Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2024

MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría

Solución Interrogación N° 1

1. a) Demuestre que la proposición $p \Rightarrow q$ es lógicamente equivalente a la proposición $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$

   b) Dada la proposición $p \Rightarrow q$ escrita en palabras:

   > "Si el último dígito de un número (de más de dos dígitos) termina en cero, entonces el número es divisible por 5."

   Escriba en palabras la proposición lógicamente equivalente $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$.

   Solución.

   a) Haciendo la tabla de verdad nos damos cuenta que son lógicamente equivalentes

p	q	$\overline{q}$	$\overline{p}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V

   b) Si un número no es divisible por 5 entonces el número no tiene a cero como último dígito.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 2 puntos por realizar la tabla de verdad de las proposiciones involucradas: $p \Longrightarrow q$ y $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$.

CC 2. 1 punto por concluir que las proposiciones son lógicamente equivalentes

CC 3. 1,5 puntos por escribir en palabras la proposición $\overline{q}$.

CC 4. 1,5 puntos por escribir en palabras la proposición $\overline{p}$.

2. a) Sin usar tablas de verdad, demuestre que las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes:

$$(f \wedge \overline{g}) \Rightarrow (h \wedge \overline{h}) \qquad \text{y} \qquad f \Rightarrow g\,.$$

b) Demuestre, explicitando el tipo de demostración que está utilizando, la proposición del inciso 2a) (puede usar la versión reducida) en donde:

- f: Los números naturales m y n cumplen que $n + 2n^2 = m + m^2$.
- g: n es un número par.

Solución.

a) Solo usando tautologías se tiene:

$$\begin{aligned}
(f \wedge \overline{g}) \Rightarrow (h \wedge \overline{h}) &\equiv \overline{(f \wedge \overline{g})} \vee (h \wedge \overline{h}) \\
&\equiv \overline{(f \wedge \overline{g})} \vee F \\
&\equiv \overline{(f \wedge \overline{g})} \\
&\equiv (\overline{f} \vee \overline{\overline{g}}) \\
&\equiv (\overline{f} \vee g) \\
&\equiv f \Rightarrow g
\end{aligned}$$

b) Utilizando contradicción (también funciona contrarrecíproca).

Por contradicción suponemos n es impar. Luego, como todo múltiplo de 2 es par, $2n^2$ es par y la suma $n + 2n^2$ es impar. Por otro lado, $m + m^2 = m(m + 1)$ que es la multiplicación de dos números consecutivos, donde siempre uno debe ser par. Así, $m + m^2$ siempre es par.

Llegamos a la contradicción porque si $n + 2n^2 = m + m^2$, entonces un número impar debe ser igual a uno par, lo cual es imposible (la igualdad no se cumple, argumentando la contrarrecíproca).

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 3 puntos por demostrar que las proposiciones son logicamente equivalentes usando propiedades.

CC 2. 1 punto por usar la demostración por contradicción suponiendo que n es impar y por llegar a una contradicción.

CC 3. 1 punto por mostrar que $n + 2n^2$ es impar.

CC 4. 1 punto por mostrar que $m + m^2$ es par.