Задание 1

**№ 1**

Составить таблицу истинности формулы X→(X→Y)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | Y | X→Y | X→(X→Y) |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

**№ 2**

Покажите, что высказывание (X↔Y)→(X→Y) логически истинно, а (X↔Y)→(XVY) – нет

Таблица истинности высказывания (X↔Y)→(X→Y)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X | Y | X↔Y | X→Y | (X↔Y)→(X→Y) |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Значения высказывания на всех значениях X и Y равно 1, поэтому высказывание истинно.

Таблица истинности высказывания (X↔Y)→(XVY)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X | Y | X↔Y | X→Y | (X↔Y)→(X→Y) |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Значение высказывания на значениях X=0 Y=0 равно 0, поэтому высказывание ложно.

**№3**

Постройте таблицу истинности следующих высказываний: XΛY; б) X→ ¬Y в) ¬XV¬Y г) ¬XVY д) XΛ¬Y. Для каких пар имеет место отношение следствия или эквивалентности?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X | Y | **XΛY** |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

а)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | Y | ¬Y | **X→¬Y** |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

б)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X | Y | ¬X | ¬Y | **¬XV¬Y** |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

в)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | Y | ¬X | **¬XVY** |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |

г)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | Y | ¬Y | **XΛ¬Y** |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

д)

б) эквивалентно в); из а) следует г); из д) следует б) и в)

**№ 4**

Построить таблицы истинности высказываний и расположить их в таком порядке, чтобы из каждого высказывания следовали все, стоящие после него.

а) ¬X↔Y б) X→Y в) X→(Y→X) г) XVY д) ¬XΛY

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | Y | ¬Х | **¬X↔Y** |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

А)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X | Y | **X→Y** |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Б)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | Y | Y→Х | **X→(Y→X**) |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

В)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X | Y | **XVY** |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Г)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | Y | ¬Х | **¬XΛY** |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

Д)

Д) → А) → Г) → В)

**№ 5**

Что можно сказать о высказывании, если Х и Y логически истинны, а Z логически ложно: (XV¬Y)Λ¬Z

Если Х и Y логически истинны, то Х=1 и Y=1. Если Z логически ложно, то Z =0. Тогда (XV¬Y)Λ¬Z = (1V0)Λ1=1 – высказывание равно 1, значит оно логически истинно.

**№ 6**

Доказать, что (X→Y)Λ(Y→X) ↔ (X↔Y)

Таблица истинности для (X→Y)Λ(Y→X):

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X | Y | X→Y | Y→X | **(X→Y)Λ(Y→X)** |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Таблица истинности для (X↔Y):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X | Y | **X↔Y** |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Высказывание (X→Y)Λ(Y→X) равно (X↔Y) на всех значениях X и Y, поэтому эти высказывания эквивалентны.

**№7**

Докажите, что отрицание высказывания: “ Х есть необходимое и достаточное условие для Y “ эквивалентно высказыванию: “ Х есть необходимое и достаточное условие для ¬Y “ .

Условие задачи можно записать ¬(X↔Y) ↔ (X↔¬Y)

Таблица истинности для ¬(X↔Y) :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | Y | X↔Y | ¬(X↔Y) |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Таблица истинности для (X↔¬Y):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | Y | ¬Y | X↔¬Y |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

Высказывание ¬(X↔Y) равно (X↔¬Y) на всех значениях X и Y, поэтому эти высказывания эквивалентны.

**№8**

Докажите, что контрапозиция эквивалентна первичной импликации.

X→Y - первичная импликация

¬Y→¬X - контрапозиция

Таблица истинности для X→Y :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X | Y | X→Y |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Таблица истинности для ¬Y→¬X :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X | Y | ¬X | ¬Y | ¬X→¬Y |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Высказывание X→Y равно ¬X→¬Y на всех значениях X и Y, поэтому эти высказывания эквивалентны.

**№ 9**

Составьте таблицы истинности для высказываний: X|Y б) (X|Y)|(X|Y)

X↓Y б) (X↓Y)↓(X↓Y)

Таблица истинности для X|Y = ¬(XΛY):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X | Y | X|Y |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Таблица истинности для (X|Y)|(X|Y): (X|Y)|(X|Y) = ¬(¬(XΛY)Λ¬(XΛY)) = ¬(¬(XΛY)) = XΛY

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X | Y | (X|Y)|(X|Y) |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Таблица истинности для X↓Y = ¬(XVY):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X | Y | X↓Y |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

Таблица истинности для (X↓Y)↓(X↓Y):

(X↓Y)↓(X↓Y) = ¬(¬(XVY)V¬(XVY)) = ¬(¬(XVY)) = XVY

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X | Y | (X↓Y)↓(X↓Y) |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

**№ 10**

Докажите, что импликация X→Y эквивалентна ((XΛY)⊕X) ⊕1

Таблица истинности для X→Y :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X | Y | X→Y |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Таблица истинности для ((XΛY)⊕X) ⊕1 :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X | Y | XΛY | (XΛY)⊕X | ((XΛY)⊕X)⊕1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Высказывание X→Y равно ((XΛY)⊕X) ⊕1 на всех значениях X и Y, поэтому эти высказывания эквивалентны.

**№ 11**

Составить СДНФ булевой функции, принимающей значение 1 на следующих наборах переменных: F(0,0,0)=F(0,1,1)=F(1,0,0)=1

Наборам 0,0,0; 0,1,1; 1,0,0 соответствуют конъюнкции ¬x1Λ¬x2Λ¬x3; ¬x1Λx2Λx3; x1Λ¬x2Λ¬x3, тогда СДНФ:

f(x1,x2,x3) = (¬x1Λ¬x2Λ¬x3)V(¬x1Λx2Λx3)V(x1Λ¬x2Λ¬x3)

**№12**

Составить СДНФ булевой функции, принимающей значение 0 на следующих наборах переменных: F(0,0,1)=F(0,1,0)=F(1,0,0)=F(1,1,1)=0

СНДФ:

f(x1,x2,x3) = (x1Λx2Λ¬x3)V(x1Λ¬x2Λx3)V(¬x1Λx2Λx3)V(¬x1Λ¬x2Λ¬x3)

**№13**

Составить СНДФ для функции F(x,y)=x ⊕ Y.

Таблица истинности для функции F(x,y)=x ⊕ Y:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | y | x ⊕ Y |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Из таблицы истинности F(0,1) = F(1,0) =1

Наборам 0,1; 1,0; соответствуют конъюнкции ¬xΛy; xΛ¬y , тогда СДНФ: f(x,y) = (¬xΛy)V(xΛ¬y)

**№ 14**

Составить СНДФ и СНКФ для функции F(x,y)=x ↓ Y.

Таблица истинности для функции F(x,y)=x ↓ Y:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | y | x ↓ Y |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

F(0,0)=1 СДНФ F(x,y)=x ↓ Y: f(x,y) = ¬xΛ¬y

F(0,1)=F(1,0)=F(1,1) = 0 СКНФ: f(x,y)=(xV¬y)Λ(¬xVy)Λ(¬xV¬y)

**№15**

Задана булева функция F(X,Y,Z)= YΛ((XVZ)|(Y|Z)).

а) найти двоичную форму булевой функции F

б) построить полином Жегалкина методом неопределенных коэффициентов

Таблица истинности для функции F(x,y,z)= YΛ((XVZ)|(Y|Z))

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | Y | Z | XVZ | Y|Z | (XVZ)|(Y|Z) | YΛ((XVZ)|(Y|Z)) |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

а) двоичная форма булевой функции F (из таблицы истинности) : 00110001

б) Формула полинома Жегалкина для функции 3-х переменных: f(x,y,z) =

=a0⊕a1\*X⊕a2\*Y⊕a3\*Z⊕a12\*X\*Y⊕a13\*X\*Z⊕a23\*Y\*Z⊕a123\*X\*Y\*Z

Таблица истинности исключающего ИЛИ (⊕):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| a | b | a⊕b |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Расчет коэффициентов а0 ÷ а123 c использованием значения функции из таблицы истинности F и таблицу истинности исключающего ИЛИ:

f(0,0,0) = a0 = 0 -> **a0 = 0**

f(0,0,1) = a0 ⊕ a3 = 0 ⊕ a3 = 0 -> **a3=0**

f(0,1,0) = a0 ⊕ a2 = 0 ⊕ a2 = 1 -> **a2= 1**

f(0,1,1) = a0 ⊕ a2 ⊕ a3 ⊕ a23 = 0 ⊕ 1 ⊕ 0 ⊕ a23 = 1 -> **a23 = 0**

f(1,0,0) = a0⊕ a1 = 0 ⊕ a1 = 0 -> **a1 = 0**

f(1,0,1) = a0 ⊕ a1 ⊕ a3⊕ a13 = 0 ⊕ 0 ⊕ 0 ⊕ a13 = 0 -> **a13 = 0**

f(1,1,0) = a0 ⊕ a1 ⊕ a2 ⊕ a12= 0 ⊕ 0 ⊕ 1⊕ a12 = 0 -> **a12 = 1**

f(1,1,1) = a0 ⊕ a1 ⊕ a2 ⊕ a3 ⊕ a12 ⊕ a13 ⊕ a23 ⊕ a123 = 0 ⊕ 0 ⊕ 1 ⊕ 0 ⊕ 1 ⊕ 0 ⊕ 0 ⊕ a123 = 1 -> **a123 = 1**

Подстановка значений коэффициентов а1 ÷ а123 в формулу полинома Жегалкина:

**f(x,y,z) =**0⊕0\*X⊕1\*Y⊕0\*Z⊕1\*X\*Y⊕0\*X\*Z⊕0\*Y\*Z⊕1\*X\*Y\*Z=

= **Y⊕X\*Y⊕X\*Y\*Z**