

# 贝叶斯统计学基础作业 3

毛沛炫 3220102692

2025 年 4 月 9 日

1. 假定对于二项分布参数  $p$ ，我们采用  $\text{beta}(2,2)$  作为先验分布，并且进行了 10 次伯努利试验，得到了 7 次正性结果。现采用格点近似法，并使用 5 个格点，

- (a) 计算先验分布的离散近似解 (3 分)
- (b) 计算后验分布的离散近似解 (3 分)
- (c) 计算  $P(D)$  的近似解 (3 分)
- (d) 将格点数增加到 11 个，重新计算以上三个结果 (4 分)
- (e) 计算格点数分别为 5 和 11 时， $P(D)$  近似解的相对误差 (4 分)

解答：

首先，先验概率质量分布正比于  $\text{beta}(2,2)$ ：

$$\text{Prior}(p) \propto p^{\alpha-1} \times (1-p)^{\beta-1} = p \times (1-p)$$

后验分布：

$$\text{Posterior}(p) \propto \text{Likelihood}(p) \times \text{Prior}(p) \propto [p^7 \times (1-p)^3] \times [p \times (1-p)] = p^8 \times (1-p)^4$$

- (a) 先验分布的离散近似解

令五个格点的值分别为  $\theta = [0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9]$ ,

归一化之前：

$$\theta = 0.1 : p = 0.1 \times (1 - 0.1) = 0.09$$

$$\theta = 0.3 : p = 0.3 \times (1 - 0.3) = 0.21$$

$$\theta = 0.5 : p = 0.5 \times (1 - 0.5) = 0.25$$

$$\theta = 0.7 : p = 0.7 \times (1 - 0.7) = 0.21$$

$$\theta = 0.9 : p = 0.9 \times (1 - 0.9) = 0.09$$

由于总和为 0.85，归一化之后

$$\theta = 0.1 : p = 0.1 \times (1 - 0.1) / 0.85 \approx 0.106$$

$$\theta = 0.3 : p = 0.3 \times (1 - 0.3) / 0.85 \approx 0.247$$

$$\theta = 0.5 : p = 0.5 \times (1 - 0.5) / 0.85 \approx 0.294$$

$$\theta = 0.7 : p = 0.7 \times (1 - 0.7) / 0.85 \approx 0.247$$

$$\theta = 0.9 : p = 0.9 \times (1 - 0.9) / 0.85 \approx 0.106$$

上述即为先验概率分布的离散近似解

(b) 后验分布的离散近似解

$$\theta = 0.1 : p = (0.1)^8 \times (0.9)^4 \approx 6.56e - 9$$

$$\theta = 0.3 : p = (0.3)^8 \times (0.7)^4 \approx 1.58e - 5$$

$$\theta = 0.5 : p = (0.5)^8 \times (0.5)^4 \approx 2.44e - 4$$

$$\theta = 0.7 : p = (0.7)^8 \times (0.3)^4 \approx 4.67e - 4$$

$$\theta = 0.9 : p = (0.9)^8 \times (0.1)^4 \approx 4.30e - 5$$

归一化之后

$$p(\theta = 0.1) \approx 8.52e - 06$$

$$p(\theta = 0.3) \approx 0.020$$

$$p(\theta = 0.5) \approx 0.317$$

$$p(\theta = 0.7) \approx 0.606$$

$$p(\theta = 0.9) \approx 0.056$$

(c) 计算  $P(D)$  的近似解

$$\begin{aligned} P(D) &\approx \sum_{i=1}^5 P(\theta_i) P(D|\theta_i) \\ &= \sum_{i=1}^5 P(\theta_i) \theta_i^7 (1 - \theta_i)^3 \\ &\approx 9.058e - 4 \end{aligned}$$

(d) 将格点数增加到 11 个，重新计算以上三个结果

$\theta$  取值为:  $\theta_0 = 0.045, \theta_1 = 0.136, \theta_2 = 0.227, \theta_3 = 0.318, \theta_4 = 0.409, \theta_5 = 0.500, \theta_6 = 0.591, \theta_7 = 0.682, \theta_8 = 0.773, \theta_9 = 0.864, \theta_{10} = 0.955$

先验概率分布的离散近似解为 (python 计算给出):

$$p(\theta = 0.045) \approx 0.024$$

$$p(\theta = 0.136) \approx 0.064$$

$$p(\theta = 0.227) \approx 0.095$$

$$p(\theta = 0.318) \approx 0.118$$

$$p(\theta = 0.409) \approx 0.131$$

$$p(\theta = 0.500) \approx 0.136$$

$$p(\theta = 0.591) \approx 0.131$$

$$p(\theta = 0.682) \approx 0.118$$

$$p(\theta = 0.773) \approx 0.095$$

$$p(\theta = 0.864) \approx 0.064$$

$$p(\theta = 0.955) \approx 0.024$$

后验分布的离散近似解为

$$p(\theta = 0.045) \approx 8.85e - 9$$

$$p(\theta = 0.136) \approx 3.89e - 5$$

$$p(\theta = 0.227) \approx 0.001$$

$$p(\theta = 0.318) \approx 0.013$$

$$p(\theta = 0.409) \approx 0.056$$

$$p(\theta = 0.500) \approx 0.143$$

$$p(\theta = 0.591) \approx 0.244$$

$$p(\theta = 0.682) \approx 0.280$$

$$p(\theta = 0.773) \approx 0.198$$

$$p(\theta = 0.864) \approx 0.063$$

$$p(\theta = 0.955) \approx 0.002$$

$P(D)$  的近似解为  $P(D) \approx 9.285e - 4$

- (e) 计算格点数分别为 5 和 11 时,  $P(D)$  近似解的相对误差  
 $P(D)$  的精确值为

$$\begin{aligned}
 P(D) &= \int_0^1 p(\theta)p(D|\theta)d\theta \\
 &= \int_0^1 \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2)\Gamma(2)}\theta(1-\theta)\theta^7(1-\theta)^3d\theta \\
 &= \int_0^1 6\theta^8(1-\theta)^4d\theta \\
 &= \frac{2}{2145}
 \end{aligned}$$

所以 5 个格点的相对误差是

$$\frac{|P_{N=5}(D) - \frac{2}{2145}|}{\frac{2}{2145}} = 2.587\%$$

所以 11 个格点的相对误差是

$$\frac{|P_{N=11}(D) - \frac{2}{2145}|}{\frac{2}{2145}} = 0.422\%$$

2. 使用 JASP 中名为 Heart Rate 的数据集, 进行贝叶斯方差分析, 考察各个因素是否存在主效应, 以及是否存在交互效应。根据贝叶斯因子选取和报告最优模型, 并且报告针对各种效应的贝叶斯因子和相应的统计推断。(6 分)

解答:

**Table 1**

模型比较

Models	P(M)	P(M data)	BF <sub>M</sub>	BF <sub>10</sub>	error %
Gender + Group + Gender * Group	0.200	0.794	15.388	1.000	
Gender + Group	0.200	0.206	1.040	0.260	2.560
Group	0.200	$6.696 \times 10^{-36}$	$2.678 \times 10^{-35}$	$8.436 \times 10^{-36}$	2.320
Gender	0.200	$1.809 \times 10^{-107}$	$7.234 \times 10^{-107}$	$2.279 \times 10^{-107}$	2.320
Null model	0.200	$2.296 \times 10^{-126}$	$9.185 \times 10^{-126}$	$2.893 \times 10^{-126}$	2.320

全因子模型的贝叶斯因子  $BF_{10}$  远大于 100 (见 Table1), 说明数据有极强的证据支持全因子模型而非空模型。且和其他模型相比, 全因子模型的  $BF_{MM}=15.388$ , 且其他模型的  $BF_{MM}$  均小于 3, 说明数据有较强的证据支撑全因子模型而非其他模型。

**Table 2**

效应分析

Effects	P(incl)	P(excl)	P(incl data)	P(excl data)	$BF_{incl}$
Gender	0.400	0.400	0.206	$6.696 \times 10^{-36}$	$3.081 \times 10^{+34}$
Group	0.400	0.400	0.206	$1.809 \times 10^{-107}$	$1.141 \times 10^{+106}$
Gender * Group	0.200	0.200	0.794	0.206	3.847

选择 JASP 的默认参数，并和最佳模型进行比较。效应分析中，Gender 和 Group 的  $BF_{incl}$  都远大于 100（见 Table2），根据 Wagenmakers, Love 等人提出的分类标准，说明数据有极强的证据支持了不同 Gender 的人在心率上具有差异，不同 Group 的人在心率上具有差异，Gender 和 Group 的主效应显著。而 Group\*Gender 的贝叶斯因子为  $BF_{incl} = 3.847$ ，说明在 (假定有效应的) 备择假设下出现当前数据的可能性是在 (假定没有有效应的) 零假设下可能性的 3.847 倍。根据分类标准, 这是中等程度的证据支持了备择假设, Gender 和 Group 之间存在交互作用。

3. 使用 JASP 中名为 Auction 的数据集，进行贝叶斯回归分析。具体要求如下：以 Age 和 Bidders 为自变量，Price 为因变量，考虑所有可能模型（包括含交互项的模型，且各模型的先验概率应当相等），并根据贝叶斯因子选取和报告最优模型，以及各回归系数的后验 90% 可信区间

使用 jasp 默认参数（各模型的先验概率相等。最优模型（见 Table3）为包含交互项的模型（Age + Bidders + Age × Bidders）。贝叶斯因子  $BF_M = 38784.660$ ，表明该模型比其他模型有极强的证据支持（ $BF > 100$ ）； $R^2 = 0.954$ ，说明模型对数据的解释力极高。Age + Bidders 模型的  $BF_{10} = 1.031 \times 10^2$ ，和最优模型相比，数据对该模型的支持证据极弱。

**Table 3**

模型比较

Models	P(M)	P(M data)	$BF_M$	$BF_{10}$	$R^2$
Age + Bidders + Age * Bidders	0.200	1.000	38784.660	1.000	0.954
Age + Bidders	0.200	$1.031 \times 10^{-4}$	$4.125 \times 10^{-4}$	$1.031 \times 10^{-4}$	0.893
Age	0.200	$1.105 \times 10^{-12}$	$4.420 \times 10^{-12}$	$1.105 \times 10^{-12}$	0.533
Bidders	0.200	$4.528 \times 10^{-16}$	$1.811 \times 10^{-15}$	$4.529 \times 10^{-16}$	0.156
Null model	0.200	$1.782 \times 10^{-16}$	$7.127 \times 10^{-16}$	$1.782 \times 10^{-16}$	0.000

**Table 4**

根据后验分布的系数估计

Coefficient	P(incl)	P(excl)	P(incl data)	P(excl data)	$BF_{inclusion}$	Mean	SD	90% Credible Interval	
								Lower	Upper
Intercept	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	1327.156	15.621	1298.693	1352.459
Age	0.400	0.400	$1.031 \times 10^{-4}$	$6.310 \times 10^{-16}$	$1.634 \times 10^{+11}$	0.867	2.012	-2.799	4.125
Bidders	0.400	0.400	$1.031 \times 10^{-4}$	$1.105 \times 10^{-12}$	$9.330 \times 10^{+7}$	-92.697	29.594	-146.621	-44.762
Age * Bidders	0.200	0.200	1.000	$1.031 \times 10^{-4}$	9696.165	1.288	0.210	0.905	1.628

模型中各个因子的回归系数和后验 90% 可信区间（见 Table4）：

交互项 Age  $\times$  Bidders:

回归系数为 1.288，90% 可信区间为 (0.905, 1.628)。

Bidders:

回归系数为 -92.697，90% 可信区间为 (-146.62, -44.76)

Age:

回归系数为 0.867，90% 可信区间为 (-2.799, 4.125)

截距:

回归系数为 1327.156，90% 可信区间为 (1298.69, 1352.46)

4. 使用 JASP 中名为 Emily Rosa 的数据集，进行贝叶斯二项检验。具体要求如下：以 correct 比例为 0.46，incorrect 比例为 0.54 作为零假设，以 correct 比例满足  $\text{beta}(2.3, 2.7)$  为被择假设的先验分布，进行统计检验，并报告相应的贝叶斯因子，correct 比例的后验 95% 可信区间，以及统计推断结果

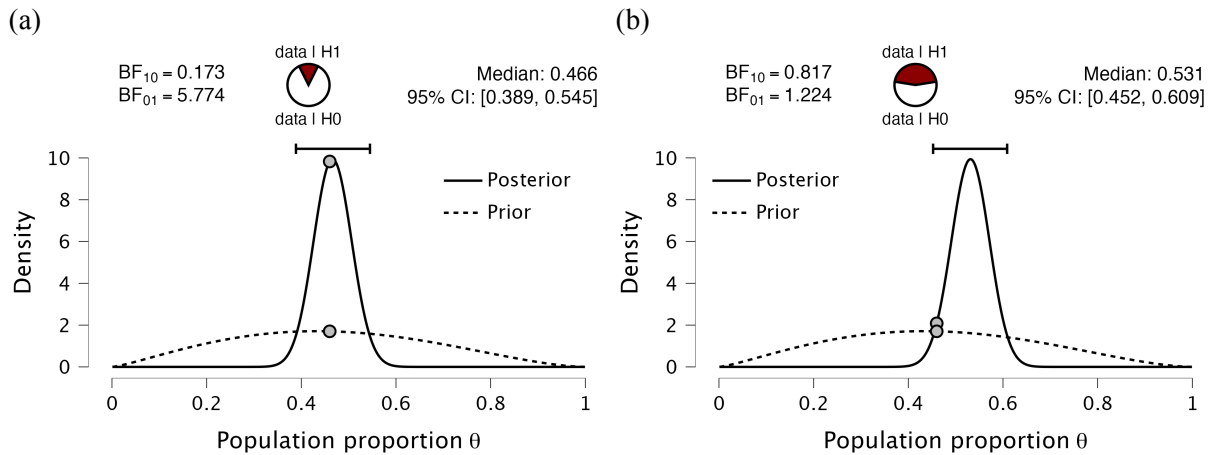
**Table 5**

贝叶斯二项分布检验

	Level	Counts	Total	Proportion	$BF_{10}$
Outcome	Correct	70	150	0.467	0.173
	Incorrect	80	150	0.533	0.817

*Note.* Proportions tested against value: 0.46. The shape of the prior distribution under the alternative hypothesis is specified by  $\text{Beta}(2.3, 2.7)$ .

设置 correct 比例为 0.46，incorrect 比例为 0.54 作为零假设，以 correct 比例满足  $\text{beta}(2.3, 2.7)$  为被择假设的先验分布，检验方向为  $\neq$  Test value，其他参数按照 JASP 默认值，进行分析，结果见 Table5 和 Figure1



**Figure 1.** (a) correct 比例的先验分布和后验分布；(b) incorrect 比例的先验和后验分布

根据分析结果，贝叶斯因子  $BF_{10} = 0.173$ ，表示当前数据支持零假设（correct 比例为 0.46）的证据比支持被择假设的证据强约 5.774 倍。这表明有中等程度的证据支持零假设，即有中等强度的证据支持 correct 比例为 0.46。correct 比例的后验 95% 可信区间为 (0.389, 0.545)