Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesores: Constanza del Campo, Camilo Sánchez
Ayudantes: Agustín Gilbert, Martina Ruz,
Santiago Marcano, Omar Neyra

Introducción al Álgebra y Geometría - MAT1207
Ayudantía 3

26 de Marzo, 2024

Ejercicio 1: Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, 24 divide a $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$.
Ejercicio 2: Demuestre que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k+1} \leq \frac{5}{6}.$$

Ejercicio 3: Sea $r \in \mathbb{R}$ con $|r| < 1$. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$|r|^n \leq \frac{|r|}{n(1-|r|)+|r|}.$$

Ejercicio 4: Sea $A = \Big\{1, 2, \{1, 3, \{4\}\}\Big\}$. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdad

1. $1 \in A$,
2. $1 \subseteq A$,
3. $3 \subseteq A$,
4. $\{4\} \subseteq A$,
5. Existe un subconjunto $B \subseteq A$ tal que $\{3\} \in B$,
6. $\{2\} \subseteq A$.

Ejercicio 5: Sean A, B y C conjuntos. Demuestre que si $A \cap C \subseteq B \cap C$ y $A \cup C \subseteq B \cup C$, entonces $A \subseteq B$.
Ejercicio 6: Sean $A, B, C \subseteq U$. Pruebe las siguientes afirmaciones

1. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$, donde para dos conjuntos X, Y definimos $X \triangle Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.
2. $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$.

Ejercicio 7: (Propuesto) Definimos S_n como la suma de los números naturales m tales que $2^n < m < 2^{n+1}$. Demuestre que S_n es divisible por 3.
Ejercicio 8: (Propuesto) Demuestre que $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

Los siguientes ejercicios, si bien se pueden resolver con materia actual, son de un nivel mas avanzado y no se espera que puedan resolverlos antes de la prueba de conjuntos. Tómenlos como un desafío.

Ejercicio 9: (Propuesto difícil) Sea $X \neq \varnothing$ un conjunto. Decimos que una colección no vacía $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X es un filtro sobre X si satisface las siguientes propiedades:

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$,
2. Si $A \in \mathcal{F}$ y $X \supseteq B \supseteq A$, entonces $B \in \mathcal{F}$,
3. Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Dado $M \subseteq X$ no vacío, definimos $\mathcal{F}_M := \{A \subseteq X : A \supseteq M\}$. Demuestre que $\mathcal{F}_M$ es un filtro sobre X.

Ejercicio 10: (Propuesto difícil) Sea $X \neq \varnothing$ un conjunto. Decimos que una colección no vacía $\mathcal{F}$de subconjuntos de X es un σ-álgebra si

1. $X \in \mathcal{F}$,
2. Es cerrada bajo complementos, es decir, $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$,
3. Es cerrada bajo uniones numerables, es decir, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

Dados un conjunto X no vacío y una σ-álgebra $\mathcal{F}$, demuestre que:

1. $\varnothing \in \mathcal{F}$,
2. $\mathcal{F}$ es cerrada bajo uniones finitas,
3. $\mathcal{F}$ es cerrada bajo intersecciones numerables y finitas,
4. $\mathcal{F}$ es cerrada bajo diferencia de conjuntos, es decir, dados $A, B \in \mathcal{F}$, $A \setminus B \in \mathcal{F}$.

Ejercicio 11: (Propuesto difícil) Sea $X \neq \varnothing$ un conjunto. Decimos que una colección no vacía τde subconjuntos de X es una topología en X si

1. $\varnothing, X \in \tau$,
2. τ es cerrada bajo uniones arbitrarias, es decir, dado un conjunto de índices J y elementos $A_j \in \tau$ para cada $j \in J$, $\bigcup_{j\in J} A_j \in \tau$,
3. τ es cerrada bajo intersecciones finitas, es decir, dados $A_1, \ldots, A_n \in \tau$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \tau$.

Dados X un conjunto no vacío y τ una topología en X, diremos que un subconjunto A de X es **abierto** si $A \in \tau$ y que es **cerrado** si $A^c \in \tau$. Demuestre que

1. $\varnothing$ y X son conjuntos abiertos y cerrados.
2. Para un conjunto de índices J y conjuntos cerrados $A_j \subseteq X, j \in J$, se tiene que $\bigcap_{j\in J} A_j$ es un conjunto cerrado.
3. Si $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ son cerrados, entonces $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ es un conjunto cerrado.