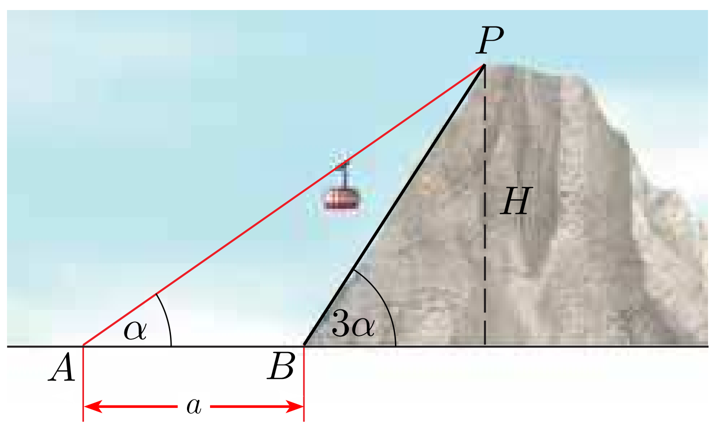
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2022

MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría

Solución Examen

1. Un funicular lleva pasajeros desde el punto A, que se encuentra a distancia a metros del pie B del cerro, a la cima P del cerro. El ángulo de elevación del punto P, visto desde A, es α y el ángulo de elevación de P, visto desde B es de 3α (ver figura).



Demuestre que la altura H del cerro es

$$H = \frac{a\,\mathrm{sen}(3\alpha)}{2\cos(\alpha)}\,.$$

Solución. Considere el triángulo ABP de la figura 1. Tenemos que 3α y β forman un ángulo extendido entonces $\beta = \pi - 3\alpha$.

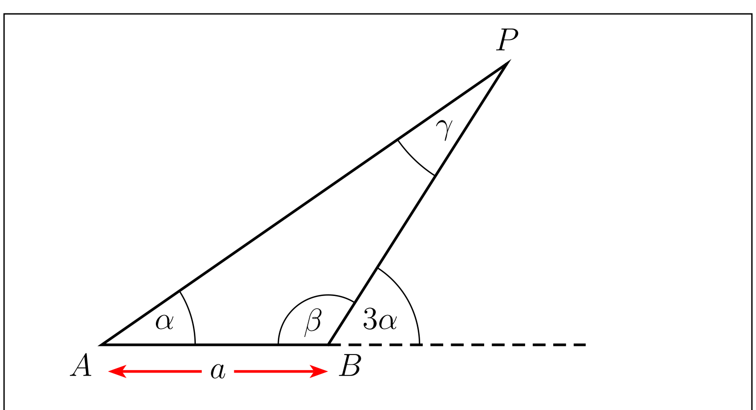


Figura 1

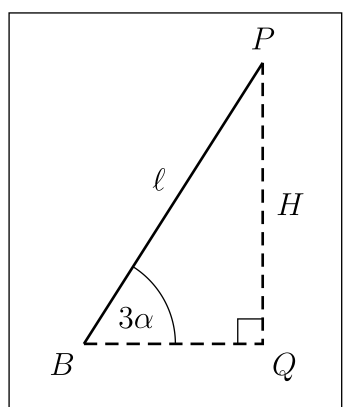


Figura 2

Además,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \Longrightarrow \alpha + \pi - 3\alpha + \gamma = \pi \Longrightarrow \gamma = 2\alpha\,.$$

Usando el teorema del seno, denotamos por $\ell = d(B, P)$, obtenemos que

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\ell} = \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{a} \Longrightarrow \ell = \frac{a \operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(2\alpha)} \, .$$

Sea Q el punto donde se realiza la altura del cerro tal como muestra la figura 2. Se tiene que

$$\operatorname{sen}(3\alpha) = \frac{H}{\ell} \quad \Longrightarrow \quad H = \ell \operatorname{sen}(3\alpha) H = \frac{a \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(3\alpha)}{\operatorname{sen}(2\alpha)} = \frac{a \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(3\alpha)}{2 \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha)} = \frac{a \operatorname{sen}(3\alpha)}{2 \cos(\alpha)} \, .$$

Puntaje Pregunta 1.

- 3 puntos por utilizar el teorema del seno y obtener el valor de ℓ.
- 3 puntos por obtener el valor de H buscado.

2. Pruebe que $\tan(\arccos(x)) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ para $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

   Solución.

   Sea $\alpha = \arccos(x)$. Entonces, vemos que

$$\tan(\arccos(x)) = \tan(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}\,.$$

   Note que α se encuentra en el intervalo $[0,\pi]$. Como el $\operatorname{sen}(\alpha)$ es no negativo, el signo $+$ es la opción correcta. Si sustituimos $\alpha = \arccos(x)$ en la ecuación de arriba y las propiedades de cancelación $\cos(\arccos(x)) = x$, obtenemos

$$\tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,.$$

   Puntaje Pregunta 2.

   - 1 punto por obtener que $\tan(\alpha) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}/\cos(\alpha)$.
   - 1 punto por argumentar que la opción correcta es con el signo $+$.
   - 1 punto por utilizar la propiedad de cancelación y obtener la fórmula $\tan(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}/x$.

3. Dada la ecuación de la hipérbola $8x^2 - 4y^2 - 24x - 4y - 15 = 0$, encuentre las coordenadas de los vértices, de los focos y la ecuación de las asíntotas.

Solución. Completando cuadrados vemos que

$$\begin{aligned} 8x^2 - 4y^2 - 24x - 4y - 15 = 0 &\iff 8(x^2 - 3x) - 4(y^2 + y) = 15 \\ &\iff 8\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 15 + 8 \cdot \frac{9}{4} - 4 \cdot \frac{1}{4} \\ &\iff 8\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 32 \\ &\iff \frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{4} - \frac{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2}{8} = 1 \end{aligned}$$

Se sigue que $a^2 = 4$, $b^2 = 8$ y $c^2 = a^2 + b^2 = 12$. Entonces, $a = 2$, $b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ y $c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

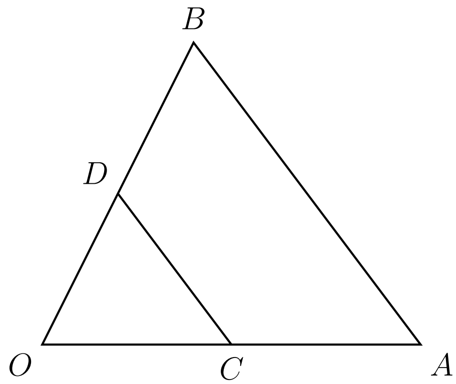
- Vértices: $(h \pm a, k) = \left(\frac{3}{2} \pm 2, -\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ \\ \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$
- Focos: $(h \pm c, k) = \left(\frac{3}{2} \pm 2\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$
- Asíntotas: $y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h) \iff y + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)$

Puntaje Pregunta 3.

- 1.2 puntos por completar cuadrado y obtener la ecuación $\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{4} - \frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{8} = 1$
- 1.2 puntos por obtener los valores de a, b y c.
- 1.2 puntos por encontrar los dos vértices.
- 1.2 puntos por encontrar las coordenadas de los dos focos.
- 1.2 puntos por encontrar las ecuaciones de las asíntotas.

4. Demostrar que en todo triángulo, el trazo que une los puntos medios de dos lados es paralelo al tercero.

   Solución. Considere el triángulo OAB de la figura donde C es el punto medio del lado OA y D es el punto medio del lado OB.



   Note que los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ y $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ forman una base.

   Ahora bien, como C es un punto medio de OA entonces su vector fijo es $\vec{c} = \dfrac{1}{2}\vec{a}$.

   De manera similar, como D es punto medio de OB entonces su vector fijo es $\vec{d} = \dfrac{1}{2}\vec{b}$.

   Usando la relación fundamental vemos que

$$\overrightarrow{CD} = \vec{d} - \vec{c} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

   Como el vector $\overrightarrow{CD}$ es un múltiplo del vector $\overrightarrow{AB}$, se sigue que $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$, como queríamos probar.

Puntaje Pregunta 4.

- 1,2 puntos por obtener el vector fijo para el punto medio C.
- 1,2 puntos por obtener el vector fijo para el punto medio D.
- 1,2 puntos por calcular el vector $\overrightarrow{CD}$
- 1,2 puntos por calcular el vector $\overrightarrow{AB}$
- 1,2 puntos por mostrar el vector $\overrightarrow{CD}$ es un múltiplo del vector $\overrightarrow{AB}$.

5. Considere el triángulo determinado por los puntos $A = (1,3,5)$, $B = (2,-3,6)$ y $C = (4,5,-3)$. Determine el ángulo correspondiente al ángulo C.

Solución. Consideremos los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{CA}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{CB}$, entonces por la relación fundamental vemos

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{a} - \vec{c} = (1,3,5) - (4,5,-3) = (-3,-2,8) \\ \vec{v} &= \vec{b} - \vec{c} = (2,-3,6) - (4,5,-3) = (-2,-8,9) \end{aligned}$$

El producto punto entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y sus normas son

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (-3,-2,8) \cdot (-2,-8,9) = 6 + 16 + 72 = 94 \\ \|\vec{u}\| &= \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 8^2} = \sqrt{9+4+64} = \sqrt{77} \\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2 + 9^2} = \sqrt{4+64+81} = \sqrt{149} \end{aligned}$$

Entonces el ángulo θ correspondiente al vértice C es el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y está dado por

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{u}\|} = \frac{94}{\sqrt{77} \cdot \sqrt{149}} \Longrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{94}{\sqrt{77} \cdot \sqrt{149}}\right) .$$

Puntaje Pregunta 5.

- 2 puntos por obtener los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- 2 puntos por calcular el producto punto entre los vectores y sus longitudes.
- 2 puntos por encontrar el valor del ángulo θ.

6. Encuentre un vector unitario perpendicular al triángulo ABC donde $A = (1,2,3)$, $B = (-3,-2,5)$ y $C = (1,4,1)$.

Solución. Sean $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Entonces por la relación fundamental vemos que

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{b} - \vec{a} = (-3,-2,5) - (1,2,3) = (-4,-4,2)\\ \vec{v} &= \vec{c} - \vec{a} = (1,4,1) - (1,2,3) = (0,2,-2)\end{aligned}$$

Sabemos que un vector perpendicular al triángulo es

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (4,-8,-8)\,.$$

La norma del vector $\vec{w}$ es $\|\vec{w}\| = \sqrt{4^2 + (-8)^2 + (-8)^2} = \sqrt{144} = 12$, por lo que un vector perpendicular y unitario al triángulo ABC es

$$\hat{w} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \frac{1}{12}(4,-8,-8) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)\,.$$

Puntaje Pregunta 6.

- 2 puntos por obtener los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- 2 puntos por calcular el producto cruz entre los vectores.
- 2 puntos por normalizar el vector $\vec{w}$.