

Análise de dependência entre mercados financeiros: uma abordagem do modelo Cópula-GARCH

Lucas Pereira Lopes

Universidade de São Paulo - lucas.lopes@usp.br

Gabriel Rodrigo G. Pessanha

Universidade Federal de Alfenas - gabriel.pessanha@unifal-mg.br

Artigo Recebido: 16/07/2017

Artigo Aprovado: 01/10/2017

Resumo

O objetivo deste trabalho é de compreender a relação de dependência entre a economia brasileira e quatro grandes economias mundiais, sendo elas: Estados Unidos, Japão, Alemanha e Inglaterra. Assim, propõe-se a utilização da metodologia de cópula das famílias elípticas e arquimedianas para relacionar o grau de dependência entre o período de 2006 a 2017. Aplicaram-se modelos ARMA-EGARCH para as marginais e cópula Normal, *t-student*, *Gumbel*, *Frank*, *Clayton* e *Joe* para as distribuições bivariadas. Os resultados obtidos permitem inferir que há evidência de relação positiva entre os mercados e que o relacionamento mais forte é com o índice norte-americano. Esta metodologia permite fazer inferência sobre o parâmetro de dependência respeitando a teoria moderna de finanças, onde a principal limitação é a não normalidade dos retornos financeiros.

Palavras-chaves: Cópulas. Dependência. Mercado Acionário.

Abstract

The aim of this work is study a relationship of dependence between a Brazilian economy and four major world economies, being: United States, Japan, Germany and England. the Thus, it is proposed to use the copula methodology of the elliptic and archimedian families to relate the degree of dependency in the period from 2006 to 2017. Applying ARMA-EGARCH models for marginal and copula Normal, *t-student*, *Gumbel*, *Frank*, *Clayton* and *Joe* for bivariate distributions. The results obtained from a positive assessment of positive relationship between the markets and that the stronger relationship with the North American index. This methodology allows to make inference about the parameter of dependence respecting the modern theory of finance, where the main limitation is the non normality of the financial returns.

Key-words: Copula. Dependence. Financial Market.

1. Introdução

A elevada integração do comércio mundial e do mercado financeiro de diversos países tornam suas economias interdependentes. Deste modo, compreender as medidas de dependência entre os países e/ou dos mercados financeiros é de grande importância e possuem amplas aplicações. Por exemplo, monitorar a dependência entre mercados financeiros a fim de analisar a possibilidade de contágio financeiro pode ser interesse das autoridades monetárias,

com finalidade de garantir a estabilidade financeira do país (BERGMANN et al., 2011; COLOMBO; JUNIOR; HORTA, 2011).

Já no setor privado, a correlação entre mercados financeiros é uma das principais variáveis para a administração de carteiras internacionais. Portanto, tendo em vista que impactos externos podem ser transmitidos para a economia brasileira, torna-se importante quantificar o grau de dependência que as maiores economias mundiais possuem em relação à economia brasileira, pois com a mensuração do risco que está inerente é possível estabelecer e adotar estratégias para o seu gerenciamento (MARÇAL; PEREIRA, 2008).

É usado o coeficiente de correlação linear para analisar a dependência entre mercados, porém a utilização desta técnica ignora a possível presença de uma dependência não linear entre os mercados. Também é possível utilizar a técnica de análise de regressão linear para estimar os parâmetros, os quais seriam interpretados como a dependência. Contudo, essa abordagem traz consigo um grande número de pressupostos, como a normalidade, a independência dos resíduos e a homocedasticidade, os quais nem sempre são válidos em séries financeiras (SANTOS, 2011; COLOMBO; JUNIOR; HORTA, 2011).

Segundo Bergmann et al. (2011), no mundo das distribuições elípticas (*e.g.* distribuição normal multivariada ou distribuição t multivariada) o uso de correlação linear e do modelo de regressão linear são duas ferramentas aceitáveis para o cálculo de dependência, mas com o avanço das teorias financeiras e a análise de gerenciamento de risco, que se baseiam na estrutura de dependência dos ativos, torna-se importante e necessário a introdução de uma medida alternativa que supere tal limitação, ou seja, uma abordagem metodológica que considere aspectos não lineares e a necessidade de se assumir pressupostos não válidos.

Logo, a técnica de cópulas, introduzida por Sklar (1959), aparece como uma alternativa para mensurar a dependência entre os mercados, destacando-se em três pontos: 1) a metodologia de cópulas não faz nenhuma pressuposição a respeito da distribuição das variáveis, ou seja, dada a característica dos retornos de ativos financeiros que são leptocúrticos torna-se uma ferramenta ideal para analisá-los; 2) as medidas de dependência calculados por meio de cópulas são capazes de capturar a presença de associação não linear entre as variáveis e 3) como as cópulas representam uma distribuição multivariada, a estimação das cópulas permite conhecer o formato dessa relação.

Portanto, cópulas é um instrumento estatístico que permite construir um modelo multivariado que separa o comportamento marginal das variáveis aleatórias e/ou séries temporais da estrutura de dependência existente entre elas. O desenvolvimento desse conceito, como será visto mais adiante neste artigo, evoluiu conjuntamente com seus aproveitamentos nas ciências sociais aplicadas, o qual é o foco do trabalho aqui proposto.

Assim, o principal objetivo deste trabalho aqui proposto é compreender a relação de dependência entre a economia brasileira e quatro grandes economias mundiais através da técnica multivariada cópulas, sendo as economias: Estados Unidos, Japão, Alemanha e Inglaterra. Como objetivos específicos, destacam-se: a) selecionar modelos de séries temporais da classe E-GARCH que melhor se ajuste à série temporal de cada índice representativo da economia estudada, para modelar as distribuições marginais da cópula; b) com base nos resíduos dos modelos escolhidos para cada série, ajustar as cópulas, a fim de se avaliar a estrutura de dependência entre os pares de séries de interesse; c) ademais, a utilização de uma metodologia estatística mais robusta na análise de dependência entre mercados financeiros, especificadamente se tratando de mercados emergentes (Brasil), também se configura como um dos objetivos específicos deste trabalho.

O trabalho aqui apresentado pretende contribuir, primeiramente, para aprofundar a compreensão a respeito da dependência entre as economias, e de forma mais específica, na

compreensão da hipótese de dependência entre a economia brasileira e quatro grandes economias mundiais (Estados Unidos, Japão, Alemanha e Inglaterra) selecionados seguindo-se a metodologia de cópulas. E estudar essas questões permite avançar no entendimento quanto ao impacto e dependência de um país em relação ao outro. Assim, no contexto de crises financeiras, esta abordagem torna-se importante.

A próxima seção deste artigo traz um breve referencial teórico sobre a utilização de cópulas em séries temporais e financeiras e sua importância. Na seção 3 é descrito a metodologia utilizada, tal como modelos de séries temporais e cópulas. Logo após é realizado uma análise descritiva dos dados e a análise dos modelos ajustados. Na última seção foram abordadas as considerações finais do artigo.

2. Breve Fundamentação Teórica

Em diversos países no mundo, o mercado financeiro é de extrema importância para a atração de investimentos e capitais externos. Deste modo, os investidores têm disponível uma alternativa de investimento (diversificando suas carteiras), e as empresas conseguem aumentar seus recursos financeiros.

Com o advento da globalização, houve o acréscimo dos fluxos globais comerciais e financeiros entre vários países, independentemente dos seus fundamentos macroeconômicos serem bons ou ruins, carregando com isto uma parcela de risco (MARÇAL, et al., 2011).

Segundo Pereira e Santos (2011) é importante estudar a dependência entre mercados financeiros, principalmente para os administradores de carteiras, que exploram as correlações entre mercados de maneira a se beneficiar da diversificação internacional, até para os formuladores de políticas públicas, que acompanham a dependências entre mercados financeiros com o intuito de avaliar a possibilidade de contágio financeiro, que é interpretada como o aumento significativo de dependências entre os países os períodos de crise com relação aos períodos estáveis.

Não somente para os investidores, mas também para os criadores de políticas públicas, torna-se necessário avaliar a estrutura de dependência entre os distintos mercados. (PEREIRA; SANTOS, 2011). Esta análise entre os diferentes mercados financeiros do mundo tem uma maior relevância no período atual, pois a conjuntura econômica internacional está em um momento de incerteza.

A confirmação de dependência entre as economias decorreu-se em relação à crise financeira de 2008. O mercado financeiro sentiu rapidamente a crise do mercado imobiliário norte-americano, derrubando os índices de ações das bolsas de valores do mundo inteiro. Esse impacto causou uma instabilidade financeira na economia como um todo, causando reduções no ritmo de crescimento do produto interno bruto de diversos países (NÓVOA; BALANCO, 2013). Por exemplo, no Brasil o PIB diminuiu 0,33% em 2009 e no Japão a queda foi de 5,53%.

Os agentes econômicos que operam no mercado financeiro brasileiro estão, diretamente ou indiretamente, expostos aos problemas que ocorrem na economia mundial (SILVA, et al., 2013). Em função das diversas crises ocorridas nas últimas décadas faz-se necessário e importante conhecer o grau de dependência dos ativos financeiros com a situação de economias estrangeiras.

De acordo com Bartels (2014), uma característica frequentemente presente em séries financeiras é a dependência assimétrica, ou seja, os mercados ou ações podem tender a ser mais fortemente relacionadas em períodos de recessão do que em períodos de ascensão. Acrescido a isso, os processos geradores de cada uma das séries ao longo do tempo podem ser

não estacionários, heterocedásticos e não lineares. Portanto, torna-se necessário modelar as séries de forma que seja possível captar a maior quantidade possível destas características.

Uma maneira eficiente de analisar a dependência entre séries financeiras é a utilização de funções cópulas (BARTELS, 2014). Uma das principais vantagens desse tipo de modelagem é a possibilidade de separar a estimação das distribuições marginais das séries da estimação de sua estrutura de dependência. Com isso, toda a complexidade possivelmente presente na distribuição marginal de cada variável é eliminada no primeiro passo da estimação, permitindo que a modelagem e estimação da cópula se atentem apenas na relação entre as variáveis. Segundo Colombo, Junior e Horta (2011), isso permite reproduzir melhor fatos estilizados de séries financeiras como excesso de curtose e assimetria de retornos.

Conforme Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004), a teoria de cópulas pode ser utilizada, em finanças e econometria para lidar com duas questões relacionadas à série financeira de retornos: 1) a não normalidade dos retornos dos ativos financeiros; e 2) a existência de dependência não linear entre os retornos dos ativos financeiros.

Mesmo o conceito de cópulas ter sido criado em 1959, por Sklar, suas aplicações em finanças e economia se desenvolveram a partir de 1999. De acordo com Genest, Masiello e Tribouley (2009), 41% das publicações relacionadas ao tema de cópulas se relacionam aos estudos na grande área de economia e finanças. A Tabela (1) apresenta alguns estudos com utilização de cópulas nesta área.

Tabela 1 - Alguns estudos realizados com a utilização de cópulas em finanças e economia.

Pesquisadores	Ano	Tema
Eichengreen et al.	1996	Verificar se a ocorrência da crise cambial em país aumenta a probabilidade de ataques especulativos em outros países.
Embrechts, McNeil e Strausmann	1999	Gerenciamento de risco.
Li	2000	Uma abordagem de cópula em correlações entre variáveis econômicas.
Baig e Goldfajn	2000	Examina a ocorrência de contágio na crise russa com relação ao Brasil.
Cherubini, Luciano e Vecchiato	2004	Aplicações gerais em finanças com cópulas.
Mendes	2005	Procura, por meio da teoria de cópulas, evidências de excesso de co-movimentos entre mercados que não sejam, necessariamente, explicados por teorias econômicas.
Kat e Paluro	2005	Sugerem uma técnica baseada na teoria de cópulas que permite a derivação de estratégias de negociação dinâmicas.
Patton	2006	Modelagem assimétrica de taxas de cambio dependentes.
Rodrigues	2007	Mensuração de contágio.
Marçal e Valls Pereira	2008	Testam-se a hipótese de contágio financeiro no mercado de títulos soberanos de quatro países emergentes (Brasil, Argentina, México e Rússia) durante as crises da década de 90.

Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

Outro trabalho que explora a aplicação da teoria de cópulas em econometria financeira é o elaborado por Patton (2002). Neste trabalho o autor reconhece que diversas variáveis econômicas são distribuídas de forma não normal, sendo assim, modelos estabelecidos na literatura, como *Black Sholes*, acabam tendo resultados errôneos quando utilizamos distribuições conjuntas e marginais normais. O autor indica que variáveis como taxa de juros, moeda e ações não são normalmente distribuídas. E que, a medição de

dependência por meio da correlação linear é criticada, principalmente pelo fato de poder existir dependência assimétrica. Assim, o autor indica a utilização da teoria de cópulas, que é capaz de considerar a dependência de modo mais amplo, pois permite a elaboração de distribuições multivariadas flexíveis.

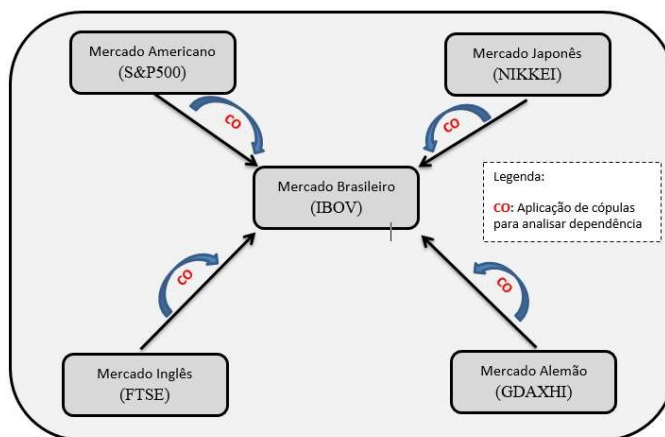
Ane e Kharoubi (2003) utilizaram a teoria de cópulas com o objetivo de melhorar a proteção ao risco no mercado financeiro. Os autores reconheceram que o pressuposto de normalidade multivariada dos retornos não é adequada quando se analisa a moderna teoria de carteira que estabelece a variância como uma medida de risco e a correlação entre os retornos dos ativos como uma medida de dependência que determina a diversificação da carteira. Com os resultados da estimação das cópulas, os autores propõem que aplicar um modelo de Valor em Risco (*VaR*) para verificar se a relação de dependência estimada por cópulas gera melhoras nas estimações do *VaR*. Os autores concluíram que a má formulação na estrutura de dependência pode ser a causa do erro de estimação de mais de 20% do *VaR*.

Deste modo, a metodologia de cópulas possibilita a análise de dependência entre as economias de maneira que os pressupostos estatísticos sejam atendidos, dando suporte para inferências mais robustas sobre o grau de associação entre os mercados.

3. Metodologia

Aqui, utilizar-se-á a metodologia de cópulas para relacionar a série do índice Ibovespa (IBOV), que tem por objetivo ser o indicador do desempenho do mercado de ações brasileiro, com cada uma das séries dos países de interesse, *Standard & Poor's 500* (S&P500) representando os Estados Unidos, Nikkei 225 (N225) o Japão, DAX (GDAXI) a Alemanha e *Financial Times Stock Exchange* (FTSE) a Inglaterra, conforme demonstrado no modelo conceitual-teórico da Figura (1).

Figura 1 – Modelo conceitual-teórico do trabalho proposto.



Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

Os dados são os valores de fechamento e na periodicidade diária. O período total a ser utilizado compreende-se de 02/02/2006 a 02/02/2017, e as diferenças de tamanhos de amostras causadas por diferentes feriados nacionais e eventos atípicos foram ajustadas. Ou seja, feriado no Brasil, onde não se obteve valor de fechamento para o Ibovespa, foram retirados todos os valores disponíveis das outras economias para esse dia em específico.

3.1 Modelos de Séries Temporais

De acordo com Silva et al. (2013), é comum na literatura ajustar modelos de regressão univariadas a séries temporais com base nas informações passadas da própria variável quando se trata de dados financeiros. O autor justifica que se tratando de retornos, utilizam-se modelos que visam absorver a volatilidade das séries, para obter uma medida de risco que o produto financeiro possui.

Na modelagem de cópulas, é comum o ajuste de modelos da família GARCH às séries, com o objetivo de extrair os resíduos das regressões e utilizá-los para estimar as cópulas posteriormente (PATTON, 2002; SANTOS, 2011). O motivo pela utilização de tal procedimento é que os resíduos se tornam puramente aleatórios, eliminando o possível problema do viés das séries originais, devido à estrutura de variância condicional.

Portanto, o objetivo deste estudo está na utilização dos resíduos das séries univariadas para modelagem das cópulas. Para isto, há a necessidade de definir os modelos para a média condicional da série (ARMA) e para a variância condicional (EGARCH) utilizados.

3.1.1 Média Condicional

Será utilizado o modelo ARMA para a modelagem da média condicional. O modelo autoregressivo de médias-móveis ARMA (p_1, q_1) pode ser expresso por:

$$(y_t - \mu) = \sum_{j=1}^{p_1} \varphi_j (y_{t-j} - \mu) + \sum_{j=1}^{q_1} \theta_j \epsilon_{t-j} + \epsilon_t, \quad (1)$$

onde ϵ_t são as inovações, que neste trabalho pressupõe que podem apresentar variância condicional. As inovações em séries temporais possuem o mesmo significado do erro em uma análise de regressão utilizando mínimos quadrados ordinários, por exemplo. Lembrando que as inovações de modelos GARCH possuem média zero e variância unitária. Para isso, modelaram-se estas inovações através de um processo EGARCH, formando processos ARMA-EGARCH descrito a seguir.

3.1.2 Variância Condicional

O modelo autoregressivo generalizado condicionalmente heterocedástico exponencial, EGARCH (p_2, q_2), definido por Nelsen (1991) e que também é utilizado para modelar a variância condicional de ϵ_t , pode ser descrito por:

$$\epsilon_t = \sigma_t Z_t \quad (2)$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{j=1}^{p_2} \left(\alpha_j Z_{t-j} + \gamma_j (|Z_{t-j}| - E(|Z_{t-j}|)) \right) + \sum_{j=1}^{q_2} \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2), \quad (3)$$

onde $Z_t \sim \text{Dist}(0,1)$ são os resíduos padronizados, os quais são independentes ϵ_{t-k} , $k \geq 1$, para todo t , e $E(|Z_{t-j}|)$ denota a esperança do módulo de Z_{t-j} . E também, $\sigma_t^2 = \text{Var}(\epsilon_t | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots)$ denota a variância condicional, $\omega \geq 0$ o intercepto e ϵ_t são os resíduos do modelo de média condicional citado anteriormente. Nota-se que o coeficiente α_j capta o efeito do sinal e γ_j o efeito do tamanho da inovação.

Os resíduos padronizados Z_t para os modelos ARMA-EGARCH podem ser escritos da seguinte forma

$$Z_t = \frac{Y_t - E(Y_t | W_{t-1})}{\sqrt{\text{Var}(Y_t | W_{t-1})}} = \frac{Y_t - E(Y_t | W_{t-1})}{\sigma_t}, \quad (4)$$

onde $W_{t-1} = \{Y_{t-1}, \epsilon_{t-1}, Y_{t-2}, \epsilon_{t-2}, \dots\}$.

Logo $F_{Y_t|W_{t-1}}(y_t|w_{t-1}) = P(Y_t \leq y_t|w_{t-1}) = P(Z_t \leq z_t|w_{t-1}) = F_{Z_t|W_{t-1}}(z_t|w_{t-1})$, onde $z_t = \frac{y_t - E(Y_t|W_{t-1})}{\sigma_t}$ são os resíduos padronizados observados, y_t são os retornos dos índices observados, $F_{Y_t|W_{t-1}}$ é a função de distribuição dos retornos dos índices e $F_{Z_t|W_{t-1}}$ a função de distribuição dos resíduos padronizados. O que implica que a integral de probabilidade transformada dos resíduos padronizados observados ($F_{Z_t|W_{t-1}}(z_t|w_{t-1})$) seja à integral de probabilidade transformada dos retornos dos índices observados ($F_{Y_t|W_{t-1}}(y_t|w_{t-1})$). Assim como em Bartels (2014), este resultado será utilizado na parte de estimação das cópulas, que será detalhado adiante.

3.1.3 Distribuição dos erros

De acordo com Tsay (2002), espera-se que a distribuição *t-student* assimétrica modele de forma mais aderente os resíduos padronizados. Porém, para analisar esse fato, será utilizado para modelar os resíduos padronizados neste trabalho quatro distribuições, sendo elas a normal, normal assimétrica, *t-student* e *t-student* assimétrica. Portanto, escolheremos a distribuição empiricamente.

A distribuição Normal padrão é simétrica e possui curtose zero. Sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f_z(z) = \frac{e^{-0,5z^2}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (5)$$

Proposto por Bollerslev (1987), o modelo GARCH-Student é uma alternativa a distribuição Normal como modelo para os resíduos padronizados. A função densidade de probabilidade da distribuição *t-student* com ν graus de liberdade, padronizada para apresentar média zero e variância igual a 1, é dada por

$$f_z(z) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{z^2}{(\nu-2)}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}. \quad (6)$$

Sendo esta distribuição também simétrica, com a característica de possuir caudas mais pesadas, com curtose igual a $\frac{6}{(\nu-4)}$ para $\nu > 4$. A distribuição Normal assimétrica e *t-student* assimétrica foram obtidas através da função densidade de probabilidade (f.d.p) da Normal e da função densidade de probabilidade (f.d.p) da *t-student*, com a introdução de fatores de escala inversa ξ à sua parte positiva e negativa (FERNÁNDEZ; STEEL, 1998), e são obtidas através da seguinte fórmula

$$f_{Z_\alpha}(z|\xi) = \frac{2}{\xi + \xi^{-1}} [f_z(\xi z)H_e(-z) + f_z(\xi^{-1}z)H_e(z)], \quad (7)$$

onde H_e é a função Heaviside, dada por $H_e(x) = \frac{1+\sin(x)}{2}$, f_z é a função densidade da distribuição simétrica e f_{Z_α} a função densidade da respectiva distribuição assimétrica. Assim, através deste procedimento, esta função é padronizada para ter média zero e variância 1.

3.1.4 Critérios de Seleção de Modelos

Para cada série de índice foram testados o modelo ARMA-EGARCH com p_1, q_1, p_2 e q_2 , que podem assumir valores 0, 1 ou 2, combinados com as distribuições Normal, Normal Assimétrica, *t-student* e *t-student* Assimétrica para os resíduos, no que resultou em 324 modelos testados para cada série.

Portanto, para escolher qual modelo para cada série é o melhor foi adotado o seguinte critério: primeiramente, dentro de cada modelo com suas respectivas distribuições de erros,

selecionou-se a combinação de ordens p_1, q_1, p_2 e q_2 , com menor critério de informação de Akaike (AIC) e o menor critério de informação Bayesiano (BIC).

Depois, escolhido então os 4 melhores modelos para cada série, observou-se os resíduos padronizados z_t para cada um deles. Assim, levando-se em conta a integral de probabilidade transformada foi feita a escolha do melhor modelo para cada série.

A integral de probabilidade transformada de uma variável X é definida como $F_X(x) \sim U(0,1)$, onde F_X é a função de distribuição de X e x são as observações da variável (CHERUBINI; LUCIANO; VECCHIATO, 2004). Se o modelo está bem especificado, então a integral de probabilidade transformada de z_t terá distribuição uniforme $[0,1]$, que é uma condição para a estimação das cópulas. Assim, transformaram-se os resíduos padronizados através de sua função de distribuição com os parâmetros estimados e realizou-se o teste Kolmogorov-Smirnov na integral de probabilidade transformada. Logo, para cada série, o modelo que gerou resíduos com maior p -valor neste teste foi o escolhido.

3.2 Medidas e Modelos para Riscos Dependentes

3.2.1 Introdução a Cópulas

A modelagem da teoria de cópulas está relacionada com a modelagem de distribuições multivariadas e, portanto, ao conceito de dependência. Uma função de cópulas permite a separação da função conjunta em duas partes; uma que descreve a estrutura de dependência e a outra que descreve as distribuições marginais. Assim, uma cópula é uma função de distribuição multivariada com marginais que possuem distribuição uniforme em $[0,1]$ e foi definida por Sklar (1959):

$$F(y_1, y_2) = P(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2) = P(U_1 \leq F_1(y_1), U_2 \leq F_2(y_2)) = C(F_1(y_1), F_2(y_2)),$$

onde a transformação integral de probabilidade garante que as variáveis aleatórias U_1 e U_2 , definidas como $U_i = F_i(y_i)$, seguem uma uniforme no intervalo $(0,1)$. Assim, pelo teorema de Sklar e pela definição da função densidade de probabilidade têm-se que:

$$f(y_1, y_2) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial y_1 \partial y_2} f_1(y_1) f_2(y_2) = c(u_1, u_2) f_1(y_1) f_2(y_2), \quad (8)$$

onde $c(\cdot)$ é a função de densidade da cópula.

Portanto, a função cópula contém informações acerca da distribuição conjunta, que não estão presentes nas distribuições marginais. As famílias de cópulas mais utilizadas são: Cópulas Elípticas (cópulas Gaussiana e *t-student*) e as Cópulas Arquimedianas (cópulas de Gumbel, Frank, Clayton e Joe).

A equação (9) mostra a definição da cópula Gaussiana,

$$C_p^{Gau}(u_1, \dots, u_n) = \Phi_p^n(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)), \quad (9)$$

em que Φ_p^n é a função de distribuição da normal padrão n -variada com matriz de correlação ρ e Φ^{-1} é a função de distribuição inversa da distribuição univariada normal padrão. A dependência nas caudas das distribuições multivariadas com cópula gaussiana tende a zero (EMBRECHTS; MCNEIL; STRAUMANN, 2002), o que mostra que as variáveis aleatórias da função de distribuição conjunta são quase independentes no caso de valores elevados. Riscos em seguros apresentam na literatura dependência fraca para valores mais baixos e forte

dependência em valores altos. Portanto, analisando por essa perspectiva, a cópula Gaussiana não fornece um suporte adequado para a modelagem de riscos em seguros.

Por outro lado, a cópula *t-student* não possui independência nas caudas de uma distribuição (TANG; VALDEZ, 2006). A equação (10) mostra como esta cópula está definida,

$$C_{(v,p)}^{Stu}(u_1, \dots, u_n) = t_v^n \left(t_{(v,p)}^{-1}(u_1), \dots, t_{(v,p)}^{-1}(u_n) \right), \quad (10)$$

onde que v é o número de graus de liberdade, $t_{(v,p)}$ a função de distribuição *n-variada* de *t-student* com v graus de liberdade e matriz de correlação ρ e $t_{(v,p)}^{-1}$ a inversa da função distribuição da distribuição *t-student* univariada com v graus de liberdade.

Outra classe de cópulas é conhecida como cópulas arquimedianas, que podem ser escritas pela seguinte expressão

$$C(u_1, \dots, u_n) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n)), \quad (11)$$

para todo $0 \leq u_1, \dots, u_n \leq 1$ e ϕ é alguma função contínua (conhecida como gerador) satisfazendo: 1) $\phi(1) = 0$; 2) ϕ é extremamente decrescente e convexa; e 3) ϕ^{-1} é completamente monotônica em $[0, \infty]$.

Entre *n-cópulas* da classe arquimediana está a de *Gumbel*. Da mesma forma que as cópulas *t-student*, as cópulas de *Gumbel* lida com dependências na cauda, principalmente na parte superior da cauda. Por este motivo, ela é adequada para modelar eventos extremos. A equação (12) mostra a formula para cópulas de *Gumbel*,

$$C_{\beta}^{Gum}(u_1, \dots, u_n) = e^{\left\{ -(\sum_{i=1}^n (-\ln(u_i))^{\beta})^{\frac{1}{\beta}} \right\}}, \quad (12)$$

em que $\beta \geq 1$ é uma estrutura de parâmetros e $\beta = 1$ leva a uma distribuição multivariada de variáveis aleatórias independentes.

O segundo modelo de cópulas arquimedianas que será apresentado é a cópula de *Frank*. Este tipo de cópulas é completamente independente nas caudas (JUNKER; MAY, 2005; VENTER, 2002). A estrutura de dependência dada por uma cópula deste tipo é similar a uma representada por uma cópula normal apesar de a dependência na causa ser ainda mais baixa. A equação (13) mostra a definição da cópula de *Frank*,

$$C_{beta}^{Fra}(u_1, \dots, u_n) = \frac{-1}{\beta} \ln \left\{ 1 + \frac{(e^{-\beta u_1} - 1) \dots (e^{-\beta u_n} - 1)}{(e^{-\beta} - 1)^{n-1}} \right\}, \quad (13)$$

em que $\beta > 0$ é uma estrutura de parâmetros.

A cópula *Clayton* foi apresentada em Clayton (1978) e possui a seguinte forma:

$$C(u_1, u_2; \theta) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta})^{\frac{-1}{\theta}}, \quad (14)$$

em que o parâmetro de dependência θ assume valores apenas em $(0, \infty)$. Ressalta-se que quando θ se aproxima de zero, as marginais se tornam independentes. Outra propriedade da cópula *Clayton* é que ela não é capaz de captar dependência negativa.

Por último, a cópula *Joe*, que foi descrita detalhadamente em Joe (1993) e Joe (1997). Sua forma é descrita por:

$$C(u_1, u_2; \theta) = 1 - [(1 - u_1)^{\theta} + (1 - u_2)^{\theta} - (1 - u_1)^{\theta}(1 - u_2)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}}. \quad (15)$$

O parâmetro desta cópula assume valores entre $[1, \infty)$, restringindo a função a captar somente dependência positiva. Quando θ é igual a 1, as variáveis são independentes, e quando θ tende a ∞ essa função pode ser usada tanto em casos de dependência fraca quanto forte. Além disso, a cópula de *Joe* possui a característica de grande dependência na cauda superior, ao contrário do que ocorre na cauda inferior, onde a dependência é relativamente mais baixa.

3.2.2 Método de Estimação

A metodologia utilizada para a estimação dos parâmetros será o método da máxima verossimilhança. Dada uma amostra aleatória de duas variáveis de interesse, pelo Teorema de Sklar, a distribuição conjunta dessas variáveis é dada por $C(F_1(y_1, t), F_2(y_2, t))$ e a função log-verossimilhança é obtida a partir da equação descrita por

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(y_1, t), F_2(y_2, t) | \theta_c) + \sum_{t=1}^T \ln f_1(y_1, t | \theta_1) + \sum_{t=1}^T \ln f_2(y_2, t | \theta_2) \quad (16)$$

onde θ é um vetor de parâmetros que inclui os parâmetros da cópula e das distribuições marginais.

3.2.3 Medidas de dependência

Para extrair a informação de dependência entre as variáveis, comumente se utiliza o coeficiente de correlação linear de *Pearson*, porém quando as distribuições não são elipticamente distribuídas sua utilização se torna errônea. Duas alternativas para medir a dependência (concordância), que supre as limitações do coeficiente de correlação de *Pearson* são o *Tau de Kendall* e o *Rho de Spearman*, pois é uma boa alternativa para a mensuração de dependência para distribuições não elípticas.

Definição 1. O *Tau de Kendall* para um vetor $(X, Y)^T$ é definido como

$$\tau(X, Y) = P\{(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0\} - P\{(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0\}, \quad (17)$$

onde $(\tilde{X}, \tilde{Y})^T$ é uma cópula independente de $(X, Y)^T$.

Então o *Tau de Kendall* de $(X, Y)^T$ é simplesmente a probabilidade de concordância menos a probabilidade de discordância.

Teorema 1. Seja $(X, Y)^T$ um vetor de variáveis aleatórias contínuas com uma cópula C . Então o *Tau de Kendall* de $(X, Y)^T$ é dado por

$$\tau(X, Y) = Q(C, C) = 4 \iint_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1. \quad (18)$$

Note que a integral acima é um valor esperado da variável aleatória $C(U, V)$, onde $U, V \sim U(0,1)$ com distribuição conjunta C , i.e., $\tau(X, Y) = 4E(C(U, V)) - 1$.

Definição 2. O *Rho de Spearman* para um vetor $(X, Y)^T$ é definido como

$$\rho_s(X, Y) = 3(P\{(X - \tilde{X})(Y - Y') > 0\} - P\{(X - \tilde{X})(Y - Y') < 0\}), \quad (19)$$

onde $(X, Y)^T$, $(\tilde{X}, \tilde{Y})^T$ e $(X', Y')^T$ são cópias independentes.

Teorema 2. Seja $(X, Y)^T$ um vetor de variáveis aleatórias contínuas com uma cópula C . O *Rho de Spearman* de $(X, Y)^T$ é dado por

$$\rho_s(X, Y) = 3Q(C, \Pi) = 12 \iint_{[0,1]^2} uv \, dC(u, v) - 3 = 12 \iint_{[0,1]^2} C(u, v) \, du \, dv - 3. \quad (20)$$

Então, se $X \sim F$ e $Y \sim G$, e seja $U = F(X)$ e $V = G(Y)$, então

$$\rho_s(X, Y) = 12 \iint_{[0,1]^2} uv \, dC(u, v) - 3 = 12 E(UV) - 3 = \frac{E(UV) - \frac{1}{4}}{\frac{1}{12}} = \frac{Cov(U, V)}{\sqrt{Var(U)Var(V)}} = \rho(F(X), G(Y)). \quad (21)$$

Assim, o *Tau de Kendall* e o *Rho de Spearman* serão utilizados nesse trabalho para mensurar o grau de dependência das cópulas ajustadas.

4. Resultados

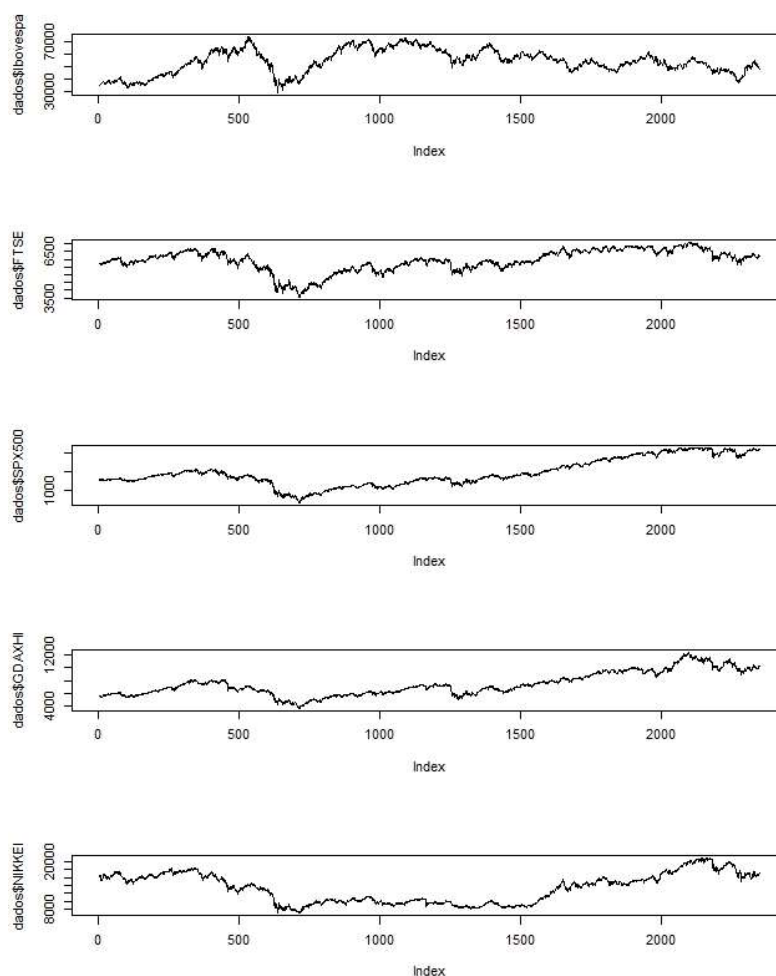
Todo o desenvolvimento deste trabalho foi realizado no software R, desenvolvido e mantido pelo R Core Team (2016), com o auxílio dos pacotes *copula*, *CDVine*, *VineCopula*, *fGarch*, *tseries* e *Rugarch*. Esta seção será dividida em descrição dos dados, modelos de séries temporais ajustados e finalmente o ajuste de cópulas e análise para cada par de séries.

4.1 Descrição dos dados

Os dados utilizados foram obtidos do site *Investing*, sendo tabelado os índices que tem maior representatividade do mercado de ações do Brasil (Índice Bovespa - IBOVESPA), Inglaterra (*Financial Times Stock Exchange 100 Index*, FTSE), Estados Unidos (*S&P 500 index of US listed shares* - SPX500), Alemanha (*German HDAX Index* - GDAXHI) e Japão (*Nikkei Stock Average* - NIKKEI). O período de análise é de 02/02/2006 a 02/02/2017. Realizando a análise de consistência dos dados, restaram 2351 observações diárias para cada série.

A Figura (2) mostra como as cinco séries se comportam no período estudado. Através desta análise visual é possível analisar a alta volatilidade causada pela crise norte-americana de 2008 em todos os países.

Figura 2 – Índices IBOVESPA, FTSE, SPX500, GDAXHI e NIKKEI - De cima para baixo.

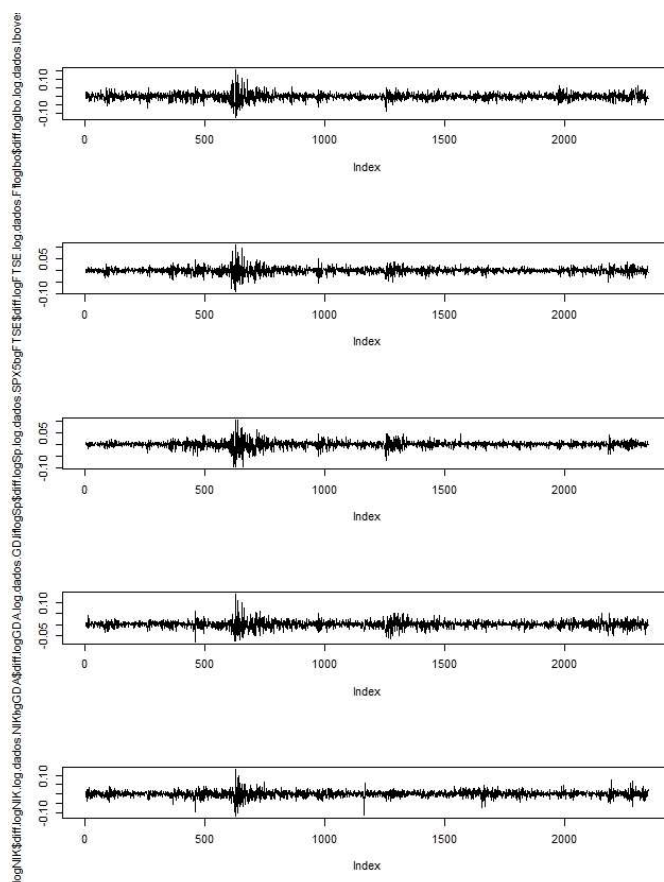


Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

Antes do procedimento da modelagem das séries, foram adotados os retornos dos índices, resultante da transformação: $Y_t = \ln(I_t) - \ln(I_{t-1})$, onde Y_t são os retornos da série do índice I_t .

Os retornos dos índices são mostrados na Figura (3). Assim como os gráficos das séries originais, é possível visualizar a instabilidade em todos os países no período de 2008 devido à crise imobiliária nos EUA, mostrando um forte relacionamento entre às séries dos países estudados.

Figura 3 – Log-Retorno dos Índices IBOVESPA, FTSE, SPX500, GDAXHI e NIKKEI - De cima para baixo.



Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

Para prosseguir na análise quantitativa univariada dos índices é essencial a leitura da estatística descritiva dos mesmos.

4.1.1 Estatística Descritiva

Se os gráficos das séries são úteis para uma análise de conjuntura econômica, os mesmos não são as ferramentas mais adequadas para uma análise quantitativa. Para realizar tal tarefa, estatísticas descritivas dos retornos diários dos preços de fechamentos se mostram mais apropriados, instrumentos que serão devidamente utilizados a partir deste momento.

Tabela 2 – Estatística descritiva dos retornos dos índices estudados.

Estatística	Ibovespa	FTSE	S&P500	GDAXI	NIKKEI
Mínimo	-0,12100	-0,09265	-0,09479	-0,07740	-0,12110
Máximo	0,15470	0,11111	0,10424	0,13463	0,13230
Mediana	0,00005	0,00034	0,00079	0,00104	0,00048
Média	0,00014	0,00004	0,00021	0,00026	0,00002
Desvio Padrão	0,01892	0,01328	0,01343	0,01541	0,01687
Assimetria	0,20765	0,00514	0,37246	0,11259	-0,45334
Curtose	6,07927	8,49037	9,16851	6,41022	7,08915
Jarque-Bera (probabilidade)	3617,2 (0,000)	7024,3 (0,000)	8245,8 (0,000)	4008,2 (0,000)	4976,9 (0,000)
Nº de obs.	2350	2350	2350	2350	2350

Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

Sobre as estatísticas descritivas, no que tange às médias dos retornos, constata-se que todas as séries possuem valores diferentes, onde são parecidas S&P500 e GDAXHI, FTSE e NIKKEI, e o Ibovespa diferente das demais quanto a proximidade dos valores. Nota-se também que a média do Ibovespa é 3,5 vezes maior do que a FTSE, que por sua vez é 5,25 vezes menor do que S&P500. No que diz respeito à volatilidade, verificada via desvio padrão dos retornos, também possuem comportamento parecido entre as séries, porém pela escala dos dados (log-retornos) não podemos falar na igualdade entre as séries (o mesmo diz respeito a média), mesmo observando seus valores mínimos e máximos.

Na análise da simetria das distribuições, observa-se uma assimetria positiva para as quatro primeiras séries e negativa somente para a última (NIKKEI), o que indica para a série japonesa uma maior recorrência de valores extremos negativos. A série que apresentou maior assimetria positiva foi a norte americana (S&P500), com 0,3725, seguido pelo IBOVESPA com 0,20765, GDAXHI com 0,1126, e por último o FTSE com 0,00514.

A curtose é uma medida útil para fornecer uma ideia sobre os valores extremos e o peso das caudas das distribuições dos índices. De acordo com a literatura estatística, se a curtose for igual a zero (ou 3, se a definição utilizada for a razão entre o quarto momento central e o quadrado do segundo momento central), então tem o mesmo achatamento que a distribuição normal, sendo conhecida como mesocúrticas. Já se o valor for maior que zero (ou maior que 3), então a distribuição em questão é mais afunilada e concentrada que a distribuição normal. Portanto, pela Tabela (2) podemos definir as séries como a segunda opção, também denominadas leptocúrticas, ou que a distribuição tem caudas pesadas.

As estatísticas Jarque-Bera rejeitam a hipótese nula de normalidade dos retornos para todos os índices, com o *p-valor* inferior a 0,01.

A ausência de constância da volatilidade das séries financeiras é uma característica estilizada que pode ser modelado a partir do surgimento dos modelos da família ARCH e de volatilidade estocástica. Portanto, para a modelagem de cópulas de séries temporais, será adotado o procedimento de utilizar os resíduos dos modelos da família ARMA-EGARCH para cada série como distribuição marginais, assim como Junior (2012), Silva et al. (2013) e Bartels (2014).

4.2 Modelos de Séries Temporais Ajustados

Na Tabela (3) estão os modelos da família ARMA-EGARCH que melhor se ajustaram às séries de acordo com os critérios adotados descritos na seção 3.1.4.

Tabela 3 – Modelos Ajustados às Séries IBOVESPA, FTSE, S&P500, GDAXHI e NIKKEI.

Série	IBOVESPA	FTSE	S&P500	GDAXHI	NIKKEI
Modelo	ARMA(0,1)- EGARCH(2,1)	ARMA(0,1)- EGARCH(2,1)	ARMA(1,1)- EGARCH(2,1)	ARMA(1,2)- EGARCH(2,2)	ARMA(2,2)- EGARCH(2,1)
Dist. Erro	T-student assimétrica	T-student assimétrica	T-student assimétrica	T-student assimétrica	T-student assimétrica
μ	-0,0001 *	-0,0001 *	0,0003 **	0,0003 **	0,0001 *
ϕ_1			0,6115 ***	0,5451 ***	0,5245 ***
ϕ_2					-0,7795 ***
Φ_1	0,0029 **	-0,0257 **	-0,6777 ***	-0,5436 ***	-0,5497 ***
Φ_2				-0,0216 *	0,8159 ***
ω	-0,1418 ***	-0,2041 ***	-0,2134 ***	-0,2235 ***	-0,3631 ***
α_1	-0,1114 ***	-0,2203 ***	-0,2859 ***	-0,3214 ***	-0,2240 ***
α_2	0,0315 **	0,0743 *	0,1307 ***	0,1857 ***	0,0917 **

β_1	0,9826 ***	0,9775 ***	0,9768 ***	1,0000 ***	0,9576 ***
β_2				-0,0257 ***	
γ_1	-0,0135 *	0,0231 *	-0,1212 ***	-0,0805 ***	0,0094 *
γ_2	0,1515 ***	0,1291 ***	0,2754 ***	0,2111 ***	0,1874 ***
ξ	0,9745 ***	0,8638 ***	0,8130 ***	0,8686 ***	0,8909 ***
ν	10,8771 ***	10,0095 ***	6,4986 ***	8,2146 ***	9,7963 ***
KS (valor-p)	0,5957	0,939	0,5923	0,5671	0,7271

Obs.: *, ** e *** representam significância estatística a 10%, 5% e 1%, respectivamente.

Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

De acordo com os modelos ajustados, a distribuição dos erros *t-student* assimétrica foi a que obteve o maior valor para o teste KS para todas as séries, corroborando com Tsay (2002), onde o autor mostra que recentes estudos empíricos na área de finanças indicam que essa distribuição modela de forma mais adequada as inovações. Quanto maior for o *p-valor* do teste KS, mais a distribuição do resíduo padronizado transformado se aproxima da distribuição uniforme, o que é requisito para a modelagem de cópulas. Nas cinco séries o *p-valor* foi superior a 0,5, sugerindo que os resíduos transformados se aproximam da distribuição uniforme [0,1].

E se tratando da modelagem das séries temporais, observa-se que os parâmetros foram significativos pelo menos a 10%, reforçando a qualidade do ajuste das séries. A partir dos resultados, tem-se que os resíduos padronizados se comportam de acordo com o necessário para os próximos passos da metodologia adotada.

4.3 Ajuste das Cópulas

Dado que determinada cópula pertença a uma determinada família paramétrica $\{C = C_\theta, \theta \in \Theta\}$, com determinadas propriedades matemáticas, então, as estimativas obtidas pelo método de verossimilhança (MV) via otimização da função de verossimilhança de cada cópula são consistentes e distribuídas segundo uma distribuição normal.

Foram estimados os parâmetros das seguintes cópulas: Cópula Normal (CN), Cópula *t-student* (CT), Cópula de Clayton (CC), Cópula de Gumbel (CG), Cópula de Frank (CF) e Cópula de Joe (CJ) para cada par de séries em relação ao índice Brasileiro.

A Tabela (4) evidencia que, dentre as cópulas paramétricas estimadas, a cópula *t-student* é aquela que melhor se ajusta as três combinações de séries estudadas, pelo critério de máxima log-verossimilhança, corroborando com o resultado encontrado por Silva et al. (2013). E para a série bivariada IBOVESPA – NIKKEI a cópula que se ajustou de maneira mais adequada foi a cópula Normal.

Tabela 4 – Estimativa dos Parâmetros das Cópulas Bivariada entre às Séries.

	IBO - FTSE		IBO – S&P500		IBO – GDAXHI		IBO – NIKKEI	
Cópula	Parâmetro	LL	Parâmetro	LL	Parâmetro	LL	Parâmetro	LL
Normal	0,5073 (0,0137)	348,19	0,6367 (0,0103)	608,49	0,4569 (0,0148)	274,59	0,1768 (0,0196)	37,26
t-student	0,5064 (0,0152)	349,28	0,6389 (0,0121)	635,27	0,4584 (0,0167)	287,50	0,1758 (0,0012)	36,09
Clayton	0,7245 (0,0361)	284,41	1,0809 (0,0419)	498,28	0,6358 (0,0346)	238,79	0,1862 (0,0265)	31,31
Gumbel	1,4479 (0,0230)	313,51	1,7156 (0,0283)	573,39	1,3798 (0,218)	244,29	1,097 (0,0153)	28,92
Frank	3,3581 (0,1357)	311,22	4,4866 (0,1493)	566,64	2,9482 (0,1339)	244,15	0,9704 (0,1249)	30,16
Joe	1,5499 (0,0329)	229,96	1,8939 (0,0410)	433,06	1,4547 (0,0311)	172,36	1,1058 (0,0216)	18,96

Obs.: Os valores entre parêntese são os respectivos erros-padrão das estimativas.

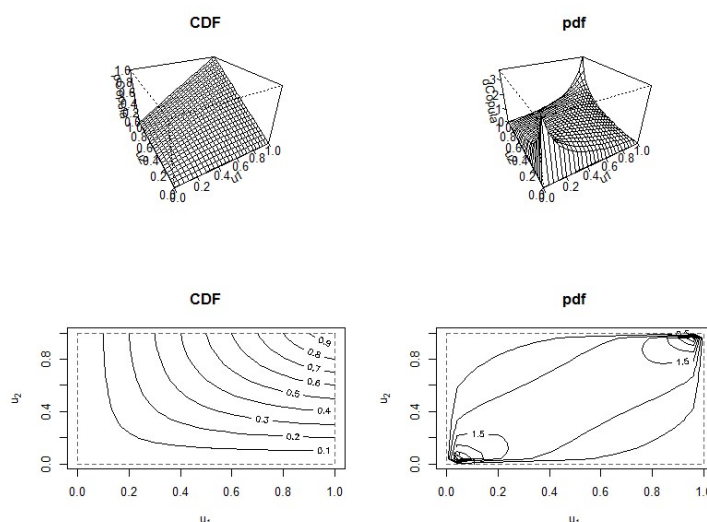
Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

De acordo com o critério pré-estabelecido, foram ajustados e escolhidos os modelos de cópulas, portanto, para os pares de retornos estudados neste trabalho, a cópula *t-student* e a cópula normal foram aquelas que melhor se ajustaram às relações de dependência entre as variáveis séries. Entretanto, mesmo em três pares ajustados a cópula *t-student* ter sido escolhida, o parâmetro obtido em cada uma delas é diferente, ou seja, suas respectivas cópulas são funções distintas da mesma família. Posto isso, o próximo tópico ilustra o comportamento das cópulas escolhidas.

4.3.1 Apresentação Gráfica das Cópulas Selecionadas

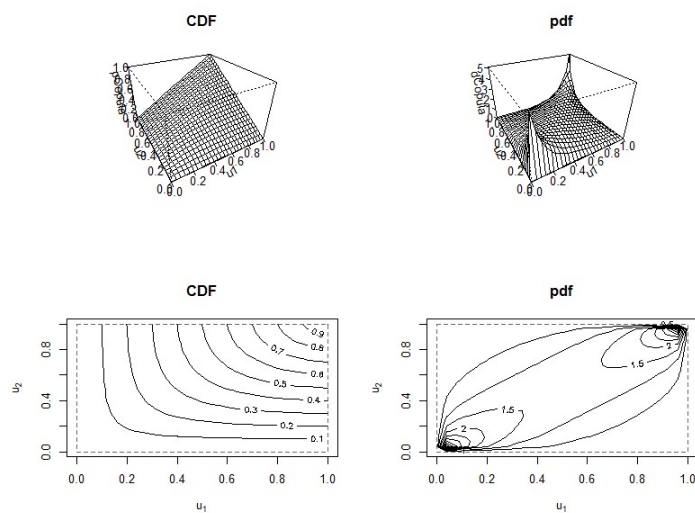
Nas Figuras 4, 5, 6 e 7 são apresentados os gráficos das densidades e funções de distribuições de cada cópula ajustada para cada par de séries. Os gráficos (4, 5, 6 e 7) seguem as seguintes ordem: a esquerda é a função de distribuição acumulada (CDF) e abaixo sua respectiva curva de nível, e a direita, a função densidade de probabilidade (FDP) e sua respectiva curva de nível.

Figura 4 – Gráficos da cópula *t-student* entre os retornos do Ibovespa e FTSE



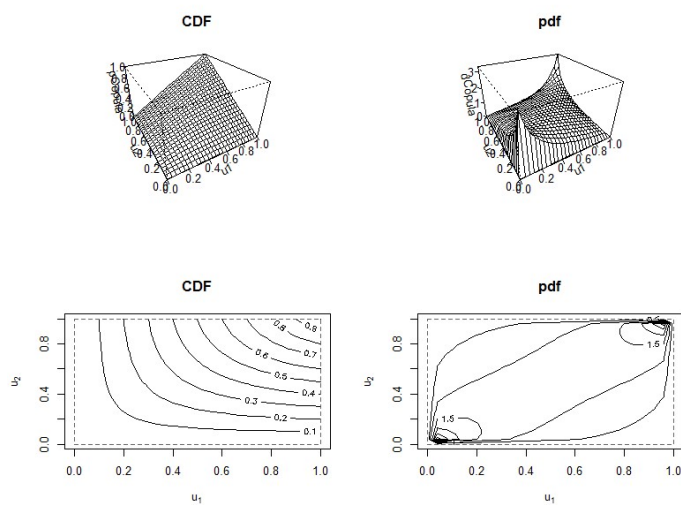
Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

Figura 5 – Gráficos da cópula *t-student* entre os retornos do Ibovespa e S&P500.



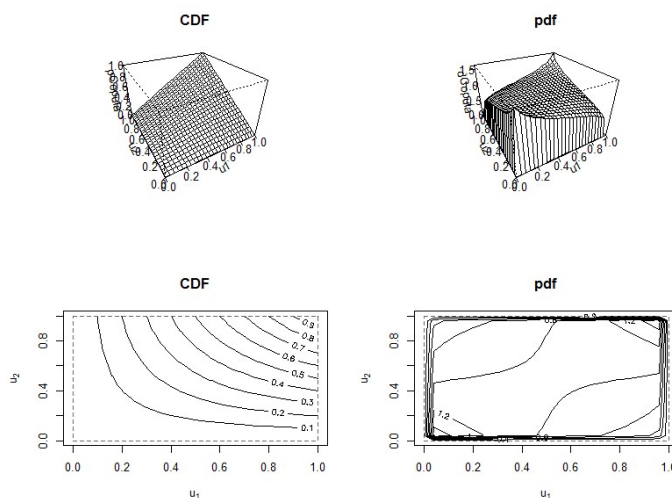
Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

Figura 6 – Gráficos da cópula *t-student* entre os retornos do Ibovespa e GDAXHI.



Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

Figura 7 – Gráficos da cópula normal entre os retornos do Ibovespa e NIKKEI.



Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

Os gráficos das densidades das distribuições bivariadas apontam como ambas as famílias (*t-student* e normal) são capazes de captar certo grau de dependência nas caudas, o que era esperado *a priori*, por se tratar de dados do mercado financeiro. Porém, no gráfico da cópula normal do índice IBOVESPA e NIKKEI corrobora com resultados anteriores, não mostrando uma relação de dependência forte, principalmente nas caudas. Portanto, não há evidência visual e forte para que esse par de séries seja altamente correlacionado nas caudas.

Em se tratando dos três pares de cópulas *t-student* ajustadas, há evidência de que às séries sejam correlacionadas nas caudas e que o par IBOVESPA e S&P500 seja mais fortemente relacionado do que os outros.

4.3.2 Medida de Dependência entre às Séries

Após a estimação e a escolha da cópula apropriada para cada par de retornos, a Tabela (5) mostra qual é o tamanho e o grau da dependência entre estas séries através das medidas *Tau de Kendall* e *Rho de Spearman*. Em se tratando de uma melhor gestão de risco, esta informação é valiosa, principalmente para investidores e empresas que trabalham com exportação e/ou importação.

Tabela 5 – Tau de Kendall e Rho de Spearmann através da Cópula *t-student*.

Medida de Associação	IBO – FTSE	IBO – S&P500	IBO - GDAXHI	IBO – NIKKEI
Tau de Kendall	0,3381	0,4412	0,3006	0,1131
Rho de Spearman	0,4889	0,6210	0,64381	0,1690

Fonte: Elaborado pelos autores (2017).

A Tabela (5) informa que a série americana (S&P500) apresenta maior relação de dependência com o índice brasileiro do que as outras três séries, quando se observa tanto o *Tau de Kendall* quanto o *Rho de Spearman*. Esse resultado pode ser explicado pela grande influência norte americana na construção do índice brasileiro.

5. Considerações Finais

A economia de um país pode influenciar direta e significativamente as bolsas de valores de outros países, inclusive a brasileira. Porém, um país pode influenciar mais intensamente a economia brasileira do que outros. Neste contexto, este trabalho buscou verificar como quatro grandes economias mundiais (EUA, Inglaterra, Alemanha e Japão) refletem no principal índice da bolsa de valor do Brasil, o IBOVESPA.

A dependência entre variáveis e séries pode ser calculada a partir de várias técnicas diferentes. Para atingir esse objetivo, utilizou-se a metodologia de cópulas modelada através dos resíduos de séries temporais. As cópulas propostas para analisar essa dependência foram a Normal, *t-student*, *Gumbel*, *Frank*, *Clayton* e *Joe*. Os resultados sugerem que, levando em consideração os critérios de seleção, em geral, a cópula *t-student* foi a que obteve melhor ajuste às séries bivariadas, e que a série IBOVESPA apresentou a maior dependência com o índice S&P500 norte-americana do que com as outras três séries, nota-se que todas as séries apresentaram dependência positiva entre si, ou seja, quando os quatro índices estiverem em alta, é mais provável que ocorra elevação no índice brasileiro.

Esta constatação se alinha com os resultados encontrados por Marçal e Pereira (2008), onde o mercado brasileiro e americano apresentou as maiores dependências em relação ao mercado londrino e japonês, mas se opõe aos resultados do estudo de Gaio et al. (2014).

Em estudos futuros pode ser interessante averiguar se a relação de dependência entre esses mercados varia ao longo do tempo, assim como em Patton (2002). Além disso, pode-se fazer a estimação de cópulas multivariadas, que não se limitam a modelar a relação de associação apenas bivariada.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANE, T.; KHAROUBI, C. Dependence structure and risk measure. **The journal of business**, v. 76, n. 3, p. 411–438, 2003.

BAIG, T.; GOLDFAJN, I. The russian default and the contagion to Brazil. **Working Paper 00/160**, International Monetary Fund, Washington, DC, 2000.

BARTELS, M. Dependência entre as ações americanas e os setores da economia brasileira. In: **XIV Encontro Brasileiro de Finanças**, 2014.

BERGMANN, D. R.; SAVOIA, J. R. F.; MENDES-DA-SILVA, W. et al. Análise dos comovimentos entre os mercados de capitais do brasil e dos eua. **BBR-Brazilian Business Review**,(4), p. 124–138, 2011.

BOLLERSLEV, T. A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. **The review of economics and statistics**, p. 542–547, 1987.

CHERUBINI, U.; LUCIANO, E.; VECCHIATO, W. **Copula methods in finance**. John Wiley & Sons, 2004.

CLAYTON, D. G. A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. **Biometrika**, JSTOR, p. 141–151, 1978.

COLOMBO, J. A.; JUNIOR, M. V. W.; HORTA, E. de O. Regime switching copula: uma análise da dependência intra e inter-setorial, **XI Encontro Brasileiro de Finanças**, 2011.

EICHENGREEN, B.; ROSE, A. K.; WYPLOSZ, C. Contagious currency crises. **National Bureau of Economic Research**, 1996.

EMBRECHTS, P.; MCNEIL, A.; STRAUMANN, D. Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. **Risk management: value at risk and beyond**, p. 176–223, 2002.

FERNÁNDEZ, C.; STEEL, M. F. On bayesian modeling of fat tails and skewness. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis Group, v. 93, n. 441, p. 359–371, 1998.

GAIO, L. E.; AMBROZINI, M. A.; BONACIN, C. A.; JUNIOR, T. P. Interdependência entre os mercados mundiais de ações: uma análise de volatilidades, **Revista de Administração e Contabilidade da Unisinos**, 2014.

GENEST, C.; MASIELLO, E.; TRIBOULEY, K. Estimating copula densities through wavelets. **Insurance: Mathematics and Economics**, Elsevier, v. 44, n. 2, p. 170–181, 2009.

JOE, H. Parametric families of multivariate distributions with given margins. **Journal of multivariate analysis**, Elsevier, v. 46, n. 2, p. 262–282, 1993.

JOE, H. **Multivariate models and multivariate dependence concepts**. CRC Press, 1997.

JUNIOR, J. C. A. d. S. Contágio entre mercados financeiros: uma análise via cópulas não paramétricas. Dissertação de Mestrado, 2012.

JUNKER, M.; MAY, A. Measurement of aggregate risk with copulas. **The Econometrics Journal**, **Wiley Online Library**, v. 8, n. 3, p. 428–454, 2005.

KAT, H. M.; PALARO, H. P. Who needs hedge funds? A copula based approach to hedge fund return replication. **Working Paper, Alternative Investment Research Center**, Londres, 2005.

MARÇAL, E. F. Testando a hipótese de contágio a partir de modelos multivariados de volatilidade, Dissertação de Mestrado – FGV, 2008.

MARÇAL, H. V. Três ensaios sobre gerenciamento de ativos e passivos em fundos de pensão. Tese (Doutorado em Economia) - Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2011.

NELSEN, R. B. Copulas and association. In: **Advances in probability distributions with given marginals**. Springer, 1991. p. 51–74.

NÓVOA, J.; BALANCO, P. O estágio último do capital. a crise e a dominação do capital financeiro no mundo. **Caderno CRH**, Universidade Federal da Bahia, v. 26, n. 67, p. 87–104, 2013.

PATTON, A. J. Applications of copula theory in financial econometrics. Unpublished Ph. D. dissertation, University of California, San Diego, 2002.

PEREIRA, P. L. V.; SANTOS, R. P. de S. Modeling financial contagion using copula. **Brazilian Review of Finance**, v. 9, n. 3, p. 335–363, 2011.

R Core Team. R: A Language and Environment for Statistical Computing. Vienna, Austria, 2016. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.

SANTOS, R. P. d. S. Modelando contágio financeiro através de cópulas. Tese (Doutorado), 2011.

SILVA, M. M. O mercado futuro de dólar da bm&fbovespa: uma análise de dependência sob a ótica da teoria de cópulas. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal da Paraíba, 2013.

SKLAR, M. **Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges**. Université Paris 8, 1959.

TANG, A.; VALDEZ, E. Economic capital and the aggregation of risks using copulas (2006). URL: <http://www.ica2006.com/Papiers/282/282.pdf> (20.6. 2008), 2006.

TSAY, R. S. Analysis of Financial Time Series. **Financial Econometrics**, A Wiley-Interscience Publication, 2002.