贝叶斯统计学基础作业 2

毛沛炫　3220102692

2025 年 3 月 22 日

1. 假定对于二项分布参数 p 我们采用均匀先验分布，并且在 10 次试验中观察到了 4 次正性结果，

(a) 给出先验贝塔分布的参数值 (2 分)

(b) 给出后验贝塔分布的参数值 (2 分)

(c) 给出在先验分布下二项分布参数 p 的期望值 (2 分)

(d) 给出样本中正性结果的比例 (2 分)

(e) 给出二项分布参数 p 的极大似然估计值 (2 分)

(f) 给出在后验分布下二项参数 p 的期望值，并以先验分布下该参数的期望值和该参数的极大似然估计值的加权平均形式表达 (4 分)

解答:

(a) 先验贝塔分布的参数值

$\alpha = 1$ 和 $\beta = 1$。见图1

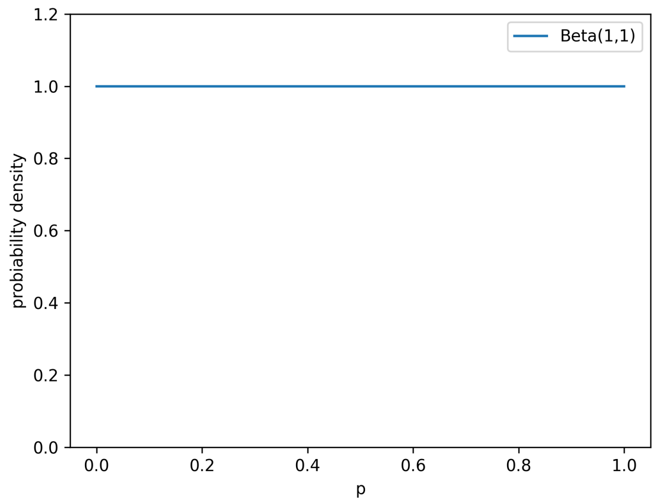


Figure 1

先验贝塔分布的参数值

(b) 后验贝塔分布的参数值

后验贝塔分布的参数为 $\alpha = 5$ 和 $\beta = 7$。

$$\alpha_{\text{后验}} = \alpha + \text{正性结果数} = 1 + 4 = 5$$

$$\beta_{\text{后验}} = \beta + \text{负性结果数} = 1 + 6 = 7$$

(c) 给出先验分布下二项分布参数 p 的期望值

先验分布为均匀分布，其期望值为:

$$\mathrm{E}[p] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{1}{1+1} = 0.5$$

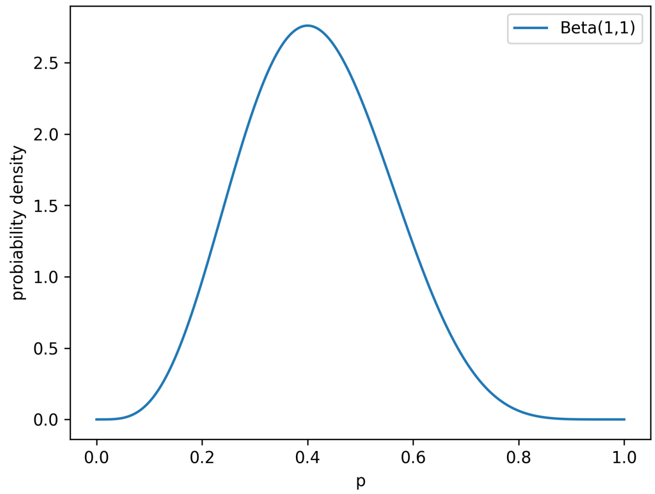


Figure 2

后验贝塔分布的参数值

(d) 给出样本中正性结果的比例

样本中正性结果的比例为 $4/10 = 0.4$

(e) 给出二项分布参数 p 的极大似然估计值

在 10 次试验中观察到 4 次正性结果，其似然函数为:

$$L(p) = P(X=4) = \binom{10}{4} p^4 (1-p)^6$$

为了求极大似然估计值，我们对似然函数取对数，得到对数似然函数:

$$\ln L(p) = \ln \binom{10}{4} + 4\ln p + 6\ln(1-p)$$

对 p 求导并令导数为零:

$$\frac{d}{dp} \ln L(p) = \frac{4}{p} - \frac{6}{1-p} = 0$$

解得:

$$p = \frac{4}{10} = 0.4$$

因此，二项分布参数 p 的极大似然估计值为:

$$\hat{p}_{\text{MLE}} = 0.4$$

(f) 给出在后验分布下二项参数 p 的期望值，并以先验分布下该参数的期望值和该参数的极大似然估计值的加权平均形式表达

$$\mathrm{E}[p \mid D] = \frac{\alpha_{\text{后验}}}{\alpha_{\text{后验}} + \beta_{\text{后验}}} = \frac{5}{5+7} = \frac{5}{12}$$

这个期望值可以表示为:

$$\mathrm{E}[p \mid D] = \frac{\alpha + \text{正性结果数}}{\alpha + \beta + \text{总试验数}} = \frac{1+4}{1+1+10} = \frac{5}{12}$$

也可以表示为先验期望值和极大似然估计值的加权平均:

$$\mathrm{E}[p \mid D] = \frac{2 \times 0.5 + 10 \times 0.4}{2+10} = \frac{1+4}{12} = \frac{5}{12}$$

其中，先验权重为 $\alpha + \beta = 2$，数据权重为试验次数 $n = 10$。

2. **假定对于二项分布参数 p，我们有三个假设:**

$$H_0 : p = 0.5,\ \ H_1 : p = 0.4,\ \ H_2 : p \sim unif(0,1)$$

另外，我们进行了 50 次伯努利试验，得到了 20 次正性结果，

(a) 求对于每个假设的 $P(D \mid H)$(6 分)

(b) 求各对假设间的贝叶斯因子 (3 分)

(c) 根据以上结果，我们能够做出怎样的统计推断 (2 分)

(d) 为了能够做出接受上述三个假设中某一假设的统计推断，在假定样本正性结果比例不变的情况下，还需进行多少次额外的伯努利试验 (5 分)

解答:

以 $\sqrt{10}$ 为标准

(a) 求对于每个假设的 $P(D \mid H)$

记 $n = 50$，$z = 20$，对 H_0 和 H_1，我们有:

$$P(D \mid H) = p^z (1-p)^{n-z}$$

对于 H_0，$p = 0.5$，$P(D \mid H_0) = 0.5^{20} \times 0.5^{30} = 0.5^{50} \approx 8.88\mathrm{E}-16$，

对于 H_1，$p = 0.4$，$P(D \mid H_1) = 0.4^{20} \times 0.6^{30} \approx 2.43\mathrm{E}-15$，

对于 H_2，

$$\begin{aligned} P(D \mid H_2) &= \int_0^1 L(D|p) f(p) dp \\ &= \int_0^1 p^{20}(1-p)^{30} dp = \frac{1}{2403589824441960} \end{aligned}$$

(b) 求各对假设间的贝叶斯因子

$$BF_{01} = \frac{0.5^{50}}{0.4^{20} \times 0.6^{30}} \approx 0.365$$

$$BF_{02} = \frac{0.5^{50}}{1/2403589824441960} \approx 2.135$$

$$BF_{12} = \frac{0.4^{20} \times 0.6^{30}}{1/2403589824441960} \approx 5.842$$

(c) 根据以上结果，我们能够做出怎样的统计推断

由 BF_{01}，表明 H_0 和 H_1 之间，数据有较弱的证据支持 H_1

由 BF_{02}，表明 H_0 和 H_2 之间，数据有较弱的证据支持 H_0

由 BF_{12}，表明 H_1 和 H_2 之间，数据有中等程度的证据支持 H_1

(d) 为了能够做出接受上述三个假设中某一假设的统计推断，在假定样本正性结果比例不变的情况下，还需进行多少次额外的伯努利试验

首先证明各贝叶斯因子的单调性。

Proof. BF_{10} 单调

$$\begin{aligned} BF_{10(n+5)} - BF_{10(n)} &= \frac{0.4^{0.4n+2} \times 0.6^{0.6n+3}}{0.5^{n+5}} - \frac{0.4^{0.4n} \times 0.6^{0.6n}}{0.5^{n}} \\ &= \frac{2^{n+5} \times 2^{0.4n+2} \times 3^{0.6n+3}}{5^{n+5}} - \frac{2^{n} \times 2^{0.4n} \times 3^{0.6n}}{5^{n}} \\ &= \frac{\left(2^{n} \times 2^{0.4n} \times 3^{0.6n}\right)\left(2^{5} \times 2^{2} \times 3^{3} - 5^{5}\right)}{5^{n+5}}. \end{aligned}$$

$$\because 2^5 \times 2^2 \times 3^3 - 5^5 = 3787 > 0$$

$$\therefore BF_{10(n+5)} - BF_{10(n)} > 0$$

$$\therefore BF_{10}\text{单调递增}$$

□

Proof. BF_{12} 单调

$$BF_{12(n+5)} - BF_{12(n)} = \frac{0.4^{0.4n+2} \times 0.6^{0.6n+3}}{\int_0^1 p^{0.4n+2}(1-p)^{0.6n+3}dp} - \frac{0.4^{0.4n} \times 0.6^{0.6n}}{\int_0^1 p^{0.4n}(1-p)^{0.6n}dp}$$

Sympy（代码见附录A）给出

$$\int_0^1 p^{0.4n}(1-p)^{0.6n}dp = \frac{\Gamma(0.4n+1)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-0.6n, 0.4n+1\\ 0.4n+2\end{matrix}\middle|\,1\right)}{\Gamma(0.4n+2)}$$

因为我看不懂这个表达式，所以还是向 python 求助

定义 n 为正整数且为 5 的倍数，计算 $BF_{12(n+5)} - BF_{12(n)}$，得到（代码见附录B）

$$BF_{12(n+5)} - BF_{12(n)} = \frac{0.4^{0.4n+2}0.6^{0.6n+3}(n+6)!}{(0.4n+2)!(0.6n+3)!} - \frac{0.4^{0.4n}0.6^{0.6n}(n+1)!}{(0.4n)!(0.6n)!}$$

$$\frac{BF_{12(n+5)} - BF_{12(n)}}{0.4^{0.4n}0.6^{0.6n}\frac{(n+1)!}{(0.4n)!(0.6n)!}} = \frac{2^2 3^3(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}{5^5(0.4n+1)(0.4n+2)(0.6n+1)(0.6n+2)(0.6n+3)} - 1$$

$$= \frac{(2n+4)(2n+6)(3n+12)(3n+18)}{(2n+5)(2n+10)(3n+5)(3n+10)} - 1 \triangleq f(n)$$

使用 sympy 判断正负性（代码见附录C），输出

f(n) > 0 when: True

f(n) < 0 when: False

因此，在 n 可能的取值中，

$$\frac{(2n+4)(2n+6)(3n+12)(3n+18)}{(2n+5)(2n+10)(3n+5)(3n+10)} - 1 > 0$$

恒成立，所以 BF_{12} 单调递增 □

Proof. BF_{20} 单调

$$BF_{20(n+5)} - BF_{20(n)} = \frac{\int_0^1 p^{0.4n+2}(1-p)^{0.6n+3}dp}{0.5^{n+5}} - \frac{\int_0^1 p^{0.4n}(1-p)^{0.6n}dp}{0.5^n}$$

$$= \frac{2^{n+5}(0.4n+2)!(0.6n+3)!}{(n+6)!} - \frac{2^n(0.4n)!(0.6n)!}{(n+1)!}$$

$$\frac{BF_{20(n+5)} - BF_{20(n)}}{\frac{2^5(0.4n)!(0.6n)!}{(n+1)!}} = \frac{2^5(0.4n+1)(0.4n+2)(0.6n+1)(0.6n+2)(0.6n+3)}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)} - 1$$

$$\triangleq f(n)$$

使用 sympy 判断正负性，输出

f(n) > 0 when: 20.936805530704 < n

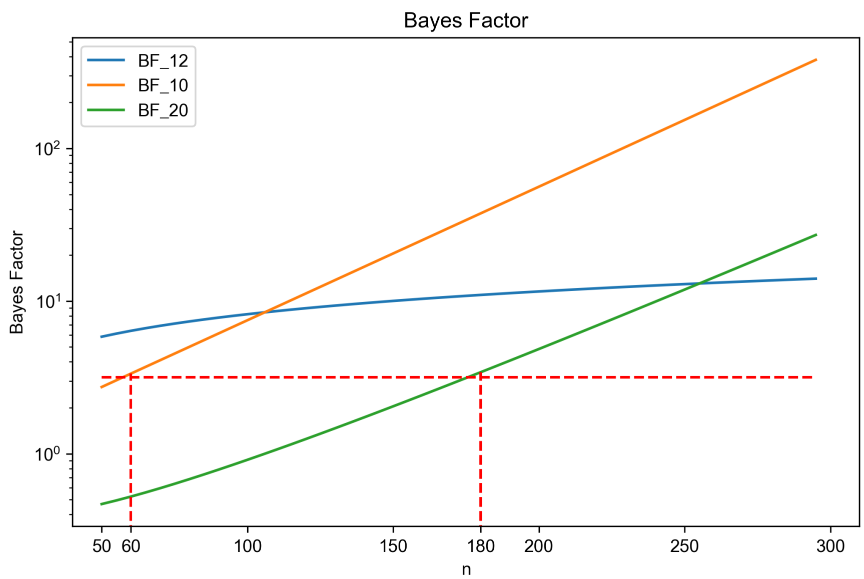
f(n) < 0 when: n < 20.936805530704

因此，当 $n > 50$ 时，BF_{20} 单调递增 □

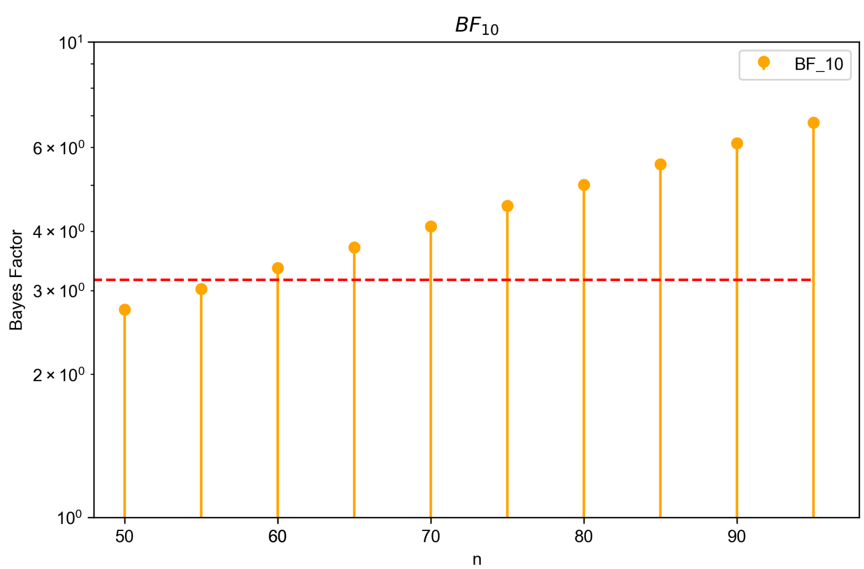
绘制贝叶斯因子随试验次数的变化曲线，如图3(a)所示。计算得出（代码见附

录D)，当试验次数达到 60 次时，贝叶斯因子 $BF_{10} > 10^{1/2}$，即有中等程度的证据支持 H_2。BF_{10} 在 50-95 次实验中的变化见图3(b)。当总的实验次数 $n \geq 60$ 时，不论是和 H_0 还是和 H_2 相比，数据都有数据有中等程度的证据支持 H_1。

因此还需要进行 10 次额外的伯努利实验。



(a) 贝叶斯因子随试验次数的变化曲线



(b) BF_{10} 随试验次数的变化曲线

Figure 3

贝叶斯因子及 BF_{10} 随试验次数的变化曲线

Appendix A
附录 A

计算 $\int_0^1 p^{0.4n}(1-p)^{0.6n}dp$

```
from sympy import *
p = Symbol('x')
n = Symbol('n')
L_D_H2 = p**(0.4*n)*(1-p)**(0.6*n)
P_D_H2 = integrate(L_D_H2, (p, 0, 1))
P_D_H2._repr_latex_()
```

Appendix B
附录 B

计算 $BF_{12(n+5)} - BF_{12(n)}$

```
from sympy import *
from IPython.display import display, Math

p = Symbol('p')
n = Symbol('n', integer=True, positive=True, multiple_of=5)

L_D_H2 = p**(0.4*n) * (1-p)**(0.6*n)
P_D_H1 = 0.4**(0.4*n) * 0.6**(0.6*n)
P_D_H2 = integrate(L_D_H2, (p, 0, 1))
BF_12 = P_D_H1 / P_D_H2

BF_12 = simplify(BF_12)
BF_12 = BF_12.rewrite(gamma, factorial)

Delta_BF_12 = BF_12.subs(n, n + 5) - BF_12.subs(n,n)

display(Math(latex(Delta_BF_12)))
print(latex(Delta_BF_12))
```

Appendix C
附录 C

用 sympy 判断正负性

```
numerator = (2*n + 4) * (2*n + 6) * (3*n + 12)  * (3*n + 18)
denominator = (2*n + 5) * (2*n + 10) * (3*n + 5) * (3*n + 10)
f = numerator / denominator - 1
from sympy.solvers.inequalities import reduce_inequalities

positive = reduce_inequalities(f > 0, n)
print("f(n) > 0 when:", positive)

negative = reduce_inequalities(f < 0, n)
print("f(n) < 0 when:", negative)
```

Appendix D

附录 D

计算贝叶斯因子随试验次数的变化曲线

```
from pylab import *
from sympy import *
import tqdm
rcParams['font.sans-serif'] = ['Arial Unicode MS']
BF_10 = np.array([])
BF_20 = np.array([])
BF_12 = np.array([])
p = Symbol('x')
N = np.arange(50, 400, 5)
Flag = 0
for n in tqdm.tqdm(N):
    L_D_H2 = np.power(p, int(0.4 * n)) * \
        np.power(1 - p, int(0.6 * n))
    P_D_H0 = np.power(0.5, n)
    P_D_H1 = np.power(0.4, 0.4 * n) * np.power(0.6, 0.6 * n)
    P_D_H2 = integrate(L_D_H2, (p, 0, 1))
    BF_10 = np.append(BF_10, P_D_H1 / P_D_H0)
    BF_20 = np.append(BF_20, P_D_H2 / P_D_H0)
    BF_12 = np.append(BF_12, P_D_H1 / P_D_H2)
    if Flag == 0:
        if P_D_H2 / P_D_H0 > np.power(10,0.5):
            print(n)
            Flag = 1
```