Conjuntos y Operaciones

1 Conjuntos y elementos

Supongamos que el proceso mental que une objetos bajo una característica particular nos da un conocimiento intuitivo adecuado de lo que entendemos por un conjunto. Los objetos reunidos de esta manera se llaman **elementos** y decimos que éstos pertenecen al conjunto. Por lo que, la palabra conjunto la emplearemos para representar una colección de objetos considerada como una sola identidad: (i) los puntos de una segmento de recta, (ii) los números naturales menores o iguales a 10, (iii) los doce apóstoles de Jesucristo, (iv) las páginas de un libro, constituyen ejemplos de conjuntos.

DEFINICIÓN Sea A un conjunto dado, a y b denotan ciertos objetos. Cuando a es un elemento de A, vamos a indicar este hecho escribiendo

$$a \in A \qquad (a \text{ pertenece a } A)\,.$$

Cuando b no es un elemento de A, vamos a escribir

$$b \notin A \qquad (b \text{ no pertenece a } A)$$

EJEMPLO 1

(i) Si A es el conjunto de todos los números pares, entonces $18 \in A$ y $5 \notin A$.

(ii) Si R es el conjunto de todos los rectángulos y P es un paralelogramo entonces $P \in R$. Si C es un círculo, entonces $C \notin R$.

Observación: Los elementos de un conjunto pueden, a su vez, ser conjuntos en sí mismo; por ejemplo, un libro se puede considerar como un conjunto de páginas, y cada página como un conjunto de líneas escritas; de esta manera, si denotamos por B el libro, P a una página del libro B y por L a una línea de la página P se tiene que

$$L \in P \quad \text{y} \quad P \in B\,.$$

Descripción de un conjunto

Los conjuntos se denotan, en general, escribiendo sus elementos o bien la característica de estos dentro de un paréntesis de llave, en una de las siguientes formas:

(i) Por extensión

Para escribir un conjunto por extensión, listamos todos sus elementos separados por comas y, finalmente encerrados entre llaves $\{\ldots\}$. Si el conjunto está formado por los elementos 1, 2 y 3 se escribe

$$A = \{1,2,3\}\,.$$

Nótese que cualquier elemento que no figure dentro del paréntesis no pertenece al conjunto por ejemplo

$$4 \notin A, \quad -2 \notin A\,.$$

(ii) Por compresión

Para escribir un conjunto por comprensión elegimos un elemento arbitrario x y señalamos que cumple la propiedad $P(x)$. Finalmente, encerramos toda la expresión entre llaves

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

que se lee "A es el conjunto de todos los elementos x tales que cumplen la propiedad $P(x)$". Por ejemplo, el conjunto $\{1, 2, 3\}$ se describe por compresión de alguna de las siguientes formas

$$A = \{x \mid x \text{ es uno de los tres primeros números naturales}\}$$

o bien

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}\,.$$

Lo último se lee "A es el conjunto de todos x pertenecientes al conjunto de los números naturales tales que x es menor que 4". Esta forma de definir conjuntos es especialmente útil cuando se trata de conjuntos con muchos elementos.

EJEMPLO 2 Escriba por extensión el conjunto $A = \{x \mid x \text{ es una vocal del español}\}$.

Solución $A = \{a, e, i, o, u\}$.

EJEMPLO 3 Escriba por compresión el conjunto $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Solución $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es un número par menor que } 12\}$.

DEFINICIÓN (Igualdad de Conjuntos) Decimos que dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos. Para denotar que A y B son iguales, escribimos $A = B$.
Para indicar que A y B no son iguales, escribimos $A \neq B$.

EJEMPLO 4

(i) Si $A = \{John, Paul, Ringo\}$ y $B = \{Paul, Ringo, John\}$, entonces $A = B$. Note que la variación en el orden en el cual los elementos de un conjunto son tabulados o escritos no afecta al conjunto.

(ii) Si $A = \{2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 2, 3, 2, 4\}$, entonces $A = B$ como cada elemento de A está en B y cada elemento de B está en A. Note que un conjunto no cambia si se repiten uno o mas de sus elementos.

(iii) Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $A \neq B$ como 3 y 4 son elementos de B que no están en A.

EJEMPLO 5 Los conjuntos $A = \{x \mid x \text{ es un número par distinto de cero entre } -3 \text{ y } 3\}$ y $B = \{x \mid x^2 = 4\}$, son iguales, ya que tienen los mismos elementos $A = \{-2, 2\}$ y $B = \{-2, 2\}$ por lo que $A = B$.

DEFINICIÓN (Conjunto Vacío) Llamaremos conjunto vacío a todo conjunto que no posea elementos y lo denotaremos por $\varnothing$.

EJEMPLO 6 Considere el siguiente conjunto

$$A = \{x \mid x \text{ es un alumno con más de trescientos años de edad}\}\,.$$

Es evidente que este conjunto carece de elementos. Por lo tanto, A es el conjunto vacío, esto es, $A = \varnothing$.

EJEMPLO 7

(i) Si $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 1\}$ entonces como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ vemos que no existe números naturales que sean menores que 1 por lo que $A = \varnothing$.

(ii) Si $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 3 = \frac{1}{5}\}$, tenemos que

$$x - 3 = \frac{1}{5} \Longrightarrow x = 3 + \frac{1}{5} \Longrightarrow x = \frac{16}{5}$$

como $x = \frac{16}{5} \notin \mathbb{Z}$ obtenemos que $B = \varnothing$.

DEFINICIÓN (Conjunto Universo) En cualquier aplicación de la teoría de conjuntos, los elementos de todos los conjuntos pertenecen usualmente a un gran conjunto fijo llamado conjunto universo. Éste conjunto se denota por U.

EJEMPLO 8 Si trabajamos con conjuntos de comunidades humana, entonces en Chile un buen conjunto universo es el conjunto de los chilenos que viven en el país.

EJEMPLO 9 Considere el conjunto $A = \{x \in U \mid x^2 + 3 = 7\}$.
Si $U = \mathbb{N}$ vemos que $A = \{2\}$ mientras que si $U = \mathbb{Z}$ entonces $A = \{-2, 2\}$.
En efecto se tiene que

$$x^2 + 3 = 7 \Longleftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow (x-2)(x+2) = 0\,.$$

Observe que el conjunto A posee distintos elementos cuando se consideran distintos conjuntos universos, de aquí la importancia del conjunto universo.

DEFINICIÓN (Cardinalidad) La cardinalidad de un conjunto finito A es el número entero no negativo que representa el número de elementos del conjunto A.
Para cualquier conjunto finito A, denotamos su cardinalidad por $n(A)$.

EJEMPLO 10

(i) La cardinalidad del conjunto $A = \{h, i, j, k, l, n\}$ es 6, ya que A tiene seis elementos; $n(A) = 6$.

(ii) La cardinalidad del conjunto $B = \{x \mid x$ es un número primo y par$\}$, es 1, ya que hay un sólo número primo que es par, el 2; $n(B) = 1$.

(iii) La cardinalidad del conjunto $C = \{x, y, x, x, y\}$ es 2, ya que C sólo tiene dos elementos distintos; $n(C) = 2$.

DEFINICIÓN Un conjunto A es subconjunto de un conjunto B si todo elemento de A también es un elemento de B y lo anotaremos $A \subseteq B$.

Cuando A no es un subconjunto de B, vamos a escribir $A \nsubseteq B$.

EJEMPLO 11

(i) Si $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ es número par $\}$ y $B = \mathbb{N}$ entonces $A \subseteq B$.

(ii) Los conjuntos $A = \{2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ y $C = \{4, 5\}$ son subconjuntos de $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. El conjunto $E = \{1, 2, 6\}$ no es un subconjunto de S como $6 \in E$ pero $6 \notin S$, luego podemos escribir $E \nsubseteq S$.

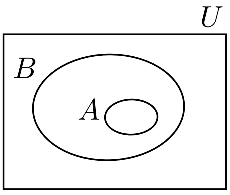
Observación: Si A es un subconjunto de B, se suele decir que A está incluido en B, o bien que A está contenido en B.

Existen relaciones de contención fundamentales para un conjunto arbitrario, que establecemos en la siguiente:

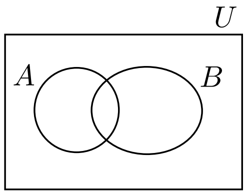
PROPOSICIÓN 1 Si A y B son conjuntos cualesquiera, entonces

1. $\varnothing \subseteq A \subseteq U$,
2. $A \subseteq A$,
3. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$,
4. $A = B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

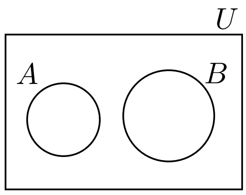
Diagramas de Venn Una representación gráfica de los conjuntos y de las relaciones entre ellos viene dada por los llamados diagramas de Venn (ver las figuras abajo). Estos diagramas son figuras planas cerradas; normalmente, el conjunto universo se representa por el interior de un rectángulo y los otros conjuntos se representan por discos incluidos en el rectángulo.



$A \subseteq B$



A y B tienen elementos en común



A y B no tienen elementos en común

Es importante distinguir entre los símbolos y aunque están estrechamente relacionados como sigue:

$$a \in A \Longleftrightarrow \{a\} \subseteq A\,.$$

2 Operaciones con conjuntos

A partir de conjuntos conocidos se pueden obtener nuevos conjuntos realizando operaciones entre ellos.

DEFINICIÓN Sean A y B conjuntos contenidos en el conjunto referencial U. Definimos las siguientes operaciones:

1. (Unión) $A \cup B = \{x \in U \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$,
2. (Intersección) $A \cap B = \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$.

PROPOSICIÓN 2 Si $X \subseteq Y$ y $W \subseteq Z$ entonces

1. $X \cap W \subseteq Y \cap Z$,
2. $X \cup W \subseteq Y \cup Z$.

Demostración Por hipótesis, suponemos que $X \subseteq Y$ y $W \subseteq Z$.
Sea x arbitrario. Tenemos que

$$\begin{aligned} x \in X \cap Y &\Longleftrightarrow (x \in X) \wedge (x \in W) && \text{(definición de } \cap) \\ &\Longrightarrow (x \in Y) \wedge (x \in Z) && \text{(porque por hipótesis } Y \subseteq Y \text{ y } W \subseteq Z) \\ &\Longrightarrow x \in (Y \cap Z) && \text{(definición de } \cap) \end{aligned}$$

COROLARIO 1

1. $(A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B)$,
2. $(A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C) \Longrightarrow A \subseteq B \cap C$,
3. $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq B) \Longrightarrow A \cup C \subseteq B$.

Demostración Sea $x \in (A \cap B)$ arbitrario. Por la definición de $\cap$ implica que $x \in A$ y $x \in B$. En particular, $x \in A$. Esto prueba que $(A \cap B) \subseteq A$. Ahora bien, si $x \in A$ entonces $(x \in A) \vee (x \in B)$ es una afirmación verdadera la cual es equivalente a $x \in (A \cup B)$, como queríamos probar.

PROPOSICIÓN 3 Se tienen las siguientes igualdades de conjuntos:

1. Idempotencia: $A \cap A = A$, $A \cup A = A$.
2. $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$
3. $A \cup U = U$, $A \cap U = A$
4. Conmutatividad: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
5. Asociatividad:
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C\,, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C\,.$$
6. Distributividad:
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,.$$

DEFINICIÓN (Diferencia de Conjuntos) La diferencia entre dos conjuntos A y B o el complemento relativo de B con respecto a A, es el conjunto que consiste en todos los elementos que pertenecen a A, pero no pertenencen a B. La diferencia entre A y B se denota por $A - B$ y está definido por
$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}\,.$$

DEFINICIÓN (Complemento) El complemento de un conjunto A, que se denota por A^c, esta definido por

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

En otras palabras, se cumple que

$$\boxed{A^c = U - A} \text{ y además que } \boxed{A - B = A \cap B^c}.$$

PROPOSICIÓN 4

1. Leyes de De Morgan:

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \quad \text{y} \quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

2. $(A^C)^C = A$.
3. $A \cap A^C = \varnothing$ y $A \cup A^C = U$.

Demostración Demostraremos una de las leyes de De Morgan. Sea $x \in U$ arbitrario. Se tiene que

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B)^C &\iff x \notin (A \cup B) && \text{(definición de conjunto complemento)}\\
&\iff \overline{x \in (A \cup B)} && \\
&\iff \overline{(x \in A) \vee (x \in B)} && \text{(definición de } \cup)\\
&\iff \overline{x \in A} \wedge \overline{x \in B} && \text{(Leyes de De Morgan de la lógica)}\\
&\iff (x \in A^C) \wedge (x \in B^C) && \text{(definición del complemnto)}\\
&\iff x \in (A^C \cap B^C) && \text{(definición de } \cap)
\end{aligned}$$

Como x es arbitrario, por definición de igualdad de conjuntos, se concluye que $(A \cup B)^C = A^c \cap B^C$.

EJEMPLO 12 Prueba que $A - B = (A \cup B) - B$.

Solución Usaremos las propiedades de las operaciones entre conjuntos vemos que

$$\begin{aligned}
(A \cup B) - B &= (A \cup B) \cap B^c\\
&= (A \cap B^c) \cup (B \cap B^c)\\
&= (A \cap B^c) \cup \varnothing\\
&= (A \cap B^c)\\
&= A - B
\end{aligned}$$

EJEMPLO 13 Usando algebra de conjuntos, demuestre que para conjuntos arbitrarios A y B se tiene:

$$(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$$

Solución Notemos que

$$\begin{aligned}
(A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap (A \cap C)^c \\
&= (A \cap B) \cap (A^c \cup C^c) \\
&= [(A \cap B) \cap A^c] \cup [(A \cap B) \cap C^c] \\
&= [(A \cap A^c) \cap B] \cup [A \cap (B \cap C^c)] \\
&= (\varnothing \cap B) \cup [A \cap (B - C)] \\
&= \varnothing \cup A \cap (B - C) \\
&= A \cap (B - C).
\end{aligned}$$

EJEMPLO 14 Si U es el conjunto universo, simplifique la expresión

$$(A \cap U)^c \cap (A - B)\,.$$

Solución Se tiene que

$$\begin{aligned}
(A \cap U)^c \cap (A - B) &= A^c \cap (A - B) \\
&= A^c \cap (A \cap B^c) \\
&= (A^c \cap A) \cap B^c \\
&= \varnothing \cap B^c \\
&= \varnothing
\end{aligned}$$

EJEMPLO 15 Demuestre usando álgebra de conjuntos que para conjuntos arbitrarios A y B se tiene:

1. $(A \cap B) \cup (A - B) = A$.
2. $(A - B) \cup B = A \cup B$.

Solución

1. Aplicando propiedades algebraicas de las operaciones se tiene:

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \cup (A - B) &= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \\
&= A \cap (B \cup B^c) \\
&= A \cap U \\
&= A.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(A-B)\cup B &= (A\cap B^c)\cup B\\ &= (A\cup B)\cap(B^c\cup B)\\ &= (A\cup B)\cap U\\ &= A\cup B.\end{aligned}$$

EJEMPLO 16 Simplificar usando álgebra de conjuntos $[B^c\cup(A-B^c)^c]\cap B$.

Solución Notemos que

$$\begin{aligned}[B^c\cup(A-B^c)^c]\cap B &= [B^c\cup(A\cap B)^c]\cap B\\ &= [B^c\cup(A^c\cup B^c)]\cap B\\ &= [(B^c\cup B^c)\cup A^c)]\cap B\\ &= (B^c\cup A^c)\cap B\\ &= (B^c\cap B)\cup(A^c\cap B)\\ &= \varnothing\cup(B\cap A^c)\\ &= B\cap A^c\\ &= B-A.\end{aligned}$$

EJEMPLO 17 Utilizando algebra de conjuntos demuestre la siguiente igualdad.

$$[A-(B\cap A^c)]\cap[(B-A)\cap A]^c = A$$

Solución Se tiene que

$$\begin{aligned}[A-(B\cap A^c)]\cap[(B-A)\cap A]^c &= [A\cap(B\cap A^c)^c]\cap[(B\cap A^c)\cap A]^c\\ &= [A\cap(B^c\cup A)]\cap[B\cap(A^c\cap A)]^c\\ &= A\cap(B\cap\varnothing)^c\\ &= A\cap(\varnothing)^c\\ &= A\cap U\\ &= A.\end{aligned}$$

EJEMPLO 18 Usando álgebra de conjuntos simplifique la siguiente expresión:

$$[B-(A-B)]-[(B-A)\cup(A\cup B)^c]\,.$$

Solución Primero, usamos la igualdad $A-B = A\cap B'$ para escribir las diferencias de conjuntos en términos de intersección y complemento.

$$
\begin{aligned}
[B-(A-B)]-[(B-A)\cup(A\cup B)^c] &= [B\cap(A\cap B^c)^c]\cap[(B\cap A^c)\cup(A\cup B)^c]^c\\
&= [B\cap(A^c\cup B)]\cap[(B\cap A^c)\cup(A^c\cap B^c)]^c\\
&= B\cap[A^c\cap(B\cup B^c)]^c\\
&= B\cap[A^c\cap U]^c\\
&= B\cap[A^c]^c\\
&= B\cap A.
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 19 Demuestre que si $A\cup C=B$, entonces

$$(B-A)-[(A^c-B)\cup C]=\varnothing\,.$$

Solución Usando álgebra de conjuntos vemos que

$$
\begin{aligned}
(B-A)-[(A^c-B)\cup C] &= (B-A)\cap[(A^c\cap B^c)\cup C]^c\\
&= (B-A)\cap[(A^c\cap B^c)^c\cap C^c]\\
&= (B-A)\cap[(A\cup B)\cap C^c]\\
&= [(B-A)\cap(A\cup B)]\cap C^c\\
&= (B-A)\cap C^c\\
&= (B\cap A^c)\cap C^c\\
&= B\cap(A^c\cap C^c)\\
&= B\cap(A\cup C)^c\\
&= B\cap B^c\\
&= \varnothing\,.
\end{aligned}
$$

DEFINICIÓN Dados dos conjuntos A y B definimos la diferencia simétrica

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\,.$$

En la lista de ejercicios se pide probar algunas propiedades con la diferencia simétrica.

3 Aplicaciones a encuestas

Hemos visto que la cardinalidad de un conjunto finito n(A) es el n´umero de elementos que posee.

PROPOSICIÓN 5 Sean A, B y C conjuntos arbitrarios finitos y $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$, las cardinalidades respectivas; entonces se satisfacen lo siguiente:

1. $n(\varnothing) = 0$.
2. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.
3. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

EJEMPLO 20 Sabiendo que $n(A) = 35$ y $n(B) = 40$, halle $n(A \cup B)$ si:

a) $n(A \cap B) = 8$

b) A y B son disjuntos, es decir, si $A \cap B = \varnothing$.

Solución

a) Usando la igualdad $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, se tiene:

$$n(A \cup B) = 35 + 40 - 8 = 67.$$

b) Si A y B son disjuntos entonces $n(A \cap B) = n(\varnothing) = 0$, luego se tiene

$$n(A \cup B) = 35 + 40 = 75.$$

EJEMPLO 21 Suponga que A y B son conjuntos que satisfacen que $n(A) = 5$, $n(B) = 8$ y $n(A \cup B) = 11$. Determine $n(A \cap B)$.

Solución Usando la parte (ii) del teorema se tiene que

$$\underbrace{n(A \cup B)}_{11} = \underbrace{n(A)}_{5} + \underbrace{n(B)}_{8} - n(A \cap B) \Longrightarrow 11 = 13 - n(A \cap B)$$

y despejando se obtiene que $n(A \cap B) = 13 - 11 = 2$.

EJEMPLO 22 En una delegación formada por 44 deportistas, encontramos algunos que participarán en las siguientes disciplinas: salto alto, 100 metros planos y salto con garrocha, la participación de ellos es la siguiente:

- 24 participan en salto alto
- 18 participan en salto alto y/o 100 metros, pero no en garrocha
- 25 participan en garrocha
- 7 participan en todas las disciplinas

- 9 participan en 100 metros, pero no en garrocha
- 12 no participan ni en salto alto ni en 100 metros
- 15 participan en salto alto, pero no en garrocha

a) Hacer un diagrama de Venn que muestre claramente la cardinalidad de los conjuntos.

b) Determine:

i. ¿Cuántos no participan en ninguna de las disciplinas?

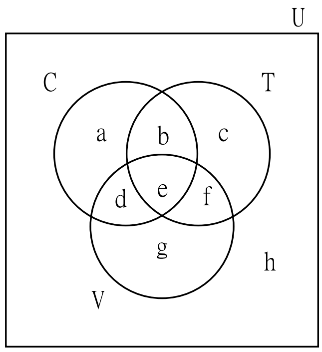
ii. ¿Cuántos deportistas participan en salto alto y garrocha?

iii. ¿Cuántos deportistas participan en más de un deporte?

Solución

Considere los conjuntos

$$
\begin{aligned}
S &= \{\text{alumnos que participan en salto alto}\}, \\
P &= \{\text{alumnos que participan en 100 metros planos}\}, \\
G &= \{\text{alumnos que participan en salto con garrocha}\}.
\end{aligned}
$$



Considere el siguiente diagrama de Venn

en donde cada uno de los sectores del diagrama de Venn ha sido denotado por una letra que representa la cardinalidad de cada uno de los sectores. La información dada en el problema se puede traducir en las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
a+b+c+d+e+f+g+h &= 44 && (1)\\
a+b+d+e &= 24 && (2)\\
a+b+c &= 18 && (3)\\
d+e+f+g &= 25 && (4)\\
e &= 7 && (5)\\
b+c &= 9 && (6)\\
g+h &= 12 && (7)\\
a+b &= 15 && (8)
\end{aligned}
$$

Remplazando (6) en (3) obtenemos que

$$18 = a + \underbrace{b+c}_{9} \Longrightarrow \boxed{a = 9}$$

Remplazando (8) en (3) obtenemos que

$$18 = \underbrace{a + b}_{15} + c \Longrightarrow \boxed{c = 3}$$

de donde se deduce que $\boxed{b = 3}$. De (2) usando los valores ya obtenidos se tiene que

$$d = 24 - a - b - e \Longrightarrow \boxed{d = 2}$$

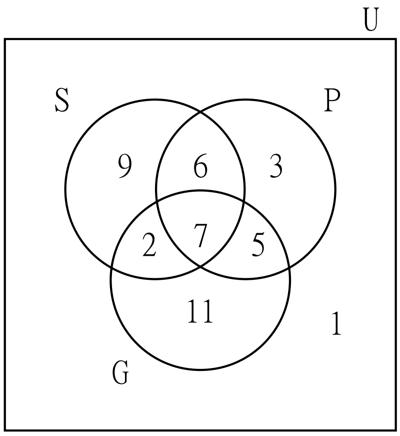
Si en (1) reemplazamos todos los valores encontrados y usando la ecuación (7) se deduce que

$$f = 44 - a - b - c - d - e - \underbrace{(g + h)}_{12} \Longrightarrow \boxed{f = 5}$$

Remplazando el valor de f en (4) se obtiene que

$$g = 25 - d - e - f \Longrightarrow \boxed{g = 11}$$

de donde se deduce que $h = 1$. Por lo tanto el diagrama de Venn es:



i. La cantidad de alumnos que no participa en ninguna de las disciplinas es $h = 1$

ii. La cantidad de alumnos que participa en salto alto y garrocha es $d + e = 2 + 7 = 9$

iii. La cantidad de deportistas que participan en más de un deporte es $b + d + e + f = 6 + 2 + 7 + 5 = 20$

4 Guía de Ejercicios

1. Considere el conjunto $I = \{2n + 1 \in \mathbb{Z} \mid n \in Z\}$ y el conjunto $J = \{m^2 \mid m \in I\}$. Demuestre que $J \subsetneq I$, es decir $J \subseteq I$ y $J \neq I$.

2. Demuestre que si $A \cup C = B$, entonces $(B \setminus A) \setminus [(A^C \setminus B) \cup C] = \varnothing$.

3. Emplear los teoremas del álgebra de conjuntos para probar las siguientes igualdades

   a) $(A \subset B) \Longleftrightarrow (B^C \subseteq A^C)$
   b) $A\Delta\varnothing = A$.
   c) $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.
   d) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$.
   e) $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus (A^C \cup C)$.
   f) $A \subseteq B \subseteq C \Longrightarrow C \setminus (B \setminus A) = A \cup (C \setminus B)$
   g) $B)(A \cap B^C) \cup (A^C \cap B) \Longleftrightarrow A = \varnothing$.

4. Sean A, B, C y D conjuntos. Emplear los teoremas del álgebra de conjuntos para probar que

   a) $(B \setminus A) \subseteq C \Longleftrightarrow C^C \subseteq (B^C \cup A)$
   b) $(B \setminus A) \subseteq C \Longleftrightarrow (D \setminus C) \subseteq (D \setminus B) \cup A$.
   c) $A \cup B = A \cap C \Longleftrightarrow (B \subseteq A) \wedge A \subseteq C$.

5. Sean $A, B \subseteq U$ y $C = (A \cup B)^C$. Probar que

$$(A\Delta B)\Delta C = A \cup B \cup C \Longleftrightarrow A \cap B = \varnothing\,.$$

6. Se realizó una encuesta a 95 estudiantes de enseñanza media, para saber a que dedican su tiempo libre:

   - 45 se dedican a ver televisión;
   - 53 a navegar por Internet;
   - 50 a salir con amigos;
   - 25 ven televisión y navegan por Internet;
   - 20 ven televisión y salen con sus amigos;
   - 30 navegan por Internet y salen con sus amigos;
   - 10 realizan las tres actividades.

   a) Represente la situación descrita en un diagrama de Venn sin dejar zonas vacías.
   b) ¿Cuántos estudiantes realizan solo una de estas actividades?
   c) ¿Cuántos estudiantes no realizan ninguna de estas actividades?

7. En un estudio de 120 consumidores realizado en un centro comercial, 80 consumidores indicaron que compran la marca A de cierto producto, 68 compran la marca B y 42 adquieren ambas. Determine la cantidad de consumidores participantes en el estudio y que compran:

   a) al menos una de estas marcas;

b) sólo una de estas marcas;

c) únicamente la marca A;

d) ninguna de estas marcas.

8. En un estudio reciente de 200 miembros de un club deportivo local, 100 miembros indicaron que ellos planean asistir a los siguientes Juegos Olímpicos de Verano, 60 comentaron que planean asistir a los siguientes Juegos Olímpicos de Invierno y 40 señalaron que planean asistir a ambos juegos. ¿Cuántos miembros del club piensan asistir:

   a) al menos a uno de los dos juegos?

   b) sólo a uno de los juegos?

   c) únicamente a los juegos de verano?

   d) a ninguno de los juegos?

9. A principios de los años setenta se hizo una encuesta a 120 residentes de una ciudad latinoamericana sobre su interés en los tres equipos del área más cercana a la ciudad. De éstos,

   - 40 seguían al equipo A,
   - 28 seguían al equipo B,
   - 31 seguían al equipo C,
   - 23 seguían al A y al B,
   - 19 seguían al equipo B y al equipo C,
   - 25 seguían al equipo A y al equipo C
   - 18 personas seguían a los tres equipos.

   a) ¿Cuántas de estas personas no seguian a equipo alguno?

   b) ¿Cuántos seguian al equipo A y al equipo C, pero no al equipo B?

10. De 1200 estudiantes de primer año en la Universidad de Stanford,

    - 582 tomaron física,
    - 627 tomaron filosofía,
    - 543 tomaron matemáticas,
    - 217 tomaron física y filosofía,
    - 307 tomaron física y matemática,
    - 250 tomaron matemática y filosofía,
    - 122 tomaron los tres cursos.

    ¿Cuántos no tomaron ninguno de los tres cursos?