Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2024

MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría

Solución Interrogación N° 7

1. a) Determine todas las raíces cúbicas de la unidad. Luego encuentre un polinomio cuadrático con coeficientes reales tal que dos de sus raíces sean raíces cúbicas de la unidad.

   b) Resolver la ecuación trigonométrica
$$\cos(x) = \operatorname{sen}(2x)\,.$$

Solución.

a) Se piden todos los $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^3 = 1$.

Cada una de las 3 soluciones z_k tienen módulo 1 y argumento $\theta_k = \dfrac{2\pi k}{3}$, con $k = 0, 1, 2$.

Por lo que

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos(0) + i\operatorname{sen}(0) = 1, \\ z_1 &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_2 &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,. \end{aligned}$$

Por lo que $(x - z_1)(x - z_2) = (x^2 - (z_1 + z_2)x + (z_1 \cdot z_2)) = x^2 + x + 1$ es un polinomio cuadrático con coeficientes reales con dos raíces que son raíces cúbicas de la unidad.

b) Tenemos que

$$\begin{aligned} \cos(x) = \operatorname{sen}(2x) &\implies \cos x = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) \\ &\implies \cos(x) - 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = 0 \\ &\implies \cos(x)(1 - 2\operatorname{sen}(x)) = 0 \\ &\implies \cos(x) = 0 \quad \text{o} \quad (1 - 2\operatorname{sen} x) = 0 \end{aligned}$$

En la ecuación $\cos x = 0$ obtenemos las soluciones $x_k = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ y en la ecuación $\operatorname{sen}(x) = \dfrac{1}{2}$ obtenemos las soluciones

$$\begin{aligned} x_k &= \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_k &= \pi - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 1,5 puntos por obtener las tres raíces cúbicas de la unidad.

CC 2. 1,5 puntos por encontrar un polinomio cuadrático con coefientes reales que tiene dos raíces de la unidad: $x^2 + x + 1$ o $(x-1)^2$.

CC 3. 1,5 puntos por reducción la ecuación a $\cos(x) = 0$ o $\operatorname{sen}(x) = 1/2$.

CC 4. 1,5 puntos por hallar las soluciones de la ecuación.

2. Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Luego, encuentre la recta tangente a esta circunferencia que pase por el punto $(0,1)$.

Solución. Los tres puntos deben estar a igual distancia del centro (h,k) por lo que tenemos las siguientes igualdades:

$$\sqrt{(h)^2+(k)^2} = \sqrt{(h-1)^2+(k)^2} \quad \text{y} \quad \sqrt{(h)^2+(k)^2} = \sqrt{(h)^2+(k-1)^2}$$

Elevando al cuadrado y reduciendo términos se obtiene $0=-2h+1$ y $0=-2k+1$, es decir, el centro es $(h,k)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Ahora, calculando la distancia respecto el $(0,0)$ se obtiene rápidamente que el radio es $r=\sqrt{\frac{1}{2}}$. Luego, la ecuación es

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\,.$$

Dado los puntos $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ y $(0,1)$, la pendiente de este radio es $\dfrac{1-\frac{1}{2}}{0-\frac{1}{2}}=-1$ y por ello la pendiente de la tangente en ese punto es 1. Luego, la recta tangente es $y-1=1(x-0)$, es decir, $y=x+1$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 3 puntos por encontrar la ecuación de la circunferencia.

CC 2. 1,5 puntos por hallar pendiente del radio que pasa por $(0,1)$.

CC 3. 1,5 puntos por encontrar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia que pasa por $(0,1)$.