LÓGICA

1 Introducción

La palabra lógica proviene del griego “logos”, que significa en griego antiguo “pensamiento” o “razón”, otras acepciones de la palabra logos son “palabra” o “conocimiento”. Podemos considerar que la lógica era todo lo que es relativo al logos. Podríamos definir la lógica en un sentido amplio como el conjunto de conocimientos que tienen por objeto el enunciado de leyes que rigen los procesos del pensamiento humano, así como los métodos que han de aplicarse al razonamiento y la reflexión para lograr un sistema que conduzca a resultados que puedan considerarse certeros o verdaderos. El raciocinio, puede definirse como un proceso del pensamiento humano que a partir de ciertos conocimientos establecidos (llamadas premisas), conduce a adquirir un conocimiento nuevo (llamado conclusión). La lógica ocupa un lugar de primera importancia en el quehacer humano y es una piedra fundamental en el edificio de las matemáticas. En el marco de este curso de introducción al álgebra estudiaremos las operaciones más usuales en la lógica proposicional.

2 Proposiciones y conectivos lógicos

DEFINICIÓN

1. Una **proposición** es una frase o expresión declarativa (no necesariamente matemática) que es verdadera o falsa (no ambas).
2. Si una proposición es verdadera, decimos que su valor de verdad es V.
3. Si una proposición es falsa, decimos que su valor de verdad es F

Denotaremos una proposición mediante letras minúsculas: $p, q, r, s, \ldots$ etcétera.

EJEMPLO 1

- p : “murió el roto Quezada”
- q : “estoy en medio de un triángulo”
- r : “$2 + 1 = 5$” cuyo valor de verdad es Falso.
- s : “$1 \geqslant 0$” cuyo valor de verdad es Verdadero.
- ℓ : “Estoy estudiando licenciatura en ingenería en ciencias de datos”.
- No es una proposición: “Siéntate”.

A partir de proposiciones simples podemos construir otras, llamadas compuestas, mediante operaciones denominadas conectivos lógicos. Estas son la negación, conjunción, disyunción, implicación y equivalencia. Las cuales definimos a través de tablas de verdad.

Si p y q son proposiciones, sus valores de verdad son V y F y las posibles combinaciones de estos valores son

p	q
V	V
V	F
F	V
V	V

Para cada par de valores de verdad, según sea la operación definida entre p y q, obtendremos un valor de verdad.

DEFINICIÓN (Negación) Dada una proposición p, su negación que denotaremos por $\overline{p}$, toma el valor de verdad contrario a p. Su tabla de verdad es la siguiente

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

EJEMPLO 2 La negación de "murió el roto Quezada" es "no murió el roto Quezada"

DEFINICIÓN (Disyunción) Dadas dos proposiciones p y q, definimos la proposición compuesta $p \vee q$, denominada disyunción ("o lógico") entre p y q como aquella que es falsa solo si p y q son falsas. Su tabla de verdad es la siguiente

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

DEFINICIÓN (Conjunción) Dadas dos proposiciones p y q, definimos la proposición compuesta $p \wedge q$, denominada conjunción ("y lógico") entre p y q como aquella que es verdadera solo si p y q son verdaderas. Su tabla de verdad es la siguiente

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

DEFINICIÓN (Implicación) Dadas dos proposiciones p y q, definimos la implicación $p \Longrightarrow q$, que se lee "si p entonces q" (o bien p implica q) como la proposición condicional que es falsa solo si p es verdadera y q es falsa. Dicho de otra manera, una proposición verdadera no puede implicar una proposición falsa (es falso que una proposición verdadera implique una falsa). Su tabla de verdad es la siguiente

p	q	$p \Longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Sintetiza el concepto de relación causal, en el sentido que $p \Longrightarrow q$ será falsa solo cuando la hipótesis p es verdadera y la conclusión q es falsa. Caso contrario la nueva proposición es verdadera.

DEFINICIÓN (Doble implicación o equivalencia) Dadas dos proposiciones p y q, definimos la equivalencia $p \Longleftrightarrow q$, como la proposición bicondicional que se lee "p si y solo si q" (o bien p es equivalente a q) y que es verdadero solo si p y q tienen asignado el mismo valor de verdad. Su tabla es la siguiente

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La proposición bicondicional sintetiza el concepto de equivalencia, concepto central en el proceso de clasificación y $p \iff q$ será verdadero sólo cuando ambas tengan el mismo valor de verdad.

Mediante las operaciones que hemos definido, podemos construir otras proposiciones más complejas y evaluarlas mediante tablas de verdad.

EJEMPLO 3 $((p \implies q) \vee s) \iff \overline{(p \wedge q)}$ es una proposición. Realice una tabla de verdad para esta proposición.

DEFINICIÓN (Tautologías) Una tautología es una proposición que, sin importar el valor de verdad de las proposiciones que la constituyen, es siempre verdadera.

EJEMPLO 4 Las siguientes afirmaciones son tautologías:

1. $p \vee \overline{p}$
2. $p \implies (p \vee q)$
3. $(p \iff q) \iff (q \iff p)$

DEFINICIÓN (Contradicción) Una contradicción es una proposición que, sin importar el valor de verdad de las proposiciones que la constituyen, es siempre falsa.

EJEMPLO 5 La proposición $p \wedge \overline{p}$ es una contradicción.

PROPOSICIÓN 1 Las siguientes son tautologías:

1. Dominancia: $p \vee V \iff V, \quad p \vee F \iff p.$
2. Identidad: $p \wedge V \iff p, \quad p \wedge F \iff F$
3. Idempotencia: $p \wedge p \iff p, \quad p \vee p \iff p.$
4. Doble negación: $\overline{(\overline{p})} \iff p$
5. Tercio excluso: $p \vee \overline{p} \iff V$.
6. Consistencia: $p \wedge \overline{p} \iff F.$
7. Absorción: $p \vee (p \wedge q) \iff p\,, \quad p \wedge (p \vee q) \iff p.$
8. Relajación: $p \wedge q \implies p, \quad p \implies p \vee q.$
9. Caracterización de la implicación: $(p \implies q) \iff (\overline{p} \vee q).$

PROPOSICIÓN 2 Las siguientes son tautologías:

1. Leyes de De Morgan: $\overline{(p \wedge q)} \Longleftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}, \quad \overline{(p \vee q)} \Longleftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$
2. Conmutatividad:
   a) $p \vee q \Longleftrightarrow q \vee p,$
   b) $p \wedge q \Longleftrightarrow q \wedge p.$
3. Asociatividad:
   a) $p \vee (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \vee r,$
   b) $p \wedge (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \wedge r.$
4. Distributividad
   a) $p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$
   b) $p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r).$
5. Equivalencia dividida: $(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)]$

EJEMPLO 6 Demuestre usando las propiedades anteriores la siguiente tautología

$$(\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q) \vee (p \wedge q) \Longleftrightarrow V\ .$$

EJEMPLO 7 Pruebe la siguiente tautología

$$(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge q)\ .$$

3 Técnicas de demostración

Las siguientes tautologías son útiles para demostrar afirmaciones en matemáticas y se conocen como técnicas de demostración

PROPOSICIÓN 3 Las siguientes proposiciones son tautologías:

1. Transitividad: $(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r) \Longrightarrow (p \Longrightarrow r).$
2. Contrarrecíproca: $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}).$
3. Contradicción o Reducción al absurdo:

$$[(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow V] \Longleftrightarrow [p \wedge \overline{q} \Longrightarrow F]\ .$$

La mayoría de las afirmaciones matemáticas se pueden escribir en términos de una implicación $p \Longrightarrow q$ donde la proposición p es llamada *hipótesis* del teorema y la proposición q se llama *tesis* del teorema. Para probar un teorema que tiene la forma $p \Longrightarrow q$ basta probar que si suponemos $\overline{q}$ es verdadera (junto con la hipótesis p), entonces obtendríamos una inconsistencia. Luego, la única opción válida es que $\overline{q}$ sea falsa, es decir, se cumpla q.

EJEMPLO 8 Use la técnica de reducción al absurdo (demostración por contradicción) para probar:

$$3a \quad \text{no es racional} \Longrightarrow a \quad \text{no es racional}$$

Solución Por contradicción, supongamos que a es racional. Entonces, existen $n, m \in \mathbb{Z}$ con $m \neq 0$ tales que $a = \dfrac{n}{m}$. Se sigue que $3a = \dfrac{3n}{m}$ el cual es un número racional, lo cual contradice la hipótesis de que $3a$ no es racional.

EJEMPLO 9 Sea n un número entero. Demuestre que si n^2 es par entonces n es par.

Solución Por reducción al absurdo, supongamos que n es impar. Luego existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$. Se sigue que

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2\ell + 1$$

donde $\ell = 2k^2 + 2k$ es un número enterio, por lo que n^2 es impar, lo cual contradice la hipótesis de que n^2 es par.

EJEMPLO 10 Pruebe que $\sqrt{2}$ no es racional.

Solución Por contradicción, supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional. Entonces existen $n, m \in \mathbb{Z}$ con $m \neq 0$ tales que $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$. Como podemos cancelar cualquier factor común que tengan m y n, podemos suponer que no tienen divisores comunes, salvo el 1. Ahora elevando al cuadrado obtenemos

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \Longleftrightarrow 2n^2 = m^2 \tag{1}$$

luego m^2 es par lo que implica que m es par (ejemplo 9). Por lo que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = 2k$. Sustituyendo en esta última ecuación en (1) se obtiene que

$$2n^2 = (2k)^2 \Longleftrightarrow 2n^2 = 4k^2 \Longleftrightarrow n^2 = 2k^2$$

luego n^2 es par lo que implica que n es par (ejemplo 9). Por lo tanto, hemos obtenido que n y m son números pares, lo cual es una contradicción con el hecho de que n y m no tienen divisores comunes.

4 Guía de Ejercicios

1. Considere la proposición compuesta

$$M \ : \quad (p \vee q) \Longrightarrow (\overline{p} \wedge r)\,.$$

   a) Construya la tabla de verdad de M.

   b) Usando tautologías conocidas, demuestre que la negación de M es equivalente a $p \vee (q \wedge \overline{r})$.

2. Sherlock quiere comer manzanas y luego de buscar por todos lados, logra llegar a un pequeño local. En el local atiende un anciano y su variada mercadería consta de manzanas y naranjas, sin embargo, su estilo de venta es diferente y consiste en entregarle 3 cajas cerradas, en ellas habrá manzanas o naranjas (no habrá dos tipos de fruta distintas en la misma caja). Cada caja tiene un letrero.

   a) **Caja A:** "En esta caja hay manzanas y en la Caja B, naranjas".

   b) **Caja B:** "En la caja A habrá manzanas si y solo si en la caja C hay naranjas"

   c) **Caja C:** "Si en la caja B hay manzanas, entonces las otras cajas tienen naranjas".

   Si solo un letrero es falso, ¿qué caja debiese comprar Sherlock? Escribir los letreros como proposiciones lógicas y utilizar tablas de verdad para llegar a un resultado.

3. Determine si el siguiente argumento es válido:
   Si no estudias esta semana, entonces reprobarás el curso de cálculo.
   Si no estudias esta semana, entonces no podrás salir de vacaciones este verano.
   Apruebas el curso de cálculo o sales de vacaciones.
   Por lo tanto, estudiaste esta semana.

4. Si para las proposiciones lógicas p y q, se define el conectivo lógico $\star$ como sigue:

$$p \star q \text{ es Falsa si y solo si } p \text{ y } q \text{ son verdaderas}\,.$$

   Demuestre que la siguiente proposición es una tautología

$$[(p \Longrightarrow q) \vee q] \Longleftrightarrow [(p \wedge \neg q) \star \neg q]\,.$$

5. Consideremos el nuevo símbolo $\downarrow$ e interpretemos la proposición $(p \downarrow q)$ por "ni p ni q". Es decir, $(p \downarrow q)$ es verdadera si y sólo si p y q son ambas falsas. Demostrar las siguientes equivalencias lógicas:

   a) $\overline{p} \Longleftrightarrow (p \downarrow p)$

   b) $(p \vee q) \Longleftrightarrow ((p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q))$

   c) $(p \wedge q) \Longleftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$

6. Demuestre, usando propiedades (no tablas de verdad), que la siguiente proposición lógica es una Tautología.

$$[\{[\overline{p} \vee (q \wedge \overline{r})] \wedge [p \wedge (\overline{q} \vee r)]\} \vee \{(p \wedge q) \vee [r \wedge (\overline{r} \vee q) \wedge p]\}] \Longleftrightarrow [p \wedge q] \ .$$

7. Dadas las proposiciones lógicas, p, q, r y s. Demuestre usando propiedades básicas (tautologías) que la siguiente proposición es una tautología.

$$[(\overline{p} \vee q) \wedge (r \vee \overline{q}) \wedge (\overline{r} \vee s)] \Longrightarrow [p \Longrightarrow s] \ .$$

8. Hacer una demostración directa y por contradicción de la siguiente proposición:

Si n es par entonces $3n + 7$ es impar.

9. Demuestre la siguiente proposición

$$x \text{ es impar} \Longleftrightarrow x^2 \text{ es impar} \ .$$

Justifique su respuesta e indique el tipo de demostración utilizada.

10. Sean p, q, r proposiciones. Probar sin usar tablas de verdad que la proposición presentada en cada item es una tautología. Trate de aprovechar la forma que tiene cada proposición, usualmente el hecho de que sea una implicancia.

   a) $[(p \vee q) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \Longrightarrow [(q \Longrightarrow p) \wedge (p \Longrightarrow r)]$.
   b) $(p \Longrightarrow q) \wedge (r \Longrightarrow q) \Longrightarrow (p \Longrightarrow \overline{r})$.
   c) $(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow [\overline{(q \wedge r)} \Longrightarrow \overline{(p \wedge r)}]$.
   d) $[(p \Longrightarrow \overline{q}) \wedge (\overline{r} \vee q) \wedge r] \Longrightarrow \overline{p}$.

11. Determine el valor de verdad de las proposiciones p, q, r y s si se sabe que la siguiente proposición es verdadera.

$$[s \Longrightarrow (r \vee \overline{r})] \Longrightarrow [\overline{(p \Longrightarrow q)} \wedge s \wedge \overline{r}] \ .$$

12. Demuestre sin usar tablas de verdad la siguiente tautología:

$$(p \vee (q \wedge (r \Longrightarrow \overline{(\overline{p})}))) \Longleftrightarrow (p \vee q) \ .$$