Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2022

**MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría**

# Solución Tarea N° 3

1. Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica

$$\tan(x) - \cot(x) = \csc(x)\,.$$

**Solución.** Notemos que

$$\tan(x) - \cot(x) = \csc(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} - \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \Longleftrightarrow \frac{\operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

Observe que para que la identidad tenga sentido estamos asumiendo que $\operatorname{sen}(x) \neq 0$ y que $\cos(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Ahora bien, multiplicando por $\operatorname{sen}(x)$ y usando la identidad fundamental obtenemos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x)}{\cos(x)} = 1 \Longleftrightarrow \frac{1 - 2\cos^2(x)}{\cos(x)} = 1$$

Haciendo el cambio de variables $u = \cos(x)$ obtenemos que

$$\frac{1 - 2u^2}{u} = 1 \Longleftrightarrow 1 - 2u^2 = u \Longleftrightarrow 2u^2 + u - 1 = 0$$

Usando la fórmula cuadrática obtenemos que

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-1)}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Longleftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ u = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = \frac{1}{2} \\ \cos(x) = -1 \end{cases}$$

Note que debemos descartar las soluciones en donde $\cos(x) = -1$ ya que en estos puntos la función seno se anula y la igualdad inicial estamos asumiendo que $\operatorname{sen}(x) \neq 0$.
La solución básica de $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ es $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$. Entonces la solución de la ecuación es:

$$S = \{2k\pi \pm \alpha \mid k \in \mathbb{Z}\} = \left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\,.$$

**Puntaje Pregunta 1.**

- 2 puntos por obtener que la ecuación es equivalente con $\dfrac{1 - 2\cos^2(x)}{\cos(x)} = 1$.
- 1 punto por usar el cambio de variables $u = \cos(x)$.
- 1 punto por resolver la ecuación cuadrática.
- 1 punto por obtener la solución básica y descartar la solución $\cos(x) = -1$.
- 1 punto por obtener todas las soluciones de la ecuación.

2. Determinar el valor de la constante $k$ para que la recta $\ell : 2x+3y+k=0$ sea tangente a la circunferencia $C : x^2+y^2+6x+4y=0$

**Solución.** Reescribiendo la ecuación se tiene que la circunferencia puede ser representada por

$$(x+3)^2+(y+2)^2=13$$

Luego el centro de la circunferencia es el punto $P(-3,-2)$ y su radio $\sqrt{13}$.

Entonces, por propiedades de la circunferencia, se tiene que

$$d(P,\ell)=\sqrt{13}$$

Lo anterior es equivalente con

$$\begin{aligned}
d(P,\ell)=\sqrt{13} &\Leftrightarrow \frac{|2\cdot(-3)+3\cdot(-2)+k|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\sqrt{13}\\
&\Leftrightarrow \frac{|-12+k|}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}\\
&\Leftrightarrow |-12+k|=13\\
&\Leftrightarrow -12+k=\pm 13\\
&\Leftrightarrow k=-1 \quad \text{o} \quad k=25
\end{aligned}$$

**Puntaje Pregunta 2.**

- 2 puntos por plantear la condición $d(P,\ell)=\sqrt{13}$.
- 2 puntos por desarrollar la expresión $d(P,\ell)=\sqrt{13}$.
- 2 puntos por dar los valores correctos de $k$.

3. Para que valores de $m$ la recta $y = mx + 2$

   a) Corta a la parábola $y^2 = 4x$
   b) Es tangente a ella
   c) Es exterior a la parábola

**Solución.** Los puntos en donde la recta $y = mx + 2$ y la parábola $y^2 = 4x$ se cortan son las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} y &=& mx+2 \\ y^2 &=& 4x \end{array}\right|$$

Para resolverlo reemplazamos $y$ de la primera ecuación en la segunda y obtenemos

$$(mx+2)^2 = 4x \iff m^2x^2 + (4m-4)x + 4 = 0$$

El sistema tendrá una, más de una o ninguna solución dependiendo de si está última ecuación tiene una, más de una o ninguna solución. El número de soluciones depende del discriminate:

$$\Delta = (4m-4)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot 4 = 16(1-2m)$$

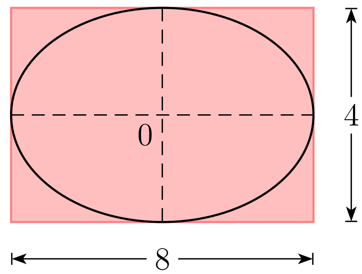
Finalmente

a) La recta corta a la parábola si $\Delta \geqslant 0$. Es decir si $m \leqslant \dfrac{1}{2}$.
b) Es tangente a ella si $\Delta = 0$. Es decir si $m = \dfrac{1}{2}$.
c) Es exterior a la parábola si $m > \dfrac{1}{2}$.

**Puntaje Pregunta 3.**

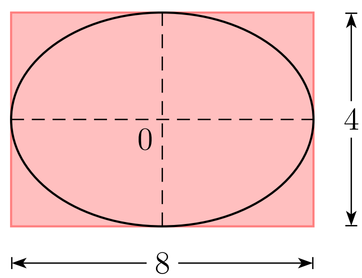
- 1 punto por plantear el sistema y decir que debe tener solución única.
- 1 punto por decir que la condición que discrimina la naturaleza de la recta es el signo de $\Delta$.
- 1 punto por calcular correctamente $\Delta$.
- 1 punto por obtener la condición para que la recta corte a la parábola.
- 1 punto por obtener la condición para que la recta sea tangente a la parábola.
- 1 punto por obtener la condición para que la recta sea exterior a la parábola.

4. Un carpintero desea construir una mesa elíptica de una hoja de manera contrachapada, de 4 pies por 8 pies. Trazará la elipse usando una cuerda y dos tachuelas ubicados en los focos (ver figura).




¿Qué longitud del hilo debe usar y a que distancia debe colocar las tachuelas, si la elipse ha de ser la más grande posible a cortar de la hoja de madera contrachapada?

**Solución.** Ubicando el origen de coordenadas en el centro de la hoja de manera contrachapada obtenemos la siguiente situación geométrica




Se sigue que el largo del eje mayor es 8 y el largo del eje menor es 4, luego la ecuación de la mayor elipse dentro de la hoja de mader contrachapada es

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1\,,$$

donde $a^2 = 16$, $b^2 = 4$ entonces $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$ por lo que $c = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$. Sabemos que la longitud de la cuerda satisface

$$\text{longitud(cuerda)} = d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a = 2 \cdot (4) = 8 \ \text{[pies]}$$

y que distancia entre los focos es

$$d(F_1, F_2) = 2c = 4\sqrt{3} \ \text{[pies]}\,.$$

**Puntaje Pregunta 4.**

- 2 puntos por determinar la ecuación de la elipse.
- 2 puntos por determinar el largo de la cuerda.
- 2 puntos por determinar la distancia de los focos.