

# Sprawozdanie z ćwiczenia 2.

Sztuczna Inteligencja i Inżynieria Wiedzy  
- laboratorium

## Spis treści

Problem spełniania ograniczeń – założenia implementacyjne .....	2
Sudoku .....	2
Implementacja heurystyk.....	2
Heurystyki wyboru wartości .....	2
Heurystyki wyboru zmiennych .....	2
Wybór najlepszej kombinacji heurystyk dla przeszukiwania z nawrotami .....	3
Wybór najlepszej kombinacji heurystyk dla metody sprawdzania wprzód .....	9
Porównanie algorytmów .....	14
Podsumowanie .....	16

## Problem spełniania ograniczeń – założenia implementacyjne

W ramach tego zadania musieliśmy zaimplementować problem spełniania ograniczeń i dwa algorytmy – przeszukiwania z nawrotami (*backtracking*) oraz sprawdzania wprzód (*forward checking*).

### Sudoku

Problemem, na którym się skupiłam, było Sudoku. Ponieważ początkowo próbowałam zachować generyczność, aby wspólne części rozwiązania wykorzystywać także dla Jolki, planszę reprezentowałam jako tablicę znaków. Każdy znak był kolejną *zmienną*, do której mogłam przypisywać *wartości* – cyfry od 1 do 9. W *ograniczeniach* sprawdzałam, czy żaden znak w rzędzie, kolumnie bądź kwadracie 3x3 się nie powtarza (w przypadku sprawdzania częściowego dopuszczałam powtarzanie się pustych znaków).

Po wczytaniu zadania z pliku zapamiętywałam początkową planszę pól, przypisywałam dziedziny do każdego z pól oraz „czyściłam” dziedziny w kolumnach, rzędach i małych kwadratach z wartości początkowo już wpisanych.

### Implementacja heurystyk

#### Heurystyki wyboru wartości

Zrealizowałam trzy heurystyki wyboru wartości. Pierwsza z nich (*VAL\_INORDER*) sprawdzała wartości po kolei, w kolejności definicji, a więc od najmniejszych do największych cyfr. Druga z nich (*VAL\_RANDOM*) tasowała wartości z dziedziny, sprawdzając je w losowej kolejności. Trzecia moja heurystyka (*VAL\_LEAST\_LEFT*) zliczała ilość przypisywanych wartości dla każdej z cyfr od 1 do 9 i w pierwszej kolejności sprawdzała wartości, które najwięcej razy były przypisywane, a więc najmniej zostało ich do wpisania (przypuszczalnie kiedy jest ich już najwięcej na planszy, to najłatwiej jest znaleźć pozostałe miejsca wpisania tej cyfry).

#### Heurystyki wyboru zmiennych

W badaniach sprawdzałam trzy statyczne heurystyki wyboru zmiennych. Pierwsza z nich (*VAR\_INORDER*) szukała wartości dla zmiennych po kolei w kolejności ich definicji, a więc idąc po kolei przed każdy z rzędów (pomijając pola z przypisanymi już wartościami). Druga z nich (*VAR\_DOMAIN\_SORTED*) sortowała zmienne wg wielkości ich dziedzin i w pierwszej kolejności sprawdzała te, gdzie było najmniej możliwych wartości do przypisania (a więc największe było prawdopodobieństwo wybrania właściwej). Trzecia heurystyka, jaką sprawdzałam (*VAR\_COLS*) sprawdzała, ile jest pustych pól w danej kolumnie i najpierw brała pola (po kolei z góry na dół) z kolumn, gdzie pustych pól było mniej. Próbowałam także przetestować losowy wybór zmiennych, jednak bardzo znacząco wydłużało to działanie algorytmów, więc zaniechałam dalszych badań.

# Wybór najlepszej kombinacji heurystyk dla przeszukiwania z nawrotami

## *Badanie 1: Wybór najlepszej kombinacji heurystyk dla przeszukiwania z nawrotami*

*Cel badania:* wybór najszybszych i najbardziej efektywnych heurystyk

*Stałe w badaniu:*

algorytm: przeszukiwanie z nawrotami (*backtracking*)

*Zmienne w badaniu:*

instancje problemu (Sudoku nr 10 – poziom trudności 1, 21 – poziom 4 oraz 40 – poziom 7)

heurystyki wyboru zmiennych oraz wartości – oznaczenia przyjęte w tabeli wyników:

Pierwsza cyfra – wybór wartości		Druga cyfra – wybór zmiennych	
INORDER	1	INORDER	1
RANDOM	2	DOMAIN_SORTED	2
LEAST_LEFT	3	COLS	3

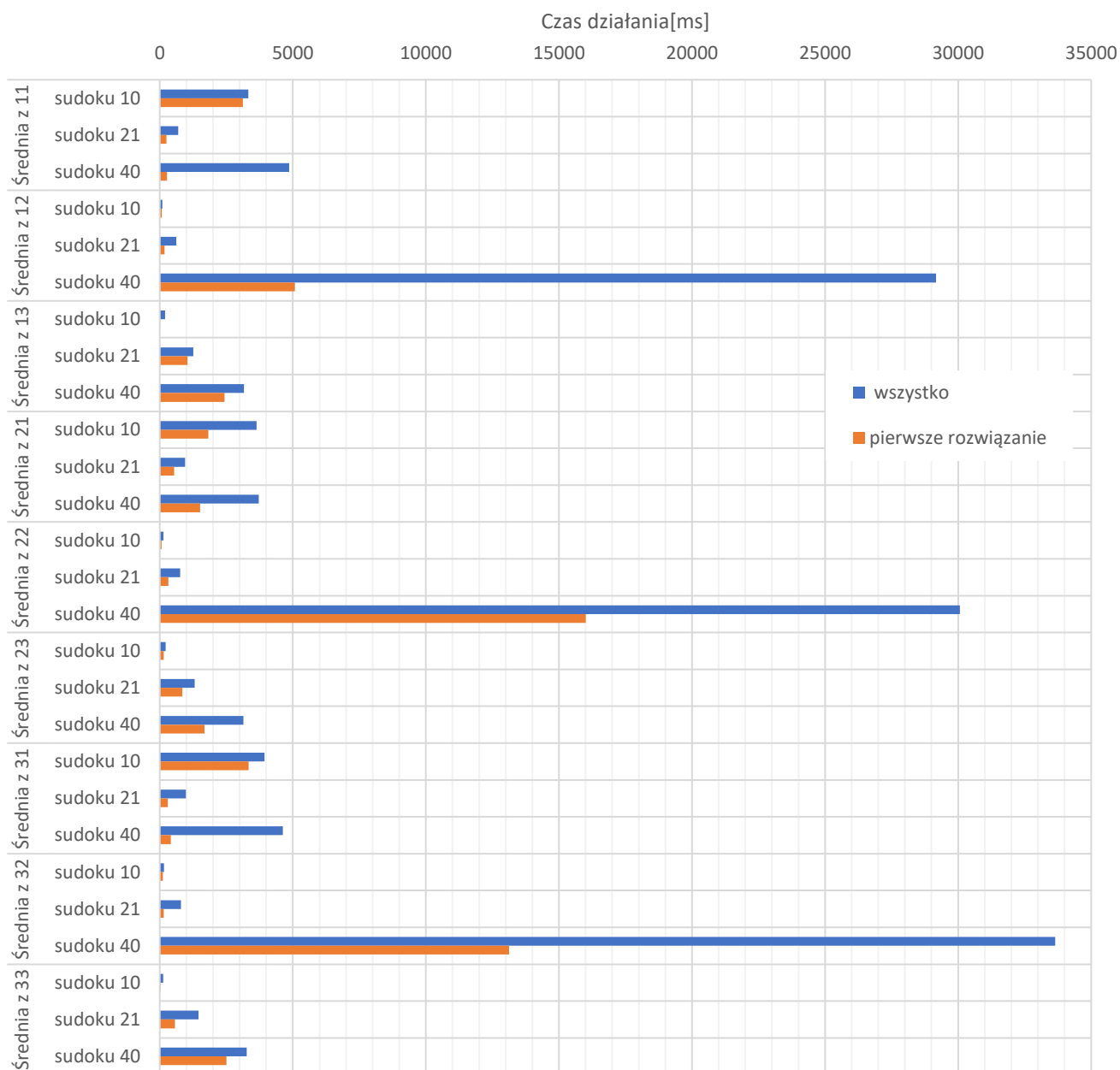
*Przebieg badania:* Załadowanie danych, dziesięciokrotne uruchomienie algorytmu z danymi heurystykami, wyświetlenie i zapis danych. Przeprowadzono 9 badań (dla każdej kombinacji heurystyk) dla każdej z 3 instancji problemu.

*Wyniki:*

Ponieważ poszukuję najlepszej z 9 kombinacji heurystyk, wyniki przedstawiono zbiorczo w tabeli 1 i następnie analizowano.

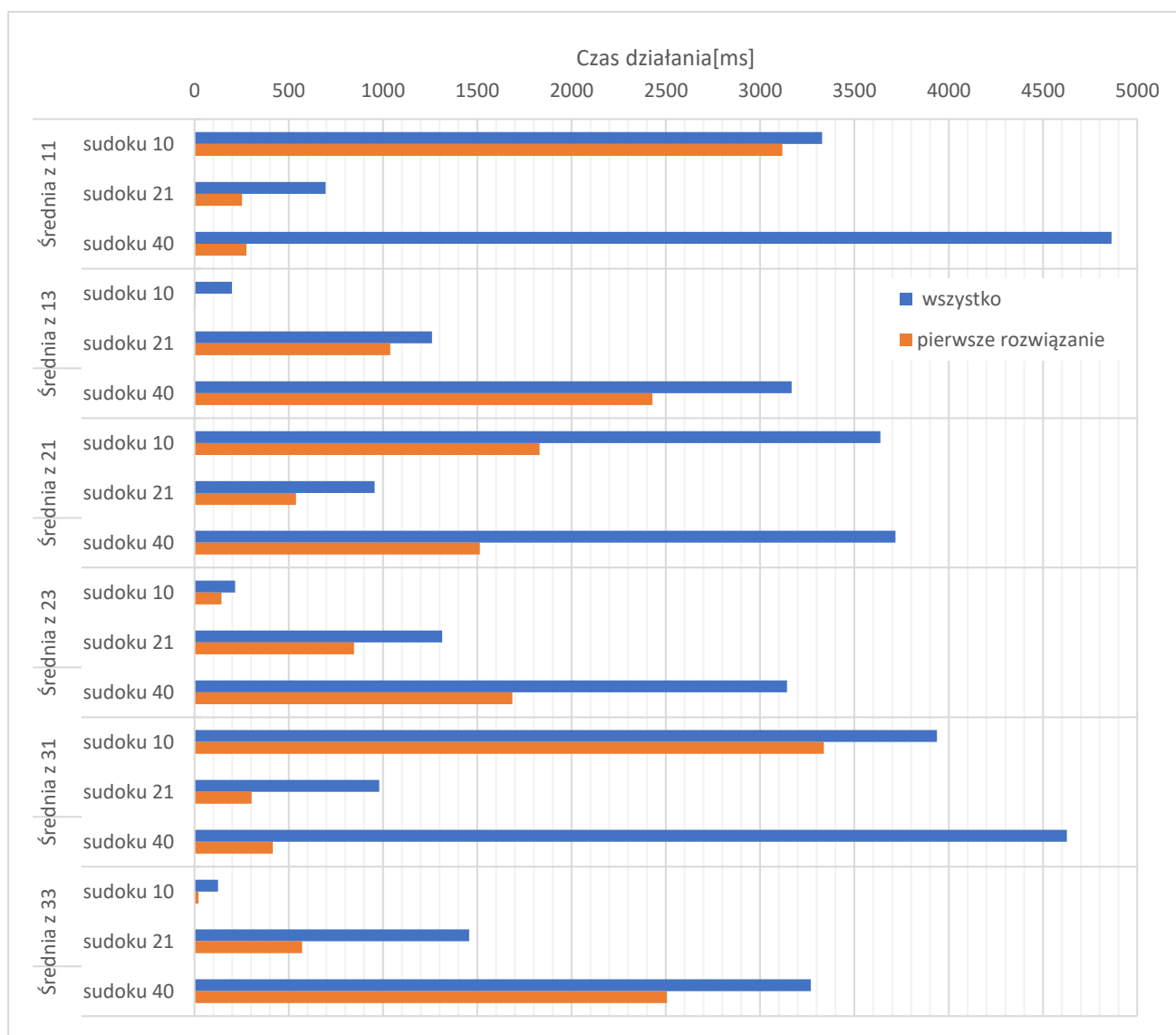
Tabela 1 Porównanie wyników dla backtrackingu

			11		12		13		21		22		23		31		32		33	
			średnia	odch.	średnia	odch.	średnia	odch.	średnia	odch.	średnia	odch.	średnia	odch.	średnia	odch.	średnia	odch.	średnia	odch.
sudoku 10 - pierwsze	czas (ms)		3 117.60	472.43	73.30	33.52	4.10	5.68	1 829.70	1 670.11	68.90	46.41	143.10	93.69	3 337.60	456.23	119.30	48.88	21.30	15.89
	węzły		1 078 444.00	0.00	21 284.00	0.00	321.00	0.00	555 868.20	502 763.03	13 741.00	6 849.67	24 389.70	11 252.11	983 368.00	0.00	22 661.00	0.00	5 628.00	0.00
	powroty		1 078 389.00	0.00	21 229.00	0.00	266.00	0.00	555 813.20	502 763.03	13 686.00	6 849.67	24 334.70	11 252.11	983 313.00	0.00	22 606.00	0.00	5 573.00	0.00
sudoku 10 - wszystk	czas (ms)		3 329.20	496.90	101.10	45.97	198.20	45.14	3 638.00	256.53	142.60	61.10	215.90	93.25	3 937.80	525.08	159.80	63.66	124.70	45.31
	węzły		1 145 648.00	0.00	29 739.00	0.00	38 067.00	0.00	1 145 648.00	0.00	29 739.00	0.00	38 067.00	0.00	1 145 648.00	0.00	29 739.00	0.00	38 067.00	0.00
	powroty		1 145 648.00	0.00	29 739.00	0.00	38 067.00	0.00	1 145 648.00	0.00	29 739.00	0.00	38 067.00	0.00	1 145 648.00	0.00	29 739.00	0.00	38 067.00	0.00
sudoku 21 - pierwsze	czas (ms)		252.90	75.02	183.40	57.51	1 038.50	182.10	537.80	283.21	323.90	271.90	845.60	434.98	302.60	50.31	147.60	53.02	571.30	69.60
	węzły		84 327.00	0.00	67 787.00	0.00	309 457.00	0.00	136 580.20	74 077.62	93 949.30	79 869.71	230 571.70	92 168.77	70 636.00	0.00	37 981.00	0.00	149 950.00	0.00
	powroty		84 271.00	0.00	67 731.00	0.00	309 401.00	0.00	136 524.20	74 077.62	93 893.30	79 869.71	230 515.70	92 168.77	70 580.00	0.00	37 925.00	0.00	149 894.00	0.00
sudoku 21 - wszystk0	czas (ms)		694.70	128.14	618.40	132.77	1 259.10	247.13	955.60	249.06	767.70	236.14	1 313.20	252.72	980.40	49.70	797.70	218.57	1 455.80	243.11
	węzły		245 081.00	0.00	226 960.00	0.00	371 693.00	0.00	245 081.00	0.00	226 960.00	0.00	371 693.00	0.00	245 081.00	0.00	226 960.00	0.00	371 693.00	0.00
	powroty		245 081.00	0.00	226 960.00	0.00	371 693.00	0.00	245 081.00	0.00	226 960.00	0.00	371 693.00	0.00	245 081.00	0.00	226 960.00	0.00	371 693.00	0.00
sudoku 40 - pierwsze	czas (ms)		274.70	49.73	5 077.10	840.08	2 429.40	250.29	1 513.80	1 277.69	16 012.00	10 113.49	1 685.00	796.96	415.70	52.40	13 126.50	933.60	2 505.20	147.00
	węzły		65 370.00	0.00	2 237 897.00	0.00	760 214.00	0.00	497 945.50	411 733.27	6 220 275.70	3 667 274.55	548 118.10	264 854.47	103 300.00	0.00	4 692 006.00	0.00	770 839.00	0.00
	powroty		65 313.00	0.00	2 237 840.00	0.00	760 157.00	0.00	497 888.50	411 733.27	6 220 218.70	3 667 274.55	548 061.10	264 854.47	103 243.00	0.00	4 691 949.00	0.00	770 782.00	0.00
sudoku 40 - wszystko	czas (ms)		4 862.90	357.99	29 171.60	3 786.39	3 167.30	292.02	3 718.00	147.27	30 071.20	3 871.68	3 141.70	196.77	4 626.00	151.15	33 651.50	2 461.28	3 268.50	164.55
	węzły		1 203 841.00	0.00	11 901 244.00	0.00	995 188.00	0.00	1 203 841.00	0.00	11 901 244.00	0.00	995 188.00	0.00	1 203 841.00	0.00	11 901 244.00	0.00	995 188.00	0.00
	powroty		1 203 841.00	0.00	11 901 244.00	0.00	995 188.00	0.00	1 203 841.00	0.00	11 901 244.00	0.00	995 188.00	0.00	1 203 841.00	0.00	11 901 244.00	0.00	995 188.00	0.00



Wykres 1 Czas działania backtrackingu w zależności od heurystyk dla różnych instancji sudoku

Na wykresie 1 można łatwo zauważyć, że dla kombinacji heurystyk 12, 22 oraz 32 – a więc tych, gdzie zmienne są wybierane heurystyką DOMAIN\_SORTED – wg najmniejszych dziedzin, czas wykonania (choć całkiem dobry, lepszy niż metodą *inorder* dla łatwiejszych instancji) bardzo szybko rośnie dla trudniejszych problemów, heurystykę tę muszą więc na wstępie odrzucić.



Wykres 2 Czas działania backtrackingu dla wybranych kombinacji heurystyk

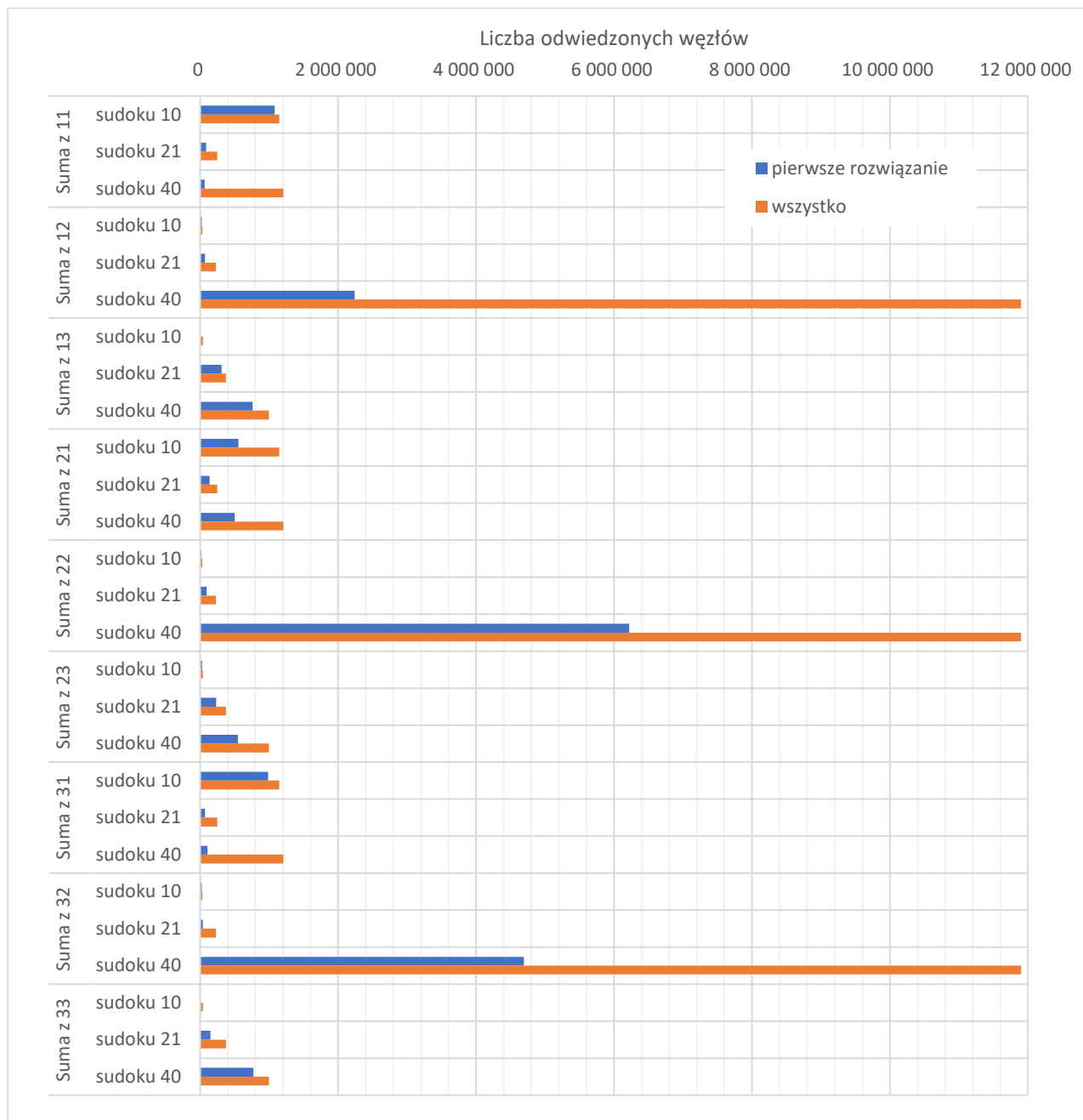
Na wykresie 2 (wykres bez 2 heurystyki wyboru wartości w celu powiększenia pozostałych) widać, że dla wybierania zmiennych metodą INORDER (11, 21, 21) działają dużo wolniej dla sudoku nr 10, szybciej dla sudoku 21 i znów wolniej dla sudoku 40, natomiast czas działania dla metody COLS (13, 23, 33) rośnie wraz z trudnością problemu.

Tabela 2 Porównanie czasu wykonania dla wyboru zmiennych wg ilości pustych pól w kolumnach

Etykiety wierszy	Średnia z 13	Średnia z 23	Średnia z 33
<b>wszystko</b>	<b>1541.53</b>	<b>1556.93</b>	<b>1616.33</b>
sudoku 10	198.20	215.90	124.70
sudoku 21	1259.10	1313.20	1455.80
sudoku 40	3167.30	3141.70	3268.50
<b>pierwsze rozwiązanie</b>	<b>1157.33</b>	<b>891.23</b>	<b>1032.60</b>
sudoku 10	4.10	143.10	21.30
sudoku 21	1038.50	845.60	571.30
sudoku 40	2429.40	1685.00	2505.20
<b>Średnia końcowa</b>	<b>1349.43</b>	<b>1224.08</b>	<b>1324.47</b>

Porównując wyniki w Tabeli 2 dla wyboru zmiennych według ilości pustych pól w kolumnach widzimy, że średnie wyniki dla 3 instancji sudoku są bardzo zbliżone dla wszystkich 3 heurystyk wyboru wartości. Najkrótszy średni czas działania algorytmu jest dla wyboru po kolei (*INORDER -1*), jednak czas znalezienia pierwszego rozwiązania oraz średnia końcowa jest najmniejsza przy losowym wyborze wartości. Warto jednak zauważyć, że jak pokazuje Tabela 1, losowy wybór wartości charakteryzuje się bardzo dużym odchyleniem standardowym.

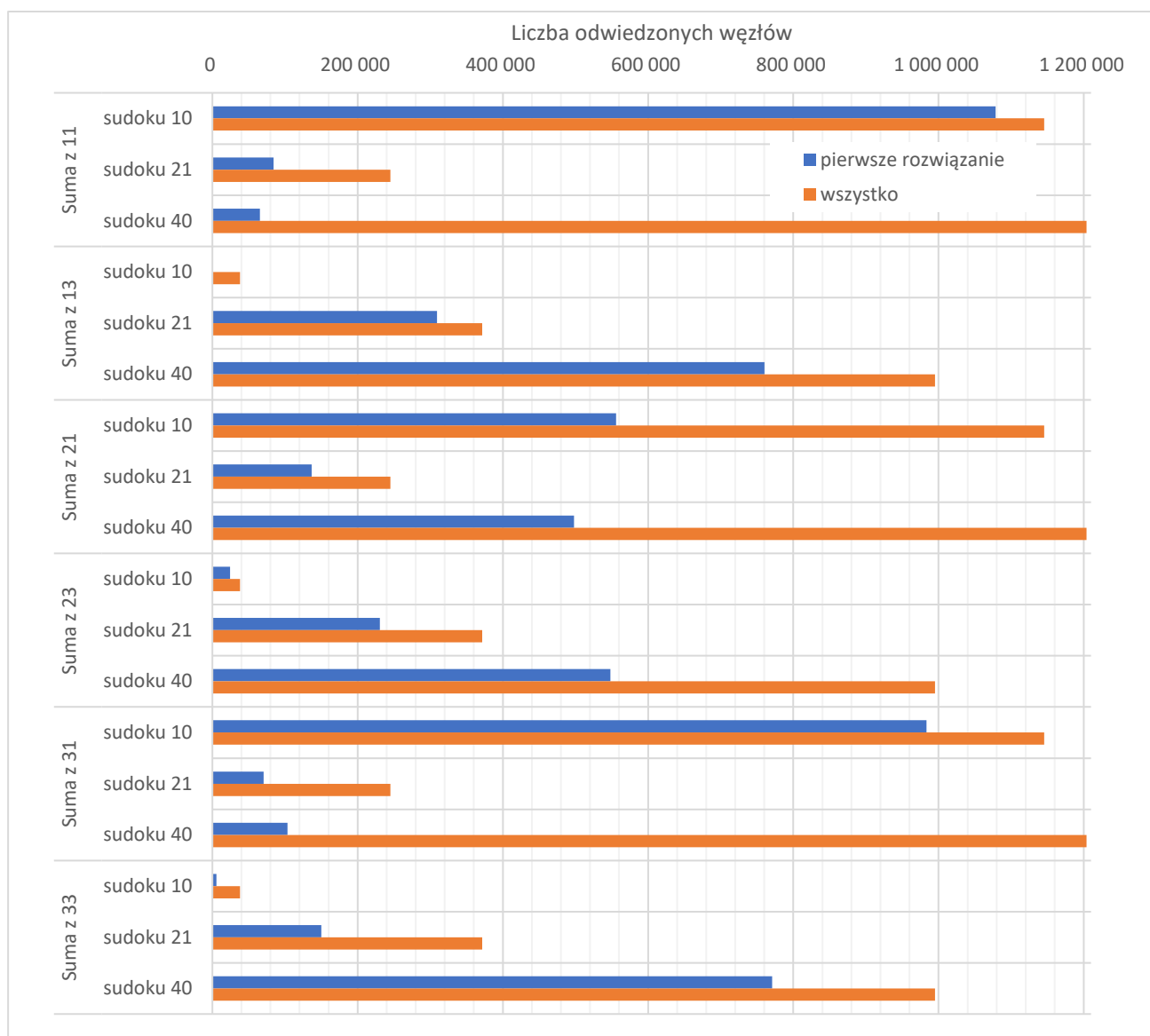
Warto więc porównać także ilość odwiedzanych węzłów.



Wykres 3 Liczba węzłów odwiedzonych przez backtracking w zależności od kombinacji heurystyk dla różnych instancji sudoku

Na wykresie 3 widać wyraźnie, że dużo wolniejsze działanie z wyborem zmiennych wg wielkości dziedziny wynika z dużo większej liczby odwiedzonych węzłów. Najprawdopodobniej heurystyka ta działa słabiej dla trudniejszych problemów, ponieważ liczba pustych pól jest bardziej zbliżona, a jest to niestety tylko heurystyka statyczna.





Wykres 4 Liczba odwiedzonych przez backtracking węzłów dla wybranych heurystyk

Wykres 4 wygląda bardzo podobnie do wykresu 2, co nie dziwi, ponieważ ilość odwiedzanych węzłów jest bardzo powiązana z czasem wykonywania.

Tabela 3 Porównanie liczby odwiedzonych węzłów dla wyboru zmiennych wg ilości pustych pól w kolumnie

Etykiety wierszy	Średnia z 13	Średnia z 23	Średnia z 33
<b>pierwsze rozwiązanie</b>	<b>356 664.00</b>	<b>267 693.17</b>	<b>308 805.67</b>
sudoku 10	321.00	24 389.70	5 628.00
sudoku 21	309 457.00	230 571.70	149 950.00
sudoku 40	760 214.00	548 118.10	770 839.00
<b>wszystko</b>	<b>468 316.00</b>	<b>468 316.00</b>	<b>468 316.00</b>
sudoku 10	38 067.00	38 067.00	38 067.00
sudoku 21	371 693.00	371 693.00	371 693.00
sudoku 40	995 188.00	995 188.00	995 188.00
<b>Suma końcowa</b>	<b>412 490.00</b>	<b>368 004.58</b>	<b>388 560.83</b>

Ponieważ zmienne wybieramy w ten sam sposób, suma wszystkich odwiedzonych węzłów jest dla wszystkich 3 heurystyk wyboru wartości taka sama. Różnice widać jednak w znalezieniu pierwszego rozwiązania, heurystyka losowa (2) robi to średnio najszybciej, nieco wolniej zliczając wystąpienia wpisanych już cyfr (choć dla sudoku 10 i 21 działała lepiej, to już dla sudoku 40 poradziła sobie gorzej), a najwolniej sprawdzając wartości po kolei.

*Wnioski:*

Gdybym miała wybierać najlepszy i najstabilniejszy zestaw heurystyk dla backtrackingu, wybrałabym zestaw 33 – wybór zmiennych wg ilości pustych pól w kolumnach i wartości, których pozostało do wpisania najmniej. Jednak jeżeli mam porównywać 10 uruchomień backtrackingu i forward checkingu, mimo bardzo dużego odchylenia standardowego, do porównania wybiorę 23, a więc wybór wartości w losowy sposób, ponieważ dało lepsze wyniki.

## Wybór najlepszej kombinacji heurystyk dla metody sprawdzania wprzód

### *Badanie 2: Wybór najlepszej kombinacji heurystyk dla sprawdzania wprzód*

*Cel badania:* wybór najszybszych i najbardziej efektywnych heurystyk

*Stałe w badaniu:*

algorytm: metoda sprawdzania wprzód (*forward checking*)

*Zmienne w badaniu:*

instancje problemu (Sudoku nr 10 – poziom trudności 1, 21 – poziom 4 oraz 40 – poziom 7)

heurystyki wyboru zmiennych oraz wartości – oznaczenia przyjęte w tabeli wyników:

Pierwsza cyfra – wybór wartości		Druga cyfra – wybór zmiennych	
INORDER	1	INORDER	1
RANDOM	2	DOMAIN_SORTED	2
LEAST_LEFT	3	COLS	3

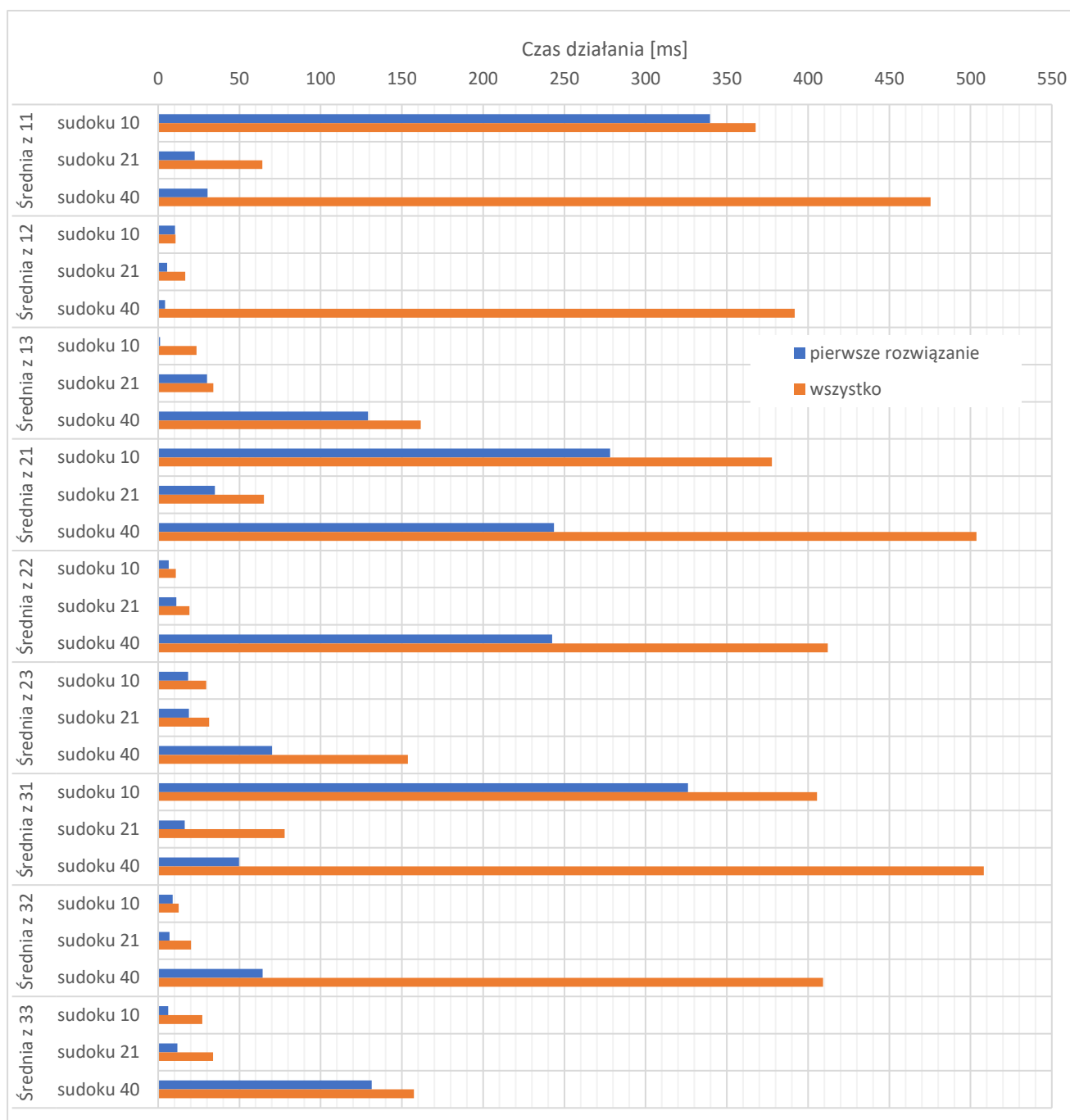
*Przebieg badania:* Załadowanie danych, dziesięciokrotne uruchomienie algorytmu z danymi heurystykami, wyświetlenie i zapis danych. Przeprowadzono 9 badań (dla każdej kombinacji heurystyk) dla każdej z 3 instancji problemu.

*Wyniki:*

Ponieważ poszukuję najlepszej z 9 kombinacji heurystyk, wyniki przedstawiono zbiorczo w tabeli 4 i następnie analizowano.

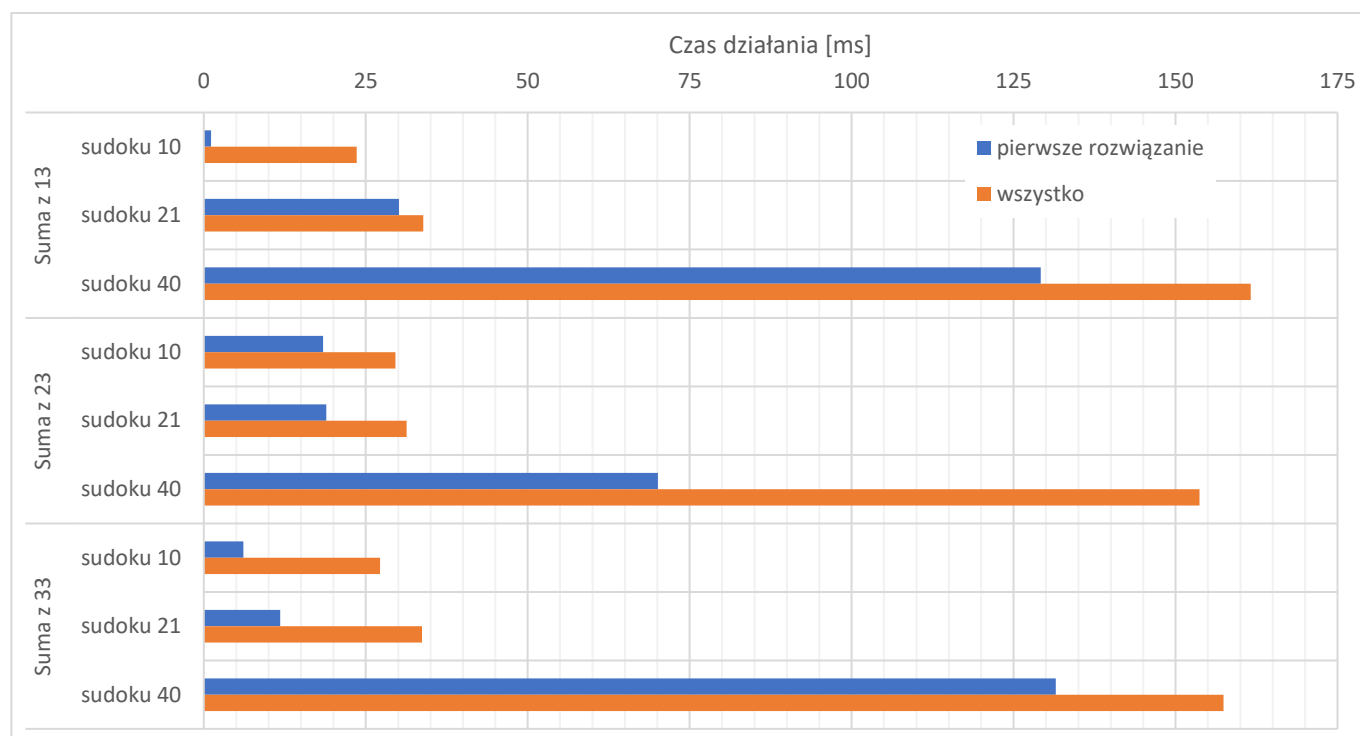
Tabela 4 Porównanie wyników dla forward checkingu

			11		12		13		21		22		23		31		32		33	
			średnia	odch.	średnia	odch.	średnia	odch.	średnia	odch.	średnia	odch.	średnia	odch.	średnia	odch.	średnia	odch.	średnia	odch.
sudoku 10 - pierwsze	czas (ms)		339.70	54.94	10.30	7.13	1.10	2.02	278.20	124.75	6.50	4.30	18.40	12.47	326.10	61.80	8.90	6.69	6.10	8.44
	węzły		104 004.00	0.00	1 413.00	0.00	69.00	0.00	83 773.10	34 182.48	872.80	291.83	2 344.20	765.06	91 361.00	0.00	998.00	0.00	520.10	159.30
	powroty		103 949.00	0.00	1 358.00	0.00	14.00	0.00	83 718.10	34 182.48	817.80	291.83	2 289.20	765.06	91 306.00	0.00	943.00	0.00	465.10	159.30
sudoku 10 - wszystko	czas (ms)		367.70	61.04	10.70	7.21	23.60	17.70	377.70	67.61	10.90	8.09	29.60	21.12	405.50	75.69	12.60	8.38	27.20	25.16
	węzły		112 160.00	0.00	1 506.00	0.00	4 128.00	0.00	112 160.00	0.00	1 506.00	0.00	4 128.00	0.00	112 160.00	0.00	1 506.00	0.00	3 865.80	786.60
	powroty		112 160.00	0.00	1 506.00	0.00	4 128.00	0.00	112 160.00	0.00	1 506.00	0.00	4 128.00	0.00	112 160.00	0.00	1 506.00	0.00	3 865.80	786.60
sudoku 21 - pierwsze	czas (ms)		22.40	16.58	5.50	5.73	30.10	18.46	34.90	20.04	11.20	7.37	18.90	13.59	16.40	17.53	6.90	6.53	11.80	9.98
	węzły		3 855.00	0.00	676.00	0.00	5 476.00	0.00	7 399.50	3 984.19	1 530.50	740.81	3 326.50	1 783.94	1 953.00	0.00	764.00	0.00	1 988.00	0.00
	powroty		3 799.00	0.00	620.00	0.00	5 420.00	0.00	7 343.50	3 984.19	1 474.50	740.81	3 270.50	1 783.94	1 897.00	0.00	708.00	0.00	1 932.00	0.00
sudoku 21 - wszystko	czas (ms)		64.10	22.05	16.60	13.60	33.90	18.97	65.10	21.38	19.20	15.37	31.30	14.55	77.80	28.59	20.20	15.96	33.70	16.17
	węzły		14 540.00	0.00	2 592.00	0.00	6 331.00	0.00	14 540.00	0.00	2 592.00	0.00	6 331.00	0.00	14 540.00	0.00	2 592.00	0.00	6 331.00	0.00
	powroty		14 540.00	0.00	2 592.00	0.00	6 331.00	0.00	14 540.00	0.00	2 592.00	0.00	6 331.00	0.00	14 540.00	0.00	2 592.00	0.00	6 331.00	0.00
sudoku 40 - pierwsze	czas (ms)		30.40	12.63	4.30	5.93	129.20	40.19	243.60	179.84	242.40	151.16	70.10	37.58	49.70	23.58	64.30	19.70	131.50	31.34
	węzły		9 215.00	0.00	592.00	0.00	28 004.00	0.00	68 667.70	46 722.91	69 347.20	42 701.20	16 190.50	5 126.35	13 804.00	0.00	18 945.00	0.00	30 042.00	0.00
	powroty		9 158.00	0.00	535.00	0.00	27 947.00	0.00	68 610.70	46 722.91	69 290.20	42 701.20	16 133.50	5 126.35	13 747.00	0.00	18 888.00	0.00	29 985.00	0.00
sudoku 40 - wszystko	czas (ms)		475.40	51.17	391.70	54.72	161.60	39.59	503.70	66.83	412.10	66.60	153.70	29.80	508.20	90.40	409.20	62.07	157.40	32.45
	węzły		152 282.00	0.00	119 764.00	0.00	36 357.00	0.00	152 282.00	0.00	119 764.00	0.00	36 357.00	0.00	152 282.00	0.00	119 764.00	0.00	36 357.00	0.00
	powroty		152 282.00	0.00	119 764.00	0.00	36 357.00	0.00	152 282.00	0.00	119 764.00	0.00	36 357.00	0.00	152 282.00	0.00	119 764.00	0.00	36 357.00	0.00



Wykres 5 Czas działania forward checkingu dla różnych kombinacji heurystyk i instancji sudoku

Na wykresie 5 widać wyraźnie, że dla wyboru zmiennych wg wielkości dziedziny (*DOMAIN SORTED* – 12, 22, 32) jest bardzo duży wzrost czasu działania w przypadku sudoku 40. Przeszukiwanie zmiennych po kolei (*INORDER* – 11, 21, 31), podobnie jak dla backtrackingu, radzi sobie dużo lepiej z sudoku 21 niż 10 czy 40, niemniej dla forward checkingu wypada ono znacznie gorzej na tle innych, gorzej od wyboru zmiennych wg dziedziny. Odrzucę więc od razu obie metody.



Wykres 6 Porównanie czasu działania forward checkingu dla wyboru zmiennych wg ilości pustych pól w kolumnie w zależności od heurystyk wyboru wartości

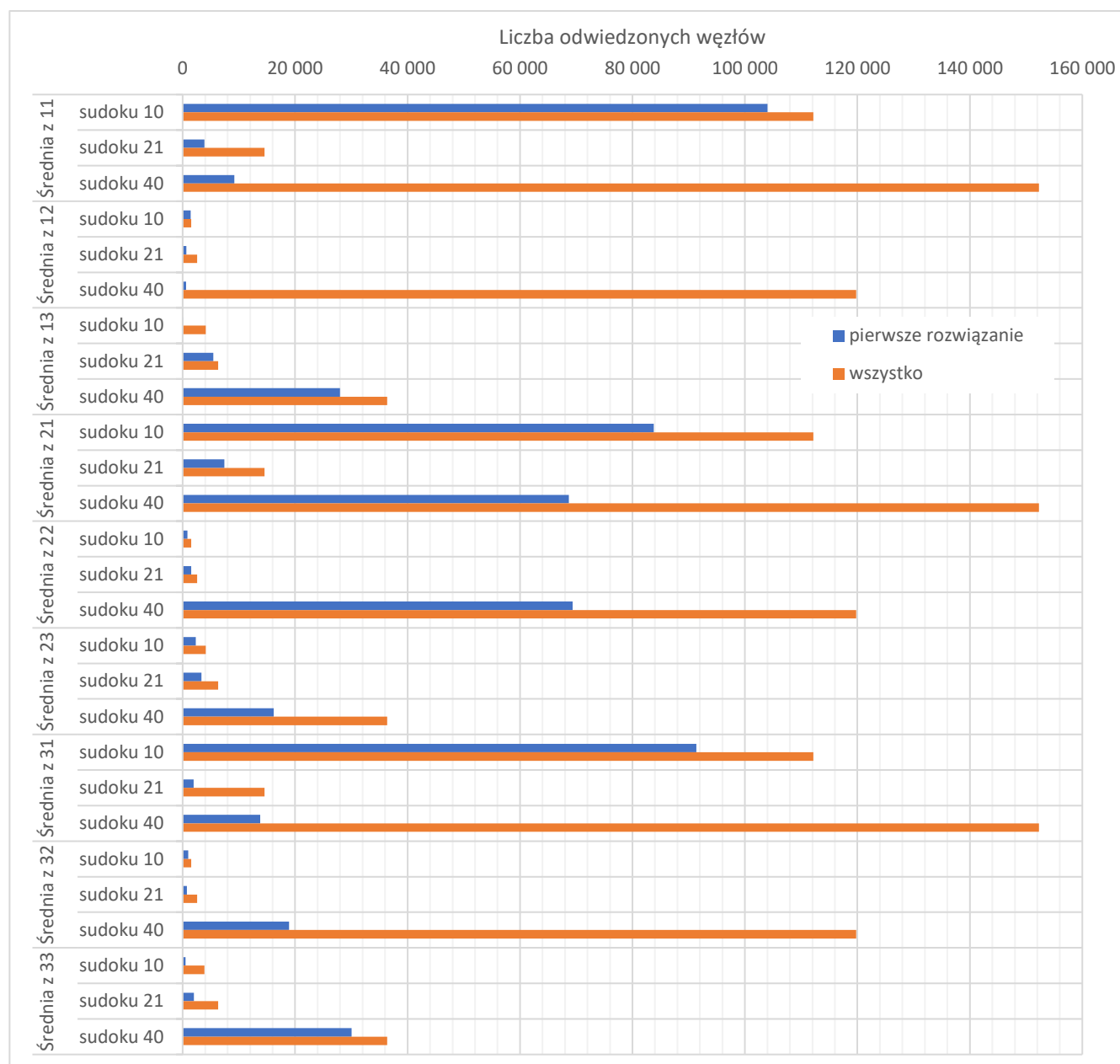
Na wykresie 6 można zauważyć, że wybór wartości po kolei (13) najszybciej znajduje pierwsze rozwiązanie dla sudoku 10, z sudoku 40 radzi sobie jednak najgorzej. Z sudoku 40 najlepiej radzi sobie losowy wybór wartości (23), jednak on gorzej radzi sobie z pozostałymi instancjami testowymi. Wybór zmiennych w zależności od ilości wpisanych już liczb (33) radzi sobie najlepiej z sudoku 21. Aby to rozstrzygnąć, muszę więc porównać średnie.

Tabela 5 Porównanie średniego czasu wykonywania forward checkingu dla wyboru zmiennych wg ilości pustych pól w kolumnie

Etykiety wierszy	Średnia z 13	Średnia z 23	Średnia z 33
pierwsze rozwiązanie	53.47	35.80	49.80
wszystko	73.03	71.53	72.77
<b>Średnia</b>	<b>63.25</b>	<b>53.67</b>	<b>61.28</b>

#### Wnioski:

Także i w przypadku tego algorytmu najlepszy okazał się wybór wartości w sposób losowy, a zmiennych według ilości pustych pól w kolumnie. Gdybym jednak chciała dostać rozwiązanie jak najszybciej, a nie uśredniała wynik z 10 uruchomień, to duże odchylenie standardowe przeważałoby na niekorzyść losowej metody w kierunku wyboru wartości, których najwięcej zostało już wpisanych.



Wykres 7 Liczba odwiedzonych przez forward checking węzłów w zależności od heurystyk i instancji

#### Wnioski:

Liczba odwiedzonych węzłów pokazuje podobne zależności, co czas działania.

Można też zauważyć, że dużo większy wpływ na czas działania i liczbę odwiedzonych węzłów algorytmu ma sposób wyboru zmiennych niż wartości.

## Porównanie algorytmów

### Badanie 3: Porównanie przeszukiwania z nawrotami i przeszukiwania wprzód

*Cel badania:* wybór lepszego algorytmu

*Stałe w badaniu:*

heurystyki wyboru zmiennych oraz wartości (wybór wartości w sposób losowy, a zmiennych według ilości pustych pól w kolumnie)

*Zmienne w badaniu:*

instancje problemu (Sudoku nr 10 – poziom trudności 1, 21 – poziom 4 oraz 40 – poziom 7)

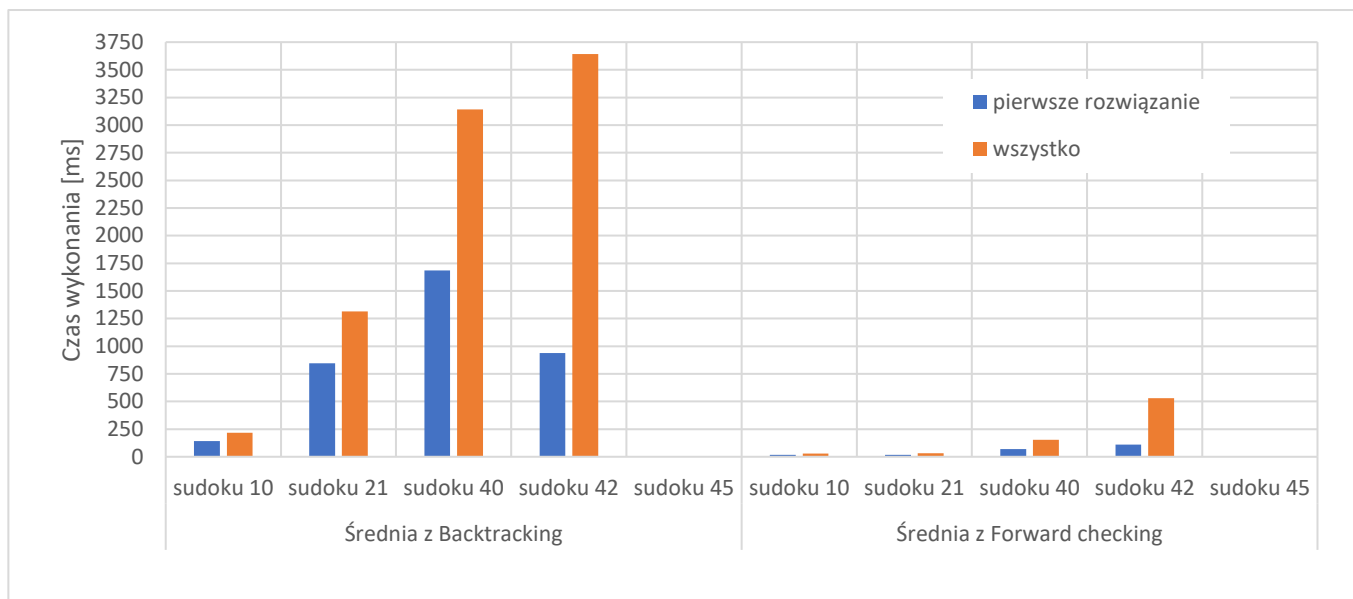
algorytmy: *backtracking* oraz *forward checking*

*Przebieg badania:* Załadowanie danych, dziesięciokrotne uruchomienie algorytmu z danymi heurystykami, wyświetlenie i zapis danych.

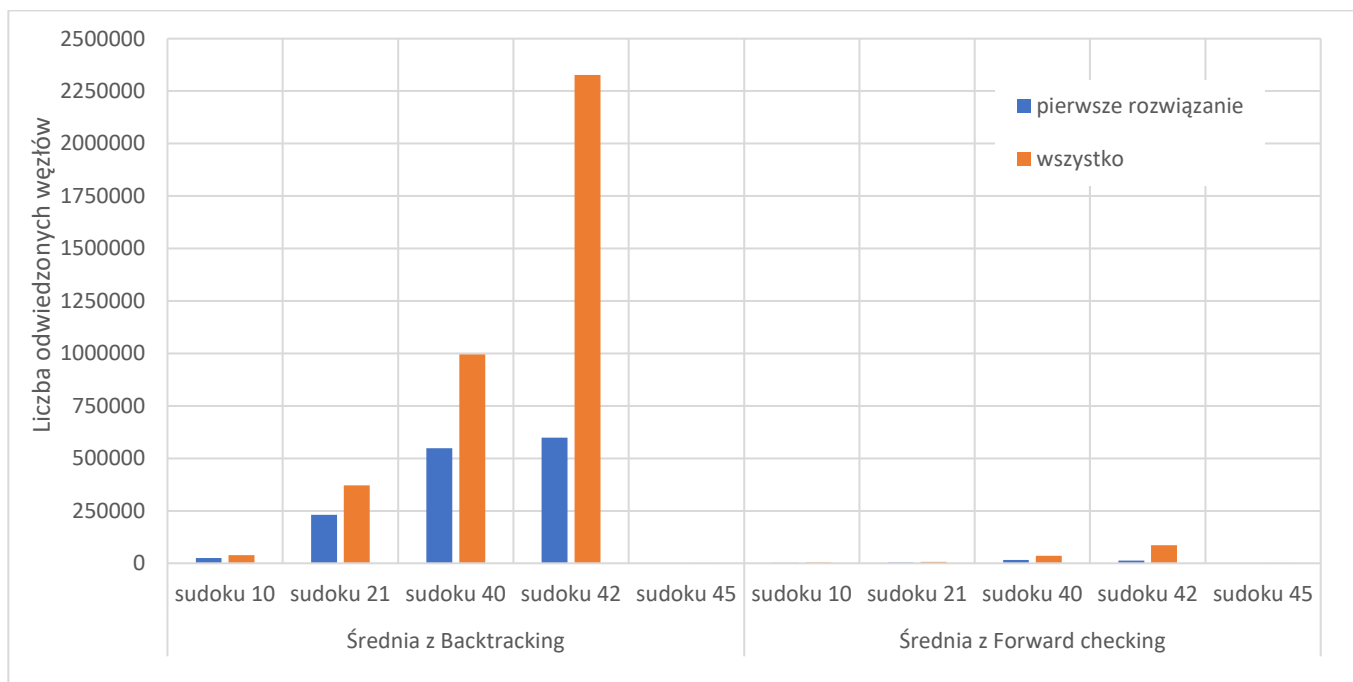
*Wyniki:*

Tabela 6 Wyniki porównania algorytmów dla 5 instancji

		Backtracking		Forward checking	
		średnia	odch.	średnia	odch.
sudoku 10 - pierwsze rozw.	czas (ms)	143.10	93.69	18.40	12.47
	węzły	24 389.70	11 252.11	2 344.20	765.06
	powroty	24 334.70	11 252.11	2 289.20	765.06
sudoku 10 - wszystko	czas (ms)	215.90	93.25	29.60	21.12
	węzły	38 067.00	0.00	4 128.00	0.00
	powroty	38 067.00	0.00	4 128.00	0.00
sudoku 21 - pierwsze rozw.	czas (ms)	845.60	434.98	18.90	13.59
	węzły	230 571.70	92 168.77	3 326.50	1 783.94
	powroty	230 515.70	92 168.77	3 270.50	1 783.94
sudoku 21 - wszystkie	czas (ms)	1 313.20	252.72	31.30	14.55
	węzły	371 693.00	0.00	6 331.00	0.00
	powroty	371 693.00	0.00	6 331.00	0.00
sudoku 40 - pierwsze rozw.	czas (ms)	1 685.00	796.96	70.10	37.58
	węzły	548 118.10	264 854.47	16 190.50	5 126.35
	powroty	548 061.10	264 854.47	16 133.50	5 126.35
sudoku 40 - wszystkie	czas (ms)	3 141.70	196.77	153.70	29.80
	węzły	995 188.00	0.00	36 357.00	0.00
	powroty	995 188.00	0.00	36 357.00	0.00
sudoku 42 - pierwsze rozw.	czas (ms)	938.60	447.82	109.40	169.58
	węzły	598 798.00	302 713.77	13 539.10	10 259.15
	powroty	598 738.00	302 713.77	13 479.10	10 259.15
sudoku 42 - wszystkie	czas (ms)	3 641.30	90.13	530.60	187.53
	węzły	2 326 471.00	0.00	85 640.00	0.00
	powroty	2 326 432.00	0.00	85 601.00	0.00
sudoku 45 - wszystkie	czas (ms)	0.60	1.20	2.60	2.33
	węzły	4.00	0.00	4.00	0.00
	powroty	14.60	1.20	14.60	1.20



Wykres 8 Porównanie czasu wykonania dla obu metod



Wykres 9 Porównanie liczby odwiedzonych węzłów dla obu metod

#### Wnioski:

Jak widać na wykresach 8 i 9, metoda sprawdzania wprzód jest dużo lepsza i szybsza niż przeszukiwanie z nawrotami. (Czas wykonywania nie jest też wprost proporcjonalny do liczby odwiedzonych węzłów, bo można zobaczyć, że backtracking znalazł rozwiązanie do sudoku 42 szybciej niż do sudoku 40, mimo, że wymagało to odwiedzenia średnio nieznacznie większej liczby węzłów).



## Podsumowanie

Problemy spełniania ograniczeń można rozwiązywać na różne sposoby. Oprócz odpowiedniego zdefiniowania zmiennych, wartości i ograniczeń, istotny jest także odpowiedni dobór heurystyk – do wyboru wartości oraz, przede wszystkim, do wyboru zmiennych. Dużo lepsza jest metoda sprawdzania wprzód, aby wykluczać wartości, które na pewno nie są poprawne, niż przeszukiwanie z nawrotami.