1　群論

1.1　群の定義

集合 G が以下の性質を満たすとき、G は群であるという。

1. 積：$^\forall a$、$^\forall b \in G$ に対して演算 $\circ$ が定義されている。ここで $a \circ b \in G$ であり、$a \circ b$ を a と b の積と呼ぶ。
2. 結合法則：演算 $\circ$ は結合法則 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ を満たす。
3. 単位元：$^\forall a \in G$ に対して $a \circ e = e \circ a = a$ を満たす $e \in G$ が存在する。e を単位元と呼ぶ。
4. 逆元：$^\forall a \in G$ に対して $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = a$ を満たす $a^{-1} \in G$ が存在する。a^{-1} を逆元と呼ぶ。

集合 G が上の条件に加え、交換法則（$a \circ b = b \circ a$）を満たすとき、集合 G をアーベル群と呼ぶ。

1.2　対称群

例として 3 個の区別できる数字 1,2,3 を考える。これらの数字の並べ替えは、

$$
\begin{aligned}
&e: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad a_1: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad a_2: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&a_3: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad a_4: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad a_5: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.2.1}
$$

の 6 通りある。これらは 1 行目から 2 行目の数字を並べ替える操作を表している。この並べ替えという操作を元とした集合が群をなしており、この群は対称群と呼ばれれる。特にこの例の場合は 3 つの記号の並び替えなので 3 次対称群と呼ぶ。実際にこれらの操作が群をなしていることの証明をしてみよう。そのためにまず、群表という各操作の総当たり表を以下に示す。

	e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1	a_2	e	a_4	a_5	a_3
a_2	a_2	e	a_1	a_5	a_3	a_4
a_3	a_3	a_5	a_4	e	a_2	a_1
a_4	a_4	a_3	a_5	a_1	e	a_2
a_5	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	e

表 1　3 次対称群の群表

この表から各操作の積は 3 次対称群の元になっていること、逆元の存在、結合法則を満たすことに加え、e と他の操作 a_i の積が全て a_i になっていることから e が単位元であることがわかる。これらのことから 3 つの数字を並べ替える操作が群をなしていることが証明できた。一般に n 個の数字を並べ換える操作の集合は群

をなし、この群を n 次対称群と呼ぶ。

1.3 ユニタリー群

ユニタリ群 $U(n)$ とは $n \times n$ のユニタリ行列 $(UU^\dagger = U^\dagger U = 1)$ の集合である、$n > 1$ の条件を満たすときは非アーベル群である。$U(1)$ は 1×1 のユニタリ行列を含むアーベル群である。ユニタリ群は位相変換 $e^{i\theta}$ とも書ける。このユニタリ行列の集合であるユニタリ群に行列式が 1 になるという条件を課した群を特殊ユニタリ群 $SU(n)$ と呼ぶ。

2 つの群 $G = \{g_1, g_2, \dots\}$,$H = \{h_1, h_2, \dots\}$ を考える。ここで以下の演算を定義する。

$$G \times H = g_k h_l \circ g_m h_n = (g_k g_m)(h_l h_n)$$

$G \times H$ は群をなしており、この演算を群の直積を呼ぶ。素粒子物理学ではよく $SU(n)$ やその直積が使われる。例えばアイソスピン不変性では $SU(2)$、8 重項では $SU(3)$、強い相互作用、電弱相互作用の標準ゲージモデルでは $SU(3) \times SU(2) \times SU(1)$ が使われている。

1.4 不変部分群

群をより小さな群の直積として表せる場合、群の構造を知ることが容易になる。したがって、ある群を他の群の直積として分解可能かどうかを調べたい。そこで役に立つのが不変部分群の導入である。群 G の部分群 N が不変部分群であるとは、$^\forall t \in N$、$^\forall r \in G$ に対して、$rtr^{-1} \in N$ となる場合にいう。群に非自明な不変部分群が含まれていない場合、つまり直積群として書き表せない場合、その群を単純群と呼ぶ。そして、有限個の単純群の直積に分解可能な群を半単純群と呼ぶ。

1.5 群の表現 [1]

群の表現とは群 G から線形空間 V への準同型写像のことである。実数体 $\boldsymbol{R}$ あるいは複素数体 $\boldsymbol{C}$ 上の $n \times n$ の正則行列の集合をそれぞれ $GL(\boldsymbol{R})$、$GL(\boldsymbol{C})$ と書くとする。群 G から $GL(\boldsymbol{R})$ あるいは $GL(\boldsymbol{C})$ への写像 D が

$$D(a)D(b) = D(a \circ b)、\quad {}^\forall a、{}^\forall b \in G$$

を満たすとき、D は群 G の n 行 n 列の表現または行列表現と呼ぶ。上記の性質を満たす写像を準同型写像と呼ぶ。

1.5.1　3 次対称群の行列表現の例

群の表現の例として 2.1 で扱った 3 次対称群の行列表現を見てみよう。(1.2.1) の元を行列に対応させると以下のようになる。

$$D(e):\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad D(a_1):\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\quad D(a_2):\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$D(a_3):\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad D(a_4):\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad D(a_5):\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

これらの行列の積も

$D(e)D(a_i) = D(a_i) = D(e \circ a_i)$、$D(a_{i)}D(a_j) = D(a_i \circ a_j)$

を満たし、3 次対称群の元と 1 対 1 対応している。

1.6　既約表現

群 G の行列表現 $D'(a)$,$D(a)(a \in G)$ と正則行列 M が

$D'(a) = MD(a)M^{-1}$

を満たすとき、2 つの表現は同値であるという。またこの変換を同値変換と呼ぶ。同値変換によって表現行列 $D(a)$ は

$$MD(a)M^{-1} = \begin{pmatrix} D_1(a) & & 0 \\ & D_2(a) & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

のようにブロック対角化された形になる。このとき $D(a)$ を可約表現と呼ぶ。また表現 D は表現 $D_1, D_2, \ldots$ の直和であるといい、以下のように表せられる。

$D_1 \oplus D_2 \oplus \ldots$

ブロックをより小さく分割できないとき表現 D を完全可約と呼び、$D_1(a), D_2(a), \ldots$ を既約表現と呼ぶ。

1.7　線形リー群

n 次の複素正則行列全体は群を成し、これを複素一般線形変換群 $GL(n, C)$ と呼ぶ。この群は線形変換群の中で最も大きい群であり、その部分群として実一般線形変換群 $GL(n, R)$、複素特殊変換群 $SL(n, C)$、一般特殊変換群 $SL(n, R)$、直交群 $O(n)$、特殊ユニタリ群 $SU(n)$、ユニタリ群 $U(n)$ などがあり、これらの線形変換群を線形リー群と呼ぶ。一般的には $GL(n, C)$ の部分群 G で $GL(n, C)$ の中で閉じているものを n 次の線形リー群と呼ぶ。部分群 G が $GL(n, C)$ の中で閉じているとは、G に属する元の列 A_n をとったとき

$\lim_{n\to\infty} A_n = A \in GL(n, C)$ ならば $A \in G$

となることである。

1.8 リー代数

線形リー群 G が与えられたとき、任意の実数 t に対して

$$exp(tX) \in G$$

となる X 全体を G のリー代数と呼ぶ。
リー代数は以下の性質を持つ。

1. X がリー代数に属するならば、任意の実数 a に対し aX もリー代数に属する。
2. X, Y がリー代数に属するならば、$X+Y$ もリー代数に属する。
3. X, Y がリー代数に属するならば、$[X, Y] \equiv XY - YX$ もリー代数に属する。

1.9 SU(2)

SU(2) の群は 3 つのパラメーターで以下のように書き表せる。

$$U(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = exp\{i\epsilon_a \sigma_a\} \tag{1.9.1}$$

ここで σ_a は 2×2 のエルミート行列であり、以下の標準的なパウリ行列を基底とする。

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

生成子を $J_i = \sigma_i/2$ 定義すると以下の交換関係を満たす。

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc} J_c \tag{1.9.3}$$

ここで ϵ_{abc} は $\epsilon_{123} = 1$ を満たす完全反対称のレヴィ-チビタ記号である。これらは SU(2) のリー代数であるので生成子の表現も (1.9.3) の交換関係を満たす。
次に SU(2) の表現について考えていくのだが、まず 3 次元特殊直交群 SO(3) ついて考える。
SO(3) の生成子はちょうど角運動量演算子 J_1, J_2, J_3 になっており、交換関係

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc} J_c \tag{1.9.4}$$

を満たす。(1.9.3) と (1.9.4) を見比べると SO(3) と SU(2) の交換関係は同型になっていることがわかる。ここから SU(2) の既約表現を取得するのに必要である角運動量の固有状態を設定するための方法を説明する。
まずカシミール演算子と呼ばれる演算子

$$J^2 \equiv J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \tag{1.9.5}$$

を定義する。全ての群の生成子とカシミール演算子は以下の交換関係を満たす。

$$[J^2, J_a] = 0, \qquad a = 1, 2, 3. \tag{1.9.6}$$

また上昇演算子、下降演算子と呼ばれる演算子も定義する。

$$J_\pm \equiv J_1 \pm iJ_2 \tag{1.9.7}$$

この演算子を用いてカシミール演算子は

$$J^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_3^2 \tag{1.9.8}$$

と書き表せる。

(1.9.3) から

$$\begin{aligned}
[J_+, J_-] &= [J_1 + iJ_2, J_1 - iJ_2] \\
&= [J_1, J_1] + [J_1, -iJ_2] + [iJ_2, J_1] + [iJ_2, -iJ_2] \\
&= -i[J_1, J_2] + i[J_2, J_1] \\
&= -i^2\epsilon_{123}J_3 + i^2\epsilon_{213}J_3 \\
&= 2J_3
\end{aligned} \tag{1.9.9}$$

$$\begin{aligned}
[J_\pm, J_3] &= [J_1 \pm iJ_2, J_3] \\
&= -[J_3, J_1] - [J_3, \pm iJ_2] \\
&= -i\epsilon_{312}J_2 \mp i^2\epsilon_{321}J_1 \\
&= -iJ_2 \mp J_1 \\
&= \mp J_\pm
\end{aligned} \tag{1.9.10}$$

が導き出せる。

J^2 と J_3 の固有状態の固有値をそれぞれ λ、m として固有値方程式をブラケット記法を用いて

$$\begin{aligned}
J^2 \left|\lambda, m\right\rangle &= \lambda \left|\lambda, m\right\rangle \\
J_3 \left|\lambda, m\right\rangle &= m \left|\lambda, m\right\rangle
\end{aligned} \tag{1.9.11}$$

とする。また $J_\pm$ は J_3 の固有値を 1 上げるか下げる演算子であり、(1.9.6) から $J_\pm$ を作用させると J^2 の固有値は変わらないので

$$J_\pm \left|\lambda, m\right\rangle = C_\pm(\lambda, m) \left|\lambda, m \pm 1\right\rangle \tag{1.9.12}$$

と書ける。ここで $C_\pm(\lambda, m)$ は定数である。(1.9.11) と $J^2 - J_3^2 = J_1^2 + J_2^2 \geq 0$ から λ と m の間に

$$\lambda - m^2 \geq 0 \tag{1.9.13}$$

の条件が課される。j を m の最大の値とすると

$$J_+ \left|\lambda, j\right\rangle = 0 \tag{1.9.14}$$

となる。(1.9.8)(1.9.9)(1.9.13) から

$$\begin{aligned}
J^2 &= J_3 + J_-J_+ + J_3^2 \\
&= J_3(J_3 + 1) + J_-J_+
\end{aligned} \tag{1.9.15}$$

この式の両辺に固有状態を作用させると

$$J^2 \left|\lambda, j\right\rangle = j(j+1) \left|\lambda, j\right\rangle \tag{1.9.16}$$

となり

$$
\begin{aligned}
0 &= J_- J_+ \left|\lambda, j\right\rangle \\
&= (J^2 - J_3^2 - J_3) \left|\lambda, j\right\rangle \\
&= (\lambda - j^2 - j) \left|\lambda, j\right\rangle
\end{aligned} \tag{1.9.17}
$$

$$
\lambda = j(j+1) \tag{1.9.18}
$$

が得られる。同様に j' を m の最小値とすると

$$
J_- \left|\lambda, j'\right\rangle = 0 \tag{1.9.19}
$$

となり、

$$
\lambda = j'(j'-1) \tag{1.9.20}
$$

が得られる。(1.9.18)(1.9.20) から $j(j+1) = j'(j'+1)$ となり、その解として $j' = -j$、$j' = j+1$ があるが、2 つ目の式は j が m の最大の値であるという仮定に違反してしまうので解として

$$
j' = -j \tag{1.9.21}
$$

が選ばれる。また、J_- は m の値を 1 下げる演算子なので $j - j' = 2j$ は整数になる。したがって j は整数は半整数のどちらかになる。

次に (1.9.12) の $C_\pm(\lambda, m)$ を求める。$J_- = J_+^\dagger$ から $\left\langle\lambda, m\right| J_- = C_+^* \left\langle\lambda, m+1\right|$ なので

$$
\left\langle\lambda, m\right| J_- J_+ \left|\lambda, m\right\rangle = |C_+(\lambda, m)|^2 \tag{1.9.22}
$$

が求まる。また (1.9.17) から (1.9.22) の左辺は

$$
\left\langle\lambda, m\right| J_- J_+ \left|\lambda, m\right\rangle = \left\langle\lambda, m\right| (J^2 - J_3^2 - J_3) \left|\lambda, m\right\rangle = j(j+1) - m^2 - m \tag{1.9.23}
$$

となるので

$$
C_+(\lambda, m) = [(j-m)(j+m+1)]^{1/2} \tag{1.9.24}
$$

同様に

$$
C_-(\lambda, m) = [(j+m)(j-m+1)]^{1/2} \tag{1.9.25}
$$

となる。

状態 $\left|j, m\right\rangle$ $(m = j, j-1, \cdots, -j)$ は SU(2) の既約表現の基底になっており、整数か半整数の j により特徴付けられている。表現の次元は $2j+1$ になる。また、表現行列を作るためには

$$
\begin{aligned}
&J_\pm \left|\lambda, m\right\rangle = [(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{1/2} \left|\lambda, m \pm 1\right\rangle \\
&J_3 \left|\lambda, m\right\rangle = m \left|\lambda, m\right\rangle
\end{aligned} \tag{1.9.26}
$$

を用いればよい。

1.9.1　$J=\frac{1}{2}, m=\pm\frac{1}{2}$ のときの例

J_3 の固有値方程式は

$$J_3\,|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\rangle=\pm\frac{1}{2}\,|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\rangle \tag{1.9.27}$$

となり、２つの基底は

$$|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\qquad|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{1.9.28}$$

となる。このとき

$$J_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \tag{1.9.29}$$

となる。また２つの基底に上昇演算子を作用させると $J_+\,|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle=0$ と $J_+\,|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle=|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ となるので

$$J_+=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\qquad J_-=J_+^\dagger=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \tag{1.9.30}$$

したがって

$$J_1=(J_++J_-)/2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\qquad J_2=(J_+-J_-)/2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} \tag{1.9.31}$$

1.9.2　SU(2) の直積表現

ここでは例としてスピン 1/2 の２つの粒子を考える。１つ目の粒子のアップスピン、ダウンスピンの波動関数を r_1、r_2、２つ目の粒子のアップスピン、ダウンスピンの波動関数を s_1、s_2 とすると SU(2) 変換のもとで

$$r'_i=U(\varepsilon)_{ij}r_j,\qquad s'_k=U(\varepsilon)_{kl}s_l \tag{1.9.32}$$

ここで $U(\varepsilon)=exp\{i\varepsilon_aJ_a\}$、$J_a=\sigma_a/2$ なので直積表現は

$$(r'_is'_i)=U(\varepsilon)_{ij}U(\varepsilon)_{kl}(r_js_l)\equiv D(\varepsilon)_{ik,jl}(r_js_l) \tag{1.9.33}$$

となる。$D(\varepsilon)$ は一般的には可約である。これを既約表現に分解するには $\varepsilon_i\ll 1$ とし、$U(\varepsilon)$ をテイラー展開する。

$$\begin{aligned}r'_i&=(1+i\varepsilon_aJ_a)_{ij}r_j\equiv(1+i\varepsilon_aJ_a^{(1)})_{ij}r_j\\ s'_k&=(1+i\varepsilon_aJ_a)_{kl}s_l\equiv(1+i\varepsilon_aJ_a^{(2)})_{kl}s_l\end{aligned} \tag{1.9.34}$$

このとき $J_a^{(1)}$ は r_i のみに作用し、$J_a^{(2)}$ は s_i のみに作用する演算子である。全角運動量を以下のように定義する。

$$J=J^{(1)}+J^{(2)} \tag{1.9.35}$$

より見慣れた表記にするため、α_i を i 番目のアップスピンの波動関数、β_i をダウンスピンの波動関数とする。２つの波動関数には４つの組み合わせがある $\alpha_1\alpha_2,\alpha_1\beta_2,\beta_1\alpha_2,\beta_1\beta_2$。$J_3$ の最大値を持つものを取ると

$$\begin{aligned}&J_3(\alpha_1\alpha_2)=(J_3^{(1)}\alpha_1)\alpha_2+\alpha_1(J_3^{(2)}\alpha_2)\\&=(\alpha_1\alpha_2)\end{aligned} \tag{1.9.36}$$

これは $J_3=1$ の状態である。ここで

$$\begin{aligned} J^2 &= (J^{(1)})^2 + (J^{(2)})^2 + 2J^{(1)}J^{(2)} \\ &= (J^{(1)})^2 + (J^{(2)})^2 + 2J^{(1)}J^{(2)} + 2[\frac{1}{2}(J_+^{(1)}J_-^{(2)} + J_-^{(1)}J_+^{(2)}) + J_3^{(1)}J_3^{(2)}] \end{aligned} \tag{1.9.37}$$

を用いることにより

$$J^2(\alpha_1\alpha_2) = 2(\alpha_1\alpha_2) \tag{1.9.38}$$

となり、$J=1$ が導かれる。

$$|1,1\rangle = (\alpha_1\alpha_2)$$

とする。

$J=1$ の既約表現のうち、他の全ての状態を知りたいので $J_- = J_-^{(1)} + J_-^{(2)}$ を用いる。この下降演算子を $(\alpha_1\alpha_2)$ に作用させると

$$\begin{aligned} &J_-(\alpha_1\alpha_2) = (J_-^{(1)}\alpha_1)\alpha_2 + \alpha_1(J_-^{(2)}\alpha_2) \\ &= (\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2) \end{aligned} \tag{1.9.39}$$

また (1.9.26) から

$$J_-|1,1\rangle = \sqrt{2}\,|1,0\rangle \tag{1.9.40}$$

したがって

$$J_-|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2) \tag{1.9.41}$$

$|1,-1\rangle$ は明らかに

$$|1,-1\rangle = \beta_1\beta_2 \tag{1.9.42}$$

となり、$|0,0\rangle$ の場合は規格化することにより

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2) \tag{1.9.43}$$

となる。

より一般的な直積表現 $|j_1,m_1\rangle \times |j_2,m_2\rangle$ は全角運動量の固有状態 $|J,M\rangle$ に結合され

$$|J,M\rangle = \sum_{m_1,m_2} \langle j_1m_1j_2m_2|JM\rangle\,|j_1,m_1\rangle\,|j_2,m_2\rangle \tag{1.9.44}$$

となる。係数 $\langle j_1m_1j_2m_2|JM\rangle$ はクレプシュ-ゴルダン係数と呼ばれる。

$SU(2)$ の表現やその直積は視覚的に直線で表すことができる。以下の図 1 のように $SU(2)$ の表現を表す。

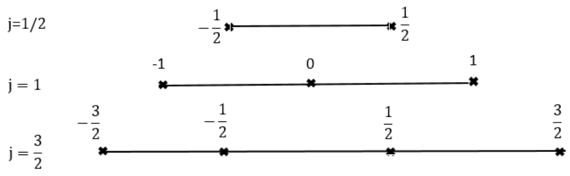

図 1　$SU(2)$ の表現

図 2 は j が 1 / 2 の表現の直積を表している。図 1 の一番上の線分の印にその線分の中心を合わせることで j が 0 と 1 の表現が出てくることが視覚的に理解できる。

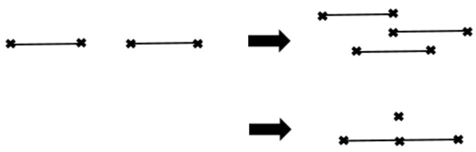

図 2　$SU(2)$ の直積表現

1.10 SU(3)

SU(3) には 8 つのパラメーターが存在しており、群は以下のように書き表せる。

$$U(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_8)=exp\{i\varepsilon_a\lambda_a\} \qquad a=1,\cdots,8. \tag{1.10.1}$$

ここで λ_a は 3×3 のエルミート行列であり以下のゲルマン行列を基底とする。

$$\begin{aligned}
&\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\
&\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} \quad \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix}\\
&\lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \quad \lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix} \quad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.10.2}$$

これらの行列は交換関係

$$\Big[\frac{\lambda_a}{2},\frac{\lambda_b}{2}\Big]=if_{abc}\frac{\lambda_c}{2} \tag{1.10.3}$$

を満たしている。f_{abc} は構造定数。これからの計算を簡単にするため $\lambda_a/2=F_a$ とする。よって (1.10.3) は

$$\Big[F_a,F_b\Big]=if_{abc}F_c \tag{1.10.4}$$

となる。次に上記の構造定数を全て求めたいのだが、かなりの量の組み合わせがあるので計算が大変であるので以下の行列の規格直交化を導入することで計算を簡単にする。

$$tr(F_aF_b)=\delta_{ab}/2 \tag{1.10.5}$$

(1.10.4) 式の両辺の右から λ_c をかけて (1.10.5) の式を代入すると

$$\begin{aligned}
tr(\Big[F_a,F_b\Big]F_c)&=if_{abc}tr(F_cF_c)\\
&=if_{abc}/2
\end{aligned} \tag{1.10.6}$$

となる。また

$$\begin{aligned}
tr(\Big[F_a,F_b\Big]F_c)&=tr(F_aF_bF_c-F_bF_aF_c)\\
&=tr(\Big[F_b,F_c\Big]F_a)\\
&=if_{bca}/2\\
&=-if_{cba}/2
\end{aligned} \tag{1.10.7}$$

となるので

$$f_{abc} = -f_{cba} \tag{1.10.8}$$

が導ける。したがって、(1.10.5) を導入することにより構造定数の 1 番目と 3 番目の添字の入れ替えで符号が反転することがわかった。また構造定数の 1 番目と 2 番目の添字を入れ替えると符号が反転する。よって 3 つの添字のどれか 2 つを入れ替えると符号が反転することになり、f_{abc} は完全反対称であることがわかった。これらのことから構造定数を解くと

$$\begin{aligned} &f_{123} = 1, \quad f_{147} = \frac{1}{2}, \quad f_{156} = -\frac{1}{2}, \\ &f_{246} = \frac{1}{2}, \quad f_{257} = \frac{1}{2}, \quad f_{345} = \frac{1}{2}, \\ &f_{367} = -\frac{1}{2}, \quad f_{458} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned} \tag{1.10.9}$$

となる。

1.10.1　ルート図とウェイト図

$SU(2)$ の時と同様の方法で $SU(3)$ の既約表現を視覚的に表す方法を説明する。

λ_3 と λ_8 は (1.10.2) より対角行列なので 2 つの行列の交換関係は

$$[\lambda_3, \lambda_8] = 0 \tag{1.10.10}$$

となり、2 つの生成子は可換であることがわかる。(1.9.11) と同様に λ_3 と λ_8 の固有値を t_3 と y とする。生成子の中で可換なものの集まりをカルタン部分代数と呼び、その固有値をウェイト、可換な生成子の数をその群の階級と呼ぶ。$SU(3)$ の場合カルタン部分代数は λ_3 と λ_8、ウェイトは t_3 と y、階級は 2 となる。

次にウェイトを上げ下げする昇降演算子を以下に定義する。

$$T_\pm = F_1 \pm iF_2, \quad U_\pm = F_6 \pm iF_7, \quad V_\pm = F_4 \pm iF_5 \tag{1.10.11}$$

(1.10.4) から以下の交換関係が導ける。

$$\begin{aligned} &[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm && [Y, T_\pm] = 0 \\ &[T_3, U_\pm] = \mp 1/2 U_\pm && [Y, U_\pm] = \pm U_\pm \\ &[T_3, V_\pm] = \pm 1/2 V_\pm && [Y, V_\pm] = \pm V_\pm \end{aligned} \tag{1.10.12}$$

ここで

$$T_3 = F_3, \quad Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8$$

t_3-y 平面で (1.10.11) がどのような動きをするか見る。T_+ は t_3 を 1 上げ、U_+ は t_3 を 1 / 2 下げ y を 1 上げ、V_+ は t_3 を 1 / 2 上げ y を 1 あげている。これらを t_3-y 平面上で表すと

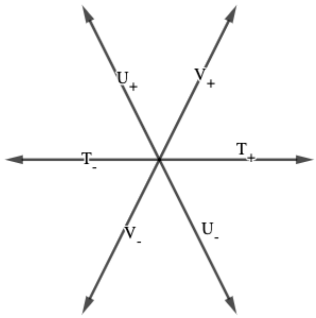

図 3　$SU(3)$ のルート図

となる。このような固有値の変化をベクトルとして図示したものをルート図と呼ぶ。6 つのベクトルの中でも右を向いているものを正ルート、左を向いているものを負ルートと呼び、正ルートの中でも他の 2 つのベクトルに正係数をかけたものの線型結合で表せないベクトルを単純ルートと呼ぶ。図 3 のベクトルの中で単純ルートは V_+ と U_- である。

(1.10.2) から λ_3 の固有値は-1/2、0、1/2、λ_8 の固有値は $1/2\sqrt{3}$、$1/2\sqrt{3}$、$-1/\sqrt{3}$ である。λ_3、λ_8 の固有ベクトルを

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする。固有ベクトルを $|t_3, y\rangle$ とすると

$$|1, \frac{1}{2\sqrt{3}}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-1, \frac{1}{2\sqrt{3}}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.10.13}$$

と表せる。このベクトルを t_3-y 平面上に図示すると

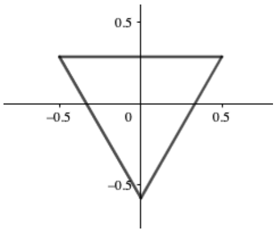

図 4　3 表現のウェイト図

となる。このような図をウェイト図と呼ぶ。図 4 の三角形を上下逆転させた以下の図は 3^* 表現と呼ばれる。

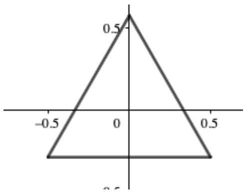

図 5　3^* 表現のウェイト図

また、ウェイト図を使い図 2 のように視覚的に直積表現を理解することができる。

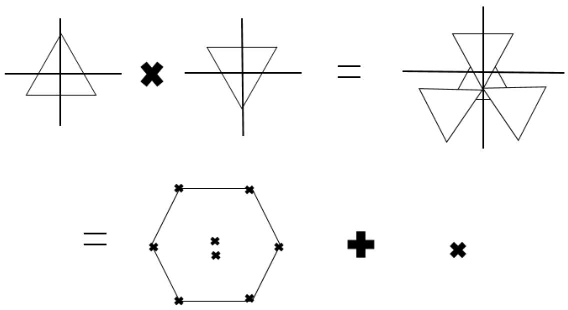

図 6　$3 \times 3^* = 8 + 1$

2　ゲージ理論

2.1　場の古典論のゲージ不変性

場の理論では場 $\phi_i(x)$ と場のグラジアント $\partial_\mu\phi_i(x)$ を関数に持つラグランジアン密度 $\mathscr{L}$ を基本的な対象とする。ラグランジアン L はラグランジアン密度 $\mathscr{L}$ を空間積分したものであり、L を全時間で積分したものを作用 S と呼ぶ。

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} L(t)dt = \int d^4x \mathscr{L}(\phi_i(x), \partial_\mu\phi_i(x))$$

運動方程式は変分原理から導かれる。作用が極値を取る条件は

$$\delta S = \delta \int d^4x \mathscr{L}(\phi_i(x), \partial_\mu\phi_i(x)) = 0 \tag{2.1.1}$$

であり、実際に変分を計算すると

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \mathscr{L}(\phi_i + \delta\phi_i, \partial_\mu\phi_i + \delta\partial_\mu\phi_i) - \int d^4x \mathscr{L}(\phi_i(x), \partial_\mu\phi_i(x)) \\
&= \int d^4x \Big[\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\phi_i}\delta\phi_i + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_i}\delta(\partial_\mu\phi_i)\Big] \\
&= \int d^4x \Big[\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\phi_i}\delta\phi_i + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_i}\partial_\mu(\delta\phi_i)\Big] \\
&= \int d^4x \Big[\Big(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\phi_i} - \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_i}\Big)\Big)\delta\phi_i + \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_i}\delta\phi_i\Big)\Big]
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

となる。ここで最後の行の第 3 項目は表面項と呼ばれる項である。境界条件から場は無限遠で 0 になるので表面項は 0 になる。(2.1.2) で計算した式に (2.1.1) の条件を課すことでオイラーラグランジュ方程式が導かれる。

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\phi_i} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta(\partial\phi_i(x)/\partial x^\mu)}$$

ラグランジアンのあらゆる連続対称性に保存則が対応するという考え方を元にしてゲージ変換という考えが生まれた。例えば、$\mathscr{L}$ が陽に時間に依存していないと仮定する。つまり、$\mathscr{L}$ は形式的に x^0 を含まないとする。そのとき無限小の時間並進において場 ϕ_i は以下のように変換する。

$$\delta\phi_i(x^0, x) = \delta\phi_i(x^0 + \epsilon, x) - \phi_i(x) = \epsilon\partial\phi_i/\partial x^0 \qquad \text{または} \qquad \delta(\partial_\mu\phi_i) = \epsilon\partial_\mu[\partial\phi_i/\partial x^0]$$

ラグランジアン密度も同様にして $\delta\mathscr{L} = \epsilon\partial\mathscr{L}/\partial x^0$:

$$\epsilon\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^0} = \sum_i \Big[\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\phi_i}\delta\phi_i + \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)}\delta(\partial_\mu\phi_i)\Big]$$

最初の項に運動方程式を使うと以下の式が得られる。

$$\epsilon\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^0} = \epsilon\sum_i \Big[\partial_\mu\Big(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)}\Big)\frac{\partial\phi_i}{\partial x^0} + \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)}\partial_\mu\Big(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_0}\Big)\Big]$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^0} = \partial_\mu \sum_i \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} \frac{\partial \phi_i}{\partial x^0}$$

これらの式は以下のように書き直せる。

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\Big[\mathscr{L} - \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta(\partial \phi_i/\partial x^0)} \frac{\partial \phi_i}{\partial x^0}\Big] = \nabla \cdot \sum_i \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta(\nabla \phi_i)} \frac{\partial \phi_i}{\partial x^0}$$

左辺の括弧の中の式はハミルトニアン密度 $\mathscr{H}(x)$ と呼ぶ。場は大きな $|x|$ において十分早く消える必要があるので

$$\partial H/\partial t = \int d^3x \nabla \cdot \Big(\sum \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta \nabla \phi_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial x^0}\Big) = \oint d\boldsymbol{S} \cdot \Big(\sum \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta \nabla \phi_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial x^0}\Big) = 0$$

ここで $H = \int \mathrm{d}^3x \mathscr{H}(x)$ はハミルトニアンである。このような計算を続けるとローレンツ不変な理論で、エネルギー、運動量、角運動量が定義でき保存されることが簡単にわかる。運動方程式が共変になるため、$\mathscr{L}$ はローレンツスカラー密度にならなければいけない。これは相対論的な場の理論で H の代わりに $\mathscr{L}$ を用いる理由である。

保存された量子数ごとに不変性を残す場の変換を構築することができる。もっとも簡単な例は電荷であり、それぞれの場に電荷 q_i があるとする。ここで場に群の変換

$$\phi_i(x) \to exp\{-iq_i\theta\}\phi_i(x) \tag{2.1.3}$$

を定義する。この群は 1 次のユニタリー変換 $U(1)$ であり、この変換で $\mathscr{L}$ が不変性であることを証明することは難しくない。$\mathscr{L}$ の全ての項は場 $\phi_1 \ldots \phi_n$ の積になっており、全ての場に対して (2.1.3) の変換を施すと

$$\phi_1(x) \ldots \phi_n(x) \to exp\{-i(q_1 + q_2 + \ldots q_n)\theta\}\phi_1(x) \ldots \phi_n(x)$$

電荷保存は $\mathscr{L}$ が中性であることを必要としているので、電荷の和 $q_1 + q_2 + \ldots q_n$ は消えなければいけない。$\mathscr{L}$ のある項は場だけでなく場のグラジアントを含むが, θ は x とは独立しているので $\partial_\mu \phi_i \to exp(-iq_i\theta)\partial_\mu \phi_i$ も同様に不変である。(2.1.3) のような変換をゲージ変換と呼ぶ。より適切には第 1 種のゲージ変換と呼ぶ。ゲージ群での $\mathscr{L}$ の不変性は第 1 種のゲージ不変性または大域的ゲージ不変性と呼ぶ。

(2.1.3) の無限小の形は

$$\delta \phi_i = -i\epsilon q_i \phi_i$$

ここで、ϵ は無限小のパラメーターである。大域的ゲージ不変性は以下の式で記述される。

$$\delta \mathscr{L} = 0 \tag{2.1.4}$$

もし $\mathscr{L}$ が ϕ_i と $\partial_\mu \phi_i$ のみに依存しているなら、(2.1.4) は以下のように展開される。

$$0 = \delta \mathscr{L} = \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta \phi_i}\delta \phi_i + \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)}\delta(\partial_\mu \phi_i) = -i\epsilon \frac{\partial}{\partial x_\mu}\Big[\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} q_i \phi_i\Big]$$

したがって、ラグランジュ不変量を残す操作には、以下の式で表される保存カレントが存在する。

$$\partial J^\mu(x;q)/\partial x^\mu = 0 \qquad J^\mu = i\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} q_i \phi_i$$

ゲージ群は無限小の生成子を有している。q_i は Q の固有値である。そして $exp(-iq_i\theta)$ は Q によって生成された $U(1)$ 変換の 1 次元表現の 1 つである。量子化された理論では演算子 Q

$$Q = \int \mathrm{d}^3 J_0(x,t)$$

は電荷演算子で

$$\delta\phi_i = -i\epsilon[Q,\phi_i] = -i\epsilon q_i \phi_i$$

となる。この理論では 1 つ以上の保存量を含んでいる可能性があり、$U(1)$ より複雑な変換群のもとで不変である。

次に非可換な場合について考える。もっとも簡単な非可換な例はアイソスピンである。アイソスピン対称性を伴う理論では、場はアイソスピン群 $SU(2)$ の表現の基礎を形作る多重項になる。ここでゲージ変換を定義する。

$$\phi \to exp(-i\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\theta})\phi$$

ここで $\boldsymbol{\theta}$ は列ベクトルで $\mathbf{L}$ は $SU(2)$ の行列表現である。たとえば 2 重項では $\mathbf{L} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}$($\boldsymbol{\tau}$ はパウリ行列)。3 重項では

$$L^i_{jk} = -i\epsilon^{ijk}$$

群の生成子 T_i は

$$[T_i, T_j] = i\epsilon^{ijk} T_k$$

を満たすので、表現行列は同様のルール $[L_i, L_j] = i\epsilon^{ijk} L_k$ を満たす。ラグランジアン $\mathscr{L}$ は群の任意の変換で不変量になる。無限小変換で

$$\delta\phi = -i\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\epsilon}\phi$$

ここで $\boldsymbol{\epsilon}$ は 3 つの独立した無限小のパラメーターとして考える。したがって、もし ϕ が 2 つに構成されたアイソスピノルなら

$$\delta\phi = -\frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\epsilon}\phi$$

であり、ϕ_i がアイソベクトルで構成されているのなら

$$\delta\phi_i = \epsilon^{ijk}\epsilon^j\phi_k$$

となる。アイソスピンの不変性は全ての ϵ^j において $\delta\mathscr{L} = 0$ を必要とする。この考えは任意の内部対称性をもつリー群 G に簡単に一般化される。T_i を群の生成子、c_{ijk} を構造定数とする。

$$[T_i, T_j] = ic_{ijk} T_k$$

場 ϕ_i はある G の表現として変換する。T_i は行列 L_i にとってかわる。有限ゲージ変換は

$$\phi \to exp(-i\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\theta})\phi$$

対応する無限小は

$$\delta\phi = -i\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\epsilon}\phi$$

独立したパラメーター θ^j の数は群の次元になる。ラグラジアン密度 $\mathscr{L}$ はこの群のもとで不変量となる。$\delta\mathscr{L} = 0$

2.1.1 電磁気学におけるゲージ理論

電磁気学が第 1 種のゲージ変換より形式的な対称性を持っていることはよく知られている。このゲージ変換は場の引数である時空に依存しているので以下のように表せる。

$$\phi_i(x) \to {\phi_i}' = exp\{-iq_i\theta(x)\}\phi_i(x) \tag{2.1.5}$$

上の式は第 2 種のゲージ変換、または局所的ゲージ変換と呼ばれている。(2.1.5) の無限小の形は

$$\delta\phi_i = -iq_i\theta(x)\phi_i(x)$$

ここで $\theta(x)$ は x の任意の無限小の関数である。場にのみ依存するラグランジアンの項は (2.1.5) の変換で明らかに不変である。運動エネルギー項のような場のグラジアントを含む項は注意が必要であり、その理由は (2.1.5) の式から

$$\partial_\mu\phi_i(x) \to exp\{-iq_i\theta(x)\}\partial_\mu\phi_i(x) - iq_i[\partial_\mu\theta(x)]exp\{-iq_i\theta(x)\}\phi_i(x) \tag{2.1.6}$$

という変換が導かれ、第 2 項のように ϕ_i や $\partial_\mu\phi_i$ とは違う変換を持つ項が現れてしまうからである。

電磁気学は最小結合と呼ばれる以下の規則に従って光子場を導入することにより不変になる。：荷電場のグラジアント $\partial_\mu\phi_i$ は組み合わせ $(\partial_\mu - ieq_iA_\mu)\phi_i$ のなかで光子場 A_μ に関連してのみ $\mathscr{L}$ に現れる。組み合わせ $(\partial_\mu - ieq_iA_\mu)\phi_i$ が以下のように変換するなら $\mathscr{L}$ は局所ゲージ変換のもとで不変となる。

$$(\partial_\mu - ieq_iA'_\mu){\phi_i}'(x) = exp\{-iq_i\theta(x)\}(\partial_\mu - ieq_iA_i)\phi_i \tag{2.1.7}$$

(2.1.5),(2.1.6) 式を用いて (2.1.7) を展開すると

$$\begin{aligned}&exp\{-iq_i\theta(x)\}\partial_\mu\phi_i(x) - iq_i(\partial_\mu\theta(x))exp\{-iq_i\theta(x)\}\phi_i(x) - ieq_iA'_\mu(x)exp\{-iq_i\theta(x)\}\phi_i \\ &= exp\{-iq_i\theta(x)\}\partial_\mu\phi_i(x) - ieq_iA_\mu(x)exp\{-iq_i\theta(x)\}\phi_i\end{aligned}$$

となり、この式を満たす A'_μ は

$$A'_\mu = -\frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) + A_\mu(x) \tag{2.1.8}$$

となることがわかる。光子場と荷電粒子場が結合する項に加えて、A_μ 自身にのみ結合する運動エネルギーおよび質量項が存在すると考えられる。ここで電磁場の強さ $F_{\mu\nu}$ を定義する。

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.1.9}$$

$F_{\mu\nu}$ は共変微分の交換関係から導出される。

$$[D_\mu, D_\nu] = ieQF_{\mu\nu}(x)$$

このとき、(2.1.8) のもとで (2.1.9) は、

$$\begin{aligned}&\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \to \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{e}(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\theta(x) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\end{aligned}$$

と計算できるので、$\delta F_{\mu\nu}=0$ となり、$F_{\mu\nu}$ は (2.1.8) のもとでゲージ不変性を有する。そして光子の運動エネルギー項が $F_{\mu\nu}$ から構築される場合、運動エネルギー項は

$$\mathscr{L}_{EM}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

と表せ、ゲージ不変になる。右辺の係数は変分原理からマクスウェル方程式を導出できるよう選んだ。

光子の質量項は実際に $-\frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu$ となるが、(2.1.8) のもとで質量項は

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu\to-\frac{1}{2}m^2A'_\mu A'^\mu\\&=-\frac{1}{2}m^2\Big(A_\mu-\frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x)\Big)\Big(A^\mu-\frac{1}{e}\partial^\mu\theta(x)\Big)\end{aligned}$$

となり、これは明らかに局所ゲージ不変性を満たさない。つまり、局所ゲージ不変性を持つには光子の質量が 0 でなければいけない。

2.1.2　ヤン・ミルズ理論

アイソスピン $SU(2)$ の場合におけるゲージ不変性の非可換群への一般化は、ヤンとミルによって最初に研究された。アイソスピンは陽子と中性子を 2 次元空間のベクトルとする。

$$N(x)=\begin{pmatrix}p(x)\\n(x)\end{pmatrix}$$

ここで $N(x)$ は核子場と呼ばれるベクトルである。

群に以下の式を満たす生成子 T_i を持たせる。

$$[T_i,T_j]=ic_{ijk}T_k$$

各場は以下の変換に従うとする。

$$N(x)\to N'(x)=exp\{-i\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\theta}\}N(x)\equiv U(\theta)N(x)\tag{2.1.10}$$

ここで L^j は群の生成子の行列表現である。ラグランジアン密度 $\mathscr{L}$ は θ^j が定数の場合は上の変換のもとで不変であるが、問題は電磁気学の A_μ のようにベクトル場 $A^j(x)$ を導入することにより局所ゲージ変換において不変になる理論を構築することである。

局所ゲージ変換において場と場のグラジアントは以下のように変換される。

$$N(x)\to U(\theta)N(x)\tag{2.1.11}$$

$$\partial_\mu N(x)\to U(\theta)\partial_\mu N(x)+(\partial_\mu U(\theta))N(x)\tag{2.1.12}$$

(2.1.12) の変換の 2 項目は局所ゲージ不変性を示さないので、(2.1.11) と同様な変換をする共変微分 $D_\mu N(x)$ を導入し、局所ゲージ不変性を持つようにする。

$$D_\mu N(x)\to U(\theta)D_\mu N(x)\tag{2.1.13}$$

共変微分はリー代数の各次元においてヤン・ミルズ場と呼ばれるベクトル場 $A^j_\mu(x)$ を導入することにより構築され、以下のように定義される。

$$D_\mu N(x)=(\partial_\mu-ig\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L}_\mu(x))N(x)\tag{2.1.14}$$

ここで電磁気学における e の類推としての結合定数 g は任意定数であり、ゲージ結合定数と呼ばれる。この置き換えによりラグランジアン密度 $\mathscr{L}_1(N(x),\partial_\mu N(x))$ が $\mathscr{L}_1(N(x),(\partial_\mu - ig\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L}_\mu)N(x))$ と変換され、核子場とヤン・ミルズ場の相互作用の形が決まる。

A^j_μ が (2.1.13) の変換を満たすには、A'^j_μ を以下の等式を満たすように定義する。

$$\begin{aligned} D'_\mu N' &= \partial_\mu N' - igA'^j_\mu L^j N' = (\partial_\mu U(\theta))N + U(\theta)\partial_\mu N - ig\boldsymbol{A}'_\mu\cdot\boldsymbol{L}U(\theta)N \\ &= U(\theta)(\partial_\mu - ig\boldsymbol{A}'_\mu\cdot\boldsymbol{L}U(\theta))N \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

(2.1.15) 式を $\boldsymbol{A}'_\mu\cdot\boldsymbol{L}$ について解く。式を整理すると、

$$-ig\boldsymbol{A}'_\mu\cdot\boldsymbol{L}U(\theta)N = -igU(\theta)\boldsymbol{A}'_\mu\cdot\boldsymbol{L}\phi - (\partial_\mu U(\theta))N$$

両辺の左から $(-ig/N)U^{-1}(\theta)$ をかけると

$$\boldsymbol{A}'_\mu\cdot\boldsymbol{L} = U(\theta)[\boldsymbol{A}_\mu\cdot\boldsymbol{L} - \frac{i}{g}U^{-1}(\theta)\partial_\mu U(\theta)]U^{-1}(\theta) \tag{2.1.16}$$

となり、$\boldsymbol{A}'_\mu\cdot\boldsymbol{L}$ が導出できた。

もし

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{A}'_\mu = U(\theta)[\boldsymbol{A}_\mu\cdot\boldsymbol{L} - \frac{i}{g}U^{-1}(\theta)\partial_\mu U(\theta)]U^{-1}(\theta)$$

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{A}''_\mu = U(\theta')[\boldsymbol{A}'_\mu\cdot\boldsymbol{L} - \frac{i}{g}U^{-1}(\theta')\partial_\mu U(\theta')]U^{-1}(\theta')$$

であるなら

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{A}''_\mu = U(\theta'')[\boldsymbol{A}_\mu\cdot\boldsymbol{L} - \frac{i}{g}U^{-1}(\theta'')\partial_\mu U(\theta'')]U^{-1}(\theta'') \tag{2.1.17}$$

ここで $U(\theta'')$ は

$$U(\theta'') = U(\theta')U(\theta)$$

である。

この変換規則は表現に依存しているように見えるが、実際には表現に依存しない交換子 $[L^i,L^j]$ のみに依存している。このことは (2.1.16) 式の無限小変換から明らかになる。

$$\begin{aligned} L^j\delta A^j_\mu &= -\frac{1}{g}L^j\partial_\mu\theta^j + iL^iA^i_\mu\theta^jL^j - i\theta^jL^jA^i_\mu L^i \\ &= -\frac{1}{g}L^j\partial_\mu\theta^j + i\theta^jA^i_\mu[L^i,L^j] \\ &= -\frac{1}{g}L^j\partial_\mu\theta^j + \theta^jA^i_\mu c_{ijk}L^k \end{aligned}$$

L^j は線形独立なので上の式は

$$\delta A^i_\mu = -\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^i + c_{ijk}\theta^jA^k_\mu \tag{2.1.18}$$

となる。したがって、A^i_μ の変換は表現 L^j に依存していない。

共変微分の交換関係

$$
\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu] &= [\partial_\mu + igA^i_\mu L^i, \partial_\nu + igA^j_\nu L^j] \\
&= [\partial_\mu, \partial_\nu] + ig[A^i_\mu L^i, \partial_\nu] + ig[\partial_\mu, A^j_\nu L^j] + (ig)^2[A^i_\mu L^i, A^j_\nu L^j] \\
&= ig((\partial_\mu A^i_\nu L^i - \partial_\nu A^i_\mu L^i) + ig[A^i_\mu L^i, A^j_\nu L^j]) \\
&= ig((\partial_\mu A^i_\nu L^i - \partial_\nu A^i_\mu L^i) - gc_{ijk}A^i_\mu A^j_\nu L^k]) \\
&= ig((\partial_\mu A^i_\nu L^i - \partial_\nu A^i_\mu L^i) - gc_{ijk}A^j_\mu A^k_\nu L^i) \\
&= ig((\partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu) - gc_{ijk}A^j_\mu A^k_\nu)L^i \\
&= igF^i_{\mu\nu}L^i
\end{aligned}
$$

からヤン・ミルズ場の強さは

$$
F^i_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu - gc_{ijk}A^j_\mu A^k_\nu \tag{2.1.19}
$$

と定義される。(2.1.16) から $F^i_{\mu\nu}(x)$ の変換は

$$
F^i_{\mu\nu}L^i \to F'^i_{\mu\nu}L^i = U(x)F^i_{\mu\nu}L^iU^{-1}(x)
$$

となる。しかしこの変換の微小変換を計算すると

$$
F'^i_{\mu\nu}L^i = U(x)F^i_{\mu\nu}L^iU^{-1}(x) \simeq (1 + i\theta^jL^j)F^i_{\mu\nu}L^i(1 + i\theta^jL^j) = F^i_{\mu\nu}L^i + [i\theta^jL^j, F^i_{\mu\nu}L^i]
$$

となり、変換に対して不変にならない。そこで $F^i_{\mu\nu}L^i$ にトレースを使う。トレースは

$$
tr[FU^{-1}ULU^{-1}U] = tr[FL]
$$

となるので

$$
F \to F' = UFU^{-1}
$$

の変換に対して不変になる。これらのトレースの性質から

$$
tr[F^i_{\mu\nu}L^iF^{j\mu\nu}L^j] = F^i_{\mu\nu}F^{j\mu\nu}tr[L^iL^j] = F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}
$$

光子場と同様にヤン・ミルズ場の運動項は

$$
\mathscr{L}_0 = -\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu} \tag{2.1.20}
$$

となる。

質量項は $\frac{1}{2}m^2A_\mu A^\nu$ となり、局所ゲージ変換に対して不変にならないので 0 とする。

これまで計算したことからラグランジアン密度は

$$
\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1(N(x), (\partial_\mu - ig\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L}_\mu)N(x))
$$

となる。第 1 項は

$$
\mathscr{L}_0 = -\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}
$$

ここで $F^i_{\mu\nu}$ は

$$F^i_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu - g c_{ijk} A^j_\mu A^k_\nu$$

である。またゲージボソンの変換は以下の式に従う。

$$\boldsymbol{A}'_\mu \cdot \boldsymbol{L} = U(\theta)[\boldsymbol{A}_\mu \cdot \boldsymbol{L} - \frac{i}{g} U^{-1}(\theta) \partial_\mu U(\theta)] U^{-1}(\theta)$$

2.2 自発的対称性の破れ

ある系のラグランジアンが持っていた対称性が自然に破られる場合がある。その現象を自発的対称性の破れと呼ぶ。この章では自発的対称性の破れや、それに伴って現れる質量が 0 の南部・ゴールドストーン粒子について説明する。

場が 1 つだけのスカラー場のラグランジアン密度は

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi) - \frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 - \frac{1}{4}\lambda \phi^4 \tag{2.2.1}$$

とかける。ここで簡単のため 1 次元のラグランジアン L を扱う。このときラグランジアンは

$$\begin{aligned} L &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathscr{L}(x,t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \phi}{\partial t}\Big)^2 - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \phi}{\partial x}\Big)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4\Big] \end{aligned}$$

とかける。x を正準座標として $\phi(x,t)$ を考える。空間を長さ $\epsilon(= x_i - x_{i-1})$ の単位に分割する。また、ラグランジアンの積分を離散的な和に置き換える。このとき座標は $q_i = \phi(x_i, t)$ であり、ラグランジアン L は

$$L = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}x}\Big)^2 - \frac{1}{2\epsilon^2}(q_i - q_{i-1})^2 - \frac{1}{2}\mu^2 q_i^2 - \frac{1}{4}\lambda q_i^4\Big]$$

となる。第 2 項目は隣接した点の結合を表し、最後の項は非調和ポテンシャルを表している。正準運動量を $p_i = \mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t$ とし、

$$V(z) = \frac{1}{2}\mu^2 z^2 + \frac{1}{4}\lambda z^4 \tag{2.2.2}$$

と定義すると、ハミルトニアンは

$$H = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Big[\frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2\epsilon^2}(q_i - q_{i-1})^2 + V(q_i)\Big]$$

となる。

場が振動するための条件 $\lambda \geq 0$ を課す。基底状態からのズレを知りたいので、ポテンシャル

$$\sum_i \Big[\frac{1}{2\epsilon^2}(q_i - q_{i-1})^2 + V(q_i)\Big]$$

の最小値を求める。ポテンシャルの最小値では $q_i - q_{i-1}$ で、全ての q_i が等しくならなければいけない。したがってポテンシャルは V の形だけを考えればよい。μ^2 の正負でポテンシャルの形は異なり、それぞれの場合で以下の図のようになる。

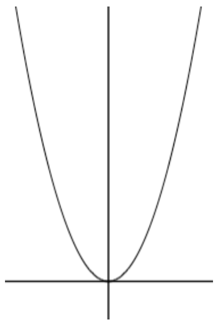

図 7　$\mu^2 > 0$ でのポテンシャル関数

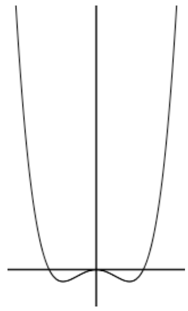

図 8　$\mu^2 < 0$ でのポテンシャル関数

図 8 はその形からワインボトル型やメキシカンハット型と呼ばれる。

$\mu^2 > 0$ でのポテンシャルの最小値は $q_i = 0$ で 0 になる。一方、$\mu^2 < 0$ でのポテンシャルの最小値は $q = \pm[-\mu^2/\lambda]^{1/2}$ で 2 つ持つ。

場の理論では基底状態を真空期待値としている。$\mu^2 < 0$ でポテンシャルの最小値から新たに真空を定義する。$\mu^2 < 0$ のときの場の真空期待値を v とすると

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \langle\phi\rangle_0 = v = \pm[-\mu^2/\lambda]^{1/2} \tag{2.2.3}$$

となり、2 つの真空期待値を持つことがわかる。このとき v は正負のどちらかの値を選択できるが、ここでは正の値を選択する。縮退している真空の中から 1 点を選んだことにより $v \neq -v$ となり対称性がなくなる。このように元々持っていた対称性がなくなることを自発的対称性の破れと呼ぶ。

ポテンシャルの最小値付近でのふるまいを見るため、以下の条件を満たす ϕ' を定義する。

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi - \langle\phi\rangle = \phi - v \\ \langle\phi'\rangle_0 &= 0 \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

(2.2.4) を (2.2.1) に代入するとラグランジアン密度が

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \frac{1}{2}(\partial^\mu(\phi'+v)\partial_\mu(\phi'+v)) - \frac{1}{2}\mu^2(\phi'+v)^2 - \frac{1}{4}\lambda(\phi'+v)^4 \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi'\partial_\mu\phi') - \frac{1}{2}\mu^2(\phi'^2+v^2+2\phi'v) - \frac{1}{4}\lambda(\phi'^4+v^4+6v^2\phi'^2+4v^3\phi'+4\phi'^3v) \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi'\partial_\mu\phi') - \frac{1}{2}\mu^2(\phi'^2+2\phi'v) - \frac{1}{4}\lambda(\phi'^4+6v^2\phi'^2+4v^3\phi'+4\phi'^3v) \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi'\partial_\mu\phi') - \frac{1}{2}\mu^2\phi'^2 - \mu^2[-\mu^2/\lambda]^{1/2}\phi' - \frac{1}{4}\lambda\phi'^4 + \frac{3}{2}\mu^2\phi'^2 + \mu^2[-\mu^2/\lambda]^{1/2}\phi' - \lambda v\phi'^3 \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi'\partial_\mu\phi') - \mu^2\phi'^2 - \lambda v\phi'^3 - \frac{1}{4}\lambda\phi'^4 \end{aligned}$$

となる。計算の途中で v のみの項は除いてある。最後の行から、ϕ'^3 以上の項は相互作用を表す項、ϕ'^2 の項は質量項になっていてスカラー場 ϕ' が $-\mu^2$ の質量を持つことがわかる。加えて、$\phi' \to -\phi'$ の変換に対して対称性がなくなっていることもわかる。これは元々持っていた対称性がなくなったことを意味しているので自発的対称性の破れが起こったといえる。

今度は 2 つの場 (σ, π) が存在する少し複雑なモデルを考える。このときのラグランジアン密度は

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}[\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \partial_\mu\pi\partial^\mu\pi] - V(\sigma^2+\pi^2) \tag{2.2.5}$$

ここで

$$V = \frac{1}{2}\mu^2(\sigma^2+\pi^2) + \frac{1}{4}\lambda^2(\sigma^2+\pi^2)^2 \tag{2.2.6}$$

$\mathscr{L}$ は V が $\sigma^2+\pi^2$ の関数であることから、$O(2)(=U(1))$ 変換

$$\begin{pmatrix}\sigma' \\ \pi'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma \\ \pi\end{pmatrix}$$

のもとで不変である。

このとき、ポテンシャルエネルギーは

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma} = 0 = \sigma[\mu^2 + \lambda(\sigma^2+\pi^2)] \qquad \frac{\partial v}{\partial \pi} = 0 = \pi[\mu^2 + \lambda(\sigma^2+\pi^2)] \tag{2.2.7}$$

のとき最小値をとる。したがって、最小値の絶対値は円 $\sqrt{\sigma^2+\pi^2} = [-\mu^2/\lambda]^{1/2}$ 上にとる。ここでは $\sigma-\pi$ 平面内の

$$\langle\sigma\rangle_0 = [-\mu^2/\lambda]^{1/2}, \langle\pi\rangle_0 = 0$$

に軸を固定する。次に σ のズレを

$$s = \sigma - \langle\sigma\rangle_0$$

と定義し、ラグランジアン密度を s、π を用いて表すと

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}[\partial_\mu s \partial^\mu s + \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi] + \mu^2 s^2 - \lambda \langle\sigma\rangle_0 s(s^2+\pi^2) - \frac{1}{4}\lambda(s^2+\pi^2)^2 \tag{2.2.8}$$

となる。(2.2.8) 式を見ると、s が $-2\mu^2$ の質量を持つ粒子の場であり、場 π は質量項を持っていない。このように連続的な対称性が自発的に破れているときに生じる質量がゼロの粒子を南部・ゴールドストーン粒子と呼ぶ。

次に理論をより一般的にするために場 ϕ を n 成分の実数場とする。このときのラグランジアン密度は

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi^i \partial_\mu \phi^i) - \frac{1}{2}\mu^2\phi^i\phi^i - \frac{1}{4}\lambda(\phi^i\phi^i)^2 \tag{2.2.9}$$

であり、$\mu^2<0$ のときに $v=[-\mu^2/\lambda]^{1/2}$ で円上にポテンシャルの最小値を持つ。今までと同様にして最小値の場所とズレを以下のように定義する。

$$\langle\phi\rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \\ v+\eta \end{pmatrix}$$

新しく定義した場をラグランジアン密度に代入すると、

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}[\partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \partial_\mu \xi_i \partial^\mu \xi_i] - \frac{1}{2}\mu^2(v+\eta)^2 - \frac{1}{4}\lambda(v+\eta)^4 + \cdots \tag{2.2.10}$$

となる。

(2.2.10) 式から、場 η が $-2\mu^2$ の質量を持ち、$\xi_i(i=1,2,3,\cdots n-1)$ が質量がない場になっていることがわかる。このように連続的な対称性が破れるのに伴い南部・ゴールドストーン粒子が現れることを南部・ゴールドストーンの定理と呼ぶ。

今までの理論ではラグランジアン密度に南部・ゴールドストーン粒子という質量のない粒子が出現してきた。この粒子がどのような働きをするのか、理論を成り立たせるにはどのような操作を行えばいいのかを次の章で見ていく。

2.3 ヒッグス機構

2.3.1 電磁場におけるヒッグス機構

前の章ではスカラー場についての自発的対称性の破れについて見たが、この章では 2.1.1 で扱った電磁場の自発的対称性の破れを見ていく。電磁場のラグランジアン密度は

$$\mathscr{L} = [(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi] - \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2.3.1}$$

ここで $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$。また、(2.3.1) は

$$\begin{aligned} &\phi(x) \to \phi' = exp\{-i\theta(x)\}\phi(x) \\ &\phi^*(x) \to \phi'^* = exp\{i\theta(x)\}\phi(x) \\ &A_\mu \to A'_\mu = -\frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) + A_\mu(x) \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

の変換に対して不変である。

(2.3.1) は (2.2.6) で議論した $(\sigma、\pi)$ モデルと同様に $O(2)$ に対して対称性と有している。ここで $\sigma/\sqrt{2}$、$\pi/\sqrt{2}$ をそれぞれ $\mathrm{Re}\phi$、$\mathrm{Im}\phi$ に対応させる。σ を真空期待値に π を 0 の軸に固定すると場 ϕ の真空期待値は、実数 v を用いて

$$\langle\phi\rangle_0 = \frac{v}{\sqrt{2}}$$

と書ける。次に前章と同様に真空からのズレを考える。ズレを実数場 ξ、η を用い

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \eta + i\xi] \tag{2.3.3}$$

と定義する。(2.3.1) に代入するとラグランジアン密度は

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}[\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \partial_\mu\xi_i\partial^\mu\xi_i] + \frac{1}{2}e^2v^2A_\mu A^\mu - evA_\mu\partial^\mu\xi + \mu^2\eta^2 + \cdots$$

となり、ベクトル場 A_μ が ev、スカラー場 η が $-2\mu^2$ の質量を持ち、ξ は質量を持たないことがわかる。ξ は南部・ゴールドストーン粒子であるが、質量のない粒子はスピン 1 の光子とグルーオンのみであり、質量 0 かつスピン 0 の粒子が出てくると理論が破綻してしまう。この問題を解決するために以下のような操作を行う。

(2.3.3) は $\eta, \xi \ll v$ の場合

$$\phi \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta)e^{i\xi/v} \tag{2.3.4}$$

と書ける。ここで $\theta(x)$ を $\xi(x)/v$ とすると、(2.3.2) の変換が

$$\begin{aligned} &\phi(x) \to \phi' = exp\{-i\xi(x)/v\}\phi(x) \\ &\phi^*(x) \to \phi'^* = exp\{i\xi(x)/v\}\phi(x) \\ &A_\mu \to A'_\mu = -\frac{1}{ev}\partial_\mu\xi(x) + A_\mu(x) \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

に変わる。この変換を (2.3.1) に代入すると、

$$\mathscr{L} = [(\partial_\mu + ieA'_\mu)(v + \eta)(\partial^\mu - ieA'^\mu)(v + \eta)] - \frac{1}{2}\mu^2(v + \eta)^2 - \frac{1}{4}\lambda(v + \eta)^4 - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} \tag{2.3.6}$$

となる。ここで $F'_{\mu\nu}=\partial_\mu A'_\nu-\partial_\nu A'_\mu$ である。そして (2.3.6) は

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&-\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}+\frac{1}{2}(\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta)+\frac{1}{2}e^2v^2A'_\mu A'^\mu\\&+\frac{1}{2}e^2A'^2_\mu\eta(2v+\eta)-\frac{1}{2}\eta^2(3\lambda v^2+\mu^2)-\lambda v\eta^3-\frac{1}{4}\lambda\eta^4\end{aligned}\tag{2.3.7}$$

と展開でき、(2.3.4)(2.3.5) の操作によって南部・ゴールドストーン粒子である ξ を消去できた。(2.3.7) 式から、ベクトル場 A_μ の質量は ev、スカラー場 η の質量は $(3\lambda v^2+\mu^2)$ となることがわかる。

(2.3.4)(2.3.5) の操作の前はベクトル場が 1 つ、スカラー場が 2 つ存在していたが、操作後はベクトル場が 1 つ、スカラー場が 1 つとなった。自由度で考えると操作前はスカラー場 2 つの自由度 2 と質量 0 の光子の自由度 2 で合計の自由度が 4 であったが、操作後はスカラー場 1 つの自由度 1 と質量を獲得した光子の自由度 3 で合計の自由度は 4 となった。自由度は保存しているがスカラー粒子が 1 つ消えたことにより光子に縦波の自由度が足されている。このようにゲージ場が南部・ゴールドストーン粒子を吸収して質量を獲得する仕組みのことをヒッグス機構と呼ぶ。また、スカラー場 η はヒッグス粒子と呼ばれるスピン 0 、電荷 0 のボソンである。

2.3.2 アイソスピン場におけるヒッグス機構

ここでは 2.1.2 ヤン・ミルズ理論で扱った SU(2) に対して対称性を持つラグランジアン密度にヒッグス機構を適用させていく。非可換の例として SU(2) を対称群とし、スカラー中間子を 3 重項の表現とする。場の変換は

$$\delta\phi_i=-i\epsilon^i L^j_{ik}\phi_k=\epsilon^{ijk}\epsilon^j\phi_k$$

に従う。ラグランジアン密度は

$$\mathscr{L}=(\partial_\mu\phi_i+g\epsilon^{ijk}A^j_\mu\phi_k)(\partial^\mu\phi_i+g\epsilon^{ij'k'}A^{\mu j'}\phi_{k'})-V(\phi^2)\tag{2.3.8}$$

ここで V は SU(2) 変換に対して不変な 4 次の多項式である。

$\phi=0$ が V の最小値の場合、(2.3.8) はゲージ不変を保つアイソスピンを扱うヤン・ミルズ理論である。しかし、ここでは自発的対称性の破れが生じている場合について考えたい。そこで V が 0 ではない最小値をもつとし、以下のような真空期待値を持つ場を考える。

$$\langle\phi\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\v\end{pmatrix}$$

真空は T_1、T_2 のもとで不変ではないが、T_3 のもとでは対称性を持っている。次に真空からのズレを定義する。

$$\phi=exp\{\frac{i}{v}(\xi_1L^1+\xi_2L^2)\}\begin{pmatrix}0\\0\\v+\eta\end{pmatrix}=\langle\phi\rangle_0+\begin{pmatrix}\xi_2\\\xi_1\\\eta\end{pmatrix}+\cdots\tag{2.3.9}$$

(2.1.10)(2.1.16) の変換を

$$\begin{aligned}&\phi'\to\phi'=exp\{-\frac{i}{v}(\xi_1L^1+\xi_2L^2)\}\phi\\&\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{A}'_\mu=exp\{-\frac{i}{v}(\xi_1L^1+\xi_2L^2)\}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{A}exp\{\frac{i}{v}(\xi_1L^1+\xi_2L^2)\}\\&\qquad-\frac{1}{g}[\partial_\mu\exp\{-\frac{i}{v}(\xi_1L^1+\xi_2L^2)\}]exp\{\frac{i}{v}(\xi_1L^1+\xi_2L^2)\}\end{aligned}\tag{2.3.10}$$

とすることで場が

$$\phi' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v+\eta \end{pmatrix}$$

となり、南部・ゴールドストーン粒子であった ξ_1 と ξ_2 が消去できた。

このときのラグランジアン密度は

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \eta \partial^\mu + \frac{1}{2} g^2 v^2 \epsilon^{ij3}\epsilon^{ij'3} A_\mu^j A^{\mu j'} - V[(v+\eta)^2] + \cdots \tag{2.3.11}$$

となる。

(2.3.11) でベクトル場の 2 乗の項は

$$\frac{1}{2} g^2 v^2 [A_\mu^2 A^{2\mu} + A_\mu^1 A^{1\mu}]$$

となっているので A_μ^1 と A_μ^2 は質量 gv を持ち、A_μ^3 は質量 0 の中間子となっていることがわかった。

参考文献

[1] 窪田　高弘 (2008)　『物理のためのリー群とリー代数』, サイエンス社

[2] 川村　嘉春 (2017) 『基礎物理から理解するゲージ理論　”素粒子の標準数式”を読み解く』, サイエンス社

[3] E.S. Abers and B.W. Lee(1973) *”Gauge Theories”* Physics Reports 9, NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY

[4] 佐藤　光 (2016)　『群と物理』, 丸善出版株式会社