Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2023

MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría

Solución Interrogación N° 2

1. Para cada una de las siguientes, escriba la negación y demuestre la proposición o su negación.

   (a) $\forall x \in \mathbb{R}(x > 2 \Rightarrow x \geq 3)$

   (b) $\forall x \in \mathbb{R}(x < 3 \vee \exists y \in \mathbb{R}(xy = 3))$

   (c) $\exists x \in \mathbb{R}(\forall y \in \mathbb{R}(x > y \Rightarrow x^2 < y^2))$

   Solución.

   (a) La negación es $\exists x \in \mathbb{R}(x > 2 \wedge x < 3)$. La negación es verdadera y se demuestra con un ejemplo: $x = \sqrt{5}$ cumple que $(x > 2 \wedge x < 3)$.

   (b) La negación es $\exists x \in \mathbb{R}(x \geq 3 \wedge \forall y \in \mathbb{R}(xy \neq 3))$. La proposición original es verdadera y se demuestra notando que si $x = 0$, se cumple $x < 3$ y si $x \neq 0$, entonces existe $y = \frac{3}{x} \in \mathbb{R}$ que satisface $xy = 3$.

   (c) La negación es $\forall x \in \mathbb{R}(\exists y \in \mathbb{R}(x > y \wedge x^2 \geq y^2))$. La proposición original es verdadera y se demuestra con un ejemplo. Si $x = 0$ entonces $x > y \Rightarrow x^2 = 0 < y^2$.

   Puntaje Pregunta 1.

   - 1 punto por la negación y 1 punto por la demostración de la negación.
   - 1 punto por la negación y 1 punto por la demostración de la proposición.
   - 1 punto por la negación y 1 punto por la demostración de la proposición.

2. Dado $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$ determine el resto al dividir P por el polinomio D donde

   (a) $D(x) = x^2 - 2x + 3$,

   (b) $D(x) = x - 1$,

   (c) $D(x) = x - 3$.

Solución. **Ítem 2a.** El método de división de polinomios nos da

$$
\begin{array}{rrrrr}
\big(x^4 & -2x^3 & -3x^2 & +8x & -4\big) \div \left(x^2 - 2x + 3\right) = x^2 - 6 + \dfrac{-4x+14}{x^2-2x+3} \\
-x^4 & +2x^3 & -3x^2 & & \\
\hline
 & & -6x^2 & +8x & -4 \\
 & & 6x^2 & -12x & +18 \\
\hline
 & & & -4x & +14
\end{array}
$$

Entonces, el resto R al dividir por D dado por $D(x) = x^2 - 2x + 3$ es $R(x) = -4x + 14$.

Ítem 2b y 2c. Por el teorema del resto, sabemos que el resto al dividir por el factor $x - \alpha$ es $P(\alpha)$. Consecuentemente,

- $P(1) = 0$ (es decir el resto es 0),
- $P(3) = 20$.

Alternativamente, se puede realizar la división por polinomios o usar el esquema de Horner, por ejemplo para $\alpha = 3$:

	1	-2	-3	8	-4
3		3	3	0	24
	1	1	0	8	**20**

Puntaje Pregunta 2. 3 para ítem 2a, 1.5 para cada de los otros ítemes.