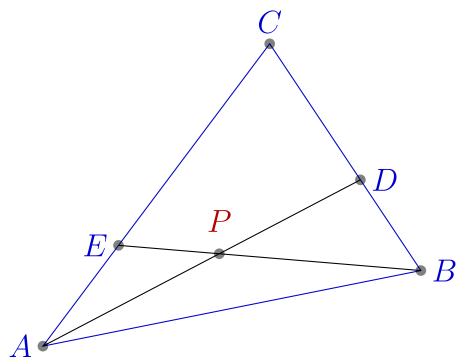
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2023

**MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría**

Solución Interrogación N° 8

1. En el triángulo $\triangle ABC$, $D$ es un punto del segmento $BC$ tal que $BD : DC = 2 : 3$, $E$ es un punto del segmento $AC$ tal que $AE : EC = 1 : 2$ y $P$ es el punto de intersección de $AD$ y $BE$. Determine la razón $AP : PD$.




**Solución.**

Consideremos el origen en $A$ y denotemos los vectores posición de $B$ y $C$ por $\vec{b}$ y $\vec{c}$ respectivamente. Entonces el vector posición de $D$ es

$$\vec{d} = \frac{3}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$$

y el vector posición de $E$ es

$$\vec{e} = \frac{1}{3}\vec{c}$$

El vector posición del punto $P$que está en la intersección de $AD$ y $BE$, se escribe como

$$\vec{p} = \lambda\vec{d} = \mu\vec{b} + (1-\mu)\vec{e}$$

para ciertos valores de $\lambda$ y $\mu$ entre 0 y 1. Es decir

$$\lambda(\frac{3}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}) = \mu\vec{b} + (1-\mu)\frac{1}{3}\vec{c}$$

Reagrupando:

$$(\frac{3}{5}\lambda - \mu)\vec{b} + (\frac{2}{5}\lambda + \frac{1}{3}\mu - \frac{1}{3}\vec{c}) = \vec{0}$$

Como $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente independientes, tenemos

$$(\frac{3}{5}\lambda - \mu) = \frac{2}{5}\lambda + \frac{1}{3}\mu - \frac{1}{3} = 0$$

por lo que

$$\lambda = \frac{5}{9}, \qquad \mu = \frac{1}{3}$$

La razón pedida es

$$AP : PD = 5 : 4$$

***Puntaje:*** 2 puntos por expresión vectorial para los puntos D y E, 1 punto por cada una de las expresiones para P como perteneciente a los segmentos $AD$ y $BE$. 1 punto por determinar expresión vectorial explícita para P y 1 punto por determinar la razón pedida.

2. Considere el triángulo formado por los tres puntos $A(0,0,0)$, $B(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$, $C(s,t,0)$. Determine todos los valores $s, t \in \mathbb{R}$ tal que los lados $AB$ y $AC$ son perpendiculares y la longitud de $AC$ es 1. Además, determine $\cos\gamma$ donde $\gamma$ denota el ángulo en vertice $C$.

**Solución.** Usamos $\vec{c} = \vec{AB} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$, $\vec{b} = \vec{AC} = (s,t,0)$. Para que los lados $AB$, $AC$ sean perpendiculares necesitamos que

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{t}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad s + t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = -s.$$

Pedimos que el lado $AC$ tenga longitud 1 que es equivalente a

$$\|\vec{b}\|^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad s^2 + t^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2s^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad s = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Concluimos que hay dos soluciones, $C(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $C(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

Para encontrar $\cos\gamma$ usamos $\vec{d} = \vec{CA}$ y $\vec{e} = \vec{CB}$. En el caso de la solución $C(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ tenemos $\vec{d} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\vec{e} = (0, \frac{2}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$. Según lo visto en clase tenemos

$$\cos\gamma = \frac{\vec{d} \cdot \vec{e}}{\|\vec{d}\| \, \|\vec{e}\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{2} + 2}} = \frac{1}{2}.$$

En el caso de la solución $C(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ tenemos $\vec{d} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\vec{e} = (\frac{2}{\sqrt{2}}, 0, \sqrt{2})$. Resulta en $\vec{d} \cdot \vec{e} = 1$ y como antes $\cos\gamma = \frac{1}{2}$.

***Puntaje:*** 1 punto por condición $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$, 1 punto por condición $\|\vec{b}\| = 1$, 1 punto por resolver para $s, t$, 1 punto por fórmula de $\cos\gamma$, 1 punto por calcular $\vec{d} \cdot \vec{e}$ y las normas, 1 punto por cálculo correcto de $\cos\gamma$.