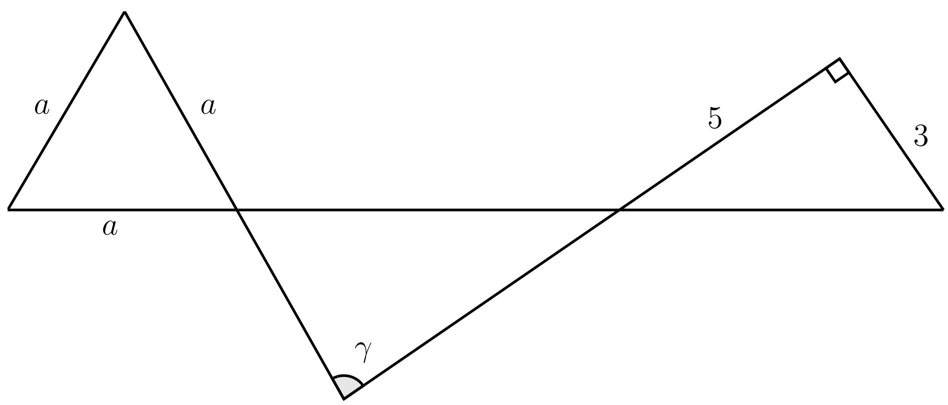
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2023

MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría

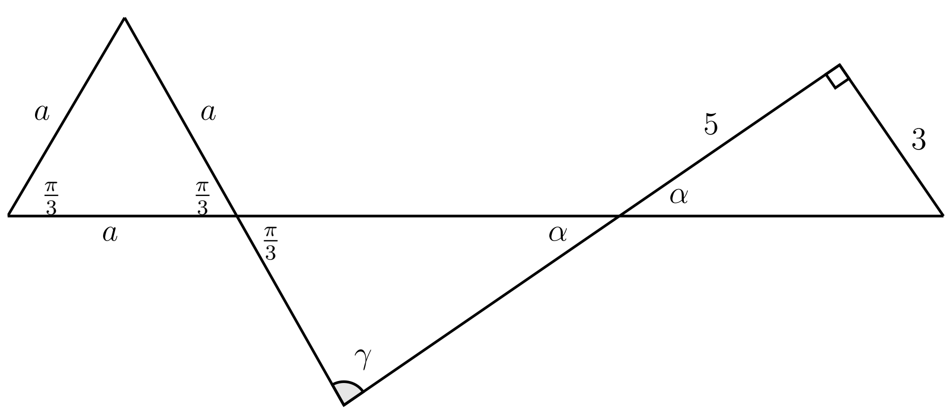
Solución Interrogación N° 5

1. Considere la siguiente figura



Calcule $\tan(\gamma)$ y simplifique lo más posible.

Solución. Identificando algunos ángulos auxiliares, tenemos



Entonces

$$\begin{aligned}
\tan(\gamma) &= \tan\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) \\
&= \frac{\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \tan(\alpha)}{1 + \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\tan(\alpha)} \\
&= \frac{-\sqrt{3} - \frac{3}{5}}{1 - \frac{3\sqrt{3}}{5}} \\
&= \frac{-5\sqrt{3} - 3}{5 - 3\sqrt{3}} \\
&= \frac{(5\sqrt{3} + 3)(5 + 3\sqrt{3})}{27 - 25} \\
&= \frac{60 + 34\sqrt{3}}{2} \\
&= 30 + 17\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Puntaje*:* 2 puntos por determinar el ángulo α, 2 puntos usar o escribir la fórmula de tangente de la diferencia y 2 puntos por el desarrollo y el resultado correcto.

2. Demuestre las siguientes dos identitades

   (a) $3\operatorname{sen}^3 x \csc x + \cos^2 x + 2\cos(-x)\cos x = 3$

   (b) $\operatorname{sen}(3x) = 3\operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x$

   Solución.

   (a) Con $\csc x = (\operatorname{sen} x)^{-1}$, y $\cos(-x) = \cos x$ vemos que

   $$3\operatorname{sen}^3 x \csc x + \cos^2 x + 2\cos(-x)\cos x = 3\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2\cos^2 x = 3(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = 3.$$

   (b) Escribiendo $\operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}(2x + x)$ y usando la fórmula de suma de ángulos vemos que

   $$\begin{aligned} \operatorname{sen}(3x) &= \operatorname{sen}(2x + x) = \operatorname{sen}(2x)\cos x + \cos(2x)\operatorname{sen} x \\ &= 2\operatorname{sen} x \cos^2 x + (\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen} x \\ &= 3\operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x. \end{aligned}$$

   Puntaje: 3 por cada ítem (en 2a: 1 punto por cos es par, 1 punto por identitad fundamental, 1 punto por desarrolo y resultado correcto; en 2b: 1 punto por fórmula suma seno, 1 punto por fórmula suma coseno, 1 punto por desarrollo y resultado correcto;)