

VILNIAUS UNIVERSITETAS  
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS  
EKONOMETRINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Monika ŠEŠTOKAITĖ ir Simona PLONYTĖ

## **CAPM ir akcijų portfelio konstravimas**

Kursinio darbo vadovas prof. Remigijus LEIPUS

Ekonometrija, III kursas, I grupė

VILNIUS 2011

# Turinys

<b>Įvadas</b>	<b>2</b>
<b>1 Kapitalo aktyvų įvertinimo modelis</b>	<b>3</b>
<b>2 Duomenys</b>	<b>5</b>
2.1 JAV 30–ies dienų išdo vekseliai . . . . .	5
2.2 Indeksas Standard & Poor’s 500 . . . . .	6
2.3 Microsoft Corp. . . . .	8
2.4 Apple Inc. . . . .	9
2.5 Auksas . . . . .	11
<b>3 Aprašomoji duomenų statistika</b>	<b>13</b>
<b>4 Kapitalo aktyvų įvertinimo modelio taikymas</b>	<b>15</b>
4.1 Sudarytų modelių liekanų tikrinimas . . . . .	17
<b>5 Optimalaus portfelio paieška</b>	<b>19</b>
5.1 Portfeliai iš dviejų aktyvų . . . . .	19
5.2 Trijų aktyvų portfelis . . . . .	22
5.3 Optimalių portfelių modeliai . . . . .	25
<b>Rezultatai ir išvados</b>	<b>28</b>
<b>Naudota literatūra ir kiti šaltiniai</b>	<b>29</b>
<b>A priedas: aprašomoji statistika</b>	<b>30</b>
<b>B priedas: modeliai ir jų liekanos</b>	<b>31</b>
<b>C priedas: portfeliai</b>	<b>32</b>

## Ivadas

Šio kursinio darbo tikslas – naudojantis kapitalo aktyvų vertinimo modeliu (*Capital Asset Pricing Model* – CAPM) ištirti Microsoft Corp. ir Apple Inc. įmonių akcijų bei aukso rizikos premijų priklausomybę nuo kai kurių įmonių akcijų ir aukso rinkos rizikos premijų per pastarąjį dešimtmetį, taip pat iš atitinkamų aktyvų sudaryti kelis portfelius ir juos įvertinti.

Pirmame skyriuje supažindinsime su kapitalo aktyvų įvertinimo modeliu ir pagrindinėmis sąvokomis. Antrame skyriuje aprašysime Microsoft Corp. ir Apple Inc. įmonių akcijų bei aukso kainų duomenis, pateiksime kainas bei gražas atspindinčius grafikus. Trečiame skyriuje bus pateikti duomenų vidurkiai, dispersijos, standartiniai nuokrypiai, koreliacijų koeficientai ir jų interpretacijos. Ketvirtame skyriuje sudarysime aktyvų vertinimo modelius, patikrinsime liekanų homoskedastiškumą, autokoreliuotumą bei normalumą. Penktas skyrius bus skirtas portfelių konstravimui ir analizei, įtraukiant Microsoft Corp., Apple Inc. įmonių akcijas, auksą bei nerizikingą aktyvą. Darbo pabaigoje pateiksime rezultatus ir išvadas, naudotą literatūrą bei priedus.

# 1 Kapitalo aktyvų įvertinimo modelis

Pirmą kartą kapitalo aktyvų vertinimo modelį (CAPM) aprašė William Forsyth Sharpe (1964), nors panašius darbus pristatė ir Jack Treynor (1961, 1962), John Lintner (1965) ir Jan Mossin (1966). CAPM praplėtė Harry Markowitz'o portfelio teoriją, įtraukiant sisteminės ir nesisteminės rizikos sąvokas. Už darbą su CAPM W. F. Sharp, drauge su H. Markowitz ir M. Miller, 1990 m. gavo Nobelio ekonomikos premiją.

Kapitalo aktyvų vertinimo modelis įvertina aktyvo investicinės grąžos ir rizikos santykį tiriant vertybinių popierių rinkoje esančių akcijų pajamingumą. Finansų valdymo teorijoje riziką apibūdina aktyvo laukiamų grąžų išsibarstymas, t.y. dispersija  $\sigma$ . Taip pat rizika gali būti matuojama ir standartiniu nuokrypiu. Kuo standartinis nuokrypis ar dispersija didesni, tuo rizika aukštesnė. Investuotojas norėtų skolinti su kuo mažesne rizika. Jei rizika būtų lygi nuliui, mažiausia laukiama grąža, dominanti investuotoją, bus vadinama nerizikinga grąža  $r_f$ . Kompensaciją už rizikos prisiėmimą vadinsime rizikos premija  $R$ . Ji lygi laukiamos grąžos  $r$  ir nerizikingos grąžos  $r_f$  skirtumui.

Kapitalo aktyvų vertinimo modelis plačiai naudojamas sudarant portfelius. Bendra portfelio, sudaryto iš  $n$  aktyvų, grąža  $r_p$  apskaičiuojama nesudėtingai:

$$r_p = \sum_{i=1}^n w_i \cdot r_i,$$

kur  $r_i$  –  $i$ -ojo aktyvo laukiamų grąžų vidurkis, o  $w_i$  –  $i$ -ojo aktyvo dalis portfelyje. Taigi, visų  $w_i$  suma privalo būti lygi vienetui. Tokio portfelio rizika

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{ij},$$

kur  $\sigma_{ij}$  – kovariacija tarp  $i$ -ojo ir  $j$ -ojo aktyvo grąžų.

Nagrinėkime portfelį sudarytą iš dviejų aktyvų: aktyvo  $j$  su laukiama grąža  $r_j$  ir rizika  $\sigma_j^2$  bei nerizikingo aktyvo  $r_f$ . Tada portfelio grąžos formulė:

$$r_p = (1 - w_j) \cdot r_f + w_j \cdot r_j,$$

o riziką apskaičiuojame tokią:

$$\sigma_p^2 = w_j^2 \cdot \sigma_j^2 + (1 - w_j)^2 \cdot \sigma_f^2 + 2 \cdot (1 - w_j) \cdot w_j \cdot \sigma_{jf}.$$

Kadangi nerizikingo aktyvo rizika yra nulinė, tai bendrą portfelio riziką galima aprašyti trumpiau:

$$\sigma_p = w_j \cdot \sigma_j.$$

Pažymėjus  $w_j = \frac{\sigma_p}{\sigma_j}$ , gauname, kad portfelio rizika

$$r_p = r_f + \left( \frac{r_j - r_f}{\sigma_j} \right) \cdot \sigma_p.$$

Jei tarsime, kad dabar  $j$  investiciją atitiks rinkos portfelis  $m$  su laukiama grąža  $r_m$  bei rizika  $\sigma_m$ , gautąją tiesinę priklausomybę, galime perrašyti tokiu pavidalu:

$$R = \alpha + \beta \cdot R_m,$$

kur  $R = r_p - r_f$  – rizikos premija,  $R_m = r_m - r_f$  – rinkos rizikos premija. Nesunku pastebėti, jog

$$\beta = \frac{Cov(R, R_m)}{Var(R_m)}.$$

Koeficientai  $\alpha$  ir  $\beta$  yra labai svarbūs.  $\beta$  atspindi sisteminę (rinkos) riziką – riziką, nepriklausančią nuo įmonės veiksmų. Sistemine rizika sudaro makroekonominiai veiksniai. Taigi,  $\beta$  parodo aktyvo (arba portfelio) pelningumo priklausomybę nuo bendro rinkos pelningumo. Koeficiento ženklas parodo nagrinėjamo objekto vertės kitimo kryptį – jei  $\beta > 0$ , aktyvo (portfelio) vertė kinta ta pačia linkme, kaip ir rinkos pokyčiai, jei  $\beta < 0$  – atvirkščiai. Kuo  $\beta$  didesnis tuo aktyvas (portfelis) rizikingesnis. Nerizikingo aktyvo koeficientas  $\beta$  lygus nuliui. Koeficientas  $\alpha$  parodo aktyvo vertę: jei jis teigiamas – aktyvas nuvertintas ir jį verta pirkti, jei neigiamas – verta parduoti.

Visa, kas nesudaro sisteminės rizikos, vadinama nesisteminė rizika. Tai rizika, priklausanti tik nuo konkrečios įmonės veiksmų. Skirtingai nei sisteminę riziką, šią galima minimizuoti diversifikuojant vertybinių popierių portfelį.

Taikant CAPM modelį neatsižvelgsime į pirkimo – pardavimo sandorių mokesčius. Tarsime, kad visi investuotojai turi vienodas investavimo galimybes ir duomenis bei visi investuotojai siekia maksimizuoti pelną ir minimizuoti riziką.

## 2 Duomenys

### 2.1 JAV 30–ies dienų išdo vekseliai

JAV vieno mėnesio išdo vekselius laikysime nerizikinga investicija. Nagrinėjami dieniniai duomenys nuo 2001 rugpjūčio 1 d. iki 2011 metų liepos pabaigos[4]. Kadangi JAV išdo vekselių duomenys pateikti kaip dieninė diskonto norma antrinėje rinkoje, vekselių pelningumą galima gauti naudojant dvi patogias formules:

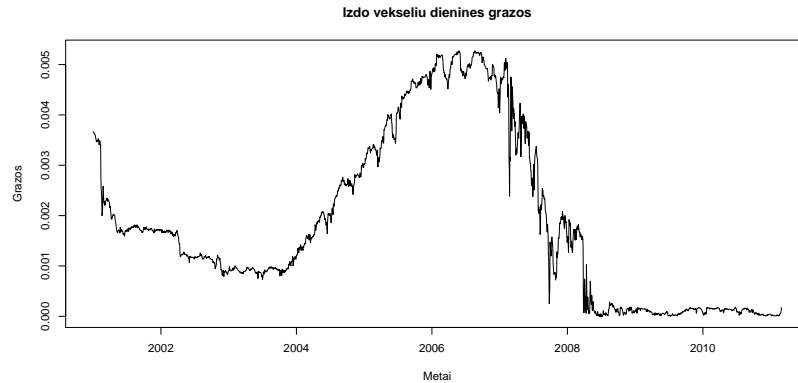
$$P = 100 - \left( 100 \times \frac{d \times t}{360} \right).$$

Pagal šią formulę, iš diskonto normos išreiškiame kainą – iš nominalo atimtą nuolaidą. Čia nominalas lygus 100,  $P$  – išdo vekselio kaina,  $d$  – išdo vekselio diskonto norma,  $t$  – periodo dienų skaičius (mūsų atveju, 30 dienų). Turėdami kainą, galime rasti išdo vekselio pelningumą:

$$Y = \frac{100 - P}{P} \times \frac{365}{t}.$$

Čia  $Y$  – išdo vekselio pelningumas,  $t = 30$ .

1 pav. vaizduojamos JAV išdo vekselių dienosinės grąžos.

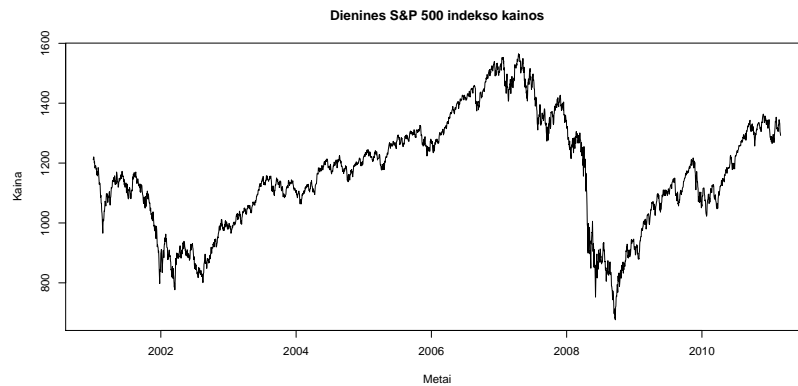


1 pav.: JAV 30–ies dienų izdo vekselių pelningumas

Grafikas gana išraiškingai atspindi nuo 2004 m. prasidėjusį ekonomikos pakilimą, išaugusį vartojimą ir analogiškas JAV vyriausybės pastangas pritraukti investuotojus didelėmis palūkanų normomis – izdo vekselių pelningumu. Vekselių pelningumas pasiekė aukščiausią lygį 2006 m., iki 2007 m. išlaikė pakankamai aukštą lygį, tačiau nuo 2007 m. palaipsniui mažėjo, kol galiausiai 2008 m. izdo vekselių pelningumas nukrito iki žemiausio lygio nuo 2001 m.

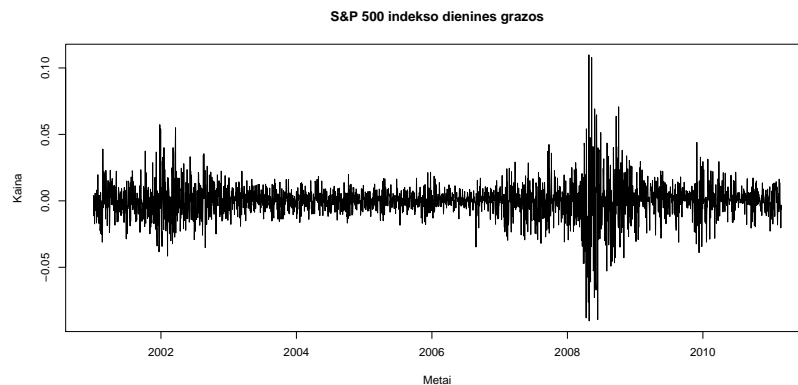
## 2.2 Indeksas Standard & Poor's 500

JAV įmonių indeksas Standard & Poor's 500 atstovauja Jungtinių Amerikos valstijų rinką. Indeksą sudaro 500 įmonių, gaunančių daugiau nei \$5 mlrd. pelną; tarp jų – Adobe Systems Inc., Amazon.com Inc., Apple Inc., Coca Cola Co. ir kitos.



2 pav.: S&P 500 dienos akcijų kainos 2001–2011 m.

Indekso dieninių akcijų gražų grafikas (2 pav.) neblogai atspindi rinkos būklę Jungtinėse Amerikos valstijose per pastaruosius dešimt metų. Nuo 2002 metų vidurio stebimas stabilus rinkos akcijų pelningumo didėjimas, o nuo 2007 metų – stabilus, bet kiek staigesnis pelningumo mažėjimas. Taip pat gana ryškiai pastebima ir 2008–2009 metų rinkos krizė bei po jos prasidėjęs įmonių akcijų pelningumo augimas.



3 pav.: Standard & Poor's 500 dienos akcijų gražos

3 pav. vaizduojamos rinkos dienos akcijų gražos. Didesnis nei vidutinis gražų dispersijos padidėjimas taip pat sutampa su 2008–2009 metų krizės laikotarpiu. Dieninės gražos stabiliausios 2003–2007 metų periodu, o tai irgi

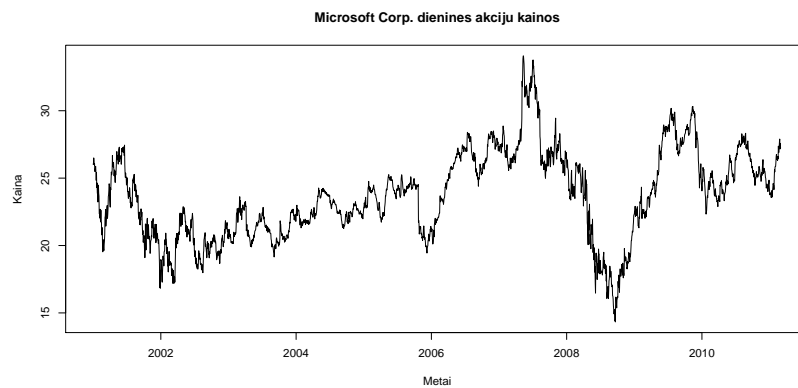


sutampa su stabilumo laikotapiu JAV ekonomikoje. Daugiau informacijos apie duomenis rasite čia: [5].

## 2.3 Microsoft Corp.

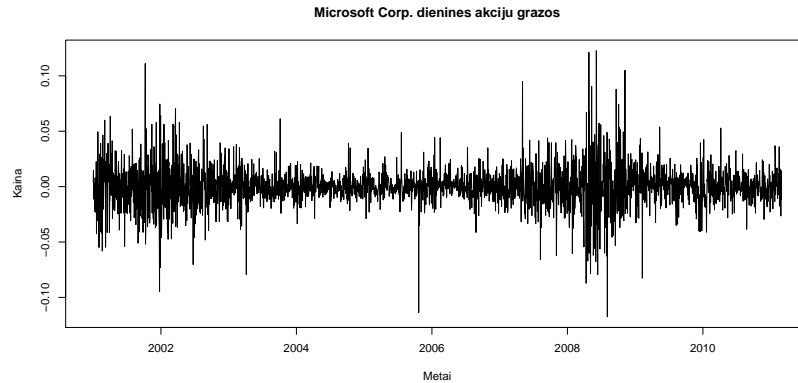
Viena iš CAPM modelio tyrimui pasirinktų įmonių – Microsoft Corp. Tai viena didžiausių programinę įrangą gaminančių kompanijų, turinti savo atstovybę ir Lietuvoje.

4 pav. ir 5 pav. pateiktos šios įmonės dieninių akcijų kainos bei dieninių akcijų grąžos.



4 pav.: Microsoft Corp. dienos akcijų kainos 2001–2011 m.

Microsoft Corp. akcijų kainos pasižymi gana periodiškais svyravimais iki maždaug 2005 m. pabaigos. Nuo 2006 m. akcijų kaina gerokai pakilo ir 2007 metais pasiekė aukščiausią lygį. Tačiau galima spėti, kad šią įmonę paveikė krizė ir nuo 2007 m. iki 2008 metų vidurio akcijų kainos krito, kol pasiekė žemiausią lygį per pastaruosius septynerius metus. Po to akcijų kainos stabiliai kilo iki 2011 metų vasaros.



5 pav.: Microsoft Corp. dienos akcijų gražos 2001–2011 m.

Microsoft Corp. dienos akcijų gražos (5 pav.), taip pat kaip ir Standard & Poor's, neblogai atspindi stabilumo ir krizės laikotarpius, o kelios išskirtys susijusios su individualiomis imonės charakteristikomis.

Pateikiami Microsoft Corp. akcijų kainų dieniniai duomenys [6] .

## 2.4 Apple Inc.

Kita įmonė, pasirinkta CAPM modelio tyrimui – Apple Inc. Ši kompanija vartotojams pateikia įvairaus pobūdžio programinės įrangos bei kitų elektroninių prietaisų.

6 pav. ir 7 pav. pateikti Apple Inc. dieninių akcijų kainų bei dieninių akcijų gražų grafikai [7].



6 pav.: Apple Inc. dienos akcijų kainos 2001–2011 m.

Apple Inc. dieninių akcijų kainų svyravimai kiek skiriasi nuo S&P 500 ar Microsoft akcijų kainų. Pastaruosius keletą metų šios kompanijos akcijų kainos stabiliai kilo ir net krizės laikotarpiu nepasiekė žemiausios kainos per dešimties metų laikotarpį. Svarbi data duomenų tyrimui – 2005 vasario 5 d. Šią dieną Apple Inc. padvigubino akcijų kiekį už tą pačią kainą, t.y. jei iki padalijimo viena akcija kainavo \$88, tai po padalijimo už tą pačią kainą investuotojas jau galėjo įsigyti dvi akcijas (po \$44 už vieną). Spėjama, jog Apple Inc. tokiu veiksmu norėjo pritraukti naujų investuotojų.



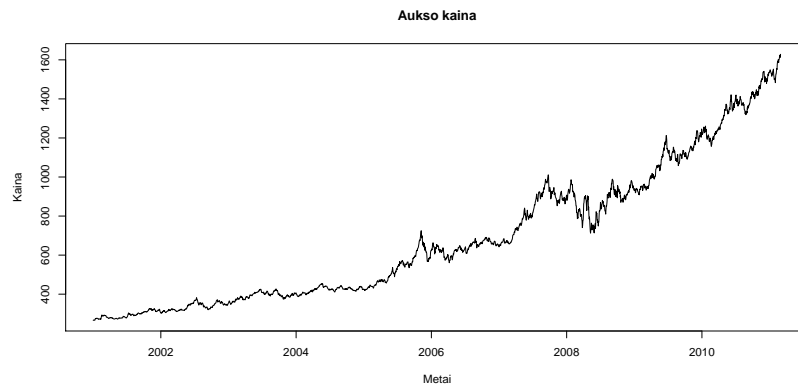
7 pav.: Apple Inc. dienos akcijų gražos 2001–2011 m.

Šiame grafike pateikiamos dienos akcijų gražos, be 891-ojo duomens (pašalinta išskirtis, atsiradusi dėl akcijų kiekio padvigubinimo). Galima

pastebėti pakankamai stabilią ir, lyginant su anksčiau pateiktais duomenimis, nemažą duomenų dispersiją, o kelios išskirtys gali būti susijusios su kitais įmonės sprendimais arba įvykiais rinkoje.

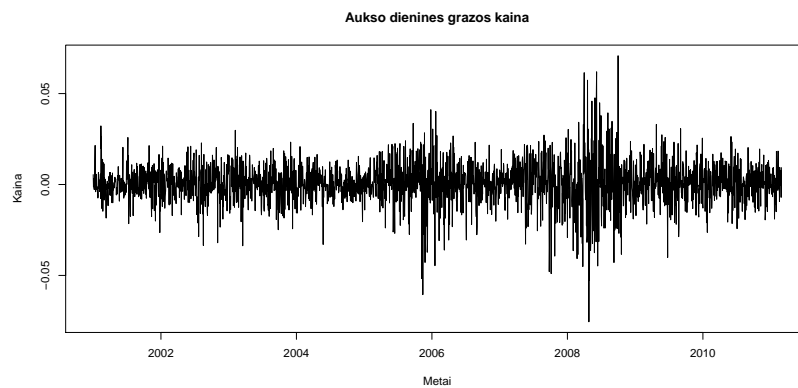
## 2.5 Auksas

Verta patyrinėti ne tik svarbių įmonių rizikos premijų priklausomybę nuo rinkos rizikos premijos, bet ir aukso pelningumą. Aukso gavybos istorija siekia 4 tūkst. m. pr. Kr. Nuo tada žmonija yra išgavusi maždaug 90–100 tūkst. tonų aukso. Šis ilgaamžis metalas ekonomikoje dėl savo cheminių savybių turi ypatingą vartojamąją vertę, atlieka pinigų funkciją. Iš aukso kalamos monetos, auksas specialiais luitais saugomas kaip valstybių centrinių bankų atsargos. Investicija į auksą dažnai siejama su apsauga nuo infliacijos, todėl valstybės laiko auksą kaip savo tarptautinių atsargų dalį ir gali jį panaudoti mokėjimo balanso deficitui padengti.



8 pav.: Aukso dienosinės kainos

Aukso kaina (8 pav.) per dešimt metų stabiliai kyla be jokių ryškesnių nuosmukių. AFP duomenimis liepos 18d. iki pietų aukso uncijos (apie 31 gramą) kaina NYMEX biržoje jau siekė \$ 1598,8.



9 pav.: Aukso dienos gražos

Aukso dieninių gražų grafikas (9 pav.) turi gana mažą dispersiją, kurios padidėjimas 2008 metais sutampa su krizės laikotapiu. Tačiau net ir per krizę didžiausios aukso gražų vertės nepasiekia 0.1 ar -0.1.

Pateikiami aukso kainų dieniniai duomenys [8] .

### 3 Aprašomoji duomenų statistika

Rizikos premija – skirtumas tarp įmonės akcijos gražos ir iždo vekselio pelningumo. Tai premija investuotojui, pasirinkusiam rizikingesnės įmonės akcijas, o ne iždo vekselį. Kuo ji didesnė, tuo labiau traukia investicijas, bet dažnai (pagal kapitalo aktyvų įvertinimo modelio teoriją) didesnė premija taip pat reiškia ir didesnę riziką investuojant į tam tikrą imonę. Žemiau pateiktose lentelėse (reikšmės gautos naudojant R paketo komandas, pateiktos A priede) pateiktas aktyvų vidutinis pelningumas, standartiniai nuokrypiai, dispersijos, jų vidutinės rizikos premijos bei koreliacijos. Šiame skyriuje naudojami trumpiniai: rkfree – JAV 30–ies dienų iždo vekselių gražos; market – indekso Standard & Poor’s 500 akcijų dieninės gražos; microsoft – Microsoft Corp. akcijų dieninės gražos; apple – Apple Inc. akcijų dieninės gražos; gold – aukso dieninės gražos; mrp – rinkos rizikos premijos; microsoftrp – Microsoft Corp. akcijų rizikos premijos; applerp – Apple Inc. akcijų rizikos premijos; goldrp – aukso rizikos premijos.

Duomenys	Vidurkis	Dispersija	Standartinis nuokrypis
rkfree	0.00186004	2.789252e-06	0.001670105
market	0.0001173288	0.0001827668	0.01351913
microsoft	0.0001968397	0.0003574371	0.01890601
apple	0.001807715	0.0006370941	0.02524072
gold	0.0007931419	0.0001357824	0.01165257
mrp	-0.001742711	0.0001857122	0.01362763
microsoftrp	-0.001663201	0.0003601065	0.01897647
applerp	-5.20737e-05	0.000639531	0.02528895
goldrp	-0.001066898	0.0001384164	0.01176505

1 lentelė: Duomenų vidurkiaai, dispersijos ir standartiniai nuokrypiai

Didžiausią gražų vidurkį turi Apple Inc. (0.0018), šis aktyvas investuotojams galėtų būti patraukliausias. Didžiausia gražų dispersija (0.00064) ir standartinis nuokrypis (0.0252) taip pat priklauso Apple Inc. Taigi, nors šios įmonės akcijos žada ir didžiausią pelną, tai yra rizikingiausias aktyvas. Tarp pasirinktų aktyvų mažiausia dispersija (0.000136) ir mažiausias standartinis nuokrypis (0.0117) priklauso aukso kainų gražoms. Šis aktyvas turi mažiausius svyravimus, todėl atrodo patikimai. Visų mažiausią riziką turi iždo vekselis (kaip ir priklauso pagal CAPM teoriją).

market	microsoft	0.7184425
market	apple	0.5511114
market	gold	-0.04482454
mrp	microsoftrp	0.7209318
mrp	applerp	0.5534901
mrp	goldrp	-0.0266428

2 lentelė: Duomenų koreliacijos koeficientai

Labiausiai su rinka koreliuoja Microsoft Corp. (koreliacijos koeficientas lygus 0.7184425), t.y. daugiausiai sutampa su rinkos būkle.

Mažiausiai su rinkos akcijų kainomis koreliuoja aukso kainos (-0.04482454). Šis koreliacijos koeficientas yra neigiamas, taigi tikėtina, kad rinkos akcijų vertei kintant, aukso gražos kis priešinga kryptimi, tačiau dėl nedidelės koeficiento reikšmės aktyvo kainos tuo pačiu greičiu gali ir nesikeisti. Tai ypač aktualu krizės laikotarpiu, nes rinkos akcijų vertei smunkant, aukso vertė neturėtų kristi.

## 4 Kapitalo aktyvų įvertinimo modelio taikymas

Viena iš kapitalo aktyvų įvertinimo modelio (*Capital Asset Pricing Model* – CAPM) išraiškų – paprasta vieno kintamojo regresija. Ją naudosime tirdami imonių akcijų ir aukso rizikos premijų priklausomybę nuo rinkos rizikos premijų. Visos R paketo komandos ir lentelės, naudotos šiame skyriuje, pateiktos B priede. Lentelėse pateiktas laisvasis narys  $\alpha$ , koeficientas  $\beta$  bei jų statistinis reikšmingumas.

Sudarysime tokius regresinius modelius:

Microsoft rizikos premija =  $\alpha + \beta \times$  Rinkos rizikos premija

Apple rizikos premija =  $\alpha + \beta \times$  Rinkos rizikos premija

Aukso rizikos premija =  $\alpha + \beta \times$  Rinkos rizikos premija

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	0.0001	0.0003	0.33	0.7449
mrp	1.0039	0.0193	51.99	0.0000

3 lentelė: Microsoft Corp. modelis

Gautas  $\beta$  koeficientas lygus 1.004 ir yra reikšmingas. Tai reiškia, jog rinkos rizikos premijai pakilus ar nukritus 1%, Microsoft Corp. rizikos premijos taip pat pakils 1%. Laisvasis narys beveik lygus nuliui ir nereikšmingas, tai neprieštarauja CAPM teorijai ir logikai – jei rinkos rizikos premija lygi nuliui, tai investuotojo į Microsoft Corp. šansai gauti rizikos premiją yra labai maži.  $R^2 = 0.5197$ , tai reiškia, kad 51,97% rinkos duomenų paaiškina Microsoft Corp. rizikos premijų svyravimus, t.y. sudaro sistemine (rinkos) riziką. Likusi specifinė rizika priklauso nuo kitų įmonės charakteristikų.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	0.0017	0.0004	4.08	0.0000
mrp[-891]	1.0270	0.0309	33.21	0.0000

4 lentelė: Apple Inc. modelis



Koeficientas  $\beta$ , kaip ir Microsoft Corp. imonės, lygus 1.027 ir yra reikšmingas ( $0 < 0.005$ ). Taigi rinkos akcijų vertei susvyravus 1%, Apple Inc. irgi gali patirti panašų akcijų kainos pokytį. Laisvasis narys labai arti nulio, bet reikšmingas, taigi investuotojas pasirinkęs Apple Inc. akcijas gali tikėtis nebent itin mažos rizikos premijos, kai rinkos akcijų vertės pokytis lygus nuliui, nors toks rezultatas kiek prieštarauja CAPM teoriniam regresiniam modeliui. Visgi  $R^2$  nėra labai didelis – tik 30% rinkos duomenų paaiškina Apple Inc. akcijų vertės svyravimus.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	-0.0011	0.0002	-4.67	0.0000
mrp	-0.0230	0.0173	-1.33	0.1830

5 lentelė: Aukso modelis

Visai kitoks rezultatas gaunamas sudarius aukso rizikos premijų priklausomybės nuo rinkos rizikos premijų modelį. Šįkart  $\beta = -0.023$  ir tai reikštų, kad aukso kainos ne tik mažai priklauso nuo rinkos akcijų vertės svyravimų, bet netgi juda priešinga linkme. Tai gali pasirodyti kaip itin patraukli investicija nuosmukio laikotarpiu. Tačiau koeficiento p-reikšmė = 0.183 > 0.05, taigi negalima atmesti  $H_0$  hipotezės, kad  $\beta = 0$ . Priėmus šią hipotezę, galima tarti, kad aukso kainos mažai priklauso nuo rinkos svyravimų. Laisvasis narys šįkart -0.011 ir p-reikšmė rodo, kad jis reikšmingas. Toks rezultatas kiek prieštarauja CAPM logikai – rinkos akcijų vertėms nesikeičiant, aukso rizikos premija neigiama. Tai galėtų reikšti, kad dieninis aukso pelningumas itin nedidelis.  $R^2 = 0.0007$  – itin maža reikšmė, patvirtinanti, kad rinka beveik nepaaiškina aukso kainų pokyčių, taigi visa aukso pelningumo rizika sisteminė – priklauso nuo kitų charakteristikų.

Aukso rizikos premija rodo atvirkštinę nestiprią priklausomybę nuo rinkos rizikos premijos - taigi į auksą palanku investuoti krizės laikotarpiu. Pagal modelio pateiktą koeficientą, rinkos rizikos premijai nukritus 1%, aukso rizikos premija išauga 0,02. Vis dėlto koeficiento  $\beta$  p-reikšmė rodo, jog koeficientas nereikšmingas, tad galime sušvelninti sąlygą ir teigti, kad rinkos rizikos premijai nukritus 1%, aukso rizikos premija nekinta arba priklauso nuo kitų faktorių. Į auksą investavus 100\$, galima gauti 0,07\$ per dieną.

## 4.1 Sudarytų modelių liekanų tikrinimas

Liekanos turi būti homoskedastiškos, ne autokoreliuotos ir pasiskirsčiusios pagal normalųjį skirstinį.

Patikrinsime, ar liekanos homoskedastiškos, naudodami Breusch-Pagan testą:

aktyvas	$p - value$	$BP_{stat}$
Microsoft Corp.	0.1274	2.3239
Apple Inc.	0.0001743	14.0901
Auksas	0.1667	1.9124

6 lentelė: Heteroskedastiškumo testas Microsoft Corp., Apple Inc. ir aukso modelių liekanoms

Aukso ir Microsoft Corp. regresinių modelių liekanos yra homoskedastiškos (6 lentelė).

Patikrinsime, ar liekanos turi slenkantį vidurkį.

aktyvas	koef. prieš ankstinį	$p - value$
Microsoft Corp.	-2.293e-02	0.252
Apple Inc.	0.0337889	0.155
Auksas	0.0360663	0.0716

7 lentelė: Microsoft Corp., Apple Inc. ir aukso modeliai su pirmos eilės ankstiniais

Visuose modeliuose pirmos eilės liekanų ankstiniai nereikšmingi.

Autokoreliacijai patikrinti naudosime Durbin-Watson testą:

Liekanos nėra autokoreliuotos su savo pirmos eilės ankstiniais.

Normalumui tikrinti naudosime Jarque-Bera testą.

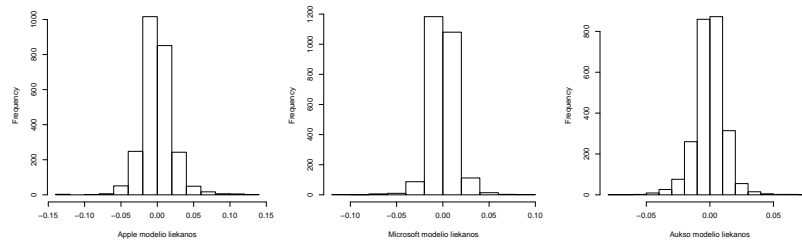
P-reikšmės testuose (9 lentelė) rodo, kad  $H_0$  hipotezę, jog modelių liekanos pasiskirsčiusios pagal normalųjį skirstinį, reikia atmesti su 5% statistiniu reikšmingumo lygmeniu. Galima iškelti hipotezę, kad liekanų grafikai yra arba su „sunkiomis uodegomis“, arba nepakankamai plokšti.

<i>aktyvas</i>	<i>D – W statistika</i>	<i>p – value</i>
Microsoft Corp.	2.04577	0.24
Apple Inc.	1.97393	0.54
Gold	1.927601	0.076

8 lentelė: Durbin–Watson testas Microsoft Corp., Apple Inc. ir aukso liekanoms

<i>aktyvas</i>	$X^2$	<i>p – value</i>
Microsoft Corp.	8683.798	$< 2.2\text{e-}16$
Apple Inc.	3384.751	$< 2.2\text{e-}16$
Gold	1593.331	$< 2.2\text{e-}16$

9 lentelė: Jarque–Bera testas Microsoft Corp., Apple Inc. ir aukso liekanoms



10 pav.: Visų modelių liekanų histogramos

10 pav. histogramos rodo, jog vis dėlto visų modelių liekanos simetriškai pasiskirsčiusios apie nulį, o jų ekscesas aštresnis nei normaliojo skirstinio.

## 5 Optimalaus portfelio paieška

### 5.1 Portfeliai iš dviejų aktyvų

Visi skaičiavimai, kurie bus naudojami portfelių sudarymams, su R programa pateikti C priede.

Iš pradžių ieškosime optimalių portfelių tarp dviejų aktyvų. Formulė

$$a^* = \frac{\sigma_y^2 - r_{xy}\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2r_{xy}\sigma_x\sigma_y} \quad (1)$$

randa optimalų įmonės  $x$  akcijų procentą portfelyje [1]. Dar paskaičiuosime kokią dalį portfelyje turėtų sudaryti aktyvas ir išdo vekselis.

Žymėjimai:

P #1 – Apple Inc. akcijų ir aukso portfelis

P #2 – Apple Inc. ir Microsoft Corp. akcijų portfelis

P #3 – Microsoft Corp. ir auksas

P #4 – Apple Inc. ir nerizikingas aktyvas (išdo vekselis)

P #5 – Microsoft Corp. ir nerizikingas aktyvas

P #6 – Auksas ir nerizikingas aktyvas

	P #1	P #2	P #3	P #4	P #5	P #6
Apple Inc.	18,83 %	25,08 %		0,041 %		
Microsoft Corp.		74,92 %	28,88 %		0,076 %	
Auksas	81,17 %		71,12 %			1,96 %
Vekselis				99,59 %	99,24 %	98,04 %
Gražos	0.00099	0.00060	0.00062	0.00186	0.00185	0.00184
Rizika (s.d.)	0.0104	0.0180	0.0096	0.0017	0.0017	0.0017

10 lentelė: Portfelius sudarančių aktyvų procentai, jų gražos ir rizika

Aukso ir Apple Inc. portfelyje – 81,17 % aukso ir 18,83 % Apple akcijų  
 Microsoft Corp. ir Apple Inc. portfelyje – 74,92 % Microsoft Corp. akcijų  
 25,08 % Apple Inc. akcijų

Aukso ir Microsoft Corp. portfelyje – 71,12 % aukso ir 28,88 % Microsoft  
 akcijų

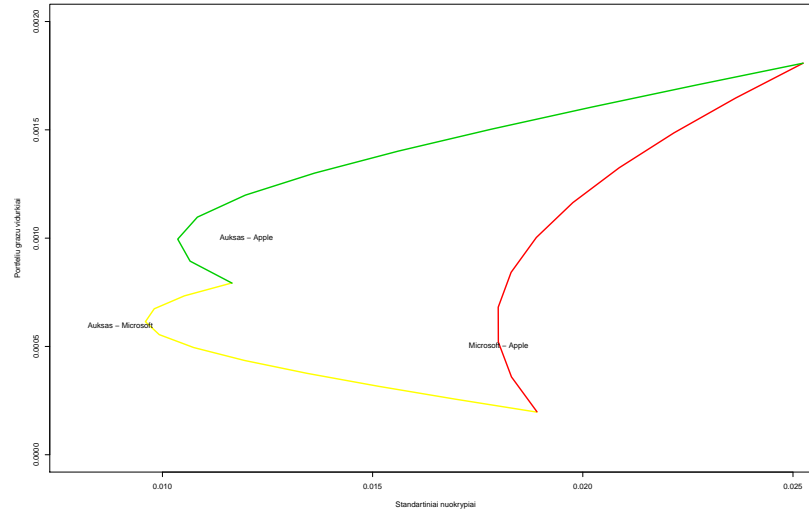
Visoms trims kombinacijoms su nerizikingu aktyvu tiek rizika, tiek grąža  
 yra vienodos, o išdo vekselis sudaro beveik visą portfelį.

JAV išdo vekselių diskonto norma ilgą laiką buvo gan aukšta ir viršijo  
 1%, tačiau po 2008–ųjų metų rugsėjo 15 d. vekselių diskonto norma nukri-  
 to nuo 1.35% iki 0.28% ir vėliau tiek nebepakilo iki 2011–ųjų vasaros. Todėl  
 būtų naudinga patikrinti optimalias vekselių ir aktyvų kombinacijas, kai vek-  
 selių pelningumas nėra toks didelis. Pakartokime analogišką analizę prieš tai  
 buvusiai, duomenis imant tik nuo 2008 m. rugsėjo 15 d.

	P # 4	P # 5	P # 6
Apple Inc.	0,04 %		
Microsoft Corp.		0,00 %	
Auksas			0,04 %
Vekselis	99,96 %	100 %	99,96 %
Gražos	0.001860	0.001860	0.001860
Rizika (stand. nuokrypis)	0.00167	0.00167	0.001669

11 lentelė: Portfelį iš nerizikingo ir rizikingo aktyvo grąžos ir rizika

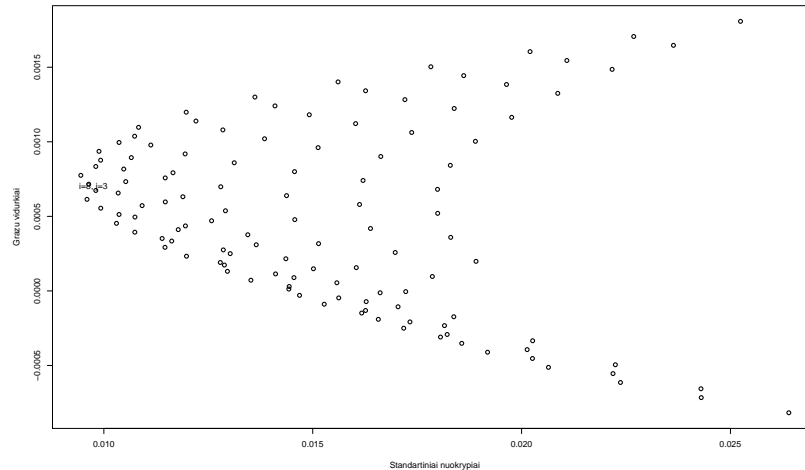
Po analizės išdo vekselių procentai portfeliuose nepakito labai smarkiai,  
 grąžos ir standartiniai nuokrypiai liko beveik tokie patys, todėl liksime prie  
 pradinių kombinacijų. Darome hipotezę, kad rezultatai galėjo nepasikeisti  
 dėl nuo 2008 m. sumažėjusio vekselio ir padidėjusio įmonių standartinio  
 nuokrypio.



11 pav.: Dviejų aktyvų kombinacijų rizika ir grąžos

Iš 11 pav. ir 10 lentelės galima matyti, jog net optimalus portfelis, sudarytas iš Apple Inc. ir Microsoft Corp. akcijų turi daug didesnę riziką ir tokią pat grąžą, kaip ir iš aukso bei Microsoft Corp. akcijų sudarytas portfelis. O vos padidinus riziką, iš Apple Inc. ir aukso akcijų sudaryto portfelio, galima gauti didesnę grąžą. Todėl optimalus pasirinkimas tarp portfelių, sudarytų iš dviejų aktyvų, yra Apple Inc. ir aukso akcijų kombinacija.

## 5.2 Trijų aktyvų portfelis



12 pav.: Portfelio, sudaryto iš Apple, Microsoft ir aukso rizikos ir grąžos kombinacijos

12 pav.: norint turėti portfelį su mažiausia rizika, reikėtų rinktis portfelio kombinaciją, grafike esančią kairiausiai [1]. Kiti portfelio pasirinkimai priklausys nuo vartotojo rizikos preferencijos.

Apytiksliai aktyvų svoriai optimaliame portfelyje, kai  $i=8$  ir  $j=3$ :

$$0.1 \times (i - 1) \times \text{Microsoft} + 0.1 \times (j - 1) \times \text{Auksas} + (1 - (i - 1) - (j - 1)) \times 0.1 \times \text{Apple}$$

Portfelio aktyvų svorius, kai aktyvų yra  $n$  (šiuo atveju,  $n = 3$ ) nėra lengva rasti, todėl pabandykime pritaikyti dviejų aktyvų optimalaus portfelio formulę (1): iš ankstesnio poskyrio turime optimalius svorius tarp dviejų aktyvų, dabar ieškome optimalios proporcijos tarp portfelio ir trečio aktyvo.

Portfelių žymėjimai:

P # 7 = optimalus aukso ir Apple Inc. akcijų portfelis ir Microsoft Corp. akcijos

P #8 = optimalus Microsoft Corp. ir Apple Inc. akcijų portfelis ir auksas

P #9 = optimalus Microsoft Corp. akcijų ir aukso portfelis ir Apple Inc. akcijos.

	Apple Inc.	Microsoft Corp.	Auksas	Gražos	Rizika (s.d.)
P # 7	15.18 %	19.41 %	65.41 %	0.0008311881	0.009586881
P # 8	7.764768 %	23.19523 %	69.04 %	0.0007334121	0.009427794
P # 9	6.478507 %	27.00901 %	66.51249 %	0.0006976978	0.009455108

12 lentelė: Portfeliai iš trijų aktyvų

Mažiausią standartinį nuokrypį, t.y. riziką turi aštuntas portfelis. Jį ir pasirinksiame kapitalo aktyvų įvertinimo modelio analizei.



	$\beta$	Gražos
Apple Inc.	1.0291	0.0018077
Microsoft Corp.	1.0047	0.000197
Auksas	-0.03864	0.0007931
Vekselis	-0.0004271	0.00186
P # 1	0.16243	0.000984
P # 2	1.0111	0.00060198
P # 3	0.26268	0.00062093
P # 8	0.2864	0.000733

13 lentelė: Aktyvų ir portfelių priklausomybė nuo rinkos svyravimų ( $\beta$ ) ir jų pelningumas

$\beta$  parodo, kaip įmonės akcijų ar portfelio rizikos premijos reaguoja į rinkos svyravimus: kuo didesnė  $\beta$ , tuo aktyvas nestabilesnis ir rizikingesnis.

Iš 13 lentelės investuotojas gali pasirinkti patraukliausią investavimo būdą: jei investuotojas nori gauti itin dideles grąžas, ir visiškai nekreipia dėmesio į įmonės priklausomybę nuo rinkos svyravimų, jis rinktųsi investiciją į Apple Inc. akcijas. Kita vertus, turimi empiriniai duomenys rodo, jog JAV išdo vekselio grąža yra itin didelė, o rizika ir priklausomybė nuo rinkos itin mažos, todėl vienareikšmiškai galima tarti, kad racionaliausia būtų investuoti į JAV trisdešimties dienų išdo vekselius.

### 5.3 Optimalių portfelių modeliai

Kandangi jau sudarėme optimalias kombinacijas tarp dviejų aktyvų ir pasirinkome trijų aktyvų portfelio svorius, galime sudaryti CAPM regresinius modelius ir pažiūrėti, kaip portfelių pelningumas priklauso nuo rinkos svyravimų. R kodas pateiktas priede.

Regresiniai modeliai:

Modelis 1: Portfelis-1 =  $\alpha + \beta \times$  Rinkos rizikos premija

Modelis 2: Portfelis-2 =  $\alpha + \beta \times$  Rinkos rizikos premija

Modelis 3: Portfelis-3 =  $\alpha + \beta \times$  Rinkos rizikos premija

Modelis 4: Portfelis-4 =  $\alpha + \beta \times$  Rinkos rizikos premija

Čia:

Portfelis-1 = 81,17 % aukso + 18,83 % Apple Inc. akciju

Portfelis-2 = 74,92 % Microsoft Corp. + 25,08 % Apple Inc. akciju

Portfelis-3 = 71,12 % aukso + 28,88 % Microsoft Corp. akciju

Portfelis-4 = 7.764768 % Apple Inc. + 23.19523 % Microsoft Corp. + 69.04 % aukso.

	$\alpha$	$\beta$	$R^2$
Modelis 1	-0.0005723	0.1747229	0.05161
(p-reikšmes)	(0.00549)	(0)	
Modelis 2	0.0004989	1.0097165	0.5831
(p-reikšmes)	(0.0336)	(0)	
Modelis 3	-0.0007624	0.2735671	0.1469
(p-reikšmes)	(0)	(0)	
Modelis 4	-0.0006102	0.2967395	0.1787
(p-reikšmes)	(0.00004)	(0)	

14 lentelė: Visų modelių laisvieji nariai,  $\beta$  ir  $R^2$

Pirmojo modelio koeficientas  $\beta=0.17$ , tai reiškia, kad portfelio aktyvų svyravimai mažai priklauso nuo rinkos akcijų kainų svyravimų, taigi portfelis gana patikimas. Laisvasis narys nereikšmingas, todėl galime jį prilyginti

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	-0.0006	0.0002	-2.78	0.0055
mrp[-891]	0.1747	0.0150	11.66	0.0000

15 lentelė: Pirmojo regresinio modelio įvertiniai

nuliui, kaip ir ankstesnėse interpretacijose, tai reiškia, kad portfelio rizikos premija lygi nuliui, jei rinkos rizikos premija nekinta. Mažas  $R^2$  rodo, jog tik 5% rinkos duomenų paaiškina portfelio akcijų kainų pokyčius, taigi portfelis turi didelį procentą nesisteminės rizikos.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	0.0005	0.0002	2.13	0.0336
mrp[-891]	1.0097	0.0171	59.09	0.0000

16 lentelė: Antrojo regresinio modelio įvertiniai

Antrojo modelio  $\beta = 1$ , todėl portfelio aktyvų svyravimai judės proporcingai su rinkos akcijų kainų svyravimais. Pakankamai didelis  $R^2=58\%$  reiškia, kad tiek procentų rinkos duomenų paaiškina šio portfelio aktyvų pelningumo svyravimus. Nuosmukio laikotarpiu tai ne pats geriausias portfelis, bet pakilimo metu gali būti gana pelningas.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	-0.0008	0.0002	-4.21	0.0000
mrp	0.2736	0.0132	20.74	0.0000

17 lentelė: Trečiojo regresinio modelio įvertiniai

Trečiame modelyje  $\beta=0.27$ , taigi rinkos akcijų kainoms pakilus arba nukritus 1%, portfelio aktyvų rizikos premijos proporcingai pakis daugiau nei ketvirčiu. P-reikšmė prie laisvojo nario rodo, kad jis reikšmingas ir yra neigiamas. Taigi rinkos akcijų rizikos premijoms nekintant, investuotojas iš portfelio gauna nuostolingą rizikos premiją (dėl didesnės išdo vekselio grąžos). Tad rinkos akcijų kainoms nekintant, pelningiau investuoti į išdo vekselius, ne tik į šį portfelį.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	-0.0006	0.0002	-3.49	0.0005
mrp[-891]	0.2967	0.0127	23.31	0.0000

18 lentelė: Ketvirtąjo regresinio modelio įvertiniai

Trijų aktyvų kombinacijos portfelis panašus į aukso ir Microsoft Corp. portfelį. Čia  $\beta=0.29$ , taigi rinkai susvyravus 1%, portfelio akcijos pakils arba nukris trečdaliu procento. Laisvasis narys vėl neigiamas ir reikšmingas, taigi rinkos akcijų pelningumui nekintant, investuotojo rizikos premija neigiamą.  $R^2=0.17$ , taigi 17% rinkos duomenų paaiškina portfelio rizikos premijų svyravimus.

Labiausiai nuo rinkos svyravimų priklauso portfelis, sudarytas iš Microsoft Corp. ir Apple Inc. kompanijų akcijų. Į jį pelninga investuoti rinkos pakilimo laikotarpiu, nes rinkos rizikos premijai pakilus 1%, portfelio rizikos premija taip pat išaugs 1%. Investavus 100 \$, galima gauti 0,06\$ per dieną. Tačiau jis visiškai nepelningas krizės laikotarpiu. Tada investuotojui palankiau rinktis pirmąjį portfelį, sudarytą iš aukso ir Apple Inc. akcijų, kuris nuo rinkos svyravimų priklauso mažiausiai iš keturių portfelių. Rinkos rizikos premijai nukritus 1%, šio portfelio rizikos premija pagal modelį nukris tik 0.17 %, o į jį investavus 100 \$, galima gauti 0,09\$ per dieną - tai yra didžiausia grąža iš visų keturių portfelių.

## Rezultatai ir išvados

1. Naudodami kapitalo aktyvų įvertinimo modelį, patikrinome aukso bei dviejų kompanijų – Microsoft Corp. ir Apple Inc. akcijų rizikos premijų priklausomybę nuo rinkos rizikos premijų. Auksas nuo rinkos svyravimų priklauso mažiausiai (arba, kaip rodo modelis, iš vis nepriklauso), o kompanijų akcijos svyruoja panašiai kaip ir rinkta.

2. Radome optimalias, t.y. mažiausią riziką turinčias, kombinacijas tarp dviejų aktyvų ir patikrinome jų rizikos premijos priklausomybę nuo rinkos rizikos premijos. Geriausias portfelis sudarytas iš aukso ir Apple Inc. akcijų. Jo pelningumas didžiausias ir jis mažiausiai priklauso nuo rinkos nestabilumo. Kita vertus, pagal kapitalo aktyvų įvertinimo modelį, pelningas gali būti ir antras portfelis iš Microsoft Corp. ir Apple Inc. akcijų, su sąlyga, kad rinkos rizikos premija nuolat kyla.

3. Jei investuotojas gali rinktis ne tik investiciją į kurį nors rinkos aktyvą, bet ir į nerizikingą išdo vekselį, tai pagal kapitalo aktyvų įvertinimo modelį ir kitus rodiklius (pelningumą, rizikos minimalumą) tai yra geriausia investicija. Trisdešimtys dienų JAV išdo vekselis turi didžiausią grąžą, mažiausią riziką, mažai priklauso nuo rinkos svyravimų, o bet kuri portfelio kombinacija su išdo vekseliu taip pat nerizikinga ir pelningesnė už kitų aktyvų portfelių kombinacijas. Tačiau verta pastebėti, kad tokie rezultatai atspindi duomenis nuo 2001 iki 2011 metų, o per pakilimo laikotarpį išdo vekselių pelningumas buvo itin didelis. Nuo 2008 metų pelningumas smarkiai krito, nors rizika nepakito ir liko maža.

# Naudota literatūra ir kiti šaltiniai

## Literatūra

- [1] T. E. Copeland, J. F. Weston: *Financial Theory and Corporate Policy*, Addison–Wesley Publishing Company(2004).
- [2] E. R. Berndt: *The Practice of Econometrics: Classic and Contemporary*, Prentice Hall (1991).
- [3] Dimitrios Asteriou: *Applied Econometrics*, Palgrave Macmillian (2006).
- [4] JAV 30–ies dienų izdo vekselių duomenys: <http://www.treasurydirect.gov/RI/OFAuctions?form=ndnld&typesec=bills> .
- [5] Standard Poor’s 500 indekso dieniniai duomenys: <http://wikiposit.org/w?action=dl&dltypes=comma%20separated&sp=daily&uid=STOCKINDEX.SPX> .
- [6] Microsoft Corp. akcijų kainų dieniniai duomenys: <http://wikiposit.org/w?action=dl&dltypes=comma%20separated&sp=daily&uid=NASDAQ.MSFT> .
- [7] Apple Inc. akcijų kainų dieniniai duomenys: <http://wikiposit.org/w?action=dl&dltypes=comma%20separated&sp=daily&uid=NASDAQ.AAPL> .
- [8] Aukso kainų dieniniai duomenys: <http://wikiposit.org/w?action=dl&dltypes=comma%20separated&sp=daily&uid=GOLDDAILY> .

## A priedas: aprašomoji statistika

Aprašomoji statistika:

```
\begin{Schunk}
\begin{Sinput}
> cbind(mean(rkfree), mean(market), mean(microsoft), mean(apple),
+       mean(gold))
\end{Sinput}
\begin{Soutput}
          [,1]          [,2]          [,3]          [,4]          [,5]
[1,] 0.00186004 0.0001173288 0.0001968397 0.001807715 0.0007931419
\end{Soutput}
\begin{Sinput}
> cbind(mean(mrp), mean(microsoftrp), mean(applerp), mean(goldrp))
\end{Sinput}
\begin{Soutput}
          [,1]          [,2]          [,3]          [,4]
[1,] -0.001742711 -0.001663201 -5.20737e-05 -0.001066898
\end{Soutput}
\begin{Sinput}
> cbind(var(rkfree), var(market), var(microsoft), var(apple), var(gold))
\end{Sinput}
\begin{Soutput}
          [,1]          [,2]          [,3]          [,4]          [,5]
[1,] 2.789252e-06 0.0001827668 0.0003574371 0.0006370941 0.0001357824
\end{Soutput}
\begin{Sinput}
> cbind(var(mrp), var(microsoftrp), var(applerp), var(goldrp))
\end{Sinput}
\begin{Soutput}
          [,1]          [,2]          [,3]          [,4]
[1,] 0.0001857122 0.0003601065 0.000639531 0.0001384164
\end{Soutput}
\begin{Sinput}
> cbind(sd(rkfree), sd(market), sd(microsoft), sd(apple), sd(gold))
\end{Sinput}
\begin{Soutput}
```

```

          [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]
[1,] 0.001670105 0.01351913 0.01890601 0.02524072 0.01165257
\end{Soutput}
\begin{Sinput}
> cbind(sd(mrp), sd(microsoftrp), sd(applerp), sd(goldrp))
\end{Sinput}
\begin{Soutput}
          [,1]      [,2]      [,3]      [,4]
[1,] 0.01362763 0.01897647 0.02528895 0.01176505
\end{Soutput}
\begin{Sinput}
> cbind(cor(market, microsoft), cor(market[-891], apple), cor(market,
+   gold), cor(mrp, microsoftrp), cor(mrp[-891], applerp), cor(mrp,
+   goldrp))
\end{Sinput}
\begin{Soutput}
          [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]      [,6]
[1,] 0.7184425 0.5511114 -0.04482454 0.7209318 0.5534901 -0.0266428
\end{Soutput}
\end{Schunk}

```

## B priedas: modeliai ir jų liekanos

Modeliai:

```

\begin{Schunk}
\begin{Sinput}
> microsoftmod = lm(microsoftrp ~ mrp)
> applemod = lm(applerp ~ mrp[-891])
> goldmod = lm(goldrp ~ mrp)
> summary(microsoftmod)
> summary(applemod)
> summary(goldmod)
> bptest(lm(microsoftrp ~ mrp))
> bptest(lm(goldrp ~ mrp))
> bptest(lm(applerp ~ mrp[-891]))

```



```

> summary(dynlm(ts(applerp) ~ ts(mrp) + L(ts(applemod$res), 1)))
> summary(dynlm(ts(microsoftrp) ~ ts(mrp) + L(ts(microsoftmod$res),
+      1)))
> summary(dynlm(goldrp ~ mrp + L(ts(goldmod$res), 1)))
> durbinWatsonTest(microsoftmod, max.lag = 1)
> durbinWatsonTest(applemod, max.lag = 1)
> durbinWatsonTest(goldmod, max.lag = 1)
> jarque.bera.test(microsoftmod$res)
> jarque.bera.test(applemod$res)
> jarque.bera.test(goldmod$res)
\end{Sinput}
\end{Schunk}

```

## C priedas: portfeliai

Portfeliai:

Aktyvo  $x$  dalis portfelyje iš dviejų aktyvų:

```

      [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 0.8116744 0.7491511 0.7111582

```

```

      vek1      vek2      vek3
[1,] 0.9959148 0.9924209 0.9804096

```

Iždo vekselio procentas portfelyje iš dviejų aktyvų:

```

      [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 0.999665 1.000066 0.9996887

```

Optimalus portfelis iš trijų aktyvų, naudojant formulę (1):

```

\begin{Schunk}
\begin{Sinput}
> portfolio = 0.8117 * gold[-891] + 0.1883 * apple
> (var(microsoft) - cor(microsoft[-891], portfolio) * sd(portfolio) *
+   sd(microsoft))/(var(portfolio) + var(microsoft) - 2 * cor(microsoft[-891],

```

```

+      portfolio) * sd(portfolio) * sd(microsoft))
\end{Sinput}
\begin{Soutput}
[1] 0.8059366
\end{Soutput}
\end{Schunk}

```

80,59 % portfelio ir 19,41 % microsoft  
80.59\* 0.8117 aukso  
80.59\* 0.1883 apple

```

> sd((65.41 * gold[-891] + 15.18 * apple + 19.41 * microsoft[-891])/100)

[1] 0.009586881

```

Analogiškai patikrinamos kitos kombinacijos.  
Portfelių regresinių modelių R kodas:

```

\begin{Schunk}
\begin{Sinput}
> goldapple = 0.8117 * gold[-891] + 0.1883 * apple
> microapple = 0.7492 * microsoft[-891] + 0.2508 * apple
> goldmicro = 0.7112 * gold + 0.2888 * microsoft
> goldmicroapple = 0.232 * microsoft[-891] + 0.0776 * apple + 0.6904 *
+      gold[-891]
> goldapplerp = goldapple - rkfree[-891]
> microapplerp = microapple - rkfree[-891]
> goldmicrorp = goldmicro - rkfree
> goldmicroapplerp = goldmicroapple - rkfree[-891]
> goldapplemod = lm(goldapplerp ~ mrp[-891])
> microapplemod = lm(microapplerp ~ mrp[-891])
> goldmicromod = lm(goldmicrorp ~ mrp)
> goldmicroapplemod = lm(goldmicroapplerp ~ mrp[-891])
> microapple.table = xtable(microapplemod)
> goldapple.table = xtable(goldapplemod)
> goldmicro.table = xtable(goldmicromod)
> goldmicroapple.table = xtable(goldmicroapplemod)
> summary(goldapplemod)

```

```
> summary(microapplemod)
> summary(goldmicromod)
> summary(goldmicroapplemod)
\end{Sinput}
\end{Schunk}
```