VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
EKONOMETRINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Monika Šeštokaitė ir Simona Plonytė

CAPM ir akcijų portfelio konstravimas

Kursinio darbo vadovas prof. Remigijus Leipus

Ekonometrija, III kursas, I grupė

VILNIUS 2011

Turinys

1 Įvadas

2 CAPM

3 Duomenys

3.1 JAV 30-ies dienų iždo vekseliai

JAV vieno mėnesio iždo vekselius laikysime nerizikinga investicija. Nagrinėjami dieniniai duomenys nuo 2001 rugpjučio 1 dienos iki 2011 metų liepos pabaigos. Kadangi JAV iždo vekselių duomenys pateikti kaip dieninė diskonto norma antrinėje rinkoje, vekselių pelningumą galima apskaičiuojant naudojant dvi patogias formules:

$$P = 100 - (100 \times \frac{d \times t}{360})$$

Pirma, iš diskonto normos isreiskiame kainą - iš nominalo atimtą nuolaidą. Čia nominalas = 100, P - iždo vekselio kaina, d - iždo vekselio diskonto norma, t - periodo dienų skaičius (mūsų atveju, 30 dienų). Turėdami kainą, galime rasti iždo vekselio pelningumą:

$$Y = \frac{100 - P}{P} \times \frac{365}{t}$$

Čia Y - iždo vekselio pelningumas, t.y. grąža ir t = 30.

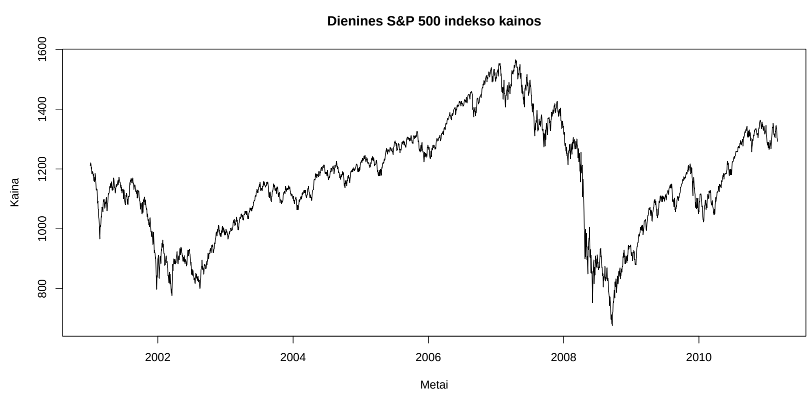
Taigi, 1 pav. vaizduojamos JAV iždo vekselių dieninės grąžos

1 pav.: JAV 30-ies dienų iždo vekselių pelningumas

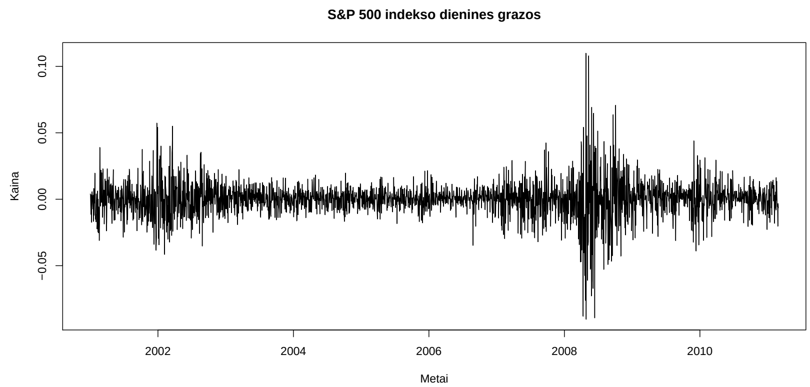
Grafikas gan išraiškingai atspindi nuo 2004 metų prasidėjusį ekonomikos pakilimą, išaugusį vartojimą ir analogiškas JAV vyriausybės pastangas pritraukti investuotojus didelėmis palūkanų normomis - iždo vekselių pelningumu. Vekselių pelningumas pasiekė maksimumą 2006 metais, iki 2007 metų išlaikė gan aukštą lygį, taciau nuo 2007 metu palaipsniui mažėjo, kol galiausiai 2008 metais iždo vekselių pelningumas nukrito iki žemiausio lygio nuo 2001 metų.

3.2 Indekso Standard & Poor's 500 akcijų dieninės kainos ir grąžos

JAV įmonių indeksas Standard & Poor's 500 atstovaus visą ar bent didžiąją dalį Jungtinių Amerikos valstijų rinkos. Indeksą sudaro 500 įmonių, gaunančių daugiau nei dolco zenklas5 mlrd. pelną; tarp jų - Adobe Systems Inc, Amazon.com Inc, Apple Inc, Coca Cola Co. ir kitos. Indekso dieninių akcijų grąžų grafikas neblogai atspindi rinkos būklę Jungtinėse Amerikos valstijose per pastaruosius dešimt metų. Nuo 2002 metų vidurio stebimas stabilus rinkos akcijų pelningumo didėjimas, o nuo 2007 metų - stabilus, bet kiek staigesnis pelningumo mažėjimas. Taip pat gan ryškiai pastebima ir 2008-2009 metų rinkos krizė bei po jos prasidėjęs įmonių akcijų pelningumo augimas.



2 pav.: S & P 500 dieninės akcijų kainos 2001-2011 m.

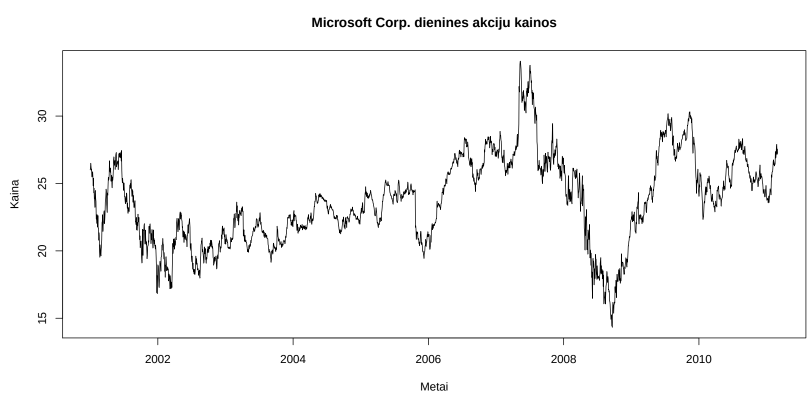


3 pav.: S & P 500 dieninės akcijų grąžos

Šiame grafike vaizduojamos rinkos dieninės akcijų grąžos. Didesnis nei vidutinis gražų dispersijos padidėjimas taip pat sutampa su 2008-2009 metų krizės laikotarpiu. Dieninės grąžos stabiliausios 2003-2007 metų periodu, o tai irgi sutampa su stabilumo laikotapiu JAV ekonomikoje.

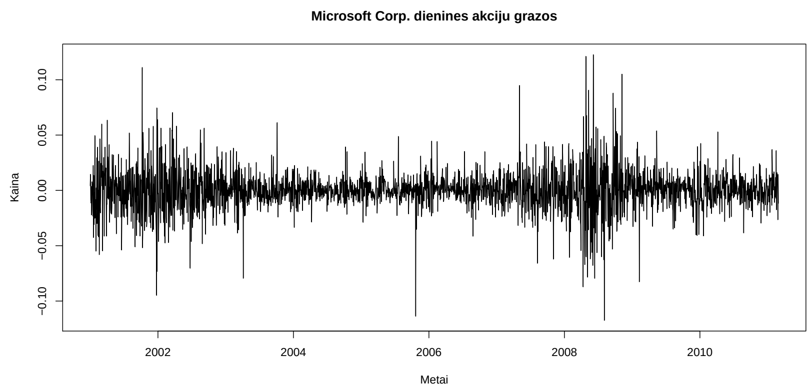
3.3 Microsoft Corp.

Viena is CAPM modelio tyrimui pasirinktų įmonių - Microsoft Corp. Tai viena didziausių programinę įrangą gaminančių kompanijų, turinti savo atstovybę ir Lietuvoje. Žemiau pateiktos šios įmonės dieninių akcijų kainos bei dieninių akcijų grąžos.



4 pav.: Microsoft Corp. dieninės akcijų kainos 2001-2011 m.

Microsoft Corp. akciju kainos pasizymi gan periodiskais svyravimais iki mazdaus 2005 metu pabaigos. Nuo 2006 metu akciju kaina gerokai pakilo ir 2007 metais pasieke auksciausia lygi. Bet tikriausiai sia imone irgi paveike krize ir nuo 2007 iki 2008 metu vidurio akciju kainos krito, kol pasieke zemiausia lygi. Toliau stebime stabilu akciju kainu kilima iki 2011 vasaros.

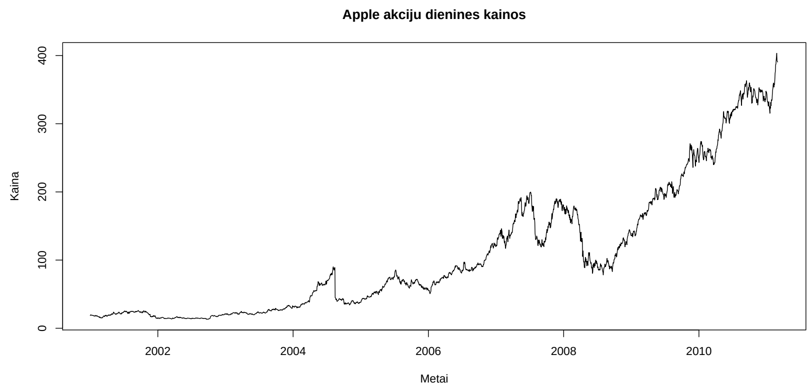


5 pav.: Microsoft Corp. dieninės akcijų grąžos 2001-2011 m.

Microsoft Corp. dieninės akcijų grąžos, taip pat kaip ir Standard & Poor's, neblogai atspindi stabilumo ir krizės laikotarpius, o kelios išskirtys susijusios su kitomis/atskiromis/individualiomis imonės charakteristikomis.

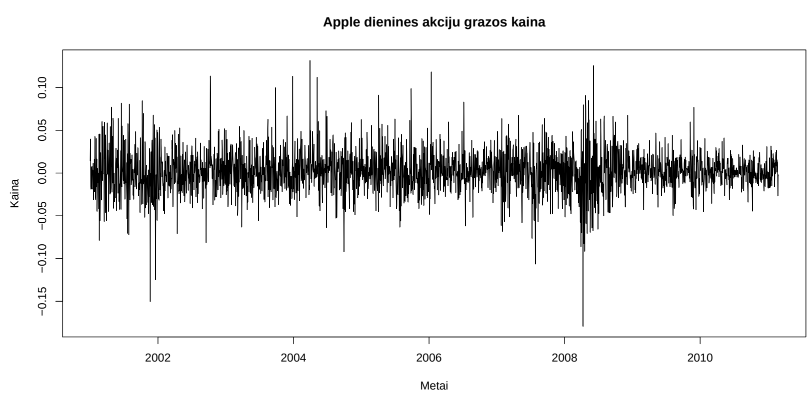
3.4 Apple Inc.

Kita įmonė, pasirinkta CAPM modelio tyrimui - Apple Inc. Tai kompanija, siūlanti plataus vartojimo elektronikos ir programinės įrangos produktus. Žemiau pateikti Apple Inc. dieninių akcijų kainų bei dieninių akcijų grąžų grafikai.



6 pav.: Apple Inc. dieninės akcijų kainos 2001-2011 m.

Apple Inc. dieninių akcijų kainų svyravimai kiek skiriasi nuo S&P 500 ar Microsoft akcijų kainų. Pastaruosius keletą metų šios kompanijos akcijų kainos stabiliai kilo ir net krizės laikotarpiu nepasiekė žemiausios kainos per dešimties metų laikotarpį. Svarbi data duomenų tyrimui - 2005 vasario 5 d. Šią dieną Apple Inc. padvigubino akcijų kiekį už tą pačią kainą, t.y. jei iki padalijimo viena akcija kainavo dolcas88, tai po padalijimo už tą pačią kainą investuotojas jau galėjo įsigyti dvi akcijas (po dolcas44 už vieną). Spėjama, jog Apple Inc. tokiu veiksmu norėjo pritraukti naujų investuotojų.

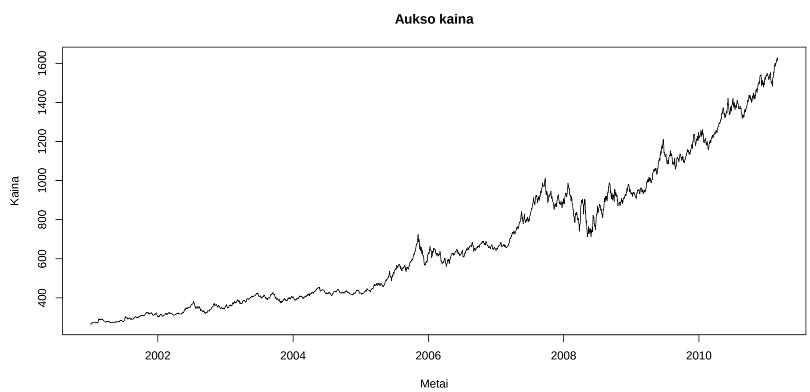


7 pav.: Apple Inc. dieninės akcijų grąžos 2001-2011 m.

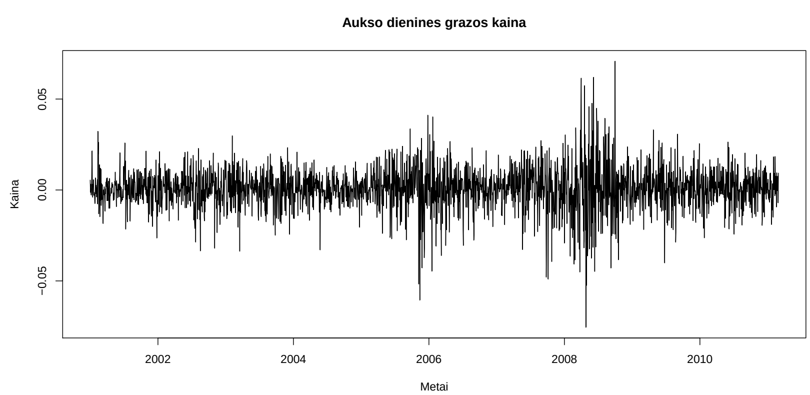
Šiame grafike pateikiamos dieninės akcijų grąžos, be 891-ojo duomens (pašalinta išskirtis, atsiradusi dėl akcijų kiekio padvigubinimo). Galima pastebėti gan stabilią, nors santykinai nemažą, duomenų dispersiją, o kelios išskirtys turbūt susijusios su atskirais/pavieniais įmonės sprendimais, ivykiais arba rezonavo su krize.

3.5 Auksas

Įdomu tyrinėti ne tik svarbių įmonių rizikos premijų priklausomybę nuo rinkos rizikos premijos, bet ir aukso pelningumą. Aukso kaina per dešimt metų stabiliai kyla be jokių ryškesnių nuosmukių. 2011 m. vasarą kaina pasiekė aukščiausią kada nors buvusį lygį.



8 pav.: Aukso dieninės kainos



9 pav.: Aukso dieninės grąžos

Aukso dieninių grąžų grafikas turi gana mažą dispersiją, kurios padidėjimas 2008 metais sutampa su krizės laikotapiu. Tačiau net ir per krizę didžiausios aukso grąžų vertės nepasiekia 0.1 ar -0.1.

4 Aprašomoji duomenų statistika

Rizikos premija - skirtumas tarp įmonės akcijos grąžos ir iždo vekselio pelningumo. Tai premija investuotojui, pasirinkusiam rizikingesnės įmonės akcijas vietoje nerizikingo iždo vekselio. Kuo ji didesnė, tuo labiau traukia investicijas, bet dažnai (pagal CAPM teoriją) didesnė premija taip pat reiškia ir didesnę riziką investuojant į tam tikrą imonę. Žemiau pateiktoje lentelėje paskaiciuosime aktyvų vidutines grązas, standartinius nuokrypius, dispersijas bei jų vidutines rizikos premijas ir standartinius nuokrypius.

Duomenys	Vidurkis	Dispersija	Standartinis nuokrypis
rkfree	0.00186004	2.789252e-06	0.001670105
market	0.0001173288	0.0001827668	0.01351913
microsoft	0.0001968397	0.0003574371	0.01890601
apple	0.001807715	0.0006370941	0.02524072
gold	0.0007931419	0.0001357824	0.01165257
mrp	-0.001742711	0.0001857122	0.01362763
microsoftrp	-0.001663201	0.0003601065	0.01897647
applerp	-5.20737e-05	0.000639531	0.02528895
goldrp	-0.001066898	0.0001384164	0.01176505

Didžiausią grąžų vidurkį turi Apple Inc. (0.001807715), šis aktyvas galėtų būti investuotojams patraukliausias. Didžiausia grąžų dispersija(0.0006370941)/standartinis nuokrypis(0.02524072) taip pat priklauso Apple Inc., taigi, nors šios akcijos žada ir didžiausią pelną, tai yra rizikingiausias aktyvas. Mažiausia dispersija (0.0001357824)/standartinis nuokrypis (0.01165257) priklauso aukso kainų grąžoms xxx, šis aktyvas turi mažiausius svyravimus, todėl atrodo patikimai.

Koreliacijos:

market	microsoft	0.7184425
market	apple	0.5511114
market	gold	-0.04482454
mrp	microsoftrp	0.7209318
mrp	applerp	0.5534901
mrp	goldrp	-0.0266428

Labiausiai su rinka koreliuoja Microsoft Corp. (koreliacijos koeficientas lygus 0.7184425), t.y. labiausiai priklauso nuo rinkos būklės.

Mažiausiai su rinkos kainomis koreliuoja aukso kainos (-0.04482454). Šis koreliacijos koeficientas yra neigiamas, taigi tikėtina, kad rinkos akcijų vertei kintant, aukso grąžos kis priešinga kryptimi, tačiau dėl nedidelės koeficiento reikšmės aktyvo kainos tuo pačiu greičiu gali ir nesikeisti. Tai ypač aktualu krizės laikotarpiu.

5 Kapitalo aktyvų įvertinimo modelis

Viena iš kapitalo aktyvų įvertinimo modelio (*Capital aset pricing model* - CAPM) išraiškų - paprasta vieno kintamojo regresija. Pasinaudojus ja, tirsime imonių akcijų ir aukso rizikos premijų priklausomybę nuo rinkos rizikos premijų. Modeliuose pateiktas laisvasis narys α ir koeficientas β .

α	β	R^2	$p - value$
0.0000863	1.0038977	0.5197	$<$ 2.2e-16

Gautas β koeficientas lygus 1.004 ir yra reikšmingas. Tai reiskia, jog rinkos rizikos premijai pakilus ar nukritus 1%, Microsoft Corp. rizikos premijos taip pat pakils 1%. Laisvasis narys beveik lygus nuliui ir nereikšmingas, tai neprieštarauja CAPM teorijai ir logikai - jei rinkos rizikos premija lygi nuliui, tai investuotojo i Microsoft Corp. šansai gauti rizikos premiją yra labai maži. R^2= 0.5197, tai reiškia, kad 51,97% rinkos duomenų paaiškina Microsoft Corp. rizikos premijų svyravimus, t.y. sudaro sisteminę (rinkos) riziką. Likusi specifinė rizika priklauso nuo kitų įmonės charakteristikų.

α	β	R^2	$p - value$
0.0017347	1.0269695	0.3064	$<$ 2.2e-16

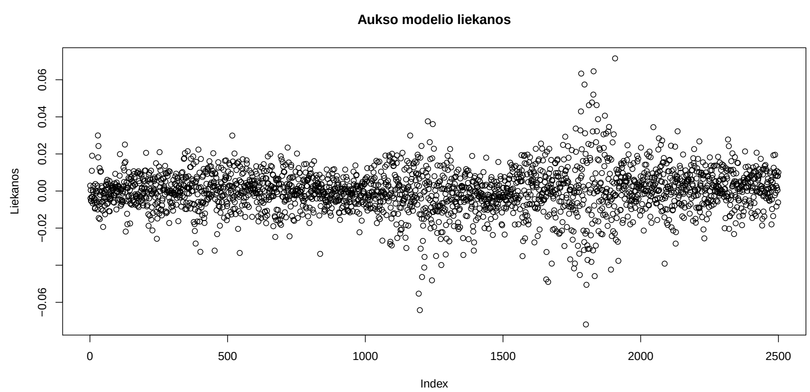
Koeficientas β, kaip ir Microsoft Corp. imonės, lygus 1.027 ir yra reikšmingas (0<0.005). Taigi rinkos akcijų vertei susvyravus 1%, Apple Inc. irgi gali patirti panašų akcijų kainos pokytį. Laisvasis narys labai arti nulio ir nereikšmingas, taigi investuotojas pasirinkęs Apple Inc. akcijas negali tikėtis jokios rizikos premijos, kai rinkos akcijų vertės pokytis lygus nuliui. Visgi R^2 nėra labai didelis - tik 30% rinkos duomenų paaiškina Apple Inc. akcijų vertės svyravimus.

α	β	R^2	$p - value$
-0.0011070	-0.0230014	0.01176	0.183

Visai kitoks rezultatas gaunamas sudarius aukso rizikos premijų priklausomybės nuo rinkos rizikos premijų modelį. Šįkart $\beta = -0.023$ ir tai reikštų, kad aukso kainos ne tik mažai priklauso nuo rinkos akcijų vertės svyravimų, bet netgi juda priešinga linkme. Tai gali pasirodyti kaip itin patraukli investicija nuosmukio laikotarpiu. Tačiau koeficiento p-reiksmė = $0.183 > 0.05$, taigi negalima atmesti H_0 hipotezės, kad $\beta = 0$. Bet ir priėmus šią hipotezę, galima tarti, kad aukso kainos mažai priklauso nuo rinkos svyravimų. Laisvasis narys šįkart -0.011 ir p-reiksmė rodo, kad jis reikšmingas. Toks rezultatas kiek prieštarauja CAPM logikai - rinkos akcijų vertėms nesikeičiant, aukso rizikos premija neigiama. Galbūt tai galetų reikšti, kad dieninis aukso pelningumas itin nedidelis. R^2= 0.0007 - itin maža reiksmė, patvirtinanti, kad rinka beveik nepaaiškina aukso kainų pokyčių, taigi visa aukso pelningumo rizika sisteminė - priklauso nuo kitų desnių/charakteristikų.

5.1 Sudarytų modelių liekanų tikrinimas

Liekanos turi buti homoskedastiškos, ne autokoreliuotos ir pasiskirsčiusios pagal normalųjį skirstinį.



10 pav.: Aukso modelio liekanos nėra heteroskedastiskos

Patikrinsime, ar liekanos turi slenkantį vidurki.

aktyvas	koef. prieš ankstinį	$p - value$
Microsoft Corp.	-2.293e-02	0.252
Apple Inc.	0.0337889	0.155
Gold	0.0360663	0.0716

Visuose modeliuose pirmos eilės liekanų ankstiniai nereikšmingi.

Autokoreliacijai patikrinti naudosime Durbin-Watson testą:

$aktyvas$	$D-Wstatistika$	$-value$
Microsoft Corp.	2.04577	0.24
Apple Inc.	1.97393	0.54
Gold	1.927601	0.076

Liekanos nėra autokoreliuotos su savo pirmos eilės ankstiniais.

Normalumui tikrinti naudosime Jarque-Bera arba Kolmogorov-Smirnov testą.

$aktyvas$	X^2	$p-value$
Microsoft Corp.	8683.798	$<$ 2.2e-16
Apple Inc.	3384.751	$<$ 2.2e-16
Gold	1593.331	$<$ 2.2e-16

P-reikšmės testuose rodo, kad liekanos nėra pasiskirsčiusios pagal normalųjį skirstinį. Galbūt liekanų pasiskirstymas reiškia, kad rinkos akcijų kainų pokyčiai mažai sutampa su įmonių akcijų vertės pakitimais.

6 Optimalaus portfelio paieška

6.1 Portfeliai iš dviejų aktyvų

Iš pradžių ieškosime optimalių portfelių tarp dviejų aktyvų. Formulė [?]

$$a^* = \frac{\sigma_y^2 - r_{xy}\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2r_{xy}\sigma_x\sigma_y}$$

randa optimaliausią įmonės x akcijų procentą portfelyje. Dar pakombinuosime aktyvus ir nerizikingus iždo vekselius - kokią dalį portfelyje turėtų sudaryti aktyvas ir iždo vekselis. Skaičiavimai su R programa pateikti priede (1-oje skiltyje).

Žymėjimai:
P #1 - Apple Inc. akcijų ir aukso portfelis
P #2 - Apple Inc. ir Microsoft Corp. akcijų portfelis
P #3 - Microsoft Corp. ir auksas
P #4 - Apple Inc. ir nerizikingas aktyvas (iždo vekselis)
P #5 - Microsoft Corp. ir nerizikingas aktyvas
P #6 - Auksas ir nerizikingas aktyvas

	P #1	P #2	P #3	P #4	P #5	P #6
Apple Inc.	18,83 %	25,08 %		0,041 %		
Microsoft Corp.		74,92 %	28,88 %		0,076 %	
Auksas	81,17 %		71,12 %			1,96 %
Vekselis				99,59 %	99,24 %	98,04 %
Grąžos	0.00099	0.00060	0.00062	0.00186	0.00185	0.00184
Rizika (s.d.)	0.0104	0.0180	0.0096	0.0017	0.0017	0.0017

1 lentelė: Portfelius sudarančių aktyvų procentai, jų grąžos ir rizika

Aukso ir Apple Inc. portfelyje - 81,17 % aukso ir 18,83 % Apple akcijų

Microsoft Corp. ir Apple Inc. portfelyje - 74,92 % Microsoft Corp. akcijų 25,08 % Apple Inc. akcijų

Aukso ir Microsoft Corp. portfelyje - 71,12 % aukso ir 28,88 % Microsoft akcijų

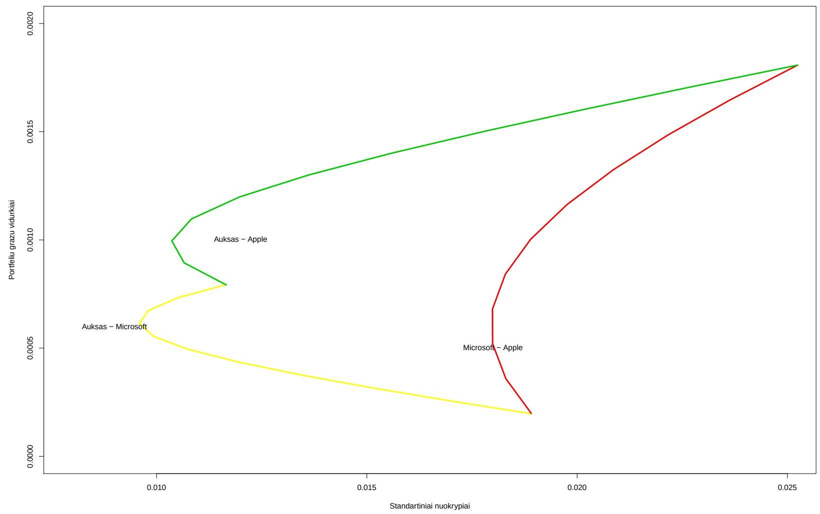
Visoms trims kombinacijoms su nerizikingu aktyvu tiek rizika, tiek grąža yra vienodos, o iždo vekselis sudaro beveik visą portfelį.

Pataisymas: šiaip jau JAV iždo vekselių diskonto norma ilgą laiką buvo gan aukšta ir viršijo 1%. Tačiau po 2008-ųjų metų rugsėjo 15 d. vekselių diskonto norma nukrito nuo 1.35 iki 0.28 ir vėliau tiek nebepakilo iki 2011-ųjų vasaros. Todėl būtų naudinga patikrinti optimalias vekselių ir aktyvų kombinacijas, kai vekselių pelningumas nėra toks didelis.

	P # 4	P # 5	P # 6
Apple Inc.	0,04 %		
Microsoft Corp.		0,00 %	
Auksas			0,04 %
Vekselis	99,96 %	100 %	99,96 %
Grąžos	0.001860	0.001860	0.001860
Rizika (stand. nuokrypis)	0.00167	0.00167	0.001669

2 lentelė: Portfelių iš nerizikingo ir rizikingo aktyvo grąžos ir rizika

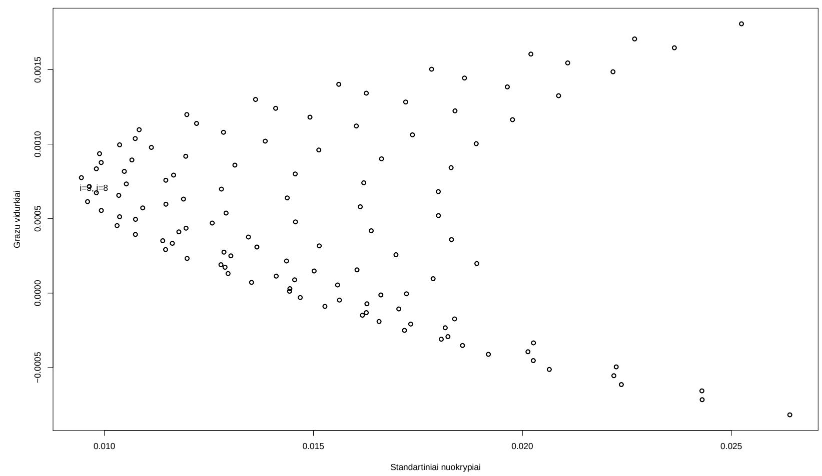
Deja, iždo vekselių procentai portfeliuose nepakito labai smarkiai, grąžos ir standartiniai nuokrypiai liko beveik tokie patys, todėl liksime prie pradinių kombinacijų. Galbūt rezultatai nepasikeitė dėl nuo 2008 m. sumažėjusio vekselio ir padidėjusio įmonių standartinio nuokrypio.



11 pav.: Iliustracija: dviejų aktyvų kombinacijų rizika ir grąžos

Iš šių kreivių galima matyti, jog net optimalus portfelis, sudarytas iš Apple Inc. ir Microsoft Corp. akcijų turi daug didesnę riziką ir tokią pat grąžą, kaip ir iš aukso bei Microsoft Corp. akcijų sudarytas portfelis. O vos padidinus riziką, iš Apple Inc. ir aukso akcijų sudaryto portfelio, galima gauti didesnę grąžą. Todėl optimaliausias pasirinkimas tarp portfelių, sudarytų iš dviejų aktyvų, yra Apple Inc. ir aukso akcijų kombinacija.

6.2 Trijų aktyvų portfelis



12 pav.: Portfelio, sudaryto iš Apple, Microsoft ir aukso rizikos ir grąžos kombinacijos

Pav.: norint turėti portfelį su mažiausia rizika, reikėtų rinktis portfelio kombinaciją [**?**], grafike esančią kairiausiai. Kiti portfelio pasirinkimai priklauso nuo vartotojo rizikos preferencijos.

Apytiksliai aktyvų svoriai optimaliame portfelyje, kai i=8 ir j=3:

$0.1 \times (i-1) \times Microsoft + 0.1 \times (j-1) \times Auksas + (1-(i-1)-(j-1)) \times 0.1 \times Apple$

Portfelio aktyvų svorius, kai aktyvų yra n (šiuo atveju $n = 3$) nėra lengva rasti, todėl pabandykime pritaikyti dviejų aktyvų optimalaus portfelio formulę: iš ankstesnio poskyrio turime optimalius svorius tarp dviejų aktyvų, dabar ieškome optimalios proporcijos tarp portfelio ir trečio aktyvo.

Portfelių žymėjimai:

P # 7 = optimalus aukso ir Apple Inc. akcijų portfelis ir Microsoft Corp. akcijos

P #8 = optimalus Microsoft Corp. ir Apple Inc. akcijų portfelis ir auksas

P #9 = optimalus Microsoft Corp. akcijų ir aukso portfelis ir Apple Inc. akcijos.

	Apple Inc.	Microsoft Corp.	Auksas	Grąžos	Rizika (s.d.)
P # 7	15.18 %	19.41 %	65.41 %	0.0008311881	0.009586881
P # 8	7.764768 %	23.19523 %	69.04 %	0.0007334121	0.009427794
P # 9	6.478507 %	27.00901 %	66.51249 %	0.0006976978	0.009455108

3 lentelė: Portfeliai iš trijų aktyvų

Mažiausią standartinį nuokrypį, t.y. riziką turi aštuntas portfelis. Jį ir pasirinksime. Portfelių konstravimo kodas su R paketu pateiktas priede (Nr. 4).

Kombinacija su iždo vekseliais ir II portfeliu:
P # 10 = 97,04 % * izdo-vekselis + 2,96 % * portfelis2

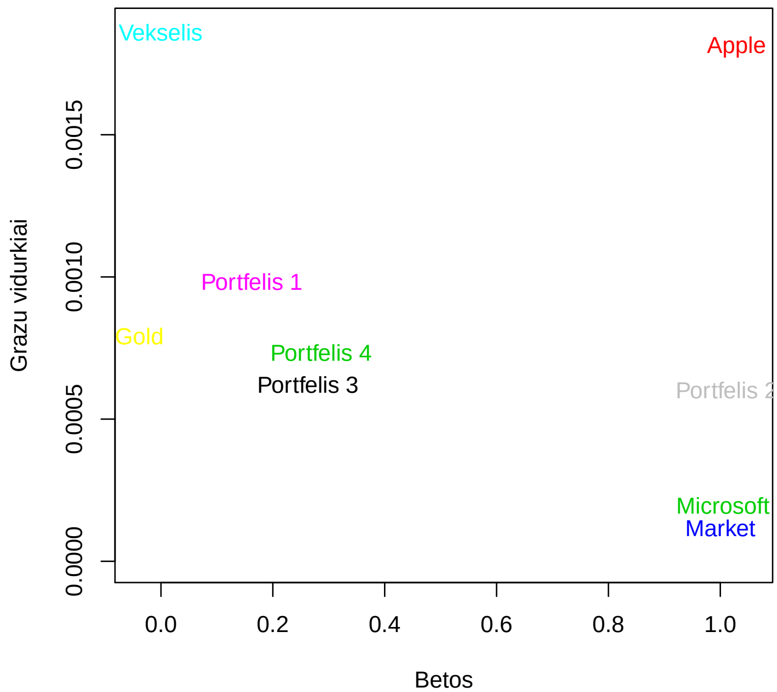
```
> portfolio = 0.232 * microsoft[-891] + 0.0776 * apple + 0.6904 *
+     gold[-891]
> (var(portfolio) - cor(portfolio, rkfree[-891]) * sd(rkfree) *
+     sd(portfolio))/(var(rkfree) + var(portfolio) - 2 * cor(portfolio,
+     rkfree[-891]) * sd(rkfree) * sd(portfolio))

[1] 0.970406
```

	β	Grąžos
Apple Inc.	1.0291	0.0018077
Microsoft Corp.	1.0047	0.000197
Auksas	-0.03864	0.0007931
Vekselis	-0.0004271	0.00186
P 1	0.16243	0.000984
P 2	1.0111	0.00060198
P 3	0.26268	0.00062093
P 4	0.2864	0.000733

4 lentelė: Aktyvų ir portfelių priklausomybė nuo rinkos svyravimų (β) ir jų pelningumas

β parodo, kaip įmonės akcijų ar portfelio rizikos premijos reaguoja į rinkos svyravimus: kuo didesnė β, tuo aktyvas nestabilesnis ir rizikingesnis.

Pateikta lentelė su įmonių, aukso bei portfelių β koeficientais ir jų pelningumais.



13 pav.: Rinkos, iždo vekselių ir įmoniu β ir ją atitinkantis grąžų vidurkis

Iš lentelės investuotojas gali pasirinkti sau patraukliausią investavimo būdą: jei investuotojas nori gauti itin dideles grąžas, ir visiškai nekreipia dėmesio į įmonės priklausomybę nuo rinkos svyravimų, jis rinktųsi investiciją į Apple Inc. akcijas. Kita vertus, turimi empiriniai duomenys rodo, jog JAV iždo vekselio grąža yra itin didelė, o rizika ir priklausomybė nuo rinkos itin mažos, todėl vienareikšmiškai galima tarti, kad protingiausia ir naudingiausia investuoti į JAV trisdešimties dienų iždo vekselius.

6.3 Optimaliausių portfelių modeliai

Kandangi jau sudarėme optimaliausias kombinacijas tarp dviejų aktyvų ir pasirinkome trijų aktyvų portfelio svorius, galime sudaryti CAPM regresinius modelius ir pažiūrėti, kaip portfelių pelningumas priklauso nuo rinkos svyravimų. R kodas pateiktas priede.

Regresiniai modeliai:

Modelis 1: Portfelis-1= $\alpha + \beta \times$ Rinkos rizikos premija
Modelis 2: Portfelis-2= $\alpha + \beta \times$ Rinkos rizikos premija
Modelis 3: Portfelis-3= $\alpha + \beta \times$ Rinkos rizikos premija
Modelis 4: Portfelis-4= $\alpha + \beta \times$ Rinkos rizikos premija

Čia:

Portfelis-1 = 81,17 % aukso + 18,83 % Apple Inc. akciju
Portfelis-2 = 74,92 % Microsoft Corp. + 25,08 % Apple Inc. akciju
Portfelis-3 = 71,12 % aukso + 28,88 % Microsoft Corp. akciju
Portfelis-4 = 7.764768 % Apple Inc. + 23.19523 % Microsoft Corp. + 69.04 % aukso.

	α	β	R^2
Modelis 1	-0.0005723	0.1747229	0.05161
(p-reiksmes)	(0.00549)	(0)	
Modelis 2	0.0004989	1.0097165	0.5831
(p-reiksmes)	(0.0336)	(0)	
Modelis 3	-0.0007624	0.2735671	0.1469
(p-reiksmes)	(0)	(0)	
Modelis 4	-0.0006102	0.2967395	0.1787
(p-reiksmes)	(0.00004)	(0)	

5 lentelė: Visų modelių laisvieji nariai, β ir R^2

Pirmojo modelio koeficientas β=0.17, tai reiškia, kad portfelio aktyvų svyravimai mažai priklauso nuo rinkos akcijų kainų svyravimų, taigi portfelis gan patikimas. Laisvasis narys nereikųmingas, todėl galime jį prilyginti

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	-0.0006	0.0002	-2.78	0.0055
mrp[-891]	0.1747	0.0150	11.66	0.0000

6 lentelė: Pirmojo regresinio modelio įvertiniai

nuliui, kaip ir ankstesnėse interpretacijose, tai reiškia, kad portfelio rizikos premija lygi nuliui, jei rinkos rizikos premija nekinta. Mažas R^2 rodo, jog tik 5% rinkos duomenų paaiškina portfelio akcijų kainų pokyčius, taigi portfelis turi didelį procentą nesisteminės rizikos.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	0.0005	0.0002	2.13	0.0336
mrp[-891]	1.0097	0.0171	59.09	0.0000

7 lentelė: Antrojo regresinio modelio įvertiniai

Antrojo modelio $\beta = 1$, todėl portfelio aktyvų svyravimai judės proporcingai su rinkos akcijų kainų svyravimais. Pakankamai didelis R^2=58% reiškia, kad tiek procentų rinkos duomenų paaiškina šio portfelio aktyvų pelningumo svyravimus. Nuosmukio laikotarpiu tai ne pats geriausias portfelis, bet pakilimo metu gali būti gan pelningas.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	-0.0008	0.0002	-4.21	0.0000
mrp	0.2736	0.0132	20.74	0.0000

8 lentelė: Trečiojo regresinio modelio įvertiniai

Trečiame modelyje β=0.27, taigi rinkos akcijų kainoms pakilus arba nukritus 1%, portfelio aktyvų rizikos premijos proporcingai pakis daugiau nei ketvirčiu. P-reikšme prie laisvojo nario rodo, kad jis reikšmingas ir yra neigiamas. Taigi rinkos akcijų rizikos premijoms nekintant, investuotojas iš portfelio gauna nuostolingą rizikos premiją (dėl didesnės iždo vekselio grąžos). Tad rinkos akcijų kainoms nekintant, pelningiau investuoti į iždo vekselius, ne tik į šį portfelį.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	-0.0006	0.0002	-3.49	0.0005
mrp[-891]	0.2967	0.0127	23.31	0.0000

9 lentelė: Ketvirtojo regresinio modelio įvertiniai

Trijų aktyvų kombinacijos portfelis panašus į aukso ir Microsoft Corp. portfelį. Čia β=0.29, taigi rinkai susvyravus 1%, portfelio akcijos pakils arba nukris trečdaliu procento. Laisvasis narys vėl neigiamas ir reikšmingas, taigi rinkos akcijų pelningumui nekintant, investuotojo rizikos premija neigiama. R^2=0.17, taigi 17% rinkos duomenų paaiškina portfelio rizikos premijų svyravimus.

Apžvelgus rezultatus, galima daryti išvadą, jog krizės laikotapiu, kai rinkos akcijų kainos ir pelningumas krenta, saugiau investuoti į pirmą portfelį iš Apple Inc. akcijų ir aukso. Tačiau rinkos pakilimo laikotarpiu, antras portfelis iš Microsoft Corp. ir Apple Inc. akcijų gali būti pelningesnis už pirmąjį.

7 Rezultatai ir išvados

8 Naudota literatūra ir kiti šaltiniai

Literatūra

[1] Thomas E. Copeland, J. Fred Weston: *Financial theory and corporate policy*, Addison-Wesley Publishing Company,(2004)

[2] Ernst R. Berndt: *The Practice of Econometrics: Classic and Contemporary*, Prentice Hall, (1991)

[3] Dimitrios Asteriou: *Applied econometrics*, Palgrave macmillian, (2006)

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Discount$_rate$

[5] http://wikiposit.org/w?filter=Finance

A Pirmas priedas

Aprašomoji statistika:

> *mean(rkfree)*

[1] 0.00186004

> *mean(market)*

[1] 0.0001173288

> *mean(microsoft)*

[1] 0.0001968397

> *mean(apple)*

[1] 0.001807715

> *mean(gold)*

[1] 0.0007931419

> *mean(mrp)*

[1] -0.001742711

> *mean(microsoftrp)*

[1] -0.001663201

> *mean(applerp)*

[1] -5.20737e-05

> *mean(goldrp)*

[1] -0.001066898

> *var(rkfree)*

```
[1] 2.789252e-06
> var(market)
[1] 0.0001827668
> var(microsoft)
[1] 0.0003574371
> var(apple)
[1] 0.0006370941
> var(gold)
[1] 0.0001357824
> var(mrp)
[1] 0.0001857122
> var(microsoftrp)
[1] 0.0003601065
> var(applerp)
[1] 0.000639531
> var(goldrp)
[1] 0.0001384164
> sd(rkfree)
[1] 0.001670105
> sd(market)
[1] 0.01351913
```

```
> sd(microsoft)
[1] 0.01890601
> sd(apple)
[1] 0.02524072
> sd(gold)
[1] 0.01165257
> sd(mrp)
[1] 0.01362763
> sd(microsoftrp)
[1] 0.01897647
> sd(applerp)
[1] 0.02528895
> sd(goldrp)
[1] 0.01176505
> cor(market, microsoft)
[1] 0.7184425
> cor(market[-891], apple)
[1] 0.5511114
> cor(market, gold)
[1] -0.04482454
> cor(mrp, microsoftrp)
[1] 0.7209318
> cor(mrp[-891], applerp)
[1] 0.5534901
> cor(mrp, goldrp)
[1] -0.0266428
```

B Antras priedas

Modeliai:

```
> microsoftmod = lm(microsoftrp ~ mrp)
> applemod = lm(applerp ~ mrp[-891])
> goldmod = lm(goldrp ~ mrp)
> summary(microsoftmod)

Call:
lm(formula = microsoftrp ~ mrp)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.114489 -0.006098 -0.000315  0.005991  0.088079

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 0.0000863  0.0002652   0.325    0.745
mrp         1.0038977  0.0193079  51.994   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.01315 on 2498 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.5197,	Adjusted R-squared: 0.5196
F-statistic:  2703 on 1 and 2498 DF,  p-value: < 2.2e-16

> summary(applemod)

Call:
lm(formula = applerp ~ mrp[-891])

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.135080 -0.010883 -0.000986  0.010278  0.139434

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 0.0017347  0.0004248   4.083 4.58e-05 ***
```

```
mrp[-891]   1.0269695  0.0309249  33.209  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.02107 on 2497 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.3064,	Adjusted R-squared: 0.3061
F-statistic:  1103 on 1 and 2497 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

> summary(goldmod)

```
Call:
lm(formula = goldrp ~ mrp)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.071932 -0.005851  0.000178  0.006454  0.071524

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.0011070  0.0002372  -4.667 3.21e-06 ***
mrp         -0.0230014  0.0172673  -1.332    0.183
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.01176 on 2498 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.0007098,	Adjusted R-squared: 0.0003098
F-statistic: 1.774 on 1 and 2498 DF,  p-value: 0.183
```

> summary(dynlm(ts(applerp) ~ ts(mrp) + L(ts(applemod$res), 1)))

```
Time series regression with "ts" data:
Start = 2, End = 2499

Call:
dynlm(formula = ts(applerp) ~ ts(mrp) + L(ts(applemod$res), 1))

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.179507 -0.013359 -0.000553  0.013549  0.131190
```

```
Coefficients:
                          Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)              0.0004459  0.0005040   0.885    0.376
ts(mrp)                  0.2883804  0.0366877   7.860 5.65e-15 ***
L(ts(applemod$res), 1) 0.0337889  0.0237419   1.423    0.155
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.02499 on 2495 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.02478,	Adjusted R-squared: 0.024
F-statistic:  31.7 on 2 and 2495 DF,  p-value: 2.545e-14

> summary(dynlm(ts(microsoftrp) ~ ts(mrp) + L(ts(microsoftmod$res),
+     1)))

Time series regression with "ts" data:
Start = 2, End = 2500

Call:
dynlm(formula = ts(microsoftrp) ~ ts(mrp) + L(ts(microsoftmod$res),
    1))

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.114434 -0.006106 -0.000373  0.006017  0.088020

Coefficients:
                               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)                   8.717e-05  2.653e-04   0.329    0.743
ts(mrp)                       1.004e+00  1.932e-02  51.999   <2e-16 ***
L(ts(microsoftmod$res), 1) -2.293e-02  2.002e-02  -1.146    0.252
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.01316 on 2496 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.52,	Adjusted R-squared: 0.5196
F-statistic:  1352 on 2 and 2496 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```
> summary(dynlm(goldrp ~ mrp + L(ts(goldmod$res), 1)))

Time series regression with "numeric" data:
Start = 1, End = 2499

Call:
dynlm(formula = goldrp ~ mrp + L(ts(goldmod$res), 1))

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.072581 -0.005880  0.000178  0.006435  0.072343

Coefficients:
                        Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)           -0.0011091  0.0002372  -4.677 3.07e-06 ***
mrp                   -0.0236453  0.0172664  -1.369   0.1710
L(ts(goldmod$res), 1)  0.0360663  0.0200098   1.802   0.0716 .
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.01176 on 2496 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.00201,	Adjusted R-squared: 0.00121
F-statistic: 2.513 on 2 and 2496 DF,  p-value: 0.08123

> durbinWatsonTest(microsoftmod, max.lag = 1)

 lag Autocorrelation D-W Statistic p-value
   1     -0.02291682       2.04577   0.264
 Alternative hypothesis: rho != 0

> durbinWatsonTest(applemod, max.lag = 1)

 lag Autocorrelation D-W Statistic p-value
   1      0.01299961       1.97393   0.524
 Alternative hypothesis: rho != 0

> durbinWatsonTest(goldmod, max.lag = 1)
```

```
 lag Autocorrelation D-W Statistic p-value
   1      0.03604061      1.927601   0.064
 Alternative hypothesis: rho != 0
```

> *jarque.bera.test(microsoftmod$res)*

```
        Jarque Bera Test

data:  microsoftmod$res
X-squared = 8683.798, df = 2, p-value < 2.2e-16
```

> *jarque.bera.test(applemod$res)*

```
        Jarque Bera Test

data:  applemod$res
X-squared = 3384.751, df = 2, p-value < 2.2e-16
```

> *jarque.bera.test(goldmod$res)*

```
        Jarque Bera Test

data:  goldmod$res
X-squared = 1593.331, df = 2, p-value < 2.2e-16
```

C Trečias priedas

Portfeliai:

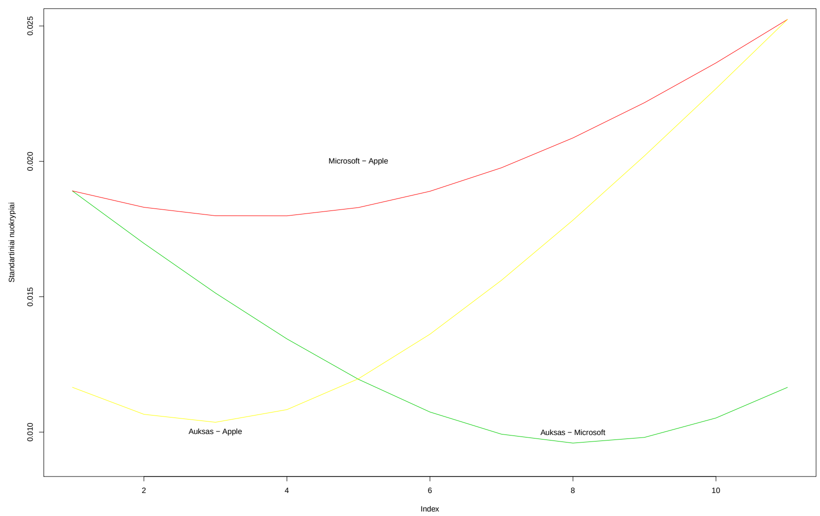
Aktyvo x dalis portfelyje iš dviejų aktyvų

```
          [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 0.8116744 0.7491511 0.7111582

          vek1      vek2      vek3
[1,] 0.9959148 0.9924209 0.9804096
```

Iždo vekselio procentas portfelyje iš dviejų aktyvų

```
         [,1]     [,2]      [,3]
[1,] 0.999665 1.000066 0.9996887
```

Apytikslės koeficientų reikšmės portfelyje iš dviejų įmonių



14 pav.: ...

(gal nereikia) Iliustracija: pagal grafikus rinktis ta skaiciu, ties kuriuo standartinis nuokrypis maziausias, ji istatyti vietoje i.

$optimaliausias\ portfelis = imone1 \times i \times 0.1 + imone2 \times (1 - i \times 0.1)$

$0.1 \times (i-1) \times Auksas + (1 - 0.1 \times (i-1)) \times Microsoft$
$0.1 \times (i-1) \times Apple + (1 - 0.1 \times (i-1)) \times Microsoft$
$0.1 \times (i-1) \times Apple + (1 - 0.1 \times (i-1)) \times Auksas$

Trijų aktyvų portfelio paieška

I variantas:

```
> folio = 0.8117 * gold[-891] + 0.1883 * apple
> (var(microsoft) - cor(microsoft[-891], folio) * sd(folio) * sd(microsoft))/(var(folio) +
+     +var(microsoft) - 2 * cor(microsoft[-891], folio) * sd(folio) *
+     sd(microsoft))

[1] 0.8059366
```

80,59 % folio ir 19,41 % microsoft
80.59* 0.8117 aukso
80.59* 0.1883 apple

```
> sd((65.41 * gold[-891] + 15.18 * apple + 19.41 * microsoft[-891])/100)
```

[1] 0.009586881

II variantas

```
> folio = 0.7492 * microsoft[-891] + 0.2508 * apple
> (var(folio) - cor(folio, gold[-891]) * sd(gold) * sd(folio))/(var(gold) +
+     +var(folio) - 2 * cor(folio, gold[-891]) * sd(gold) * sd(folio))
```

[1] 0.6904081

69.04 % aukso ir 30.96 % folio
30.96* 0.7492 = 23.19523 % microsoft
30.96* 0.2508 = 7.764768 % apple

```
> sd((23.19523 * microsoft[-891] + 7.764768 * apple + 69.04 * gold[-891])/100)
```

[1] 0.009427794

III variantas

```
> folio = 0.2888 * microsoft + gold * 0.7112
> (var(folio) - cor(folio[-891], apple) * sd(apple) * sd(folio))/(var(apple) +
+     var(folio) - 2 * cor(folio[-891], apple) * sd(apple) * sd(folio))
```

[1] 0.06478507

6.478507 % apple
93.5215 * 0.2888 = 27.00901 % microsoft
93.5215 * 0.7112 = 66.51249 % aukso

```
> sd((6.478507 * apple + 27.00901 * microsoft[-891] + 66.51249 *
+     gold[-891])/100)
```

[1] 0.009455108

Portfelių regresinių modelių R kodas

```
> summary(goldapplemod)
```

```
Call:
lm(formula = goldapplerp ~ mrp[-891])

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.065798 -0.005279  0.000247  0.005839  0.063207

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.0005723  0.0002059  -2.779  0.00549 **
mrp[-891]    0.1747229  0.0149894  11.656  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.01021 on 2497 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.05161,	Adjusted R-squared: 0.05123
F-statistic: 135.9 on 1 and 2497 DF,  p-value: < 2.2e-16

> summary(microapplemod)

Call:
lm(formula = microapplerp ~ mrp[-891])

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.082629 -0.006268 -0.000240  0.006055  0.066101

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 0.0004989  0.0002347   2.126   0.0336 *
mrp[-891]   1.0097165  0.0170871  59.092   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.01164 on 2497 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.5831,	Adjusted R-squared: 0.5829
F-statistic:  3492 on 1 and 2497 DF,  p-value: < 2.2e-16

> summary(goldmicromod)
```

```
Call:
lm(formula = goldmicrorp ~ mrp)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max 
-0.050394 -0.004731  0.000146  0.005137  0.057667 

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) -0.0007624  0.0001812  -4.207 2.68e-05 ***
mrp          0.2735671  0.0131925  20.737  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.008987 on 2498 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.1469,	Adjusted R-squared: 0.1465 
F-statistic:   430 on 1 and 2498 DF,  p-value: < 2.2e-16

> summary(goldmicroapplemod)

Call:
lm(formula = goldmicroapplerp ~ mrp[-891])

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max 
-0.050221 -0.004560  0.000177  0.004888  0.055819 

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) -0.0006102  0.0001749  -3.489 0.000492 ***
mrp[-891]    0.2967395  0.0127287  23.313  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.008671 on 2497 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.1787,	Adjusted R-squared: 0.1784 
F-statistic: 543.5 on 1 and 2497 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Portfelių regresijos R kodas

```
> goldapple = 0.8117 * gold[-891] + 0.1883 * apple
> microapple = 0.7492 * microsoft[-891] + 0.2508 * apple
> goldmicro = 0.7112 * gold + 0.2888 * microsoft
> goldmicroapple = 0.232 * microsoft[-891] + 0.0776 * apple + 0.6904 *
+     gold[-891]
> goldapplerp = goldapple - rkfree[-891]
> microapplerp = microapple - rkfree[-891]
> goldmicrorp = goldmicro - rkfree
> goldmicroapplerp = goldmicroapple - rkfree[-891]
> goldapplemod = lm(goldapplerp ~ mrp[-891])
> microapplemod = lm(microapplerp ~ mrp[-891])
> goldmicromod = lm(goldmicrorp ~ mrp)
> goldmicroapplemod = lm(goldmicroapplerp ~ mrp[-891])
> microapple.table = xtable(microapplemod)
> goldapple.table = xtable(goldapplemod)
> goldmicro.table = xtable(goldmicromod)
> goldmicroapple.table = xtable(goldmicroapplemod)
```