Geometry of Linear Algebra

monkey knight

版本：*1.00*

更新：*July 28, 2019*

线性代数的基本问题就是解 n 维方程组。例如：

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

在线性代数的第一节课，我们将以三种方式来看待这个问题。

上面的方程组是二维的（$n = 2$）。通过添加一个变量 z 我们就能将其扩展为三维。

1 Row Picture

画出满足每个方程的所有的点。图的交点（前提是它们能够相交）就是方程组的解。从图 1 我们能够看出方程组的解是 $x = 1$，$y = 2$。

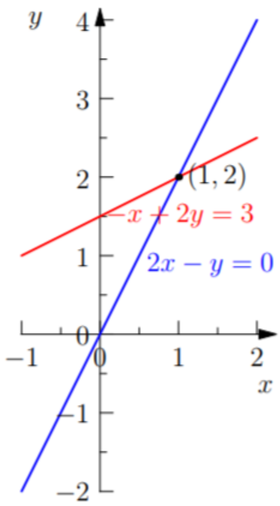

图 1: $2x - y = 0$ 和 $-x + 2y = 0$ 在点（1,2）处相交

我们将这个解代入到原方程组中去检查：

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 1 - 2 &= 0 \\
-1 + 2 \cdot 2 &= 3
\end{aligned}
$$

三维方程组的解通常是三个平面的交点（前提是它们相交）。

2 Column Picture

通过将方程组中列的系数转换成向量，我们可以将方程组写成一个等式：

$$
x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

给定两个向量 $\mathbf{c}$ 和 $\mathbf{d}$ 以及标量 x 和 y，那么 $x\mathbf{c} + y\mathbf{d}$ 就称为向量 $\mathbf{c}$ 和 $\mathbf{d}$ 的线性组合（**linear combination**）。线性组合是这门课中非常重要的思想。

从几何上看，我们是想要找到这样的数字 x 和 y，使得 x 个向量 $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 的拷贝加上 y 个向量 $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 的拷贝等于向量 $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$。正如我们从图 2 中看到的，$x = 1$ 和 $y = 2$，（这也与 Row Picture 中的结论相吻合）。

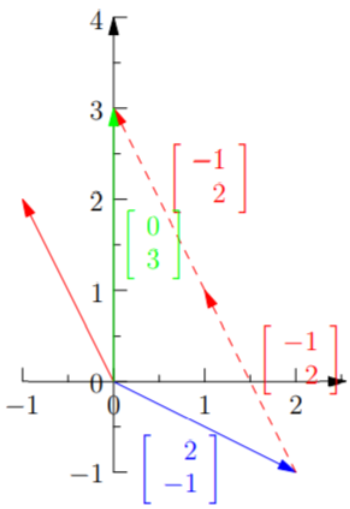

图 2: 列向量的 linear combination 等于向量 $\mathbf{b}$

在三维情况下，我们就需要找到三个三维向量的线性组合使得结果为 $\mathbf{b}$。

3 Matrix Picture

我们通过矩阵和向量将上述的方程组写成一个等式：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 叫做系数矩阵（**coefficient matrix**），向量 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 是未知数，等式右边的值构成了向量 $\mathbf{b}$：

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

三维的 Matrix Picture 和二维的很像，只是在大小上有所改变。

3.1 Matrix Multiplication

我们如何用一个矩阵乘以一个向量呢？

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \quad ?$$

一种方法是把 $\mathbf{x}$ 向量的元素看成矩阵列向量线性组合的系数：

$$1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

这个方法就显示出了 $A\mathbf{x}$ 是矩阵 A 的列的线性组合。

另一种计算方法，你可以将矩阵 A 的每一行与向量 x 做点乘（**dot product**）：

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

4 Linear Independence

在 Row Picture 和 Column Picture 中，等式右边是向量 $\mathbf{b}$。给定一个矩阵 A，对于任意可能的向量 $\mathbf{b}$，我们是否都可以解方程组：

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

呢？换言之，列向量的线性组合能否填满整个 xy 平面（在三维情况下就是 xyz 空间）？

如果答案是否定的，我们就称矩阵 A 是一个奇异矩阵（**singular matrix**）。在这种情况下，矩阵 A 的列向量是线性相关的（**linearly dependent**）。