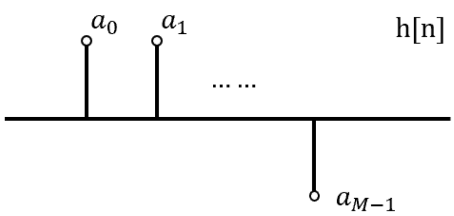
4.9 课堂板书

滤波器要么是有延迟的，要么是非因果的。

- FIR 滤波器

$$
\begin{aligned}
y[n] &= a_0x[n] + a_1x[n-1] + a_2x[n-2] + \cdots + a_{M-1}x[n-M+1] \\
&= a_0x[n] * \delta[n] + a_1x[n] * \delta[n-1] + \cdots + a_{M-1}x[n] * \delta[n-M+1] \\
&= x[n] * (a_0\delta[n] + a_1\delta[n-1] + \cdots + a_{M-1}\delta[n-M+1])
\end{aligned}
$$

（差分方程）



$$\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{M-1})$$

$$\overrightarrow{x[n]} = (x[n], x[n-1], \dots, x[n-M+1])$$

$$Y(k) = a_0x(k) + a_1e^{-jk\frac{2\pi}{N}}x(k) + \cdots + a_{M-1}e^{-jk\frac{2\pi}{N}(M-1)}x(k)$$

传递函数$\frac{Y(k)}{X(k)} = a_0 + \underbrace{\boxed{a_1e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}}_{W_N^1} + \cdots + \underbrace{\boxed{a_{M-1}e^{-jk\frac{2\pi}{N}(M-1)}}}_{W_N^{M-1}}$

滑动平均（moving average，MA）

FIR 滤波器：窗长是固定的

- 另一类滤波器：窗长是改变的，无限长单位脉冲响应的滤波器

$y[n] - ay[n-1] = x[n]$

$y[n] = ay[n-1] + x[n]$

$y[n] = 0, x[n] = 0, n \le 0$

$y(1) = 0 + x(1) = x(1)$

$y(2) = ax(1) + x(2)$

$$
\begin{aligned}
y(3) &= a\big(ax(1) + x(2)\big) + x(3) \\
&= a^2x(1) + ax(2) + x(3)
\end{aligned}
$$

$y(4) = a^3x(1) + a^2x(2) + ax(3) + x(4)$

$$\boldsymbol{y(k) = \sum_{j=1}^{k} a^{k-j}\, x(j)}$$

$$b_0Y(k) + b_1Y(k)e^{-jk\frac{2\pi}{N}} + \cdots + b_{k-1}e^{-jk\frac{2\pi}{N}(k-1)}Y(k)$$

$= X(k) \to$ **传递函数**$\frac{Y(k)}{X(k)} = \frac{1}{b_0 + b_1e^{-j\frac{2\pi k}{N}} + \cdots + b_{M-1}e^{-j\frac{2\pi k}{N}(k-1)}}$

自回归（auto regressive，AR）

- $y(n) = -b_1y(n-1) + b_2y(n-2) + \cdots + b_{k-1}y(n-k+1) + x[n]$（差分方程）

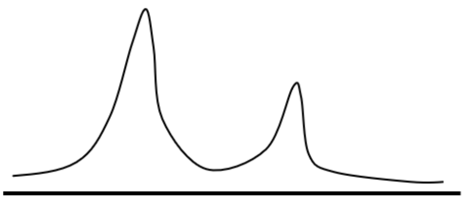
差分方程$\xrightarrow{\text{DFT}}$线性方程

- LTI 传递函数

$$\frac{Y(k)}{X(k)}=\frac{\sum_{p=0}^{M-1}a_p e^{-j\frac{2\pi k}{N}p}}{\sum_{l=0}^{K-1}b_l e^{-j\frac{2\pi k}{N}l}}$$

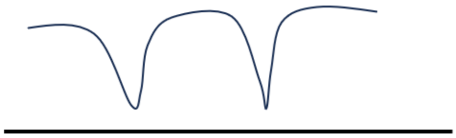
※FIR:只有分子

AR 系统滤波后：



有尖峰

MA 系统滤波后：

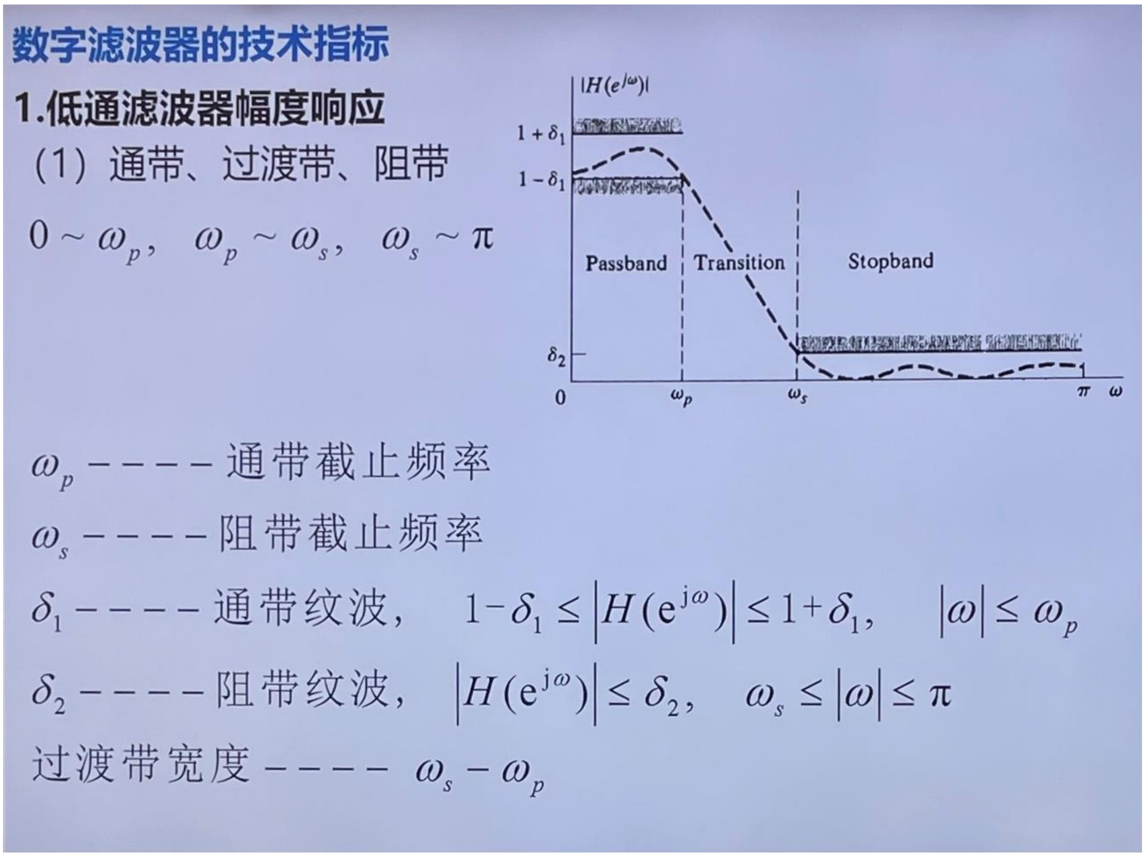


有凹坑

- 加窗

时域加窗 $\xrightarrow{\text{DFT}}$ 频谱平滑

PPT 部分



滤波器幅度指标（增益）通常用分贝表示：

$$\text{增益（dB）} = 20\lg\left|H(e^{j\omega})\right|$$

理想的通带增益为1

通带增益： $1+\delta_1 \sim 1-\delta_1$

阻带增益： $0 \sim \delta_2$

以分贝表示：

（例） $\delta_1 = 0.01$

$\delta_2 = 0.001$

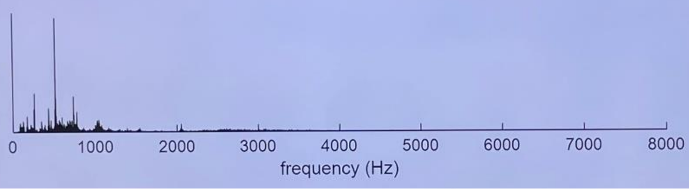
理想通带增益 $20\lg(1) = 0\ \text{dB}$

最大通带增益 $20\lg(1+\delta_1) = 20\lg(1.01) = 0.086\ \text{dB}$

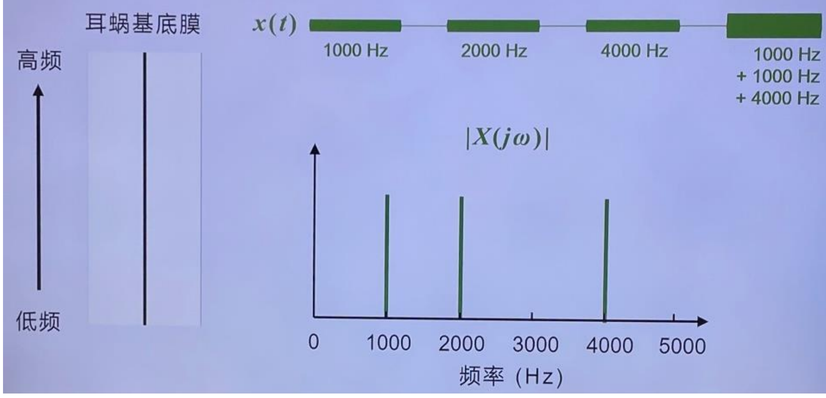
最大阻带增益 $20\lg(\delta_2) = 20\lg(0.001) = -60\ \text{dB}$

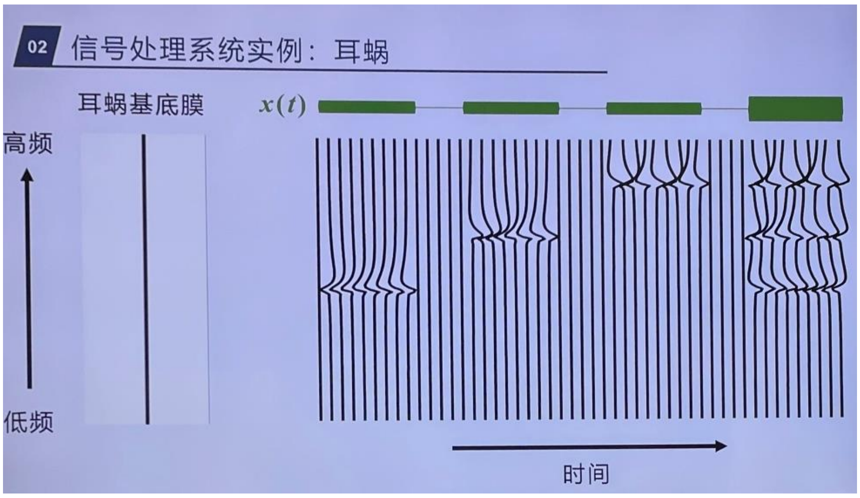
01 引言：应当如何分析现实生活中的复杂信号？

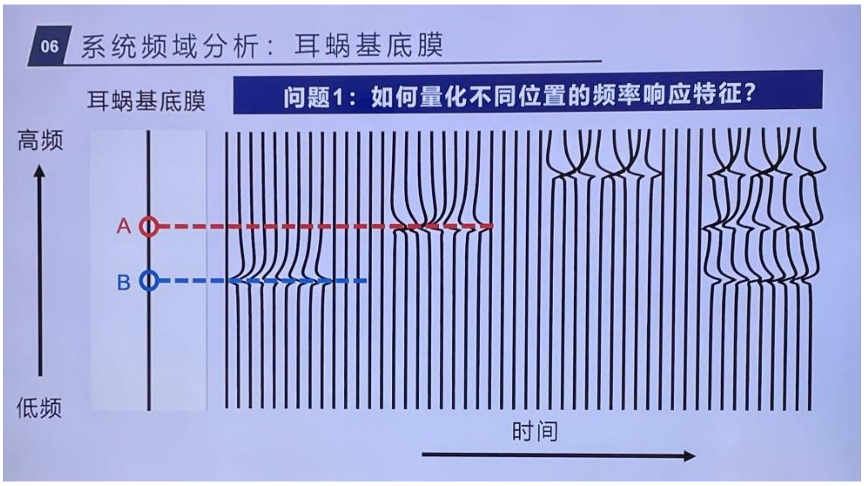
解决方案一：傅里叶变换

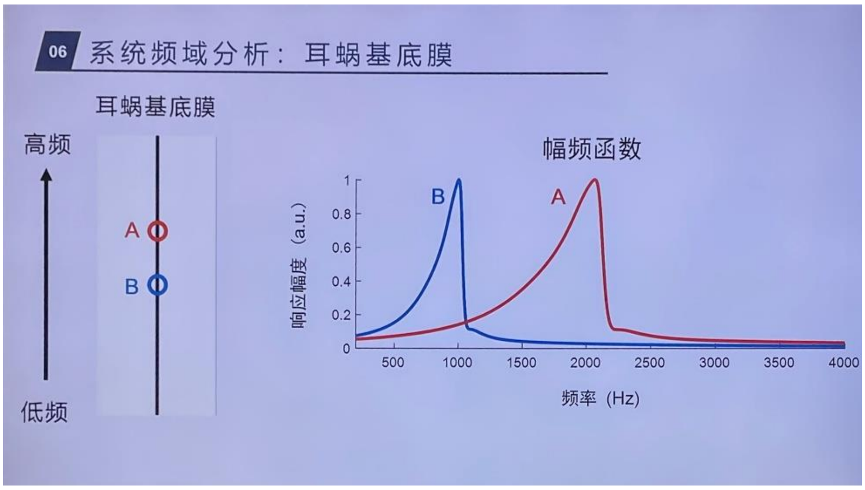


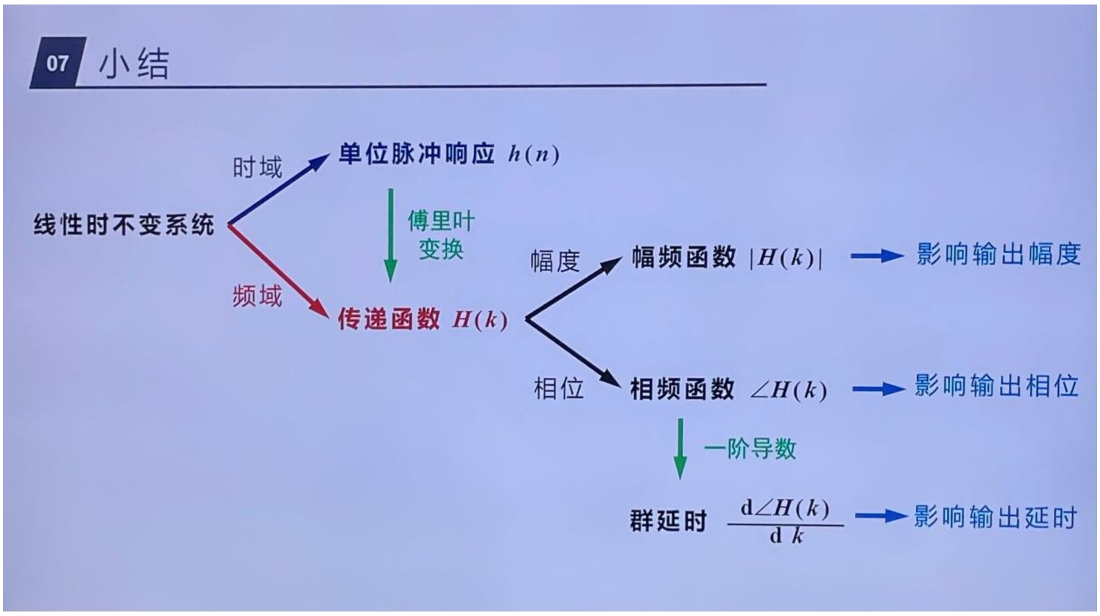
02 信号处理系统实例：耳蜗




02
信号处理系统实例：耳蜗
耳蜗基底膜
$x(t)$
高频
低频
时间

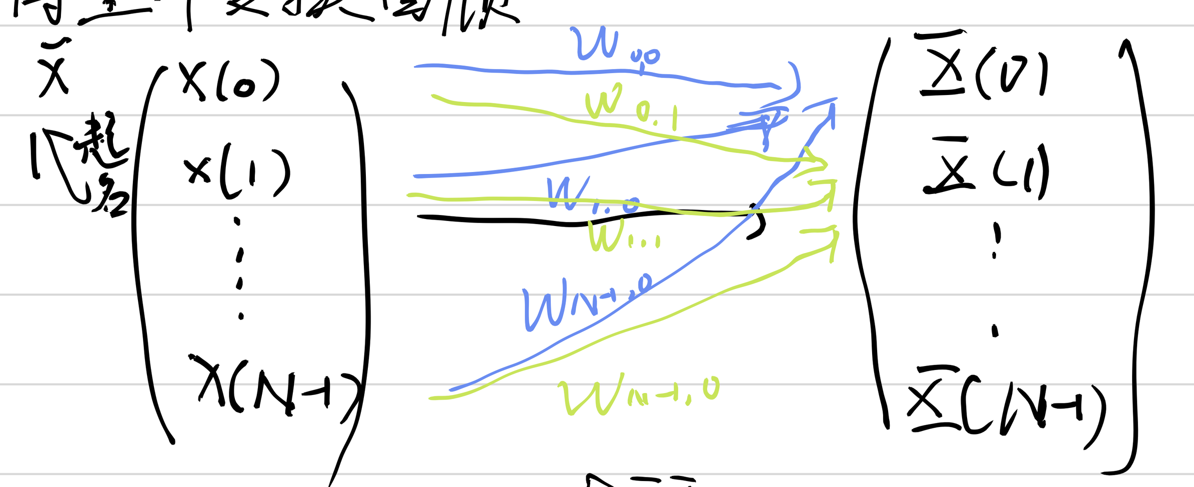

06
系统频域分析：耳蜗基底膜
耳蜗基底膜
问题1：如何量化不同位置的频率响应特征？
高频
A
B
低频
时间


06
系统频域分析：耳蜗基底膜
耳蜗基底膜
高频
A
B
低频
幅频函数
响应幅度（a.u.）
B
A
频率（Hz）


07
小结
时域
单位脉冲响应 $h(n)$
线性时不变系统
傅里叶
变换
频域
传递函数 $H(k)$
幅度
幅频函数 $|H(k)|$
影响输出幅度
相位
相频函数 $\angle H(k)$
影响输出相位
一阶导数
群延时 $\frac{d\angle H(k)}{dk}$
影响输出延时

卷积神经网络

傅里叶变换回顾



N个时间点 $\xrightarrow[IDFT]{DFT}$ N个频率点

$\vec{X}(k) = \vec{W}^T \vec{x}$ 内积

$\vec{W}$ 是 $\begin{pmatrix} W_{0,k} \\ W_{1,k} \\ \vdots \\ W_{N-1,k} \end{pmatrix}$；$\vec{x}$ 在右边

线性变换

DFT，$W_{0,k}$ 是复指数信号

脉冲分解，……还是脉冲

主成分分析

PCA

ICA 独立主成分

$\frac{|W^T x|^2}{|W^T W|}$ 最大 $\vec{W}$

W

深度学习：层数很多（非线性变换）

$(\ ) \rightarrow (\ ) \rightarrow (\ ) \rightarrow (\ ) \rightarrow (\ )$

$\vec{x} \quad \vec{X} \quad \vec{Y} \quad \vec{Z} \quad \vec{M}$

较简单的非线性处理是为 $\vec{x}$、$\vec{X}$ 加绝对值

$\vec{X} = W_x |\vec{x}|$

$\vec{Y} = W_y |\vec{X}|$

语言处理模型

为什么用向量表示字词？ PPT：词具有多维的语义特征

Maybe：对信号来说十分直观

但好处并不绝对

考虑到不同维度对词的描述 eg. 苹果 $\begin{pmatrix} 颜色 \\ 味道 \\ \vdots \\ 生命 \end{pmatrix}$

便于计算，结果看具体维度

计算语言模型　概述

语言模型的定义：语言模型是预测句子出现概率的模型

通俗解释：语言模型可以判断一句话有多么常见

P(“我喜欢吃巧克力”) > P(“我喜欢吃桌子”)

P(“猫追老鼠”) > P(“猫老鼠追”)

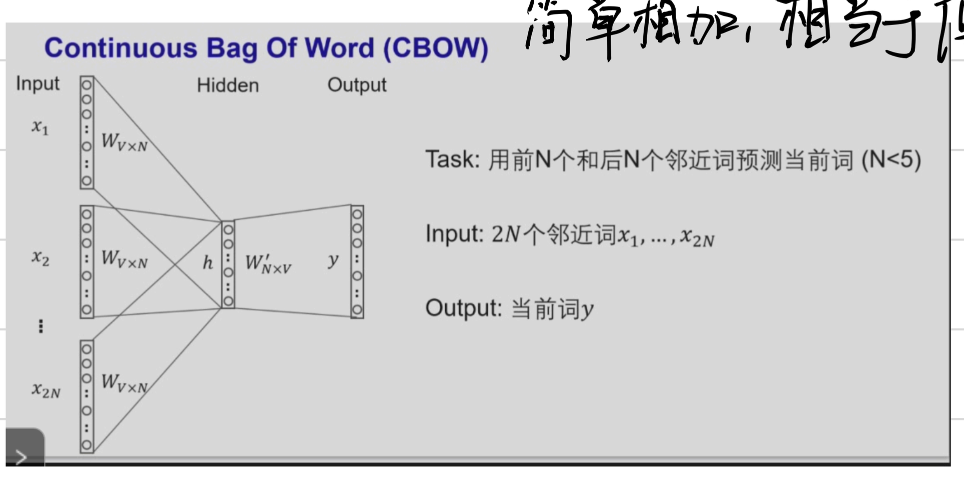
语言模型的目标

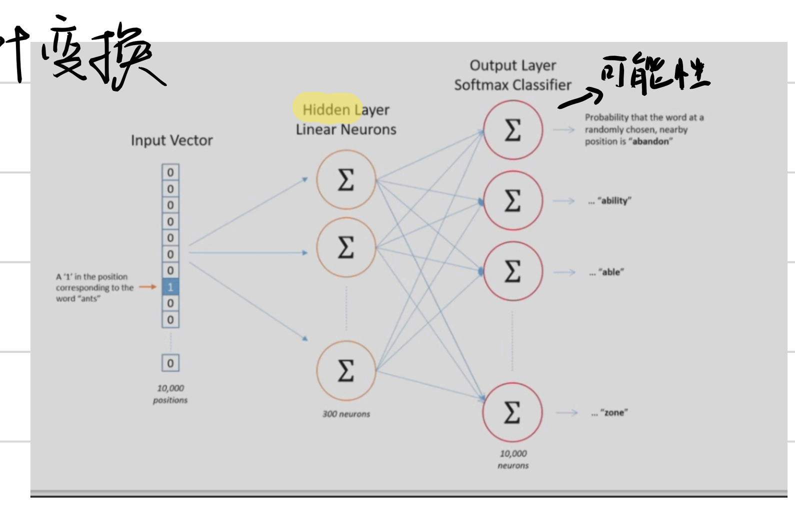
- 计算一个句子的出现概率：
  $P(S) = P(w_1, w_2, \ldots, w_n) = P(w_1) * P(w_2|w_1) * \cdots * P(w_n|w_1, w_2, \ldots)$
- $P(w_n|w_1, w_2, \ldots)$ 给定上文之后，一个词汇出现的概率
- 语言模型的实际功能：**根据上文或上下文预测下一个词**

更高效融合上下文信息

1. 词袋模型：CBOW，skip-gram ……

简单相加，相当于傅里叶变换

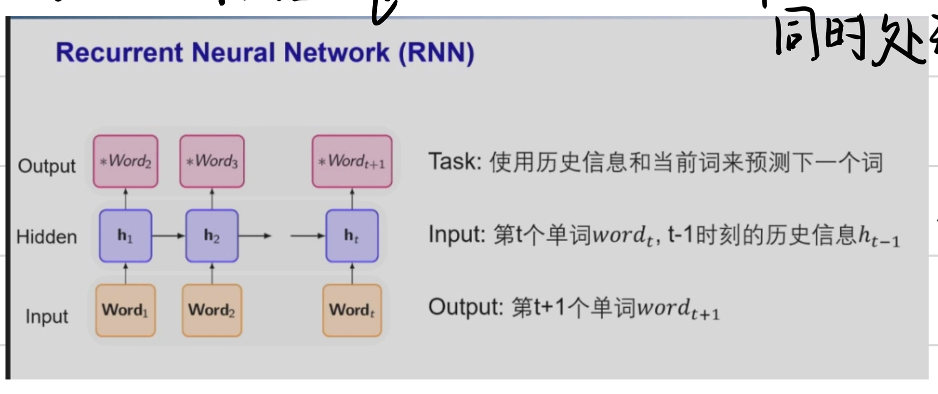




2. 循环神经网络模型：RNN-LM，LSTM

认知模型 更像人脑 而非计算机

同时处理词本身以及上一隐藏层



缺：遗忘快，指数衰减

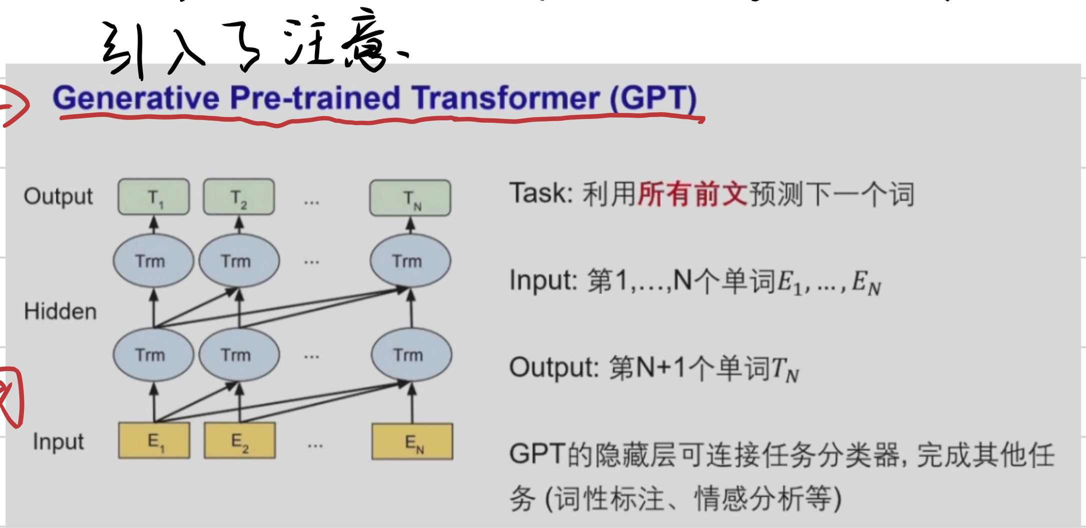
优：能记忆

3. Transformer 模型：BERT 上下文预测　GPT 上文预测　具有不错的 WM

特殊的处理方式，不同于傅里叶变换.

引入了注意.

空白 →



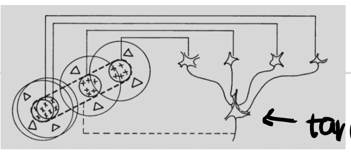
需要学习

1. 针对特定任务的训练
2. 预训练＋微调
3. 上下文学习. eg. chat GPT.

视觉学习

如何将光点响应变为线性响应

模型



词化：降采样的过程

x = upsample (x , 10);