Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2024

MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría

Solución Interrogación N° 3

1. Sean $A, B \subseteq U$ conjuntos. Demuestre que:

   a) $A \subseteq B \Longleftrightarrow B^c \subseteq A^c$.

   b) $(B \backslash A) \subseteq C \Longleftrightarrow C^c \subseteq (B^c \cup A)$

   Solución.

   a) $A \subseteq B \Longleftrightarrow (x \in A \Longrightarrow x \in B) \Longleftrightarrow (x \notin B \Longrightarrow x \notin A) \Longleftrightarrow (x \in B^c \Longrightarrow x \in A^c) \Longleftrightarrow B^c \subseteq A^c$

   b) $(B \backslash A) \subseteq C \Longleftrightarrow C^c \subseteq (B \backslash A)^c \Longleftrightarrow C^c \subseteq (B \cap A^c)^c \Longleftrightarrow C^c \subseteq (B^c \cup A)$

   Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

   CC 1. 1,5 puntos por obtener la equivalencia $(x \in A \Longrightarrow x \in B) \Longleftrightarrow (x \notin B \Longrightarrow x \notin A)$.

   CC 2. 1,5 puntos por obtener la equivalencia $(x \notin B \Longrightarrow x \notin A) \Longleftrightarrow (x \in B^c \Longrightarrow x \in A^c)$.

   CC 3. 1,5 puntos por usar el inciso a) y obtener $(B \backslash A) \subseteq C \Longleftrightarrow C^c \subseteq (B \backslash A)^c$.

   CC 4. 1,5 puntos por obtener que $(B \backslash A)^c = (B^c \cup A)$.

2. Sean $U = \mathbb{Z}$, el conjunto universo, $A = \{-3, -2, -1, 5\}$ y B el conjunto de los números pares. Se define la operación binaria $\star$ en U de la siguiente manera:

$$a \star b = a + 5b$$

para todo $a, b \in U$. Determine justificadamente el valor de verdad de cada proposición:

a) Si $a, b \in B$ entonces $a \star b \in B$.

b) $\forall x \in A, \exists y \in U,\ x + y = 0$.

Solución.

a) La proposición es verdadera ya que si $a, b \in B$, entonces son números pares. Esto es $a = 2m$ para algún $m \in U$ y $b = 2n$ para algún $n \in U$. Por lo que $a \star b = 2m \star 2n = 2m + 5 \cdot 2n = 2(m + 5n)$ que es par, por lo que $a \star b \in B$.

b) La proposición es verdadera ya que $\forall x \in A, \exists y \in U,\ x + y = 0$ significa que todo los elementos de A tiene inverso aditivo en U lo cual es verdadero.
También se puede mostrar todos los casos:
- $x = -3$, se tiene $y = 3 \in U$ tal que $x + y = 0$.
- $x = -2$, se tiene $y = 2 \in U$ tal que $x + y = 0$.
- $x = -1$, se tiene $y = 1 \in U$ tal que $x + y = 0$.
- $x = 5$, se tiene $y = -5 \in U$ tal que $x + y = 0$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 1,5 puntos por obtener que si $a, b \in B$ entonces $a = 2m$ y $b = 2n$ para algún $n, m \in \mathbb{Z}$.

CC 2. 1,5 puntos por demostrar que $a \star b = 2(m + 5n)$ y concluir que es par.

CC 3. 3 puntos por demostar que el inciso b) es verdadero.