PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PRIMER SEMESTRE DE 2024

MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría

Solución Interrogación N° 9

1. Al dividir el polinomio $p(x)$ por x^2+1 se obtiene como cociente x^2-x-6 y resto un polinomio $r(x)$ de grado 1. Determine el resto $r(x)$ si $p(-2)=3$ y $p(3)=-1$.

Solución. Por el algoritmo de la división obtenemos que

$$p(x) = (x^2+1)(x^2-x-6) + (Ax+B)\,.$$

Como $p(-2)=3$ entonces $-2A+B=3$ y $p(3)=-1$ implica que $3A+B=-1$.
Resolviendo el sistema se tiene que $A=-\dfrac{4}{5}$ y $B=\dfrac{7}{5}$. Por lo que $r(x)=-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{7}{5}$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 2 puntos por aplicar el algoritmo de la división.

CC 2. 2 puntos por obtener el sistema $-2A+B=3$ y $3A+B=-1$.

CC 3. 2 puntos por resolver el sistema y obtener el resto $r(x)$.

2. Determine, si es que existen, las ecuaciones de las rectas tangentes a la hipérbola

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$$

con pendiente igual a $\sqrt{5}$. Explique su desarrollo.

Solución. Se busca b, tal que $y = \sqrt{5}x + b$ intersecte a la hipérbola en un solo punto. Reemplazamos en la ecuación de la hipérbola y nos queda

$$4x^2 - (\sqrt{5}x + b)^2 - 4 = 0\ .$$

Desarrollando obtenemos que

$$-x^2 - 2\sqrt{5}bx - (b^2 + 4) = 0$$

Luego, para que la recta intersecte solo en un punto a la hipérbola, entonces el discriminante de esta ecuación cuadrática debe ser cero

$$20b^2 - 4(b^2 + 4) = 0$$

Luego $b^2 = 1$ y así $b = 1$ o $b = -1$. Por lo que las ecuaciones de la rectas tangente a $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$ con pendiente $\sqrt{5}$ son:

$$y = \sqrt{5}x + 1 \qquad \text{y} \qquad y = \sqrt{5}x - 1$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 2 puntos por considerar la recta $y = \sqrt{5}x + b$.

CC 2. 2 puntos por reemplazar en la ecuación de la hipérbola.

CC 3. 2 puntos por fijar la condición $\triangle = 0$, resolver la ecuación y obtener las rectas tangentes.

3. Dados $z_j = r_j \cdot cis(\alpha_j)$ con $1 \leq j \leq n$, números complejos escritos en su forma polar. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $z_1 \cdot \ldots \cdot z_n = r_1 \cdot \ldots \cdot r_n \cdot cis(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)$.

Solución. Lo demostraremos utilizando inducción:

Caso base $n = 1$: Si $n = 1$, simplemente tenemos un término, por lo que es claro que $z_1 = r_1 \cdot cis(\alpha_1)$.

Como *hipótesis inductiva* asumiremos que se cumple para $n = k$, es decir, asumiremos que es cierto:

$$z_1 \cdot \ldots \cdot z_k = r_1 \cdot \ldots \cdot r_k \cdot cis(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k)$$

Y lo demostraremos para $n = k + 1$. Así, la multiplicación nos queda:

$$z_1 \cdot \ldots \cdot z_k \cdot z_{k+1} = (z_1 \cdot \ldots \cdot z_k) \cdot z_{k+1}$$

Agrupando y utilizando la hipótesis se obtiene

$$z_1 \cdot \ldots \cdot z_k \cdot z_{k+1} = r_1 \cdot \ldots \cdot r_k \cdot r_{k+1} \cdot cis(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k) \cdot cis(\alpha_{k+1})$$

Pero de clases sabemos que $cis(\alpha) \cdot cis(\beta) = cis(\alpha + \beta)$, por lo que:

$$cis(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k) \cdot cis(\alpha_{k+1}) = cis(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \alpha_{k+1})$$

De este modo, obtenemos finalmente que:

$$z_1 \cdot \ldots \cdot z_k \cdot z_{k+1} = r_1 \cdot \ldots \cdot r_k \cdot r_{k+1} \cdot cis(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \alpha_{k+1})$$

Luego, por inducción se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 3.

CC 1. 2 puntos por usar inducción sobre n y verificar el caso $n = 1$.

CC 2. 2 puntos por usar la fórmula de Moivre en el paso inductivo.

CC 3. 2 puntos por concluir el paso inductivo.