Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2023

MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría

Solución Interrogación Recuperativa

1. Suponga que $z \in \mathbb{C}$ es tal que $z^5 = 1$. Determine todos los posibles valores de $z + z^2 + z^{-1} + z^{-2}$.

   Solución. Como $z^5 = 1$, es claro que
   $$z + z^2 + z^{-1} + z^{-2} = z + z^2 + z^4 + z^3.$$
   Si $z = 1$, entonces $z^4 + z^3 + z^2 + z = 4$. De lo contrario, podemos calcular
   $$\frac{z^5 - 1}{z - 1} = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$
   Como el lado izquierdo es 0 por hipótesis, tenemos $z^4 + z^3 + z^2 + z = -1$.

   ***Puntaje**: 2 puntos por el primer valor y 4 por el otro.*

2. Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

   (a) Use la identitad $\vec{d} \times (\vec{e} \times \vec{f}) = (\vec{d} \cdot \vec{f})\vec{e} - (\vec{d} \cdot \vec{e})\vec{f}$ (donde $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ son cualquier vectores) para demostrar
   $$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}.$$

   (b) Sea $\vec{a} \neq \vec{0}$. Verifique lo siguiente: Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ entonces $\vec{a}$ y $\vec{b} - \vec{c}$ son paralelos. Si, adicionalemente, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ entonces $\vec{b} = \vec{c}$.

   Solución.

   (a) Usando la identitad dada y la regla $\vec{e} \cdot \vec{f} = \vec{f} \cdot \vec{e}$ para cualquier vectores $\vec{e}$, $\vec{f}$ vemos que
   $$\begin{aligned}\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} + (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} \\ &\quad + (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \\ &\quad + (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} \\ &= 0.\end{aligned}$$

   (b) Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ entonces $0 = \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c})$. Eso implica que $\vec{a}$ y $\vec{b} - \vec{c}$ son paralelos, es decir, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{b} - \vec{c} = \lambda\vec{a}$. Considerando el producto punto con $\vec{a}$ nos da $0 = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} = \lambda\vec{a} \cdot \vec{a}$. Dado que $\vec{a} \neq \vec{0}$ concluimos que $\lambda = 0$, o sea, $\vec{b} = \vec{c}$.

   ***Puntaje**: 3 puntos por primera parte y 3 por la segunda parte (1 punto por $\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{a}$ paralelo, 2 por el resto).*