Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2023

MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría

Solución Interrogación N° 2

1. Sean A, B, C tres conjuntos en el universo U. Usando las reglas de operaciones con conjuntos (conmutatividad, de Morgan, ...), pruebe las siguientes afirmaciones:

   (a) $(A \cap B) - C = B - (A^c \cup C) = B \cap (A - C)$,

   (b) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

   (c) Si $(A \cap B) \subseteq C$ entonces $[B \cap (A - C)]^c = U$

Solución. **Ítem 1a** Usando $X - Y = X \cap Y^c$ para cualquier conjuntos X, Y vemos que

$$\begin{aligned}(A \cap B) - C &= (A \cap B) \cap C^c = (B \cap A) \cap C^c = B \cap (A \cap C^c) \\ &= B \cap (A^c \cup C)^c = B - (A^c \cup C)\end{aligned}$$

donde hemos usado también conmutatividad $A \cap B = B \cap A$, asociatividad $(B \cap A) \cap C^c = B \cap (A \cap C^c)$, regla de De Morgan y doble complemento $(A^c \cup C)^c = A^c \cup (C^c)^c = A^c \cup C$. Finalmente, usando los mismos argumentos vemos que por definición de la diferencia, $(A \cap B) - C = B \cap (A \cap C^c) = B \cap (A - C)$.

Ítem 1b Tenemos que

$$(A \cup B) - C = (A \cup B) \cap C^c = (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c) = (A - C) \cup (B - C)$$

donde hemos usado la definición de diferencia y la distributividad.

Ítem 1c Primero notamos que demostrar $X^c = U$ es equivalente a demostrar que $X = \emptyset$. Por parte 1a tenemos que $B \cap (A - C) = (A \cap B) - C$. Considerando la hípotesis $A \cap B \subseteq C$ vemos que

$$(A \cap B) - C = (A \cap B) \cap C^c \subseteq C \cap C^c = \emptyset.$$

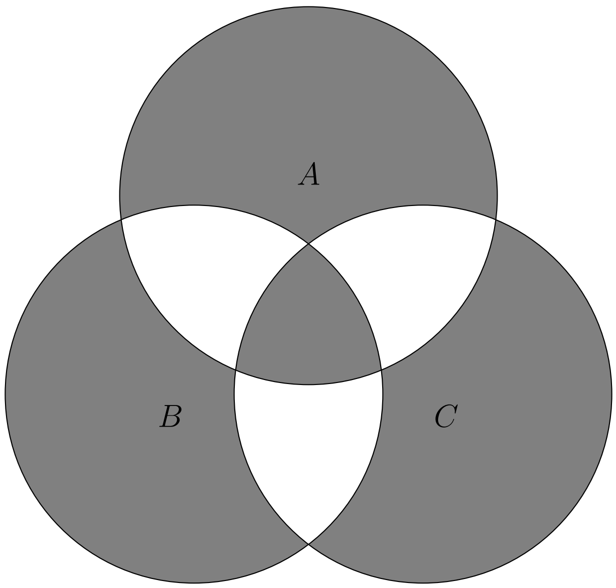
Puntaje Pregunta 1.

- 3 puntos para 1a (0.5pts para definición dif., asoc., conm. de Morgan, doble complemento, cálculo)
- 1 punto para 1b (0.5pts para definición dif, y 0.5pts pts para regla distributividad)
- 2 puntos para 1c (0.5pts para realizar que se puede demostrar $B \cap (A - C) = \emptyset$, 0.5pts para usar primera parte o demostración alternativa. 1pt para aplicar $X \subseteq Y$ implica $X \cap Z \subseteq Y \cap Z$.)

2. Considere A, B y C conjuntos cualquiera y recuerde que $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Represente $(A\Delta B)\Delta C$ con un diagrama de Venn y demuestre (el diagrama no es suficiente) que

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

Solución.



Notemos primero que

$$\begin{aligned}
(A\Delta B) &= (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \\
(A\Delta B)^c &= (A \cap B^c)^c \cap (A^c \cap B)^c \\
&= (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c) && \text{DeMorgan} \\
&= (A^c \cap A) \cup (A^c \cap B^c) \cup (B \cap A) \cup (B \cap B^c) && \text{distributividad} \\
&= (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B) && \text{eliminando vacíos}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(A\Delta B)\Delta C &= [((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) \cap C^c] \cup [C \cap ((A^c \cap B^c) \cup (A \cap B))] \\
&= [(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c)] \cup [(C \cap A^c \cap B^c) \cup (C \cap A \cap B)] && \text{distributividad} \\
&= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (C \cap A^c \cap B^c) \cup (C \cap A \cap B) && \text{asociatividad} \\
&= [(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C)] \cup [(C \cap A^c \cap B^c) \cup (C^c \cap A^c \cap B)] && \text{conmutatividad} \\
&= [A \cap ((B^c \cap C^c) \cup (B \cap C))] \cup [((C \cap B^c) \cup (C \cap B^c)) \cap A^c] && \text{distributividad} \\
&= [A \cap (B\Delta C)^c] \cup [(B\Delta C) \cap A^c] && \text{anterior} \\
&= A\Delta(B\Delta C)
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 1.

- 2 pts por el diagrama de Venn.
- 4 pts por la demostración.