PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SEGUNDO SEMESTRE DE 2022

MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría

Solución Interrogación N° 3

1. *a*) Pruebe que $\tan(\arccos(x)) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ para $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

   b) Use el inciso *a*) para calcular el valor de $\tan\left(\arccos\left(\dfrac{5}{13}\right) + \arctan\left(\dfrac{4}{5}\right)\right)$.

Solución.

a) Sea $\alpha = \arccos(x)$. Entonces, vemos que

$$\tan(\arccos(x)) = \tan(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}\,.$$

Note que α se encuentra en el intervalo $[0,\pi]$. Como el $\operatorname{sen}(\alpha)$ es no negativo, el signo $+$ es la opción correcta. Si sustituimos $\alpha = \arccos(x)$ en la ecuación de arriba y las propiedades de cancelación $\cos(\arccos(x)) = x$, obtenemos

$$\tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,.$$

Puntaje Pregunta 1a).

- 1 punto por obtener que $\tan(\alpha) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}/\cos(\alpha)$.
- 1 punto por argumentar que la opción correcta es con el signo $+$.
- 1 punto por utilizar la propiedad de cancelación y obtener la fórmula $\tan(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}/x$.

b) Tomando $\alpha = \arccos\left(\dfrac{5}{13}\right)$ y $\beta = \arctan\left(\dfrac{4}{5}\right)$ y usando las propiedades de cancelación vemos que $\tan(\beta) = \tan(\arctan(4/5)) = 4/5$ y el inciso *a*) nos da que

$$\tan(\alpha) = \tan(\arccos(5/13)) = \frac{\sqrt{1 - \left(\dfrac{5}{13}\right)^2}}{\dfrac{5}{13}} = \frac{12}{5}\,.$$

Entonces, obtenemos que

$$\tan\left(\arccos\left(\frac{5}{13}\right) + \arctan\left(\frac{4}{5}\right)\right) \quad = \quad \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)} = \frac{\dfrac{12}{5} + \dfrac{4}{5}}{1 - \dfrac{12}{5}\cdot\dfrac{4}{5}} = -\frac{80}{23}\,.$$

Puntaje Pregunta 1a).

- 1 punto por calcular $\tan(\alpha) = 12/5$.
- 1 punto por calcular $\tan(\beta) = 4/5$.
- 1 punto por calcular $\tan(\alpha+\beta) = -80/23$.

2. *a*) Resuelva las siguientes ecuaciones:

(i) $\operatorname{sen}(x) = \dfrac{1}{2}$ (ii) $\operatorname{sen}(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (iii) $\operatorname{sen}(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica

$$4\operatorname{sen}^3(x) - 2\operatorname{sen}^2(x) - 2\operatorname{sen}(x) + 1 = 0\,.$$

Solución.

a) (i) La ecuación $\operatorname{sen}(x) = 1/2$ tiene solución básica $\alpha_1 = \pi/6$, entonces el conjunto solución es:

$$S_1 = \left\{k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\,.$$

(ii) La ecuación $\operatorname{sen}(x) = \sqrt{2}/2$ tiene solución básica $\alpha_2 = \pi/4$, entonces el conjunto solución es:

$$S_2 = \left\{k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\,.$$

(iii) La ecuación $\operatorname{sen}(x) = -\sqrt{2}/2$ tiene solución básica $\alpha_3 = 7\pi/4$, entonces el conjunto solución es:

$$S_3 = \left\{k\pi + (-1)^k\frac{7\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\,.$$

b) Haciendo el cambio de variables $u = \operatorname{sen}(x)$ vemos que la ecuación es equivalente con

$$4u^3 - 2u^2 - 2u + 1 = 0 \Longleftrightarrow 2u^2(2u-1) - (2u-1) = 0 \Longleftrightarrow (2u-1)(2u^2-1) = 0$$

Entonces, $2u - 1 = 0$ o $2u^2 - 1 = 0$ o equivalentemente $u = \dfrac{1}{2}$ o $u = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ o $u = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Estas ecuaciones son las ecuaciones del inciso *a*) por lo que el conjunto solución es $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Puntaje Pregunta 2a).

- 1 punto por resolver la ecuación (i).
- 1 punto por resolver la ecuación (ii).
- 1 punto por resolver la ecuación (iii).

Puntaje Pregunta 2b).

- 2 punto por reducir la ecuación $4u^3 - 2u^2 - 2u + 1 = (2u-1)(2u^2-1)$
- 1 punto por obtener las ecuaciones (i), (ii) y (iii).

3. Considera la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 36 = 0$ y los puntos A y B que están sobre la circunferencia y tienen abscisa $x = 2$.

   a) Determine las coordenadas de los puntos A y B, el centro de la circunferencia y su radio. [**2 puntos**]

   b) Determine las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia en el punto $(2, 2)$. [**4 puntos**]

Solución.

a) Haciendo $x = 2$ en la ecuación de la circunferencia obtenemos que

$$y^2 - 12y + 20 = 0 \Longleftrightarrow (y - 10)(y - 2) = 0\,.$$

Entonces los puntos tienen coordenadas $A(2, 2)$ y $B(2, 10)$. Completando cuadrado vemos que la ecuación de la circunferencia es equivalente a

$$x^2 + y^2 - 10x - 12y + 36 = 0 \Longleftrightarrow (x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 25$$

Luego, la circunferencia está centrada en $(5, 6)$ y tiene radio $r = 5$.

b) La familia de rectas L_A que pasan por A tienen ecuación

$$y - 2 = m(x - 2) \Longleftrightarrow mx - y - 2m + 2 = 0$$

La recta es tangente a la circunferencia si la distancia al centro es igual al radio, es decir

$$d((5,6), L_A) = 5 \Longleftrightarrow \frac{|5m - 6 - 2m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 5 \Longleftrightarrow (3m-4)^2 = 25(m^2+1) \Longleftrightarrow 16m^2+24m+9 = 0$$

El discriminante de esta ecuación es cero y la única solución es $m = -\dfrac{3}{4}$. Entonces la recta tangente a la circunferencia que pasa por A es

$$-\frac{3}{4}x - y - 2\left(-\frac{3}{4}\right) + 2 = 0 \Longleftrightarrow \boxed{3x + 4y - 14 = 0}\,.$$

Puntaje Pregunta 3a).

- 1 punto obtener las coordenadas de los puntos A y B
- 1 punto por obtener las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia.

Puntaje Pregunta 3b).

- 1 punto por considerar la familia de rectas que pasan por A.
- 1 punto por usar la propiedad que la recta es tangente si está a distancia igual al radio del centro de la circunferencia.
- 1 punto por obtener el valor de m.
- 1 punto por obtener la ecuación de la recta tangente.

4. Considera la parábola $y = 4x^2 - 4x + 1$ y la recta L de ecuación $4x - y + 1 = 0$.

   a) Determine los puntos A y B en donde se intersectan la parábola y la recta L.
   [**2 puntos**]

   b) Encuentre la recta tangente a la parábola que tiene la misma pendiente que la recta L y el punto de tangencia T.
   [**4 puntos**]

Solución.

a) Resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 4x^2 - 4x + 1 & = & y \\ 4x - y + 1 & = & 0 \end{array}\right|$$

Igualando obtenemos que

$$4x + 1 = 4x^2 - 4x + 1 \Longrightarrow 0 = 4x^2 - 8x \Longrightarrow 0 = 4x(x-2) \Longrightarrow x = 0 \quad \text{o} \quad x = 2\,.$$

Por lo que las coordenadas de los puntos son $A(0,1)$ y $B(2,9)$.

b) La recta L tiene pendiente $m = 4$, la familia de rectas de pendiente 4 es $y = 4x + n$. Sustituyendo en la ecuación de la parábola obtenemos

$$4x + n = 4x^2 - 4x + 1 \Longrightarrow 0 = 4x^2 - 8x + (1-n)$$

Para que la recta sea tangente exigimos que el discriminante de esta última ecuación sea 0

$$\Delta = 0 \Longleftrightarrow (-8)^2 - 4(4)(1-n) = 0 \Longleftrightarrow 48 + 16n = 0 \Longleftrightarrow n = -3$$

Entonces, la ecuación de la recta tangente es $\boxed{y = 4x - 3}$. Intersectando la parábola con la recta tangente se tiene

$$4x - 3 = 4x^2 - 4x + 1 \Longleftrightarrow 0 = 4x^2 - 8x + 4 \Longleftrightarrow 0 = x^2 - 2x + 1 \Longleftrightarrow 0 = (x-1)^2$$

lo que implica que $x = 1$, luego $y = 1$, por lo tanto $T(1,1)$.

Puntaje Pregunta 4a).

- 2 puntos por encontrar las coordenadas de los puntos A y B.

Puntaje Pregunta 4b).

- 1 punto por considerar la familia de rectas con pendiente 4.
- 1 punto por obtener la ecuación cuadrática $4x^2 - 8x + (1-n) = 0$
- 1 punto por imponer $\Delta = 0$ y el valor de $n = -3$.
- 1 punto por obtener las coordenadas del punto de tangencia T.