Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2024

MAT1207 – Introducción al Álgebra y Geometría

Solución Interrogación N° 6

1. Demuestre que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple lo siguiente:

   a) $\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2}$

   b) $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \dfrac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$

   Solución.

   a) Recordemos primero que:

   - $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)$
   - $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)$

   Luego, si restamos obtenemos $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\operatorname{sen}(\beta) cos(\alpha)$. Y basta dividir por 2 para obtener lo pedido.

   b) Recordemos primero que:

   - $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$
   - $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$

   Luego, si sumamos obtenemos $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos(\alpha)\cos(\beta)$. Y basta dividir por 2 para obtener lo pedido.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 1,5 puntos por dar las fórmulas de $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)$

CC 2. 1,5 puntos por mostrar lo pedido en el inciso a).

CC 3. 1,5 puntos por dar las fórmulas de $\cos(\alpha \pm \beta)$

CC 4. 1,5 puntos por mostrar lo pedido en el inciso b).

2. a) Calcule el valor de $\operatorname{sen}\left(2\arcsin\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

b) Calcule $(1+i)^3$.

Solución.

a) Usando la identidad $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$, obtenemos que

$$\operatorname{sen}\left(2\arcsin\left(\frac{3}{4}\right)\right) = 2\operatorname{sen}\left(\arcsin\left(\frac{3}{4}\right)\right)\cos\left(\arcsin\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

Como $\operatorname{sen}\left(\arcsin\left(\frac{3}{4}\right)\right) = \frac{3}{4}$ y

$$\cos\left(\arcsin\left(\frac{3}{4}\right)\right) = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\left(\arcsin\left(\frac{3}{4}\right)\right)} = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

luego $\operatorname{sen}\left(2\arcsin\left(\frac{3}{4}\right)\right) = 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

b) Observamos que

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right),$$

por lo que

$$(1+i)^3 = (\sqrt{2})^3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = (\sqrt{2})^3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2+2i$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 1,5 puntos por usar la fórmula de ángulo doble y que $\operatorname{sen}(\arcsin(3/4)) = 3/4$

CC 2. 1,5 puntos por calcular $\cos(\arcsin(3/4)$ y el valor solicitado.

CC 3. 1,5 puntos por escribir $1+i$ en su forma polar.

CC 4. 1,5 puntos por determinar que $(1+i)^3 = -2+2i$.