Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2023

MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría

Solución Interrogación N° 6

1. (a) Demuestre

$$\arctan(2) + \arctan(3) = \frac{3\pi}{4}$$

(b) Encuentre las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(3x)$ que estén en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Solución.

(a) Digamos que $\alpha = \arctan(2)$ y $\beta = \arctan(3)$. Entonces

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{2+3}{1-6} = -1$$

Sabemos que $\frac{\pi}{4} < \arctan(2) < \arctan(3) < \frac{\pi}{2}$ de manera que $\frac{\pi}{4} < \alpha + \beta < \pi$. Como la tangente es 1-1 en el intervalo $\frac{\pi}{2}, \pi$, y $\tan(\frac{3\pi}{4}) = -1$, concluimos que

$$\arctan(2) + \arctan(3) = \frac{3\pi}{4}$$

Puntaje:1 punto por calcular que la tangente de la expresión a la izquierda es -1. 1 punto por decir que la tangente de $\frac{3\pi}{4}$ es -1 y 1 punto por algún argumento de inyectividad para concluir lo que se pide.

(b) Usando prostaféresis tenemos

$$\operatorname{sen}(3x) - \operatorname{sen}(x) = 2\cos(2x)\operatorname{sen}(x) = 0$$

Si recordamos que el seno es 0 en los múltiplos enteros de π y el coseno es 0 en los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$, las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$ son

$$\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\}$$

Puntaje: 1 punto por usar prostaféresis o alguna otra identidad conducente a factorizar la ecuación y 2 puntos por las soluciones explícitas. Si escriben soluciones genéricas correctas tienen 1 punto en lugar de 2.

2. (a) Sea $w \neq 1$ una raíz cúbica de la unidad. Calcule

$$w^2 + w^{-2}.$$

(b) Escribiendo $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)$ determine todas las soluciones $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ de

$$\frac{z^5 + \overline{z}^5}{2} = -32.$$

Solución. **2a.** Las raices cúbicas son $w_k = \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi}{3}k\right)$, $k = 0, 1, 2$. Tenemos

$$w_k^2 = \mathrm{cis}\left(\frac{4\pi}{3}k\right), \quad w_k^{-2} = \mathrm{cis}(-\frac{4\pi}{3}k\big).$$

Para $k = 1, 2$ tenemos entonces

$$w_k^2 + w_k^{-2} = \mathrm{cis}\left(\frac{4\pi}{3}k\right) + \mathrm{cis}\left(-\frac{4\pi}{3}k\right) = 2\cos(\frac{4\pi}{3}k).$$

Sabemos que $\cos(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} = \cos(\frac{8\pi}{3})$. Concluimos que

$$w_1^2 + w_1^{-2} = 2\cos(\frac{4\pi}{3}) = -1, \quad w_2^2 + w_2^{-2} = 2\cos(\frac{8\pi}{3}) = -1.$$

2b. Con $z = r\,\mathrm{cis}(\theta)$ tenemos $\overline{z} = r\,\mathrm{cis}(-\theta)$. Aplicando la regla de *de Moivre* nos da

$$z^5 + \overline{z}^5 = r^5(\mathrm{cis}(5\theta) + \mathrm{cis}(-5\theta)) = 2r^5\cos(5\theta).$$

Para que $(z^5 + \overline{z}^5)/2 = -32$ necesitamos que $r^5 = 32$ y $\cos(5\theta) = -1$. Entonces $r = 2$ y $\theta = (\pi + 2\pi k)/5$ con $k \in \mathbb{Z}$. Dado que restringimos $\theta \in [0, 2\pi)$ tenemos las siguientes soluciones $\theta = \pi/5, 3\pi/5, \pi, 7\pi/5, 9\pi/5$.

Puntaje:

- 3 puntos por 2a (1 punto por las raices cúbicas, 1 punto por el cálculo con $k = 1$, 1 punto por el cálculo con $k = 2$).
- 3 puntos por 2b (1 punto por conjugación, 1 punto por calcular $(z^5 + \overline{z}^5)/2$, 1 punto por determinar r, θ).