Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2022

MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría

Solución Interrogación N° 2

1. Resuelva la ecuación $4x^4 - 4x^3 - 5x^2 + x + 1 = 0$.

   Solución. Usando el teorema de las raíces racionales, si $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ es raíz de $P(x) = 4x^4 - 4x^3 - 5x^2 + x + 1$ entonces $p|1$ y $q|4$. Se sigue que

$$p \in \{\pm 1\} \quad \text{y} \quad q \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\} \Longrightarrow \alpha = \frac{p}{q} \in \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}\right\}.$$

   Evaluando en el polinomio vemos que $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ y que $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. Entonces por el teorema del resto $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ divide a $P(x)$. Realizando la división de los polinomios vemos que

$$\begin{array}{rl}
 & 4x^4 - 4x^3 - 5x^2 + x + 1 \quad : x^2 - \dfrac{1}{4} = 4x^2 - 4x - 4 \\
- & \underline{4x^4 - x^2 \qquad\qquad} \\
 & -4x^3 - 4x^2 + x + 1 \\
- & \underline{-4x^3 + x \qquad\qquad} \\
 & -4x^2 + 1 \\
- & \underline{-4x^2 + 1 \qquad\qquad} \\
 & 0
\end{array}$$

   Se sigue que $P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(4x^2 - 4x - 4) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2 - x - 1)$.
   Usando la fórmula cuadrática obtenemos que las raíces de $x^2 - x - 1 = 0$ son $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
   Entonces las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$ son $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

   Puntaje Pregunta 1.

   - 1,5 puntos por utilizar el teorema de las raíces racionales y obtener como candidatos de raíces el conjunto $\left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}\right\}$.
   - 1,5 puntos por usar el teorema del factor y concluir que $(x^2 - \frac{1}{4})$ divide a $P(x)$.
   - 1,5 puntos por realizar el algoritmo de la división.
   - 1,5 puntos por encontrar las raíces del polinomio $x^2 - x - 1$.

2. Determine los valores de las constantes $m, n \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha = 1 + i$ es raíz del polinomio

$$P(x) = x^5 + mx^3 + n\,.$$

Solución. El módulo de α es $r = |\alpha| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ y el argumento de α es $\theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Entonces la forma polar del número complejo α es

$$\alpha = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\alpha^5 &= (\sqrt{2})^5\,\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4 - 4i \\
\alpha^3 &= (\sqrt{2})^3\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 + 2i
\end{aligned}$$

Entonces α es raíz de $P(x)$ si

$$0 = P(\alpha) = \alpha^5 + m\alpha^3 + n = (-4 - 4i) + m(-2 + 2i) + n = (-2m + n - 4) + i(-4 + 2m)$$

lo cual implica que

$$\left.\begin{aligned} -2m + n - 4 &= 0 \\ -4 + 2m &= 0 \end{aligned}\right| \quad \Longrightarrow \quad m = 2 \quad \text{y} \quad n = 8\,.$$

Puntaje Pregunta 2.

- 1 punto por obtener la forma polar del número complejo α.
- 1,5 puntos por calcular $\alpha^5 = -4 - 4i$
- 1,5 puntos por calcular $\alpha^3 = -2 + 2i$
- 1 punto por concluir que α es raíz si $P(\alpha) = 0$ y formar el sistema de ecuaciones
- 1 punto por encontrar los valores de m y n.

3. Si $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{3}$, calcular $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\beta) - \cos(\alpha)}$.

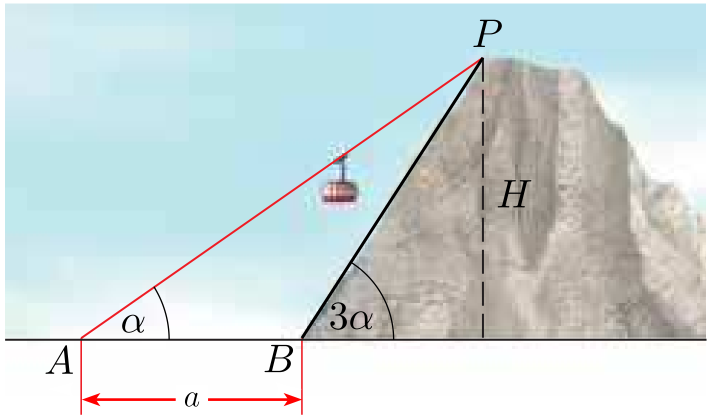
Solución. Usando las fórmulas de prostaféresis obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\beta) - \cos(\alpha)} &= \frac{2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)}{-2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)} \\
&= \cot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi/3}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\,.
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 3.

- 2 puntos por utilizar las fórmula de prostaféresis en el numerador.
- 2 puntos por utilizar las fórmula de prostaféresis en el denominador.
- 2 puntos por calcular $\cot(\pi/6)$.

4. Un funicular lleva pasajeros desde el punto A, que se encuentra a distancia a metros del pie B del cerro, a la cima P del cerro. El ángulo de elevación del punto P, visto desde A, es α y el ángulo de elevación de P, visto desde B es de 3α (ver figura).



Demuestre que la altura H del cerro es

$$H = \frac{a \operatorname{sen}(3\alpha)}{2\cos(\alpha)}\ .$$

Solución. Considere el triángulo ABP de la figura 1. Tenemos que 3α y β forman un ángulo extendido entonces $\beta = \pi - 3\alpha$.

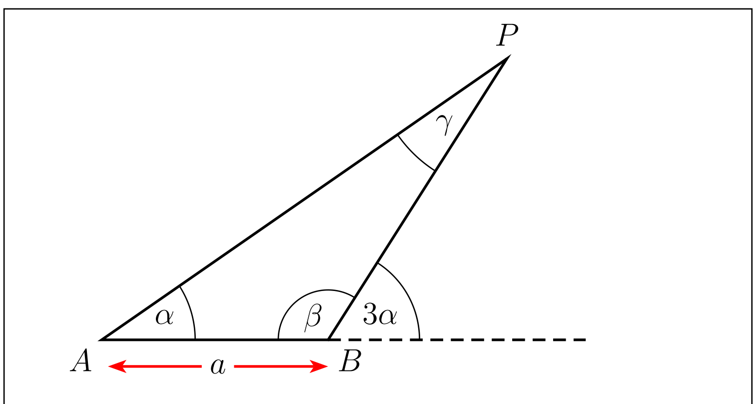


Figura 1

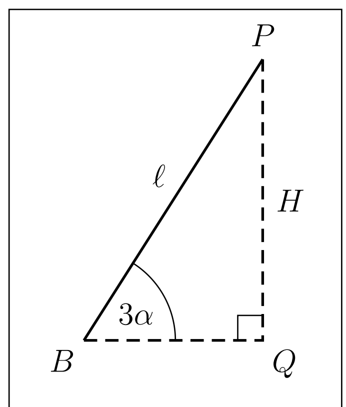


Figura 2

Además,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \Longrightarrow \alpha + \pi - 3\alpha + \gamma = \pi \Longrightarrow \gamma = 2\alpha\ .$$

Usando el teorema del seno, denotamos por $\ell = d(B,P)$, obtenemos que

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\ell} = \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{a} \Longrightarrow \ell = \frac{a\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(2\alpha)}\ .$$

Sea Q el punto donde se realiza la altura del cerro tal como muestra la figura 2. Se tiene que

$$\operatorname{sen}(3\alpha) = \frac{H}{\ell} \quad\Longrightarrow\quad H = \ell\operatorname{sen}(3\alpha)H = \frac{a\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(3\alpha)}{\operatorname{sen}(2\alpha)} = \frac{a\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(3\alpha)}{2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)} = \frac{a\operatorname{sen}(3\alpha)}{2\cos(\alpha)}\ .$$

Puntaje Pregunta 4.

- 3 puntos por utilizar el teorema del seno y obtener el valor de ℓ.
- 3 puntos por obtener el valor de H buscado.