## Uniwersytet Warszawski Wydział Nauk Ekonomicznych

Monika Kaczan 410998 Mateusz Domaradzki 410089

# Analiza porównawcza ryzyka

Projekt zaliczeniowy na przedmiot Zaawansowana Analiza Szeregów Czasowych

Praca wykonana pod kierunkiem dr Anety Dzik-Walczak

#### Wstęp

Celem niniejszego projektu jest analiza porównawcza ryzyka rozumianego jako oszacowanie funkcji warunkowej wariancji w modelach klasy GARCH. W ramach badania utworzyliśmy portfel złożony z czterech kryptowalut. Po wstępnej analizie danych zbudowaliśmy siedem modeli należących do klasy GARCH i porównaliśmy ich wyniki. Najlepszy model został następnie wykorzystany do oszacowania funkcji warunkowej wariancji oraz oszacowania wartości narażonej na ryzyko w okresie out-of-sample.

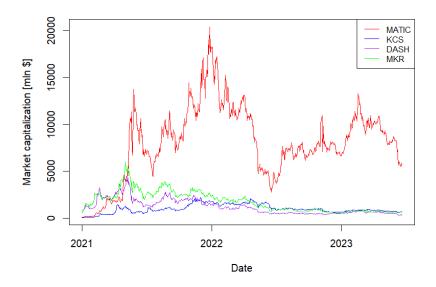
#### Dane

Zgodnie z założeniami projektu, do stworzenia portfela wybraliśmy cztery kryptowaluty, których pierwsze litery nazw odpowiadały pierwszym literom naszych imion i nazwisk: Polygon (MATIC), Dash (DASH), Maker (MKR) oraz KuCoin (KCS). Na ich podstawie stworzyliśmy portfel, w którym każdego dnia udziały procentowe cen zamknięcia każdej z kryptowalut były proporcjonalne do ich kapitalizacji rynkowej (ang. *market-cap-weighted portfolio*).

Jako okres badawczy przyjęliśmy ostatnie 2,5 roku od 1 stycznia 2021 do daty pobrania danych tj. 20 czerwca 2023. Tym samym nasza próba składała się z 731 obserwacji. Wybór okresu był podyktowany dostępnością danych dla poszczególnych walut, a także chęcią uzyskania odpowiedniej liczby obserwacji do przeprowadzenia modelowania przy jednoczesnych zachowaniu jej aktualności. Jako okres in-sample zostanie potraktowane pierwsze 631 obserwacji, a jako okres out-of-sample kolejne 100.

Na Rysunku 1 przedstawiliśmy wykresy kapitalizacji rynkowej, a tym samym udziału procentowego w portfelu każdej z kryptowalut w czasie. Widzimy, że od II kwartału 2021 roku kapitalizacja MATIC znacząco wzrosła i w dużym stopniu przeważa nad innymi kryptowalutami. Udziały DASH, MKR i KCS w portfelu są nikłe. Możemy więc powiedzieć, że nasz portfel jest słabo zdywersyfikowany.

Rysunek 1. Kapitalizacja rynkowa wybranych kryptowalut

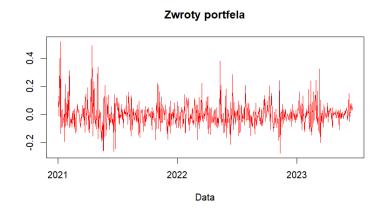


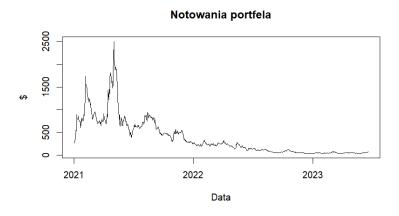
Źródło: Opracowanie własne

## Wstępna analiza danych

W pierwszej kolejności obliczyliśmy ciągłe zwroty, na których będziemy przeprowadzać dalszą analizę. Rysunek 2 przedstawia wykresy notowań i zwrotów utworzonego przez nas portfela. Na podstawie wykresu notowań widzimy, że notowania naszego portfela były wysokie i charakteryzowały się wysoką wariancją w pierwszej połowie 2021 roku, natomiast później były mniej zmienne i malały. Z pewnością nie jest to więc szereg stacjonarny. Na podstawie wykresu zwrotów możemy zaobserwować, że charakteryzują się one zjawiskiem grupowania wariancji - okresy małych jak i dużych zmian kursów mają tendencję do występowania seriami.

Rysunek 2. Charakterystyka portfela – zwroty oraz notowania

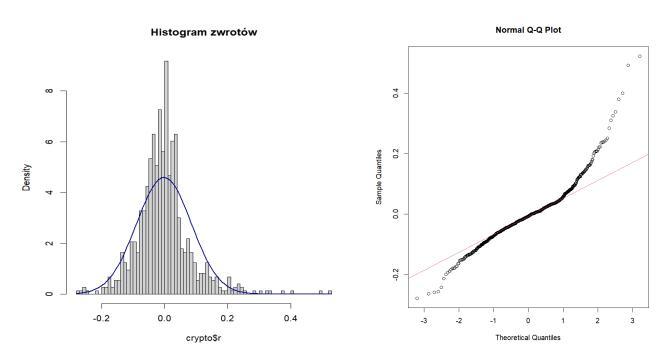




Źródło: Opracowanie własne

Na Rysunku 3 został przedstawiony histogram zwrotów portfela oraz wykres QQplot. Widzimy, że rozkład zwrotów jest prawo skośny, chociaż poza tym może przypominać rozkład normalny. Brakuje m.in. wysokiego szczytu funkcji gęstości charakterystycznego dla rozkładu leptokurtycznego. W formalnym teście Jacque-Bera odrzuciliśmy H0 o normalności rozkładu zwrotów. Podobnie na Rysunku 3 przedstawiającym wykres QQplot widzimy, że na ogonach nasza próba odchodzi od rozkładu normalnego.

Rysunek 3. Histogram zwrotów portfela oraz wykres QQplot.

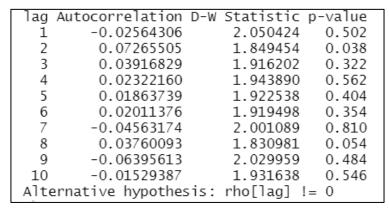


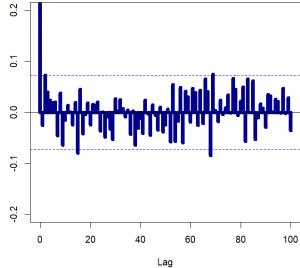
Źródło: Opracowanie własne

Następnie przeanalizowaliśmy wykresy ACF zwrotów oraz kwadratów zwrotów na Rysunku 4. Na wykresie ACF zwrotów widzimy kilka istotnych wartości, co może wskazywać na pewne problemy z autokorelacją. Potwierdza to również formalny test Durbina-Watsona, gdzie na 10% poziomie istotności nie możemy odrzucić H0 o występowaniu autokorelacji dla 2 i 8 opóźnienia.

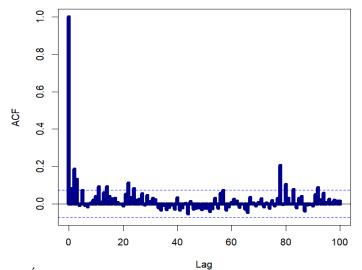
Rysunek 4. Statystyka DW, wartości ACF dla zwrotów oraz ich kwadratów

#### Wykres ACF zwrotow crypto





#### Wykres ACF kwadratow zwrotow crypto



Źródło: Opracowanie własne

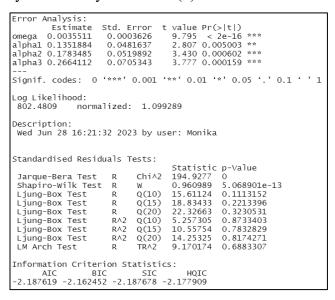
Na wykresie ACF kwadratów zwrotów widzimy kilka istotnych wartości, jednak nie jest ich dużo i ciężko powiedzieć, aby wygasały. Na podstawie wykresów możemy więc tylko przypuszczać, że występują jakieś efekty ARCH. Formalny test LM na występowanie efektów ARCH potwierdził jednak, że takie efekty są obecne (bardzo silnie odrzucamy H0 o braku efektów ARCH). Możemy więc przejść do modelowania.

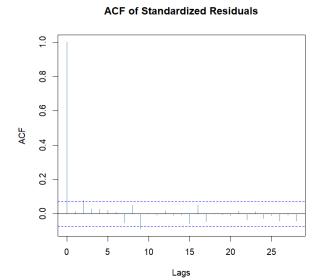
#### Modele ARCH i GARCH

Na początku przetestowaliśmy najprostszy model ARCH(1) jako benchmark. Stała w równaniu średniej okazała się nieistotna, więc usunęliśmy ją z modelu. Testy diagnostyczne wykazały, że reszty w modelu nie mają rozkładu normalnego. Jednak nie udało się nam usunąć efektów ARCH - w teście LM odrzucaliśmy H0 o braku efektów ARCH.

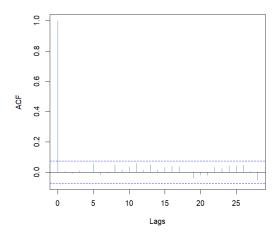
W związku z tym zwiększyliśmy liczbę opóźnień autoregresyjnych do 2, a później 3 i ponownie oszacowaliśmy model ARCH. Dopiero w modelu ARCH(3) udało nam się usunąć efekty ARCH. Reszty w modelu nadal nie miały rozkładu normalnego (Test Jarque-Bera), jednak jak wspomnieliśmy udało nam się usunąć efekty ARCH (LM Arch Test). W stosunku do ARCH(1), poprawiliśmy też znaczącą wartości kryteriów informacyjnych.

Rysunek 5. Wyniki ARCH(1).





**ACF of Squared Standardized Residuals** 



Źródło: Opracowanie własne

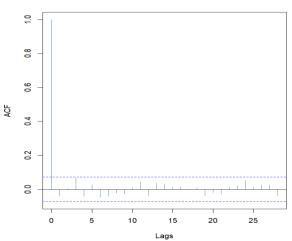
Analizując korelogramy standaryzowanych reszt i kwadratów standaryzowanych reszt na Rysunku 5, obserwujemy, że wszystkie wartości na obu wykresach są (w przybliżeniu) statystycznie nieistotne. Oznacza to, że udało nam się wyeliminować autokorelacje i efekty ARCH.

W dalszej kolejności oszacowaliśmy modele z rodziny GARCH, wychodząc od modelu GARCH(1,1). Podobnie jak w przypadku modeli ARCH, szukaliśmy wśród takiej specyfikacji, w której wszystkie parametry były statystycznie istotne na poziomie 10% oraz udało się wyeliminować efekty ARCH. Następnie wybraliśmy model o najniższej wartości kryteriów informacyjnych. W naszym przypadku okazało się, że w wystarczył model GARCH(1,1).

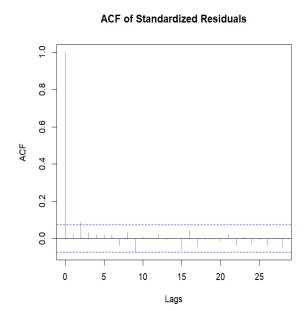
Rysunek 6. Wyniki GARCH(1,1)

```
Error Analysis:
Estimate Std. Error
omega 0.0006131 0.0001887
                                           t value Pr(>|t|)
3.249 0.00116 **
4.675 2.94e-06 ***
14.274 < 2e-16 ***
alpha1 0.2278967
beta1 0.7160426
                           0.0487514
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' '1
Log Likelihood:
 803.2656
                   normalized: 1.100364
  Wed Jun 28 17:12:42 2023 by user: Monika
Standardised Residuals Tests:
                                              Statistic p-Value
  Jarque-Bera Test
Shapiro-Wilk Test
                                              230.1713
0.9593117
                                    Chi∧2
                                    Q(10)
                                              13.15616
16.31753
19.13738
  Ljung-Box Test
Ljung-Box Test
                                                             0.2150714
                                                             0.3612679
0.5129127
                                    Q(20)
  Ljung-Box Test
  Ljung-Box Test
Ljung-Box Test
                                    Q(10)
Q(15)
                             RA2
                                              9 913565
                                                             0 4481091
                                              14.18145
 Ljung-Box Test
LM Arch Test
                             R<sub>1</sub>2
                                    Q(20)
                                              15.57266
                                                             0.7427567
                                              12.10902
Information Criterion Statistics:
 AIC BIC SIC HQIC
-2.192509 -2.173633 -2.192542 -2.185226
```





Źródło: Opracowanie własne



Również w przypadku modelu GARCH(1,1) przyjrzeliśmy się korelogramom standaryzowanych reszt i kwadratów standaryzowanych reszt na Rysunku 6. Ponownie wykresy wskazują, że udało nam się wyeliminować autokorelacje i efekty ARCH, jednak rozkład reszt nie jest normalny.

#### Rozszerzenia modeli GARCH

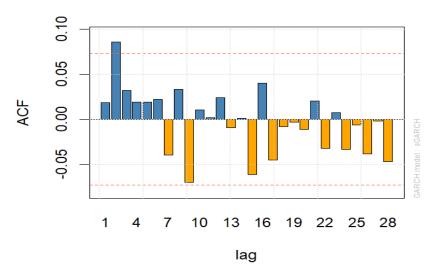
Jak widzimy powyżej, Modele wciąż można ulepszyć np. poprzez uzyskanie rozkładu normalnego reszt. Z tego powodu do dalszego badania zostaną rozważone 3 rozszerzenia modelu GARCH. Chodzi mianowicie gjr-GARCH, tGARCH oraz GARCH-t. Najlepszy model do prognozowania oraz wyjaśniania naszych danych zostanie wybrany za pomocą kryteriów informacyjnych MAIC.

Model GARCH-t rózni się tym od modeu GARCH, że rozkład jego składnika losowego przyjmuje rozkład t-studenta. Jest to uzasadnione ze względu na wcześniej obserwowane grupowanie się wariancji co wskazuje na potrzebę użycia rozkładu t-studenta który charakteryzuje się "grubszymi ogonkami rozkładu" czyli większą kurtozą. Stąd dalsze wyniki będą dotyczyły modelu GARCH-t (1,1)

Rysunek 7. Wyniki dla GARCH-t(1,1)

* GARCH Model Fit * **	Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals			
Conditional Variance DynamicsGARCH Model : sGARCH(1,1) Mean Model : ARFIMA(0,0,0) Distribution : std	statistic p-value Lag[1] 0.5972 0.4396 Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5] 3.7633 0.2851 Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9] 6.1692 0.2792 d.o.f=2			
Optimal Parameters	Weighted ARCH LM Tests			
Estimate   Std. Error   t value   Pr(> t )	Statistic Shape Scale P-Value ARCH Lag[3] 3.882 0.500 2.000 0.04881 ARCH Lag[5] 5.172 1.440 1.667 0.09378 ARCH Lag[7] 6.576 2.315 1.543 0.10697			
Robust Standard Errors:  Estimate Std. Error t value Pr(> t ) omega 0.000646 0.000459 1.4076 0.159262 alphal 0.204448 0.082200 2.4872 0.012876 betal 0.747150 0.104541 7.1469 0.000000 shape 3.779299 0.519097 7.2805 0.000000				

#### **ACF of Standardized Residuals**



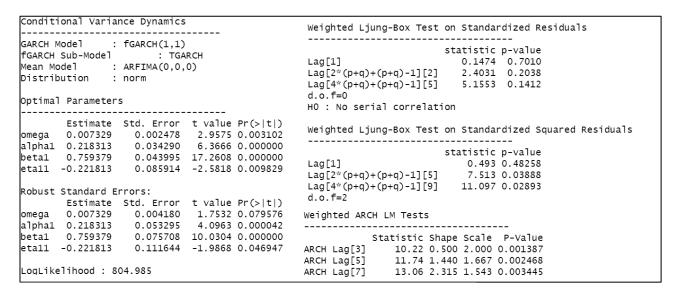
Źródło: Opracowanie własne

Jak widać na Rysunku 7 problem zaczyna się już z eleminacją efektu ARCH. Co prawda wartości nie osiągają wartości 0, lecz są całkiem bliskie. Patrząc na test Ljunga-Boxa udało się natomiast wyeliminować autokorelację reszt. Zwracając jednak uwagę na parametry modelu, trzeba zauważyć, że omega jest nieistotna statystycznie. Zatem odrzucamy hipotezę zerową o korelacji dla kwadratów wystandaryzowanych reszt.

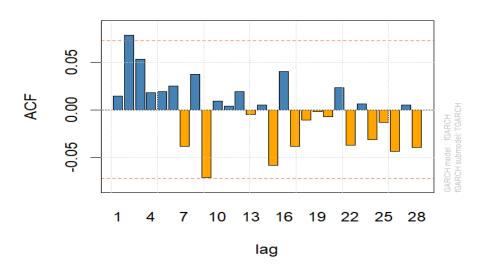
Patrząc na Rysunek 7 nie udało się wyeliminować autokorelacji reszt dla pojedynczej wartości dla drugiego okresu. Model nadal można zatem ulepszyć lub sprawdzić czy uzyskane kryteria informacyjne dla innych modeli nie są niższe.

Kolejnym zaproponowanym modelem będzie tGARCH(1,1). Jego wybór podyktowany został tym, że dostosowuje się lepiej do szoków niż zwykły model GARCH. Stąd, jeśli bada się zjawisko takie jak kryptowaluty, o dużej zmienności, warto go rozważyć.

Rysunek 8. Wyniki tGARCH(1,1)



#### **ACF of Standardized Residuals**



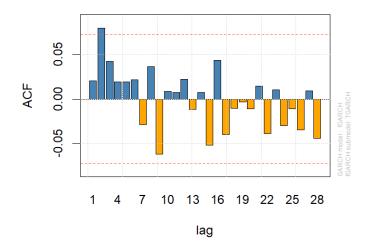
Źródło: Opracowanie własne

Patrząc na korelogram na Rysunku 8 modelu tGARCH(1,1) widać, że standaryzowane reszty mają tendencję do autokorelacji co potwierdza wyniki testu Q-Ljunga Boxa uzyskanego wyżej. Dlatego ze względu na dość słabe wyniki modelu tGARCH(1,1) zostanie także sprawdzona jego inna specyfikacja mianowicie tGARCH(2,1).

## Rysunek 9. Wyniki tGARCH(2,1)

GARCH Model : fGARCH(2,1) fGARCH Sub-Model : TGARCH Mean Model : ARFIMA(0,0,0)				Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals		
				statistic p-value		
			0)	Lag[1] 0.3067 0.5797		
Distrib	oution :	norm		Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2] 2.6222 0.1777		
				Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5] 4.9542 0.1568		
Optima]	l Parameter	S		d.o.f=0 HO : No serial correlation		
				no . No Serial Correlation		
			t value Pr(> t )	Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals		
	0.008625		8.7473 0.000000	weighted Ejung-Box rest on Standardized Squared Residuals		
			4.8080 0.000002	statistic p-value		
	0.149386		23.9917 0.000000	. 547		
	0.639175		19.8926 0.000000	1 - 50 - 6 - 1 - 2 - 6 - 1 - 2 - 1 - 1 - 5 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2		
	-0.573113		-2.4444 0.014509	Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][14] 8.50300 0.3297		
eta12	-0.273883	0.164275	-1.6672 0.095470	d.o.f=3		
Robust	Standard E			undaharah 1990 tu Sarah		
	Estimate	Std. Error	t value Pr(> t )	Weighted ARCH LM Tests		
		0.001384		Charlistic Charles Carles B Value		
alpha1	0.167870	0.056192	2.9874 0.002813	Statistic Shape Scale P-Value		
alpha2	0.149386			ARCH Lag[4] 1.461 0.500 2.000 0.2268		
beta1	0.639175	0.027728	23.0514 0.000000	ARCH Lag[6] 3.516 1.461 1.711 0.2394		
eta11	-0.573113	0.310042	-1.8485 0.064530	ARCH Lag[8] 5.523 2.368 1.583 0.1982		
eta12	-0.273883	0.229990	-1.1908 0.233714			

#### **ACF of Standardized Residuals**



Źródło: Opracowanie własne

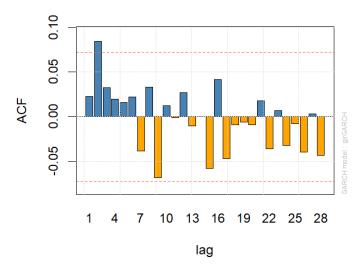
Patrząc na Rysunek 9, dzięki zmianie specyfikacji z tGARCH(1,1) na tGARCH(2,1) udało się wyeliminować wiele negatywnych wyników. Mianowicie dla modelu tGARCH(2,1) test LM ARCH wskazuje na brak efektów ARCH a test Q-Ljunga Boxa wskazuje na brak autokorelacji wśród reszt.

Podobnie jak tGARCH, gjr-GARCH cechuje się tym, że w lepszym stopniu dostosowuje się do gwałtownych zmian wartości portfela.

## Rysunek 10. Wyniki gjr-GARCH(1,1)

```
Conditional Variance Dynamics
                                                   Weighted Liung-Box Test on Standardized Residuals
GARCH Model
              : gjrGARCH(1,1)
                                                                           statistic p-value
Mean Model
                : ARFIMA(0,0,0)
                                                                              0.3809 0.5371
                                                   Lag[1]
Distribution
                                                   Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2]
                                                                              2.9954
                                                                                      0.1407
               : norm
                                                   Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5]
                                                                              5.1897 0.1386
Optimal Parameters
                                                   d.o.f=0
                                                   HO: No serial correlation
        Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
       0.000640
                   0.000198
                              3.2249 0.001260
                                                   Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals
omega
                             4.1013 0.000041
alpha1 0.269967
                   0.065824
beta1
       0.713017
                   0.052516
                             13.5772 0.000000
                                                                           statistic p-value
                             -1.3717 0.170155
gamma1 -0.088482
                   0.064505
                                                                               1.172 0.2789
                                                                               3.981 0.2564
                                                   Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]
Robust Standard Errors:
                                                   Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]
                                                                               6.561 0.2388
        Estimate Std. Error
                             t value Pr(>|t|)
                   0.000312 2.04794 0.040566
       0.269967
                    0.102755
                             2.62729 0.008607
                                                   Weighted ARCH LM Tests
alpha1
        0.713017
                    0.081513 8.74724 0.000000
gamma1 -0.088482
                    0.088933 -0.99493 0.319770
                                                               Statistic Shape Scale P-Value
                                                   ARCH Lag[3]
                                                                 3.565 0.500 2.000 0.0590
LogLikelihood : 804.2198
                                                   ARCH Lag[5]
                                                                    5.022 1.440 1.667
                                                   ARCH Lag[7]
                                                                   6.677 2.315 1.543
```

#### **ACF of Standardized Residuals**



Źródło: Opracowanie własne

Jak widać na Rysunku 10 parametr modelu gamma1 jest nieistotny statystycznie. Mimo to model gjr-GARCH(1,1) zdołał wyeliminować efekty ARCH patrząc na wyniki modelu ARCH LM, oraz wyeliminować autokorelację wsród reszt (test Q-Ljunga-Boxa)

Na Rysunku 10 zostały pokazane wartości ACF dla modelu gjr-GARCH(1,1). Ponownie widać, że słupek dla 2 okresu przekracza dopuszczalną wartość. Stąd zostanie podjęta próba zmiany wartości specyfikacji gjr-GARCH(1,1). Niestety po wielu próbach zmiany specyfikacji, model nie uległ ulepszeniu, stąd nie zostaną zaprezentowane inne dla niego wyniki.

Ostatecznie do porównania wyników posłużą uzyskane kryteria informacyjne. Najlepszy model zostanie wybrany poprzez ich minimalizację.

Tabela 1. Wyniki MAIC dla wybranych modeli

	ARCH(1)	ARCH(3)	GARCH(1,	GARCH(3, 1)	GARCH- t(1,1)	T- GARCH(2, 1)	gjr- GARCH(1, 1)
Akaike	-2,07	-2,19	-2,19	-2,19	-2,29	-2,2	-2,2
Bayes	2,05	-2,16	-2,17	-2,15	-2,27	-2,17	-2,17
Shibata	-2,07	-2,19	-2,19	-2,19	-2,29	-2,2	-2,2
Hannan- Quinn	-2,06	-2,18	-2,19	-2,18	-2,28	-2,19	-2,19

Źródło: Opracowanie własne

Patrząc na tabelę 1, najmniejsze wartości wszystkich kryteriów informacyjnych przyjmuje GARCH-t(1,1). Sprawdził się on najlepiej do wytłumaczenia zmienności badanego szeregu czasowego. Zdecydowanie najgorszą wersją okazał się ARCH(1).

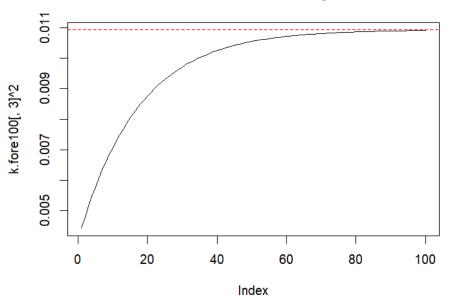
## Wartość warunkowej wariancji

Do oszacowania funkcji warunkowej wariancji wykorzystaliśmy model GARCH(1,1), najlepszy model GARCH bez rozszerzeń.

Rysunek 11 przedstawia wykres oszacowań i prognoz warunkowej wariancji w 100 dniowym okresie. Widzimy, że wykres wariancji warunkowej w długim okresie zbiega do wariancji bezwarunkowej (oznaczonej czerwoną przerywaną linią).

Rysunek 11. Wykres oszacowań i prognoz wariancji warunkowej w długim okresie

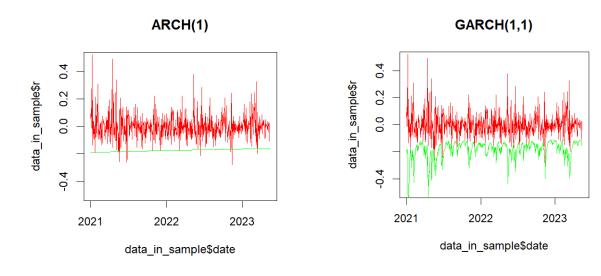
## Warunkowa i bezwarunkowa wariancja zwrotów WIG20

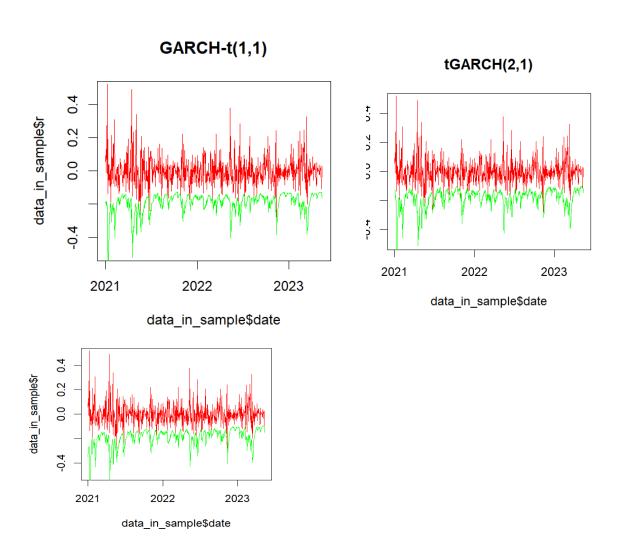


## VaR (wartość narażona na ryzyko) in-sample

Do policzenia wartości VaR został wybrany 1 kwantyl (quantile(0,01)).

Rysunek 12. Wartości VaR oraz zwrotów akcji dla wybranych modeli





Źródło: Opracowanie własne

Warto także sprawdzić dla ilu procent obserwacji standaryzowane stopy zwrotów przekroczyły wartości VaR

Tabela 2. Procent obserwacji, które przekroczyły wartość VaR

ARCH(1)	1,72%
GARCH(1,1)	1,86%
GARCH-t(1,1)	1,00%
t-GARCH(2,1)	2,00%
gjr-GARCH(1,1)	1,14%

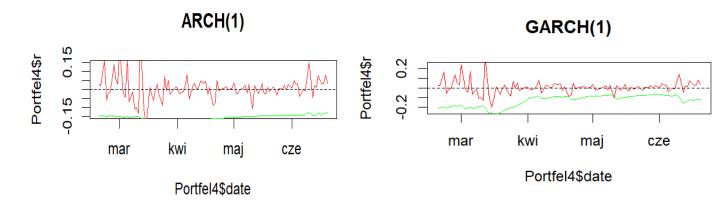
Źródło: Opracowanie własne

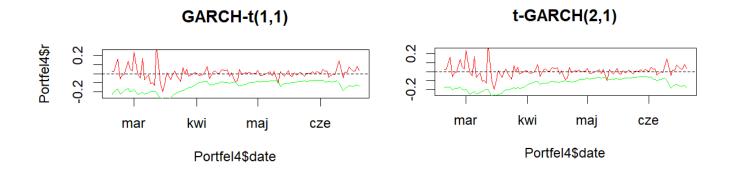
Zatem najmniejszy wynik udało się uzyskać dla GARCH-t(1,1), 1% obserwacji przekroczyło poziom VaR.

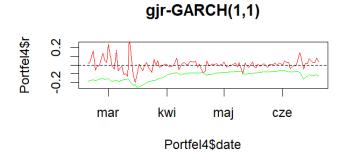
## VaR (wartość narażona na ryzyko) out-of-sample

Zgodnie z wcześniejszymi założeniami, ostatnie 100 obserwacji to próbka out-of-sample. Zostanie dokonana dla nich analiza VaR.

Rysunek 13. Wartość VaR oraz zwrotów akcji dla wybranych modeli







źródło: Opracowanie własne

Również zostanie sprawdzone w jak dużym procencie wartość VaR została przekroczona poprzez pojedyncze stopy zwrotu

Tabela 3. Procent obserwacji, które przekroczyły wartość VaR

ARCH(1)	1%
GARCH(1,1)	2%
GARCH-t(1,1)	1%
t-GARCH(2,1)	1%
gjr-GARCH(1,1)	2%

Źródło: Opracowanie własne

Jak widać w Tabeli 3, procenty są liczbami całkowitymi. Bierze się to z małej liczby obserwacji, a mianowicie 100. Najgorzej poradziły sobie GARCH(1,1) oraz gjr-GARCH(1,1).

#### **Podsumowanie**

Projekt podjął analizę portfela złożonego z 4 instrumentów giełdowych, mianowicie kryptowalut. Zostały przeprowadzone testy zarówno na normalność rozkładu oraz występowanie efektów ARCH. Po stwierdzeniu braku rozkładu normalnego oraz obecności efektów ARCH do modelowania szeregów czasowych zostały wybrane modele GARCH oraz ich rozszerzenia. Kryteria informacyjne wskazały, że najlepiej dopasowanym modelem do danych jest GARCH-t(1,1). Pod koniec pracy dokonano także analizy VaR dla próby in-sample oraz out-of-sample.