Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2024

MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría

Solución Interrogación N° 2

1. Dada la proposición $P(n)$:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}\,.$$

a) Muestre que $P(2)$ es verdadera.

b) Escriba las proposiciones $P(k)$ y $P(k+1)$.

c) Si $P(2)$ y $P(k)\to P(k+1)$ son verdaderas, ¿Qué es lo que se concluye con respecto a $P(n)$?

Solución.

a) Demostrar que $P(2)$ es verdadera es demostrar que $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$ es verdadero.

Observar que $2>\sqrt{2}$, luego $1>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Se tiene entonces que

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\,,$$

como queríamos probar.

b) Tenemos que

$$\begin{aligned} P(k) &: \quad 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}\,,\\ P(k+1) &: \quad 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}\,. \end{aligned}$$

c) Se concluye que $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+....+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ es verdadera para todo número natural mayor o igual a 2.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 2 puntos por mostrar que $P(2)$ es verdadero.

CC 2. 2 puntos por escribir las proposiciones $P(k)$ y $P(k+1)$.

CC 3. 2 puntos por deducir que por el principio de inducción $P(n)$ es verdadero para todo $n\geqslant 2$.

2. Demuestre que para todo número natural n, se cumple que $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ es divisible por 21.

Solución. Se demostrará por inducción.

- **Caso base** ($n = 1$)**:** Tenemos $4^{1+1} + 5^{2\cdot 1-1} = 16 + 5 = 21$ lo que es claramente divisible por 21.
- **Paso inductivo:** Supongamos que para k natural, $4^{k+1} + 5^{2k-1}$ es divisible por 21, es decir, existe un c natural tal que $4^{k+1} + 5^{2k-1} = 21c$.

  Dado esto, se desea demostrar que $4^{k+2} + 5^{2k+1}$ es también divisible por 21.

  Veamos que:

  $$4^{k+2} + 5^{2k+1} = 4 \cdot 4^{k+1} + 25 \cdot 5^{2k-1} = 4 \cdot 4^{k+1} + 4 \cdot 5^{2k-1} + 21 \cdot 5^{2k-1} = 4(4^{k+1} + 5^{2k-1}) + 21 \cdot 5^{2k-1}$$

  Así, reemplazando con $4^{k+1} + 5^{2k-1} = 21c$ se tiene:

  $$4^{k+2} + 5^{2k+1} = 4(4^{k+1} + 5^{2k-1}) + 21 \cdot 5^{2k-1} = 21c + 21 \cdot 5^{2k-1} = 21(c + 5^{2k-1})$$

  Lo que es claramente divisible por 21.

  De este modo, hemos demostrado que para todo número natural n, la expresión $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ es divisible por 21.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 2 puntos por demostrar el caso base.

CC 2. 1 puntos por escribir la hipótesis inductiva: $4^{k+1} + 5^{2k-1} = 21c$.

CC 3. 3 puntos por mostrar que $4^{k+2} + 5^{2k+1}$ es divisible por 21.