Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2023

MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría

Solución EXAMEN

1. Use inducción para verificar que $4^n - 1$ es divisible por 3 para todo número entero positivo n.
   Solución. *Caso base* ($n = 1$): Tenemos $4^n - 1 = 4 - 1 = 3$ que es divisible por 3.
   Hip.: Suponemos que $4^n - 1$ es divisible por 3, es decir, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $4^n - 1 = 3m$.
   Con.: Consideramos
   $$4^{n+1} - 1 = 4 \cdot 4^n - 1 = 3 \cdot 4^n + 4^n - 1.$$
   Usando que $4^n - 1 = 3m$ vemos que
   $$4^{n+1} - 1 = 3 \cdot 4^n + 3m = 3(4^n + m).$$
   Dado que $4^n + m$ es número entero concluimos que $4^{n+1} - 1$ es divisible por 3.

   Puntaje: 1.5 puntos por caso base. 1.5 puntos por hipotesis junto con $4^n - 1 = 3m$. 3 puntos por el resto

2. Para cada una de las siguientes, escriba la negación y demuestre la proposición o su negación.
   (a) $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 - 2x < 0)$,
   (b) $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})\big(x + y \text{ es par } \implies (x \text{ es par } \wedge y \text{ es par})\big)$,
   (c) $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{R})(y^2 \geq x \vee |y| < 1)$.

   Solución.

   (a) La negación es: $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 - 2x \geq 0)$. La proposición original es verdadera. Por ejemplo, $x = \frac{1}{2}$ satisface $x^2 - 2x = -\frac{3}{4} < 0$.
   (b) La negación es: $(\exists x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\big((x + y \text{ es par}) \wedge (x \text{ es impar} \vee y \text{ es impar})\big)$. La negación es verdadera. Se ve por ejemplo con $x = 1$, $y = 1$, ya que $x + y$ es par y x (o y) es impar.
   (c) La negación es: $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{R})(y^2 < x \wedge |y| \geq 1)$. La negación es falsa. Usando $x = 1$ tenemos que $y^2 < x$ implica $|y| < 1$. Consecuentemente, $y^2 < x \wedge |y| \geq 1$ es falsa.

   Puntaje: 2 puntos por cada ítem (un punto por negación, otro por demostración de valor de verdad).

3. (a) (2 puntos) Determine el valor de
   $$\operatorname{sen}\left(\arccos(\tfrac{1}{\sqrt{2}}) + \arctan(1)\right)$$
   (b) (4 puntos) Encuentre todas las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$ de la ecuación
   $$\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$$

   Solución.

(a) Tenemos $\arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4} = \arctan(1)$. Con eso obtenemos $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = 1$.

(b) Con prostaféresis vemos que

$$\cos x + \cos(3x) = 2\cos(2x)\cos x.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \cos x + \cos(2x) + \cos(3x) = 0 \quad &\iff \quad 2\cos(2x)\cos x + \cos(2x) = 0 \\ &\iff \quad \cos(2x)(2\cos x + 1) = 0 \\ &\iff \quad \cos(2x) = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ecuación $\cos(2x) = 0$ tiene las soluciones $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n}{2}\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Ecuación $\cos x = -\frac{1}{2}$ tiene las soluciones $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. El conjunto solución pedido entonces es

$$\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}.$$

***Puntaje**:* 2 por primera parte (0.5 punto por valor de arccos, 0.5 punto por valor de arctan, 1 punto por resultado final), 4 punto por segunda parte (1.5 puntos por aplicar prostaféresis, 1 punto por condición $\cos(2x) = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$, 1.5 puntos por resolver y dar soluciones en intervalo $[0, 2\pi]$).

4. Encuentre todas las soluciones complejas de la ecuación $x^{10} + x^6 - x^4 - 1 = 0$. Exprésela en la forma $a + bi$.

Solución. Primero factorizamos el polinomio

$$x^{10} + x^6 - x^4 - 1 = (x^6 - 1)(x^4 + 1) = 0$$

Las soluciones corresponden a las raíces sextas de 1 y a las raíces cuartas de -1, es decir

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= \operatorname{cis}(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_3 &= \operatorname{cis}(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_4 &= -1 \\ x_5 &= \operatorname{cis}(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_6 &= \operatorname{cis}(\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_7 &= \operatorname{cis}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ x_8 &= \operatorname{cis}(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ x_9 &= \operatorname{cis}(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ x_{10} &= \operatorname{cis}(\frac{7\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

***Puntaje**:* 1 punto por la primera factorización y 0.5pts por cada una de las raíces escrita en forma cartesiana. La mitad del puntaje por las raíces dadas en forma polar solamente.

5. Determine el centro, los focos, vértices y asíntotas de la hipérbola dada por la ecuación

$$y^2 + 2y - 4x^2 - 16x = 19$$

Solución. Completamos cuadrados

$$(y+1)^2 - 1 - 4(x+2)^2 + 16 - 19 = 0$$

lo que queda

$$(y+1)^2 - 4(x+2)^2 = 4$$

y dividiendo por 4 obtenemos la forma reducida de la ecuación:

$$\frac{(y+1)^2}{2^2} - \frac{(x+2)^2}{1^2} = 1$$

El centro de la hipérbola está en $(-2,-1)$. Los focos están sobre la recta vertical $x = -2$ y la distancia entre ellos es $2\sqrt{4+1} = 2\sqrt{5}$ de manera que sus coordenadas son $(-2, -1-\sqrt{5})$ y $(-2, -1+\sqrt{5})$. Los vértices están en $(-2,-3)$ y $(-2,1)$. Las asíntotas tienen ecuaciones

$$y + 1 = \pm 2(x+2).$$

Puntaje: *1 punto por la ecuación reducida, 1 punto por identificar el centro, 1 punto por los vértices, 2 puntos por los focos y 1 punto por las asíntotas.*

6. Considere los puntos $P = (0,1,0)$, $Q = (1,2,-1)$ y $R = (-2,1,0)$. Determine un punto S tal que $PQRS$ sea un paralelogramo y calcule su área.

Solución. Podemos formar un paralelogramo eligiendo que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ (hay 3 elecciones posibles) Como $\overrightarrow{PQ} = \langle 1,1,-1\rangle$, tenemos $S = -(-1,2,-1)$. Para calcular el área, usaremos el producto cruz:

$$\begin{aligned} A &= \|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| \\ &= \|\langle 1,1,-1\rangle \times \langle -2,0,0\rangle\| \\ &= \|\langle 0,2,2\rangle\| \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Puntaje: *1 punto por obtener vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ (o similares), 2 puntos por un punto S apropiado, 1 punto por la fórmula para el área y 2 puntos por el resultado correcto.*