Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2022

MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría

Solución Tarea N° 2

1. Determine el valor de c para que el polinomio $q(x) = x^2 + c$ divida al polinomio $p(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 3$.

   Solución. Usando el algoritmo de la división

$$\begin{array}{rl} & 2x^3 - x^2 + 6x - 3 \qquad\qquad : x^2 + c = 2x - 1 \\ - & \underline{2x^3 + 2cx \qquad\qquad} \\ & -x^2 + (6-2c)x - 3 \\ - & \underline{-x^2 - c \qquad\qquad\qquad} \\ & (6-2c)x + c - 3 \end{array}$$

   Si el polinomio $q(x)$ divide a $p(x)$ entonces el resto de la división debe ser cero, esto es

$$r(x) = (6-2c)x + (c-3) = 0$$

   lo que implica que sus coeficientes son cero: $6 - 2c = 0$ y $c - 3$ entonces $\boxed{c = 3}$.
   Por lo tanto, para que el polinomio $q(x)$ divida a $p(x)$ se debe cumplir que $c = 3$.

   Puntaje Pregunta 1.

   - 3 puntos por realizar el algoritmo de la división.
   - 2 puntos por usar $q(x)|p(x)$ entonces $r(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
   - 1 punto por encontrar el valor de c.

2. Si $z = i \in \mathbb{C}$ es raíz de la ecuación
$$x^5 - x^4 - x + 1 = 0\,,$$
determine las otras raíces.

Solución. Sea $p(x) = x^5 - x^4 - x + 1$. Por el teorema de la raíces complejas, si $\alpha = i \in \mathbb{C}$ es raíz de $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ entonces $\beta = -i$ también es raíz. Entonces, podemos escribir

$$p(x) = (x-i)(x+i)q(x) = (x^2+1)q(x)$$

para algún polinomio $q(x)$ que se obtiene aplicando el algoritmo de la división

$$\begin{array}{rll}
 & x^5 - x^4 - x + 1 & : x^2 + 1 = x^3 - x^2 - x + 1 \\
- & \underline{x^5 + x^3} & \\
 & -x^4 - x^3 - x + 1 & \\
- & \underline{-x^4 - x^2} & \\
 & -x^3 + x^2 - x + 1 & \\
- & \underline{-x^3 - x} & \\
 & x^2 + 1 & \\
- & \underline{x^2 + 1} & \\
 & 0 &
\end{array}$$

Luego, $q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Por el teorema de la raíces racionales, las posibles raíces racionales de la ecuación $q(x) = 0$ son $\gamma = \pm 1$ y evaluando $q(-1) = 0$ y $q(1) = 0$, por lo que ambas son raíces de $q(x) = 0$. Entonces, podemos escribir

$$q(x) = (x+1)(x-1)r(x) = (x^2-1)r(x)$$

para algún polinomio $r(x)$ que encontramos usando el algoritmo de la división

$$\begin{array}{rll}
 & x^3 - x^2 - x + 1 & : x^2 - 1 = x - 1 \\
- & \underline{x^3 - x} & \\
 & -x^2 + 1 & \\
- & \underline{-x^2 + 1} & \\
 & 0 &
\end{array}$$

Luego, $r(x) = x - 1$. Por lo tanto, podemos escribir $p(x) = (x+i)(x-i)(x+1)(x-1)(x-1)$ y $p(x) = 0$ tiene las raíces i, $-i$, 1 y -1.

Puntaje Pregunta 2.

- 1,5 puntos por concluir que $-i$ también es raíz por el teorema de las raíces complejas conjugadas.
- 1,5 puntos por realizar la división de $p(x)$ por $x^2 + 1$.
- 1,5 puntos por utilizar el teorema de las raíces racionales y obtener que 1 y -1 son raíces.
- 1,5 puntos por realizar la división de $q(x)$ por $x^2 - 1$.

3. Demuestre que si $|\beta - \alpha| = \dfrac{\pi}{2}$ entonces $\operatorname{sen}^2(x+\alpha) - \cos^2(x+\beta) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución. Notemos que

$$|\beta - \alpha| = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \beta - \alpha = \pm\frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \beta = \alpha \pm \frac{\pi}{2}\,.$$

Además, para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$$

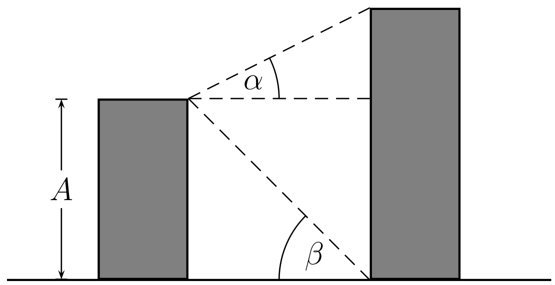
Por lo tanto, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2(x+\alpha) - \cos^2(x+\beta) &= [\operatorname{sen}(x+\alpha) + \cos(x+\beta)]\,[\operatorname{sen}(x+\alpha) - \cos(x+\beta)] \\
&= \left[\operatorname{sen}(x+\alpha) + \cos\left(x+\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right)\right]\left[\operatorname{sen}(x+\alpha) - \cos\left(x+\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= [\operatorname{sen}(x+\alpha) - \operatorname{sen}(x+\alpha)]\,[\operatorname{sen}(x+\alpha) + \operatorname{sen}(x+\alpha)] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 3.

- 2 puntos por obtener que $\beta = \alpha \pm \dfrac{\pi}{2}$
- 2 puntos por utilizar suma por diferencia.
- 2 puntos por utilizar la relación $\cos(x \pm \pi/2) = -\operatorname{sen}(x)$.

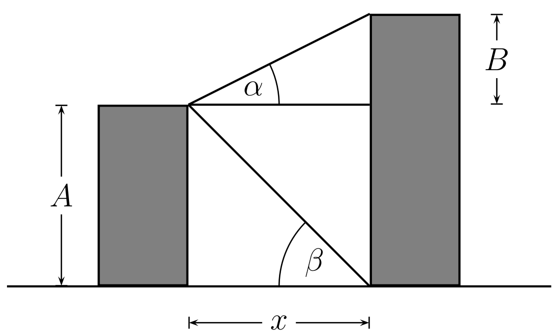
4. Un observador se encuentra en la parte superior de un edificio de A metros de altura, la parte superior de otro edificio que esta en el mismo plano horizontal que el edificio anterior se observa con un ángulo de elevación que mide α. Además el ángulo de elevación desde la base del segundo edificio a la cúspide del primero mide β, tal como lo muestra la figura



Demuestre que la altura del segundo edificio es

$$H = A \cdot \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\beta}\,.$$

Solución. Sean x y B las distancias dadas en la figura



Tenemos que $H = A + B$, $\tan\alpha = \dfrac{B}{x}$ y $\tan\beta = \dfrac{A}{x}$. Entonces, $B = x\tan\alpha$ y $x = \dfrac{A}{\tan\beta}$ por lo que

$$B = x\tan\alpha = \frac{A}{\tan\beta}\cdot\tan\alpha = A\cdot\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}\,.$$

Por lo tanto,

$$H = A + B = A + A\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = A\left(1 + \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}\right) = A\cdot\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\beta}\,.$$

Puntaje Pregunta 4.

- 1,5 puntos por definir las distancias x, B y H.
- 1,5 puntos por obtener las tangentes de α y β.
- 1,5 puntos por obtener el valor de B.
- 1,5 puntos por obtener el valor de H.