PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESORES: CONSTANZA DEL CAMPO, CAMILO SÁNCHEZ
AYUDANTES: AGUSTÍN GILBERT, MARTINA RUZ,
SANTIAGO MARCANO, OMAR NEYRA

Introducción al Álgebra y Geometría - MAT1207
Ayudantía 9

14 de Mayo, 2024

Ejercicio 1: Calcule
$$i^{54} + i^{12} + (i)^{90} + (-i)^{63} + i^{89}$$

Ejercicio 2: Exprese los siguientes números en forma polar, luego, calcule su décima potencia (i.e. calcular x^{10}).

1. $-1 + i\sqrt{3}$.
2. $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$.

Ejercicio 3: Encuentre todas las raíces a las siguientes ecuaciones:

1. $x^{10} - x^5 = 0$.
2. $x^4 + x^2 = 1$.
3. $x^n = -1$ para n natural impar.
4. $x^4 = i$.

Ejercicio 4: Sea $w \neq 1$ una raíz cúbica de la unidad, calcule
$$w^2 + w^{-2}$$

Ejercicio 5: Demuestre las siguientes identidades:

a) $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.

b) $\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsin(x)$.

c) $\cos(\arcsin(x) + \arcsin(y)) = \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} - xy$.

d) $\operatorname{tg}(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

e) $\cos(\operatorname{arccot}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Propuestos:

Ejercicio 6: Dado un número complejo $w = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$, definimos su conjugado como $\overline{w} = a - ib$, es decir, cambiamos el signo de la parte imaginaria del número, alternativamente se puede pensar como una reflexión en torno al eje real.

Adicionalmente, definimos la parte real de w por $\mathrm{Re}(w) = a$ (lo que no acompaña a i) y la parte imaginaria de w por $\mathrm{Im}(w) = b$ (lo que acompaña a i).

Demuestre las siguientes propiedades sobre el conjugado, sean $z, w \in \mathbb{C}$:

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
2. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$.
3. $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.
4. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
5. Si $|z|$ viene definido por $|z| := \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$, entonces $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.
6. Si $z \neq 0$, entonces su inverso multiplicativo cumple que $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$.

Ejercicio 7: Escribiendo $z = r\,\mathrm{cis}(\theta) \in \mathbb{C}$, con $r > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$, encuentre todas las soluciones a la ecuación

$$\frac{z^5 + (\overline{z})^5}{2} = -32$$

Ejercicio 8: Sean $z = r\,\mathrm{cis}(\theta),\ w = s\,\mathrm{cis}(\phi)$ complejos escritos en forma polar, demuestre que:

$$zw = rs\,\mathrm{cis}(\theta + \phi) \quad y \quad \frac{z}{w} = \frac{r}{s}\,\mathrm{cis}(\theta - \phi)$$