

贝叶斯统计学基础作业 2

毛沛炫 3220102692

2025 年 3 月 21 日

1. 假定对于二项分布参数 p 我们采用均匀先验分布，并且在 10 次试验中观察到了 4 次正性结果，

- (a) 给出先验贝塔分布的参数值 (2 分)
- (b) 给出后验贝塔分布的参数值 (2 分)
- (c) 给出在先验分布下二项分布参数 p 的期望值 (2 分)
- (d) 给出样本中正性结果的比例 (2 分)
- (e) 给出二项分布参数 p 的极大似然估计值 (2 分)
- (f) 给出在后验分布下二项参数 p 的期望值，并以先验分布下该参数的期望值和该参数的极大似然估计值的加权平均形式表达 (4 分)

解答：

- (a) 先验贝塔分布的参数值

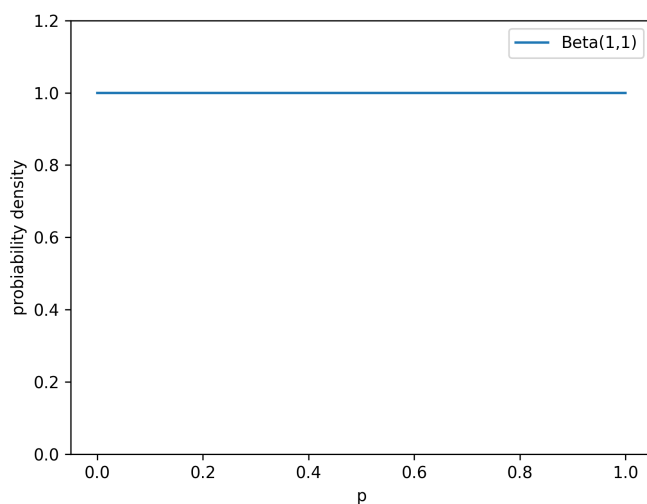


Figure 1

先验贝塔分布的参数值

$\alpha = 1$ 和 $\beta = 1$ 。见图1

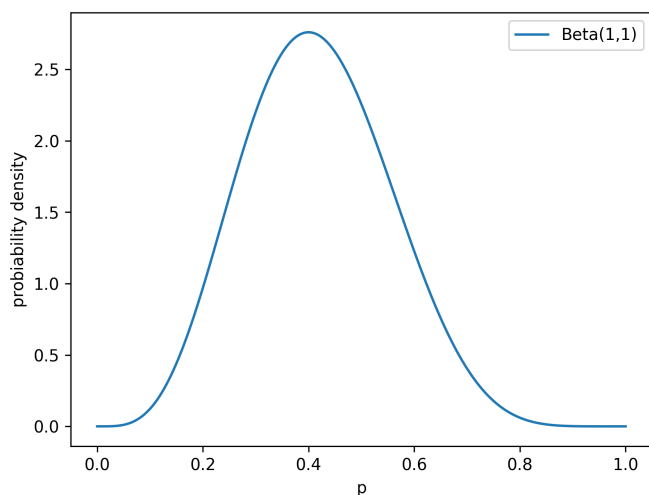
- (b) 后验贝塔分布的参数值

后验贝塔分布的参数为 $\alpha = 5$ 和 $\beta = 7$ 。

$$\alpha_{\text{后验}} = \alpha + \text{正性结果数} = 1 + 4 = 5$$

$$\beta_{\text{后验}} = \beta + \text{负性结果数} = 1 + 6 = 7$$

- (c) 给出二项分布参数 p 的期望值

**Figure 2**

后验贝塔分布的参数值

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x} \quad (1)$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n;) = \prod_{i=1}^n p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} \quad (2)$$

(3)

(d) 给出样本中正性结果的比例

(e) 给出二项分布参数 p 的极大似然估计值

(f) 给出在后验分布下二项参数 p 的期望值，并以先验分布下该参数的期望值和该参数的极大似然估计值的加权平均形式表达

1. 先验贝塔分布的参数值

对于均匀先验分布，贝塔分布的参数为 $\alpha = 1$ 和 $\beta = 1$ 。

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1$$

2. 后验贝塔分布的参数值

在观察到 4 次正性结果和 6 次负性结果后，后验贝塔分布的参数更新为：

$$\alpha_{\text{后验}} = \alpha + \text{正性结果数} = 1 + 4 = 5$$

$$\beta_{\text{后验}} = \beta + \text{负性结果数} = 1 + 6 = 7$$

因此，后验贝塔分布的参数为 $\alpha = 5$ 和 $\beta = 7$ 。

3. 先验分布下二项分布参数 p 的期望值

先验分布为均匀分布，其期望值为：

$$E[p] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{1}{1 + 1} = 0.5$$

4. 样本中正性结果的比例

样本中正性结果的比例为：

$$\frac{\text{正性结果数}}{\text{总试验数}} = \frac{4}{10} = 0.4$$

5. 二项分布参数 p 的极大似然估计值

极大似然估计值为样本中正性结果的比例：

$$\hat{p}_{\text{MLE}} = \frac{4}{10} = 0.4$$

6. 后验分布下二项参数 p 的期望值

后验分布的期望值为：

$$E[p | \text{数据}] = \frac{\alpha_{\text{后验}}}{\alpha_{\text{后验}} + \beta_{\text{后验}}} = \frac{5}{5 + 7} = \frac{5}{12} \approx 0.4167$$

这个期望值可以表示为先验期望值和极大似然估计值的加权平均：

$$E[p | \text{数据}] = \frac{\alpha + \text{正性结果数}}{\alpha + \beta + \text{总试验数}} = \frac{1 + 4}{1 + 1 + 10} = \frac{5}{12}$$

也可以表示为：

$$E[p | \text{数据}] = \frac{\text{先验权重} \times \text{先验期望} + \text{数据权重} \times \text{极大似然估计}}{\text{先验权重} + \text{数据权重}}$$

其中，先验权重为 $\alpha + \beta = 2$ ，数据权重为试验次数 $n = 10$ 。

$$E[p | \text{数据}] = \frac{2 \times 0.5 + 10 \times 0.4}{2 + 10} = \frac{1 + 4}{12} = \frac{5}{12} \approx 0.4167$$