Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2024

MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría

Solución Interrogación N° 4

1. a) Demuestre que $q(x) = x^4 - x^2 + 1$ no tiene factores lineales en $\mathbb{Q}[x]$.

   b) Al dividir el polinomio $p(x)$ por $x^2 + 1$ se obtiene como cociente $x^2 - x - 6$ y resto un polinomio $r(x)$ de grado 1. Determine el resto $r(x)$ si $p(-2) = 2$ y $p(3) = 1$.

   Solución.

   a) Si q tiene factores lineales en $\mathbb{Q}[x]$, entonces este tiene raíces racionales. Por el teorema de las raíces racionales los candidatos son solo $x = 1$ y $x = -1$. Pero observamos que $q(1) = 1$ y $q(-1) = 1$, por lo que q no tiene factores lineales en $\mathbb{Q}[x]$.

   b) Sea $r(x) = Ax + B$. Por el algoritmo de la división se tiene que

   $$p(x) = (x^2 + 1)(x^2 - x - 6) + (Ax + B)$$

   Como $p(-2) = -2A + B = 2$ y $p(3) = 3A + B = 1$, resolviendo el sistema se obtiene que $A = -\dfrac{1}{5}$ y $B = \dfrac{8}{5}$. Por lo que el resto es

   $$r(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{8}{5}.$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 1,5 puntos por aplicar el teorema de las raíces racionales al polinomio q y deducir que $x = 1$ y $x = -1$ son candidatos de raíces.

CC 2. 1,5 puntos observa que $q(1) \neq 0$ y $q(-1) \neq 0$ y deducir que q no tiene factores lineales en $\mathbb{Q}[x]$.

CC 3. 1 punto por usar el algoritmo de la división y obtener que $p(x) = (x^2+1)(x^2-x-6)+(Ax+B)$.

CC 4. 1 punto por obtener el sistema $\left.\begin{array}{rcl} -2A + B & = & 2 \\ 3A + B & = & 1 \end{array}\right|$.

CC 5. 1 punto por resolver el sistema y obtener el resto $r(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{8}{5}$.

2. Encuentre n tal que:

$$(x-1)^n q(x) = (x^2-1)(x^3-1)(x^6-5x+1)$$

para algún polinomio $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ con $q(1) \neq 0$.

Solución. Se desea separar el polinomio entre los factores que solo tienen como raíz el 1 y los que no tienen ese valor como raíz. Por inspección se puede notar que 1 es solución de x^2-1 y x^3-1, pero no de x^6-5x+1. Luego, ya sea usando factorizaciones conocidas o dividiendo los polinomios se obtiene:

- $x^2-1 = (x+1)(x-1)$
- $x^3-1 = (x^2+x+1)(x-1)$

de donde podemos obtener que que:

$$(x^2-1)(x^3-1)(x^6-5x+1) = (x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)(x^6-5x+1)$$

Si consideramos $q(x) = (x+1)(x^2+x+1)(x^6-5x+1)$ podemos notar que $q(1) = 2 \cdot 3 \cdot -3 \neq 0$, por lo que concluimos que $n = 2$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 1 puntos por factorizar x^2-1.

CC 2. 1,5 puntos por factorizar x^3-1.

CC 3. 1 puntos por establecer que x^6-5x+1 no tiene a 1 como raíz.

CC 4. 1 puntos por establecer que x^2+x+1 no tiene a 1 como raíz.

CC 5. 1,5 puntos por deducir que $n = 2$.