Elimination with Matrices

monkey knight

版本：*1.00*

更新：*July 31, 2019*

1 Method of Elimination

消元是计算机软件解线性方程组最通用的技术。当矩阵 A 可逆时，它就能找到 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解 $\mathbf{x}$。课上的例子：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} and\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A 左上角的 1 被称为第一个 *pivot*。我们拷贝第一行，然后为这一行乘上一个合适的数（在这个例子里是 3）而且用第二行的数减去第一行。第二行的第一个数就变成了 0。因此我们就将第二行第一列的数字 3 消去了。

下一步就是要消去第 3 行第 1 列的数，得到数字 0。在这里，它已经是 0 了。

第二个 *pivot* 是现在第 2 行第 2 列的数 2。我们需要找到一个合适乘数乘以第二行来消去第 3 行第 2 列的数字 4。第三个 *pivot* 就是第 3 行第 3 列的数 5。

我们从一个可逆的矩阵 A 开始，然后得到一个上三角矩阵（upper trangular）uU。U 的左部分全是 0。*pivot* 1，2，5 都在 U 的对角线上。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

然后我们对向量 $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\12\\2\end{bmatrix}$ 重复上面的乘法和减法操作。例如：我们给第一个位置的 2 乘以 3 然后从 12 减掉乘之后的结果得到 6。如果我们是手动计算的话，我们可以使用 A 的增广矩阵（就是将向量 $\mathbf{b}$ 添加到矩阵 A 中作为最后一列）。这样，消元法将等式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 转换成了一个新的等式 $U\mathbf{x}=\mathbf{c}$。在上面的例子中，$U=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&0&5\end{bmatrix}$ 来自 A，$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}2\\6\\-10\end{bmatrix}$ 来自 $\mathbf{b}$。

等式 $U\mathbf{x}=\mathbf{c}$ 很容易通过回代法（Back Substitution）来解答。在我们的例子中，$z=-2, y=1, x=2$。这也正是原方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解。

U 的行列式就是 *pivot* 们的乘积。

pivot 不能是 0，如果在 *pivot* 的位置是 0，那我们就必须要通过行与行之间进行互换来使得 *pivot* 的位置不为 0。

如果 *pivot* 的位置为 0，而且其下面的值都是 0，那么矩阵 A 就不是可逆的。那么这个方程组就不存在唯一解。