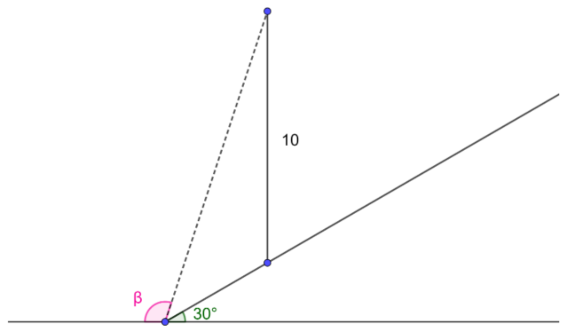
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesores: Constanza del Campo, Camilo Sánchez
Ayudantes: Agustín Gilbert, Martina Ruz,
Santiago Marcano, Omar Neyra

Introducción al Álgebra y Geometría - MAT1207
Ayudantía 7

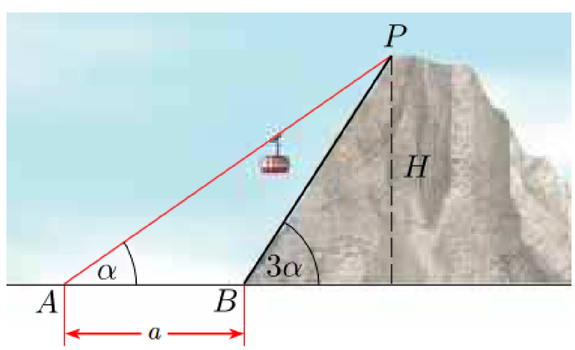
23 de Abril, 2024

Se considerara un triangulo $\triangle ABC$ como un triangulo de lados a, b, c y de ángulos opuestos α, β, γ respectivamente.

Ejercicio 1: Desde la ladera de un cerro cuya pendiente forma un ángulo de $\pi/6$ se levanta una torre de altura 10m. Se extiende una cuerda desde la punta de la torre hacia el pie del cerro, formando un ángulo de medida β como se muestra en la figura. Si el largo de la cuerda es de 13m, calcule $\sin\beta$.



Ejercicio 2: Una montaña de altura H forma un ángulo de 3α entre el pie de la montaña y su cima. Un teleférico ubicado a una distancia a de la montaña forma un ángulo de elevación de α con respecto a la cima. El diagrama es el siguiente:



Demuestre que

$$H = \frac{a\sin 3\alpha}{2\cos\alpha}.$$

Ejercicio 3: Sean $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$, con $a, b \neq 0$ y $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ \forall k \in \mathbb{Z}$ tales que $b\tan\alpha = a$. Calcule el valor de

$$\frac{a\sin\alpha - b\cos\alpha}{a\sin\alpha + b\cos\alpha}$$

en términos de a y b.

Ejercicio 4: Demuestre las siguientes identidades:

1. $\dfrac{\csc\alpha}{\cot\alpha+\tan\alpha}=\cos\alpha.$

2. $(\csc\alpha-\cot\alpha)^2=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$

3. $\dfrac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\cot\alpha.$

4. $(\sin\alpha+\csc\alpha)^2+(\cos\alpha+\sec\alpha)^2=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+7.$

Ejercicio 5: Demuestre que para todo triangulo $\triangle ABC$,

1. $2(bc\cos\alpha+ac\cos\beta+ab\cos\gamma)=a^2+b^2+c^2.$

2. $(b+c)\cos\alpha+(c+a)\cos\beta+(a+b)\cos\gamma=a+b+c.$

3. $\dfrac{c\sin(\alpha-\beta)}{b\sin(\gamma-\alpha)}=\dfrac{a^2-b^2}{c^2-a^2}.$

4. $\dfrac{\cos\alpha}{a}+\dfrac{\cos\beta}{b}+\dfrac{\cos\gamma}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}.$

Ejercicio 6: (Propuesto) Sea $\triangle ABC$ un triangulo de lados a,b,c y ángulos opuestos α,β,γ respectivamente. Demuestre las formulas de Mollweide:

1. $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin(\gamma/2)}.$

2. $\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos(\gamma/2)}.$

Use lo anterior para demostrar la ley de las tangentes:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)}.$$

Reescriba las formulas de Mollweide en terminos de tangentes de medio ángulo (es decir, $\tan(\alpha/2),\tan(\beta/2)$) y úselas para concluir la ley de las cotangentes:

$$\frac{\cot(\alpha/2)}{s-a}=\frac{\cot(\beta/2)}{s-b}=\frac{\cot(\gamma/2)}{s-c}=\sqrt{\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

donde $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ es el semiperimetro del triangulo.