DOI:10.16725/j.cnki.cn45-1351/tn.2013.05.004

第33卷 第5期 2013年10月

桂林电子科技大学学报 Journal of Guilin University of Electronic Technology

Vol. 33, No. 5 Oct. 2013

求解三维 Helmholtz 方程的高阶快速数值算法

邹静文,李郴良

(桂林电子科技大学 数学与计算科学学院,广西 桂林 541004)

摘 要:针对三维 Helmholtz 方程 Dirichlet 边界问题,提出一种高阶快速数值算法。该算法采用高阶有限差分方法离散化,利用 FFT 方法将离散方程缩小为规模较小的界面线性方程,可用直接法快速有效地求解。基于该方法可构造出解决三维 Helmholtz 方程的高阶快速数值算法,数值实验验证了算法的准确性和有效性。

关键词:三维 Helmholtz 方程;紧有限差分方法;FFT;界面线性方程

中图分类号:O241.82 **文献标志码**:A **文章编号**:1673-808X(2013)05-0420-05

A high-order fast algorithm for three-dimensional Helmholtz equation

Zou Jingwen, Li Chenliang

(School of Mathematics and Computational Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: Aiming at the Dirichlet boundary problem of 3D Helmholtz equation, a high-order fast numerical algorithm is proposed. The algorithm is discretized by using the high-order finite difference method. and then exploiting the discrete Fourier transformation, the discrete system is reduce to a much smaller interface linear system. Direct methods are availed to solve this interface linear system. Numerical results demonstrate the remarkable accuracy and efficiency of the proposed algorithm.

Key words: three-dimensional Helmholtz equation; compact finite difference method; FFT; interface linear equation

Helmholtz 方程是一个椭圆偏微分方程,可以在假设满足时谐性的条件下,求解波动方程。Helmholtz 方程控制许多重要的物理现象,如电磁、声波散射和水波传播问题等。因此,如何精确有效地得到 Helmholtz 方程的数值解已成为一个重要的研究课题。

对于二维的 Helmholtz 方程非局部边界问题,Bao 等[1]提出关于二维 Helmholtz 方程的二阶有限差分格式解决腔体电磁散射问题,其主要考虑嵌入到无限地平面的矩形开腔体的电磁散射问题的快速算法,数值实验表明对大波数和多网点的模型都是有效的。基于 Bao 等[1]的方法,文献[2]提出关于求解二维 Helmholtz 方程的四阶有限差分紧格式,文献[3]将整个腔体区域的系统变成在腔体顶端边界的界面线性系统后,因为界面系统的复杂性和不确定性,继续用 Krylov 子空间的预处理迭代方法作用于这个界面线性系统上,从而得到二维 Helmholtz 方程的解。这种四阶方法与之前的二阶方法比较,在计算时间和解的精度上都有所改进。最近,Nabavi 等[4]提出了二维 Helmholtz 方程 Neumann 边界问题的六阶有限差分格式,并证明了这种六阶有限差分格式的高效性和高精度。近年来,类似的高阶数值算法研究延伸到求解三维 Helmholtz 方程 Dirichlet 边界问题和 Neumann 边界问题。文献[5]研究了四阶和六阶方法;Harsri 和 Turkel 提出了针对时谐波传播的四阶方法[6]。文献[7]更加有效地对不同的高阶差分格式进

收稿日期:2013-04-25

基金项目:国家自然科学基金(11161014)

通信作者:李郴良(1969—),男,湖南邵东人,教授,博士,研究方向为偏微分方程数值解。E-mail:chenli@guet.edu.cn

引文格式:邹静文,李郴良.求解三维 Helmholtz 方程的高阶快速数值算法[J].桂林电子科技大学学报,2013,33(5):420-424.

行组合，提出了求解三维 Helmholtz 方程方法。对于解决大波数的三维 Helmholtz 方程，高阶有限差分方法是非常有吸引力的，因为高阶方法与低阶方法相比较，通过利用较少的网格点数和花费较低的计算成本就能提供相对高精度的解。因此，在对 Helmholtz 方程的研究中，使用高阶有限差分数值算法求解占有重要地位的。

基于文献[1-4]的二维 Helmholtz 方程非局部边界问题的高阶快速数值算法，提出了三维 Helmholtz 方程 Dirichlet 边界问题的六阶快速数值算法。由于三维 Helmholtz 方程的节点规模大、离散化非常复杂，从二维到三维的推导延伸并不简单。采用高阶有限差分格式将方程离散化，通过 3 次 FFT 变换将整个区域上的离散方程缩小为规模较小的界面线性方程，这个线性方程可用直接法进行求解，提高了算法的可操作性。数值实验表明，该算法的准确性和有效性。

1　高阶紧有限差分格式

一个三维 Helmholtz 方程 Dirichlet 边界问题为

$$\begin{cases}\Delta u-\kappa^2 u=-f,\ (x,y,z)\in\Omega,\\ u=u_0,\ (x_b,y_b,z_b)\in\partial\Omega。\end{cases}\tag{1}$$

其中：Δ 为拉普拉斯算子；$u(x,y,z)$ 定义在区域 Ω 上，$u_0(x_b,y_b,z_b)$ 为边界 $\partial\Omega$ 区域的值；$\kappa=i\omega/c_0$ 为分散介质中的波数（ω 为波率，c_0 为光速或者声速）；$f(x,y,z)$ 为一个给定的源函数。

为便于研究，假定一个立方体型区域 $\Omega=[0,L]\times[0,L]\times[0,L]$。为离散方程组(1)，先将区域 Ω 按 X、Y、Z 轴做一致的剖分，用 $\{x_i,y_j,z_k\}_{i,j,k=0}^{M+1,N+1,K+1}$ 记之。为了简便计算，考虑 $\Delta x=\Delta y=\Delta z=h$ 的情况，$u_{i,j,k}$ 记作在 (x_i,y_j,z_k) 点的有限差分解。

根据在节点 (x_i,y_j,z_k) 处的泰勒展开式，标准二阶中心差分算子定义如下：

$$\delta_x^2 u_{i,j,k}=\frac{u_{i+1,j,k}-2u_{i,j,k}+u_{i-1,j,k}}{h^2},$$

$$\delta_y^2 u_{i,j,k}=\frac{u_{i,j+1,k}-2u_{i,j,k}+u_{i,j-1,k}}{h^2},$$

$$\delta_k^2 u_{i,j,k}=\frac{u_{i,j,k+1}-2u_{i,j,k}+u_{i,j,k-1}}{h^2}。$$

利用标准二阶中心差分算子，方程(1)可离散为二阶紧有限差分格式

$$\delta_x^2 u_{i,j,k}+\delta_y^2 u_{i,j,k}+\delta_z^2 u_{i,j,k}-\kappa^2 u_{i,j,k}=-f_{i,j,k}+O(h^2)。$$

类似地，可得到四阶和六阶紧有限差分格式。

1.1　四阶紧有限差分格式

$u(x,y,z)$ 对于 x 的二阶导数 u_{xx} 在 (x_i,y_j,z_k) 进行四阶泰勒展开，用二阶中心差分算子可表示成

$$u_{xx}=\delta_x^2 u_{i,j,k}-\frac{h^2}{12}u_{xxxx}+O(h^4)。\tag{2}$$

可以进一步化为

$$u_{xx}=(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2)^{-1}\delta_x^2 u_{i,j,k}+O(h^4)。$$

类似地，u_{yy} 和 u_{zz} 可得到相同的四阶格式。将其代入方程(1)，离散得到四阶紧有限差分格式：

$$(1-\frac{h^2\kappa^2}{12})(\delta_x^2+\delta_y^2+\delta_z^2)u_{i,j,k}+$$
$$\frac{h^2}{6}(\delta_x^2\delta_y^2+\delta_y^2\delta_z^2+\delta_x^2\delta_z^2)u_{i,j,k}-\kappa^2 u_{i,j,k}=$$
$$-f_{i,j,k}-\frac{h^2}{12}(\delta_x^2+\delta_y^2+\delta_z^2)f_{i,j,k}+O(h^4)。$$

亦可写成矩阵形式：

$$[(1-\frac{h^2\kappa^2}{12})(\boldsymbol{A}_M\otimes\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{I}_K+\boldsymbol{I}_M\otimes\boldsymbol{A}_N\otimes\boldsymbol{I}_K+\boldsymbol{I}_M\otimes\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{A}_K)+\frac{h^2}{6}(\boldsymbol{A}_M\otimes\boldsymbol{A}_N\otimes\boldsymbol{I}_K+\boldsymbol{I}_M\otimes\boldsymbol{A}_N\otimes\boldsymbol{A}_K+\boldsymbol{A}_M\otimes\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{A}_K)-\kappa^2\boldsymbol{I}_{MNK}]\boldsymbol{U}+\boldsymbol{B}_U=-\boldsymbol{F}-\frac{h^2}{12}(\boldsymbol{A}_M\otimes\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{I}_K+\boldsymbol{I}_M\otimes\boldsymbol{A}_N\otimes\boldsymbol{I}_K+\boldsymbol{I}_M\otimes\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{A}_K)\boldsymbol{F}+\boldsymbol{B}_F。$$

其中：$\otimes$ 为张量积，$\boldsymbol{I}_{MNK}$、$\boldsymbol{I}_M$、$\boldsymbol{I}_N$ 和 $\boldsymbol{I}_K$ 分别为 MN 阶、M 阶、N 阶和 K 阶的单位矩阵。

$$\boldsymbol{A}_M=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix}-2&1&&&\\1&-2&1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&1&-2&1\\&&&1&-2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_N=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix}-2&1&&&\\1&-2&1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&1&-2&1\\&&&1&-2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_K=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix}-2&1&&&\\1&-2&1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&1&-2&1\\&&&1&-2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{U}=(u_{1,1,1},\cdots,u_{1,1,K},u_{1,2,1},\cdots,u_{1,2,K},\cdots,u_{1,N,K},u_{2,1,1},\cdots,u_{M,N,K})^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{F}=(f_{1,1,1},\cdots,f_{1,1,K},f_{1,2,1},\cdots,f_{1,2,K},\cdots,f_{1,N,K},f_{2,1,1},\cdots,f_{M,N,K})^{\mathrm{T}}。$$

式中：$\boldsymbol{A}_M$ 为 M 阶方阵；$\boldsymbol{A}_N$ 为 N 阶方阵；$\boldsymbol{A}_K$ 为 K 阶方阵，$\boldsymbol{B}_U$、$\boldsymbol{B}_F$ 分别记做 U 和 F 的边界项。

1.2 六阶紧有限差分格式

将方程(2)泰勒展开到六阶，得到

$$u_{xx}=\delta_x^2 u_{i,j,k}-\frac{h^2}{12}u_{xxxx}-\frac{h^4}{360}u_{xxxxxx}+O(h^6)。$$

类似地，u_{yy} 和 u_{zz} 有相应的六阶格式。将其代入方程(1)，离散得到六阶紧有限差分格式：

$$(\delta_x^2+\delta_y^2+\delta_z^2)u_{i,j,k}+\frac{h^2}{6}(1-\frac{\kappa^2h^2}{30})(\delta_x^2\delta_y^2+\delta_y^2\delta_z^2+\delta_x^2\delta_z^2)u_{i,j,k}+\frac{h^4}{30}\delta_x^2\delta_y^2\delta_z^2u_{i,j,k}-\kappa^2(1+\frac{h^2\kappa^2}{12}+\frac{h^4\kappa^4}{360})u_{i,j,k}=-(1+\frac{h^2\kappa^2}{12}+\frac{h^4\kappa^4}{360})f_{i,j,k}-\frac{h^2}{12}(1+\frac{\kappa^2h^2}{30})(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)f_{i,j,k}-\frac{h^4}{360}(\partial_x^4+\partial_y^4+\partial_z^4)f_{i,j,k}-\frac{h^4}{90}(\partial_x^2\partial_y^2+\partial_x^2\partial_y^2+\partial_x^2\partial_z^2)f_{i,j,k}+O(h^6)。$$

也可以表示成矩阵形式，

$$[(\boldsymbol{A}_M\otimes\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{I}_K+\boldsymbol{I}_M\otimes\boldsymbol{A}_N\otimes\boldsymbol{I}_K+\boldsymbol{I}_M\otimes\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{A}_K)+\frac{h^2}{6}(1-\frac{\kappa^2h^2}{30})(\boldsymbol{A}_M\otimes\boldsymbol{A}_N\otimes\boldsymbol{I}_K+\boldsymbol{I}_M\otimes\boldsymbol{A}_N\otimes\boldsymbol{A}_K+\boldsymbol{A}_M\otimes\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{A}_K)+\frac{h^4}{30}(\boldsymbol{A}_M\otimes\boldsymbol{A}_N\otimes\boldsymbol{A}_K)-\kappa^2(1+\frac{h^2\kappa^2}{12}+\frac{h^4\kappa^4}{360})\boldsymbol{I}_{MNK}]\boldsymbol{U}+\boldsymbol{B}_U=-(1+\frac{h^2\kappa^2}{12}+\frac{h^4\kappa^4}{360})\boldsymbol{F}-\frac{h^2}{12}(1+\frac{\kappa^2h^2}{30})(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)\boldsymbol{F}-\frac{h^4}{360}(\partial_x^4+\partial_y^4+\partial_z^4)\boldsymbol{F}-\frac{h^4}{90}(\partial_x^2\partial_y^2+\partial_x^2\partial_y^2+\partial_x^2\partial_z^2)\boldsymbol{F}+\boldsymbol{B}_F+O(h^6)。\tag{3}$$

其中：F 为给定的源函数，且连续可导；边界项 $\boldsymbol{B}_U$、$\boldsymbol{B}_F$ 是给定的。

2 快速数值算法

对于三对角的 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{A}_M$、$\boldsymbol{A}_N$ 和 $\boldsymbol{A}_K$，可以做相应的 FFT 变换，即快速傅里叶变换，

$$\boldsymbol{S}_N\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{S}_N=\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_N\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}_M\boldsymbol{A}_M\boldsymbol{S}_M=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_M\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}_K\boldsymbol{A}_K\boldsymbol{S}_K=\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_N\end{pmatrix}。$$

这里的 $\boldsymbol{S}_M$、$\boldsymbol{S}_N$ 和 $\boldsymbol{S}_K$ 记为快速傅里叶变换矩阵：

$$\boldsymbol{S}_M=\sqrt{\frac{2}{M+1}}(\sin\frac{lm\pi}{M+1})_{l,m=1}^{M},$$

$$\lambda_l=-\frac{4(M+1)}{a^2}\sin^2\frac{l\pi}{2(M+1)}。$$

$\boldsymbol{S}_M$ 满足 $\boldsymbol{S}_M{}^2=\boldsymbol{I}_M$。可以类似地定义 $\boldsymbol{S}_N$、μ_j 和 $\boldsymbol{S}_K$、$\boldsymbol{p}_k$。

将方程(3)进行 3 次 FFT 变换，可得

$$[(\boldsymbol{\Lambda}\otimes\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{I}_K+\boldsymbol{I}_M\otimes\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{I}_K+\boldsymbol{I}_M\otimes\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{P})+\frac{h^2}{6}(1-\frac{\kappa^2h^2}{30})(\boldsymbol{\Lambda}\otimes\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{I}_K+\boldsymbol{I}_M\otimes\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{P}+\boldsymbol{\Lambda}\otimes\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{P})+\frac{h^4}{30}(\boldsymbol{\Lambda}\otimes\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{P})-\kappa^2(1+\frac{h^2\kappa^2}{12}+\frac{h^4\kappa^4}{360})\boldsymbol{I}_{MNK}]\bar{\boldsymbol{U}}+\bar{\boldsymbol{B}}_U=\bar{\boldsymbol{F}}。\tag{4}$$

其中，

$$\bar{\boldsymbol{U}}=(\boldsymbol{S}_M\otimes\boldsymbol{S}_N\otimes\boldsymbol{S}_K)\boldsymbol{U}=(\bar{u}_{1,1,1},\cdots,\bar{u}_{1,1,K},\bar{u}_{1,2,1},\cdots,\bar{u}_{1,2,K},\cdots,\bar{u}_{1,N,K},\bar{u}_{2,1,1},\cdots,\bar{u}_{M,N,K})^{\mathrm{T}},$$

$\bar{\boldsymbol{B}}_U$ 和 $\bar{\boldsymbol{F}}$ 表示方程(3)中边界项和右端项的 3 次 FFT 变换，进一步简化式(4)，可得方程

$$[(\lambda_i\boldsymbol{I}_K+\mu_j\boldsymbol{I}_K+\boldsymbol{P})+\frac{h^2}{6}(1-\frac{\kappa^2h^2}{30})(\lambda_i\mu_j\boldsymbol{I}_K+\mu_j\boldsymbol{P}+\lambda_i\boldsymbol{P})+\frac{h^4}{30}(\lambda_i\mu_j\boldsymbol{P})-\kappa^2(1+\frac{h^2\kappa^2}{12}+\frac{h^4\kappa^4}{360})\boldsymbol{I}_K]\bar{\boldsymbol{U}}_{i,j,:}=\bar{\boldsymbol{F}}_{i,j,:}-\bar{\boldsymbol{B}}_{U_{i,j,:}},$$

$$i=1,2,3,\cdots,M,\quad j=1,2,3,\cdots,N。\tag{5}$$

其中，$\bar{\boldsymbol{U}}_{i,j,:}=(\bar{u}_{i,j,1},\bar{u}_{i,j,2},\cdots,\bar{u}_{i,j,K})^{\mathrm{T}}$。可运用直接法(如高斯消元法)求解方程(5)。

当 $i=1,2,\cdots,M$，系数矩阵

$$(\lambda_i\boldsymbol{I}_K+\mu_j\boldsymbol{I}_K+\boldsymbol{P})+\frac{h^2}{6}(1-\frac{\kappa^2h^2}{30})(\lambda_i\mu_j\boldsymbol{I}_K+\mu_j\boldsymbol{P}+\lambda_i\boldsymbol{P})+\frac{h^4}{30}(\lambda_i\mu_j\boldsymbol{P})-\kappa^2(1+\frac{h^2\kappa^2}{12}+\frac{h^4\kappa^4}{360})\boldsymbol{I}_K$$

是一个对角矩阵，其中，右端项为已知。

经过 3 次 FFT 变换，整个区域的离散系统(3)缩小为一个线性方程，

$$\boldsymbol{H}_j\bar{\boldsymbol{U}}_{i,j,} = \widehat{\boldsymbol{F}}_{(i,j)},$$
$$i = 1,2,3,\cdots,M;\ j = 1,2,3,\cdots,N。\quad (6)$$

其中：

$$\boldsymbol{H}_j = (\lambda_i\boldsymbol{I}_K + \mu_j\boldsymbol{I}_K + \boldsymbol{P}) + \frac{h^2}{6}(1-\frac{\kappa^2h^2}{30}\times$$
$$(\lambda_i\mu_j\boldsymbol{I}_K + \mu_j\boldsymbol{P} + \lambda_i\boldsymbol{P}) + \frac{h^4}{30}(\lambda_i\mu_j\boldsymbol{P}) -$$
$$\kappa^2(1+\frac{h^2\kappa^2}{12}+\frac{h^4\kappa^4}{360})\boldsymbol{I}_K,$$
$$\widehat{\boldsymbol{F}}_{i,j,} = \bar{\boldsymbol{F}}_{i,j,} - \bar{\boldsymbol{B}}_{U_{i,j,}}。$$

求解方程(6)可得到三维 Helmholtz 方程 Dirichlet 边界问题(1)的六阶精度近似解。求解三维 Helmholtz 方程 Dirichlet 边界问题的六阶快速数值算法如下：

1)计算 $\bar{\boldsymbol{F}}_{i,j,:}$，$\bar{\boldsymbol{B}}_{U_{i,j,:}}$；

2)生成并计算 $\boldsymbol{H}_j$；

3)求解方程(6)的解 $\bar{\boldsymbol{U}}_{i,j,:}$。

整个算法的计算量为 $O(MNK\log(K))$ [1]，该算法的主要思想可以延展到三维 Helmholtz 方程的 Neumann 边界问题。

3　数值实验

数值例子主要基于三维 Helmholtz 方程 Dirichlet 边界问题设定，并假定求解区域 Ω 为一个单位立方体型，即 $L=1$。对 2 个不同数值例子进行测试。计算结果表明，提出的六阶快速数值算法具有高精度和高效率。

数例 1　选择抽样本征函数：

$$u = \sin(\pi x/L)\sin(\pi y/L)\sin(\pi z/L),$$

根据方程(1)，可得到相应的边界项和源函数。

在区域 Ω 上，离散解 u_{ijk}^h 的 M- 范数和 2 -范数误差定义为：

$$e_M(\Omega) = \max|u_{i,j,k}^h - u(x_i,y_j,z_k)|,$$
$$e_2(\Omega) = \left(\frac{L^3}{MNK}\sum_{i,j,k=1}^{M,N,K}|u_{i,j,k}^h - u(x_i,y_j,z_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}。$$

用一种通用的方法，即计算

$$order(n,n+1) = \log_2\frac{e_2(\Omega)(n)}{e_2(\Omega)(n+1)}$$

判断算法的阶度，用 Ω_{cpu} 表示计算机 CPU 在边界 Γ 上的计算时间。表 1 列出了和六阶快速数值算法的比较结果，同时与相应的四阶快速数值算法的结果进行比较。可以看出，六阶快速数值算法能在较短的时间得到六阶精度的解。

表 1　当 $\kappa=5$ 的情况下，数例 1 的四阶算法和六阶算法测试结果比较

Tab. 1　Errors for the problem 1 by the sixth-order and the fourth-order algorithm when $\kappa=5$

Meshes	四阶算法			六阶算法		
	$e_2(\Omega)$	Ω_{cpu}	order	$e_2(\Omega)$	Ω_{cpu}	order
8^2	3.3431×10^{-5}	0.0300	—	2.9853×10^{-6}	0.0501	—
16^2	2.3889×10^{-6}	0.0701	3.8	6.0584×10^{-8}	0.1702	5.6
32^2	1.6046×10^{-7}	0.7010	3.9	1.0839×10^{-9}	0.6810	5.8
64^2	1.0412×10^{-8}	4.8670	3.9	1.8140×10^{-11}	5.2776	5.9
128^2	6.6329×10^{-10}	53.9670	4.0	2.3083×10^{-13}	45.6650	6.0

数例 2[8]

$$u(x,y,z) = \frac{\sin(\pi y)\sin(\pi z)}{\sin(\sqrt{2}\pi)}\times$$
$$[2\sinh(\sqrt{2}\pi x) + \sinh(\sqrt{2}\pi(1-x))]$$

取源函数 $f_{i,j,k}=0$，波长数 $\kappa=0$，且有以下 Dirichlet 边界条件：

$$\begin{cases} u(x,y,z) = \sin(\pi y)\sin(\pi z),\ x=0, \\ u(x,y,z) = 2\sin(\pi y)\sin(\pi z),\ x=1, \\ 0,\quad y,z\in\{0,1\}。\end{cases}$$

测试结果如表 2 所示。对于边界值不为 0 的 Dirichlet 边界问题，该算法同样适用且具有相应的高阶精度。

表 2 在 $\kappa=0$ 的情况下,数例 2 的四阶算法和六阶算法测试结果比较

Tab. 2 Errors for the problem 2 by the sixth-order and the fourth-order algorithm when $\kappa=0$

Meshes	四阶算法			六阶算法		
	$e_2(\Omega)$	Ω_{cpu}	*order*	$e_2(\Omega)$	Ω_{cpu}	*order*
8^2	9.1653×10^{-5}	0.040 1	—	4.9551×10^{-7}	0.030 0	—
16^2	6.6403×10^{-6}	0.130 2	3.8	1.0107×10^{-8}	0.180 3	5.6
32^2	4.4771×10^{-7}	0.500 7	3.9	1.8106×10^{-10}	1.111 6	5.8
64^2	2.9080×10^{-8}	4.636 7	3.9	3.0269×10^{-12}	4.7669	5.9
128^2	1.8530×10^{-9}	44.904 6	4.0	4.8853×10^{-14}	49.120 6	6.0

4 结束语

通过构造六阶快速数值算法求解三维 Helmholtz 方程 Dirichlet 边界问题,所提方法简单易实现,数值实验证明了其有效性。对于解决大波数的 Helmholtz 方程,高阶有限差分方法非常有吸引力,因为与低阶方法相比,高阶方法通过利用较少的网格点数和花费较低的计算成本,就能提供相对高精度的解。这种算法可以延伸到求解三维 Helmholtz 方程 Neumann 边界问题,并具有相应的性质。

参考文献:

[1] Bao Gang, Sun Weiwei. A fast algorithm for the electromagnetic scattering from a large cavity[J]. SIAM J Sci Comput, 2005, 27: 553-574.

[2] Zhao Meiling, Qiao Zhonghua, Tang Tao. A fast high order method for electromagnetic scattering by large open cavities[J]. J Comput Math, 2011, 29: 287-304.

[3] Li Chenliang, Qiao Zhonghua. A fast preconditioned iterative algorithm for the electromagnetic scattering from a large cavity[J]. J Sci Comput, 2012, 22: 435-450.

[4] Nabavi M, Kamran Siddiqui M H, Dargahi J, et al. A new 9-point sixth-order accurate compact finite difference method for the Helmholtz equation[J]. J Sound Vib, 2007, 307: 972-982.

[5] Houstis E N, Papatheodorou T S. Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations[M]. New Brunswick, NJ: IMACS, 1977: 46-52.

[6] Harari I, Turkel E. Accurate finite difference methods for time-harmonic wave propagation[J]. J Comput Phys, 1995, 119: 252-270.

[7] Sutmann G. Compact finite difference schemes of sixth order for the Helmholtz equation[J]. J Comput Appl Math, 2007, 203: 15-31.

[8] Sutmann G, Bernhard S. High-order compact solvers for the three-dimensional poisson equation[J]. J Comput Appl Math, 2006, 187: 142-170.

编辑:梁王欢