]0 ; +\infty[$ (par exemple \mathbb{R} , \mathbb{R}^* ou $[0 ; +\infty[$).

1- Définition :

La fonction exponentielle noté « **exp** x » ou « **e^x** » est la fonction réciproque de la fonction $\ln x$ définie sur $\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

2- Ensemble de définition de la fonction exponentielle :

Si $f(x) = e^x$ alors $Df = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

NB :

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ (Car la fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme Népérien. Elle prend ces valeurs dans \mathbb{R}_+^*).

3- Propriétés remarquables :

$$P_1 : e^{a \times b} = (e^a)^b$$

$$P_2 : e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$P_3 : e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$P_4 : e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$P_5 : (e^a)^n = e^{na}$$

$$P_6 : e^{lna} = lne^a = a$$

$$P_7 : e^0 = 1 \text{ et } e^1 = e$$

$$P_8 : lne = e^{ln1} = 1$$

$$P_9 : e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

$$P_{10} : e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b \text{ et } e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$$

$$P_{11} : e^a = b \Leftrightarrow a = \ln b$$

4- Limites remarquables :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{et pour } a > 0, \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{\ln x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$$

$$x \rightarrow 0 \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

5- Dérivées remarquables :

- Si $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- Si $f(x) = e^{(ax+b)} \Rightarrow f'(x) = ae^{(ax+b)}$
- Si $f(x) = e^{[u(x)]} \Rightarrow f'(x) = u'(x)e^{[u(x)]}$

6- Primitives remarquables :

- Si $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + K$
- Si $f(x) = e^{(ax+b)} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a}e^{(ax+b)} + K$
- Si $f(x) = u'(x) e^{[u(x)]} \Rightarrow F(x) = e^{[u(x)]} + K$

7- Fonctions puissances :

a) Définition :

On appelle fonction puissance toute fonction f_a définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f_a(x) = a^x = e^{x \ln a}, \text{ où } a \text{ est un nombre réel positif et différent de } 1.$$

b) Etude des fonctions puissances :

- **Dérivée :** $f'_a(x) = (e^{x \ln a})' = \ln a e^{x \ln a}$, d'où : $f'_a(x) = a^x \ln a$
- **Tableaux de variation :**

Les tableaux de variations suivants résument l'étude de f_a suivant les valeurs de a .

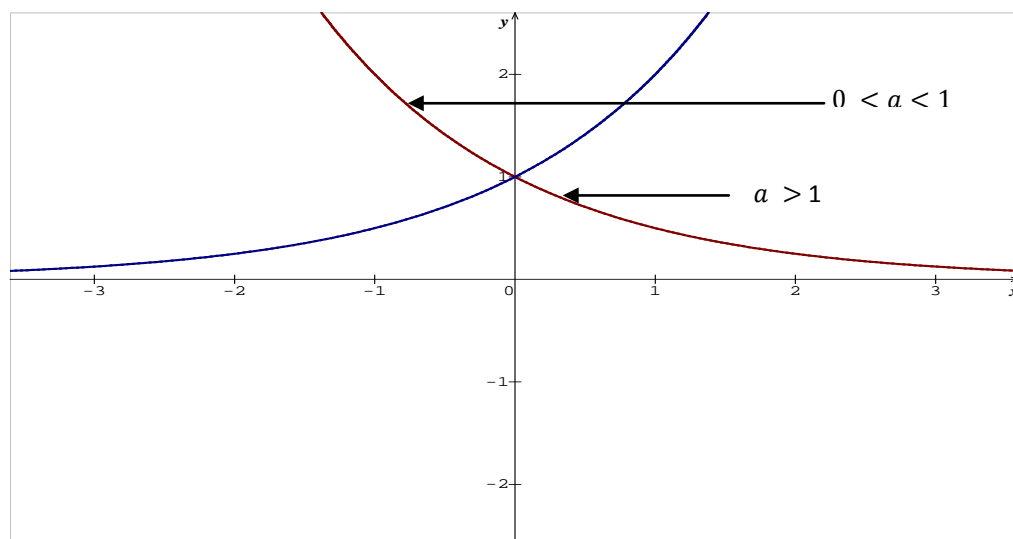
1^{er} cas : Si $0 < a < 1$ alors on a : le tableau suivant

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_a'(x)$	-	
$f_a(x)$	$+\infty \searrow 0$	

2^{ème} cas : Si $a > 1$ alors on a : le tableau suivant

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_a'(x)$	+	
$f_a(x)$	$0 \nearrow +\infty$	

- Représentations graphiques:



EXERCICES

Propriétés de la fonction exponentielle

- 1** 1) En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, simplifie les expressions suivantes :

$$A = e^{\ln 3} - e^{-\ln 3} + e^{\frac{1}{3}\ln 8} - e^{-\ln \frac{1}{4}}; \quad B = e^{2\ln 5} - e^{-\ln 3} + \ln(e^{\sqrt{2}} \times e^{\sqrt{8}})$$

$$C = -2\ln e^3 + \ln\sqrt{e} - \ln(\ln e) + 3e^{\ln(-\ln \frac{1}{e})}; \quad D = e^{\ln\sqrt{e\sqrt{e}}}$$

- 2) En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résous dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $e^x = 3$; b) $e^{-x} = 2$; c) $e^{2x} = \frac{1}{2}$; d) $e^{3x+1} = e^{-x+3}$; e) $e^{2-3x} = e^{-x^2}$

f) $3^x = 4$; g) $4^{-x} = 3$; h) $7^{5x} = -3$; i) $\frac{e^x + 1}{e^x - 4} = \frac{1}{2}$; j) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$; k) $\frac{e^{2x}}{e^x + 1} = \frac{1}{e^{-x}}$

l) $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$

- 3) En utilisant les propriétés logarithmiques, résous dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

a) $e^{-2x} \geq 4$; b) $e^{-x} \leq 6$; c) $e^{2x} > \frac{1}{2}$; d) $e^{3x+1} < e^{-x+3}$; e) $e^{2-3x} \geq e^{-x^2}$

f) $3^x < 4$; l) $e^{2x} + 5e^x + 4 < 0$

- 2** Soit la fonction polynôme définie par $f(x) = x^3 - 4x^2 - 29x - 24$

- 1) Calcule $f(-1)$ et $f(-3)$ puis en déduis une factorisation de f sous forme d'un produit de 3 facteurs du premier degré.

- 2) Résous l'équation $f(x) = 0$

- 3) En déduis la résolution de l'équation : $e^{2x} - 4e^x - 29 - 24e^{-x} = 0$ et de l'équation :

$$2^{3x} - 4 \times 2^{2x} - 29 \times 2^x - 24 = 0$$

- 3** En utilisant les propriétés logarithmiques, résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivantes :

a- $\begin{cases} 2e^x - e^y = 15 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases}$; b- $\begin{cases} e^x \times e^y = 8 \\ e^x + e^y = 6 \end{cases}$; c- $\begin{cases} 3e^x - 2\ln y = 13 \\ 5e^x + 3\ln y = 9 \end{cases}$

d- $\begin{cases} 2^x - 2^{2-y} = 0 \\ 2^x - 2^{2+y} = 0 \end{cases}$; e- $\begin{cases} 3^x \times 3^{2y-1} = 1 \\ 3^{x+2} \times 3^y = 3 \end{cases}$

Application des limites de la fonction exponentielle

4 Calcule la limite des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définitions :

1) $f(x) = e^{-x^2+2x-3}$; 2) $f(x) = e^{\sqrt{x-3}}$; 3) $f(x) = e^{\frac{3}{-x+2}}$

4) $f(x) = \frac{e^{x^2+2x}}{x+2}$; 5) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{-1+e^{2x-3}}$; 6) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{2x}-5e^x+6}$

7) $f(x) = \frac{e^x}{(x-1)^2}$; 8) $f(x) = \ln(e^x - 1)$; 9) $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$

Dérivées et primitives de la fonction exponentielle

5 1) Calcule la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{-x^2-x-1}$; b) $f(x) = e^{\sqrt{x^2-3}}$; c) $f(x) = e^{\frac{3}{x-1}}$

d) $f(x) = \frac{-1}{e^{x^2+2x}}$; e) $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{e^{x-3}}$; f) $f(x) = \frac{-x^2}{e^{2x}-5e^x+6}$

g) $f(x) = \ln[\ln(e^x - 1)]$; h) $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$

2) Calcule la primitive des fonctions suivantes :

a- $f(x) = e^{2x-3}$; b- $f(x) = \frac{3e^{2x-3}}{3-e^{2x-3}}$; c- $f(x) = (-x+1)e^{x^2-2x+5}$

d- $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; e- $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+3}}e^{\sqrt{2x+3}}$; f- $f(x) = \frac{5}{e^{2x-3}}$

g- $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; h- $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$; i- $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$; j) $f(x) = 2^x$

6 1) Détermine les réels a et b pour que la fonction F soit une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f .

a) $f(x) = (2x+1)e^x$ et $F(x) = (ax+b)e^x$

b) $f(x) = (x+1)e^{\frac{-x}{2}}$ et $F(x) = (ax+b)e^{\frac{-x}{2}}$

2) Détermine les réels a ; b et c pour que la fonction F soit une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f

a) $f(x) = (x^2-1)e^{2x}$ et $F(x) = (ax^2+bx+c)e^{2x}$

b) $f(x) = (x^2-3x+1)e^{-3x}$ et $F(x) = (ax^2+bx+c)e^{-3x}$

Fonction exponentielle dans les cas pratiques

7 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 8(e^{-x} - e^{-2x})$

1) a- Démontre que pour tout réel x , on a : $f(x) = \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}}$.

b- Démontre que pour tout réel x , on a : $f'(x) = \frac{8(2 - e^x)}{e^{2x}}$. En déduis le signe de $f'(x)$.

c- Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

d- Dresse le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.

e- Représente la fonction f dans un repère orthogonal.

(Unités: 4 cm sur ox et 2 cm sur oy)

2) On injecte à l'instant $t = 0$ une substance dans le sang d'un animal. A l'instant t où t est positif et exprimer en seconde, la concentration g de la substance injectée est :

$g(t) = 8(e^{-t} - e^{-2t})$. On rappelle que la « **Concentration** » est le rapport entre la quantité du liquide et la quantité du sang qui le contient.

a- En utilisant les résultats de la question 1), Donne le tableau de variation de la concentration du sang en fonction du temps t .

b- Au bout de combien de temps la concentration est elle maximale ? On Donnera une valeur approchée par défaut de ce résultat en centime de secondes.

c- Détermine les instants t_1 et t_2 pour les quels la concentration est égale au quart de sa valeur maximale.

8 On étudie l'évolution d'une colonie de bactéries placée dans une pétrie. Le nombre da bactéries en centaines est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{4e^t - 1}{e^t + 2}$ où t représente le temps en heures. On suppose que l'on peut compter le nombre de bactéries à l'unité près grâce à un compteur de radioactivité.

1) a) Calcule $f(0)$ et interpréter ce résultat.

b) Montre que $f(t) = 4 - \frac{9}{e^t + 2}$. En déduis la limite de f en $+\infty$

On appelle cette valeur, la saturation. Que peut-on en conclure pour la courbe (C) de f ?

c) L'équation $f(t) = 4$ admet-elle des solutions ? Justifier la réponse.

2) Montre que la dérivée f' de f vérifie $f'(t) = \frac{9e^t}{(e^t + 2)^2}$. En déduis le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$

3) Soit (T) la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe (C). Détermine une équation de (T).

4) Recopie et complète le tableau ci-dessous en arrondissant à 10^{-2} près

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(t)$								

5) Trace (C), (T) ainsi que toutes les asymptotes éventuelles à (C).

6) Calcule à la minute près l'instant t_0 où le nombre de bactéries sera égal à 200

7) Détermine le temps au bout du quel la population de cette colonie serait égale à 80% de sa saturation

9 Partie A

A l'instant $t = 0$ on injecte dans le sang d'un patient une dose de 3ml d'un médicament. On veut étudier le processus d'élimination du produit au cours des douze heures suivant l'injection. La quantité de médicament présente dans le sang en ml en fonction du temps t en heures est $f(t)$, où f est définie sur $[0 ; 12]$ par : $f(t) = 3e^{-0,1t}$.

1) Déterminez $f'(t)$ et justifier que pour tout $t \in [0 ; 12]$, $f'(t) < 0$.

2) Dressez le tableau de variation de f sur $[0 ; 12]$.

3) Calcule $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$; $f(6)$ et $f(8)$. Que représente chacune de ces valeurs ?

4) Trace la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques (1cm sur (Ox) et 4 cm sur (Oy)).

Partie B

Le médicament est inefficace lorsque la quantité contenue dans le sang est inférieure à **1,25ml**, ainsi on procède à une seconde injection

1°/ Au bout de combien de temps on procèdera à la seconde injection ?
(On Déterminera ce temps graphiquement et par calcul).

2°/ On rappelle que le seuil de toxicité du médicament est de **4,5ml**.

Le patient court-il un risque d'intoxication par le médicament à la seconde injection ?

Problèmes

10 On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A : Etude de la fonction f et construction de la courbe (C).

1) Etudie la limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $+\infty$

(on pourra écrire $xe^{x-1} = \frac{1}{e} xe^x$).

- 2) Démontre que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$ et préciser la position de la courbe C par rapport à la droite Δ .
- 3) a) Calcule la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f .
- b) Dresse le tableau de variation de la fonction f' en précisant la limite de la fonction f' en $-\infty$.
- c) Calcule $f'(1)$ et en déduis le signe de $f'(x)$ pour tout réel x .
- d) Dresse le tableau de variation de la fonction f .
- 4) Soit I l'intervalle $[1,9 ; 2]$. Démontre que, sur I , l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique, α .
- 5) Trace la droite Δ et la courbe C (unité graphique : 2 cm).

Partie B : Recherche d'une approximation de α :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par : $g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

- 1) Démontre, sur I , l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.
- 2) Etudie le sens de variation de la fonction g sur I et Démontre que, pour tout x appartenant à I , $g(x)$ appartient à I .
- 3) Démontre que, pour tout x de l'intervalle I , $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$
- 4) Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout n de \mathbb{N} ,
 $u_{n+1} = g(u_n)$
 - a) Démontre que, pour tout n de \mathbb{N} , $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha|$
 - b) En déduis, en raisonnant par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} , $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^n$ puis

Donne la limite de la suite u_n en $+\infty$

Partie C : Calcul d'aire :

- 1) En intégrant par parties, Calcule l'intégrale $J = \int_1^\alpha x e^{x-1} dx$
- 2) a) Détermine, en unités d'aire, l'aire A de la portion de plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = \alpha$.
- b) Démontre qu'on peut écrire $A = (\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$.

11 Partie A : Résolution de l'équation différentielle $(E_1) : y' - 2y = x e^x$

- 1) Résous l'équation différentielle $(E_2) : y' - 2y = 0$ où y désigne une fonction dérivable sur \mathbb{R} .
- 2) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = (ax + b)e^x$.

- a) Détermine a et b pour que u soit solution de l'équation (E_1) .
 - b) Montre qu'une fonction v est solution de l'équation (E_1) si et seulement si $u - v$ est solution de (E_2) .
 - c) En déduis l'ensemble des solutions de (E_1) .
- 3) Détermine la solution de l'équation (E_1) qui s'annule en 0.

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

- 1) Détermine la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.
- 2) Etudie le sens de variation de g , puis Dresse son tableau de variation.
- 3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
 - a) Vérifie que 0 est l'une de ces solutions.
 - b) L'autre solution est appelée α . Montre que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.
- 4) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x .

Partie C : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$

- 1) Détermine la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur).
- 2) Calcule $f'(x)$ et Montre que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Etudie le sens de variation de f .
- 3) Montre que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α est défini dans la **partie B**. En déduis un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$).
- 4) Etablie le tableau de variation de f .
- 5) Trace la courbe (C), représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (Unité graphique 2 cm).

Partie D : Calcul d'aire

- 1) Soit m un réel négatif, Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x)dx$
- 2) a) Calcule $\int_m^0 xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
b) En déduis $\int_m^0 f(x)dx$
- 3) Calcule la limite de $\int_m^0 f(x)dx$, lorsque m tend vers $-\infty$.

12 L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résoudre une équation différentielle dont elle est solution.

A) Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{e^x}{1 + 2e^x} - \ln(1 + 2e^x)$

- 1) Calcule $g'(x)$ et Montre que ce nombre est strictement négatif pour tout x de \mathbb{R} .
- 2) Détermine les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
- 3) Dresse le tableau de variation de g .
- 4) Donne le signe de $g(x)$.

B) Etude d'une fonction et calcul d'une aire.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$.

On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal

(unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

- 1) Calcule $f'(x)$ et Montre que pour tout réel x , $f'(x) = 2e^{-2x} g(x)$.
- 2) a) Détermine la limite de f en $-\infty$.
b) Détermine la limite de f en $+\infty$.

On pourra remarquer que : si on pose $X = 1 + 2e^x$, $f(x)$ s'écrit $4 \frac{X}{(X-1)^2} \times \frac{\ln X}{X}$

Dresse le tableau de variation de f .

- 3) Trace C .
- 4) Soit α un réel strictement positif.

a) Calcule la valeur de l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^x}{1+2e^x} dx$

b) En déduis, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : $J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$ puis

Donne une interprétation graphique de $J(\alpha)$.

C) Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

- 1) Vérifie que la fonction f étudiée dans la partie B est solution de (E).
- 2) Montre qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.
- 3) Résous (E') et en déduis les solutions de (E).

13 Partie A :

Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x + x - 5$

- 1) Etudie le sens de variation de g .
(On ne demande pas de Détermine les limites de g , ni de construire sa courbe).
- 2) a) Calcule $g(0)$ et $g(2)$
- c) Démontre que l'équation : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + x - 5 = 0$ admet une solution unique α et que :
 $1,30 < \alpha < 1,31$

Partie B :

Soit la fonction numérique f définie sur $] -\infty ; 5[$ par : $f(x) = \ln(5 - x)$.

- 1) Etudie le sens de variation de f . Préciser les limites de f en 5 et en $-\infty$.
- 2) Prouve que $f(\alpha) = \alpha$
- 3) a) Démontre que $\forall x \in [0 ; 3]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
 b) En déduis que $\forall x \in [0 ; 3]$, on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$
 c) Démontre que si $0 \leq x \leq 3$, alors $0 \leq f(x) \leq 3$.
- 4) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , d'unité graphique (3 cm), on désigne son (C) la représentation graphique de la fonction f .
 a) Trace la courbe (C), puis hachurer la partie du plan formée des points de coordonnées (x, y) tel que : $\begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ on notera (S) cette partie.
 b) En remarquant que, $\forall x \neq 5$, $\frac{x}{x-5} = 1 + \frac{5}{x-5}$; Montre que $\int_{\alpha}^4 \frac{x}{x-5} dx = 4 - 6\alpha$
 c) Prouve que l'aire A de la partie (S) en cm^2 est donnée par $A = -\alpha^2 + 6\alpha - 4$.
 (On Utilisea une intégration par partie).

14 On considère la fonction f , définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

A) Etude de la fonction f et tracé de (C)

- 1) a) Calcule la limite de cette fonction lorsque x tend vers $+\infty$.
 b) Calcule la limite de cette fonction lorsque x tend vers -1 . Que peut – on en déduis pour la courbe (C) ?
- 2) Calcule $f'(x)$ et Montre que son signe est celui de $\frac{x-1}{x+1}$
- 3) Dresse le tableau de variation de f .
- 4) Trace la courbe (C), les droites d'équations respectives $x = -1$ et $y = 1$, ainsi que la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0.

(Unité graphique : 4 cm)

- 5) Montre que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[1; 10]$.

Utilise le graphique précédent pour Donner deux nombres entiers consécutifs a et b tels que α appartient à l'intervalle $[a ; b]$.

B) Calcul d'une aire

- 1) Soit g la fonction définie sur $] -1 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x+1}$
 - a) Etudie le sens de variation de g dans l'intervalle $[1 ; 2]$.
 - b) Montre que, pour tout x appartenant à $[1 ; 2]$, on a : $1 \leq g(x) \leq 2,5$.
 - c) En déduis un encadrement de $A_1 = \int_1^2 g(x)dx$
- 2) Soit A_2 l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$, la courbe (C) et l'axe des abscisses.

A l'aide d'une intégration par parties, exprimer A_2 en fonction de A_1 et en déduis un encadrement de A_2 .

C) Approximation d'un nombre à l'aide d'une suite

Pour cette partie, on Utilise sans justification le fait que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution β et que celle – ci est élément de l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$

Soit h la fonction définie sur $] -1 ; +\infty[$ par $h(x) = \frac{e^x}{(1+x)^3}$

- 1) a) Vérifie que, pour tout x appartenant à $] -1 ; +\infty[$, on a : $f'(x) = f(x) - 2h(x)$.
a) Calcule $h'(x)$.
b) En utilisant la question a), Calcule $f''(x)$. En déduis le sens de variation de f' dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$
- 2) En déduis que, pour tout x appartenant $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ à, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$
- 3) On définit la suite (u_n) , pour tout nombre entier naturel n , par :
 $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour $n \geq 0$

On admet que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

- a) Montre que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$
- b) Montre par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$
- c) En déduis une valeur approchée numérique de β à 10^{-3} près.

15 Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité 5 cm).

Partie A :

On considère la fonction f_1 définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_1'(x) = xe^{-x^2}$ et on appelle C_1 sa courbe représentative.

- 1) Montre que pour tout réel positif x , $f_1(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}$. En déduis le sens de variation de f_1 .
- 2) Calcule la limite de f_1 en $+\infty$ (on pourra poser $u = x^2$). Interpréter graphiquement ce résultat.
- 3) Dresse le tableau de variation de f_1 .
- 4) On appelle Δ la droite d'équation $y = x$. Détermine la position de C_1 par rapport à Δ .
- 5) Trace C_1 et Δ .

Partie B :

On considère la fonction f_3 définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_3(x) = x^3 e^{-x^2}$ et on appelle C_3 sa courbe représentative.

- 1) Montre que pour tout réel x positif, $f'_3(x)$ a même signe que $3 - 2x^2$. En déduis le sens de variation de f_3 .
- 2) Détermine les positions relatives de C_1 et C_3 .
- 3) Trace C_3 dans le même repère que C_1 .
(on admettra que C_3 a la même asymptote que C_1 en $+\infty$).
- 4) On appelle D la droite d'équation $y = 1$. Soit A_1 l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe C_1 , les deux axes de coordonnées et la droite D et soit A_3 l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe C_3 , les deux axes de coordonnées et la droite D .
 - a) Calcule A_1 .
 - b) A l'aide d'une intégration par parties, Montre que $A_3 = -\frac{1}{2e} + A_1$

Partie C :

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f_n définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$.

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

- 1) Montre que pour tout entier $n \geq 1$, f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$. On note α_n ce maximum.
- 2) On appelle S_n le point de (C_n) d'abscisse $\sqrt{\frac{n}{2}}$. Montre que, pour tout n , (C_n) passe par S_2 .
Placer S_1, S_2, S_3 sur la figure.
- 3) Soit la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^{\frac{x}{2}[-1+\ln(\frac{x}{2})]}$
 - a) Etudie le sens de variation de g .
 - b) Montre que pour tout entier $n \geq 1$, $\alpha_n = g(n)$. En déduis que tout point S_n , on a une ordonnée supérieure à celle de S_2 .

- 16** Le problème est composé de l'étude d'une suite de fonctions dépendant d'un paramètre, puis de la recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation du type : $f(x) = x$.

Partie A :

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n la fonction numérique de la variable réelle définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).

- 1) Détermine la fonction dérivée f'_n de f_n et donne l'expression de f'_n en fonction de f_n et de f_{n+1} .
- 2) Etudie les variations de f_n et ses limites éventuelles en $-\infty$; -1 et $+\infty$. (On distinguera les cas où n est pair et n est impair.)
- 3) Démontre que toutes les courbes (C_n) passent par un même point.
- 4) Détermine la limite de $\frac{f_n(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour les courbes (C_n) ? Trace sur deux figures distinctes les courbes (C_1) et (C_2) .

Partie B :

Pour tout entier n strictement positif, on note : $I_n = \int_0^1 f_n dx$.

- 1) Démontre que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle converge.
- 2) Détermine en utilisant la relation de la question A).1), une relation entre I_n et I_{n+1} .

Partie C :

Dans cette partie, $n = 2$.

- 1) Démontre que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

Le but de cette partie est de Détermine une valeur approchée de α .

- 2) Etudie les variations de f'_2 dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et en déduis que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; on a : $0 \leq |f'_2(x)| \leq 0,25$
- 3) Soit (u_n) , $n \in \mathbb{N}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f_2(u_n) \end{cases}$

a- Démontre, en utilisant la question C.2., que pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$$

b- En déduis que pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et que la suite (u_n) , $n \in \mathbb{N}$ converge vers α .

17

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$

On note (C) sa courbe dans un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique (4 cm).

Partie A : (Etude d'une fonction auxiliaire).

On définit la fonction g sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$

1) Etudie les variations de g , Dresse son tableau de variation. Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et que $1,14 < \alpha < 1,15$.

2) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : (Etude et tracée de f).

1) Montre que $\forall x \in [0 ; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$. En déduis le sens de variation de f .

2) a) Montre que $\forall x \in [0 ; +\infty[$; $f(x) \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

b) En déduis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

$$x \rightarrow +\infty$$

3) Montre que $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{\alpha + 1}$ puis Détermine l'équation de la tangente au point $x_0 = 0$

4) Montre que $f(x) - x = \frac{(x+1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1}$. Etudie les variations de la fonction

$$T(x) = e^x - xe^x - 1.$$

Puis en déduis la position de (C) par rapport à (T). Trace (C) et (T).

Partie C :

- 1) Détermine une primitive F de f en utilisant la question 2) a) de la partie B.
- 2) Calcule en cm^2 l'aire A du domaine plan limité par (C) , la tangente (T) et droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$

18 Partie A :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (2 + \cos x)e^{1-x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Montre que, pour tout x de \mathbb{R} : $f(x) > 0$.
- 2) a- Montre que, pour tout x de \mathbb{R} : $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$
 b- En déduis que, pour tout x de \mathbb{R} : $2 + \cos x + \sin x > 0$
 c- Montre que f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .
- 3) a- Montre que, pour tout x de \mathbb{R} : $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$.
 b- En déduis les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 c- Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.
- 4) a- Montre que, sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α .
 b- Donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}
- 5) Représente la courbe (C) sur $[0 ; 4]$

Partie B :

On veut Calculer l'aire, A , exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

- 1) Montre que : $A = 2e - 2 + \int_0^1 e^{1-t} \cos t dt$
- 2) On pose : $I = \int_0^1 e^{1-t} \cos t dt$ et $J = \int_0^1 e^{1-t} \sin t dt$
 a- A l'aide de deux intégrations par parties, Montre que :

$$I = -\cos 1 + e - J \text{ et } J = -\sin 1 + I.$$

b- En déduis la valeur de I.

3) Détermine la valeur exacte de A en unités d'aire, puis Donne une valeur approchée de A à 10^{-3} près par défaut.

Partie C :

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.

- 1) a) Montre que la fonction h admet des primitives sur \mathbb{R} .
- b) Calcule la primitive H de la fonction h , qui prend en 0 la valeur $(1 + \ln 3)$.

2) a) Détermine $\ln(f(x))$ pour tout x de \mathbb{R} .

b) Etudie le sens de variation de la fonction H .

c) Détermine le tableau de variations de H .

3) On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur \mathbb{R} par

$x \rightarrow 1 - x + \ln(2 + \cos x)$. (On ne demande pas de Représente Γ). On appelle Δ la droite d'équation $y = -x + 1$.

- a) Etudie la position relative de Γ et de Δ .
- b) Détermine les abscisses des points communs à Γ et Δ .
- 1) a) Etablie une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.
- b) Etudie la position relative de Γ et T .

5) Montre que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on Donnera des équations.

19 Partie A :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{10e^x}{e^x + 4}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le repère

$(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (Unité graphique 1 cm).

1) a- Détermine la limite de f en $-\infty$.

En écrivant $f(x) = 10 - \frac{40}{e^x + 4}$; Détermine la limite de f en $+\infty$. Puis en déduis l'équation des asymptotes à la courbe (C)

- b- Calcule la dérivée f' de la fonction f puis Dresse le tableau de variation de f .
- 2) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $\ln 4$.
- 3) Trace sur un même graphique la courbe (C) ; ces asymptotes et la tangente (T).

Partie B :

Une entreprise fabrique un certain produit P. On appelle x le nombre de tonnes de produit fabriquées.

On note $C(x)$ leur coût total de fabrication, exprimé en milliers d'euros.

La fonction coût marginal, C' est la dérivée de la fonction C .

Pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, on a $C'(x) = f(x)$; où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.

De plus , on suppose qu'il n'ya pas de charges fixes, donc que $C(0) = 0$.

1) a- Montre que le coût total est donnée par $C(x) = \int_0^x f(t)dt$.

b- Exprimer $C(x)$ en fonction de x .

c- Qu'elle est le coût total de 5 tonnes de ce produit P ? On Donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à la dizaine d'euros près.

2) On appelle $C_m(x)$, le coût moyen défini, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ par $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$

a- Exprimer $C_m(x)$, en fonction de x .

b- Vérifie que, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$; $C_m(x) = 10 + \frac{10 \ln(1 + 4e^{-x})}{x} - \frac{10 \ln 5}{x}$

c- En déduis la limite de $C_m(x)$ en $+\infty$.

20

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, unité graphique : 2 cm.

Partie A :

Soit g la fonction numérique définie sur $]-\pi ; 0[$ par $g(x) = \cos x^2 x + \cos x - 1$.

- 1) a) Montrer que g est dérivable sur $]-\pi ; 0[$ et que $g'(x) = -(1 + 2\cos x)\sin x$.
- b) En déduire que $g'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-\pi ; -\frac{2\pi}{3}]$ et que $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-\frac{2\pi}{3} ; 0[$.
- c) Dresser le tableau de variation de g .

- 2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β sur $]-\pi; 0[$ et que $\beta \in]-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}[$.
- b) En déduire le signe de g sur $]-\pi; 0[$

Partie B :

Soit f la fonction numérique définie sur $]-\pi; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2\sin(2x)}{1+\cos x} + \frac{1}{2} & \text{si } x \in]-\pi; 0] \\ \text{et} \\ f(x) = 2 - \frac{3}{e^{3x}+1} & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

On note (Cf) la courbe représentative de f .

- 1) Etudier la continuité de f en 0.
- 2) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis en déduire une interprétation géométrique des résultats obtenus.
- 3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- b) Montrer que pour tout $x \in]-\pi; 0[$, on a : $f(x) = \frac{4(1-\cos x)\sin x \cos x}{1-\cos^2 x} + \frac{1}{2}$ en déduire que $\lim_{x \rightarrow -\pi} f(x) = +\infty$

$x \rightarrow -\pi$

- c) En déduire les asymptotes de la courbe (Cf) .
- 4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$ puis en déduire le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
- b) Montrer que pour tout $x \in]-\pi; 0[$, on a : $f'(x) = \frac{4g(x)}{1+\cos x}$ puis en déduire le sens de variation de f sur $]-\pi; 0[$.
- c) Dresser le tableau de variation de f sur $]-\pi; +\infty[$.

- 5) Construire la courbe (Cf) , ses asymptotes et ses demi-tangentes au point d'abscisse 0.

Partie C :

On admet que tout $x \in [1,5; 2]$, on a : $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ (**R**).

- 1) Soit h la fonction numérique définie sur $[1,5; 2]$ par : $h(x) = f(x) - x$.
Etudier les variations de h puis en déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [1,5; 2]$.
 - 2) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1,5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,5; 2]$. (On pourra utiliser la relation (**R**))

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha|$ et que :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

c) En déduire par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

e) Déterminer un entier p tel que pour $n \geq p$ on ait : $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ puis donné à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de u_p à 10^{-3} près.

Solutions

Propriétés de la fonction exponentielle

1 1) En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, simplifions les expressions suivantes :

$$A = e^{\ln 3} - e^{-\ln 3} + e^{\frac{1}{3}\ln 8} - e^{-\ln \frac{1}{4}} \Rightarrow A = e^{\ln 3} - \frac{1}{e^{\ln 3}} + e^{\frac{1}{3}\ln 2^3} - e^{\ln 4}$$

$$\Rightarrow A = e^{\ln 3} - \frac{1}{e^{\ln 3}} + e^{\ln 2} - e^{\ln 4} = 3 - \frac{1}{3} + 2 - 4 = \frac{2}{3} \Rightarrow A = \frac{2}{3}$$

$$B = e^{2\ln 5} - e^{-\ln 3} + \ln(e^{\sqrt{2}} \times e^{\sqrt{8}}) \Rightarrow B = e^{\ln 5^2} - \frac{1}{e^{\ln 3}} + \ln(e^{\sqrt{2}} \times e^{2\sqrt{2}})$$

$$= e^{\ln 25} - \frac{1}{e^{\ln 3}} + \ln e^{3\sqrt{2}} = 25 - \frac{1}{3} + 3\sqrt{2} = \frac{74 + 9\sqrt{2}}{3} \Rightarrow B = \frac{74 + 9\sqrt{2}}{3}$$

$$C = -2\ln e^3 + \ln \sqrt{e} - \ln(\ln e) + 3e^{\ln(-\ln \frac{1}{e})} \Rightarrow C = -2\ln e^3 + \ln e^{\frac{1}{2}} - \ln(1) + 3e^{\ln(\ln e)}$$

$$= -2\ln e^3 + \ln e^{\frac{1}{2}} - \ln(1) + 3e^{\ln(1)} = -6 + \frac{1}{2} + 3 = -\frac{5}{2} \Rightarrow C = -\frac{5}{2}$$

$$D = e^{\ln \sqrt{e\sqrt{e}}} \Rightarrow D = e^{\ln e^{\frac{3}{4}}} = \frac{3}{4} \Rightarrow D = \frac{3}{4}$$

2) En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résolvons dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $e^x = 3 \Leftrightarrow \ln e^x = \ln 3 \Rightarrow x = \ln 3$. Alors $S = \{\ln 3\}$

b) $e^{-x} = 2 \Leftrightarrow \ln e^{-x} = \ln 2 \Rightarrow -x = \ln 2 \Rightarrow x = -\ln 2$. Alors $S = \{-\ln 2\}$

c) $e^{2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln e^{2x} = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = -\ln 2 \Rightarrow x = -\frac{\ln 2}{2}$. Alors $S = \left\{-\frac{\ln 2}{2}\right\}$

d) $e^{3x+1} = e^{-x+3} \Leftrightarrow 3x+1 = -x+3 \Leftrightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Alors $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

e) $e^{2-3x} = e^{-x^2} \Leftrightarrow 2-3x = -x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 2$.

Alors $S = \{1; 2\}$

f) $3^x = 4 \Leftrightarrow e^{x \ln 3} = 4 \Leftrightarrow x \ln 3 = \ln 4 \Rightarrow x = \frac{\ln 4}{\ln 3}$. Alors $S = \left\{ \frac{\ln 4}{\ln 3} \right\}$

g) $4^{-x} = 3 \Leftrightarrow e^{-x \ln 4} = 3 \Leftrightarrow -x \ln 4 = \ln 3 \Rightarrow x = -\frac{\ln 3}{\ln 4}$. Alors $S = \left\{ -\frac{\ln 3}{\ln 4} \right\}$

h) $7^{5x} = -3 \Leftrightarrow e^{5x \ln 7} = -3$ "Impossible". Alors $S = \{ \emptyset \}$

i) $\frac{e^x + 1}{e^x - 4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2e^x + 2 = e^x - 4 \Leftrightarrow e^x = -6$ "Impossible". Alors $S = \{ \emptyset \}$

j) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = e^x + e^{-x} \Leftrightarrow 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 0$ Impossible" $\Rightarrow S = \{ \emptyset \}$

k) $\frac{e^{2x}}{e^x + 1} = \frac{1}{e^{-x}} \Leftrightarrow e^{2x} \times e^{-x} = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = e^x + 1 \Rightarrow 0 = 1$. Absurde $\Rightarrow S = \{ \emptyset \}$

l) $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$. Effectuons un changement de variable en posant $X = e^x$

Alors l'équation $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$ dévient : $X^2 + 3X - 4 = 0 \Rightarrow X_1 = 1 \text{ et } X_2 = -4$.

- Si $X_1 = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 = 0$.

- Si $X_2 = -4 \Leftrightarrow e^x = -4$ "Impossible".

$\Rightarrow S = \{ 0 \}$

3) En utilisant les propriétés logarithmiques, résolvons dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

a) $e^{-2x} \geq 4 \Leftrightarrow -2x \geq \ln 4 \Rightarrow x \leq \frac{-\ln 4}{2} \Rightarrow S = \left] -\infty; \frac{-\ln 4}{2} \right]$

b) $e^{-x} \leq 6 \Leftrightarrow -x \leq \ln 6 \Rightarrow x \geq -\ln 6 \Rightarrow S = [-\ln 6; +\infty[$

c) $e^{2x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x > \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x > -\ln 2 \Rightarrow x > \frac{-\ln 2}{2} \Rightarrow S = \left] \frac{-\ln 2}{2}; +\infty \right[$

d) $e^{3x+1} < e^{-x+3} \Leftrightarrow 3x+1 < -x+3 \Leftrightarrow 4x < 2 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \Rightarrow S = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[$

e) $e^{2-3x} \geq e^{-x^2} \Leftrightarrow 2-3x \geq -x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$. Posons $x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 2$. Alors $S =]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$

f) $3^x < 4 \Leftrightarrow e^{x \ln 3} < 4 \Leftrightarrow x \ln 3 < \ln 4 \Rightarrow x < \frac{\ln 4}{\ln 3} \Rightarrow S = \left] -\infty; \frac{\ln 4}{\ln 3} \right[$

g) $e^{2x} + 5e^x + 4 < 0$. Effectuons un changement de variable en posant $X = e^x$

Alors l'inéquation $e^{2x} + 5e^x + 4 < 0$ dévient : $X^2 + 5X + 4 < 0$. Posons $X^2 + 5X + 4 = 0$

$$\Rightarrow X_1 = -1 \text{ et } X_2 = -4.$$

- Si $X_1 = -1 \Leftrightarrow e^x = -1$ "Impossible".

- Si $X_2 = -4 \Leftrightarrow e^x = -4$ "Impossible".

$$\text{Alors } S = \{ \emptyset \}$$

2 Soit la fonction polynôme définie par $f(x) = x^3 - 4x^2 - 29x - 24$

1) Calculons $f(-1)$ et $f(-3)$

$$f(-1) = 0 \text{ et } f(-3) = 0$$

En déduisons une factorisation de f sous forme d'un produit de 3 facteurs du premier degré.

Ainsi la forme factorisée de $f(x)$ est $f(x) = (x + 1)(x + 3)(x - 8)$

2) Résolvons l'équation $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 3)(x - 8) = 0 \Rightarrow x = -1 ; x = -3 \text{ ou } x = 8$$

$$\Rightarrow S = \{-1 ; -3 ; 8\}$$

3) En déduisons la résolution des équations :

$$e^{2x} - 4e^x - 29 - 24e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x - 29 - \frac{24}{e^x} = 0 \Leftrightarrow e^{3x} - 4e^{2x} - 29e^x - 24 = 0$$

Effectuons un changement de variable en posant $X = e^x$

Alors l'équation $e^{3x} - 4e^{2x} - 29e^x - 24 = 0$ dévient : $X^3 - 4X^2 - 29X - 24 = 0$

D'après 2), on a : $X = -1 ; X = -3$ ou $X = 8$

- Si $X = -1 \Leftrightarrow e^x = -1$ impossible

- Si $X = -3 \Leftrightarrow e^x = -3$ impossible

- Si $X = 8 \Leftrightarrow e^x = 8 \Rightarrow x = \ln 8$

$$S = \{ \ln 8 \}$$

$$2^{3x} - 4 \times 2^{2x} - 29 \times 2^x - 24 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^3 - 4(2^x)^2 - 29 \times 2^x - 24 = 0. \text{ Posons } X = 2^x$$

$$\Rightarrow X^3 - 4X^2 - 29X - 24 = 0$$

D'après 2), on a : $X = -1$; $X = -3$ ou $X = 8$

- Si $X = -1 \Leftrightarrow 2^x = -1 \Leftrightarrow e^{x \ln 2} = -1$ impossible
- Si $X = -3 \Leftrightarrow 2^x = -3 \Leftrightarrow e^{x \ln 2} = -3$ impossible
- Si $X = 8 \Leftrightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow e^{x \ln 2} = 8 \Rightarrow x \ln 2 = \ln 8 \Leftrightarrow x \ln 2 = \ln 2^3 \Leftrightarrow x \ln 2 = 3 \ln 2 \Rightarrow x = 3$

Alors $S = \{3\}$

3 En utilisant les propriétés logarithmiques, résolvons dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivantes :

$$\text{a- } \begin{cases} 2e^x - e^y = 15 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4e^x - 2e^y = 30 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5e^x = 70 \Rightarrow e^x = 14 \text{ et } x = \ln 14$$

Remplaçons $x = \ln 14$ par sa valeur dans l'équation $e^x + 2e^y = 40$. Ainsi on a :

$$14 + 2e^y = 40 \Leftrightarrow e^y = 13 \Rightarrow y = \ln 13$$

D'où $S = \{(\ln 14 ; \ln 13) ; (\ln 13 ; \ln 14)\}$

$$\text{b- } \begin{cases} e^x \times e^y = 8 \\ e^x + e^y = 6 \end{cases} \text{ Posons } e^x = X \text{ et } e^y = Y. \text{ Alors le système devient } \begin{cases} X \times Y = 8 \\ X + Y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} P = 8 \\ S = 6 \end{cases}. \text{ Ainsi ce système est solution de l'équation } X^2 - SX + P = 0$$

Où S et P désignent respectivement la somme et le produit.

$$X^2 - SX + P = 0 \Leftrightarrow X^2 - 6X + 8 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 \text{ Alors } X = 2 \text{ ou } X = 4$$

- Si $X = 2 \Leftrightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$

$$\Rightarrow S = \{(\ln 2 ; \ln 4) ; (\ln 14 ; \ln 2)\}$$

- Si $X = 4 \Leftrightarrow e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4$

$$\text{c- } \begin{cases} 3e^x - 2 \ln y = 13 \\ 5e^x + 3 \ln y = 9 \end{cases} \text{ Effectuons un changement de variable en posant } e^x = X \text{ et } \ln y = Y$$

$$\text{Alors le système devient } \begin{cases} 3X - 2Y = 13 \\ 5X + 3Y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9X - 6Y = 39 \\ 10X + 6Y = 18 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 19X = 57 \Rightarrow X = 3$$

Remplaçons $X = 3$ par sa valeur dans l'équation $5X + 3Y = 9$. Ainsi on a :

$$15 + 3Y = 9 \Leftrightarrow 3Y = -6 \Rightarrow Y = -2$$

$$\text{- Si } X = 3 \Leftrightarrow e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3$$

$$\Rightarrow S = \{(\ln 3; e^{-2}); (e^{-2}; \ln 3)\}$$

$$\text{- Si } Y = -2 \Leftrightarrow \ln y = -2 \Rightarrow y = e^{-2}$$

$$\text{d- } \begin{cases} 2^x - 2^{2-y} = 0 \\ 2^x - 2^{2+y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x \ln 2} - e^{(2-y) \ln 2} = 0 \\ e^{x \ln 2} - e^{(2+y) \ln 2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -e^{x \ln 2} + e^{(2-y) \ln 2} = 0 \\ e^{x \ln 2} - e^{(2+y) \ln 2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow e^{(2-y) \ln 2} - e^{(2+y) \ln 2} = 0$$

$$e^{(2-y) \ln 2} = e^{(2+y) \ln 2} \Leftrightarrow (2-y) \ln 2 = (2+y) \ln 2 \Leftrightarrow 2-y = 2+y \Leftrightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Remplaçons $y = 0$ par sa valeur dans l'équation $e^{x \ln 2} - e^{(2-y) \ln 2} = 0$. Ainsi on a :

$$e^{x \ln 2} - e^{2 \ln 2} = 0 \Leftrightarrow e^{x \ln 2} = e^{2 \ln 2} \Leftrightarrow x \ln 2 = 2 \ln 2 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow S = \{(2; 0); (0; 2)\}$$

$$\text{e- } \begin{cases} 3^x \times 3^{2y-1} = 1 \\ 3^{x+2} \times 3^y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x \ln 3} \times e^{(2y-1) \ln 3} = 1 \\ e^{(x+2) \ln 3} \times e^{y \ln 3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{(x+2y-1) \ln 3} = 1 \\ e^{(x+y+2) \ln 3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x+2y-1) \ln 3 = \ln 1 \\ (x+y+2) \ln 3 = \ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2y-1) \ln 3 = 0 \\ (x+y+2) \ln 3 = \ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-1 = 0 \\ x+y+2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+2y = 1 \\ x+y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 1 \\ -x-y = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 2$$

Remplaçons $y = 2$ par sa valeur dans l'équation $x + 2y = 1$. Ainsi on a :

$$x + 4 = 1 \Rightarrow x = -3$$

$$\Rightarrow S = \{(-3; 2); (2; -3)\}$$

Application des limites de la fonction exponentielle

4 Calculons la limite des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définitions :

$$1) f(x) = e^{-x^2+2x-3}$$

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2+2x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = 0$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+2x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$2) f(x) = e^{\sqrt{x-3}}$$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R} ; x - 3 \geq 0\}$$

$$x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow D_f = [3 ; +\infty[$$

$$f(3) = e^{\sqrt{3-3}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$3) f(x) = e^{\frac{3}{-x+2}}$$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R} ; -x + 2 \neq 0\}$$

$$-x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow D_f =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{3}{-x+2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{3}{-x}} = 1$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{3}{-x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{3}{-x}} = 1$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim f(x) = \lim e^{\frac{3}{-x+2}} = e^{\frac{3}{0^+}} = +\infty$$

$$x \rightarrow 2^- \quad x \rightarrow 2^-$$

$$\lim f(x) = \lim e^{\frac{3}{-x+2}} = e^{\frac{3}{0^-}} = 0$$

$$x \rightarrow 2^+ \quad x \rightarrow 2^+$$

$$4) f(x) = \frac{e^{x^2+2x}}{x+2}$$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R} ; -x + 2 \neq 0\}$$

$$x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2 \Rightarrow D_f =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; +\infty[$$

$$\lim f(x) = \lim \frac{e^{x^2+2x}}{x+2} = \lim \frac{e^{x^2}}{x} = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\lim f(x) = \lim \frac{e^{x^2+2x}}{x+2} = \lim \frac{e^{x^2}}{x} = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim f(x) = \lim \frac{e^{x^2+2x}}{x+2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$x \rightarrow -2^- \quad x \rightarrow 2^-$$

$$\lim f(x) = \lim \frac{e^{x^2+2x}}{x+2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$x \rightarrow -2^+ \quad x \rightarrow 2^+$$

$$5) f(x) = \frac{e^{x^2}}{-1 + e^{2x-3}}$$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R} ; -1 + e^{2x-3} \neq 0\}$$

$$-1 + e^{2x-3} \neq 0 \Rightarrow e^{2x-3} \neq 1 \Rightarrow 2x-3 \neq \ln 1 \Leftrightarrow 2x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow D_f =]-\infty ; \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2} ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^2}}{-1 + e^{2x-3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^2} = 0$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{-1 + e^{2x-3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^2} = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} \frac{e^{x^2}}{-1 + e^{2x-3}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$x \rightarrow \frac{3}{2}^- \quad x \rightarrow \frac{3}{2}^-$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} \frac{e^{x^2}}{-1 + e^{2x-3}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$x \rightarrow \frac{3}{2}^+ \quad x \rightarrow \frac{3}{2}^+$$

$$6) f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{2x} - 5e^x + 6}$$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R} ; e^{2x} - 5e^x + 6 \neq 0\}$$

$$e^{2x} - 5e^x + 6 \neq 0. \text{ Effectuons un changement de variable en posant } X = e^x$$

$$\text{Alors l'équation } e^{2x} - 5e^x + 6 \neq 0 \text{ dévient : } X^2 - 5X + 6 \neq 0 \Rightarrow X_1 \neq 2 \text{ et } X_2 \neq 3.$$

$$- \text{ Si } X_1 \neq 2 \Leftrightarrow e^x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \ln 2.$$

$$- \text{ Si } X_2 \neq 3 \Leftrightarrow e^x \neq \ln 3$$

$$\Rightarrow D_f =]-\infty ; \ln 2[\cup]\ln 2 ; \ln 3[\cup]\ln 3 ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{2x} - 5e^x + 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^2} = 0$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{2x} - 5e^x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^2} = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \ln 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \ln 2^-} \frac{e^{x^2}}{e^{2x} - 5e^x + 6} = \frac{e^{\ln^2 2}}{0^+} = +\infty$$

$$x \rightarrow \ln 2^- \quad x \rightarrow \ln 2^-$$

$$\lim_{x \rightarrow \ln 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \ln 2^+} \frac{e^{x^2}}{e^{2x} - 5e^x + 6} = \frac{e^{\ln^2 2}}{0^-} = -\infty$$

$$x \rightarrow \ln 2^+ \quad x \rightarrow \ln 2^+$$

$$\lim_{x \rightarrow \ln 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \ln 3^-} \frac{e^{x^2}}{e^{2x} - 5e^x + 6} = \frac{e^{\ln^2 3}}{0^-} = -\infty$$

$$x \rightarrow \ln 3^- \quad x \rightarrow \ln 3^-$$

$$\lim_{x \rightarrow \ln 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \ln 3^+} \frac{e^{x^2}}{e^{2x} - 5e^x + 6} = \frac{e^{\ln^2 3}}{0^+} = +\infty$$

$$x \rightarrow \ln 3^+ \quad x \rightarrow \ln 3^+$$

$$7) f(x) = \frac{e^x}{(x-1)^2}$$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R} ; (x-1)^2 \neq 0\}$$

$$(x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2} = 0$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x}{(x-1)^2} = \frac{e}{0^+} = +\infty$$

$$x \rightarrow 1^- \quad x \rightarrow 1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{(x-1)^2} = \frac{e}{0^+} = +\infty$$

$$x \rightarrow 1^+ \quad x \rightarrow 1^+$$

$$8) f(x) = \ln(e^x - 1)$$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R} ; e^x - 1 > 0\}$$

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > \ln 1 \Rightarrow x > 0$$

$$\Rightarrow D_f =]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(e^x - 1) = -\infty$$

$$x \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x - 1) = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$9) f(x) = (x + 2)(e^x - 1)$$

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2)(e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2)(e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

Dérivées et primitives de la fonction exponentielle

5 1) Calculons la dérivée des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = e^{-x^2-x-1} \Rightarrow f'(x) = (-2x-1)e^{-x^2-x-1}$$

$$b) f(x) = e^{\sqrt{x^2-3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}} e^{\sqrt{x^2-3}}$$

$$c) f(x) = e^{\frac{3}{x-1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} e^{\frac{3}{x-1}}$$

$$d) f(x) = \frac{-1}{e^{x^2+2x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+2)e^{x^2+2x}}{(e^{x^2+2x})^2}$$

$$e) f(x) = \frac{e^{-x^2}}{e^{x-3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-2xe^{-x^2})(e^{x-3}) - (e^{x-3})(e^{-x^2})}{(e^{x-3})^2} = \frac{-(2x+1)e^{-x^2+x-3}}{(e^{x-3})^2}$$

$$f) f(x) = \frac{-x^2}{e^{2x} - 5e^x + 6} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-2x)(e^{2x} - 5e^x + 6) - (e^{2x} - 5e^x + 6)(-x^2)}{(e^{2x} - 5e^x + 6)^2}$$

$$= \frac{-x[(2-2x)e^{2x} - 5(2+x)e^x + 12]}{(e^{2x} - 5e^x + 6)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x[(2-2x)e^{2x} - 5(2+x)e^x + 12]}{(e^{2x} - 5e^x + 6)^2}$$

$$g) f(x) = \ln[\ln(e^x - 1)] \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{e^x - 1}}{\ln(e^x - 1)} = \frac{1}{(e^x - 1)\ln(e^x - 1)}$$

$$h) f(x) = (x + 2)(e^x - 1) \Rightarrow f'(x) = e^x - 1 + e^x(x + 2) = e^x - 1 + xe^x + 2e^x \\ \Rightarrow f'(x) = xe^x + 3e^x - 1$$

2) Calculons la primitive des fonctions suivantes :

$$a- f(x) = e^{2x-3} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-3} + k$$

$$b- f(x) = \frac{3e^{2x-3}}{3 - e^{2x-3}} = \frac{-2}{-2} \times \frac{3e^{2x-3}}{3 - e^{2x-3}} = \frac{3}{-2} \times \frac{-2e^{2x-3}}{3 - e^{2x-3}} \\ \Rightarrow F(x) = \frac{3}{-2} \ln|3 - e^{2x-3}| + k$$

$$c- f(x) = (-x + 1)e^{x^2-2x+5} = \frac{-2}{-2} \times (-x + 1)e^{x^2-2x+5} = \frac{1}{-2} \times (2x - 2)e^{x^2-2x+5} \\ \Rightarrow F(x) = \frac{1}{-2} \times e^{x^2-2x+5} + k$$

$$d- f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = -e^{\frac{1}{x}} + k \Rightarrow F(x) = -e^{\frac{1}{x}} + k$$

$$e- f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+3}} e^{\sqrt{2x+3}} = 3 \times \frac{1}{\sqrt{2x+3}} e^{\sqrt{2x+3}} \Rightarrow F(x) = e^{\sqrt{2x+3}} + k$$

$$f- f(x) = \frac{5}{e^{2x-3}} = 5e^{-2x+3} \Rightarrow F(x) = -\frac{5}{2}e^{-2x+3} + k$$

$$g- f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{2}{2} \times \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}} \Rightarrow F(x) = 2e^{\sqrt{x}} + k$$

$$h- f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \Rightarrow F(x) = \ln|1 + e^x| + k$$

$$i- f(x) = 2^x = e^{x \ln 2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{\ln 2} \times e^{x \ln 2} + k$$

6 1) déterminons les réels a et b pour que la fonction F soit une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f .

$$a) f(x) = (2x + 1)e^x \text{ et } F(x) = (ax + b)e^x$$

F est une primitive de f si et seulement si $F'(x) = f(x)$. Avec $F'(x) = (ax + a + b)e^x$

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow (ax + a + b)e^x = (2x + 1)e^x \Leftrightarrow ax + a + b = 2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2 + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{D'où } F(x) = (2x - 1)e^x + k$$

$$b) f(x) = (x + 1) e^{\frac{-x}{2}} \text{ et } F(x) = (ax + b) e^{\frac{-x}{2}}$$

F est une primitive de f si et seulement si $F'(x) = f(x)$. Avec $F'(x) = \frac{1}{2}(-ax + 2a - b)e^{\frac{-x}{2}}$

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(-ax + 2a - b)e^{\frac{-x}{2}} = (x + 1)e^{\frac{-x}{2}} \Leftrightarrow -ax + 2a - b = 2(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow -ax + 2a - b = 2x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 2 \\ 2a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ -4 - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{D'où } F(x) = (-2x - 6)e^{\frac{-x}{2}} + k$$

2) Déterminons les réels a ; b et c pour que la fonction F soit une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f

$$a) f(x) = (x^2 - 1) e^{2x} \text{ et } F(x) = (ax^2 + bx + c) e^{2x}$$

F est une primitive de f si et seulement si $F'(x) = f(x)$.

$$\text{Avec } F'(x) = [2ax^2 + 2(a + b)x + b + 2c]e^{2x}. F'(x) = f(x) \Leftrightarrow$$

$$[2ax^2 + 2(a + b)x + b + 2c]e^{2x} = (x^2 - 1) e^{2x} \Leftrightarrow 2ax^2 + 2(a + b)x + b + 2c = x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2(a + b) = 0 \\ b + 2c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + 2c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{D'où } F(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^{2x} + k$$

$$b) f(x) = (x^2 - 3x + 1) e^{-3x} \text{ et } F(x) = (ax^2 + bx + c) e^{-3x}$$

F est une primitive de f si et seulement si $F'(x) = f(x)$.

$$\text{Avec } F'(x) = [-3ax^2 + (2a - 3b)x + b - 3c]e^{-3x}. F'(x) = f(x) \Leftrightarrow$$

$$[-3ax^2 + (2a - 3b)x + b - 3c]e^{-3x} = (x^2 - 3x + 1)e^{-3x} \Leftrightarrow$$

$$-3ax^2 + (2a - 3b)x + b - 3c = x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = 1 \\ 2a - 3b = -3 \\ b - 3c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{7}{9} \\ c = -\frac{8}{9} \end{cases}$$

$$F(x) = \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{9}x - \frac{8}{9}\right) e^{-3x} + k$$

Fonction exponentielle utilisée dans les cas pratiques

7 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 8(e^{-x} - e^{-2x})$

1) a- Démontrons que pour tout réel x , on a : $f(x) = \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}}$.

$$f(x) = 8(e^{-x} - e^{-2x})$$

$$\Rightarrow f(x) = 8e^{-2x}(e^x - 1)$$

$$\Rightarrow f(x) = 8 \frac{1}{e^{2x}} (e^x - 1)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{8}{e^{2x}} (e^x - 1)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}}. \text{ D'où pour tout réel } x, \text{ on a : } f(x) = \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}}.$$

b- Démontrons que pour tout réel x , on a : $f'(x) = \frac{8(2 - e^x)}{e^{2x}}$. En déduis le signe de $f'(x)$.

$$f(x) = \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}}$$

$$\text{Posons } u(x) = 8(e^x - 1) \Rightarrow u'(x) = 8e^x$$

$$v(x) = e^{2x} \Rightarrow v'(x) = 2e^{2x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(8e^x)(e^{2x}) - 8(2e^{2x})(e^x - 1)}{(e^{2x})^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{8e^{2x}(e^x - 2e^x + 2)}{e^{4x}} = \frac{8e^{2x}(-e^x + 2)}{e^{4x}} = \frac{8(2 - e^x)}{e^{2x}}$$

$$\text{D'où pour tout réel } x, \text{ on a : } f'(x) = \frac{8(2 - e^x)}{e^{2x}}$$

c- Déterminons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 8(e^{-x} - e^{-2x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 8e^{-x}(1 - e^{-x}) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8e^x}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{e^x} = 0$$

d- Dressons le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.

$$f'(x) = \frac{8(2 - e^x)}{e^{2x}}$$

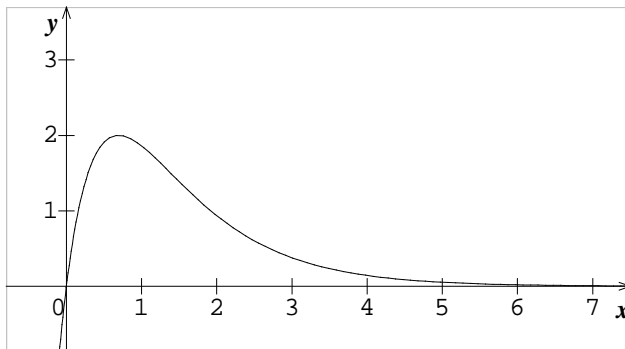
$\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} > 0$ Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $8(2 - e^x)$.

$$\text{Posons } 8(2 - e^x) > 0 \Leftrightarrow 2 - e^x > 0 \Leftrightarrow -e^x > -2 \Leftrightarrow e^x < 2 \Rightarrow x < \ln 2$$

$$\text{Alors } \forall x \in]-\infty; \ln 2[; f'(x) > 0 \text{ et } \forall x \in]\ln 2; +\infty[; f'(x) < 0$$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	2	0

e- Représentation de la fonction f dans un repère orthogonal.



2) On injecte à l'instant $t = 0$ une substance dans le sang d'un animal. A l'instant t où t est positif et exprimer en seconde, la concentration g de la substance injectée est : $g(t) = 8(e^{-t} - e^{-2t})$. On rappelle que la « **Concentration** » est le rapport entre la quantité du liquide et la quantité du sang qui le contient.

a- En utilisant les résultats de la question 1), donnons le tableau de variation de la concentration du sang en fonction du temps t .

t	0	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(t)$	+	0	-
$g(t)$	0	2	0

b- Déterminons le temps au bout duquel la concentration est elle maximale

D'après le tableau ci-dessus la concentration est elle maximale à l'instant $t = \ln 2 = 0,69 \text{ s}$

c- Détermine les instants t_1 et t_2 pour lesquels la concentration est égale au quart de sa valeur maximale

La concentration est égale au quart de sa valeur maximale si et seulement si

$$g(t) = \frac{1}{4} \times 2 \Leftrightarrow 8(e^{-t} - e^{-2t}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-t} - e^{-2t} = 0,06 \Leftrightarrow e^{-t} - e^{-2t} - 0,06 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-e^{-2t} + e^{-t} - 0,06 = 0. \text{ Ainsi effectuons un changement en posant } e^{-t} = X$$

$$\Rightarrow X^2 - X + 0,06 = 0 ; \Delta = 0,76. \text{ Alors } X_1 = 0,06 \text{ et } X_2 = 0,93$$

- Si $X = 0,06 \Leftrightarrow e^{-t} = 0,06 \Leftrightarrow -t = \ln 0,06 \Leftrightarrow -t = -2,81 \Rightarrow t = 2,81 \text{ s}$
 - Si $X = 0,93 \Leftrightarrow e^{-t} = 0,93 \Leftrightarrow -t = \ln 0,93 \Leftrightarrow -t = -0,07 \Rightarrow t = 0,07 \text{ s}$
- D'où $t_1 = 0,07 \text{ s}$ ou $t_2 = 2,81 \text{ s}$

8 On étudie l'évolution d'une colonie de bactéries placée dans une pétrie. Le nombre de bactéries en centaines est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{4e^t - 1}{e^t + 2}$ où t représente le temps en heures. On suppose que l'on peut compter le nombre de bactéries à l'unité près grâce à un compteur de radioactivité.

1) a) Calculons $f(0)$

$$f(0) = \frac{4e^0 - 1}{e^0 + 2} = \frac{4 - 1}{1 + 2} = \frac{3}{3} = 1$$

Interprétation du résultat : A l'instant $t = 0$, on a une centaine de bactéries

b) Montrons que $f(t) = 4 - \frac{9}{e^t + 2}$.

$f(t) = \frac{4e^t - 1}{e^t + 2}$. En effectuant la division Euclidienne de $4e^t - 1$ par $e^t + 2$, on obtient bien :

$$f(t) = 4 - \frac{9}{e^t + 2}.$$

En déduisons la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 4 - \frac{9}{e^t + 2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 4 - \frac{9}{e^t} = 4 - 0 = 4$$

Si cette valeur est la saturation, alors on peut conclure que pour la courbe (C) admet 4 centaines de bactéries comme valeur seuil.

c) Vérifions si l'équation $f(t) = 4$ admet-elle des solutions

$$f(t) = 4 \Leftrightarrow 4 - \frac{9}{e^t + 2} = 4 \Leftrightarrow -\frac{9}{e^t + 2} = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{e^t + 2} = 0 \Leftrightarrow 9 = 0 \text{ (absurde)}.$$

Alors l'équation $f(t) = 4$ n'admet pas de solution.

2) Montrons que la dérivée f' de f vérifie $f'(t) = \frac{9e^t}{(e^t + 2)^2}$.

$$f(t) = \frac{4e^t - 1}{e^t + 2}$$

Posons $u(t) = 4e^t - 1 \Rightarrow u'(t) = 4e^t$

$$v(t) = e^t + 2 \Rightarrow v'(t) = e^t$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{(4e^t)(e^t+2) - (e^t)(4e^t-1)}{(e^t+2)^2} = \frac{e^t(4e^t+8-4e^t+1)}{(e^t+2)^2} = \frac{e^t \times 9}{(e^t+2)^2} = \frac{9e^t}{(e^t+2)^2}$$

En déduisons le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$

$$f'(t) = \frac{9e^t}{(e^t+2)^2} > 0. \text{ Alors pour tout } t \in [0; +\infty[, f \text{ est strictement croissante.}$$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	+	
$f(t)$	1	4

3) Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0

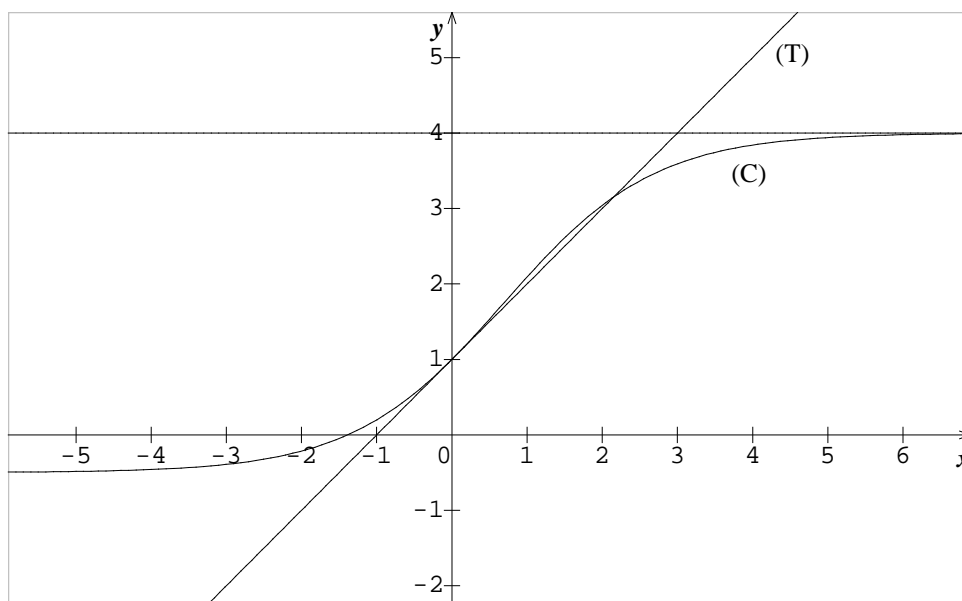
$$\text{On a : (T) : } y = f'(0)(t - 0) + f(0) = t \times f'(0) + f(0) = t \times 1 + 1 = t + 1$$

D'où l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 est $y = t + 1$

4) Complétons le tableau ci-dessous en arrondissant à 10^{-2} près

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(t)$	1	2,09	3,04	3,59	3,84	3,94	3,97	3,99

5) Traçons (C), (T) ainsi que toutes les asymptotes éventuelles à (C).



6) Calculons à la minute près l'instant t_0 où le nombre de bactéries sera égal à 200

Le nombre de bactéries sera égal à 200 si et seulement si $f(t) = 2 \Leftrightarrow \frac{4e^t - 1}{e^t + 2} = 2$

$$\Leftrightarrow 4e^t - 1 = 2(e^t + 2) \Leftrightarrow 4e^t - 1 = 2e^t + 4 \Leftrightarrow 2e^t = 5 \Leftrightarrow e^t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

$\Rightarrow t = 0,91$ soit 91 minutes près

Alors la minute près où le nombre de bactéries sera égal à 200 est $t_0 = 60$ mn

7) Déterminons le temps au bout duquel la population de cette colonie serait égale à 80% de sa saturation.

La population de cette colonie serait égale à 80% de sa saturation si et seulement si

$$f(t) = 4 \times 80\% \Leftrightarrow f(t) = 4 \times \frac{80}{100} \Leftrightarrow f(t) = 3,2 \Leftrightarrow \frac{4e^t - 1}{e^t + 2} = 3,2 \Leftrightarrow$$

$$4e^t - 1 = 3,2(e^t + 2) \Leftrightarrow 4e^t - 1 = 3,2e^t + 6,4 \Leftrightarrow 0,8e^t = 7,4 \Leftrightarrow e^t = \frac{7,4}{0,8}$$

$$\Leftrightarrow e^t = 9,25 \Leftrightarrow t = \ln(9,25) \Leftrightarrow t = 2,22 \text{ Soit } 2 \text{ h } 22 \text{ min}$$

9 Partie A

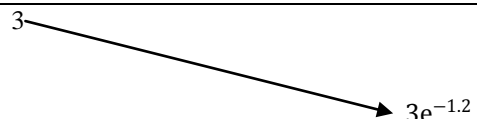
A l'instant $t = 0$ on injecte dans le sang d'un patient une dose de 3ml d'un médicament. On veut étudier le processus d'élimination du produit au cours des douze heures suivant l'injection. La quantité de médicament présente dans le sang en ml en fonction du temps t en heures est $f(t)$, où f est définie sur $[0 ; 12]$ par : $f(t) = 3e^{-0,1t}$.

1) Déterminons $f'(t)$ puis justifions que pour tout $t \in [0 ; 12]$, $f'(t) < 0$.

$$f(t) = 3e^{-0,1t} \Rightarrow f'(t) = -0,1 \times 3e^{-0,1t} = -0,3e^{-0,1t}$$

Pour tout $t \in [0 ; 12]$, $e^{-0,1t} > 0$ alors $f'(t) = -0,3e^{-0,1t} < 0$.

2) Dressons le tableau de variation de f sur $[0 ; 12]$.

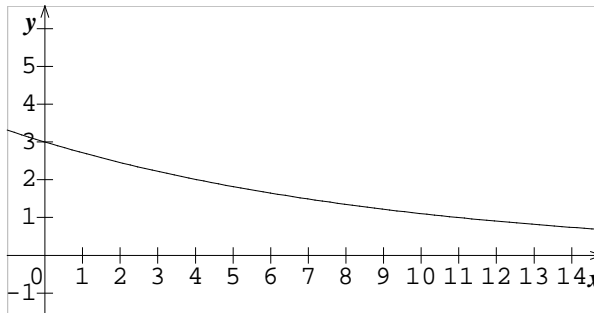
t	0	12
$f'(t)$	—	
$f(t)$		

3) Calcule $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$; $f(6)$ et $f(8)$.

t	2	3	4	6	8
$f(t)$	2,45	2,22	2,01	1,64	1,34

Ainsi chacune de ces valeurs obtenues représente la quantité de médicament présente dans le sang en ml en fonction du temps t

4) Traçons la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques (1cm sur (Ox) et 4 cm sur (Oy)).



Partie B

Le médicament est inefficace lorsque la quantité contenue dans le sang est inférieure à **0,25ml**, ainsi on procède à une seconde injection

1°/ Déterminons le temps au bout duquel on procèdera à la seconde injection

On procèdera à la seconde injection si et seulement si $f(t) < 1,253 \Leftrightarrow e^{-0,1t} < 0,253$

$$\Leftrightarrow -0,1t < \ln(0,253) \Leftrightarrow -0,1t < -1,37 \Leftrightarrow 0,1t > 1,37 \Leftrightarrow t > 13,7$$

D'où on peut procéder à la seconde injection à partir de **13h 7min**

2°/ On rappelle que le seuil de toxicité du médicament est de **4,5ml**.

Vérifions si le patient court un risque d'intoxication par le médicament à la seconde injection

Pour cela calculons $f(13,7)$

$$f(13,7) = 0,76 \text{ ml}$$

Or **0,76 ml < 4,5ml**. alors il n'y a aucun risque d'intoxication par le médicament à la seconde injection.

Problèmes

10

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(0; \vec{i}; \vec{j})$

Partie A : Etude de la fonction f et construction de la courbe (C) .

1) Etudie la limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $+\infty$

(on pourra écrire $xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^x$).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 - xe^{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 - \frac{1}{e}xe^x = 2(-\infty) + 1 - \frac{1}{e}(0) = -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 - xe^{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 - \frac{1}{e}xe^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{e}e^x \right)$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$= (+\infty)(2 - \infty) = -\infty$$

2) Démontre que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$

La droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$ si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1 - xe^{x-1}) - (2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 - \frac{1}{e}xe^x - 2x - 1$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{e}xe^x = 0.$$

$$x \rightarrow -\infty$$

D'où la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$

Précisons la position de la courbe C par rapport à la droite Δ .

Pour cela, étudions le signe de $f(x) - y$. Posons $f(x) - y = -\frac{1}{e}xe^x$.

$\forall x \in D_f, e^x > 0$ Alors le signe de $f(x) - y$ dépend du signe de $-\frac{1}{e}x$. Posons $-\frac{1}{e}x = 0$

$\Rightarrow x = 0$. D'où le tableau de signe de $f(x) - y$ est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

D'après le tableau de signe :

$\forall x \in D_f]-\infty ; 0[; f(x) - y > 0$. Alors $\forall x \in D_f]-\infty ; 0[; C$ est au dessus de Δ

$\forall x \in D_f]0 ; +\infty[; f(x) - y < 0$. Alors $\forall x \in D_f]0 ; +\infty[; C$ est en dessous de Δ

3) a) Calcule la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f .

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1} \Rightarrow f'(x) = 2 - (x+1)e^{x-1} \text{ et } f''(x) = -(x+2)e^{x-1}$$

b) Dresse le tableau de variation de la fonction f' en précisant la limite de la fonction f' en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - (x+1)e^{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - xe^{x-1} - e^{x-1} = 2 - 0 - 0 = 2$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - (x+1)e^{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - (xe^{x-1} + e^{x-1}) = 2 - (+\infty + \infty) = -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$f''(x) = -(x+2)e^{x-1}$$

$\forall x \in D_f, e^{x-1} > 0$ Alors le signe de $f''(x)$ dépend du signe de $-(x+2)$.

$$\text{Posons } -(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

D'où le tableau de variation de $f'(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	2	$2 + e^{-3}$	0	$+\infty$

c) Calcule $f'(1)$

$$f'(1) = 2 - 2 = 0$$

En déduisons le signe de $f'(x)$ pour tout réel x .

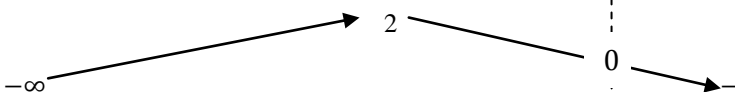
D'après de variation de $f'(x)$:

$$\forall x \in D_f]-\infty ; 1[; f'(x) > 0.$$

$$\forall x \in D_f]1 ; +\infty[; f'(x) < 0.$$

d) Dressons le tableau de variation de la fonction f .

En utilisant la question précédente, on a le tableau de variation de la fonction f suivante :

x	$-\infty$		1		α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-		
$f(x)$	$-\infty$					

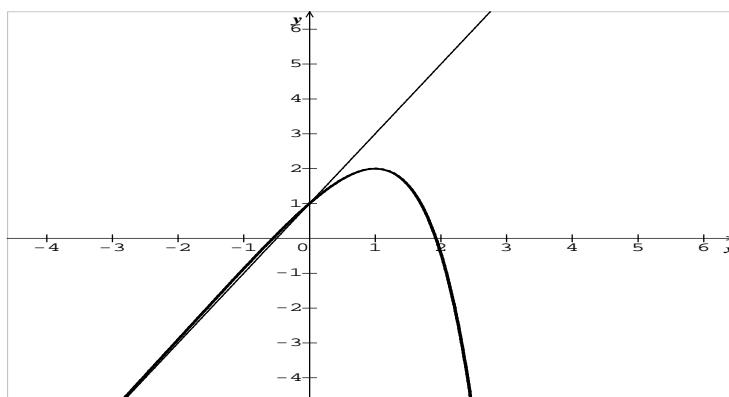
4) Soit I l'intervalle $[1,9 ; 2]$. Démontre que, sur I , l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique, α .

- D'après le tableau de variation de f , $\forall x \in]1 ; +\infty[$; f est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $]1 ; +\infty[$ vers $-\infty ; 2[$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $f(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} f(1,9) = 0,12 \\ f(2) = -0,43 \end{cases} \Rightarrow f(1,9) \times f(2) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α tel que : $\alpha \in [1,9 ; 2]$.

5) Traçons la droite Δ et la courbe C (unité graphique : 2 cm).



Partie B : Recherche d'une approximation de α :

Soit la fonction g définie sur I par $g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par : $g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

1) Démontre, sur I , l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}. \text{ Alors } f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 - xe^{x-1} = 0 \Leftrightarrow xe^{x-1} = 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow e^{x-1} = \frac{2x+1}{x} \Leftrightarrow e^{x-1} = 2 + \frac{1}{x} \Rightarrow x-1 = \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) = x \Leftrightarrow$$

$$g(x) = x \text{ (Ce qu'il fallait Démontre)}$$

2) Etudions le sens de variation de la fonction g sur I .

$$g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x+1}{x}} = -\frac{1}{x^2} \times \frac{x}{2x+1} = -\frac{1}{x(2x+1)} < 0$$

D'où pour tout x appartenant à l'intervalle $I = [1,9 ; 2]$; g est strictement décroissante.

Démontre que, pour tout x appartenant à I , $g(x)$ appartient à I .

$x \in [1,9 ; 2] \Leftrightarrow 1,9 \leq x \leq 2$. g étant décroissante sur I ; on a :

$$g(2) \leq g(x) \leq g(1,9)$$

$$\Leftrightarrow 1,91 \leq g(x) \leq 1,96$$

$$\Leftrightarrow 1,9 \leq g(x) \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 1,9 \leq g(x) \leq 2 \Rightarrow g(x) \in [1,9 ; 2] \Leftrightarrow g(x) \in I \text{ (Ce qu'il fallait Démontre)}$$

3) Démontre que, pour tout x de l'intervalle I , $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$

$$\text{On sait que : } g'(x) = -\frac{1}{x(2x+1)} \text{ et } 1,9 \leq x \leq 2 \quad (1)$$

D'autre part si : $1,9 \leq x \leq 2$; Alors on a :

$$g'(1,9) \leq g'(x) \leq g'(2)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{1,9(2 \times 1,9 + 1)} \leq g'(x) \leq -\frac{1}{2(2 \times 2 + 1)}$$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{9,12} \leq g'(x) \leq -\frac{1}{10}$. En appliquant la valeur absolue à l'inégalité on a :

$$\Leftrightarrow \left| -\frac{1}{10} \right| \leq |g'(x)| \leq \left| -\frac{1}{9,12} \right|$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{10} \leq |g'(x)| \leq \frac{1}{9,12}$. Or $\frac{1}{9,12} \approx \frac{1}{9}$. Donc l'inégalité devient : $\frac{1}{10} \leq |g'(x)| \leq \frac{1}{9}$.

$$\Rightarrow |g'(x)| \leq \frac{1}{9} .$$

D'où pour tout x de l'intervalle I ; on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$ (Ce qu'il fallait Démontrer)

4) Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout n de \mathbb{N} ,
 $u_{n+1} = g(u_n)$

a-Démontrons que, pour tout n de \mathbb{N} , $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9} |u_n - \alpha|$

- D'après **Partie A -4)** , on a : $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + 1 - \alpha e^{\alpha-1} = 0 \Leftrightarrow \alpha e^{\alpha-1} = 2\alpha + 1$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha-1} = \frac{2\alpha+1}{\alpha} \Leftrightarrow e^{\alpha-1} = 2 + \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha - 1 = \ln\left(2 + \frac{1}{\alpha}\right) \Leftrightarrow 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha \Leftrightarrow$$

$$g(\alpha) = \alpha$$

- D'autre part on a démontré que $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$

Ainsi d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{9} |x - \alpha| . \text{ Or } g(\alpha) = \alpha$$

$$\Rightarrow |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{9} |x - \alpha| . \text{ En posant } x = u_n ; \text{ on a : } |g(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{9} |u_n - \alpha| .$$

$$\text{Or } g(u_n) = u_{n+1} \Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9} |u_n - \alpha| . \text{ (Ce qu'il fallait Démontrer)}$$

b-En déduisons, en raisonnant par récurrence que Pour tout n de \mathbb{N} , $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{10} \left(\frac{1}{9}\right)^n$

$$\text{On sait que } \alpha \in [1,9 ; 2] \Leftrightarrow 1,9 \leq \alpha \leq 2 \text{ et } u_0 = 2$$

$$\text{Il vient que } 1,9 - 2 \leq \alpha - u_0 \leq 2 - 2$$

$$\Leftrightarrow -0,1 \leq u_0 - \alpha \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq |u_0 - \alpha| \leq 0,1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{10} \left(\frac{1}{9}\right)^0$$

Alors la relation est vraie à l'ordre $n = 0$

Supposons la relation est vraie à l'ordre n c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$; on a :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{10} \left(\frac{1}{9}\right)^n \text{ Puis montrons qu'elle est vraie à l'ordre } n + 1 \text{ c'est-à-dire } \forall n \in \mathbb{N} ;$$

$$\text{on a : } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{10} \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}$$

$$\text{D'après **Partie B 4) a)**, on a : } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9} |u_n - \alpha|.$$

$$\text{Par suite } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{9} \left[\frac{1}{10} \left(\frac{1}{9}\right)^n \right]$$

$$\text{D'où } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{10} \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{10} \left(\frac{1}{9}\right)^n$ (Ce qu'il fallait Démontre).

b) Etudions la convergence de la suite u puis donnons sa limite en $+\infty$.

La suite de terme général $\frac{1}{10} \left(\frac{1}{9}\right)^n$ est convergente $\forall n \in \mathbb{N}$ et converge donc vers 0.

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \alpha = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$

$$n \rightarrow +\infty \qquad n \rightarrow +\infty \qquad n \rightarrow +\infty$$

D'où la suite u_n est convergente et converge vers α

Partie C : Calcul d'aire

1) En intégrant par parties, calculons l'intégrale $J = \int_1^\alpha x e^{x-1} dx$

$$J = \int_1^\alpha x e^{x-1} dx$$

$$\text{Posons } u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^{x-1} \Rightarrow v(x) = e^{x-1}$$

$$\Rightarrow J = [x e^{x-1}]_1^\alpha - \int_1^\alpha e^{x-1} dx = [x e^{x-1}]_1^\alpha - [e^{x-1}]_1^\alpha = [x e^{x-1} - e^{x-1}]_1^\alpha$$

$$\Rightarrow J = (\alpha - 1)e^{\alpha-1}$$

2a) Déterminons, en unités d'aire, l'aire A de la portion de plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = \alpha$.

$$A = \int_1^\alpha f(x)dx = \int_1^\alpha (2x + 1 - xe^{x-1})dx = \int_1^\alpha (2x + 1)dx - \int_1^\alpha xe^{x-1}dx$$

$$\Rightarrow A = \int_1^\alpha (2x + 1)dx - J = [x^2 + x]_1^\alpha - J = \alpha^2 - \alpha - J. \text{ Or } J = (\alpha - 1)e^{\alpha-1}$$

$$\Rightarrow A = \alpha^2 + \alpha - 2 - (\alpha - 1)e^{\alpha-1}$$

b) Démontrons qu'on peut écrire $A = (\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$.

On sait que $A = \alpha^2 + \alpha - 2 - (\alpha - 1)e^{\alpha-1}$

D'autre part d'après **Partie B 1**), on a : $e^{x-1} = \frac{2x+1}{x} \Leftrightarrow e^{\alpha-1} = \frac{2\alpha+1}{\alpha}$

Donc $A = \alpha^2 + \alpha - 2 - (\alpha - 1)\left(\frac{2\alpha+1}{\alpha}\right) = \alpha^2 + \alpha - 2 - \frac{2\alpha^2 - \alpha - 1}{\alpha}$

$$= \frac{\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 2\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha} = \frac{\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1}{\alpha} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha^2 - 1)}{\alpha}$$

$$\Rightarrow A = (\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right).$$

D'où l'aire A de la portion de plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = \alpha$ est donné par :

$A = (\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$. (Ce qu'il fallait Démontrer).

11

Partie A : Résolution de l'équation différentielle $(E_1) : y' - 2y = xe^x$

1) Résolvons l'équation différentielle $(E_2) : y' - 2y = 0$

On a $(E_2) : y' - 2y = 0 \Rightarrow S = ke^{2x}$

2) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = (ax + b)e^x$.

a- Déterminons a et b pour que u soit solution de l'équation (E_1) .

u est solution de l'équation (E_1) si et seulement si $u'(x) - 2u(x) = xe^x$ avec

$$u(x) = (ax + b)e^x \text{ et } u'(x) = (ax + a + b)e^x.$$

$$u'(x) - 2u(x) = xe^x \Leftrightarrow (ax + a + b)e^x - 2(ax + b)e^x = xe^x \Leftrightarrow$$

$$[(ax + a + b) - 2(ax + b)]e^x = xe^x \Leftrightarrow (ax + a + b) - 2(ax + b) = x \Leftrightarrow$$

$$-ax + a - b = x \Rightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -1 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\text{D'où } u(x) = -(x + 1)e^x$$

b- Montrons qu'une fonction v est solution de l'équation (E_1) si et seulement si $u - v$ est solution de (E_2) .

NB :

Montre que $A \Leftrightarrow B$, revient à montré que $\begin{cases} A \Rightarrow B \\ \text{et} \\ B \Rightarrow A \end{cases}$

Ainsi pour Montre qu'une fonction v est solution de l'équation (E_1) si et seulement si $u - v$ est solution de (E_2) , on montre que

$$\left\{ \begin{array}{l} v \text{ est solution de l'équation } (E_1) \Rightarrow u - v \text{ est solution de } (E_2) \\ \text{et} \\ u - v \text{ est solution de } (E_2) \Rightarrow v \text{ est solution de l'équation } (E_1) \end{array} \right.$$

- Montrons que v est solution de l'équation $(E_1) \Rightarrow u - v$ est solution de (E_2)
 - u est solution de l'équation (E_1) si et seulement si $u'(x) - 2u(x) = xe^x$ (1)
 - v est solution de l'équation (E_1) si et seulement si $v'(x) - 2v(x) = xe^x$ (2)

Effectuons ainsi la différence des relations (1) et (2) :

$$(1) - (2) : [u'(x) - v'(x)] - 2[u(x) - v(x)] = xe^x - xe^x$$

$$\Leftrightarrow (u - v)'(x) - 2(u - v)(x) = 0 \Rightarrow u - v \text{ est solution de } (E_2)$$

$$\text{D'où } v \text{ est solution de l'équation } (E_1) \Rightarrow u - v \text{ est solution de } (E_2)$$

- Montrons que $u - v$ est solution de $(E_2) \Rightarrow v$ est solution de l'équation (E_1)

$$\text{Si } u - v \text{ est solution de } (E_2) \text{ alors on a : } (u - v)'(x) - 2(u - v)(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$[u'(x) - v'(x)] - 2[u(x) - v(x)] = 0 \Leftrightarrow u'(x) - v'(x) - 2u(x) + 2v(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$v'(x) - 2v(x) = u'(x) - 2u(x). \text{ Avec } u(x) = -(x + 1)e^x \text{ et } u'(x) = -(x + 2)e^x.$$

$$\text{Alors } v'(x) - 2v(x) = u'(x) - 2u(x) \Leftrightarrow$$

$$v'(x) - 2v(x) = [-(x + 2)e^x] - 2[-(x + 1)e^x] \Leftrightarrow v'(x) - 2v(x) = xe^x$$

D'où $u - v$ est solution de $(E_2) \Rightarrow v$ est solution de l'équation (E_1)

Conclusion : puisque
$$\begin{cases} v \text{ est solution de l'équation } (E_1) \Rightarrow u - v \text{ est solution de } (E_2) \\ \text{et} \\ u - v \text{ est solution de } (E_2) \Rightarrow v \text{ est solution de l'équation } (E_1) \end{cases}$$

Alors une fonction v est solution de l'équation (E_1) si et seulement si $u - v$ est solution de (E_2) . (Ce qu'il fallait Démontrer).

c- En déduisons l'ensemble des solutions de (E_1) .

- On sait que $u(x) - v(x)$ est solution de l'équation (E_2)
- D'autre part ke^{2x} est aussi solution de l'équation (E_2)

Par identification, on a : $u(x) - v(x) = ke^{2x} \Rightarrow v(x) = u(x) - ke^{2x}$.

Or $u(x) = -(x + 1)e^x$

$\Rightarrow v(x) = -(x + 1)e^x - ke^{2x}$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est $v(x) = -(x + 1)e^x - ke^{2x}$

3) Déterminons la solution de l'équation (E_1) qui s'annule en 0.

La solution de l'équation (E_1) qui s'annule en 0 est définie par $v(0) = 0 \Leftrightarrow k = -1$

D'où la solution de l'équation (E_1) qui s'annule en 0 est $v(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1) Déterminons la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - x - 2 = 2(0) - (-\infty) - 2 = +\infty$.

$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x - x - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{2}{x} \right) = (+\infty)[2(+\infty) - 1 - 0]$

$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$

$= (+\infty)(+\infty) = +\infty$

2) Etudions le sens de variation de g

$$g(x) = 2e^x - x - 2 \Rightarrow g'(x) = 2e^x - 1. \text{ Posons } g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 > 0 \Rightarrow$$

$$e^x > \frac{1}{2} \Rightarrow x > \ln \frac{1}{2} \Rightarrow x > -\ln 2.$$

Ainsi : pour les $x > -\ln 2$, on a : $g'(x) > 0$ et pour les $x < -\ln 2$, on a : $g'(x) < 0$

D'où $\forall x \in]-\infty ; -\ln 2[; g$ est strictement décroissante et

$\forall x \in]-\ln 2 ; +\infty[; g$ est strictement croissante

Dressons le tableau de variation de g .

x	$-\infty$	α	$-\ln 2$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	0	$-1 + \ln 2$	0	$+\infty$

3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

a-Vérifions que 0 est l'une de ces solutions.

$$g(x) = 2e^x - x - 2 \Rightarrow g(0) = 2e^0 - 0 - 2 = 2 - 2 = 0$$

D'où 0 est l'une de ces solutions de l'équation $g(x) = 0$.

b-L'autre solution est appelée α . Montrons que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.

- D'après le tableau de variation de g , $\forall x \in]-\infty ; -\ln 2[; g$ est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $]-\infty ; -\ln 2[$ vers $]-1 + \ln 2 ; +\infty[$. Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution α telle que $g(\alpha) = 0$.

$$\text{- De plus } \begin{cases} g(-1,6) = 0,003 \\ g(-1,5) = -0,05 \end{cases} \Rightarrow g(-1,6) \times g(-1,5) < 0$$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ a une deuxième solution α tel que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.

4) Déterminons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x .

D'après le tableau de variation :

$$\text{- } \forall x \in]-\infty ; \alpha[\cup]0 ; +\infty[; g(x) > 0.$$

$$- \quad \forall x \in]\alpha ; 0[; g(x) < 0.$$

Partie C : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$

1) Déterminons la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - (x + 1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - xe^x - e^x = 0 - 0 - 0 = 0$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - (x + 1)e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left[1 - \frac{(x+1)}{e^x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} (1 - 0) = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

2) Calculons $f'(x)$ et Montre que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

$$f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x} - [e^x + (x + 1)e^x] = 2e^{2x} - e^x - (x + 1)e^x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2e^{2x} - e^x - (x + 1)e^x = e^x(2e^x - 1 - x - 1) = e^x \times g(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R} ; e^x > 0$. Alors $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Or d'après **Partie B** 4), on a :

$$- \quad \forall x \in]-\infty ; \alpha[\cup]0 ; +\infty[; g(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in]-\infty ; \alpha[\cup]0 ; +\infty[; f'(x) > 0$$

$$- \quad \forall x \in]\alpha ; 0[; g(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in]\alpha ; 0[; f'(x) < 0$$

Etudions le sens de variation de f .

$$- \quad \forall x \in]-\infty ; \alpha[\cup]0 ; +\infty[; f \text{ est strictement croissante.}$$

$$- \quad \forall x \in]\alpha ; 0[; f \text{ est strictement décroissante.}$$

3) Montrons que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α est défini dans la **partie B**.

$$\text{D'après } \textbf{Partie B} \text{ 3) b), on a : } g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2e^\alpha - \alpha - 2 = 0 \Rightarrow e^\alpha = \frac{\alpha + 2}{2}$$

$$\text{D'autre part } f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x \Leftrightarrow f(\alpha) = (e^\alpha)^2 - (\alpha + 1)e^\alpha.$$

$$\text{Or } e^\alpha = \frac{\alpha + 2}{2} \Rightarrow f(\alpha) = \left(\frac{\alpha + 2}{2}\right)^2 - (\alpha + 1) \times \frac{\alpha + 2}{2} = \left(\frac{\alpha + 2}{2}\right)^2 - \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{2}$$

$$= \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 4}{4} - \frac{\alpha^2 + 3\alpha + 2}{2} = \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 4 - 2\alpha^2 - 6\alpha - 4}{4}$$

$$= \frac{-\alpha^2 - 2\alpha}{4} = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}. \Rightarrow f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}. \text{ (Ce qu'il fallait Démontrer)}$$

En déduisons un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$).

$$-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$$

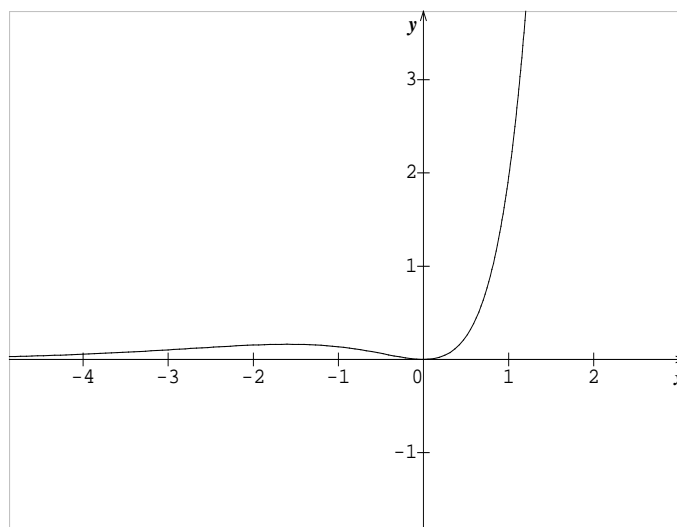
$$\Leftrightarrow f(-1,6) \leq f(\alpha) \leq f(-1,5)$$

$$\Leftrightarrow 0,32 \leq f(\alpha) \leq 0,37$$

5) Etablissons le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$				

5) Traçons la courbe (C), représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal



Partie D : Calcul d'aire

1) Soit m un réel négatif, Interprétons graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x)dx$

La fonction f est positive sur $[m; 0]$ donc l'intégrale $\int_m^0 f(x)dx$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations $x = m$ et $x = 0$.

2) a-Calculons $\int_m^0 xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

$$\int_m^0 xe^x dx$$

Posons $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$$

$$\Rightarrow \int_m^0 xe^x dx = [xe^x]_m^0 - \int_m^0 e^x dx = [xe^x - e^x]_m^0 = (1 - m)e^m - 1$$

b-En déduisons $\int_m^0 f(x)dx$

$$\int_m^0 f(x)dx = \int_m^0 [e^{2x} - (x + 1)e^x]dx = \int_m^0 e^{2x} dx - \int_m^0 xe^x dx - \int_m^0 e^x dx$$

$$\Rightarrow \int_m^0 f(x)dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_m^0 - [xe^x - e^x]_m^0 - [e^x]_m^0 = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_m^0 - [xe^x - e^x]_m^0 - [e^x]_m^0$$

$$\Rightarrow \int_m^0 f(x)dx = \frac{-e^{2m} + 2me^m + 1}{2}$$

3) Calculons la limite de $\int_m^0 f(x)dx$, lorsque m tend vers $-\infty$.

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} \int_m^0 f(x)dx = \lim_{m \rightarrow -\infty} \frac{-e^{2m} + 2me^m + 1}{2} = \frac{-(0) + 2(0) + 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$m \rightarrow -\infty \qquad m \rightarrow -\infty$$

$$\text{D'où } \lim_{m \rightarrow -\infty} \int_m^0 f(x)dx = \frac{1}{2}$$

$$m \rightarrow -\infty$$

12 L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résoudre une équation différentielle dont elle est solution.

A) Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)$

1) Calculons $g'(x)$ et Montre que ce nombre est strictement négatif pour tout x de \mathbb{R} .

$$g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x) \Rightarrow g'(x) = \frac{e^x}{(1+2e^x)^2} - \frac{2e^x}{1+2e^x} = \frac{e^x - 2e^x(1+2e^x)}{(1+2e^x)^2}$$

$$\Rightarrow g'(x) = -\frac{e^x(1+4e^x)}{(1+2e^x)^2}. \text{ Puis que } \forall x \in \mathbb{R} \frac{e^x(1+4e^x)}{(1+2e^x)^2} > 0 \text{ alors } -\frac{e^x(1+4e^x)}{(1+2e^x)^2} < 0$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}; g'(x) < 0$

2) Déterminons les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

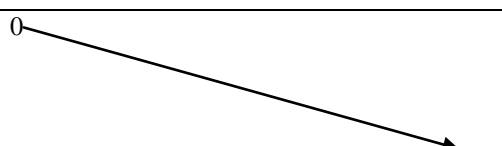
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x) = 0 - 0 = 0$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x) = \frac{1}{2} - (+\infty) = -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

3) Dressons le tableau de variation de g .

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	—	
$g(x)$		

4) Donnons le signe de $g(x)$.

D'après le tableau de variation, $\forall x \in \mathbb{R}; g(x)$ est strictement négative.

B) Etude d'une fonction et calcul d'une aire.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x)$.

On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1) Calculons $f'(x)$ et montrons que pour tout réel x , $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$.

$$f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) \Rightarrow f'(x) = -2e^{-2x} \times \ln(1 + 2e^x) + \frac{2e^x}{1 + 2e^x} \times e^{-2x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2e^{-2x} \left[\frac{e^x}{1 + 2e^x} - \ln(1 + 2e^x) \right] = 2e^{-2x} g(x).$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$.

2) a) Déterminons la limite de f en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 2e^x)}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x} \times \frac{\ln(1 + 2e^x)}{2e^x}$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

Effectuons un changement en posant $X = 2e^x$. Si $x \rightarrow -\infty$ alors $X \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \Leftrightarrow \lim_{X \rightarrow 0} \frac{4}{X} \times \frac{\ln(1+X)}{X}. \quad \text{Or } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \text{ est une limite remarquable}$$

$$x \rightarrow -\infty \quad X \rightarrow 0 \quad X \rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0$$

$$\text{Et d'autre part } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{4}{X} = +\infty$$

$$X \rightarrow 0$$

$$\text{Alors } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{4}{X} \times \frac{\ln(1+X)}{X} = (+\infty)(1) = +\infty$$

$$X \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

b) Déterminons la limite de f en $+\infty$.

$$\text{On pourra remarquer que : si on pose } X = 1 + 2e^x, f(x) \text{ s'écrit } 4 \frac{X}{(X-1)^2} \times \frac{\ln X}{X}$$

Si $x \rightarrow +\infty$ alors $X \rightarrow +\infty$

$$\text{Alors } \lim f(x) \Leftrightarrow \lim 4 \frac{x}{(x-1)^2} \times \frac{\ln x}{x} = \lim \frac{4x}{x^2} \times \frac{\ln x}{x} = \lim \frac{4}{x} \times \frac{\ln x}{x} = 0 \times 0 = 0$$

$$x \rightarrow +\infty \quad X \rightarrow +\infty$$

$$X \rightarrow +\infty$$

$$X \rightarrow +\infty$$

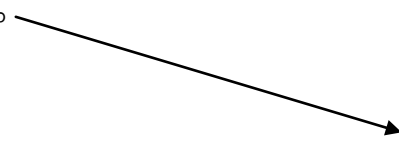
Dressons le tableau de variation de f .

$$f'(x) = 2e^{-2x} g(x).$$

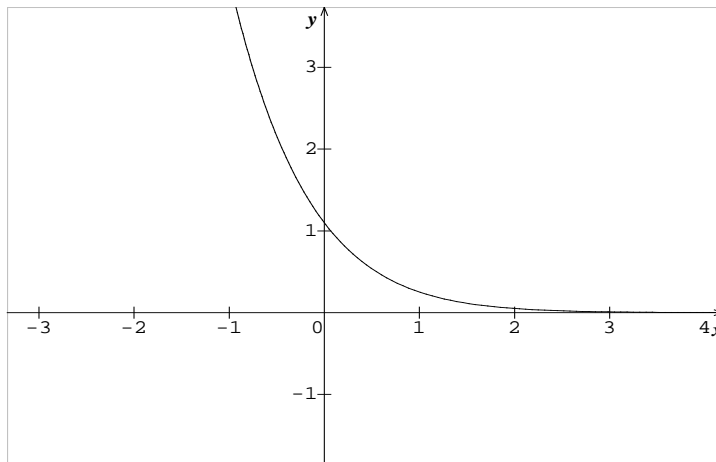
$$\forall x \in \mathbb{R}; 2e^{-2x} > 0 \quad \text{et d'après Partie A)3), } g(x) < 0.$$

$$\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) < 0$$

D'où le tableau de variation de f est le suivant

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$  0	

3) Traçons la courbe C.



4) a- Montrons que $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2 \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$

$$e^{-x} - 2 \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2} = \frac{e^{-2x} + 2e^{-x} - 2e^{-x}}{e^{-x}+2} = \frac{e^{-2x}}{e^{-x}+2} = \frac{e^{-2x}}{\frac{1}{e^x}+2} = \frac{e^{-2x}}{\frac{1+2e^x}{e^x}} = \frac{e^{-2x} \times e^x}{1+2e^x} = \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$$

$$D'où \frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2 \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$$

b- Soit α un réel strictement positif. Calcule l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx$

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx = I(\alpha) = \int_0^\alpha \left(e^{-x} - 2 \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2} \right) dx = [-e^{-x} - 2\ln(e^{-x}+2)]_0^\alpha$$

$$\Rightarrow I(\alpha) = 1 - e^{-\alpha} - 2\ln\left(\frac{e^{-\alpha}+2}{3}\right)$$

c- En déduisons, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : $J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$

$$J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx = \int_0^\alpha e^{-2x} \ln(1+2e^x) dx$$

$$\text{Posons } u(x) = \ln(1+2e^x) \Rightarrow u'(x) = \frac{2e^x}{1+2e^x}$$

$$v'(x) = e^{-2x} \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$\Rightarrow J(\alpha) = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \times \ln(1+2e^x) \right]_0^\alpha + \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \times \ln(1+2e^x) \right]_0^\alpha + I(\alpha)$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \times \ln(1+2e^x) \right]_0^\alpha + I(\alpha) . \text{ Or } I(\alpha) = 1 - e^{-\alpha} - 2\ln\left(\frac{e^{-\alpha}+2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow J(\alpha) = 1 + \frac{5}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}e^{-2\alpha} \times \ln(1+2e^\alpha) - 2\ln(e^{-\alpha}+2) - e^{-\alpha}$$

Donne une interprétation graphique de $J(\alpha)$.

La fonction f est positive sur $[0; \alpha]$ avec $\alpha > 0$. Donc $J(\alpha)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe (C), les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

C) Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2\frac{e^x}{1+2e^x}$

1) Vérifions que la fonction f étudiée dans la partie B est solution de (E).

$$f \text{ est solution de (E) si et seulement si } f'(x) + 2f(x) = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}$$

$$\text{Avec } f(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x) \text{ et } f'(x) = 2e^{-2x} \left[\frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x) \right]$$

$$\text{Alors } f'(x) + 2f(x) = 2e^{-2x} \left[\frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x) \right] + 2e^{-2x} \ln(1+2e^x)$$

$$= \frac{2e^{-x}}{1+2e^x} - 2e^{-2x} \ln(1+2e^x) + 2e^{-2x} \ln(1+2e^x) = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$$

D'où f est solution de (E) : $y' + 2y = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

2) Montrons qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.

NB :

Pour Montre que $A \Leftrightarrow B$, on montre que $\begin{cases} A \Rightarrow B \\ \text{et} \\ B \Rightarrow A \end{cases}$

Ainsi pour Montre qu'une fonction φ est solution de l'équation (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de (E') : $y' + 2y = 0$, on montre que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \text{ est solution de l'équation (E)} \Rightarrow \varphi - f \text{ est solution de (E')} \\ \text{et} \\ \varphi - f \text{ est solution de (E')} \Rightarrow \varphi \text{ est solution de l'équation (E)} \end{array} \right.$$

- Montrons que φ est solution de l'équation (E) $\Rightarrow \varphi - f$ est solution de (E')
 - φ est solution de l'équation (E) si et seulement si $\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$ (1)
 - f est solution de l'équation (E) si et seulement si $f'(x) + 2f(x) = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$ (2)

Effectuons ainsi la différence des relations (1) et (2) :

$$(1) - (2) : [\varphi'(x) - f'(x)] + 2[\varphi(x) - f(x)] = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x} - 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$$

$$\Leftrightarrow (\varphi - f)'(x) + 2(\varphi - f)(x) = 0 \Rightarrow \varphi - f \text{ est solution de (E')}$$

D'où φ est solution de l'équation (E) $\Rightarrow \varphi - f$ est solution de (E')

- Montrons que $\varphi - f$ est solution de (E') $\Rightarrow \varphi$ est solution de l'équation (E)

Si $\varphi - f$ est solution de (E') alors on a : $(\varphi - f)'(x) + 2(\varphi - f)(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$[\varphi'(x) - f'(x)] + 2[\varphi(x) - f(x)] = 0 \Leftrightarrow \varphi'(x) - f'(x) + 2\varphi(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(x) + 2\varphi(x) = f'(x) + 2f(x).$$

$$\text{Avec } f(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x) \text{ et } f'(x) = 2e^{-2x} \left[\frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x) \right]$$

$$\text{Alors } \varphi'(x) + 2\varphi(x) = f'(x) + 2f(x) \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 2e^{-2x} \left[\frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x) \right] + 2e^{-2x} \ln(1+2e^x) \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$$

D'où $\varphi - f$ est solution de (E') $\Rightarrow \varphi$ est solution de l'équation (E)

Conclusion : puisque
$$\begin{cases} \varphi \text{ est solution de l'équation } (E) \Rightarrow \varphi - f \text{ est solution de } (E') \\ \text{et} \\ \varphi - f \text{ est solution de } (E') \Rightarrow \varphi \text{ est solution de l'équation } (E) \end{cases}$$

Alors une fonction φ est solution de l'équation (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de (E') . (Ce qu'il fallait Démontrer).

3) Résolvons (E')

$$(E') : y' + 2y = 0 \Rightarrow S = ke^{-2x}$$

En déduisons les solutions de (E) .

- On sait que $\varphi(x) - f(x)$ est solution de l'équation (E')
- D'autre part ke^{-2x} est aussi solution de l'équation (E')

Par identification, on a : $\varphi(x) - f(x) = ke^{-2x} \Rightarrow \varphi(x) = f(x) + ke^{-2x}$.

$$\text{Or } f(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x) + ke^{-2x}.$$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\varphi(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x) + ke^{-2x}$ avec $(k \in \mathbb{R})$

13 Partie A :

Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x + x - 5$

1) Etudions le sens de variation de g .

(On ne demande pas de Déterminer les limites de g , ni de construire sa courbe).

$$g(x) = e^x + x - 5 \Rightarrow g'(x) = e^x + 1. \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R} ; g'(x) > 0$$

D'où tout $x \in \mathbb{R} ; g$ est strictement croissante de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

2) a) Calculons $g(0)$ et $g(2)$

$$g(0) = -4 \quad \text{et} \quad g(2) = e^2 - 3$$

b) Démontrons que l'équation : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + x - 5 = 0$ admet une solution unique α et que $1,30 < \alpha < 1,31$

- D'après le tableau de variation de g , $\forall x \in]-\infty; +\infty[$; g est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $]-\infty; +\infty[$ vers $]-\infty; +\infty[$. Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = 0$.

$$\text{- De plus } \begin{cases} g(1,30) = -0,03 \\ g(1,31) = 0,01 \end{cases} \Rightarrow g(1,30) \times g(1,31) < 0$$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $1,30 < \alpha < 1,31$.

Partie B :

Soit la fonction numérique f définie sur $] -\infty; 5[$ par : $f(x) = \ln(5 - x)$.

1) Etudions le sens de variation de f . Précisons les limites de f en 5 et en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(5 - x) = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

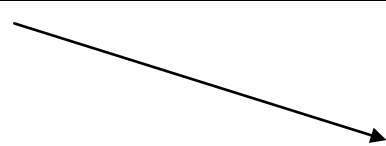
$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \ln(5 - x) = -\infty$$

$$x \rightarrow 5 \quad x \rightarrow 5$$

$$f(x) = \ln(5 - x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{5-x} = \frac{1}{x-5} \Rightarrow \forall x \in]-\infty; 5[; f'(x) < 0$$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	5
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$



2) Prouvons que $f(\alpha) = \alpha$

D'après **Partie A 2) b)**, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = 0$. Alors $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha + \alpha - 5 = 0 \Rightarrow e^\alpha = 5 - \alpha \Rightarrow \alpha = \ln(5 - \alpha)$

D'autre part $f(x) = \ln(5 - x) \Leftrightarrow f(\alpha) = \ln(5 - \alpha)$. Or $\alpha = \ln(5 - \alpha) \Rightarrow f(\alpha) = \alpha$.

3) a) Démontrons que $\forall x \in [0 ; 3]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{x-5}$$

$$x \in [0 ; 3] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq x - 5 \leq -2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x-5} \leq -\frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left| -\frac{1}{5} \right| \leq |f'(x)| \leq \left| -\frac{1}{2} \right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \text{ (Ce qu'il fallait Démontrer)}$$

b) En déduisons que $\forall x \in [0 ; 3]$, on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$

Puis que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|. \text{ Or } f(\alpha) = \alpha. \Rightarrow |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

D'où $\forall x \in [0 ; 3]$, on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$ (Ce qu'il fallait Démontrer).

c) Démontrons que si $0 \leq x \leq 3$, alors $0 \leq f(x) \leq 3$.

$$0 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow f(3) \leq f(x) \leq f(0) \text{ (Car } f \text{ est décroissante)}$$

$$\Rightarrow \ln 2 \leq f(x) \leq \ln 5 \Leftrightarrow 0,69 \leq f(x) \leq 1,60 \Rightarrow f(x) \in [0,69 ; 1,60].$$

Or $[0,69 ; 1,60] \subset [0 ; 3]$. Si $0 \leq x \leq 3$, alors $0 \leq f(x) \leq 3$. (Ce qu'il fallait démontrer)

4) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$, d'unité graphique (3 cm), on désigne son (C) la représentation graphique de la fonction f .

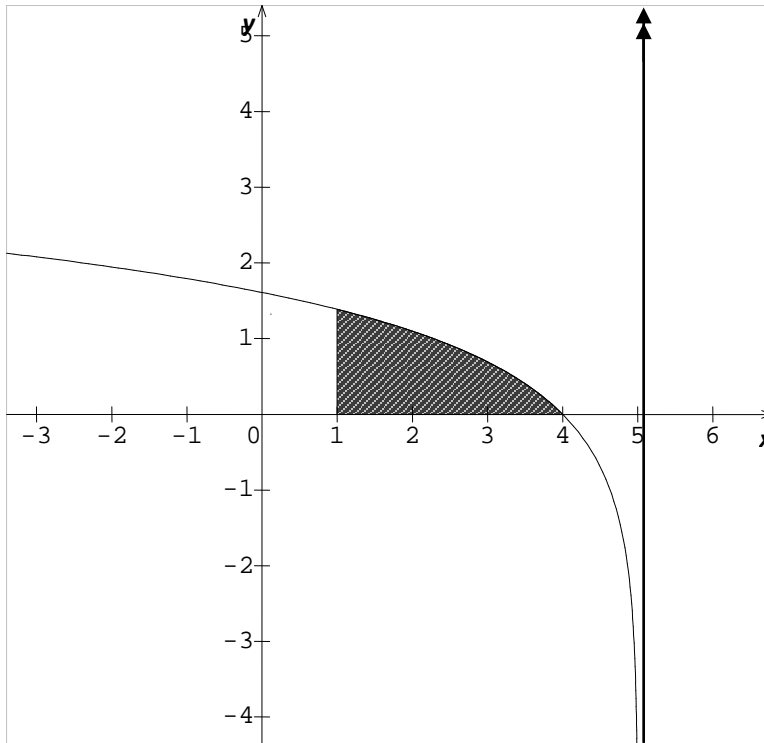
a-Traçons la courbe (C). Calcule puis hachurer la partie du plan formée des points de coordonnées

(x, y) tel que : $\begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ on notera (S) cette partie.

$$S = (3\text{cm})^2 \int_1^4 f(x) dx = (3\text{cm})^2 \int_1^4 \ln(5-x) dx.$$

$$\text{Or si } f(x) = \ln(ax+b) \Rightarrow F(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right) \ln(ax+b) - x + k$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &= (3\text{cm})^2 \int_1^4 f(x) dx = (3\text{cm})^2 \int_1^4 \ln(5-x) dx = \left[\left(x + \frac{5}{-1}\right) \ln(5-x) - x \right]_1^4 (3\text{cm})^2 \\ &= \left[(x-5) \ln(5-x) - x \right]_1^4 (3\text{cm})^2 = (-3 + 4\ln 4) \times 9 \text{ cm}^2 = 22,90 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



b-En remarquant que, $\forall x \neq 5$, $\frac{x}{x-5} = 1 + \frac{5}{x-5}$; montrons que $\int_{\alpha}^4 \frac{x}{x-5} dx = 4 - 6\alpha$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^4 \frac{x}{x-5} dx &= \int_{\alpha}^4 \left(1 + \frac{5}{x-5} \right) dx = \int_{\alpha}^4 \left(1 + 5 \frac{1}{x-5} \right) dx = [x + 5\ln|x-5|]_{\alpha}^4 \\ &= [x + 5\ln|5-\alpha|]_{\alpha}^4 = (4 + 5\ln 1) - (\alpha + 5\ln(5-\alpha)). \end{aligned}$$

$$\int_{\alpha}^4 \frac{x}{x-5} dx = 4 - \alpha - 5\ln(5-\alpha). \text{ Or } \alpha = \ln(5-\alpha)$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^4 \frac{x}{x-5} dx = 4 - \alpha - 5\alpha = 4 - 6\alpha. \text{ (Ce qu'il fallait démontrer)}$$

c-Prouvons que l'aire A de la partie (S) en cm^2 est donnée par $A = -\alpha^2 + 6\alpha - 4$.
(On Utilisea une intégration par partie).

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \int_{\alpha}^4 f(x) dx = \int_{\alpha}^4 \ln(5-x) dx = \left[\left(x + \frac{5}{-1}\right) \ln(5-x) - x \right]_{\alpha}^4 \\ &= \left[(x-5) \ln(5-x) - x \right]_{\alpha}^4 = (-\ln 1 - 4) - \left((\alpha-5) \ln(5-\alpha) - \alpha \right) \\ &= -4 - (\alpha-5) \ln(5-\alpha) + \alpha. \text{ Or } \alpha = \ln(5-\alpha) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = -4 - (\alpha-5)\alpha + \alpha = -4 - \alpha^2 + 5\alpha + \alpha = -\alpha^2 + 6\alpha - 4.$$

D'où $A = -\alpha^2 + 6\alpha - 4$. (Ce qu'il fallait démontrer)

14

On considère la fonction f , définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

A) Etude de la fonction f et tracé de (C)

1) a) Calculons la limite de cette fonction lorsque x tend vers $+\infty$.

$$\lim f(x) = \lim \frac{e^x}{(1+x)^2} = \lim \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

b) Calculons la limite de cette fonction lorsque x tend vers -1 .

$$\lim f(x) = \lim \frac{e^x}{(1+x)^2} = \frac{e^{-1}}{0^+} = +\infty$$

$$x \rightarrow -1 \quad x \rightarrow -1$$

On peut en déduire que la courbe (C) admet une possibilité d'asymptote oblique et admet la droite d'équation $x = -1$ comme asymptote verticale.

2) Calculons $f'(x)$ et Montre que son signe est celui de $\frac{x-1}{x+1}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x}{(1+x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x(1+x)^2 - 2(1+x)e^x}{(1+x)^4} = \frac{e^x(1+x)[(1+x)-2]}{(1+x)^4} = \frac{e^x(1+x-2)}{(1+x)^3} \\ &= \frac{e^x(x-1)}{(1+x)^3} = \frac{e^x}{(1+x)^2} \times \frac{x-1}{x+1} \end{aligned}$$

Or $\forall x \in D_f ; \frac{e^x}{(1+x)^2} > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $\frac{x-1}{x+1}$.

Etudions le signe de $\frac{x-1}{x+1}$. Posons $x-1=0$ et $x+1=0$

$$\Rightarrow x=1 \text{ et } x=-1$$

D'où le tableau de signe de $\frac{x-1}{x+1}$ est le suivant :

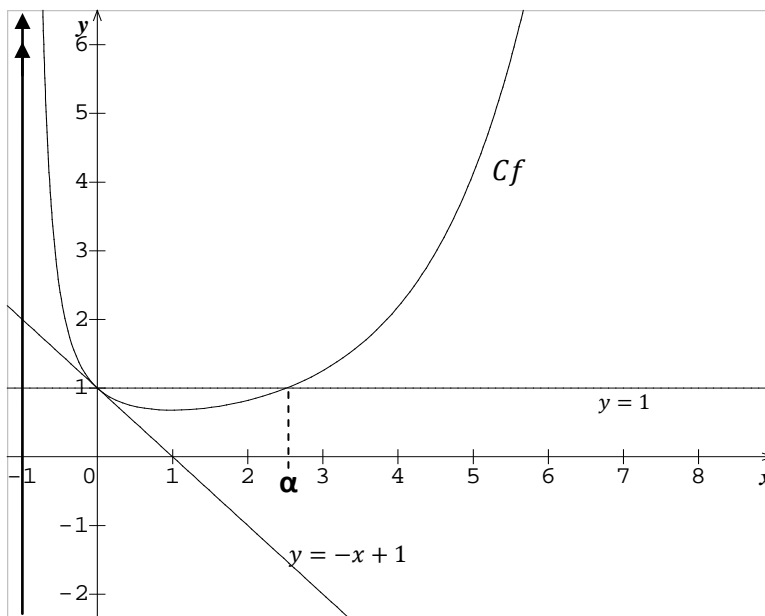
x	-1	1	$+\infty$
$\frac{x-1}{x+1}$	0	0	$+$

3) Dressons le tableau de variation de f .

x	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{e}{4}$	$+\infty$

4) Traçons la courbe (C), les droites d'équations respectives $x = -1$ et $y = 1$, ainsi que la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0. (Unité graphique : 4 cm)

La tangente a pour équation $y = -x + 1$.



5) Montrons que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[1 ; 10]$.

Sur l'intervalle $[1 ; 10]$; f est dérivable et strictement croissante, donc f réalise une bijection

de $[1 ; 10]$ vers l'intervalle $[f(1); f(10)] = \left[\frac{e}{4} ; \frac{e^{10}}{121}\right] = [0,67 ; 182,03]$.

Nous en déduisons 1 appartient à l'intervalle $\left[\frac{e}{4} ; \frac{e^{10}}{121}\right]$. Donc l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution notée α , dans l'intervalle $[1 ; 10]$ telque $f(\alpha) = 1$

Utilisons le graphique précédent pour Donne deux nombres entiers consécutifs a et b tels que α appartient à l'intervalle $[a ; b]$.

Ainsi à l'aide du graphique, nous remarquons α appartient à l'intervalle $[a ; b] = [2 ; 3]$.

B) Calcul d'une aire

1) Soit g la fonction définie sur $] -1 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x+1}$

a-Etudions le sens de variation de g dans l'intervalle $[1 ; 2]$.

g est dérivable sur $[1 ; 2]$ comme quotient des deux fonctions dérivables non nulles :

$x \rightarrow e^x$ et $x \rightarrow 1+x$; et nous avons $g'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$.

De plus $g'(x)$ est strictement positif sur $[1 ; 2]$, alors g est strictement croissante.

b-Montrons que, pour tout x appartenant à $[1 ; 2]$. on a : $1 \leq g(x) \leq 2,5$.

g étant croissante sur $[1 ; 2]$ alors on a l'encadrement suivant : $g(1) \leq g(x) \leq g(2)$.

Or $g(1) = \frac{e}{4} \approx 1,35$ et $g(2) = \frac{e^2}{3} \approx 2,46$. Nous avons : $g(1) > 1$ et $g(2) < 2,5$.

Alors pour tout $x \in [1 ; 2]$: $1 \leq g(x) \leq 2,5$

c-En déduisons un encadrement de $A_1 = \int_1^2 g(x)dx = \int_1^2 \frac{e^x}{x+1} dx$

Nous avons : $1 < 2$ et $1 \leq g(x) \leq 2,5$; d'après les théorèmes d'encadrement d'une intégrale nous déduisons que : $\int_1^2 1dx \leq \int_1^2 g(x)dx \leq \int_1^2 2,5dx \Leftrightarrow$

$$[x]_1^2 \leq \int_1^2 g(x)dx \leq [2,5x]_1^2 \Leftrightarrow 2 - 1 \leq \int_1^2 g(x)dx \leq (2 - 1) \times 2,5$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \int_1^2 g(x)dx \leq 2,5 \Leftrightarrow 1 \leq A_1 \leq 2,5$$

2) Soit A_2 l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$, la courbe (C) et l'axe des abscisses.

A l'aide d'une intégration par parties, exprimons A_2 en fonction de A_1

La fonction f est positive sur $[1 ; 2]$, donc l'aire A_2 cherchée est donnée par :

$$A_2 = \int_1^2 \frac{e^x}{(1+x)^2} dx$$

Posons : $u(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = e^x$

$$v'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow A_2 = \left[-\frac{e^x}{1+x} \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{e^x}{1+x} dx = -\frac{e^2}{3} + \frac{e}{2} + A_1$$

$$\Rightarrow A_2 = A_1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e}{2}$$

En déduisons un encadrement de A_2 .

On sait que l'encadrement de A_1 est : $1 \leq A_1 \leq 2,5$.

$$\text{Or } A_2 = A_1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e}{2} \Rightarrow A_1 = A_2 + \frac{e^2}{3} - \frac{e}{2}$$

$$\text{Alors } 1 \leq A_1 \leq 2,5 \Leftrightarrow 1 \leq A_2 + \frac{e^2}{3} - \frac{e}{2} \leq 2,5 \Leftrightarrow 1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e}{2} \leq A_2 \leq 2,5 - \frac{e^2}{3} + \frac{e}{2}$$

C) Approximation d'un nombre à l'aide d'une suite

Pour cette partie, on utilise sans justification le fait que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution β et que celle-ci est élément de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

Soit h la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $h(x) = \frac{e^x}{(1+x)^3}$

1) a- Vérifions que, pour tout x appartenant à $] -1; +\infty[$, on a : $f'(x) = f(x) - 2h(x)$.

$$\begin{aligned} \text{On sait que } f'(x) &= \frac{e^x(x-1)}{(1+x)^3} = \frac{e^x(x+1-2)}{(1+x)^3} = \frac{(x+1)e^x - 2e^x}{(1+x)^3} = \frac{(x+1)e^x}{(1+x)^3} - 2 \frac{e^x}{(1+x)^3} \\ &= \frac{e^x}{(1+x)^2} - 2 \frac{e^x}{(1+x)^3} = f(x) - 2h(x). \end{aligned}$$

b-Calculons $h'(x)$.

$$h(x) = \frac{e^x}{(1+x)^3} \Rightarrow h'(x) = \frac{(1+x)^3 e^x - 3(1+x)^2 e^x}{(1+x)^6} = \frac{(x-2)e^x}{(1+x)^4}$$

c-En utilisant la question a), calculé $f''(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) - 2h(x) \Rightarrow f''(x) = f'(x) - 2h'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(1+x)^3} - 2 \frac{(x-2)e^x}{(1+x)^4} \\ \Rightarrow f''(x) &= \frac{(x^2 - 2x + 3)e^x}{(1+x)^4} \end{aligned}$$

En déduisons le sens de variation de f' dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

Pour tout x de l'intervalle $] -1; +\infty[$, $x^2 - 2x + 3$ est positif, donc $f''(x)$ est strictement positif sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, nous en déduisons que f' est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

2) En déduisons que, pour tout x appartenant à $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

$$x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$$

D'autre part f' est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, donc pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$; on a :

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) \leq f'(x) \leq f'(1) \Leftrightarrow -\frac{4e^{\frac{1}{2}}}{27} \leq f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow -0,24 \leq f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq |f'(x)| \leq \left|-\frac{1}{4}\right| \Leftrightarrow 0 \leq |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$$

Alors pour tout x appartenant à $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ (Ce qu'il fallait Démontrer)

3) On définit la suite (u_n) , pour tout nombre entier naturel n , par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour } n \geq 0$$

On admet que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

a-Montrons que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$

Puis que $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$, alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|f(x) - f(\beta)| \leq \frac{1}{4}|x - \beta|. \text{ Or } f(\beta) = \beta. \Rightarrow |f(x) - \beta| \leq \frac{1}{4}|x - \beta|$$

D'où $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$; on a : $|f(x) - \beta| \leq \frac{1}{4}|x - \beta|$

Posons $u_n = x$. Alors on a : $|f(u_n) - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$

D'où pour tout nombre entier naturel n , on a : $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$

b-Montre par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

- si $n = 0$; $u_0 = 1$ et $\beta \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Alors $|1 - \beta| \leq 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^0$ vraie $\forall x \in \mathbb{N}$.
- Supposons que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire $|u_{n+1} - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

En utilisant le résultat de la question précédente, nous pouvons écrire :

$$|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta| \Leftrightarrow |u_{n+1} - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}.$$

D'où la relation est vraie à l'ordre $n + 1$.

Conclusion : pour tout nombre entier naturel n , on a : $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ (Ce qu'il fallait Démontrer)

c-En déduisons une valeur approchée numérique de β à 10^{-3} près.

Cherchons n tel que $|u_n - \beta| < 10^{-3}$. D'après ce qui précède, il suffit que $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ soit inférieur à 10^{-3} si $n \ln\left(\frac{1}{4}\right) < \ln 10^{-3} \Leftrightarrow -n \ln 4 < \ln 10^{-3} \Leftrightarrow n \ln 4 > -\ln 10^{-3} \Rightarrow n > -\frac{\ln 10^{-3}}{\ln 4}$

$\Rightarrow n > 4,98$. Puisque n est un entier alors il suffit de prendre $n = 5$.

D'où u_5 est donc une valeur approchée de β à 10^{-3} près.

Ainsi $u_5 \approx 0,697$ est une valeur approchée numérique de β à 10^{-3} près.

15 Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité 5 cm).

Partie A :

On considère la fonction f_1 définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_1(x) = xe^{-x^2}$ et on appelle C_1 sa courbe représentative.

1) Montrons que pour tout réel positif x , $f'_1(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$

$$f_1(x) = xe^{-x^2} \Rightarrow f'_1(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$$

En déduis le sens de variation de f_1 .

$$f'_1(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} \Rightarrow f'_1(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $e^{-x^2} > 0$ alors le signe de $f'_1(x)$ dépend du signe de $1 - 2x^2$.

$$\text{Posons } 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f'_1(x)$	+	0	-

D'après le tableau ci-dessus :

$\forall x \in \left[0 ; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[; f'_1(x) > 0$. Par conséquent $\forall x \in \left[0 ; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[; f_1$ est strictement croissante.

$\forall x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}} ; +\infty\right[; f_1(x) < 0$. Par conséquent $\forall x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}} ; +\infty\right[; f_1$ est strictement décroissante.

2) Calculons la limite de f_1 en $+\infty$ (on pourra poser $u = x^2$).

$\lim f_1(x) = \lim x e^{-x^2}$. Posons $u = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{u} \Leftrightarrow x = u^{\frac{1}{2}}$.

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

Si $x \rightarrow +\infty$ alors $u \rightarrow +\infty$

Alors : $\lim f_1(x) \Leftrightarrow \lim f_1(u) = \lim u^{\frac{1}{2}} e^{-u}$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$; $\lim u^n e^{-u} = 0$

$$x \rightarrow +\infty \quad u \rightarrow +\infty \quad u \rightarrow +\infty \quad u \rightarrow +\infty$$

D'où $\lim f_1(x) = 0$

$$x \rightarrow +\infty$$

Interprétons graphiquement ce résultat.

Puisque $\lim f_1(x) = 0$. Alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la

$$x \rightarrow +\infty \quad \text{Courbe } C_1 \text{ de } f_1$$

- 3) Dressons le tableau de variation de f_1 . D'où le tableau de signe de $f'_1(x)$ est le suivant :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f'_1(x)$		0	
$f_1(x)$	0	$\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$	0

4) On appelle Δ la droite d'équation $y = x$. Déterminons la position de C_1 par rapport à Δ .

Pour Détermine la position de C_1 par rapport à Δ , nous étudions le signe de $h(x)$ avec :

$$h(x) = x - f_1(x).$$

$$h(x) = x - f_1(x) = x - x e^{-x^2} = x(1 - e^{-x^2}).$$

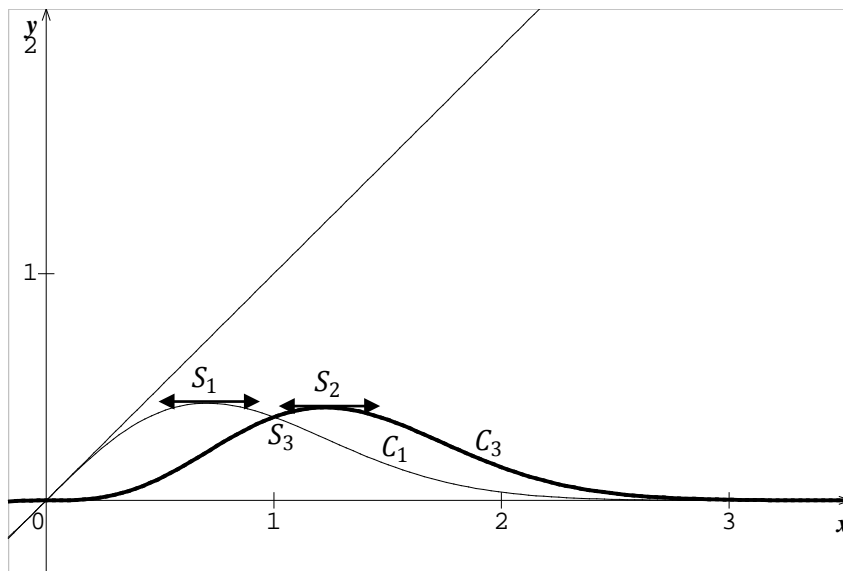
x est positif ou nul sur $[0 ; +\infty[$; $h(x)$ a donc le signe de $1 - e^{-x^2}$.

Posons $1 - e^{-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq \ln 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$. En posant $x^2 = 0$; on a : $x = 0$

Alors nous en déduisons que $h(x)$ est positif ou nul sur $[0 ; +\infty[$.

D'où $\forall x \in [0; +\infty[$; la courbe C_1 est au dessus de la droite Δ .

5) Traçons C_1 et Δ .



Partie B :

On considère la fonction f_3 définie sur $[0; +\infty[$ par $f_3(x) = x^3 e^{-x^2}$ et on appelle C_3 sa courbe représentative.

1) Montrons que pour tout réel x positif, $f'_3(x)$ a même signe que $3 - 2x^2$.

$$\begin{aligned} f_3(x) = x^3 e^{-x^2} &\Rightarrow f'_3(x) = 3x^2 e^{-x^2} - 2x e^{-x^2} \times x^3 = 3x^2 e^{-x^2} - 2x^4 e^{-x^2} \\ &= (3 - 2x^2)x^2 e^{-x^2}. \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 e^{-x^2} > 0$; Alors le signe de $f'_3(x)$ dépend du signe de $3 - 2x^2$.

En déduisons le sens de variation de f_3 .

Posons $3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}}$. D'où le tableau de signe de $f'_3(x)$ est le suivant :

x	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f'_3(x)$	+	0	-

D'après le tableau ci-dessus :

$\forall x \in \left[0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right]; f'_3(x) > 0$. Par conséquent $\forall x \in \left[0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right]; f_3$ est strictement croissante.

$\forall x \in \left[\sqrt{\frac{3}{2}}; +\infty\right]; f'_3(x) < 0$. Par conséquent $\forall x \in \left[\sqrt{\frac{3}{2}}; +\infty\right]; f_3$ est strictement décroissante.

2) Déterminons les positions relatives de C_1 et C_3 .

Pour Détermine la position de C_1 et C_3 par rapport à Δ , nous étudions le signe de $h(x)$ avec :

$$k(x) = f_1(x) - f_3(x) = xe^{-x^2} - x^3e^{-x^2} = (1 - x^2)xe^{-x^2}.$$

xe^{-x^2} est positif ou nul sur $[0; +\infty[$. Donc le signe de $k(x)$ dépend du signe de $1 - x^2$.

$$\text{Posons } 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$k(x)$	+	0	-

D'après le tableau ci-dessus :

$\forall x \in [0; 1[; k(x) > 0$. Par conséquent $\forall x \in [0; 1[; la courbe C_1 est au dessus de la courbe C_3$

$\forall x \in]1; +\infty[; k(x) < 0$. Par conséquent $\forall x \in]1; +\infty[; la courbe C_1 est en dessous de la courbe C_3$

3) Traçons C_3 dans le même repère que C_1 (**Voir figure dans la partie A**)

4) On appelle D la droite d'équation $x = 1$. Soit A_1 l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe C_1 , les deux axes de coordonnées et la droite D et soit A_3 l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe C_3 , les deux axes de coordonnées et la droite D.

a-Calculons A_1 .

$$\text{Sur } [0; 1]; f_1(x) \geq 0. \text{ Donc } A_1 = \int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 xe^{-x^2} dx = \int_0^1 \frac{-2}{-2} \times xe^{-x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 2xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} [e^{-x^2}]_0^1 = \left[-\frac{e^{-x^2}}{2} \right]_0^1 = \left(-\frac{e^{-1}}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{e^{-1}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right) u.a \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right) u.a$$

b-A l'aide d'une intégration par parties, montrons que $A_3 = -\frac{1}{2e} + A_1$

$$A_3 = \int_0^1 f_3(x)dx = \int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx = \int_0^1 x^2 \times x e^{-x^2} dx$$

Posons : $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$

$$v'(x) = x e^{-x^2} \Rightarrow v(x) = -\frac{e^{-x^2}}{2}$$

$$\Rightarrow A_3 = \left[-\frac{x^2 e^{-x^2}}{2} \right]_0^1 + \int_0^1 x e^{-x^2} dx \quad A_3 = -\frac{e^{-1}}{2} + A_1. \text{ Or } e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow A_3 = -\frac{1}{2e} + A_1$$

Partie C :

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f_n définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$. On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

1) Montrons que pour tout entier $n \geq 1$, f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$. On note α_n ce maximum.

Pour tout $x \in [0 ; +\infty[$; f_n est dérivable et sa dérivée est telle que :

$$\text{Si } f_n(x) = x^n e^{-x^2} \Rightarrow f'_n(x) = n x^{n-1} \times e^{-x^2} - 2x e^{-x^2} \times x^n = x^{n-1} (n - 2x^2) e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow f'_n(x) = x^{n-1} (n - 2x^2) e^{-x^2}.$$

Pour tout $x \in [0 ; +\infty[$; $x^{n-1} e^{-x^2} > 0$. Alors le signe de $f'_n(x)$ dépend du signe de

$$n - 2x^2. \text{ Posons } n - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{n}{2}}$$

x	0	$\sqrt{\frac{n}{2}}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-

D'après le tableau ci-dessus :

$$\forall x \in \left] 0 ; \sqrt{\frac{n}{2}} \right[; f'_n(x) > 0 \text{ et } \forall x \in \left] \sqrt{\frac{n}{2}} ; +\infty \right[; f'_n(x) < 0.$$

D'où f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$ et ce maximum est noté α_n

2) On appelle S_n le point de (C_n) d'abscisse $\sqrt{\frac{n}{2}}$.

Montrons que, pour tout n , (C_n) passe par S_2 .

S_2 est le point d'abscisse $\sqrt{\frac{2}{2}} = 1$. Son ordonnée est $f_2(1) = \frac{1}{e}$.

Calculons $f_n(1)$

$f_n(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Donc S_2 appartient à toutes les courbes (C_n)

Plaçons S_1, S_2, S_3 (Voir la figure).

3) Soit la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^{\frac{x}{2}[-1 + \ln(\frac{x}{2})]}$

a-Etudions le sens de variation de g .

La fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables et sa

dérivée est $g'(x) = \left[\frac{x}{2} \times \frac{1}{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}(-1 + \ln \frac{x}{2}) \right] \times g(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{2} \times g(x)$

$g(x) = e^{\frac{x}{2}(-1 + \ln \frac{x}{2})}$ est positif pour tout $x \in]0; +\infty[$; donc $g'(x)$ a le signe de $\ln \frac{x}{2}$.

Posons $\ln \frac{x}{2} > 0 \Rightarrow \frac{x}{2} > e^0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} > 1 \Rightarrow x > 2$.

Ainsi pour les $x > 2$; on a $g'(x) > 0$ et les $x < 2$; on a $g'(x) < 0$.

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		0	
		-	+
$g(x)$	1	e^{-1}	$+\infty$

- $\forall x \in]0; 2[$; g est strictement décroissante.

- $\forall x \in]2; +\infty[; g$ est strictement croissante.

b-Montrons que pour tout entier $n \geq 1, \alpha_n = g(n)$.

$$\alpha_n = \left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)^n \times e^{-\frac{n}{2}} = e^{n \ln \sqrt{\frac{n}{2}}} \times e^{-\frac{n}{2}} = e^{\frac{n}{2}(\ln \frac{n}{2} - 1)} = g(n) \Rightarrow \alpha_n = g(n)$$

En déduisons que tout point S_n , on a une ordonnée supérieure à celle de S_2 .

S_n est le point de coordonnées $\left(\sqrt{\frac{n}{2}}; g(n)\right)$; S_2 est le point de coordonnées $(1; g(2))$.

Puisque g est croissante sur $]2; +\infty[$ et décroissante sur $]0; 2[$; alors admet un minimum pour la valeur 2.

Pour tout x de $]0; +\infty[; g(x) \geq g(2)$. Alors on en déduit que, pour tout $n \geq 1$; on a :

$$g(n) \geq g(2).$$

D'où le point S_n a une ordonnée supérieure à celle de S_2 .

16

Le problème est composé de l'étude d'une suite de fonctions dépendant d'un paramètre, puis de la recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation du type : $f(x) = x$.

Partie A :

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n la fonction numérique de la variable réelle définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).

1) Déterminons la fonction dérivée f'_n de f_n et donnons l'expression de f'_n en fonction de f_n et de f_{n+1} .

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{e^x}{(x+1)^n} \Rightarrow f'_n(x) = \frac{e^x(x+1)^n - n(x+1)^{n-1}e^x}{(x+1)^{2n}} = \frac{e^x(x+1)^n}{(x+1)^{2n}} - n \frac{(x+1)^{n-1}e^x}{(x+1)^{2n}} \\ &= \frac{e^x}{(x+1)^{-n} \times (x+1)^{2n}} - n \frac{e^x}{(x+1)^{-n+1} \times (x+1)^{2n}} = \frac{e^x}{(x+1)^n} - n \frac{e^x}{(x+1)^{n+1}} \\ \Rightarrow f'_n(x) &= f_n(x) - n f_{n+1}(x) \end{aligned}$$

2) Etudions les variations de f_n et ses limites éventuelles en $-\infty$; -1 et $+\infty$. (On distinguera les cas où n est pair et n est impair.)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{(x+1)^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(x+1)^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{e^x}{(x+1)^n} = \frac{e^{-1}}{(0^-)^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est paire} \\ \text{et} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

$$x \rightarrow -1^- \quad x \rightarrow -1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{e^x}{(x+1)^n} = \frac{e^{-1}}{(0^+)^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est paire} \\ \text{et} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

$$x \rightarrow -1^+ \quad x \rightarrow -1^+$$

3) Démontrons que toutes les courbes (C_n) passent par un même point.

Soit $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ce point tel que si toutes les courbes (C_n) passent par un même point, alors on a :

$$f_0(x_0) = f_1(x_0).$$

$$f_0(x_0) = f_1(x_0) \Leftrightarrow \frac{e^{x_0}}{(x_0+1)^0} = \frac{e^{x_0}}{(x_0+1)^1} \Leftrightarrow e^{x_0} = \frac{e^{x_0}}{x_0+1} \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{x_0+1} \Leftrightarrow$$

$$x_0 + 1 = 1 \Rightarrow x_0 = 0.$$

En remplaçant $x = 0$ par sa valeur dans $y_0 = f_1(x_0)$ ou dans $y_0 = f_0(x_0)$; on a :

$$y_0 = f_1(0) = \frac{e^0}{(0+1)^1} = \frac{1}{1} = 1. \text{ D'où toutes les courbes } (C_n) \text{ passent par un même point } A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4) Déterminons la limite de $\frac{f_n(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{(x+1)^n}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x(x+1)^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x \times (x+1)^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x \times x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{n+1}} = +\infty$$

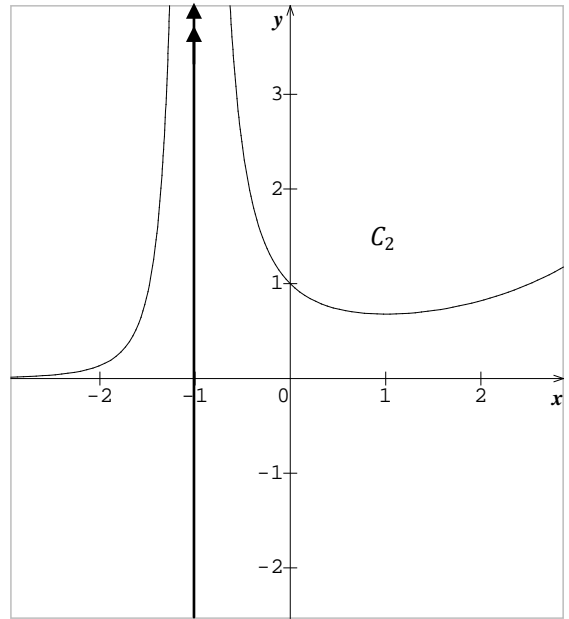
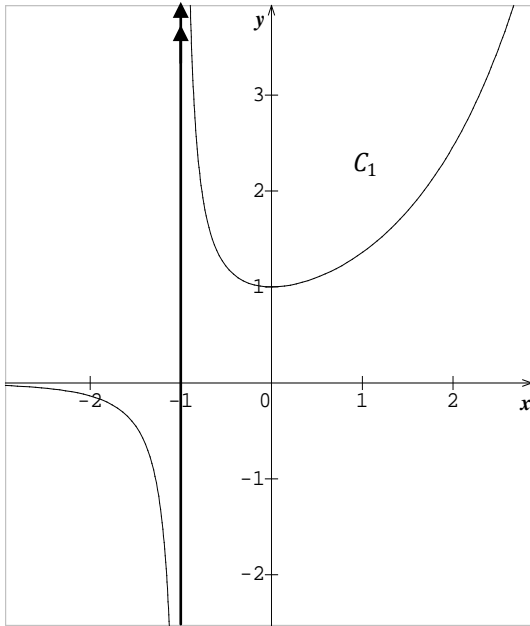
$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

On peut en déduire que toutes les courbes (C_n) admettent l'axe $(y'0y)$ comme direction parabolique.

Traçons sur deux figures distinctes les courbes (C_1) et (C_2) .



Partie B

Pour tout entier n strictement positif, on note : $I_n = \int_0^1 f_n dx$.

1) Démontrons que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle converge.

La suite (I_n) est décroissante si et seulement si $I_{n+1} - I_n < 0$

Pour tout x appartenant à $[0 ; 1]$; $(x + 1)^{n+1} > (x + 1)^n \Leftrightarrow \frac{1}{(x + 1)^{n+1}} < \frac{1}{(x + 1)^n}$

Or $e^x > 0$. Alors on a : $\frac{e^x}{(x + 1)^{n+1}} < \frac{e^x}{(x + 1)^n}$. En intégrant sur $[0 ; 1]$, on a :

$$\int_0^1 \frac{e^x}{(x + 1)^{n+1}} dx < \int_0^1 \frac{e^x}{(x + 1)^n} dx \Leftrightarrow I_{n+1} < I_n \Leftrightarrow I_{n+1} - I_n < 0.$$

D'où la suite (I_n) est décroissante.

D'autre part si x appartient à $[0 ; 1]$; alors on a :

$$0 \leq x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x + 1 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq (x + 1)^n \leq 2^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{(x + 1)^n} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{2^n} \leq \frac{e^x}{(x + 1)^n} \leq e^x . \text{ En intégrant sur } [0 ; 1] ; \text{ on a :}$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{2^n} dx \leq \int_0^1 \frac{e^x}{(x + 1)^n} dx \leq \int_0^1 e^x dx \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \int_0^1 e^x dx \leq I_n \leq \int_0^1 e^x dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2^n} [e^x]_0^1 \leq I_n \leq [e^x]_0^1 \Leftrightarrow \frac{e - 1}{2^n} \leq I_n \leq e - 1. \text{ Alors La suite } (I_n) \text{ est majorée.}$$

Conclusion : La suite (I_n) étant décroissante et majorée, alors elle converge.

2) Déterminons en utilisant la relation de la question **A).1)**, une relation entre I_n et I_{n+1} .

D'après la relation de la question **A).1)**, on a : $f'_n(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x)$.

$f'_n(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x)$. En intégrant sur $[0 ; 1]$; on a :

$$\int_0^1 f'_n(x) dx = \int_0^1 f_n(x) dx - n \int_0^1 f_{n+1}(x) dx \Leftrightarrow [f_n(x)]_0^1 = I_n - n I_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow [f_n(1) - f_n(0)]_0^1 = I_n - n I_{n+1} \Leftrightarrow [f_n(1) - f_n(0)]_0^1 = I_n - n I_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e}{2^n} - 1 = I_n - n I_{n+1} .$$

D'où la relation entre I_n et I_{n+1} est : $I_n - n I_{n+1} = \frac{e}{2^n} - 1$

Partie C :

Le but de cette partie est de Détermine une valeur approchée de α .

On pose : $n = 2$.

1) Démontrons que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$

$$f_2(x) = x \Leftrightarrow f_2(x) - x = 0. \text{ Posons } h(x) = f_2(x) - x$$

Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; h est dérivable et strictement décroissante, donc h réalise une bijection de $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ vers l'intervalle $\left[h(1); h\left(\frac{1}{2}\right)\right] = [-0,32; 0,22]$.

Donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution notée α , dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ telle que $h(\alpha) = 0$. Or $h(x) = f_2(x) - x$. Par conséquent l'équation $f_2(x) - x = 0 \Leftrightarrow f_2(x) = x$ admet une solution unique α telle que $f_2(\alpha) = \alpha$.

De plus $h\left(\frac{1}{2}\right) \times h(1) < 0$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

2) Etudions les variations de f'_2 dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et en déduisons que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; on a : $0 \leq |f'_2(x)| \leq 0,25$

$$f_2(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2} \Rightarrow f'_2(x) = \frac{(x^2-1)e^x}{(x+1)^4} \text{ et } f''_2(x) = \frac{(x^2-2x+3)e^x}{(x+1)^4} > 0.$$

D'où $\forall x \in Df'_2; f''_2(x) > 0$. Par conséquent f'_2 est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

D'où si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$; on a : $f'_2\left(\frac{1}{2}\right) \leq f'_2(x) \leq f'_2(1) \Leftrightarrow -0,25 \leq f'_2(x) \leq 0$

En appliquant la valeur absolue, on a : $0 \leq |f'_2(x)| \leq 0,25 \Leftrightarrow 0 \leq |f'_2(x)| \leq \frac{1}{4}$

D'où $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$; on a : $0 \leq |f'_2(x)| \leq \frac{1}{4}$ (Ce qu'il fallait Démontrer).

3) Soit $(u_n), n \in \mathbb{N}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f_2(u_n) \end{cases}$

a-Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

On sait que : $u_{n+1} = f_2(u_n)$

Pour $n = 0$; on a : $u_1 = f_2(u_0) = f_2(0) = 1 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Vraie

Supposons la relation $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ est vraie et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$ c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

On sait que $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $f_2(x) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et $u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. En posant $x = u_n$, on a :

$$f_2(u_n) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \Leftrightarrow u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \text{ car } f_2(u_n) = u_{n+1}.$$

D'où la relation est vraie à l'ordre $n + 1$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $u_n \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ (Ce qu'il fallait Démontrer).

b- Démontrons, en utilisant la question **C.2**, que pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$$

On sait que d'après la question **C.2**, on a : $|f'_2(x)| \leq \frac{1}{4}$.

Alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|f_2(x) - f_2(\alpha)| \leq \frac{1}{4} |x - \alpha| . \text{ Or d'après la question C.1, on a : } f_2(\alpha) = \alpha . \text{ D'où}$$

$$|f_2(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4} |x - \alpha| . \text{ En posant } x = u_n, \text{ on a : } |f_2(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$$

Or $f_2(u_n) = u_{n+1}$. D'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$ (Ce qu'il fallait Démontrer).

c- En déduisons que pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$

On sait que $\alpha \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right] \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ et $u_0 = 0$

Il vient que : $u_0 - \frac{1}{2} \leq u_0 - \alpha \leq u_0 - 1$

$$\Leftrightarrow |u_0 - 1| \leq |u_0 - \alpha| \leq \left|u_0 - \frac{1}{2}\right|$$

$$\Leftrightarrow |u_0 - 1| \leq |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^0$. D'où la relation est vraie à l'ordre $n = 0$

Supposons la relation est vraie à l'ordre n c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$; on a :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ Puis montrons qu'elle est vraie à l'ordre } n + 1 \text{ c'est-à-dire } \forall n \in \mathbb{N} ;$$

$$\text{on a : } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

D'après **Partie C 3) b)**, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$.

$$\text{Par suite } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

$$\text{D'où } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

Conclusion : tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$. (Ce qu'il fallait Démontrer).

Montrons que la suite (u_n) , $n \in \mathbb{N}$ converge vers α .

La suite de terme général $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ est convergente $\forall n \in \mathbb{N}$ et converge donc vers 0.

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \alpha = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$

D'où la suite u_n est convergente et converge vers α

17 On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$

On note (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité graphique (4 cm).

Partie A : (Etude d'une fonction auxiliaire).

On définit la fonction g sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$

1) Etudions les variations de g , puis dressons son tableau de variation.

$$Dg = [0 ; +\infty[$$

$$g(0) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = (+\infty)(1 + 0 - \infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$g(x) = x + 2 - e^x \Rightarrow g'(x) = 1 - e^x.$$

$$\text{Posons } g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Rightarrow x < \ln 1 \Rightarrow x < 0.$$

Ainsi pour les $x < 0$, on a : $g'(x) > 0$ et pour les $x > 0$, on a : $g'(x) < 0$

Nous en déduisons que $\forall x \in [0 ; +\infty[$; g est strictement décroissante.

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		-	
$g(x)$	1	0	$-\infty$

Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et que $1,14 < \alpha < 1,15$.

D'après le tableau de variation g est définie, continue et strictement décroissante de $[0 ; +\infty[$ vers $]-\infty ; 1]$ et par conséquent l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α telle que $g(\alpha) = 0$

De plus : $\begin{cases} g(1,14) = 0,01 \\ g(1,15) = -0,008 \end{cases} \Rightarrow g(1,14) \times g(1,15) < 0$. Alors d'après le théorème des

valeurs intermédiaires il existe un unique α tel que $1,14 < \alpha < 1,15$.

2) En déduisons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

D'après le tableau ci-dessus, $\forall x]0 ; \alpha[; g(x) > 0$ et $\forall x]\alpha ; +\infty[; g(x) < 0$

Partie B : (Etude et tracée de f).

1) Montrons que $\forall x \in [0 ; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$.

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x(xe^x + 1) - (x+1)e^x \times (e^x - 1)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x(x + 2 - e^x)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}.$$

D'où $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$ (Ce qu'il fallait Démontrer).

En déduisons le sens de variation de f .

Pour tout x appartenant à $[0 ; +\infty[$, $\frac{e^x}{(xe^x + 1)^2} > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du

signe de $g(x)$. Or d'après **partie A) 2)**, on a :

$\forall x]0 ; \alpha[; g(x) > 0$. Alors $\forall x]0 ; \alpha[; f'(x) > 0$

Et $\forall x]\alpha ; +\infty[; g(x) < 0$. Alors $\forall x]\alpha ; +\infty[; f'(x) < 0$

Nous en déduisons ainsi que :

$\forall x]0 ; \alpha[; f$ est strictement croissante.

Et

$\forall x]\alpha ; +\infty [; f$ est strictement décroissante.

2) a) Montrons que $\forall x \in [0 ; +\infty[; f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} \Rightarrow f(x) = \frac{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(x - \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{x - \frac{1}{e^x}} = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$$

b) En déduisons $\lim f(x)$.

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim f(x) = \lim \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} = \frac{1 - 0}{+\infty + 0} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

Interprétons graphiquement ce résultat.

Puis que $\lim f(x) = 0$. Alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la

$$x \rightarrow +\infty \quad \text{courbe (C)}.$$

3) Montrons que $\forall x \in [0 ; +\infty[, f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$

D'après **partie A) 1)**, on a : $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2 - e^\alpha = 0 \Rightarrow e^\alpha = \alpha + 2$

$$\text{D'autre part, } f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} \Rightarrow f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1}$$

En remplaçant $e^\alpha = \alpha + 2$ par sa valeur dans $f(\alpha)$; on a :

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1} = \frac{(\alpha + 2) - 1}{\alpha (\alpha + 2) + 1} = \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

D'où $\forall x \in [0 ; +\infty[, f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$ (Ce qu'il fallait Démontrer)

Puis déterminons l'équation de la tangente au point $x_0 = 0$

L'équation de la tangente au point $x_0 = 0$ est $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 1(x) + 0 = x$

D'où $y = x$ est l'équation de la tangente au point $x_0 = 0$.

4) Montrons que $f(x) - x = \frac{(x + 1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1}$.

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x = \frac{e^x - 1 - x^2 e^x - x}{xe^x + 1} = \frac{e^x (1 - x^2) - (1 + x)}{xe^x + 1}$$

$$= \frac{e^x(1-x)(1+x) - (1+x)}{xe^x + 1} = \frac{(1+x)[e^x(1-x) - 1]}{xe^x + 1} = \frac{(x+1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1}$$

D'où $f(x) - x = \frac{(x+1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1}$ (Ce qu'il fallait Démontrer)

Etudions les variations de la fonction $T(x) = e^x - xe^x - 1$.

$$T(x) = e^x - xe^x - 1$$

$$DT = [0; +\infty[$$

$$T(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - xe^x - 1 = -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$T(x) = e^x - xe^x - 1 \Rightarrow T'(x) = -xe^x$$

Pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$, $e^x > 0$. Alors le signe de $T'(x)$ dépend donc du

Signe de $-x$. Posons $-x = 0 \Rightarrow x = 0$

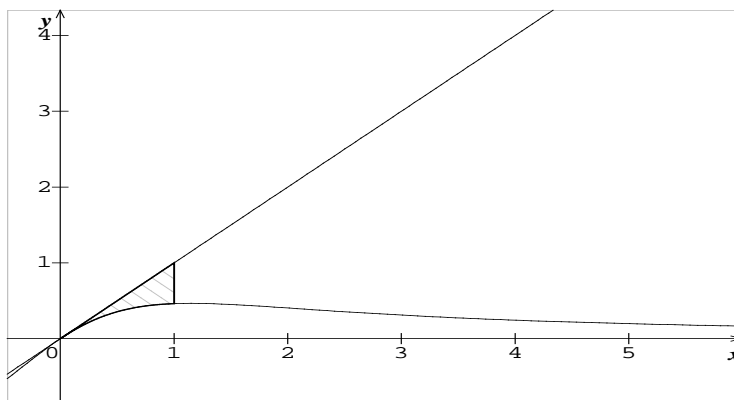
D'où le tableau de signe de $T(x)$ est le suivant :

x	0	$+\infty$
$T(x)$		-

En déduisons la position de (C) par rapport à (T). Trace (C) et (T).

D'après le tableau de signe de T , $\forall x \in [0; +\infty[; T(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) - x \geq 0$

D'où $\forall x \in [0; +\infty[; la courbe (C) est en dessous de la tangente (T).$



Partie C :

1) Déterminons une primitive F de f en utilisant la question 2) a) de la **partie B**.

D'après **partie B 2) a)** on a : $\forall x \in [0 ; +\infty[; f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$.

Alors si $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} \Rightarrow F(x) = \ln|x + e^{-x}| + k$

2) Calculons en cm^2 l'aire A du domaine plan limité par (C), la tangente (T) et droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$

$$\begin{aligned} A &= (4cm)^2 \int_0^1 f(x) dx = 16cm^2 \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} dx = 16cm^2 [\ln|x + e^{-x}|]_0^1 \\ &= \ln\left(\frac{1+e}{e}\right) \times 16cm^2 = 5,01cm^2 \end{aligned}$$

18 **Partie A :**

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (2 + \cos x)e^{1-x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Montrons que, pour tout x de \mathbb{R} : $f(x) > 0$.

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (2 + \cos x)e^{1-x}$.

D'autre part $-1 \leq \cos x \leq 1$. Donc $2 + \cos x > 0$ et $e^{1-x} > 0$

Donc pour tout x de \mathbb{R} : $f(x) > 0$. (Ce qu'il fallait Démontrer)

2) a- Montrons que, pour tout x de \mathbb{R} : $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2}\left(\cos x \times \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \times \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{2}{2} \cos x + \frac{2}{2} \sin x = \cos x + \sin x \end{aligned}$$

D'où pour tout x de \mathbb{R} , $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$. (Ce qu'il fallait Démontrer)

b) En déduisons que, pour tout x de \mathbb{R} : $2 + \cos x + \sin x > 0$

$$2 + \cos x + \sin x = 2 + \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left[\frac{2}{\sqrt{2}} + \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right] = \sqrt{2} \left[\sqrt{2} + \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

Alors $2 + \cos x + \sin x \geq \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) > 0$

D'où pour tout x de \mathbb{R} , $2 + \cos x + \sin x > 0$ (Ce qu'il fallait Démontrer)

c- Montrons que f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est $f'(x) = -(2 + \cos x + \sin x)e^{1-x} < 0$.

D'où la fonction f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

3) a- Montrons que, pour tout x de \mathbb{R} : $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$

$$\Leftrightarrow 2 - 1 \leq 2 + \cos x \leq 2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 2 + \cos x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 1 \times e^{1-x} \leq (2 + \cos x)e^{1-x} \leq 3e^{1-x}$$

$$\Leftrightarrow e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$$

D'où pour tout x de \mathbb{R} : $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$. (Ce qu'il fallait Démontrer)

b- En déduisons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

D'après a), on a : $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$.

$$\lim e^{1-x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim 3e^{1-x} = 0$$

$$x \rightarrow +\infty \qquad \qquad x \rightarrow +\infty$$

Alors d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim f(x) = 0$

$$x \rightarrow +\infty$$

De même : $\lim e^{1-x} = +\infty$ et $\lim 3e^{1-x} = +\infty$

$$x \rightarrow -\infty \qquad \qquad x \rightarrow -\infty$$

Alors d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim f(x) = +\infty$

$$x \rightarrow -\infty$$

c- Interprétons géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.

Puis que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la

$x \rightarrow +\infty$ Courbe (C) de f .

4) a- Montrons que, sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α .

Puis que f est dérivable et strictement décroissante sur $[0 ; \pi]$, alors elle réalise une bijection de $[0 ; \pi]$ vers $[f(\pi); f(0)] = [e^{1-\pi}; 3e]$. Or $e^{1-\pi} < 3 < 3e$

Donc l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0 ; \pi]$

b- Donnons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

Puisque : $\begin{cases} f(0,87) = 3,012 > 3 \\ f(0,88) = 2,973 < 3 \end{cases}$ alors un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} est donnée par

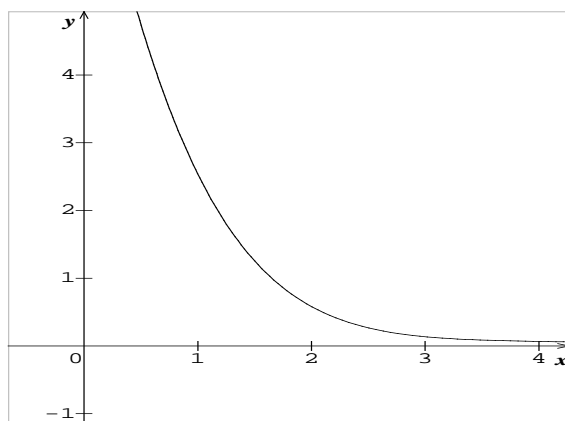
$$0,87 < \alpha < 0,88$$

5) Représentons la courbe (C) sur $[0 ; 4]$

Le tableau de variation de f sur $[0 ; 4]$ est donnée par :

x	0	4
$f'(x)$	—	
$f(x)$	$3e$	$0,07$

Ainsi la représentation graphique de la courbe (C) sur $[0 ; 4]$ est la suivante :



Partie B :

On veut Calculer l'aire, A, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

1) Montrons que : $A = 2e - 2 + \int_0^1 e^{1-t} \cos t dt$

La fonction f est positive sur $[0 ; 1]$ donc l'aire A est donnée par :

$$A = \int_0^1 2e^{1-x} dx = \int_0^1 (2 + \cos x) e^{1-x} dx = \int_0^1 2e^{1-x} dx + \int_0^1 \cos x \times e^{1-x} dx$$

$$= [-2e^{1-x}]_0^1 + \int_0^1 \cos x \times e^{1-x} dx = -2 + 2e + \int_0^1 \cos x \times e^{1-x} dx . \text{ En posant } x = t, \text{ on a :}$$

$$A = 2e - 2 + \int_0^1 e^{1-t} \cos t dt$$

2) On pose $I = \int_0^1 e^{1-t} \cos t dt$ et $J = \int_0^1 e^{1-t} \sin t dt$

a- A l'aide de deux intégrations par parties, montrons que :

$$I = -\cos 1 + e - J \text{ et } J = -\sin 1 + I$$

On a : $I = \int_0^1 \cos t e^{1-t} dt$, faisons une intégration par parties :

$$u(t) = \cos t \Rightarrow u'(t) = -\sin t$$

$$v'(t) = e^{1-t} \Rightarrow v(t) = -e^{1-t}$$

$$\Rightarrow I = [-\cos t e^{1-t}]_0^1 - \int_0^1 \sin t e^{1-t} dt$$

$$= -\cos 1 + e - J = -\cos 1 + e - J \Rightarrow I = -\cos 1 + e - J$$

De même, on intègre par parties J en posant :

$$w(t) = \sin t \Rightarrow w'(t) = \cos t$$

$$v'(t) = e^{1-t} \Rightarrow v(t) = -e^{1-t}$$

$$\Rightarrow J = [-\sin t e^{1-t}]_0^1 + \int_0^1 \cos t e^{1-t} dt = -\sin 1 \cdot e^0 + I = -\sin 1 + I$$

$$\text{D'où } J = -\sin 1 + I$$

b) En déduisons la valeur de I

Des relations précédentes obtenues, on en déduit :

$$I = -\cos 1 + e - J = -\cos 1 + e + \sin 1 - I \Rightarrow$$

$$2I = \sin 1 - \cos 1 + e \Rightarrow I = \frac{1}{2}(\sin 1 - \cos 1 + e)$$

3) Déterminons la valeur exacte de A en unité d'aire puis donnons une valeur approchée de A à 10^{-2} près.

On obtient finalement $A = -2 + 2e + I = -2 + \frac{5}{2}e + \frac{1}{2}(\sin 1 - \cos 1)$ et une valeur approchée de A par défaut est $A = 4,94$ (u. a).

Partie C :

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.

1) a- Montrons que h admet des primitives sur \mathbb{R} .

La fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ est dérivable sur \mathbb{R} donc elle admet des primitives sur \mathbb{R} .

b) Déterminons la primitive de H de h qui prend la valeur $1 + \ln 3$ en 0.

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}; 2 + \cos x > 0$ et $h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.

$$\Rightarrow H(x) = \ln(2 + \cos x) - x + k$$

Si cette fonction prend la valeur $1 + \ln 3$ en 0 alors $H(x) = 1 - x + \ln(2 + \cos x)$

1) a- Déterminons $\ln(f(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a : $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) > 0$ et l'on obtient :

$$\begin{aligned} \ln(f(x)) &= \ln[(2 + \cos x)e^{1-x}] = \ln(2 + \cos x) + \ln e^{1-x} = 1 - x + \ln(2 + \cos x) \\ &= H(x) \end{aligned}$$

b) Etudions le sens de variation de la fonction H

On a peut résumer les variations de H dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0
$H(x)$	$+\infty$	$-\infty$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}; H$ est strictement décroissante.

3) a- Soit (Γ) la courbe de la fonction $x \rightarrow 1 - x + \ln(2 + \cos x)$ et soit (Δ) la droite d'équation $y = -x + 1$. Etudions la position relative de (Γ) et de (Δ)

Pour étudier la position relative de (Γ) et (Δ) , on étudie le signe de $H(x) - y$.

Posons $H(x) - (-x + 1) > 0 \Leftrightarrow 2 + \cos x \geq 2 - 1 = 1$

Alors on obtient : $H(x) - (-x + 1) \geq 0$ et par conséquent (Γ) est au dessus de (Δ) .

b) Déterminons les abscisses des points communs à Γ et Δ

Posons $H(x) - y = 0 \Leftrightarrow H(x) - (-x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(2 + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

4) a- Equation de la tangente à (Γ) en 0

$y = H'(0)(x - 0) + H(0) \Rightarrow y = -x + 1 + \ln 3$.

b) Etude de la position de (Γ) et la tangente (T)

Etudions le signe de $H(x) - (-x + 1 + \ln 3)$

$H(x) - (-x + 1 + \ln 3) = \ln(2 + \cos x) - \ln 3$

Soit puisque $2 + \cos x \leq 2 + 1 = 3 \Leftrightarrow \ln(2 + \cos x) \leq \ln 3$. Alors on a :

$H(x) - (-x + 1 + \ln 3) \leq 0$. Et par suite, la courbe (Γ) est au dessus de (T)

5) Montrons que la courbe (Γ) est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on Donnera des équations :

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}; 1 \leq 2 + \cos x \leq 3$. Alors en appliquant la fonction \ln sur l'inégalité, on obtient :

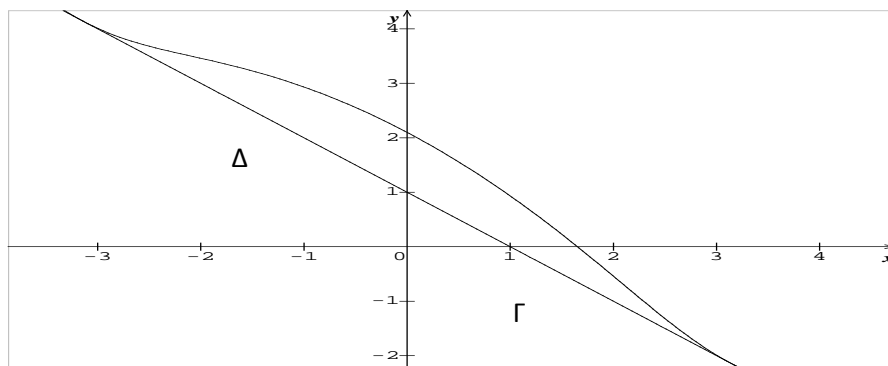
$$\ln 1 \leq \ln(2 + \cos x) \leq \ln 3$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \ln(2 + \cos x) \leq \ln 3$$

$$\Leftrightarrow 1 - x \leq 1 - x + \ln(2 + \cos x) \leq 1 - x + \ln 3$$

$$\Leftrightarrow 1 - x \leq H(x) \leq 1 - x + \ln 3$$

Donc la courbe (Γ) est contenue dans la bande limitée sur les deux droites parallèles (Δ) et (Γ)



19 Partie A :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{10e^x}{e^x + 4}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le repère ($O ; \vec{i} ; \vec{j}$) (Unité graphique 1 cm).

1) a- Déterminons la limite de f en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10e^x}{e^x + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10(0)}{0 + 4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

En écrivant $f(x) = 10 - \frac{40}{e^x + 4}$; déterminons la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 10 - \frac{40}{e^x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 10 - \frac{40}{e^x} = 10 - 0 = 10$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

En déduisons l'équation des asymptotes à la courbe (C)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$x \rightarrow -\infty$$

Alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe (C) en $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 10$. Alors la droite d'équation $y = 10$ est asymptote horizontale à la courbe (C)


$$x \rightarrow +\infty$$

$$\text{en } +\infty$$

b- Calculons la dérivée f' de la fonction f puis dressons le tableau de variation de f .

$$f(x) = \frac{10e^x}{e^x + 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{10e^x(e^x + 4) - e^x \times 10e^x}{(e^x + 4)^2} = \frac{10e^x(e^x + 4 - e^x)}{(e^x + 4)^2} = \frac{40e^x}{(e^x + 4)^2} > 0$$

D'où $\forall x \in D_f$; f est strictement croissante et le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

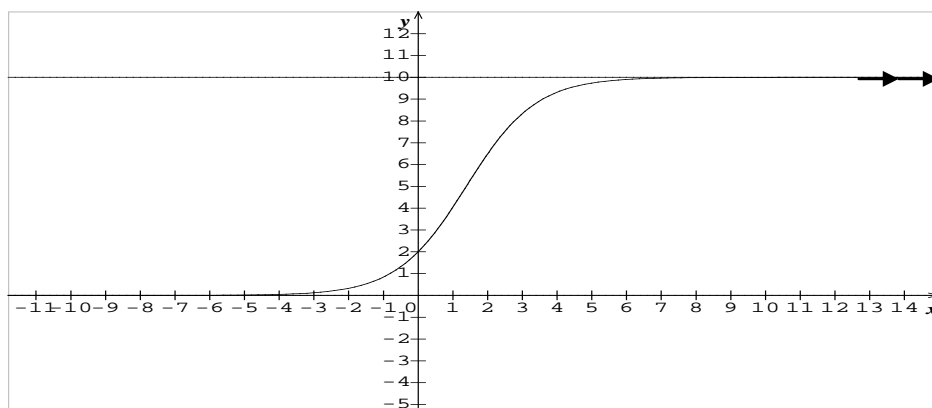
2) Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $\ln 4$.

L'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $\ln 4$ est donnée par :

$$y = f'(\ln 4)(x - \ln 4) + f(\ln 4) \Rightarrow y = \frac{5}{2}(x - \ln 4) + 5 = \frac{5}{2}x - 5\ln 2 + 5$$

D'où la tangente (T) a pour équation : $y = \frac{5}{2}x - 5\ln 2 + 5$

3) Traçons sur un même graphique la courbe (C) ; ces asymptotes et la tangente (T).



Partie B :

Une entreprise fabrique un certain produit P. On appelle x le nombre de tonnes de produit fabriquées.

On note $C(x)$ leur coût total de fabrication, exprimé en milliers d'euros.

La fonction coût marginal, C' est la dérivée de la fonction C .

Pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, on a $C'(x) = f(x)$; où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.

De plus , on suppose qu'il n'y a pas de charges fixes, donc que $C(0) = 0$.

1) a- Montrons que le coût total est donnée par $C(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, on a : $C'(x) = f(x)$. Intégrons cette égalité sur $[0 ; x]$; alors on a :

$$\int_0^x C'(x)dt = \int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow [C(t)]_0^x = \int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow C(x) - C(0) = \int_0^x f(t)dt.$$

Or $C(0) = 0$. D'où $C(x) = \int_0^x f(t)dt$. (Ce qu'il fallait Démontrer).

b- Exprimons $C(x)$ en fonction de x .

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow C(x) = \int_0^x \frac{10e^t}{e^t + 4} dt = 10 \int_0^x \frac{e^t}{e^t + 4} dt = 10[\ln(e^t + 4)]_0^x \\ &= 10\ln(e^x + 4) - 10\ln 5 = 10[\ln(e^x + 4) - \ln 5] = 10\ln\left(\frac{e^x + 4}{5}\right) \end{aligned}$$

c- Déterminons le coût total de 5 tonnes de ce produit P

(On Donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à la dizaine d'euros près).

Le coût total de 5 tonnes du produit P est donnée par $C(5) = 10\ln\left(\frac{e^5 + 4}{5}\right) = 34,17$ euros.

2) On appelle $C_m(x)$, le coût moyen défini, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ par $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$

a- Exprimons $C_m(x)$, en fonction de x .

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x} \Rightarrow C_m(x) = \frac{10\ln\left(\frac{e^x + 4}{5}\right)}{x} = \frac{10}{x} \ln\left(\frac{e^x + 4}{5}\right)$$

b- Vérifions que, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$; $C_m(x) = 10 + \frac{10\ln(1 + 4e^{-x})}{x} - \frac{10\ln 5}{x}$

$$C_m(x) = \frac{10\ln\left(\frac{e^x + 4}{5}\right)}{x} = \frac{10\ln(e^x + 4) - 10\ln 5}{x} = \frac{10\ln\left[e^x\left(1 + \frac{4}{e^x}\right)\right] - 10\ln 5}{x}$$

$$= \frac{10\ln e^x + \ln(1 + 4e^{-x}) - 10\ln 5}{x} = \frac{10x + \ln(1 + 4e^{-x}) - 10\ln 5}{x} = 10 + \frac{10\ln(1 + 4e^{-x})}{x} - \frac{10\ln 5}{x}$$

D'où pour tout $x \in [0 ; +\infty[$; on a : $C_m(x) = 10 + \frac{10\ln(1 + 4e^{-x})}{x} - \frac{10\ln 5}{x}$

c- En déduisons la limite de $C_m(x)$ en $+\infty$.

$$\lim C_m(x) = \lim 10 + \frac{10\ln(1 + 4e^{-x})}{x} - \frac{10\ln 5}{x} = 10 + 0 - 0 = 10$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

20

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, unité graphique : 2 cm.

Partie A :

1) Soit g la fonction numérique définie sur $]-\pi ; 0[$ par $g(x) = \cos x^2 x + \cos x - 1$.

a) Montrons que g est dérivable sur $]-\pi ; 0[$ et que $g'(x) = -(1 + 2\cos x)\sin x$.

g est la somme de deux fonctions dérivables sur $]-\pi ; 0[$, alors g est donc dérivable sur $]-\pi ; 0[$.

$$g(x) = \cos x^2 x + \cos x - 1 \Rightarrow g'(x) = 2(-\sin x)\cos x - \sin x = -2\sin x \cos x - \sin x = -(1 + 2\cos x)\sin x.$$

$$D'où $g'(x) = -(1 + 2\cos x)\sin x$.$$

b) En déduisons que $g'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-\pi ; -\frac{2\pi}{3}]$ et que $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-\frac{2\pi}{3} ; 0[$.

$\forall x \in]-\pi ; 0[$, $-\sin x > 0$ alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $1 + 2\cos x$. Posons

$$1 + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = -\cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \cos x = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{Or } \cos \alpha = \cos \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } \cos x = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

Puisque $x \in]-\pi ; 0[$, alors la seule valeur à retenir est $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

Etudions ainsi le signe de $1 + 2\cos x$ sur $]-\pi ; -\frac{2\pi}{3}]$ et sur $[-\frac{2\pi}{3} ; 0[$.

Sur $]-\pi; -\frac{2\pi}{3}]$, on a : $-\pi < x \leq -\frac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \cos(-\pi) < \cos x \leq \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi) < \cos x \leq \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi) < \cos x \leq \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi) < \cos x \leq -\cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow -1 < \cos x \leq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -2 < 2\cos x \leq -1$$

$$\Leftrightarrow -1 < 1 + 2\cos x \leq 0$$

Donc $\forall x \in]-\pi; -\frac{2\pi}{3}]$, $1 + 2\cos x \leq 0$

Etudions ainsi le signe de $1 + 2\cos x$ sur $[-\frac{2\pi}{3}; 0[$

Sur $[-\frac{2\pi}{3}; 0[$, on a : $-\frac{2\pi}{3} \leq x < 0$

$$\Leftrightarrow \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \leq \cos x < \cos(0)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \leq \cos x < \cos(0)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \leq \cos x < \cos(0)$$

$$\Leftrightarrow -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq \cos x < \cos(0)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \cos x < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 2\cos x < 2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 + 2\cos x < 3$$

Donc $\forall x \in [-\frac{2\pi}{3}; 0[$, $1 + 2\cos x \geq 0$

Par conséquent $g'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-\pi; -\frac{2\pi}{3}]$ et $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-\frac{2\pi}{3}; 0[$.

c) Dressons le tableau de variation de g .

x	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	β	0
$-\sin x$		+		+
$1 + 2\cos x$		-	0	+
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$	-1			1

Diagramme de variation : Une courbe descendante de -1 à $-\frac{5}{4}$ (à $-\frac{2\pi}{3}$), puis une courbe ascendante de $-\frac{5}{4}$ à 1 (à 0). Une tangente horizontale est indiquée à $-\frac{5}{4}$ et une autre à 1 . Une ligne pointillée verticale marque la position de β entre $-\frac{2\pi}{3}$ et 0 .

2) a) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β sur $]-\pi; 0[$ et

que $\in \left]-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}\right[$.

D'après le tableau de variation de g , on a :

- Pour tout $x \in \left]-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right]$, g est définie continue et strictement décroissante sur $\left]-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right]$. Donc g réalise une bijection de $\left]-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right]$ vers $g\left(\left]-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right]\right) = \left[-\frac{5}{4}; -1\right]$. Comme $0 \notin \left[-\frac{5}{4}; -1\right]$, alors l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $\left]-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right]$.
- Pour tout $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$, g est définie continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$. Donc g réalise une bijection de $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$ vers $g\left(\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]\right) = \left[-\frac{5}{4}; 1\right]$. Comme $0 \in \left[-\frac{5}{4}; 1\right]$, alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β dans $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

Montrons que $\beta \in \left]-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}\right[$

$$\begin{cases} g\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4} \\ \text{et} \\ g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \end{cases} \Rightarrow g\left(-\frac{\pi}{3}\right) \times g\left(-\frac{\pi}{4}\right) < 0.$$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\beta \in \left]-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}\right[$

Conclusion :

L'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β sur $\left]-\pi; 0\right[$ avec $\beta \in \left]-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}\right[$.

b) En déduisons le signe de g sur $\left]-\pi; 0\right[$

De ce qui précède et d'après le tableau de variation de g , on a :

- Pour tout $x \in \left]-\pi; \beta\right[$, $g(x) < 0$.
- Pour tout $x \in \left]\beta; 0\right[$, $g(x) > 0$.
- Pour $x = \beta$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow g(\beta) = 0$

Partie B :

Soit f la fonction numérique définie sur $\left]-\pi; +\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2\sin(2x)}{1+\cos x} + \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left]-\pi; 0\right] \\ \text{et} \\ f(x) = 2 - \frac{3}{e^{3x}+1} & \text{si } x \in \left]0; +\infty\right[\end{cases}$$

On note (Cf) la courbe représentative de f .

1) Etudions la continuité de f en 0.

f est continue en 0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

Continuité à gauche :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2\sin(2x)}{1+\cos x} + \frac{1}{2} \right) = \frac{2(0)}{1+0} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Continuité à droite :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 - \frac{3}{e^{3x}+1} \right) = 2 - \frac{3}{1+1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Puis que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \frac{1}{2}$. Alors f est continue en 0.

2) Etudions la dérivabilité de f en 0.

f est continue en 0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

Dérivabilité à gauche :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{2\sin(2x)}{1+\cos x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sin(2x)}{x(1+\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4\sin x \cos x}{x(1+\cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 4 \frac{\sin x}{x} \times \frac{\cos x}{1+\cos x} = 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2$$

Dérivabilité à droite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 - \frac{3}{e^{3x}+1} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{e^{3x}+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3}{2} \left(1 - \frac{2}{e^{3x}+1} \right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} \times \frac{e^{3x}-1}{x(e^{3x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9}{2} \times \frac{e^{3x}-1}{3x} \times \frac{1}{e^{3x}-1} = \frac{9}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{9}{4}$$

Puis que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Alors f n'est pas dérivable en 0.

En déduisons une interprétation géométrique des résultats obtenus.

La courbe (Cf) admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes (T_1) et (T_2) de coefficients directeurs respectifs 2 à gauche de 0 et $\frac{9}{4}$ à droite de 0.

3) a) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{e^{3x}+1} \right) = 2 - 0 = 2$$

b) Montrons que pour tout $x \in]-\pi; 0[$, on a : $f(x) = \frac{4(1-\cos x)\sin x \cos x}{1-\cos^2 x} + \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2\sin(2x)}{1+\cos x} + \frac{1}{2} = \frac{1-\cos x}{1-\cos x} \times \left(\frac{2\sin(2x)}{1+\cos x} \right) + \frac{1}{2} = \frac{(1-\cos x)(2\sin 2x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{(1-\cos x)(4\sin x \cos x)}{1-\cos^2 x} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

En déduisons $\lim_{x \rightarrow -\pi} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} \left(\frac{4(1-\cos x)\sin x \cos x}{1-\cos^2 x} + \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\pi} \left(\frac{4(1-\cos x)\sin x \cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\pi} \left(\frac{4(1-\cos x)\cos x}{\sin x} + \frac{1}{2} \right) = \frac{-8}{0} + \frac{1}{2} = +\infty$$

c) En déduisons les asymptotes de la courbe (Cf) .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Alors la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale

$\lim_{x \rightarrow -\pi} f(x) = +\infty$. Alors la droite **d'équation $x = -\pi$ est asymptote verticale**

4) a) Calculons $f'(x)$ pour tout $x \in]0 ; +\infty[$

Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, on a : $f(x) = 2 - \frac{3}{e^{3x}+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2} > 0$.

En déduisons le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.

De ce qui précède, on en déduit que $\forall x \in]0 ; +\infty[$, f est strictement croissante.

b) Montrons que pour tout $x \in]-\pi ; 0[$, on a : $f'(x) = \frac{4g(x)}{1+\cos x}$

Pour tout $x \in]-\pi ; 0[$, on a : $f(x) = \frac{2\sin(2x)}{1+\cos x} + \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \times \frac{2\cos 2x(1+\cos x) + \sin x(\sin 2x)}{(1+\cos x)^2} = 2 \times \frac{2\cos^3 x + 4\cos^2 x - 2}{(1+\cos x)^2} = 4 \times \frac{\cos^3 x + 2\cos^2 x - 1}{(1+\cos x)^2}$$

La forme factorisée de $\cos^3 x + 2\cos^2 x - 1$ en posant $\cos x = X$, on a :

$$X^3 + 2X^2 - 1 = (X + 1)(X^2 + X - 1)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc pour tout } x \in]-\pi ; 0[, f'(x) &= 4 \times \frac{(\cos x + 1)(\cos^2 x + \cos x - 1)}{(1 + \cos x)^2} \\ &= 4 \times \frac{g(x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{4g(x)}{(1 + \cos x)^2} \end{aligned}$$

En déduisons le sens de variation de f sur $]-\pi ; 0[$.

Pour tout $x \in]-\pi ; 0[$, $\frac{4}{(1+\cos x)^2} > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe $g(x)$.

Or d'après **Partie A 2) b)**, on a :

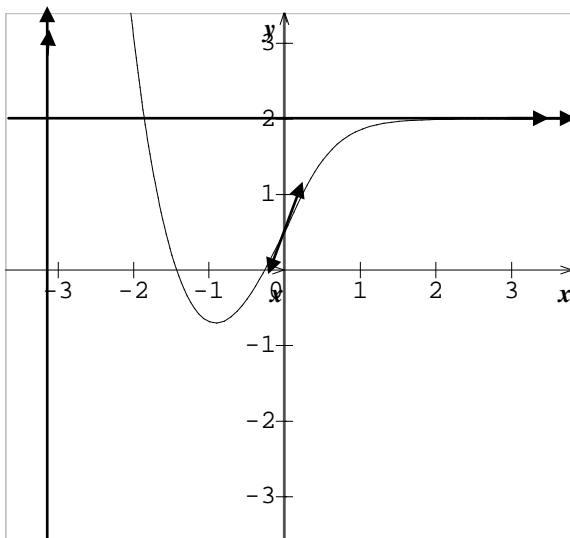
- Pour tout $x \in]-\pi ; \beta[$, $g(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in]-\pi ; \beta[$, $f'(x) < 0$

- Pour tout $x \in]\beta ; 0[$, $g(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in]\beta ; 0[$, $f'(x) > 0$

c) Dressons le tableau de variation de f sur $]-\pi ; +\infty[$.

x	$-\pi$	β	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$f(\beta)$	$\frac{1}{2}$	2

5) Construisons la courbe (Cf) , ses asymptotes et ses demi-tangentes au point d'abscisse 0.



Partie C :

On admet que tout $x \in [1,5 ; 2]$, on a : $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ (**R**).

1) Soit h la fonction numérique définie sur $[1,5 ; 2]$ par : $h(x) = f(x) - x$.

Etudions les variations de h

$\forall x \in [1,5 ; 2]$, $h(x) = f(x) - x$. h est dérivable sur $[1,5 ; 2]$ comme somme de deux fonctions dérivables sur .

$h(x) = f(x) - x \Rightarrow h'(x) = f'(x) - 1$. Or $f'(x) \leq \frac{1}{2} < 1$. D'où $h'(x) < 0$ et par conséquent h est strictement décroissante sur $[1,5 ; 2]$.

En déduisons que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [1,5 ; 2]$.

$$\left\{ \begin{array}{l} h(1,5) = f(1,5) - 1,5 = 0,5 - \frac{3}{e^{4,5}+1} \approx 0,45 \\ \text{et} \\ h(2) = f(2) - 2 = -0,007 = -7 \cdot 10^{-3} \end{array} \right. \Rightarrow h(1,5) \times h(2) < 0.$$

h est continue et strictement décroissante sur $[1,5 ; 2]$. Alors h réalise une bijection de $[1,5 ; 2]$ sur $h([1,5 ; 2]) = [-7 \cdot 10^{-3} ; 0,45]$. $0 \in [-7 \cdot 10^{-3} ; 0,45]$, donc 0 admet un antécédent unique $\alpha \in [1,5 ; 2]$ telque $h(\alpha) = 0$ et par conséquent l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α . Or $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.

D'où pour tout $x \in [1,5 ; 2]$, $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [1,5 ; 2]$

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1,5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,5 ; 2]$. (On pourra utiliser la relation **(R)**)

Soit P_n la propriété : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \in [1,5 ; 2]$.

- Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1,5 \in [1,5 ; 2]$. D'où P_0 vraie.
- Supposons P_n vraie et montrons P_{n+1} vraie : Puisque $u_n \in [1,5 ; 2]$; $\alpha \in [1,5 ; 2]$ et pour tout $x \in [1,5 ; 2]$; on a : $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

Supposons $u_n \leq \alpha$, alors on a : $\int_{u_n}^{\alpha} 0 \, dx \leq \int_{u_n}^{\alpha} f'(x) \, dx \leq \int_{u_n}^{\alpha} \frac{1}{2} \, dx \Leftrightarrow$

$$0 \leq [f(x)]_{u_n}^{\alpha} \leq \left[\frac{1}{2}x\right]_{u_n}^{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$0 \leq f(\alpha) - f(u_n) \leq \frac{1}{2}(\alpha - u_n) \Leftrightarrow$$

$$0 \leq \alpha - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\alpha - u_n) \Leftrightarrow$$

$$\alpha \leq \alpha - u_{n+1} + \alpha \leq \frac{1}{2}(u_n - \alpha) + \alpha \Leftrightarrow$$

$$\alpha \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n + \alpha). \text{ Or } u_n \leq 2 \text{ et } \alpha \leq 2 \Rightarrow u_n + \alpha \leq 4. \text{ Donc :}$$

$$1,5 \leq \alpha \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n + \alpha) \leq 2 \Rightarrow 1,5 \leq u_{n+1} \leq 2$$

Ainsi $u_{n+1} \in [1,5 ; 2]$ et par conséquent P_{n+1} vraie.

Supposons maintenant $u_n \geq \alpha$, alors on a :

$$\int_{\alpha}^{u_n} 0 \, dx \leq \int_{\alpha}^{u_n} f'(x) \, dx \leq \int_{\alpha}^{u_n} \frac{1}{2} \, dx \Leftrightarrow$$

$$0 \leq [f(x)]_{\alpha}^{u_n} \leq \left[\frac{1}{2}x\right]_{\alpha}^{u_n} \Leftrightarrow$$

$$0 \leq f(u_n) - f(\alpha) \leq \frac{1}{2}(u_n - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{2}(u_n - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\alpha \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n + \alpha). \text{ Or } u_n \leq 2 \text{ et } \alpha \leq 2 \Rightarrow u_n + \alpha \leq 4. \text{ Par suite :}$$

$$1,5 \leq \alpha \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n + \alpha) \leq 2 \Rightarrow 1,5 \leq u_{n+1} \leq 2$$

De même $u_{n+1} \in [1,5 ; 2]$ et par conséquent P_{n+1} vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,5 ; 2]$.

b) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha|$ et que :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Pour tout $x \in [1,5 ; 2]$; on a : $f'(x) \leq \frac{1}{2}$ et f' est continue sur $[1,5 ; 2]$; de même :

$u_n \in [1,5 ; 2]$; $\alpha \in [1,5 ; 2]$. D'après l'inégalité de la moyenne on a :

$$\left| \int_{\alpha}^{u_{n-1}} f'(x) dx \right| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha|. \text{ Soit } |f(u_{n-1}) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha| \Leftrightarrow$$

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha|$$

Considérons la propriété P_n la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}$; $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha|$.

- Pour $n = 0$, on a : $|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^0} |u_0 - \alpha|$. D'où P_0 vraie.

- Supposons P_n vraie et montrons P_{n+1} vraie :

$$\text{On a : } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|. \text{ Or } |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha|\right)$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |u_0 - \alpha| \text{ et par conséquent } P_{n+1} \text{ vraie.}$$

$$\text{Par suite } \forall n \in \mathbb{N} ; |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha| .$$

c) En déduisons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$\text{De ce qui précède on a : } |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha| .$$

$$\text{D'autre part on a : } 1,5 \leq \alpha \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$-2 \leq -\alpha \leq -1,5 \Leftrightarrow$$

$$u_0 - 2 \leq u_0 - \alpha \leq u_0 - 1,5 . \text{ Or } u_0 = 1,5$$

$$-0,5 \leq u_0 - \alpha \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq u_0 - \alpha \leq 0$$

$$\Rightarrow |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}.$$

Ce qui donne alors $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

d) En déduisons que la suite (u_n) est convergente.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$

D'où (u_n) est convergente et converge vers α .

e) Déterminons un entier p tel que pour $n \geq p$ on ait : $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

On sait que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Pour avoir $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$; il suffit d'avoir $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3}$. Or $a^p = e^{p \ln a}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow e^{(n+1)\ln \frac{1}{2}} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \ln \left[e^{(n+1)\ln \frac{1}{2}} \right] \leq \ln 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow (n+1)\ln \frac{1}{2} \leq -3\ln 10 \Leftrightarrow -(n+1)\ln 2 \leq -3\ln 10 \Leftrightarrow (n+1)\ln 2 \geq 3\ln 10$$

$$\Rightarrow n+1 \geq \frac{3\ln 10}{\ln 2} \Leftrightarrow n \geq \frac{3\ln 10}{\ln 2} - 1 \Leftrightarrow n \geq \frac{3 \times 2,30}{0,69} - 1$$

$$\Rightarrow n \geq 9$$

D'où $p = 9 \Rightarrow |u_9 - \alpha| \leq 10^{-3}$

Remarque : u_9 est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.