Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2023

# MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría

## Solución Interrogación N° 1

1. Considere la recurrencia

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 4, \\
a_{n+1} &= 2a_n + 1 \quad \text{para todo } n \geq 0.
\end{aligned}
$$

Pruebe que

$$a_n = 5 \cdot 2^n - 1, \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

**Solución.** En esta demostración usaremos la técnica de inducción:
*Caso base:* Por definición tenemos que $a_0 = 4$. Por otro lado, $5 \cdot 2^0 - 1 = 5 - 1 = 4$. Eso verifica la representación para $n = 0$.
*Caso inductivo:* Dado $k \geq 0$, asumimos que $a_k = 5 \cdot 2^k - 1$. Tenemos que probar que $a_{k+1} = 5 \cdot 2^{k+1} - 1$. Usando la definición de $a_{k+1}$ y la hípotesis de la inducción llegamos a

$$a_{k+1} = 2a_k + 1 = 2 \cdot 5 \cdot 2^k - 1 = 5 \cdot 2^{k+1} - 1.$$

**Puntaje Pregunta 1.**

- 1 punto por identificar demostración por inducción,
- 1.5 punto caso base
- 3.5 puntos caso inductivo (1.5 para hipótesis de induccion correcta, 2 para los cálculos)

2. Demuestre que $3^n > 2n^2$ para todo número natural $n$.

**Solución.** Demostración por inducción:

- Para $n = 1$ la desigualdad se cumple pues $3 > 2$.
- Supongamos que la desigualdad se cumple para $n = k$, es decir $3^k > 2k^2$. Ahora debemos demostrar que se cumple para $n = k + 1$. Usando que $3^k > 2k^2$, obtenemos

  $$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 6k^2$$

  Queremos demostrar que es mayor a $2(k+1)^2 = 2k^2 + 4k + 2$. Si $k \geq 2$, efectivamente

  $$6k^2 = 2k^2 + 4k^2 > 2k^2 + 8k > 2k^2 + 4k + 2$$

  Cuando $k = 1$ esta desigualdad no se cumple pues $6 < 8$. Para $k = 1$ verificamos directamente que $3^2 = 9 > 8 = 2 \cdot 2^2$.
- Habiendo completado el paso inductivo, podemos invocar el principio de inducción para concluir que la desigualdad se cumple para todo $n$.

**Puntaje Pregunta 2.**

- 1 punto por anunciar el método de demostración (inducción),
- 1 punto por explicitar caso base,
- 1 punto por explicitar hipótesis de inducción,
- 2 puntos por cálculos en el paso inductivo genérico ($k \geq 2$),
- 1 punto por identificar y resolver el paso de 1 a 2.