Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2022

MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría

Solución Interrogación N° 1

1. Sean p, q, r y s proposiciones lógicas y considere la nueva proposición lógica

$$\overline{[\{(\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}) \wedge (r \Longrightarrow s)\} \wedge (\overline{q} \vee \overline{s})]} \Longrightarrow (p \wedge r) \qquad (*)$$

Pruebe que la proposición $(*)$ es una tautología.

Solución. Usando la caracterización de la implicación vemos que $(\overline{q} \vee \overline{s}) \Longleftrightarrow (s \Longrightarrow \overline{q})$ entonces

$$\overline{[\{(\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}) \wedge (r \Longrightarrow s)\} \wedge (\overline{q} \vee \overline{s})]} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{[\{(\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}) \wedge (r \Longrightarrow s)\} \wedge (s \Longrightarrow \overline{q})]} \tag{1}$$

Ahora aplicando la asociatividad del conectivo lógico $\wedge$ vemos que

$$\overline{[\{(\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}) \wedge (r \Longrightarrow s)\} \wedge (s \Longrightarrow \overline{q})]} \Longleftrightarrow \overline{[(\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}) \wedge \{(r \Longrightarrow s) \wedge (s \Longrightarrow \overline{q})\}]}$$

Usando la transitividad de la implicancia vemos que

$$\overline{[(\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}) \wedge \{(r \Longrightarrow s) \wedge (s \Longrightarrow \overline{q})\}]} \Longrightarrow \overline{[(\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}) \wedge (r \Longrightarrow \overline{q})]} \Longrightarrow \overline{[r \Longrightarrow \overline{p}]} \tag{2}$$

Usando la caracterización de la implicación se ve que

$$\overline{[r \Longrightarrow \overline{p}]} \Longleftrightarrow \overline{[\overline{r} \vee \overline{p}]} \Longleftrightarrow [r \wedge p] \tag{3}$$

como queríamos probar. Note que la última equivalencia se debe a las leyes de De Morgan.

Observación. También se puede probar usando una tabla de verdad. En caso de realizar una tabla de verdad, se debe asignar los 6 puntos si la tabla está correcta.

Puntaje Pregunta 1.

- 2 puntos por utilizar la caracterización de la implicación para la igualdad (1).
- 2 puntos por utilizar la transitividad de la implicación para obtener la igualdad (2).
- 2 puntos por utilizar las leyes de De Morgan para obtener la igualdad (3).

2. Demuestre por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}\,.$$

Solución. Usando inducción sobre n. Definimos la función proposicional

$$P(n)\ :\quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Entonces, note que

$$\begin{aligned}
P(1)\ &:\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1\cdot(1+3)}{4\cdot(1+1)\cdot(1+2)}\\
P(k)\ &:\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}\\
P(k+1)\ &:\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}
\end{aligned}$$

- **Caso base:** El lado izquierdo de $P(1)$ nos da $\frac{1}{6}$ y el lado derecho de $P(1)$ nos da $\frac{4}{4\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{6}$. De lo anterior se sigue que $P(1)$ es verdadero.
- **Paso inductivo:** Suponemos que $P(k)$ es verdadero. Por demostrar que $P(k+1)$ es verdadero. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\\
&\qquad=\left[\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right]+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\\
&\qquad=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\\
&\qquad=\frac{k(k+3)^2+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}\\
&\qquad=\frac{k^3+6k^2+9k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}\\
&\qquad=\frac{(k+1)^2(k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}\,.
\end{aligned}$$

  Como queríamos probar.

Por el principio de inducción matemática $P(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$.

Puntaje Pregunta 2.

- 1 punto por definir la función proposicional y determinar $P(k)$ y $P(k+1)$.
- 1 punto por probar el caso base.
- 2 puntos por usar la hipótesis inductiva
- 2 puntos por sumar las expresiones y probar el paso inductivo.

3. Sea U el conjunto universo. Considere los conjuntos fijos $A, B \subseteq U$ con $A \neq \varnothing$.
   Para cualquier conjunto $X \subseteq U$ se define un nuevo conjunto $C(X)$ de la siguiente manera:

$$C(X) = \begin{cases} X \setminus B & \text{si } A \cap X \neq \varnothing \\ \\ X \cup B & \text{si } A \cap X = \varnothing \end{cases}$$

   a) Pruebe que $C(A) = A \setminus B$.

   b) Pruebe que $C(A^C) = (C(A))^C$.

   c) Pruebe que $C(A) \cup C(B) \subseteq A \cup B$.

   Solución.

   a) Tomando $X = A$ vemos que $A \cap X = A \cap A = A \neq \varnothing$ entonces $C(A) = A \setminus B$.

   b) Tomando $X = A^C$ vemos que $A \cap X = A \cap A^C = \varnothing$ entonces $C(A^C) = A^C \cup B$. Por otro lado, usando el inciso a) vemos que

$$(C(A))^C = (A \setminus B)^C = (A \cap B^C)^C = A^C \cup B \,.$$

   Luego se sigue que $C(A^C) = (C(A))^C$.

   c) Separaremos la demostración en casos:

   - **Caso 1:** $A \cap B \neq \varnothing$.

$$C(A) \cup C(B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus B) = (A \setminus B) \cup \varnothing = A \setminus B \subseteq A \subseteq A \cup B$$

   - **Caso 2:** $A \cap B = \varnothing$.

$$C(A) \cup C(B) = (A \setminus B) \cup (B \cup B) = (A \setminus B) \cup B = A \cup B \subseteq A \cup B \,.$$

   Puntaje Pregunta 3.

   - 1 punto por mostrar que $C(A) = A \setminus B$.
   - 1 punto por mostrar que $C(A^C) = A^C \cup B$.
   - 1 punto por mostrar que $(C(A))^C = A^C \cup B$.
   - 1 punto por concluir que $C(A^C) = (C(A))^C$.
   - 1 puntos por mostrar la contención en el caso 1.
   - 1 puntos por mostrar la contención en el caso 2.

4. *a*) Sean p una proposición lógica y $q(x)$ una función proposicional.
Si la afirmación $(\forall\, x \in U)(p \Longrightarrow q(x))$ es falsa, determine el valor de verdad de p.
Justifique su respuesta.

b) Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, determine el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$(\forall\, x \in A)(\exists\, y \in A)((x^2 + y) \text{ es par}) \,.$$

Solución.

a) Si la afirmación $(\forall\, x \in U)(p \Longrightarrow q(x))$ es falsa, entonces $\overline{(\forall\, x \in U)(p \Longrightarrow q(x))}$ es verdadera.
Ahora bien, notemos que

$$\begin{aligned} \overline{(\forall\, x \in U)(p \Longrightarrow q(x))} &\iff (\exists\, x \in U)\overline{(p \Longrightarrow q(x))} \\ &\iff (\exists\, x \in U)\overline{(\overline{p} \vee q(x))} \\ &\iff (\exists\, x \in U)(p \wedge \overline{q(x)}) \end{aligned}$$

Como la última afirmación es verdadera, se sigue que $p = V$.

b) Definimos el conjunto $B = \{x \in A \mid \exists\, y \in A, (x^2 + y) \text{ es par}\}$. Para que la proposición sea verdadera, basta que $B = A$. En efecto, se tiene que

- Si $x = 1$ entonces existe $y = 1$ tal que $x^2 + y = 2$ es par, luego $1 \in B$
- Si $x = 2$ entonces existe $y = 2$ tal que $x^2 + y = 6$ es par, luego $2 \in B$
- Si $x = 3$ entonces existe $y = 1$ tal que $x^2 + y = 10$ es par, luego $3 \in B$
- Si $x = 4$ entonces existe $y = 2$ tal que $x^2 + y = 2$ es par, luego $4 \in B$

Hemos obtenido que $B = \{1, 2, 3, 4\} = A$, luego la proposición es verdadera.

Puntaje Pregunta 4a).

- 1 punto por concluir que si la proposición es falsa entonces la negación es verdadera.
- 1 punto por encontrar la negación de la proposición $(\forall\, x \in U)(p \Longrightarrow q(x))$
- 1 punto por concluir que p tiene valor de verdad V.

Puntaje Pregunta 4b).

- 3 puntos por verificar que la proposición es verdadera.