Arithmétiques

OBJECTIFS :

Ce chapitre vise à :

• approfondir les notions d'arithmétique vues au premier cycle ;

• mettre en place la congruence dans ℤ et l'utiliser pour Résous des problèmes ;

• mettre en œuvre des techniques d'algorithme et de raisonnement pour Résous des problèmes d'arithmétique.

Commentaire général

L'arithmétique, par opposition à l'analyse qui développe la notion du " continu", met en relief le caractère discret de ℕ et ℤ.

On mettra en évidence des raisonnements très utiles en arithmétique : la récurrence, la disjonction des cas et la démonstration par l'absurde.

Les notions de décomposition en produit de facteurs premiers, de PPCM, de PGCD, de nombres premiers et de diviseurs ont été abordées en cinquième et en quatrième.

Ce cours sera l'occasion d'approfondir ces acquis en les formalisant.

L'arithmétique est un chapitre qui donne l'occasion d'évoquer d'illustres mathématiciens (Fermat, Bézout, Gauss,…) et de rencontrer des problèmes (nombres amiables, nombres parfaits, nombres de Mersenne,….) qui contribueront à consolider la culture mathématique de l'élève.

Volumes horaire : 18 heures

1. DIVISIBILITE DANS ℤ

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Multiples d'un entier relatif. • Notation n ℤ. • Diviseurs d'un entier relatif.	• Démontre qu'un entier est divisible par un entier donné. • Détermine l'ensemble des diviseurs d'une entier naturel non nul.

Remarques et suggestions

On ne parlera pas des structures de groupe et d'anneau. La propriété " si a divise b et c, alors a divise $pb + qc$" est très efficace dans les exercices.

2. DIVISION EUCLIDIENNE

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
•Division euclidienne dans IN. • Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.	• Détermine le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier relatif par un entier naturel non nul.

Remarques et suggestions

On pourra effectuer la division euclidienne d'un entier relatif par un entier relatif non nul si le niveau de la classe le permet. Cependant, ceci n'est pas au programme.

La démonstration de l'existence et de l'unicité de la division euclidienne, mettant en œuvre la notion de plus petit élément, pourra être faite.

3. CONGRUENCE MODULO n

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
•Définition. • Propriété de conformité avec les opérations.	• Utiliser les propriétés des congruences pour Résous des problèmes de divisibilités.

Remarques et suggestions

Les congruences permettent de Résous de nombreux problèmes d'arithmétique, en particulier, la recherche de restes de divisions euclidiennes, les problèmes de divisibilité, les résolutions d'équations ainsi que la justification des critères de divisibilité vus au premier cycle. Il est parfois judicieux d'utiliser les nombres négatifs (par exemple : $90 \equiv -1\ [13]$ est parfois plus intéressent que $90 \equiv 12\ [13]$ dans la détermination des restes.

On prendra garde de ne pas opérer de division avec les congruences à cause de l'existence éventuelle de diviseurs propres de zéro (par exemple : $2x \equiv 6\ [10]$ n'est pas équivalent à $x \equiv 3\ [10]$. Les équations avec congruence faisant intervenir des carrés, des cubes, des puissances,…. Pourront faire l'objet d'exercices d'approfondissement à condition que les élèves soient guidés. Mais en aucun cas, elles ne feront l'objet d'une évaluation.

4. NOMBRES PREMIERS

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
•Définition. • L'ensemble des nombres premiers est infini. • Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers	• Démontre qu'un nombre est premier. • Détermine l'ensemble des diviseurs d'un entier naturel non nul. • Décomposer un entier en produit de facteurs premiers.

Remarques et suggestions

La démonstration de la propriété "l'ensemble des nombres premiers est infini" est un exemple d'utilisation du raisonnement par l'absurde.

Le théorème de l'existence et de l'unicité de la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers sera admis.

5. PGCD, PPCM

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
•Définition et propriétés. • Algorithme d'Euclide. • Nombres premiers entre eux. • Théorème de Bézout. • Théorème de Gauss	• Détermine le PGCD de deux nombres : - à l'aide de l'algorithme d'Euclide ; - à l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers. • Détermine le PPCM de deux nombres : - à l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers ; - à l'aide du PGCD. • Utiliser le théorème de Bézout pour Démontre que des entiers sont premiers entre eux. • Utiliser le théorème de Gauss pour Résous des problèmes d'arithmétique.

Remarques et suggestions

La numération se limitera exclusivement aux bases 2et 10. La base 2, qui a des applications en informatique, constituera un exemple de base autre que 10 qui permettra de mieux cerner la décomposition d'un nombre dans une base donnée.

I) Introduction et Définition :

1) Introduction

On peut considérer que, dès l'époque préhistorique, les hommes ont utilisé leurs doigts pour compter ou effectuer des calculs sommaires. L'emploi de symboles pour désigner les nombres apparaît sans doute en Mésopotamie, vers 2000 av. J.-C, où l'on a retrouvé des tablettes babyloniennes couvertes de chiffres en base 60. Puis viennent les systèmes de numération égyptiens, grecs et romains. **C'est en Grèce qu'est fondée l'arithmétique théorique par les pythagoriciens au VI^{e} siècle av. J.-C.** À cette époque, les mathématiciens grecs savent déjà manipuler des notions arithmétiques comme les proportions, les moyennes, ou encore les progressions. Tout ce savoir a été, par la suite, regroupé dans les ***Éléments* d'Euclide**.

2) Définition

L'Arithmétique est la branche des mathématiques qui étudie les propriétés des **Nombres Entiers Naturels** $\mathbb{N}$, des **Entiers Relatifs** $\mathbb{Z}$ et des **Nombres Rationnels** $\mathbb{Q}$.

II) Rappel sur les ensembles $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$

En arithmétique, on utilise trois types de nombres : les **Nombres Entiers Naturels** $\mathbb{N}$; les **Nombres Entiers Relatifs** $\mathbb{Z}$ et les **Nombres Rationnels** $\mathbb{Q}$.

1) Ensemble des Nombres entiers naturels :

L'ensemble des entiers naturels, noté : $\mathbb{N}$ est défini en extension comme suite :

$\mathbb{N} = \{ \mathbf{0}\ ;\ \mathbf{1}\ ;\ \mathbf{2}\ ;\ \mathbf{3}\ ; \dots\dots\dots\ ;\ \boldsymbol{n}\ ;\ (\boldsymbol{n}+\mathbf{1})\ ;\ \dots\dots.. \}$

On défini dans $\mathbb{N}$ deux lois de compositions internes:

- **L'addition** : $\forall a \in \mathbb{N}$ et $\forall b \in \mathbb{N}$, $a + b = S \in \mathbb{N}$.
- **La multiplication** : $\forall a \in \mathbb{N}$ et $\forall b \in \mathbb{N}$, $a \times b = p \in \mathbb{N}$.

Exemple : $2 + 1 = 3 \in \mathbb{N}$ et $4 \times 3 = 12 \in \mathbb{N}$

On défini aussi dans $\mathbb{N}$ une relation d'ordre, c'est-à-dire que pour tout a et b de $\mathbb{N}$, on a :

Soit $a \leq b$, soit : $b \leq a$.

Propriétés

P_1 : $\mathbb{N}$ a un plus petit élément noté 0.

P_2 : $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.

P_3 : Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément.

2) Ensemble des Nombres entiers relatifs :

L'ensemble des entiers relatifs, noté : $\mathbb{Z}$ est défini en extension comme suite :

$\mathbb{Z} = \{ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ; \ldots\ldots ;\ n\ ;\ -n\ ;\ (n+1)\ ;\ -(n+1), \ldots\ldots \}$

Cet ensemble a la structure d'un **anneau commutatif unitaire** :

On défini dans $\mathbb{Z}$ deux lois de composition interne : **une addition et une multiplication.**

Propriétés :

P_1 : L'addition est commutative associative dans $\mathbb{Z}$ et admet un élément neutre qui est 0.

P_2 : La multiplication est commutative associative dans $\mathbb{Z}$ et admet un élément neutre qui est 1.

P_3 : La multiplication est distributive par rapport à l'addition : $a \bullet (b + c) = ab + ac$.

P_4 :L'existence d'un élément symétrique – a, c'est-à-dire que a + $(-$a) = 0.

NB :

L'anneau est unitaire à cause de l'existence de l'élément neutre "1" de la multiplication.

$(\mathbb{Z}\ ;\ +)$ est un groupe commutatif.

$(\mathbb{Z}\ ;\ + ; \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

On défini dans $\mathbb{Z}$ une **relation d'ordre** $(\leq)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
2) $a \leq b$ et $c > 0 \Rightarrow ac \leq bc$
3) $a \leq b$ et $c < 0 \Rightarrow ac \geq bc$

D'autres propriétés de $\mathbb{Z}$, que nous admettrons sans preuve sont :

P_1- Toute partie de $\mathbb{Z}$ qui est non vide et qui est majorée, a un plus grand élément.

P_2- Toute partie de $\mathbb{Z}$ qui est non vide et qui est minorée a un plus petit élément.

P_3- Si a et b sont deux entiers relatifs, et b est non nul, il existe un entier relatif n où $nb \geq a$.

3) Ensemble des Nombres rationnels :

L'ensemble des nombres rationnels, noté : $\mathbb{Q}$ est un ensemble qui est défini en extension comme suite : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{Q}} \ , \ \boldsymbol{P} \in \mathbb{Z} \ ; \ \boldsymbol{q} \in \mathbb{Z}^*\right\}$

NB : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

III) Raisonnement par récurrence :

Principe :

Pour Démontre qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n, on procède de la façon suivante :

- **1ère Etape :(Initialisation):**

On vérifie que la proposition P_n est vraie pour le terme initial, c'est-à-dire : (P_0 est vraie).

- **2ère Etape :(Transmission) :**

On suppose que la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel et ensuite on démontre qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$. C'est-à-dire P_{n+1} est vraie.

- **3ère Etape :(Conclusion) :**

On conclu qu'alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

IV) Division Euclidienne dans $\mathbb{N}$

1) Définition :

Soient a et b deux entiers naturels **($\boldsymbol{b \neq 0}$).**

On appelle division Euclidienne de l'entier naturel $\boldsymbol{a}$ par l'entier naturel , toute opération visant à Détermine un couple unique ($\boldsymbol{q}$; $\boldsymbol{r}$) $\in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tel que $\boldsymbol{a = bq + r}$.

Avec : $0 \leq \boldsymbol{r} < b$.

2) Notation :

- **q :** est appelé le quotient de la division Euclidienne de l'entier **a** par l'entier **b.**
- $\boldsymbol{r}$ **:** est appelé le reste de la division Euclidienne de l'entier $\boldsymbol{a}$ par l'entier $\boldsymbol{b}$.

3) Propriétés :

P_1 : Si b divise, alors le reste r est nul (r = 0) . Ainsi : $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{bq}$.

P_2 : Si b divise, alors pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, b divise $\boldsymbol{na}$ **.**

V) Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Multiples et diviseurs d'un entier relatif :

a- Définitions :

Soient a et b deux entiers relatifs.

- On dit que a est un multiple de, s'il existe un entier relatif k tel que : $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{kb}$.
- On dit que b est un diviseur de, si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{qb}$ (où q est le quotient de la division).

NB :

- 0 est un multiple de tout entier relatif.
- Tout entier relatif non nul divise 0, mais il ne divise aucun entier relatif.
- Si $b \neq 0$, on dit que b est un diviseur de a ou que b divise a. On note : $b\ /a$**.**

b- Propriété :

Soient $\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{c}$ trois entiers tel que $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$.

Si $\boldsymbol{a}$ divise $\boldsymbol{b}$ et a divise $\boldsymbol{c}$, alors pour tout entier $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, **a** divise la combinaisons linéaire $\boldsymbol{bu} + \boldsymbol{cv}$.

VI) Système de numération

1) Définition :

Soit b un entier naturel tel que b ≥2. Tout entier naturel x peut s'écrire de façon unique

telque : $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1 b} + \boldsymbol{a_2 b^2} + \ldots\ldots + \boldsymbol{a_p b^p} = \sum_{k=0}^{p} \boldsymbol{a_k b^k}$ avec $\boldsymbol{a_k} \in \mathbb{N}$**.**

Ainsi si $\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{a_k} < b$ et $\boldsymbol{a_p} \neq \boldsymbol{0}$, on peut écrire : $\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{a_p a_{p-1} \ldots . a_1 a_0}}^{\boldsymbol{b}}$**.**

Cette écriture de x est appelée x dans la base b .

2) Propriétés :

P_1 : Par convention , dans le système décimal (**appelé aussi à base 10**), les nombres sont écrits à l'aide des dix chiffres décimaux , à savoir : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.

C'est-à-dire tout nombre sans barre, est écrit en base 10.

Exemple :

3201 = $\overline{3201}^{10}$ = $1\times10^0 + 0\times10^1 + 2\times10^2 + 3\times10^3$ = 1 + 0 + 200 + 3000 = 3201

Donc, les chiffres **1 ; 0 ; 2 ; 3** sont les coefficients respectifs des puissances croissantes de la base 10.

P_2 : Au Delas des 10 chiffres décimaux, on peut adopter les lettres : A ; B ; C ; D ; E...etc. pour : 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 …..etc.

3) Changement de base :

a- Système binaire ou système en base 2 :

Dans le système binaire les symboles utilisés sont : 0 et 1

b- Système octal ou système en base 8 :

Dans le système octal les symboles utilisés sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

c- Système hexadécimal ou système en base 16 :

Dans le système hexadécimal les symboles utilisés sont : 0 ; 1 ; 2 ;….9 ; A ; B ; C ; D , E ; F

VII) Congruence Modulo n

Considérons les nombres entiers relatifs ci-dessous, où n est un entier naturel supérieur à 1,

$a = -2n + 1$ et $b = 15n + 1$. Des relations ci-dessus, on note que :

- a et b ont un même reste (à savoir 1) lorsqu'ils sont divisés par n
- $a - b = -2n-(15n) = -17n$, c'est-à-dire que a – b est un multiple de n.

De ces observations, nous donnons la définition de la congruence modulo n comme suite :

1) Définitions :

Définition 1:On dit que l'entier relatif a est congru à l'entier relatif b, modulo n, si la division de a par n, et celle de b par n, ont le même reste. Ceci est symbolisé par : $\boldsymbol{a \equiv b(n)}$.

Définition 1 : On dit que l'entier relatif a est congru à l'entier relatif b, modulo n, si la différence $a - b$ est un multiple de n. Autrement dit $\boldsymbol{a \equiv b(n)} \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} ; a - b = kn.$

Remarque : $a \equiv b(n) \Leftrightarrow a = kn + b$ c'est-à-dire le reste de la division euclidienne de a par n est b.

2) Propriétés :

La relation de congruence modulo n est une **relation d'équivalence**, car elle met en évidence les propriétés suivantes :

$\mathbf{P_1}$ **:** la relation de congruence modulo n est **Réflexive**, c'est-à-dire :

$\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{Z},\ \boldsymbol{on\ a} :\ \ \boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{a}[\boldsymbol{n}]$**.**

$\mathbf{P_2}$ **:** la relation de congruence modulo n est **Symétrique**, c'est-à-dire :

$\forall(\boldsymbol{a}\ ;\ \boldsymbol{b}) \in \mathbb{Z}^{\mathbf{2}},\ \boldsymbol{Si}\ \boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b}[\boldsymbol{n}]$ **Alors** $\boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{a}[\boldsymbol{n}]$

$\mathbf{P_3}$ **:** la relation de congruence modulo n est **Transitive**, c'est-à-dire :

$\forall(\boldsymbol{a}\ ;\ \boldsymbol{b}\ ;\ \boldsymbol{c}) \in \mathbb{Z}^{\mathbf{3}},\ \boldsymbol{Si}\ \boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b}[\boldsymbol{n}]$ **et** $\boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{c}[\boldsymbol{n}]$ **alors** $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{c}[\boldsymbol{n}]$ **.**

3) Autres propriétés caractéristiques :

$\mathbf{P_1}$ **:** $a \equiv b[n] => n$ divise $a - b$

$\mathbf{P_2}$ **:** $a \equiv b[n] <=> \forall\, k \in \mathbb{N},\ ka \equiv kb[n]$

$\mathbf{P_3}$ **:** $a \equiv b[n] <=> \forall\, p \in \mathbb{N},\ a^p \equiv b^p[n]$

4) Congruences particulières (Critères de divisibilité) :

a- Divisibilité par 2

Un entier N est divisible par 2 si et seulement si son chiffre des unités simples est pair, c'est-à-dire si l'entier x est terminé par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.

b- Divisibilité par 3 et par 9

Un entier N est divisible par 3 (respectivement par 9) si et seulement si la somme de ces chiffres est divisible par 3 (respectivement par 9).

c- Divisibilité par 5

Un entier N est divisible par 5 si et seulement si cet entier est terminé par 0 ou 5.

d- Divisibilité par 11

Un entier N est divisible par 11 si et seulement si la différence de la somme des chiffres de rang pair et de la somme des chiffres de rang impair est divisible par 11.

e- Divisibilité par 4 et par 25

Un entier N est divisible par 4 (respectivement par 25) si et seulement si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4 (respectivement par 25).

VIII) Congruence et structure d'anneau (Ensemble $\mathbb{Z} / n\, \mathbb{Z}$) :

1) Classe d'équivalence modulo n

a- Définition :

Lorsqu'un nombre quelconque x de $\mathbb{Z}$ est divisé par un entier naturel n, les restes possibles sont : $\mathbf{0}$; $\mathbf{1}$; $\mathbf{2}$; ... ; $\boldsymbol{n-1}$.

On dit qu'un élément x de $\mathbb{Z}$ appartient à la **classe $\dot{\boldsymbol{p}}$ modulo $\boldsymbol{n}$** si : $x \equiv p\ avec\ n-1\ \geq 0$.

D'une manière générale, si$x$ est un élement de $\mathbb{Z}$, alors la classe de x modulo n est l'ensemble de tous les éléments de $\mathbb{Z}$ qui ont le même reste que x dans la division par n ; on le note $\boldsymbol{cl}(\boldsymbol{x}) = \dot{\boldsymbol{x}}$ tel que : $\boldsymbol{cl}(\boldsymbol{x}) = \dot{\boldsymbol{x}} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{Z} /\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \equiv \mathbf{0}[\boldsymbol{n}]\}$

b- Ensemble quotient $\mathbb{Z}/\boldsymbol{n}\mathbb{Z}$:

L'ensemble des classes $\dot{\boldsymbol{p}}$ modulo $\boldsymbol{n}$ est noté par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et s'appelle groupe quotient de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ **tel que :** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\dot{\mathbf{0}}\ ;\ \dot{\mathbf{1}}\ ;\ \dot{\mathbf{2}}\ ;\ \dot{\mathbf{3}}\ ;\ \ldots\ldots \overset{\cdot}{\overbrace{\boldsymbol{n-1}}}\right\}$.

2) Propriétés dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

a- Propriétés (Addition) :

1) L'associativité : $\dot{x} + (\dot{y} + \dot{z}) = (\dot{x} + \dot{y}) + \dot{z}$
2) La commutativité : $\dot{x} + \dot{y} = \dot{y} + \dot{x}$
3) L'élément neutre : $\dot{0}$ $\left(car\ \dot{x} + \dot{0} = \overset{\cdot}{\overbrace{x+0}} = \dot{x}\right)$
4) L'élément : $\overset{\cdot}{\overbrace{-x}}$, symétrique de x (car $\overset{\cdot}{\overbrace{-x+x}} = \dot{0}$

b- Propriétés (Multiplication) :

1) L'associativité : $\dot{x} \times (\dot{y} \times \dot{z}) = (\dot{x} \times \dot{y}) \times \dot{z}$

2) La commutativité : $\dot{x}\times \dot{y} = \dot{y}\times \dot{x}$

3) L'élément neutre : $\dot{1}$ (car $\dot{1}\times \dot{x} = \dot{\overbrace{1\times x}} = \dot{x}$)

4) La distributivité par rapport à l'addition, soit : $\dot{x}\times(\dot{y}+\dot{z}) = (\dot{x}\times \dot{y}) + (\dot{x}\times \dot{z})$

NB :

On dit qu'un anneau commutatif unitaire A est **intègre** si pour tout x, y de A, on a :

$x \times y = 0 \Rightarrow x = 0 \ ou \ y = 0$

Lorsque l'anneau n'est pas intègre, il existe $x \ et \ y$, tous non nuls, dont le produit est zéro. On dit alors que $x \ et \ y$ sont des **diviseurs de zéro**.

IX) Nombre entier naturel premier :

1) Définition :

On dit qu'un nombre entier naturel p est premier s'il a exactement deux diviseurs, 1 et p.

D'une manière générale :

Pour Montre qu'un nombre entier naturel p est premier, il suffit de le diviser par les entiers naturels premiers successifs qui lui sont inférieur afin d'obtenir un entier premier d qui ne le divise pas avec **($d^2 < a$)**

2) Théorèmes :

Théorème1 : Tout entier naturel n supérieur à 1, admet au moins un diviseur premier.

Théorème 2 : L'ensemble des nombres premiers est infini.

Théorème 3 :
Tout entier naturel n supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier d tel que : $1 < d^2 \leq n$

NB :

L'ensemble des nombres premiers compris entre 1 et 100 peut s'obtenir par **l'algorithme d'Eratosthène** que nous décrivons comme suit :

1) On construit une table des nombres allant de 1 à 100.
2) On élimine le nombre 1 qui n'est pas premier
3) On garde le nombre 2 et on élimine de la table tous ses multiples
4) Le nombre suivant non éliminé est 3, que l'on garde. On élimine de la table tous les multiples de 3;

5) On procède ainsi jusqu'au nombre 100 .
6) Les nombres non éliminés de la table sont tous premiers.

On obtient alors la table suivante :

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

<u>Théorème 4</u> : (Décomposition d'un nombre entier en produit de facteur premier).

Tout entier naturel supérieur à 1 se décompose de façon unique comme un produit de facteurs premiers. La décomposition prend la forme générale : $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} P_3^{\alpha_3} \dots . P_k^{\alpha_k}}$ où α_i est le nombre de termes de valeur P_i contenus dans n.

X) PPCM et PGCD de deux entiers naturels a et b :

1) Plus Petit Commun Multiple (PPCM)

a- Définition :

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. On appelle plus petit commun multiple de a et b, le plus petit élement strictement positif de ($a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$).

Notation :

Le plus petit commun multiple de a et b peut être noté comme suit:

PPCM (a ; b) = (a V b) = m .

b- Propriétés

P$_1$: $\forall$ (a ; b) $\in$ $\mathbb{Z}^2$; PPCM(a ; b) = PPCM(| a | ; | b |)

C'est à dire cherché le PPCM de deux entiers relatifs, revient à cherché le PPCM de deux entiers naturels non nuls.

P$_2$: $\forall$ (a ; b) $\in$ $(\mathbb{N}^*)^2$, on a : m(a ; b) $\leq$ PPCM(a ; b) $\leq$ $a \bullet b$

P$_3$: $\forall$ (a ; b) $\in$ $(\mathbb{N}^*)^2$, on a : PPCM(a ; b) = a < = > $a \in$ ($b\,\mathbb{Z}$).

Exemple : PPCM (12 ; 4) = 12 < = >12 $\in$ (4 $\mathbb{Z}$).

P$_4$: L'ensemble des multiples communs de deux entiers naturels non nuls a et b est l'ensemble des multiples de leurs PPCM, c'est-à-dire si PPCM (a ; b) = m ; alors : ($\mathbb{Z}$ $\cap$ $b\,\mathbb{Z}$) = $m\mathbb{Z}$.

Exemple : PPCM (12 ; 16) = 48 donc (12$\mathbb{Z}$ $\cap$ 16$\mathbb{Z}$) = 48$\mathbb{Z}$.

P$_5$: Soit a ; b et k trois entiers naturels non nuls. On a : PPCM (ka ; kb) = kPPCM(a ; b)

Exemple : PPCM(120 ; 168) = PPCM(24×5 ; 24×7) = 24 = 24•PPCM(5 ; 7) = 24×35

= >PPCM(120 ; 168) = 840

2) Plus Grand Commun Diviseur (PGCD)

a- Définition :

Soient $a\ et\ b$ deux entiers relatifs non nuls. On appelle Plus Grand Commun Diviseur de a et b, le plus grand élement commun strictement positif de $(\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z} \cap \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z})$.

Notation :

Le Plus Grand Commun Diviseur de a et b peut avoir les notations suivantes :

PGCD ($\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$) = ($\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$) = d = Δ .

b- Propriétés :

P_1 : $\forall\ (a\ ;\ b) \in \mathbb{Z}^2$; PGCD (a ; b) = PGCD ($|a|$; $|b|$)

C'est à dire cherché le PGCD de deux entiers relatifs, revient à cherché le PGCD de deux entiers naturels non nuls.

P_2 : Soient $a\ et\ b$ deux entiers naturels non nuls. On a :

PGCD (a ; b) = d => D(a ; b) = D_d où D_d désigne l'ensemble des diviseurs de d.

Exemple :

PGCD (24 ; 30) = 6 => PGC D(24 ; 30) = D_6 = { 1 ; 2 ; 3 ; 6 }

P_3 : Soient a ; b et k trois entiers naturels non nuls. On a :

PGCD (ka ; kb) = k PGCD (a ; b) .

Exemple :

PGCD (228 ; 95) = PGCD (19×12 ; 19×5) = 19 PGCD (12 ; 5) = 19×1 = 19

P_4 : Si b > a alors PGCD(a ; b) = PGCD(a ; $b - a$) = PGCD$[\,b-a\,; a-(b-a)]$

Exemple 1 :

PGCD(143 ;27) = PGCD(27 ; 116) = PGCD(27; 89) = PGCD(77; 62) = PGCD(27;35)

= PGCD(27 ; 8) = PGCD(8 ; 19) = 1

Exemple 2 :

PGCD($2n + 3$; $5n - 2$) = PGCD($3n - 5$; $2n + 3$) = PGCD($n - 8$; $2n + 3$)
= >PGCD($n + 11$; $n - 8$) = PGCD(19 ; $n - 8$) = 19

P$_5$:D'après l'algorithme d'Euclide, si $a = bq + r$ (r ≠ 0) alors :

Activité

Consigne : Montre que PGCD$[(5n^3 - n)$; $(n + 2)]$ = PGCD$[(n + 2)$; $38]$

Synthèse

La division Euclidienne de $(5n^3 - n)$ par $(n + 2)$ donne pour quotient :

$q = 5n^2 - 10n + 19$ et pour reste $r = -38$.

Puisque : PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r) alors on a :

PGCD$[(5n^3 - n)$; $(n + 2)]$ = PGCD$[(n + 2)$; $-38]$ = PGCD$[(n + 2)$; $38]$

P$_6$: Soit (a ; b) ∈ $(\mathbb{N}^*)^2$ et d leur PGCD. Un entier relatif $m$est un multiple de d si et seulement si, il existe deux entiers relatifs u et v tel que $m = au + bv$

Exemple :

38 est un multiple de 19 ; donc il existe un couple $(u ; v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$38 = 228u + 95v \Rightarrow 38 = 228(1) + (-2)(95) \Rightarrow u = 1 \; et \; v = -2$$

XI) Algorithme d'Euclide :

1) Définition :

Soient a et b deux entiers tels que : $0 <$ b $< a$ et r le reste de la division Euclidienne de a par b.

On appelle **Algorithme d'Euclide**, toute opération visant à Détermine le PGCD des deux entiers $a\ et\ b$ en effectuant les divisions Euclidiennes successives suivantes :

- Division de a par b pour obtenir : a = b$q_0 + r_0$;Avec $0 \leq r_0 < b$.
- Division de b par r_0 pour obténir : b = $r_0 q_1 + r_1$; Avec $0 \leq r_1 < r_0$.
- Division de r_0 par r_1 pour obtenir : $r_0 = r_1 q_2 + r_2$; Avec $0 \leq r_2 < r_1$.

Et ainsi de suite jusqu'à obtention du dernier reste non nul qui correspond au PGCD des deux entiers $et\ b$.

NB : toutes ces opérations peuvent êtres résumées dans un tableau appelé : tableau **d'Algorithme** qui se présente sous la forme :

Quotients	q_0	q_1	q_2	…..q_{n+1}
Dividendes	**Diviseurs**	r_0	r_1	…..r_n
Restes	r_0	r_1	r_2	…..r_{n+1}

XII) Nombres Premiers entre eux ou Nombres étrangers :

1) Définitions :

Définition 1 :

Soient $a\ \ et\ \ b$ deux nombres entiers relatifs non nuls.

On dit que $a\ \ et\ \ b$ sont premiers entre eux (ou sont étrangers) si **PGCD ($\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$) = 1.**

Définition 2:

On dit également que $a\ \ et\ \ b$ sont premiers entre eux (ou sont étrangers) s'ils n'admettent pas de diviseur commun (en dehors de l'unité c'est-à-dire 1).

2) Théorèmes :

- **Théorème 1 : (Théorème de Bézout).**

Soient $a\ \ et\ \ b$ deux entiers relatifs non nuls. $a\ \ et\ \ b$ sont étrangers s'il existe un couple ($\boldsymbol{u}$; $\boldsymbol{v}$) $\in\ \mathbb{N}$ tel que : $\boldsymbol{au + bv = 1.}$

- **Théorème 2 : (Théorème de Gauss).**

Soient a ; b ; et c trois entiers relatifs non nuls. Si a divise bc et que $a\ et\ b$ sont premier entre eux c'est-à-dire : (**PGCD ($\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$) = 1**), alors a divise c.

- **Théorème 3 : (Théorème de Fermat).**

Soit $\boldsymbol{a}$ un nombre entier non nul, et $\boldsymbol{p}$ un nombre premier. Si $\boldsymbol{p}$ ne divise pas $\boldsymbol{a}$, alors il s'en suit la congruence suivante : $\boldsymbol{a^{p-1}} \equiv \boldsymbol{1}[\ \boldsymbol{p}\ ]$

- **Théorème 4 :**

Si $a\ \ et\ \ b$ sont premiers entre eux (PGCD **(** $\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$ **) = 1**) et si $a\ \ et\ \ b$ divisent c, alors le produit ab divise c.

- **Théorème 5 :**

Si $a\ \ et\ \ b$ sont premiers entre eux (PGCD **(** $\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$ **) = 1**), alors PPCM (a ; b) = ab

3) Relation Entre PGCD et PPCM :

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux entiers naturels non nuls. Si $\boldsymbol{d}$ et $\boldsymbol{m}$ désignent respectivement le

PGCD et le **PPCM** des entiers naturels : $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$, on a : $a \bullet b = m \bullet d$

Ainsi il existe deux entiers a' et b' premiers entre eux (**PGCD (** $\boldsymbol{a}'$; $\boldsymbol{b}'$ **) = 1**) tel que :

$$a = a' \bullet d \quad \text{et} \quad b = b' \bullet d \quad => a \bullet b = d^2 \bullet a'b'$$

Puisque a' et b' sont premiers entre eux (**PGCD (** $\boldsymbol{a}'$; $\boldsymbol{b}'$ **) = 1**), alors on a le théorème

Suivant : **PPCM (**$\boldsymbol{a}'$; $\boldsymbol{b}'$ **)** $=$ $\boldsymbol{a}' \bullet \boldsymbol{b}'$

XIII) Résolution dans $\mathbb{Z}^2$ des équations Diophantiennes

Equations du type ($\boldsymbol{ax + by = c}$)

1) Définition :

On appelle équation Diophantienne, toute équation de $\mathbb{Z}^2$ dont l'ensemble solution se présente sous forme de couple(x ; y).

Résolution d'un cas particulier : Equation du type a$\boldsymbol{x}$ + b$\boldsymbol{y}$ = $\boldsymbol{c}$.

$ax + by = c$ où : a ; b ; c sont tous des entiers (avec $a$et b non nul)

Théorème

L'équation : $ax + by = c$, admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ si et seulement si c est un multiple du PGCD(a ; b).

2) Résolution

Pour Résous de telles équations, nous pouvons utilisez deux méthodes :

La méthode par Congruence ou La méthode d'algorithme

Exercices

Raisonnement par récurrence.

1 Démontre par récurrence les propositions suivantes :

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 2^n > n$.
2) $\forall n \in \mathbb{N}, on\ a : 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots . + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2 Démontre par récurrence que :

1- $\forall n \in \mathbb{N}, on\ a : 3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.
2- $\forall n \in \mathbb{N}, on\ a : 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Division euclidienne dans ℕ et dans ℤ.

3 1) Détermine dans chacun des cas suivants, le quotient et le reste la division Euclidienne de l'entier a par l'entier b.

a- $a = 3453$ et $b = 13$; **b-** $a = 354870$ et $b = 15$; **c-** $a = -317$ et $b = 21$

2) Calcule le quotient et le reste de la division euclidienne de 430 par 38.
Peut-on en déduis, sans effectuer une nouvelle division, le quotient et le reste de la division de 860 par 76 ?

4 1) 1235 personnes (**hommes** + **femmes**) doivent voyagées dans des cars de 45 places.

Combien faut-il de cars, et combien de personnes rempliront le car non plein ?

2) Nous étions vendredi 1er septembre 2006. Quel jour de la semaine serons-nous le 1er septembre 2007 ? Le 1er septembre 2008 ? Le 1er septembre 2009 ?

5

1) La somme de deux entiers naturels a et b avec $(a > b)$ est 444. La division Euclidienne de a par b donne $q = 4$ pour quotient et $r = 24$ pour reste. Détermine les entiers a et b.
2) Soient deux entier naturels a et b $(a > b)$. La division Euclidienne de a par b donne pour quotient $q = 6$ et $r = 47$ pour reste. Par ailleurs $a + b + r = 591$. Détermine a et b.
3) Quelle peuvent être le diviseur et le reste d'une division Euclidienne dont le dividende est 542 et le quotient est 12 ?
4) La division Euclidienne de l'entier naturel a par b donne pour quotient q et pour reste r. D'autre par $(a + 15)$ diviser par $(b + 5)$ donne q pour quotient et r pour reste. Détermine q.

Multiples – Diviseurs et Critères de divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

6

1) Donnez tous les multiples de 7 (ou expression…)
2) Donnez tous les multiples de 1
3) Donnez tous les multiples de 0
4) Comment s'écrivent les nombres pairs, les nombres impairs ?
5) Les nombres 12 et 18 sont ils des diviseurs de 2772 ?
6) Trouve un entier naturel qui soit diviseur de 48 sans être diviseur de 12.
7) Combien y-a-t'il de multiples de 17 entre 1 000 et 2 500 ?

7

1) Détermine le chiffre x pour que $\overline{53x2}$ soit divisible par 9.
2) Détermine le chiffre y pour que $\overline{53y4}$ soit divisible par 3 et 4.

8

On considère l'entier naturel N qui s'écrit $\overline{53x4}^{8}$

Détermine x tel que :

a) N soit divisible par 7

b) N soit divisible par 6.

c) En déduis la valeur de x pour que N soit à la fois divisible par 6 et par 7.

PGCD et PPCM.

9

Dans chacun des cas suivants, Détermine le PGCD et le PPCM des réels a et b.

a- $a = 24 \;\; et \;\; b = 33$; **b-** $a = 48 \;\; et \;\; b = 46$; **c-** $a = 1455 \;\; et \;\; b = 335$

10

Montre dans chacun des cas suivants que:

1) PGCD($2n + 3$; $5n - 2$) = 19
2) Montre que PGCD[($5n^3 - n$) ; ($n + 2$)] = PGCD[($n + 2$) ; 38]

11

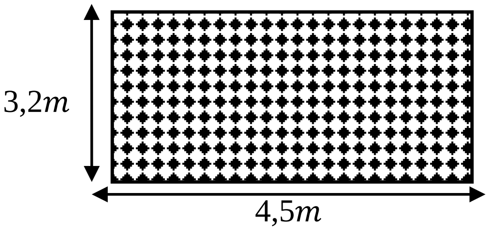
Deux voitures A et B démarrent en même temps d'une même ligne de depart et font plusieurs tours d'un même circuit. La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.

1) Determine un autre moment (autres que le depart!) où les voitures A et B se croisent sur la ligne de depart.
2) Precise le nombre de tours effectués par chaque voiture.

12

1) Détermine le PGCD de 450 et 320.

2) Une maison a pour dimensions 4,5m et 3,2m. On souhaite carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe comme l'indique la figure suivante :



3) Quel est le plus grand côté possible (en cm) de la dalle carrée ?

13

On dispose d'une feuille de papier. On découpe dans cette feuille le plus grand carré possible. Dans le morçeau restant, on découpe encore le plus grand carré possible, et ainsi de suite….

On continue à découper le plus grand carré possible jusqu'à ce que le morçeau restant soit lui meme un carré.

1) Quelle est la taille du dernier carré si les dimensions de la feuille initiale sont 192 cm sur 84 cm?
2) Même question si les dimensions initiales sont deux entiers quelconques.

14

On considère l'équation (E) définie par : $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$, $35x - 27y = 2$.

1) a- Vérifier que $(-20\,;\,-26)$ est solution de (E).
   b- Démontrer que les solutions de (E) sont les couples $(x\,;y)$d'entiers relatifs vérifiant : $x = 27k - 20$ et $y = 35k - 26$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2) Dans un village il ya deux fétiches **Bolifing** et **Boliblen**. Le fétiche **Bolifing** est adoré tous les 140 jours et le fétiche **Boliblen** tous les 180 jours. Les jours où les cultes coïncident sont appelés jours de grâce. Un matin, le village a adoré le fétiche **Boliblen.**
   Déterminer le nombre de jours qui séparent ce matin-là du prochain jour de grâce sachant qu'ils avaient adoré le fétiches **Bolifing** 8 jours auparavant.

15

Δ et m désignent respectivement le PGDC et le PPCM des entiers a et b.

Détermine l'ensemble des couples $(a\,;b)$ d'entiers relatifs vérifiant les conditions données ci-dessous :

1) $\begin{cases} a + b = 168 \\ \Delta = 21 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} m + 3\Delta = 276 \\ 10 < \Delta < 30 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = a \bullet b \end{cases}$

16 Montre que l'équation : $(x\ ;\ y)$ de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$: $6y - 3x = m$ admet des solutions si et seulement si m est un multiple de 3.

1) Résous dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ les équations suivantes :
   a- $6y - 3x = 5.$
   b- $6y - 3x = 3.$
2) Déduis de ce qui précède les solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation :
   $(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = 1.$

17 Pour tout entier naturel n, on considère les nombres :
$a_n = 4\times10^n - 1$; $b_n = 2\times10^n - 1$ $\quad c_n = 2\times10^n + 1$

a) Calcule : a_i ; b_i ; c_i pour $i \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$.

b) Démontre que a_n et c_n sont divisibles par 3

c) Démontre que b_2 est un nombre premier.

d) Démontre que pour tout entier naturel n, on a : $b_n \times c_n = a_{2n}$. En déduis la décomposition en produit de facteurs premiers de a_4

e) Démontre que : PGCD$(b_n\ ; c_n)$ = PGCD$(b_n\ ; 2)$. En déduis que b_n et c_n sont premiers entre eux c'est-à-dire sont étrangers.

18 1) On considère l'équation (1) d'inconnue $(x\ ;\ y)$ de $\mathbb{Z}^2$: $11x - 24y = 1.$

   a- Justifie à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.
   b- En utilisant l'algorithme d'Euclide, Détermine une solution particulière de (1).
   c- Détermine l'ensemble solution de l'équation (1)

2) Recherche du PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

a- Justifie que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.
b- $(x\ ;\ y)$ désignant un couple quelconque d'entiers naturels solution de (1), Montre que l'on peut écrire : $(10^{11x} - 1) - 10(10^{24y} - 1) = 9.$
c- Montre que $10^{11} - 1$ divise $10^{11x} - 1.$
   (On rappelle que : $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots\ldots + 1)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
d- Déduis de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :
   $(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9.$
e- Montre que tout diviseur commun à $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$ divise 9.
f- Déduis des questions précédentes le PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

Système de numération

19

1) Donner l'écriture de : **a)** A = $\overline{231}^4$; **b)** B = $\overline{1001}^2$; **c)** C = $\overline{4\alpha2}^5$ en base 10.
2) Ecris la suite des 10 premiers nombres entiers en base 2 puis en base 4.
3) En base 12, on désigne par A le chiffre correspondant à 10, par B celui correspondant à 11. Ecris la suite des cinq successeurs de BA9.
4) A s'écrit 23 dans le système décimal et 27 dans un système de base a. Que vaut a ?

20

1) Ecris dans le système décimal le nombre : $\overline{432}^5$
2) Ecris dans le système binaire le nombre : $\overline{127}^{10}$
3) Ecris dans le système décimal le nombre : $\overline{F0A3}^{16}$
4) Sachant que 14 = 13 + 1, écrire14^8 dans le système de base 13.
5) Un nombre s'écrit BABA (Avec : A = 10 et B = 11) dans le système hexadécimal. Ecris ce nombre dans le système octal.

21

Un nombre de (6) chiffres s'écrit en base 7 et comporte comme chiffre de gauche le nombre (1). Un autre nombre de (6) chiffres s'écrit en base 7 et comporte comme chiffre de droite le nombre (1) D'autre par ce nombre est encore le triple du précédent. Détermine les nombres initiaux.

22

Soit x un entier naturel $x \geq 5$ on considère les entiers $n = \overline{100x}$ et $n' = \overline{x001}$ dans le système de base $(x + 1)$

a- Ecris n et n' dans le système de base x.

b- Ecris $n + n'$ dans le système de base x et vérifier que $n + n'$ est divisible par $(x + 1)$ puis donner le quotient q de cette division en base x.

c- Détermine les entiers a et b tel que : $q = \overline{ab}^x \bullet \overline{aaa}^x$.

Congruence modulo n et structure d'anneau

23

1) Complète les congruences suivantes :

   a) 37≡….mod[13] ; **b)** 125≡….mod[100] ; **c)** -5≡….mod[10]

2) Complète les congruences suivantes :

   a) 7≡….mod[10] ; **b)** 7^2 ≡….mod[10] ; **c)** 7^3 ≡….mod[10]

En déduis 7^{401} ≡….mod[10] puis 7^{31} ≡….mod[10]

24

1) Le premier Janvier 2000 était un samedi. Quel jour serons nous le premier Janvier 2100 ?

(2000 ; 2004…..sont bissextiles).

2) Trouve le reste de la division euclidienne par 17 du nombre 200^{539}

25 Sachant que $n \equiv 3[5]$, prouver que $2n^2 - n$ est un multiple de 5.

26 1) Résous dans$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

a- $\dot{4}x = \dot{3}$; **b-** $\dot{1}x^2 + \dot{2}x - \dot{3} = \dot{0}$

2) Résous dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$ le système : $\begin{cases} \dot{3}x + \dot{2}y = \dot{1} \\ \dot{2}x + \dot{5}y = \dot{6} \end{cases}$

Problèmes.

27 Un Champ a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement $119m$ et $91m$; les deux autres cotés mesurent $56m$ et $35m$. Pour la clôture, le propriétaire Mr DEMBELE a besoin des poteaux de support à égale distance mesurée en nombre entier de mètre pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.

1) a) Quelle est la distance entre deux poteaux quelconques?

b) Détermine le nombre de poteaux nécessaires à la clôture.

2) Selon le type de clôture et la qualité de fil de fer choisi, Mr DEMBELE a dépensé $\overline{\alpha 1630}^{11}$ F (où α = 10) pour un nombre entier x rangées de fil de fer et $\overline{53008}^{9}$ F pour un nombre entier y de jours de mains d'œuvre. Après évaluation Mr DEMBELE s'est rendu compte que le coût total des travaux était de $\overline{656\alpha 5}^{13}$ F et le nombre de rangées de clôture dépassait le nombre de jours de travail.

a) Exprime tous les montants dans le système décimal.

b) Précise le nombre de rangées de fil de fer et le nombre de jours de mains d'œuvre.

28 On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par : $\begin{cases} u_0 = 14 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases}$

1) Calcule u_1 , u_2 , u_3 et u_4. Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers

Chiffres de u_n ?

2) Montre que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \equiv u_n[4]$

En déduis que $\forall\, k \in \mathbb{N},\ u_{2k} \equiv 2[4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0[4]$.

3) Montre par récurrence que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $2u_n = 5^{n+2} + 3$

29 1) a) Détermine, suivant les valeurs de n, le reste de la division par 7 de l'entier 3^n.
En déduis le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$

b) Dans le système de numération décimale, on considère l'entier naturel $\overline{651x}$.

Détermine x pour que $(506390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par 7.

2) a) Détermine le plus grand diviseur commun des nombres 21590 et 9525

b) Détermine l'ensemble des entiers x tels que $34x \equiv 2[15]$.

c) Résous l'équation : $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2\,; 21590x + 9525y = 1270$

d) Quel est le chiffre des unités de l'entiers naturels 7^{1980} écrit dans le système décimal ?

Solutions

Raisonnement par récurrence.

1 Démontrons par récurrence les propositions suivantes :

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 2^n > n$.

- **<u>1ère Etape :</u>(Initialisation) :**

Pour $n = 1$; on a : $2^1 = 2 > 1$ (vraie).
Pour $n =$; on a : $2^2 = 4 > 2$ (vraie).

- **<u>2ère Etape :</u>(Transmission) :**

Supposons $2^k > k$ et montrons que $2^{k+1} > k + 1$.

On sait que : $2^k > k$.

En multipliant chaque membre de l'inégalité par 2, on a :

$2\times2^k > 2k$. Or $\forall k \in \mathbb{N}$, $2k \geq k + 1$ d'où : $2^{k+1} > k + k \geq k + 1$

$2^{k+1} > k + 1$

- **<u>3ère Etape :</u>(Conclusion) :**

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 2^n > n$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}, on\ a :\ 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Posons : $P_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n \quad et\ P_n' = \frac{n(n+1)}{2}$

- **1ère Etape :(Initialisation) :**

Pour $n = 1$; on a : $\begin{cases} P_1 = 1 \\ P_1' = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$ => $P_1 = P_1'$ (vraie)

Pour $n = 2$; on a : $\begin{cases} P_2 = 1 + 2 = 3 \\ P_2' = \frac{2(2+1)}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$ => $P_2 = P_2'$ (vraie)

- **2ère Etape :(Transmission) :**

Supposons que la proposition est vraie au rang $n = k$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n = k + 1$.

Pour $n = k + 1$, on a :

$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Or : $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

D'où $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

- **3ère Etape :(Conclusion) :**

$\forall n \in \mathbb{N}, on\ a :\ 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Posons : $P_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \quad et\ P_n' = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- **1ère Etape :(Initialisation) :**

Pour $n = 1$; on a : $\begin{cases} P_1 = 1^2 = 1 \\ P_1' = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1 \end{cases}$ => $P_1 = P_1'$ (vraie)

Pour $n = 2$; on a : $\begin{cases} P_2 = 1^2 + 2^2 + = 5 \\ P_2' = \frac{2(2+1)(4+1)}{6} = \frac{30}{6} = 5 \end{cases}$ => $P_2 = P_2'$ (vraie)

- **<u>2ère Etape :</u>(Transmission) :**

Supposons que la proposition est vraie au rang $n = k$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n = k+1$.

Pour $n = k + 1$, on a :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Or $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

D'où $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k + 1)^2$

$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

- **<u>3ère Etape :</u>(Conclusion) :**

$\forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2 Démontrons par récurrence que :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, on\ a :$ $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

Posons $A_n = 3^{n+3} - 4^{4n+2}$

- <u>1ère Etape :</u>(Initialisation) :

Pour $n = 0$; on a : $A_0 = 3^3 - 4^2 = 11 \equiv 0[11]$
Pour $n = 1$; on a : $A_1 = 3^4 - 4^6 = -4015 \equiv 0[11]$

- <u>2ère Etape :</u>(Transmission) :

Supposons que la proposition est vraie au rang $n = k$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n = k+1$.

Pour $n = k + 1$, on a : $A_{k+1} = 3^{k+1+3} - 4^{4(k+1)+2} = 3^{k+1+3} - 4^{4k+4+2} =>$

$A_{k+1} = 3^{k+3} \times 3^1 - 4^{4k+2} \times 4^4 = 3^{k+3} \times 3 - 4^{4k+2} \times 4^4$ or $3 \equiv 3[11]$ et $4^4 \equiv 3[11]$

$=> A_{k+1} \equiv (3^{k+3} \times 3 - 4^{4k+2} \times 3\ )[11] => A_{k+1} \equiv 3(\underbrace{3^{k+3} - 4^{4k+2}}_{A_k})[11]$

Or d'après l'hypothèse de récurrence $A_k \equiv 0[11] => 3A_k \equiv 0[11]$

D'où la relation est vraie à l'ordre $n = k + 1$

- <u>$3^{ère}$ Etape :</u>(Conclusion) :

$\forall n \in \mathbb{N}, on\ a :\ 3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

2) $\forall n \in \mathbb{N}, on\ a :\ 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Posons $A_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

- <u>$1^{ère}$ Etape :</u>(Initialisation) :

Pour $n = 0$; on a : $A_0 = 3^1 + 2^2 = 7 \equiv 0[7]$
Pour $n = 1$; on a : $A_1 = 3^3 + 2^3 = 35 \equiv 0[7]$

- <u>$2^{ère}$ Etape :</u>(Transmission) :

Supposons que la proposition est vraie au rang $n = k$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n = k + 1$.

Pour $n = k + 1$, on a : $A_{k+1} = 3^{2(k+1)+1} + 2^{k+1+2} = 3^{2k+2+1} + 2^{k+1+2} =>$

$A_{k+1} = 3^{2k+1} \times 3^2 + 2^{k+2} \times 2^1 = 3^{k+3} \times 9 - 4^{4k+2} \times 2$ or $9 \equiv 2[7]$ et $2 \equiv 2[7]$

$=> A_{k+1} \equiv (3^{2k+1} \times 2 + 2^{k+2} \times 2)[7] => A_{k+1} \equiv 2\underbrace{(3^{2k+1} + 2^{k+2})}_{A_k}[11]$

Or d'après l'hypothèse de récurrence $A_k \equiv 0[7] => 2A_k \equiv 0[7]$

D'où la relation est vraie à l'ordre $n = k + 1$

- <u>$3^{ère}$ Etape :</u>(Conclusion) :

$\forall n \in \mathbb{N}, on\ a :\ 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Division euclidienne dans ℕ et dans ℤ.

3

1) Déterminons dans chacun des cas suivants, le quotient et le reste la division Euclidienne de l'entier a par l'entier b.

a- $a = 3453$ et $b = 13$.

Soit q le quotient et r le reste de la division Euclidienne de l'entier a par l'entier b.

On a : $3453 \equiv 8[13]$ => $3453 = 13 \times 256 + 8$

D'où q = 265 et $r = 8$

b- $a = 354870$ et $b = 15$

Soit q le quotient et r le reste de la division Euclidienne de l'entier a par l'entier b.

On a : $354870 \equiv 0[15]$ => $354870 = 15 \times 23658 + 0$

D'où q = 23658 et $r = 0$

c- $a = -317$ et $b = 21$

Soit q le quotient et r le reste de la division Euclidienne de l'entier a par l'entier b.

$-317 \equiv 19[21]$ => $-317 = 21 \times (-16) + 19$ car il ne faut pas oublier que $0 \leq r < |b|$

D'où q = -16 et $r = 19$

2) a- Calculons le quotient et le reste de la division euclidienne de 430 par 38.

Soit q le quotient et r le reste de la division Euclidienne de l'entier a par l'entier b.

$430 \equiv 12[38]$ => $430 = 38 \times 11 + 12$

D'où q = 11 et $r = 12$

b- Peut-on en déduis, sans effectuer une nouvelle division, le quotient et le reste de la division de 860 par 76 ?

$430 = 38 \times 11 + 12 \Leftrightarrow 2 \times (430) = 2 \times 38 \times 11 + 2 \times 12 \Leftrightarrow 860 = 76 \times 11 + 24$

On en déduit donc que, dans la division de 860 par 76, le quotient vaut 11 et le reste 24.

4

1) 1235 personnes (hommes + femmes) doivent voyagées dans des cars de 45 places.

Déterminons le nombre de cars nécessaire, et le nombre de personnes qui rempliront le car non plein

La division euclidienne de 1235 par 45 fourni : $1235 = 45 \times 27 + 20$.

Le voyage nécessitera donc 27 cars $\ll pleins \gg$ et un 28$^{\text{ième}}$ car occupé par 20 personnes.

2) Nous étions vendredi 1$^{\text{er}}$ septembre 2006.

Déterminons le jour de la semaine correspondant au 1er septembre 2007 ; au 1er septembre 2008 et au 1er septembre 2009

− Entre le 1er septembre 2006 et le 1er septembre 2007 s'écrouleront 365 jours (car 2007 n'est pas bissextile). Or $365 = 7 \times 52 + 1$, donc s'écouleront 52 semaines et 1 jour, faisant tomber le 1er septembre 2007 un samedi.

− Entre le 1er septembre 2007 et le 1er septembre 2008 s'écrouleront 366 jours (car 2008 est bissextile). Or $366 = 7 \times 52 + 2$, donc s'écouleront 52 semaines et 2 jour, faisant tomber le 1er septembre 2008 un lundi.

− Entre le 1er septembre 2008 et le 1er septembre 2009 s'écrouleront 365 jours (car 2009 n'est pas bissextile). Or $365 = 7 \times 52 + 1$, donc s'écouleront 52 semaines et 1 jour, faisant tomber le 1er septembre 200 un lundi.

5

1) La somme de deux entiers naturels a et b avec ($a > b$) est 444. La division Euclidienne de a par b donne $q = 4$ pour quotient et $r = 24$ pour reste. Déterminons les entiers a et b.

On sait que : $a = qb + r \Leftrightarrow a - qb = r$ or $q = 4$ et $r = 24 \Rightarrow a - 4b = 24 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a + b = 444 \\ a - 4b = 24 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne : $a = 360$ *et* $b = 84$

2) Soient deux entier naturels a et b ($a > b$). La division Euclidienne de a par b donne pour quotient $q = 6$ et pour reste $r = 47$.

Par ailleurs $a + b + r = 591$. Déterminons a et b sachant que q = 6 ; $r = 47$ et $a + b + r = 591$

On sait que : $a + b + r = 591$ et d'autre part $a = qb + r$

Formons ainsi le système avec les équations : $a = qb + r$ et $a + b + 47 = 591$

$\Rightarrow \begin{cases} a = qb + r \\ a + b + r = 591 \end{cases}$ or $q = 6$ et $r = 47$ alors le système devient $\begin{cases} a = 6b + 47 \\ a + b + 47 = 591 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 6b = 47 \\ a + b = 591 - 47 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a - 6b = 47 \\ a + b = 544 \end{cases}$

La résolution de ce système donne : $a = 473$ *et* $b = 71$

3) Déterminons le diviseur et le reste d'une division Euclidienne dont le dividende est 542 et le quotient est 12

On sait que : $a = qb + r$. Or $a = 542$ et $q = 12 \Rightarrow 542 = 12b + r \Rightarrow$
$r = 542 - 12b$ **(1)**

D'autre part $0 \leq r < b$

$\Leftrightarrow 0 \leq 542 - 12b < b$

$\Leftrightarrow 12b \leq 542 < 13b$

$\Leftrightarrow 12 \leq \frac{542}{b} < 13$ Alors l'encadrement nous permet de dire que $\frac{542}{b} = 12 \Rightarrow b = 45$.

En remplaçant b par sa valeur dans **(1)** , on obtient $r = 542 - 12(45) = 2$

D'où $b = 45$ et $r = 2$

4) La division Euclidienne de l'entier naturel a par b donne pour quotient q et pour reste r.
D'autre par $(a + 15)$ diviser par $(b + 5)$ donne q pour quotient et r pour reste.
Déterminons le quotient q.

$$\begin{cases} a = qb + r \\ (a + 15) = q(b + 5) + r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - qb = r \\ a + 15 = qb + 5q + r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - qb = r \\ a - qb = 5q + r - 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + qb = -r \\ a - qb = 5q + r - 15 \end{cases}$$

$$5q - 15 = 0 \Rightarrow q = 3$$

Multiples – Diviseurs et Critères de divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

6

1) Donnons tous les multiples de 7 (ou expression…)

Les multiples de 7 sont tous les entiers de la forme $7n$, où $n \in \mathbb{N}$

2) Donnons tous les multiples de 1

Les multiples de 1 sont tous les entiers naturels.

3) Donnons tous les multiples de 0

La liste des multiples de 0 est réduite à 0 (car pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \times 0 = 0$)

4) Déterminons l'écriture des nombres pairs et des nombres impairs

Les entiers pairs sont multiples de 2, donc de la forme $2n$, où $n \in \mathbb{N}$ et Les entiers impairs sont de la forme $2n + 1$, où $n \in \mathbb{N}$.

5) Vérifions si les nombres 12 et 18 sont des diviseurs de 2772

Les nombres 12 et 18 sont des diviseurs de 2772 car $2772 = 12 \times 231$
et $2772 = 18 \times 154$

6) Trouvons un entier naturel qui soit diviseur de 48 sans être diviseur de 12.

Par exemple : 24 ou 16

7) Déterminons le nombre de multiples de 17 entre 1 000 et 2 500

Les multiples de 17 sont tous les entiers de la forme $17n$, où $n \in \mathbb{N}$. Les multiples de 17 entre 1 000 et 2 500 sont donc les entiers tels que $1000 \leq 17n \leq 2500 \Leftrightarrow \frac{1000}{17} \leq n \leq \frac{2500}{17}$.

Puis que $n \in \mathbb{N}$, on a donc $59 \leq n \leq 147$. Les multiples de 17 compris entre 1 000 et 2 500 sont donc les entiers de la forme $17n$, avec $59 \leq n \leq 147$. Il ya donc $147 - 59 + 1 = 89$ multiples de 17 entre 1 000 et 2 500

7

1) Déterminons le chiffre x pour que $\overline{53x2}$ soit divisible par 9.

$\overline{53x2}$ est divisible par 9 si la somme de ces chiffres l'est, c'est-à-dire :
$5 + 3 + x + 2 = 10 + x$ est divisible par 9. Mais puis que x est un chiffre compris entre 0 et 9, la seule valeur de $10 + x$ divisible par 9 est obtenue pour $x = 8$.

2) Déterminons le chiffre y pour que $\overline{53y4}$ soit divisible par 3 et 4.

$\overline{53y4}$ est divisible par 3 et 4 si la somme de ces chiffres est divisible par 3 et si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4. La somme de ces chiffres vaut : $5 + 3 + y + 4 = 12 + y$, divisible par 3 si y vaut : 0 ; 3 ; 6 ou 9. Mais si on veut que le nombre formé par ces deux derniers chiffres, à savoir $\overline{y4} = 10y + 4$ soit divisible par 4, seul $y = 0$ ou 6 convient.

8

On considère l'entier naturel N qui s'écrit $\overline{53x4}^{8}$

Déterminons x tel que :

1) N soit divisible par 7

N = $\overline{53x4}^{8}$ => N = $5 \times 8^3 + 3 \times 8^2 + 8 \times x + 4$

Or : $8 \equiv 1[7]$; $8^2 \equiv 1[7]$; $8^3 \equiv 1[7]$

Donc N$\equiv (5 + 3 + x + 4)[7]$ ⇔ N$\equiv (12 + x)[7]$ or $12 \equiv 5[7]$ => N$\equiv (5 + x)[7]$.
N est divisible par 7 si $(5 + x) \equiv 0[7]$ ⇔ $5 + x = 7k$ => $x = 7k - 5$

- Si $k = 0$ alors $x = -5$ à rejeté
- Si $k = 1$ alors $x = 2$ à retenir
- Si $k = 2$ alors $x = 9$ à rejeté

On remarque qu'à partir de $k = 2$, la valeur de x est supérieur à la base qui est 8

D'où $x = 2$ est la seule valeur pour la quelle N est divisible par 7.

2) N soit divisible par 6.

N = $\overline{53x4}^8$ => N = $5 \times 8^3 + 3 \times 8^2 + 8 \times x + 4$

Or : $8 \equiv 2[6]$; $8^2 \equiv 4[6]$; $8^3 \equiv 2[6]$

Donc N$\equiv (10 + 12 + 2x + 4)[6]$ ⇔ N$\equiv (2 + 2x)[6]$
N est divisible par 6 si $(2 + 2x) \equiv 0[6]$ ⇔ $2 + 2x = 6k$ => $1 + x = 3k$ => $x = 3k - 1$

- Si $k = 0$ alors $x = -1$ à rejeté
- Si $k = 1$ alors $x = 2$ à retenir
- Si $k = 2$ alors $x = 5$ à retenir
- Si $k = 3$ alors $x = 8$ à rejeté (car la valeur de x vaut la base qui est 8)

D'où $x = 2$ ou $x = 5$ sont les deux valeurs pour les quelles N est divisible par 6.

3) En déduisons la valeur de x pour que N soit à la fois divisible par 6 et par 7.

D'après les questions 1) et 2), N est à la fois divisible par 6 et par 7 si $x = 2$.

PGCD et PPCM.

9 Dans chacun des cas suivants, Détermine le PGCD et le PPCM des réels a et b.

a) $a = 24 \quad et \quad b = 33$

La décomposition de $a \ et \ b$ en produit de facteurs premiers donne :

$$\begin{cases} a = 24 \\ b = 33 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2^3 \times 3 \\ b = 3 \times 11 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2^3 \times 3 \times 11^0 \\ b = 3 \times 11 \times 2^0 \end{cases}$$

PGCD(24 ; 33) = $2^0 \times 3 \times 11^0$= 3 = > PGCD(24 ; 33) = 3 **et**

PPCM(24 ; 33) = $2^3 \times 3 \times 11$ = 264 = > PPCM(24 ; 33) = 264

b) $a = 48 \quad et \quad b = 46$

La décomposition de $a \;\; et \;\; b$ en produit de facteurs premiers donne :

$\begin{cases} a = 48 \\ b = 46 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} a \;=\; 2^4 \times 3 \\ b \;=\; 2 \times 23 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} a \;=\; 2^4 \times 3 \times 23^0 \\ b \;=\; 2 \times 23 \times 3^0 \end{cases}$

PGCD (48 ; 46) = $2 \times 3^0 \times 23^0$ = 2 = > PGCD (48 ; 46) = 2 et

PPCM (48 ; 46) = $2^4 \times 3 \times 23$ = 1104 = > PPCM (48 ; 46) = 1104

c) $a = 1455 \;\; et \;\; b = 335$

La décomposition de $a \;\; et \;\; b$ en produit de facteurs premiers donne :

$\begin{cases} a = 1455 \\ b = 335 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} a \;=\; 3 \times 5 \times 97 \\ b \;=\; 5 \times 67 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} a \;=\; 3 \times 5 \times 97 \times 67^0 \\ b \;=\; 5 \times 67 \; \times 3^0 \times 97^0 \end{cases}$

PGCD(1455 ; 335) = $5 \times 3^0 \times 97^0 \times 67^0$= 5 = > PGCD(1455 ; 335) = 5 et

PPCM(1455 ; 335) = $5 \times 3 \times 67 \times 97$ = 97485 = > PPCM(1455 ; 335) = 97485

10 Montrons dans chacun des cas suivants que :

1) PGCD($2n + 3$; $5n - 2$) = 19

PGCD($2n + 3$; $5n - 2$) = PGCD($3n - 5$; $2n + 3$) = PGCD($n - 8$; $2n + 3$)
= >PGCD($n + 11$; $n - 8$) = PGCD(19 ; $n - 8$) = 19

2) Montrons que PGCD[$(5n^3 - n)$; $(n + 2)$] = PGCD[$(n + 2)$; 38]

La division Euclidienne de $(5n^3 - n)$ par $(n + 2)$ donne pour quotient :

$q = 5n^2 - 10n + 19$ et pour reste $r = -38$.

Puisque : PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r) alors on a :

PGCD[$(5n^3 - n)$; $(n + 2)$] = PGCD[$(n + 2)$; -38] = PGCD[$(n + 2)$; 38]

11 Deux voitures A et B démarrent en même temps de la ligne de depart et font plusieurs tours d’un même circuit. La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.

1) Vérifions s’il ya des moments (autres que le depart!) où les voitures A et B se croisent sur la ligne de depart.

Les voitures A et B se croiseront pour la première fois (autres que le depart) au bout d’un temps égal à PPCM (30; 36).

Pour Calcule PPCM (30; 36), deux solutions sont envisageables:

- Soit on cacule PGCD(30; 36), qui vaut 6 et puisque :
  PGCD(30; 36)×PPCM (30; 36) = 30×36, on en déduira PPCM (30; 36) = $\frac{30\times36}{6}$ = 180
- Soit on utilise la decomposition de 30 et 36 en produits de facteurs premiers, à savoir : 30 =$2^1 \times 3^1 \times 5^1$et 36 = $2^2 \times 3^2$ puis l'on calcule grâce aux maximum des puissances, PPCM (30; 36) = $2^2 \times 3^2 \times 5^1$ = 180.

Alors les voitures A et B se croiseront pour la première fois au bout de 180 minutes.

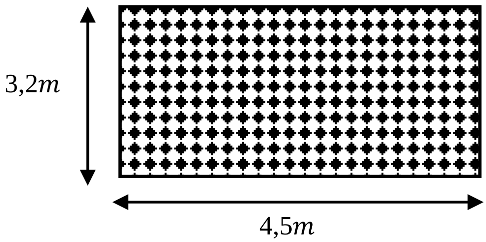
2) Precisions le nombre de tours effectués par chaque voiture.

La voiture A parcourt $\frac{180}{36} = 5$ tours et la voiture B parcourt $\frac{180}{30} = 6$ tours

12

1) Déterminons le $PGCD$ de 450 et 320.

$PGCD(450\,;\ 320) = 2 \times 5 = 10$



2) Déterminons le plus grand côté possible (en m) de la dalle carrée ?

On a : L = 4,5 m = 450 cm et l = 3,2 m = 320 cm.

Ainsi le côté en cm d'une dalle carrée est le PGCD (450 ; 320) = 10.

D'où le plus grand côté possible d'une dalle est 10 cm.

13

On dispose d'une feuille de papier. On découpe dans cette feuille le plus grand carré possible. Dans le morçeau restant, on découpe encore le plus grand carré possible, et ainsi de suite….

On continue à découper le plus grand carré possible jusqu'à ce que le morçeau restant soit lui meme un carré.

1) Déterminons la taille du dernier carré si les dimensions de la feuille initiale sont 192 cm sur 84 cm

La taille du dernier carré est PGCD (192; 84) = 12

2) De même déterminons la taille du dernier carré si les dimensions de la feuille initiale sont deux entiers quelconques.

De manière générale, si on note x et y (avec x et y deux entiers quelconques), les dimensions de la feuille initiale, la taille du dernier carré sera le PGCD $(x\,;\,y)$

14 On considère l'équation (E) définie par : $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$, $35x - 27y = 2$.

1) a- Vérifions que $(-20\,;\,-26)$ est solution de (E).

On a : $35(-20) - 27(-26) = -700 + 702 = 2$. Donc $(-20\,;\,-26)$ est solution de (E).

b- Démontrons que les solutions de (E) sont les couples $(x\,;y)$d'entiers relatifs vérifiant : $x = 27k - 20$ et $y = 35k - 26$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

<u>1ère méthode :</u>

Si le couple $(x_0\,;\,y_0)$ est une solution particulière de l'équation diophantienne $ax + by = c$, alors l'ensemble solution est donc de la forme $S = \{-bk + x_0\,;ak + y_0\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Donc l'ensemble solution de l'équation $35x - 27y = 2$ ayant pour solution particulière $(-20\,;\,-26)$ est :

$S = \{27k - 20\ ;35k - 26\}$ Avec $k \in \mathbb{Z}$.

<u>2ième méthode :</u>

Si $(x_0\,;\,y_0)$ est une solution particulière de l'équation $35x - 27y = 2$ alors on a :

$35x_0 - 27y_0 = 2$. Alors on a le système suivant :

$$\begin{cases} 35x - 27y = 2 & (1) \\ 35x_0 - 27y_0 = 2 & (2) \end{cases}$$

En multipliant l'équation (2) par **– 1** , on a :

$$\begin{cases} 35x - 27y = 2 & (1) \\ -35x_0 + 27y_0 = -2 & (2) \end{cases}$$

En effectuant la somme membre à membre des équations (1) et (2) , on a :
$35(x - x_0) - 27(y - y_0) = 0 \iff 35(x - x_0) = 27(y - y_0)$.

Puisque $PGCD(35\,;27)$= 1, c'est-à-dire que 35 et 27 sont premier entre eux, alors d'après Gauss on a : $35/27(y - y_0) \iff 35/(y - y_0)$. Donc il existe un rée $k \in \mathbb{Z}$ tel que :
$35k = y - y_0 \iff y = 35k + y_0$.
Or $y_0 = -26$ => $y = 35k - 26$.

De même : $27(y - y_0) = 35(x - x_0)$.

Puisque $PGCD(35\ 27) = 1$, c'est-à-dire que 35 et 27 sont premier entre eux, alors d'après Gauss on a : $27/35(x - x_0) \Leftrightarrow 27/(x - x_0)$.
Donc il existe un rée $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $27k = x - x_0 \Leftrightarrow x = 27k + x_0$.
Or $x_0 = -20 \Rightarrow x = 27k - 20$.

D'où $S = \{27k - 20\ ; 35k - 26\}$ Avec $k \in \mathbb{Z}$.

2) Dans un village il ya deux fétiches **Bolifing** et **Boliblen**. Le fétiche **Bolifing** est adoré tous les 140 jours et le fétiche **Boliblen** tous les 180 jours. Les jours où les cultes coïncident sont appelés jours de grâce. Un matin, le village a adoré le fétiche **Boliblen.**

Déterminer le nombre de jours qui séparent ce matin-là du prochain jour de grâce sachant qu'ils avaient adoré le fétiches **Bolifing** 8 jours auparavant.
Soit : $n = 140x$ le nombre de jours d'adoration de **Bolifing** avec $x \in \mathbb{N}$
$m = 108y$ le nombre de jours d'adoration de **Bolifing** avec $y \in \mathbb{N}$
Puisqu'il ya eu 8 jours de différence entre le jour d'adoration des deux fétiches, alors on :
$m = n - 8 \Leftrightarrow$

$108y = 140x - 8 \Leftrightarrow 140x - 108y = 8$. En simplifiant par 4 , on a : $35x_0 - 27y_0 = 2$ et on obtient :

$x = 27k - 20$ et $y = 35k - 26$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Ainsi le plut petit entier k telque $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ est $k = 1$.
Par conséquent $x = 7$ et $y = 9$.
D'où le nombre de jours qui séparent ce matin-là du prochain jour de grâce sachant qu'ils avaient adoré le fétiches **Bolifing** 8 jours auparavant est $n = 108 \times 9 = 972$ jours.

15 Δ et m désignent respectivement le PGDC et le PPCM des entiers a et b.

Déterminons l'ensemble des couples $(a\,; b)$ d'entiers relatifs vérifiant les conditions données ci-dessous :

a) $\begin{cases} a + b = 168 \\ \Delta = 21 \end{cases}$

Soient a' et b' deux entiers non nul tel que : $a = a'd$ et $b = b'd$
(avec PGCD (a'; b') = 1)

Posons : $PGCD(\,a\,; b\,) = 21 = d$. Ainsi le système devient :

$\begin{cases} a'd + b'd = 168 \\ d = 21 \end{cases} <=> \begin{cases} d(\,a' + b'\,) = 168 \\ d = 21 \end{cases} <=> \begin{cases} 21(\,a' + b'\,) = 168 \\ d = 21 \end{cases}$

$<=> \begin{cases} a' + b' = 8 \\ d = 21 \end{cases}$

Puisque PGCD (a' ; b') = 1 alors $(\,a'; b'\,) \in \{(\,3\,;5\,)\ ;\ (\,5\,;3\,);\ (\,7\,;1\,);\ (\,1\,;7\,)\}$

Or : $a = 21a'$ et $b = 21b'$

a'	5	3	7	1
b'	3	5	1	7
a	105	63	147	21
b	63	105	21	147

=> $\boldsymbol{S} = \{(105\,;63)\,;(63\,;105);\ (147\,;21)\,;\ (21\,;147)\}$

b) $\begin{cases} m + 3\Delta = 276 \\ 10 < \Delta < 30 \end{cases}$

Cherchons tous les diviseurs de 276

Par décomposition de 276 en produit de facteurs premiers, on obtient :

$D_{276} = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 12\ ;\ 23\ ;\ 46\ ;\ 69\}$

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Si Δ et $m$désignent respectivement le

PGCD et le PPCM des entiers naturels : a et b , on a :

- $a \bullet b = m \bullet \Delta$

Ainsi il existe deux entiers a'et b' premiers entre eux (PGCD (a' ; b') = 1) tel que :

- $a = a' \bullet \Delta$ et $b = b' \bullet \Delta$ => $a \bullet b = \Delta^2 \bullet a'b'$

=> $\Delta^2 \bullet a'b' = m \bullet \Delta$ <=> $m = a'b' \bullet \Delta$

Alors le système devient :

$$\begin{cases} a'b' \bullet \Delta + 3\Delta = 276 \\ 0 < \Delta < 30 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \Delta(a'b' + 3) = 276 \\ 0 < \Delta < 30 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a'b' + 3 = \frac{276}{\Delta} \\ 0 < \Delta < 30 \end{cases}$$

Or $0 < \Delta < 30$ <=> $\Delta \in \{12\ ;23\}$car l'ensemble des diviseurs de 276 comprises entre 0 et 30 sont : 12 et 23

<u>**1er cas : Si Δ = 12, on a :**</u>

$a'b' + 3 = \frac{276}{12}$ <=> $a'b' + 3 = 23$ =>$a'b' = 20$

Puisque PGCD($a'b'$) = 1 alors ($a'b'$) $\in \{(4\,;5)\ ;\ (5\,;4)\,;\ (20\,;1)\,;\ (1\,;20)\}$

Or $a = 12a'$ et $b = 12b'$

a'	4	5	20	1
b'	5	4	1	20
a	48	60	240	12
b	60	48	12	240

=> $\boldsymbol{S_1} = \{(48\,;60)\,;(60\,;48);\ (240\,;12)\,;\ (12\,;240)\}$

<u>2^{er} cas : Si Δ = 23, on a :</u>

$a'b' + 3 = \frac{276}{23}$ <=> $(a'b') + 3 = 12$ =>$a'b' = 9$

Puisque PGCD ($a'b'$) = 1 alors ($a'b'$) $\in \{(9\,;1)\ ;\ (1\,;9)\}$

Or $a = 23a'$ et $b = 23b'$

a'	9	1
b'	1	9
a	207	23
b	23	207

=> $\boldsymbol{S_2} = \{(207\,;23)\,;(23\,;207)\}$

D'où $S = \{(48\,;60)\,;(60\,;48);\ (240\,;12)\,;\ (12\,;240)\,;\ (207\,;23)\,;(23\,;207)\}$

c) $\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = a \bullet b \end{cases}$

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Si d et m désignent respectivement le PGCD et le PPCM des entiers naturels : a et b , on a :

- $a \bullet b = m \bullet d$

Ainsi il existe deux entiers a' et b' premiers entre eux (PGCD (a' ; b') = 1) tel que :

- $a = a' \bullet d$ et $b = b' \bullet d$

Alors le système devient :

$\begin{cases} (a' \bullet d)^2 - (b' \bullet d)^2 = 405 \\ 3m = m \bullet d \end{cases}$ <=> $\begin{cases} a'^2 \bullet d^2 - b'^2 \bullet d^2 = 405 \\ d = 3 \end{cases}$ <=>

$\begin{cases} d^2(a'^2 - b'^2) = 405 \\ d = 3 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} 3^2(a'^2 - b'^2) = 405 \\ d = 3 \end{cases}$ <=>

$\begin{cases} 9(a'^2 - b'^2) = 405 \\ d = 3 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} a'^2 - b'^2 = 45 \\ d = 3 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} (a' - b')(a' + b') = 45 \\ d = 3 \end{cases}$

Résous ce système, revient à Résous les cas de systèmes suivants :

$\begin{cases} a' - b' = 1 \\ a' + b' = 45 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a' - b' = 5 \\ a' + b' = 9 \end{cases}$ (Car PGCD(a' ; b') = 1) Ainsi :

Pour $\begin{cases} a' - b' = 1 \\ a' + b' = 45 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} a' = 23 \\ b' = 22 \end{cases}$ => $\begin{cases} a = 69 \\ b = 66 \end{cases}$ =>$S_1 = \{(69 ; 66)\}$

Pour $\begin{cases} a' - b' = 5 \\ a' + b' = 9 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} a' = 7 \\ b' = 2 \end{cases}$ => $\begin{cases} a = 7 \\ b = 6 \end{cases}$ =>$S_1 = \{(7 ; 6)\}$

=> $\boldsymbol{S} = \{(69 ; 66) ; (7 ; 6)\}$

16 1) Montre que l'équation: (x ; y) de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$: $6y - 3x = m$ admet des solutions si et seulement si m est un multiple de 3.

$6y - 3x = m$ <=> $3(2y - x) = m$ <=> $2y - x = \frac{m}{3}$

Alors l'équation admet donc des solutions dans $\mathbb{Z}$ si 3 divise m ou encore si m est un multiple de 3.

2) Résolvons dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

a- $6y - 3x = 5$

Puisque 5 n'est pas un multiple de 3, alors l'équation : $6y - 3x = 5$ n'admet pas de solution.

Par conséquent $S = \{\emptyset\}$

b- $6y - 3x = 3$

Puisque 3 est un multiple de 3 , alors l'équation : $6y - 3x = 3$ admet des solutions .

Résolution :

$6y - 3x = 3$ <=> $2y - x = 1$ <=> $x = 2y - 1$ <=> $x \equiv -1[2]$ => $x = 2k - 1$

En remplaçant x par sa valeur dans l'équation : $2y - x = 1$, on a : $y = k$

=> $S = \{(2k - 1 ; k)\}$

3) Déduisons de ce qui précède les solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation :

$(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = 1.$

Résous l'équation ($6y - 3x - 4$)($6y - 3x + 4$) = 1, revient à Résous les systèmes suivant :

$\begin{cases} 6y - 3x - 4 = 1 \\ 6y - 3x + 4 = 1 \end{cases}$ (S_1) ou $\begin{cases} 6y - 3x - 4 = -1 \\ 6y - 3x + 4 = -1 \end{cases}$ (S_2)

<=> $\begin{cases} 6y - 3x = 5 \\ 6y - 3x = -3 \end{cases}$ (S_1) ou $\begin{cases} 6y - 3x = 3 \\ 6y - 3x = -5 \end{cases}$ (S_2)

D'après les questions précédents, 5 et – 5 ne sont pas des multiples de 3.

Par conséquent aucun des deux systèmes n'admet de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

D'où l'équation : ($6y - 3x - 4$)($6y - 3x + 4$) = 1 n'admet pas de solution
$=> S = \{ \emptyset \}$.

17 Pour tout entier naturel n, on considère les nombres : $a_n = 4\times10^n - 1$; $b_n = 2\times10^n - 1$ et $c_n = 2\times10^n + 1$

1) Calculons : a_i ; b_i ; c_i pour $i \in \{ 1 ; 2 ; 3 \}$.

$a_1 = 39$; $b_1 = 19$; $c_1 = 21$

$a_2 = 399$; $b_2 = 119$; $c_2 = 201$

$a_3 = 3999$; $b_3 = 1999$; $c_3 = 2001$

2) Démontrons que a_n et c_n sont divisibles par 3

Puisque : $4 \equiv 1[3]$; $10 \equiv 1[3]$; $2 \equiv -1[3]$

$a_n = 4\times10^n - 1 \equiv 1 \times 1 - 1 \equiv 0[3]$ et $c_n = c_n = 2\times10^n + 1 \equiv -1 \times 1 + 1 \equiv 0[3]$

3) Démontrons que b_2 est un nombre premier.

$b_2 = 119 => \sqrt{b_2} = \sqrt{119} = 14{,}1 \approx 14$. Ainsi pour Démontre que b_2 est premier, il suffit de vérifier que b_2 n'est pas divisible par tous les nombres premiers inférieurs à 14.

L'ensemble des nombres premiers inférieurs à 14,1 sont : {2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13}

Puisque 119 n'est ni divisible par : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13. Ainsi 199 est premier.

4) Démontrons que pour tout entier naturel n, on a : $b_n \times c_n = a_{2n}$.

$b_n \times c_n = (2 \times 10^n - 1) \times (2 \times 10^n + 1) = (2 \times 10^n)^2 - 1^2 = 4 \times 10^{2n} - 1 = a_{2n}$.

En déduisons la décomposition en produit de facteurs premiers de a_4

$a_4 = a_{2\times2} = b_2 \times c_2 = 199 \times 201 = 199 \times 3 \times 67.$

En effet 199 est premier et 201= $3 \times 67 =$ avec 67 premier.

5) Démontrons que : PGCD$(b_n\,;c_n)$ = PGCD$(b_n\,;2)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = b_n + 2$ avec $0 \le 2 \le b_n$. Donc 2 est le reste de la division euclidienne de c_n par b_n. Ainsi PGCD$(b_n\,;c_n)$ = PGCD$(b_n\,;2)$. En déduis que b_n et c_n sont premiers entre eux c'est-à-dire sont étrangers.

Puisque $b_n \equiv -1[2]$ alors b_n n'est pas divisible par 2 et par conséquent on a :
PGCD$(b_n\,;c_n)$ = PGCD$(b_n\,;2) = 1$

D'où b_n et c_n sont premiers entre eux c'est-à-dire sont étrangers.

18 1) On considère l'équation (1) d'inconnue $(x\,;\,y)$ de $\mathbb{Z}^2$: $11x - 24y = 1$.

a- Justifions à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

Les entiers 11 et 24 sont premiers entre eux, puis que 11 est premier et ne divise pas 24.

Le **théorème de Bézout** affirme : deux entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe $(u\,;v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $au + bv = 1$.

Les entiers 11 et 24 étant premiers entre eux, il existe $(u\,;v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $11u + 24v = 1$.

Le couple $(u\,;-v)$ est solution de l'équation (1).

b- En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminons une solution particulière de $11x - 24y = 1$

En utilisant l'algorithme d'Euclide, on a : $11(11) - 24(5) = 1$ =>$(x_0\,;\,y_0) = (11\,;5)$ est une solution particulière de l'équation (1).

c- Déterminons l'ensemble solution de l'équation (1)

__**NB :**__ Si $(x_0\,;\,y_0)$ est une solution particulière de l'équation $ax + by = c$ alors l'ensemble solution de l'équation $ax + by = c$ est donné par : S = $\{(-bk + x_0\,;ak + y_0)\}$. Or :

$a = 11\,;\; b = -24\,;\; x_0 = 11\; et\; y_0 = 5$ => S = $\{(24k + 11\,;11k + 5)\}\; avec\; k \in \mathbb{Z}$

2) Recherche du PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

a- Justifions que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

L'écriture décimale de 10^{11} comprend un ≪ 1 ≫ suivit de ≪ $onze$ 0 ≫.

Par le jeu des retenues, on obtient : $10^{11} - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{\textbf{Onze 9}} = 9\times \underbrace{11\ldots1}_{\textbf{Onze 1}}$

Ce qui montre que 9 divise $10^{11} - 1$.

De même on obtient : $10^{24} - 1 = 9\times \underbrace{11\ldots1}_{\textbf{Vint-quatre 1}}$

Ce qui montre que 9 divise $10^{24} - 1$

b- $(x\,;\,y)$ désignant un couple quelconque d'entiers naturels solution de (1), montrons que l'on peut écrire : $(10^{11x} - 1) - 10(10^{24y} - 1) = 9$.

Le couple $(11\,;5)$ est solution de (1). Alors :

$(10^{11x} - 1\,) - 10(10^{24y} - 1) = 10^{11x} - 1 - 10^{24y+1} + 10 = 10^{11x} - 10^{24y+1} + 9$

Or par hypothèse $11x - 24y = 1$ et donc $11x = 1 + 24y$.

On en déduit donc que $(10^{11x} - 1) - 10(10^{24y} - 1) = 9$

c- Montrons que $10^{11} - 1$ divise $10^{11x} - 1$.

Puis que : $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots\ldots + 1)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$.

Ainsi : $10^{11x} - 1 = (10^{11})^x - 1 = (10^{11} - 1)[(10^{11})^{x-1} + (10^{11})^{x-2} + \ldots + 1]$

D'où $10^{11} - 1$ divise $10^{11x} - 1$.

En posant $N = (10^{11})^{x-1} + (10^{11})^{x-2} + \ldots + 1$, on obtient : $10^{11x} - 1 = (10^{11} - 1)N$

On obtient de même

$10^{24y} - 1 = (10^{24})^y - 1 = (10^{24} - 1)[(10^{24})^{y-1} + (10^{24})^{y-2} + \ldots + 1]$

Donc $10(10^{24y} - 1) = (10^{24} - 1)[(10^{24})^{y-1} + (10^{24})^{y-2} + \ldots + 1]$

En posant $M = (10^{24})^{y-1} + (10^{24})^{y-2} + \ldots + 1$, on obtient : $10^{24y} - 1 = (10^{24} - 1)M$

d- Déduisons de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

En remplaçant dans l'égalité trouvée à la question b-), on trouve

$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$

$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9.$

e- Montre que tout diviseur commun à $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$ divise $9.$

Soit d un codiviseur de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$

d Divise $10^{11} - 1$ par conséquent divise $(10^{11} - 1)N$, de même $10^{24} - 1$ par conséquent divise : $(10^{24} - 1)M$. Ainsi on en déduit que d divise la différence :

$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M$, c'est-à-dire que d divise 9.

f- Déduisons des questions précédentes le PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1.$

Nous en déduisons de la question d) qu'un codiviseur de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$ est inférieur ou égal à 9 en particulier.
Alors $\text{PGCD}(10^{11} - 1\,;\, 10^{24} - 1.) \leq 9$

Système de numération

19 1) Donnons l'écriture de : **a)** A = $\overline{231}^4$; **b)** B = $\overline{1001}^2$; **c)** C = $\overline{4\alpha 2}^5$ en base 10.

a) A = $\overline{231}^4$ = $2 \times 4^2 + 3 \times 4^1 + 1 \times 4^0$ = 45 => A = $\overline{231}^4$ = 45

b) B = $\overline{1001}^2$ = $1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 9$

c) C = $\overline{4\alpha 2}^5$ = $4 \times 5^2 + \alpha \times 5^1 + 2 \times 5^0$ (or $\alpha = 10$) => C = $\overline{4\alpha 2}^5$ = 152

2) Ecrivons la suite des 10 premiers nombres entiers en base 2 puis en base 4.

- En base 2, on a : 0 ; 1 ; 10 ; 11 ; 100 ; 101 ; 110 ; 111 ; 100 ; 1001 ; 1010

- En base 4, on a : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 20 ; 21

3) En base 12, on désigne par A le chiffre correspondant à 10, par B celui correspondant à 11. Ecrivons la suite des cinq successeurs de BA9.

la suite des cinq successeurs de BA9 sont : BAA ; BAB ; BB0 ; BB1 ; BB2

4) A s'écrit 23 dans le système décimal et 27 dans un système de base a. Déterminons a

A = $\overline{23}^{10} = 23$ (dans le système décimal) et A = $\overline{27}^{a} = 2 \times a + 7$

Par identification on a : $23 = 2 \times a + 7 \Leftrightarrow 2a = 23 - 7 \Leftrightarrow 2a = 16 \Rightarrow a = 8.$

Ecrivons dans le système décimal le nombre : $\overline{432}^5$

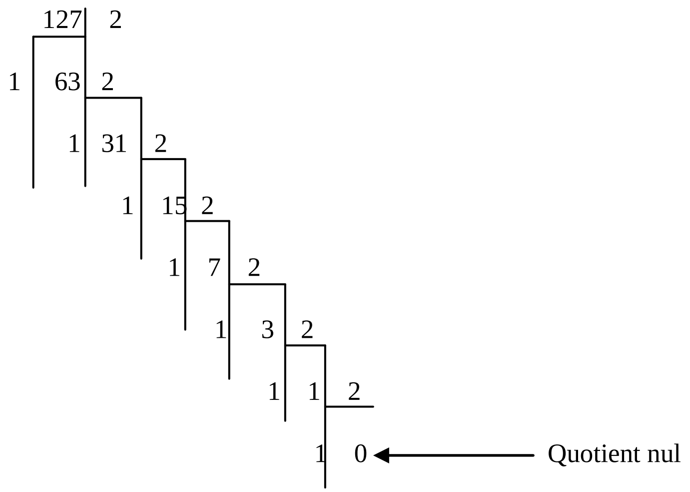
$\overline{432}^5 = 4\times5^2 + 3\times5^1 + 2 = 117$ ou $\overline{432}^5 = \overline{117}^{10}$

20 **1)** Ecrivons dans le système binaire le nombre : $\overline{127}^{10}$

Le nombre $\overline{127}^{10}$ est équivalent à 127

Ecris 127 dans le système binaire revient à l'écrire en base 2.

Pour cela, effectuons des divisions successives de 127 par 2 comme donner ci-dessous



En recopiant la suite des différents restes du bas vers le haut, on obtient :

$\overline{127}^{10} = 127 = \overline{1111111}^2$

2) Ecris dans le système décimal le nombre : $\overline{F0A3}^{16}$

$\overline{F0A3}^{16} = F\times16^3 + 0\times16^2 + A\times16^1 + 3 = F\times16^3 + A\times16 + 3$

Or A = 10 et F = 15

=> $\overline{F0A3}^{16} = 15\times16^3 + 10\times16 + 3 = 61440 + 160 + 3 = 61603$

=> $\overline{F0A3}^{16} = 61603$ ou $\overline{F0A3}^{16} = \overline{61603}^{10}$

3) Sachant que 14 = 13 + 1, écrivons14^8 dans le système de base 13.

$14 = 13 + 1 => 14^8 = (13 + 1)^8$

Ainsi d'après le triangle de Pascal, le développement de $(13 + 1)^8$ donne :

$(13+1)^8 = 13^8 + 8\times 13^7 + 28\times 13^6 + 56\times 13^5 + 70\times 13^4 + 56\times 13^3 + 28\times 13^2 + 8\times 13^1 + 1$

Or : $28 = 13\times2 + 2$; $56 = 13\times4 + 4$; $70 = 13\times5 + 5$. Alors, on a :

- $28\times 13^6 = 13^6(13\times2 + 2) = 2\times13^7 + 2\times13^6$
- $56\times 13^5 = 13^5(13\times4 + 4) = 4\times13^6 + 4\times13^5$
- $70\times 13^4 = 13^4(13\times5 + 5) = 5\times13^5 + 5\times13^4$
- $56\times 13^3 = 13^3(13\times4 + 4) = 4\times13^6 + 4\times13^5$
- $28\times 13^2 = 13^2(13\times2 + 2) = 2\times13^3 + 2\times13^2$

La somme des termes de même puissance donne :

$(13+1)^8 = 1\times13^8 + 10\times 13^7 + 6\times 13^6 + 9\times 13^5 + 9\times 13^4 + 6\times 13^3 + 2\times 13^2 + 8\times 13^3 + 1$

=> $(13+1)^8 = 14^8 = \overline{1A6996281}^{13}$ (avec A = 10)

4) Un nombre s'écrit BABA (Avec : A = 10 et B = 11) dans le système hexadécimal. Ecrivons ce nombre dans le système octal.

$\overline{BABA}^{16} = B\times16^3 + A\times16^2 + B\times16^1 + A$ Or : A = 10 et B = 11

$=> \overline{BABA}^{16} = 11\times16^3 + 10\times16^2 + 11\times16^1 + 10$

Dans le système octal les symboles utilisés sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

Or : 11 = 8 + 3 ; 10 = 8 + 2 Alors, on a :

$=> \overline{BABA}^{16} = (8+3)\times16^3 + (8+2)\times16^2 + (8+3)\times16^1 + (8+2)$

Or : $16^3 = (8\bullet 2)^3$; $16^2 = (8\bullet 2)^2$; $16^1 = (8\bullet 2)^1$; $10 = 8 + 2$ Alors, on a :

$\overline{BABA}^{16} = (8+3)\times(8\bullet 2)^3 + (8+2)\times(8\bullet 2)^2 + (8+3)\times16^1 + (8+2)$

$= (8+3)\times8^3\times2^3 + (8+2)\times8^2\times2^2 + (8+3)\times8\times2$

Le développement et la somme des termes de même puissance donnent :

$\overline{BABA}^{16} = 8^5 + 3\times 8^4 + 5\times 8^3 + 2\times 8^2 + 7\times 8^1 + 2$

$=> \overline{BABA}^{16} = \overline{135272}^{8}$

21 Un nombre de (6) chiffres s'écrit en base 7 et comporte comme chiffre de gauche le nombre **1**. Un autre nombre de (6) chiffres s'écrit en base 7 et comporte comme chiffre de droite le nombre **1.** D'autre par ce nombre est encore le triple du précédent.
Déterminons ces nombres initiaux.

- Soit N le nombre de (6) chiffres s'écrivant en base 7 et comporte comme chiffre de gauche le nombre 1 tel que $N = \overline{1abcde}^{7} = 7^5 + a \times 7^4 + b \times 7^3 + c \times 7^2 + d \times 7^1 + e$
- Soit N' le nombre de (6) chiffres s'écrivant en base 7 et comporte comme chiffre de droite le nombre 1 tel que $N' = \overline{abcde1}^{7} = a7^5 + b \times 7^4 + c \times 7^3 + d \times 7^2 + e \times 7^1 + 1$
- Ce nombre est encore le triple du précédent alors : $N' = 3N \Leftrightarrow N' - 3N = 0$

Effectuons la différence : $N' - 3N$

$$N' - 3N = a \times 7^4(7-3) + b \times 7^3(7-3) + c \times 7^2(7-3) + d \times 7^1(7-3) + e(7-3) - (1 - 3 \times 7^5)$$

$$N' - 3N = 0 \Leftrightarrow (7-3)(a \times 7^4 + b \times 7^3 + c \times 7^2 + d \times 7^1 + e) - 5420 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a \times 7^4 + b \times 7^3 + c \times 7^2 + d \times 7^1 + e = \frac{5420}{7-3} \Rightarrow$$

$$a \times 7^4 + b \times 7^3 + c \times 7^2 + d \times 7^1 + e = 12605 \Leftrightarrow \overline{abcde}^{7} = 12605$$

Or l'écriture de 12605 en base 7 donne : $12605 = \overline{51515}^{7}$ alors les nombres initiaux sont :
$a = 5$; $b = 1$; $c = 5$; $d = 1$; $e = 5$

D'où $N = \overline{151515}^{7}$ et $N' = \overline{515151}^{7}$

22 Soit x un entier naturel $x \geq 5$. On considère les entiers $n = \overline{100x}$ et $n' = \overline{x001}$ dans le système de base $(x+1)$

1) Ecrivons n et n' dans le système de base x.

$n = \overline{100x}^{(x+1)} \Rightarrow n = 1 \times (x+1)^3 + 0(x+1)^2 + 0(x+1) + x = x^3 + 3x^2 + 4x + 1$

$\Rightarrow n = x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ ou $n = \overline{1341}^{x}$

$n' = \overline{x001} \Rightarrow n' = x \times (x+1)^3 + 0(x+1)^2 + 0(x+1) + 1 = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 1$

$\Rightarrow n' = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 1$ ou $n' = \overline{1331}^{x}$

2) Ecris $n + n'$ dans le système de base x et vérifier que $n + n'$ est divisible par $(x+1)$ puis donner le quotient q de cette division en base x.
$n = 1 \times (x+1)^3 + 0(x+1)^2 + 0(x+1) + x = (x+1)^3 + x$

$n' = x \times (x+1)^3 + 0(x+1)^2 + 0(x+1) + 1 = x(x+1)^3 + 1$

Alors $n + n' = [(x+1)^3 + x] + [x(x+1)^3 + 1] = (x+1)^3 + x + x(x+1)^3 + 1$

$= (x+1)^3 + x(x+1)^3 + (x+1) = (x+1)[(x+1)^2 + x(x+1)^2 + 1]$

$= (x+1)^3 + x(x+1)^3 + (x+1) = (x+1)[(x+1)^2(x+1) + 1]$

$= (x+1)[(x+1)^3 + 1] = (x+1)^4 + (x+1)$

D'où $n + n' = \overline{10010}^{(x+1)}$

Vérifions que $n + n'$ est divisible par $(x+1)$ puis donnons le quotient q de cette division en base x.
En faisant la division euclidienne de $n + n'$ par $(x+1)$ on aura pour quotient

q $= x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ (en base 10) ou q $= \overline{1332}^x$ (en base x)

3) Détermination des entiers a et b.

q $= \overline{ab}^x \times \overline{aaa}^x \Leftrightarrow$ q $= (ax+b)(ax^2+ax+a)$
$\Rightarrow$ q $= a^2x^3 + x^2(a^2+ab) + x(a^2+ab) + ab$. Or d'après la question 2), on a :

q $= x^3 + 3x^2 + 3x + 2$. Ainsi par identification, on a :

$a^2x^3 + x^2(a^2+ab) + x(a^2+ab) + ab = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

$\Rightarrow a = 1$ et $b = 2$. D'où q $= \overline{12}^x \times \overline{111}^x$

Congruence modulo n et structure d'anneau

23 1) Complétons les congruences suivantes :

a) $37 \equiv 11[13]$ car le reste de la division de 37 par 13 est 11
b) $125 \equiv 25[100]$ car le reste de la division de 125 par 100 est 25

c) $-5 \equiv 5[10]$ car le reste de la division de -5 par 10 est 5

2) Complétons les congruences suivantes :

a) $7 \equiv 7[10]$; **b)** $7^2 \equiv 9[10]$; **c)** $7^3 \equiv 3[10]$; **d)** $7^4 \equiv 1[10]$

Puisque $401 = 4 \times 100 + 1$, on a donc $7^{401} = 7^{4\times100+1} = (7^4)^{100} \times 7^1$. Puisque $7^4 \equiv 1[10]$

Alors $(7^4)^{100} \equiv (1)^{100} \equiv 1[10]$. Donc $7^{401} \equiv 1 \times 7[10]$

De même Puisque 30 = $4 \times 7 + 2$ alors $7^{30} = 7^{4\times 7+2} = (7^4)^7 \times 7^2$. Puisque $7^4 \equiv 1[10]$

Alors $(7^4)^7 \equiv (1)^7 \equiv 1[10]$. Donc $7^{31} \equiv 1 \times 7^2 \equiv 9[10]$

24 1) Le premier Janvier 2000 était un samedi.

Déterminons le jour correspondant au premier Janvier 2100

NB : Une année bissextile est une année contenant 366 jours et Une année non bissextile est une année contenant 365 jours.

Alors entre 2000 et 2100, il ya 25 années bissextiles et 75 années non bissextiles, soit un total de 36525 jours.

Puisque 36525 = $7 \times 5217 + 6$ alors $36525 \equiv 6[7]$, d'où un décalage de 6 jours par rapport au 1^{er} janvier 2000.

Ainsi le premier Janvier 2100 sera donc un Vendredi

2) Trouvons le reste de la division euclidienne par 17 du nombre 200^{539}

Puisque 200 = $17\times 11 + 13$, on établit que $200 \equiv 13[17]$, donc $200^2 \equiv 13^2[17]$, c'est-à-dire : $200^2 \equiv 169[17]$. Or 169$\equiv 16[17] \equiv -1[17]$

En décomposant 539 comme 539 = $2\times 269 + 1$, on a donc $200^{539} = 200^{2\times 269+1}$ =>

$200^{539} = (200^2)^{269} \times 200$, donc $200^{539} \equiv (-1)^{269} \times 13[17] \equiv -13[17] \equiv 4[17]$

Ainsi le reste de la division euclidienne par 17 du nombre 200^{539} est donc égal à 4.

25 Sachant que $n \equiv 3[5]$, prouvons que $2n^2 - n$ est un multiple de 5.

Si $n \equiv 3[5]$ alors $2n^2 \equiv 2 \times 3^2 \equiv 18[5] \equiv 3[5]$. En soustrayant les congruences, on a :

$2n^2 - n \equiv (3 - 3)[5]$, c'est -à-dire $2n^2 - n \equiv 0[5]$, ce qui signifie que :

$2n^2 - n$ est divisible par 5.

26 1) Résolvons dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

a- $\dot{4}x = \dot{3}$

$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\dot{0}\,;\dot{1}\,;\,\dot{2}\,;\,\dot{3}\,;\,\dot{4}\,;\,\dot{5}\,;\,\dot{6}\,\}$

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$
$4x$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{5}$	$\dot{2}$	$\dot{6}$	$\dot{3}$
$4x-3$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{5}$	$\dot{2}$	$\dot{6}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$

Ainsi la dernière ligne comportant le chiffre 0 correspond à la valeur $x = 6$ => S= $\{\dot{6}\}$

b- $\dot{1}x^2 + \dot{2}x - \dot{3} = \dot{0}$

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$
$\dot{1}x^2$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$
$\dot{2}x$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{6}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$	$\dot{5}$
$x^2+\dot{2}x$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{6}$
$\dot{1}x^2+\dot{2}x-\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{5}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$

=> S= $\{\dot{1}\,;\dot{4}\,\}$

2) Résolvons dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$ le système : $\begin{cases}\dot{3}x+\dot{2}y=\dot{1}\\ \dot{2}x+\dot{5}y=\dot{6}\end{cases}$

Dressons la table de multiplication de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$\times$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{6}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$	$\dot{5}$
$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{6}$	$\dot{2}$	$\dot{5}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$
$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{5}$	$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{5}$	$\dot{3}$	$\dot{1}$	$\dot{6}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$
$\dot{6}$	$\dot{0}$	$\dot{6}$	$\dot{5}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

$$\begin{cases}\dot{3}x+\dot{2}y=\dot{1} & (1)\\ \dot{2}x+\dot{5}y=\dot{6} & (2)\end{cases}$$

En effectuant (1) + (2), on obtient : $\dot{5}x+\dot{7}y=\dot{7}$. Or $7 \equiv 0[7]$

=> $\dot{5}x + \dot{0}y = \dot{0} \Leftrightarrow \dot{5}x = \dot{0}$. Dans cette équation, le coefficient de x est $\dot{5}$, alors cherchons $\dot{5}$ dans la première colonne. Ainsi projetons cette valeur horizontalement jusqu'à l'obtention du chiffre $\dot{0}$ qui n'est rien d'autre que la valeur qui se trouve dans l'autre membre de l'égalité de l'équation $\dot{5}x = \dot{0}$, puis par projection verticale, on obtient la valeur $x = \dot{0}$. (Voir tableau).

Dans l'équation (1), remplaçons $x = \dot{0}$ par sa valeur. Ainsi l'équation (1) dévient :

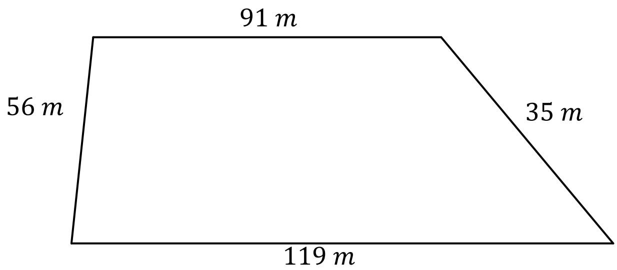
$\dot{3}(\dot{0}) + \dot{2}y = \dot{1} \Leftrightarrow \dot{2}y = \dot{1}$. Ainsi par le même procédé, on obtient $y = \dot{4}$

=> S = $\{(\dot{0}\ ;\ \dot{4})\}$

Problèmes.

27

Un Champ a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement 119m et 91m; les deux autres cotés mesurent 56m et 35m. Pour la clôture, le propriétaire Mr DEMBELE a besoin des poteaux de support à égale distance mesurée en nombre entier de mètre pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.



1) a) Déterminons la distance entre deux poteaux quelconques

Cette distance correspond au PGCD(119 ; 91 ; 56 ; 35) =>

PGCD(7 × 17 ; 7 × 13 ; 7 × 8 ; 7 × 5) = 7 × PGCD(17 ; 13 ; 8 ; 5) = 7

Car PGCD(17 ; 13 ; 8 ; 5) = 1 puisque 17 ; 13 ; 8 ; 5 sont premiers entre eux.

b) Déterminons le nombre de poteaux nécessaires à la clôture.

Ce nombre de poteaux correspond à : $\frac{119 + 91 + 56 + 35}{7} = 43$

2) Selon le type de clôture et la qualité de fil de fer choisi, Mr DEMBELE a dépensé $\overline{\alpha 1630}^{11}$ F (où α = 10) pour un nombre entier x rangées de fil de fer et $\overline{53008}^{9}$ F pour un nombre entier y de jours de mains d'œuvre. Après évaluation Mr DEMBELE s'est rendu compte que

le coût total des travaux était de $\overline{656\alpha5}^{13}$ F et le nombre de rangées de clôture dépassait le nombre de jours de travail.

a) Exprimons tous les montants dans le système décimal.

- Dépense effectuée pour x rangées de fil de fer est : $\overline{\alpha1630}^{11}$ F = 148500 F (avec α = 10).

- Dépense effectuée pour y jours de main d'œuvres est : $\overline{53008}^{9}$ F = 35000 F (avec α = 10).

- Dépense effectuée pour le coût total des travaux est : $\overline{656\alpha5}^{13}$ F = 183500 F. (avec α = 10).

b) Précisons le nombre de rangées de fil de fer et le nombre de jours de mains d'œuvre.

Précisé le nombre de rangées de fil de fer et le nombre de jours de mains d'œuvre, revient à Résous l'équation Diophantienne : $\overline{\alpha1630}^{11}x + \overline{53008}^{9}\,\mathrm{y} = \overline{656\alpha5}^{13}$ ⇔

$148500x + 35000\mathrm{y} = 183500$. Après simplification de cette équation, on obtient :

$297x + 70y = 367$. En utilisant l'algorithme d'Euclide, on obtient :

$297(12111) + 70(-51380) = 367$ et l'ensemble solution est :
S = $\{(-70k + 12111\ ;\ 297k - 51380)\}$

28 On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par : $\begin{cases} u_0 = 14 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases}$

1) Calculons u_1 , u_2 , u_3 et u_4 puis en déduisons une conjecture concernant les deux derniers

Chiffres de u_n

$u_0 = 14$; $u_1 = 64$; $u_2 = 314$; $u_3 = 1564$; $u_4 = 7814$

On peut donc conjecturer que :

- Si $n = 2k$ (pair), alors les deux derniers chiffres de u_n est 14.

- Si $n = 2k + 1$ (impair), alors les deux derniers chiffres de u_n est 64.

2) - Montrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \equiv u_n[4]$
On sait que $u_{n+1} = 5u_n - 6$ => $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 30 - 6$

=> $u_{n+2} = 25u_n - 36$

Or $25 \equiv 1[4]$

=> $25u_n \equiv u_n[4]$ et $-36 \equiv 0[4]$. En effectuant la somme de ces deux équations, on a :

$$25u_n \equiv u_n[4]$$
$$\underline{-36 \equiv 0[4]}$$

=> $25u_n - 36 \equiv u_n[4]$. Or $25u_n - 36 = u_{n+2}$ => $u_{n+2} \equiv u_n[4]$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \equiv u_n[4]$

- En déduisons que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{2k} \equiv 2[4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0[4]$.

On sait que $u_{n+2} \equiv u_n[4]$

- Pour $n = 0$, on a : $u_2 \equiv u_0[4]$. Or $u_0 = 14 \equiv 2[4]$ => $u_2 \equiv 2[4]$.
  Ainsi d'une manière générale on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{2k} \equiv 2[4]$.
- Pour $n = 1$, on a : $u_3 \equiv u_1[4]$. Or $u_1 = 64 \equiv 0[4]$ => $u_3 \equiv 0[4]$.
  Ainsi d'une manière générale on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{2k+1} \equiv 0[4]$.

3) Montrons par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_n = 5^{n+2} + 3$

Pour $n = 0$, on a : $2u_0 = 5^2 + 3 \Leftrightarrow 2(14) = 25 + 3 \Leftrightarrow 28 = 28$ vraie.

Supposons la relation vraie à l'ordre $n = k$ et montrons qu'elle est aussi vraie à l'ordre $n = k + 1$ c'est-à-dire $2u_{k+1} = 5^{k+1+2} + 3 \iff 2(5u_k - 6) = 5^{k+2} \times 5 + 3$

$\Leftrightarrow 10u_k - 12 = 5^{k+2} \times 5 + 3 \Leftrightarrow 10u_k = 5^{k+2} \times 5 + 15$. En simplifiant le tout par 5, on a : $2u_k = 5^{k+2} + 3$. D'où la relation est vraie à l'ordre $n = k + 1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_n = 5^{n+2} + 3$

29

1) a) Déterminons, suivant les valeurs de n, le reste de la division par 7 de l'entier 3^n puis en déduisons le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$

- Déterminons, suivant les valeurs de n, le reste de la division par 7 de l'entier 3^n

$3^0 \equiv 1[7]$ $\quad 3^2 \equiv 2[7]$ $\quad 3^4 \equiv 4[7]$ $\quad 3^6 \equiv 1[7]$

$3^1 \equiv 3[7]$ $\quad 3^3 \equiv 6[7]$ $\quad 3^5 \equiv 5[7]$

Alors d'une manière générale, $\forall k \in \mathbb{N}$, on a :

$3^{6k} \equiv 1[7]$ $\quad 3^{6k+2} \equiv 2[7]$ $\quad 3^{6k+4} \equiv 4[7]$

$3^{6k+1} \equiv 3[7]$ $\quad 3^{6k+3} \equiv 6[7]$ $\quad 3^{6k+5} \equiv 5[7]$

- En déduisons le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$

$506390 \equiv 3[7]$ et $128 = 6 \times 21 + 2$

Alors $(506390)^{128} \equiv 3^{128}[7]$

$\equiv 3^{6\times21+2}[7]$

$\equiv 3^{2}[7]$

$\equiv 2[7]$

D'où le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$ est 2.

b) Dans le système de numération décimale, on considère l'entier nature l$\overline{651x}$.

Déterminons x pour que $(506390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par 7.

$(506390)^{128} + \overline{651x} \equiv 0[7]$ ⇔ $2 + \overline{651x} \equiv 0[7]$ ⇔ $2 + 6000 + 500 + 10 + x \equiv 0[7]$

⇔ $2 + x \equiv 0[7]$ ⇔ $x \equiv 5[7]$ ⇔ $x = 7k + 5$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \{0\,;1\}$

Donc pour $k = 0$, on a : $x = 5$

2) a) Déterminons le plus grand diviseur commun des nombres 21590 et 9525

En utilisant le tableau d'algorithme, on obtient : PGCD(21590 ; 9525) = 635

b) Déterminons l'ensemble des entiers x tels que $34x \equiv 2[15]$.

$34x \equiv 2[15]$ ⇔ $34x \equiv 2[15]$ ⇔ $17x \equiv 1[15]$. Or $17 \equiv 2[15]$ => $2x \equiv 1[15]$

⇔ $2x \equiv 16[15]$ ⇔ $x \equiv 8[15]$ => $x = 15k + 8$ avec $k \in \mathbb{Z}$

c) Résolvons l'équation : $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2\,; 21590x + 9525y = 1270$

$21590x + 9525y = 1270$. En simplifiant cette équation par 635, on a : $34x + 15y = 2$

$34x = 2 - 15y$ ⇔ $34x \equiv 2[15]$. Or d'après la question b), $x = 15k + 8$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remplaçons x par sa valeur dans l'équation $34x + 15y = 2$. Ainsi on obtient :

$34(15k + 8) + 15y = 2$ => $y = -34k - 18$

d) Déterminons le chiffre des unités de l'entiers naturels 7^{1980} écrit dans le système décimal.

$7 \equiv (-3)[10]$

⇔ $7^{1980} \equiv (-3)^{1980}[10]$

⇔ $7^{1980} \equiv 3^{1980}[10]$

⇔ $7^{1980} \equiv (3^2)^{990}[10]$

⇔ $7^{1980} \equiv (9)^{990}[10]$. Or $10 \equiv 1[10]$

⇔ $7^{1980} \equiv (1)^{990}[10]$.

⇔ $7^{1980} \equiv 1[10]$.

Ainsi le chiffre des unités est le reste de la division de 7^{1980} par 10 qui est 1.

Conclusion : le chiffre des unités de l'entiers naturels 7^{1980} écrit dans le système décimal est 1