Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2023

MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría

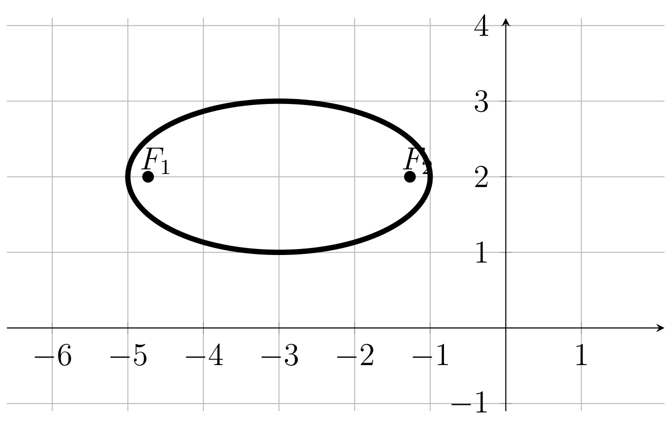
Solución Interrogación N° 7

1. Considere la ecuación
$$x^2 + kx + 4y^2 - 16y + 21 = 0$$
   (a) (2 puntos) ¿Para qué valores del parámetro k es la ecuación de una elipse?
   (b) (4 puntos) Si $k = 6$, indique las coordenadas del centro y de los focos, calcule la excentricidad y haga un dibujo de la elipse.

Solución.

(a) Completando cuadrados la ecuación queda
$$\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 + 4(y-2)^2 = \frac{k^2}{4} - 5$$
Para que corresponda a la ecuación de una elipse se debe tener
$$\frac{k^2}{4} - 5 > 0$$
es decir
$$k > \sqrt{20} \text{ ó } k < -\sqrt{20}$$
Puntaje:1 punto por completar cuadrados y 1 punto por determinar correctamente el conjunto de valores admisibles de k.

(b) Si $k = 6$ la ecuación queda
$$(x+3)^2 + 4(y-2)^2 = 4$$
y la forma reducida es
$$\frac{(x+3)^2}{2^2} + (y-2)^2 = 1$$
El centro de la elipse es $(-3, 2)$ y usando que $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1$, los focos están en $-3 \pm \sqrt{3}, 2$. La excentricidad de la elipse es $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Puntaje: 1 punto por el centro, 1 punto por las coordenadas de los focos, 1 punto por calcular la excentricidad y 1 punto por el dibujo.

2. (a) Considere la ecuación $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - 4x + 5y = F$. Determine F tal que $\mathcal{C}_1$ sea circunferencia con radio 2 y determine su centro.

   (b) Sea $\mathcal{C}_2$ circunferencia con centro en $(1, 1)$ y tangente a la recta $\mathcal{R} : x + y = 0$. Determine la ecuación de $\mathcal{C}_2$.

Solución.

(a) Completando cuadrados nos da

$$(x-2)^2 + (y + \tfrac{5}{2})^2 - 4 - \tfrac{25}{4} = F \quad\iff\quad (x-2)^2 + (y+\tfrac{5}{2})^2 = \frac{4F+41}{4}.$$

Para que el radio sea 2 necesitamos que $4F + 41 = 16$ o equivalente $F = \frac{16-41}{4} = -\frac{25}{4}$. El centro de la circunferencia $\mathcal{C}_1$ es $(2, -\frac{5}{2})$.

Puntaje: 1 punto por completar cuadrados, 1 punto por determinar F, 1 punto por determinar centro

(b) La circunferencia $\mathcal{C}_2$ tiene la ecuación $(x-1)^2 + (y-1)^2 = r^2$. La intersección con la recta $\mathcal{R}$ satisface

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (-x-1)^2 = r^2 \quad&\iff\quad x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 = r^2 \quad\iff \\ 2x^2 = r^2 - 2 \quad&\iff\quad |x| = \sqrt{\tfrac{r^2}{2} - 1}. \end{aligned}$$

Si $r^2 < 2$ no hay intersección. Si $r^2 > 2$ hay 2 puntos de intersección, $Q_1(\sqrt{\frac{r^2}{2}-1}, -\sqrt{\frac{r^2}{2}-1})$ y $Q_2(-\sqrt{\frac{r^2}{2}-1}, \sqrt{\frac{r^2}{2}-1})$. Si $r^2 = 2$ hay un punto de interseccón $Q_1 = Q_2$. Concluimos que la ecuación de $\mathcal{C}_2$ es

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2.$$

Puntaje: 1 punto por dar la ecuación general $(x-1)^2 + (y-1)^2 = r^2$, 2 puntos por determinar r.

Alternativa para determinar r: Se puede calcular la distancia entre el centro $C(1, 1)$ y la recta $\mathcal{R}$,

$$d(C, \mathcal{R}) = \frac{1+1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}.$$

Entonces $r^2 = 2$.