Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2022

MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría

Solución Tarea N° 1

1. Sean p, q y r proposiciones lógicas. Demuestre que

$$(p \wedge q) \Longrightarrow r$$

es lógicamente equivalente a

$$(p \wedge \overline{r}) \Longrightarrow \overline{q}\,.$$

Solución. Notemos que

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) \Longrightarrow r &\Longleftrightarrow \overline{(p \wedge q)} \vee r && \text{(caracterización de la implicación)}\\
&\Longleftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q}) \vee r && \text{(Leyes de De Morgan)}\\
&\Longleftrightarrow (\overline{p} \vee r) \vee \overline{q} && \text{(conmutatividad y asociatividad de } \vee)\\
&\Longleftrightarrow \overline{(p \wedge \overline{r})} \vee \overline{q} && \text{(Leyes de De Morgan)}\\
&\Longleftrightarrow (p \wedge \overline{r}) \Longrightarrow \overline{q} && \text{(Caracterización de la implicación)}
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 1.

- 6 puntos por mostrar que las proposiciones son equivalentes.
- También se puede responder realizando una tabla de verdad.

2. Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \cdots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{2}{x^2-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

Solución. Usando inducción sobre n. Definimos la función proposicional

$$P(n) \,:\, \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \cdots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{2}{x^2-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
P(1) &: \quad \frac{2}{1+x^2} = \frac{2}{x^2-1} + \frac{2^2}{1-x^{2^2}} \\
P(k) &: \quad \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \cdots + \frac{2^k}{1+x^{2^k}} = \frac{2}{x^2-1} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}} \\
P(k+1) &: \quad \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \cdots + \frac{2^k}{1+x^{2^k}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} = \frac{2}{x^2-1} + \frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}}
\end{aligned}$$

- **Caso base.** El lado izquierdo de $P(1)$ es $2/(1+x^2)$, mientras que el lado derecho es

$$\frac{2}{x^2-1} + \frac{4}{1-x^4} = \frac{-2}{1-x^2} + \frac{4}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{-2(1+x^2)+4}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{2(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{2}{1+x^2}$$

  como son iguales se sigue que $P(1)$ es verdadero.

- **Paso inductivo.** Supongamos que $P(k)$ es verdadero. Por demostrar que $P(k+1)$ es verdadero. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \cdots + \frac{2^k}{1+x^{2^k}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} &= \left(\frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \cdots + \frac{2^k}{1+x^{2^k}}\right) + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} \\
&= \frac{2}{x^2-1} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} \\
&= \frac{2}{x^2-1} + \frac{2^{k+1}(1+x^{2^{k+1}}) + 2^{k+1}(1-x^{2^{k+1}})}{(1-x^{2^{k+1}})(1+x^{2^{k+1}})} \\
&= \frac{2}{x^2-1} + \frac{2^{k+1}+2^{k+1}}{(1-x^{2^{k+1}} \cdot x^{2^{k+1}})} \\
&= \frac{2}{x^2-1} + \frac{2 \cdot 2^{k+1}}{(1-x^{2^{k+1}+2^{k+1}})} \\
&= \frac{2}{x^2-1} + \frac{2^{k+2}}{(1-x^{2^{k+2}})}
\end{aligned}$$

  como queríamos probar.

Por lo tanto, por el principio de inducción matemática $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Puntaje Pregunta 2.

- 1 punto por definir la función proposicional y determinar $P(k)$ y $P(k+1)$.
- 1 punto por probar el caso base.
- 2 puntos por usar la hipótesis inductiva
- 2 puntos por sumar las expresiones y probar el paso inductivo.

3. Sean A, B y C conjuntos. Demuestre que si se cumple

$$(A \cap C = B \cap C) \wedge (A \cup C = B \cup C)\,,$$

entonces $A \subseteq B$.

Solución. Sea $x \in A$ arbitrario. Por demostrar que $x \in B$. Notemos que A se puede descomponer como la unión de los conjuntos $A \cap C$ y $A \setminus C$, es decir

$$A = (A \cap C) \cup (A \setminus C)\,.$$

Entonces podemos separar la demostración en casos:

- **Caso 1.** $x \in A \cap C$. Por hipótesis $A \cap C = B \cap C$, entonces $x \in A \cap C \Longleftrightarrow x \in B \cap C$ lo que implica que $x \in B$ y $x \in C$. En particular $x \in B$ como queríamos probar.
- **Caso 2.** $x \in A \setminus C$. Sabemos que $A \subset A \cup C$ y como por hipótesis $A \cup C = B \cup C$ se sigue que $A \subset B \cup C$. Como por el caso $x \notin C$ se sigue que $x \in B$ como queríamos probar.

Puntaje Pregunta 3.

- 3 puntos por mostrar el caso 1.
- 3 puntos por mostrar el caso 2.

4. En una delegación formada por 44 deportistas, encontramos algunos que participarán en las siguientes disciplinas: salto alto, 100 metros planos y salto con garrocha, la participación de ellos es la siguiente:

   - 24 participan en salto alto
   - 18 participan en salto alto y/o 100 metros, pero no en garrocha
   - 25 participan en garrocha
   - 7 participan en todas las disciplinas
   - 9 participan en 100 metros, pero no en garrocha
   - 12 no participan ni en salto alto ni en 100 metros
   - 15 participan en salto alto, pero no en garrocha

   Determine:

   a) ¿Cuántos no participan en ninguna de las disciplinas?

   b) ¿Cuántos deportistas participan en salto alto y garrocha?

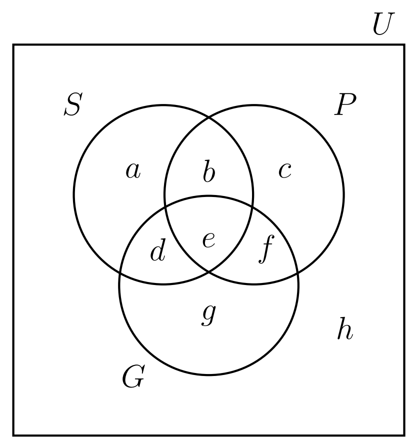
   c) ¿Cuántos deportistas participan en más de un deporte?

   Solución.

   Considere los conjuntos

$$
\begin{aligned}
S &= \{\text{alumnos que participan en salto alto}\}\,, \\
P &= \{\text{alumnos que participan en 100 metros planos}\}\,, \\
G &= \{\text{alumnos que participan en salto con garrocha}\}\,.
\end{aligned}
$$

   Considere el siguiente diagrama de Venn



   en donde cada uno de los sectores del diagrama de Venn ha sido denotado por una letra que representa la cardinalidad de cada uno de los sectores. La información dada en el problema se puede traducir en las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
a+b+c+d+e+f+g+h &= 44 && (1)\\
a+b+d+e &= 24 && (2)\\
a+b+c &= 18 && (3)\\
d+e+f+g &= 25 && (4)\\
e &= 7 && (5)\\
b+c &= 9 && (6)\\
g+h &= 12 && (7)\\
a+b &= 15 && (8)
\end{aligned}
$$

   Remplazando (6) en (3) obtenemos que

$$18 = a + \underbrace{b+c}_{9} \Longrightarrow \boxed{a=9}$$

Remplazando (8) en (3) obtenemos que

$$18 = \underbrace{a+b}_{15} + c \Longrightarrow \boxed{c = 3}$$

de donde se deduce que $\boxed{b = 3}$. De (2) usando los valores ya obtenidos se tiene que

$$d = 24 - a - b - e \Longrightarrow \boxed{d = 2}$$

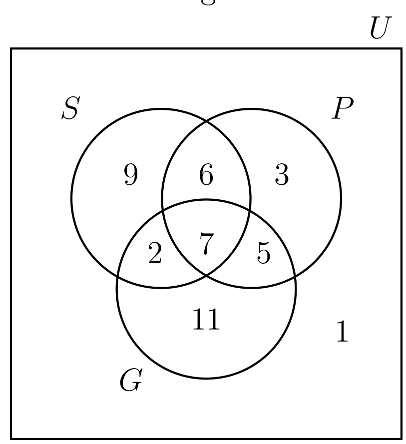
Si en (1) reemplazamos todos los valores encontrados y usando la ecuación (7) se deduce que

$$f = 44 - a - b - c - d - e - \underbrace{(g+h)}_{12} \Longrightarrow \boxed{f = 5}$$

Remplazando el valor de f en (4) se obtiene que

$$g = 25 - d - e - f \Longrightarrow \boxed{g = 11}$$

de donde se deduce que $h = 1$. Por lo tanto el diagrama de Venn es:



i. La cantidad de alumnos que no participa en ninguna de las disciplinas es $h = 1$

ii. La cantidad de alumnos que participa en salto alto y garrocha es $d + e = 2 + 7 = 9$

iii. La cantidad de deportistas que participan en más de un deporte es $b+d+e+f = 6+2+7+5 = 20$

Puntaje Pregunta 4.

- 3 puntos por hacer el diagrama de Venn con la cardinalidad de cada una de las regiones.
- 1 punto por responder correctamtente i.
- 1 punto por responder correctamtente ii.
- 1 punto por responder correctamtente iii.