Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2024

MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría

Solución Examen

1. Dados los conjuntos

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1\right\} \text{ y } B = \left\{y \in \mathbb{R} : \frac{1}{y} < \frac{1}{2}\right\}.$$

a) Determine el valor de verdad de la proposición

$$\forall\, x \in A\; \exists\, y \in B \text{ tal que } |x - y| < 1.$$

b) Calcule $A \cap B^c$.

Solución.

a) Resolviendo la inecuación $x^2 \leq 1$ obtenemos que $A = [-1, 1]$.
Resolvemos la inecuación $\dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{2}$ obtenemos que $B = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.
La proposición es falsa porque $x = 1 \in A$ y todos los puntos de B están a distancia mayor que 1 de x.

b) $B^c = [0, 2]$ luego $A \cap B^c = [0, 1]$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 1,5 puntos por obtener que $A = [-1, 1]$.

CC 2. 1,5 puntos por obtener que $B = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

CC 3. 1,5 puntos por mostrar que la proposición es falsa.

CC 4. 1,5 puntos por determinar $A \cap B^c = [0, 1]$.

2. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n - 1$ es divisible por 3.

   Solución. Usaremos inducción. Sea $p(n) = 4^n - 1$.

   - $p(1)$ es verdad ya que $4^1 - 1 = 3$, es divisible por 3.
   - Ahora queremos demostrar $p(n) \Rightarrow p(n+1)$. Es decir suponemos $p(n)$ es verdad (H.I). Esto es $4^n - 1$ es divisible por 3.
   - Queremos demostrar $p(n+1)$, es decir que $4^{n+1} - 1$ es divisible por 3.

     $$4^{n+1} - 1 = 4^n \cdot 4 - 1 = 4^n(3+1) - 1 = (4^n \cdot 3) + (4^n - 1)$$

     Vemos que $(4^n \cdot 3)$ es un múltiplo de 3 y $(4^n - 1)$ es múltiplo de 3 por hipótesis de inducción(H.I). La suma de múltiplos de 3 es múltiplo de 3, por lo que hemos demostrado $p(n+1)$.
   - E principio de inducción nos permite decir entonces que $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n - 1$ es divisible por 3.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 1,5 puntos por demostrar el caso base.

CC 2. 1,5 puntos por definir $P(n)$ y escribir $P(n+1)$.

CC 3. 3 puntos por mostrar que $4^{n+1} - 1$ es divisible por 3.

3. Se tiene el polinomio

$$p(x) = x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{31}{36}x - \frac{5}{36}$$

Se sabe que una de sus raíces, γ, es la suma de las otras dos raíces, α y β. Es decir $\gamma = \alpha + \beta$. Encuentre γ.

Solución. Notemos que

$$x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{31}{36}x - \frac{5}{36} = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x + \alpha\beta\gamma$$

por lo que $\alpha + \beta + \gamma = \frac{5}{3}$. Como $\gamma = \alpha + \beta$, se obtiene que $\gamma = \frac{5}{6}$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 3.

CC 1. 2 puntos por obtener la igualdad $x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{31}{36}x - \frac{5}{36} = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

CC 2. 2 puntos por deducir que $\alpha + \beta + \gamma = \frac{5}{3}$

CC 3. 2 puntos por obtener el valor de $\gamma = \frac{5}{6}$.

4. Encuentre todas las soluciones complejas del polinomio

$$p(z) = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\,.$$

Solución. Notemos que $z^7 - 1 = (z-1)p(z)$. Entonces las raíces de $p(z)$ serán las raíces del polinomio $z^7 - 1$, quitando la raíz del polinomio $z - 1$. Las raíces del polinomio $z^7 - 1$ son justamente las raíces séptima de la unidad, es decir:

$$z_k = \operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi}{7}\right)$$

con $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pero cuando $k = 0$, $z_0 = 1$, que no es raíz de $p(z)$, pues $p(1) = 7$. Así, las raíces del polinomio $p(z)$ son:

$$z_k = \operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi}{7}\right)$$

con $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 4.

CC 1. 2 puntos por obtener que $p(z)(z-1) = z^7 - 1$.

CC 2. 3 puntos por hallar las raíces séptima de la unidad.

CC 3. 1 punto por descartar la raíz de la unidad $z_0 = 1$.

5. Demuestre que

$$\cos(\operatorname{arcsen}(x)) + \operatorname{sen}(2\arccos(x)) = (1+2x)\sqrt{1-x^2}\,.$$

Solución. Digamos que $\alpha = \operatorname{arcsen}(x)$ con $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, por lo que $x = \operatorname{sen}(\alpha)$ y por tanto también $\sqrt{1-x^2} = \cos(\alpha)$. Además, usando la identidad del seno del ángulo doble se tiene:

$$\operatorname{sen}(2\arccos(x)) = 2\operatorname{sen}(\arccos(x))\cos(\arccos(x)) = 2x\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} = 2x\sqrt{1-x^2}\,.$$

Así, concluimos que:

$$\cos(\operatorname{arcsen}(x)) + \operatorname{sen}(2\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} + 2x\sqrt{1-x^2} = (1+2x)\sqrt{1-x^2}\,.$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 5.

CC 1. 1,5 puntos por obtener que $\cos(\operatorname{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

CC 2. 1,5 puntos por obtener que $\operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

CC 3. 1,5 puntos por obtener que $\operatorname{sen}(2\arccos(x)) = 2\operatorname{sen}(\arccos(x))\cos(\arccos(x))$.

CC 4. 1,5 puntos por deducir la igualdad a partir de las igualdades de los criterios de corrección 1, 2 y 3.

6. Encuentre la ecuación de la hipérbola cuya asíntota de pendiente positiva forma un ángulo de $60°$ respecto el eje X y con vértices $(\pm 1, 0)$.

Solución. Como los vértices son $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, se tiene que el centro es el origen $(0, 0)$. Como además los vértices están sobre el eje X, entonces la hipérbola es del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en donde las asíntotas son: $y = \frac{\pm bx}{a}$. Además, como la recta $y = \frac{bx}{a}$ forma un ángulo de $60°$ con el eje X, se tiene que

$$\frac{b}{a} = \tan(60°) = \sqrt{3}\,.$$

Luego, $b^2 = 3a^2$. Finalmente, como el vértice $(1, 0)$ está sobre la hipérbola, entonces $\frac{1}{a^2} - 0 = 1$, por lo que $a^2 = 1$ y $b^2 = 3$. Se concluye que la hipérbola es:

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1\,.$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 6.

CC 1. 2 puntos por deducir que la hipérbola es del tipo: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

CC 2. 2 puntos por obtener que $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$.

CC 3. 2 puntos por obtener los valores de $a^2 = 1$ y $b^2 = 3$.