4.1 滤波

1 基础概念

滤波

滤波（一般）

根据有用信号与噪声信号所具有的不同特性实现二者有效分离，消除或减弱干扰噪声，以强化有用信号。

滤波（广义）

从原始信号中获取目标信息。

滤波器

实现信号滤波功能的系统。

从系统的角度看，滤波器是在时域具有脉冲响应 $h(n)$ 的可实现的**线性时不变系统（LTI系统）**。滤波的本质就是通过系统的幅频特性及相频特性分别改变输入信号的幅度与相位。

滤波器的分类

- 现代滤波器：运用特定算法估算信号的某些统计特征并进行分类滤波。
- 经典滤波器：具有合适**频率特性**的滤波器。

  按照构成滤波器元件的性质：

  无源滤波器：由无源元件（如电阻 R、电容 C 和电感 L 等）组成。

  有源滤波器：含有有源器件（如运算放大器）。

  按滤波器的频率特性：

  低通滤波器、高通滤波器、带通滤波器、带阻滤波器、全通滤波器......

> 低通：规则为低频信号能正常通过，而超过设定临界值的高频信号则被阻隔、减弱。
>
> 高通：规定为高于设定临界值频率的信号能正常通过，而低于设定临界值频率的信号则被阻隔和衰减。
>
> 带通：可以看作是由高通和低通滤波器协同作用的结果，高通和低通滤波器的截止频率可作为通带的下限频率和上限频率。其主要参数是中心频率和带宽，上限频率和下限频率之差就是滤波器的带宽。
>
> 带组：指能通过大多数频率分量、但将某些范围的频率分量衰减到极低水平的滤波器，与带通滤波器的概念相对。

对于理想的滤波器，其通带内的增益为正，即通带内 $H(e^{j\omega}) > 0$（通常设置 $H(e^{j\omega}) = 1$），阻带内的增益为 0，即 $H(e^{j\omega}) = 0$ 。

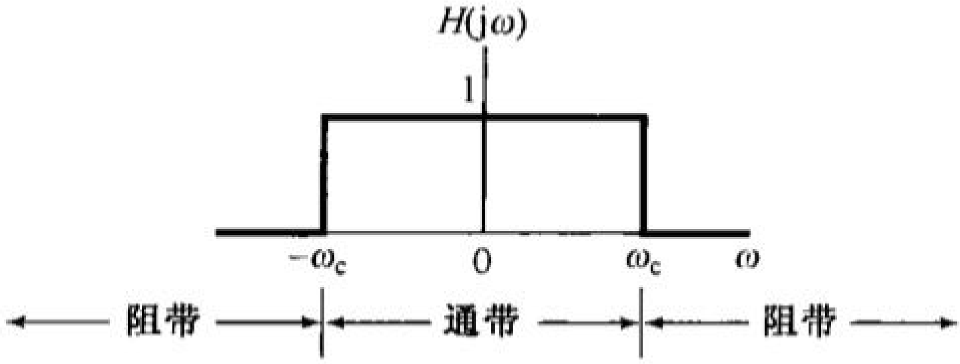
理想低通滤波器

连续时间理想低通滤波器:

$$H(jw)=\begin{cases}1, & |\omega|\le\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

ω_c： 截止频率。

如图所示:



e.g. 简单RC低通滤波器

如图示意了一个简单的RC低通滤波器，满足:

$$RC\frac{dv_c(t)}{dt}+v_c(t)=v_s(t)$$

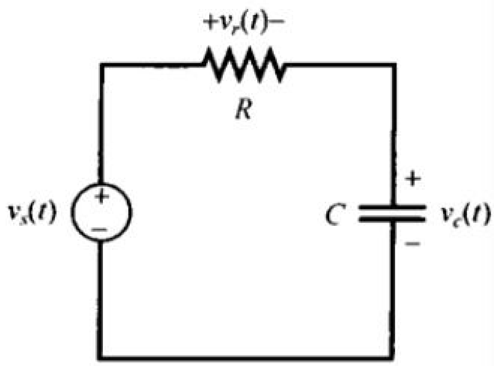
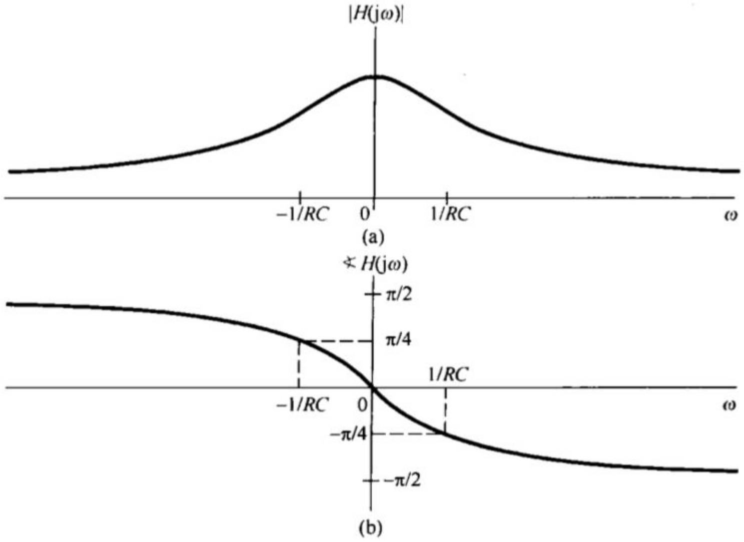


图 3.29　一阶 RC 滤波器

该系统的频率响应:

$$H(jw)=\frac{1}{1+RCjw}$$

图像见下:



推导过程详见《信号与系统》。

FIR滤波器

当滤波器的单位脉冲响应为有限长信号时，滤波器被称为有限长单位脉冲响应滤波器，即FIR（Finite Impulse Response）滤波器。窗即可以算作是一种FIR滤波器。FIR滤波器有两个优点，因为其单位脉冲响应有限长，所以FIR滤波器一定为稳定系统，另外，通过进行设计，可以使得FIR滤波器满足线性相位的条件。

一般来说，物理系统的单位脉冲响应都是无限长的。

2 线性时不变系统的频域响应

根据2.1.2章节的内容，对于一个LTI系统而言，系统输入为 $x(n)$，系统的单位脉冲相应为 $h(n)$，那么系统的输出 $y(n)=x(n)*h(n)$。根据DTFT的线性卷积定理，上式可以变化到频域：

$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

其中 $Y(e^{j\omega})$，$X(e^{j\omega})$，$H(e^{j\omega})$ 分别代表 $x(n)$，$y(n)$，和 $h(n)$ 的DTFT。其中，$H(e^{j\omega})$ 被称为LTI系统的频率响应，频率响应本质上就是系统的单位脉冲响应的离散时间傅里叶变换。

一般情况下，离散时间LTI系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 是一个复值函数，可用幅度和相位表示为：

$$H(e^{j\omega})=|H(e^{j\omega})|e^{j\phi_h(\omega)}$$

式中，$|H(e^{j\omega})|$ 称为系统的**幅频响应函数**，$e^{j\phi_h(\omega)}$ 称为系统的**相频响应函数。**

同理，对于系统的输入及输出信号的DTFT，也可以进行如上式所示的变形：

$$X(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})|e^{j\phi_x(\omega)}$$

$$Y(e^{j\omega})=|Y(e^{j\omega})|e^{j\phi_y(\omega)}$$

那么，进一步的式xx可以进一步改写为：

$$Y(e^{j\omega})=|Y(e^{j\omega})|e^{j\phi_y(\omega)}=|X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j\phi_x(\omega)}e^{j\phi_h(\omega)}$$

所以：

$$\begin{cases}|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})| \\ \phi_y(\omega) = \phi_x(\omega) + \phi_h(\omega)\end{cases}$$

因此，LTI系统的作用就是在幅度和相位上对输入信号进行改变。幅频特性函数 $H(e^{j\omega})$ 决定了系统对于输入信号在不同频率处的幅度的变化，相频特性函数 $\phi_h(\omega)$ 决定了系统导致的输入信号在不同频率处的相位的移动。

此外，需要说明的是，上述讨论针对的对象为系统的输入信号满足绝对可和条件（即信号存在离散时间傅里叶变换），当输入信号为离散周期信号时，LTI系统对输入信号产生的作用同上述内容一致，即分别对幅度和相位产生影响。

3 窗函数

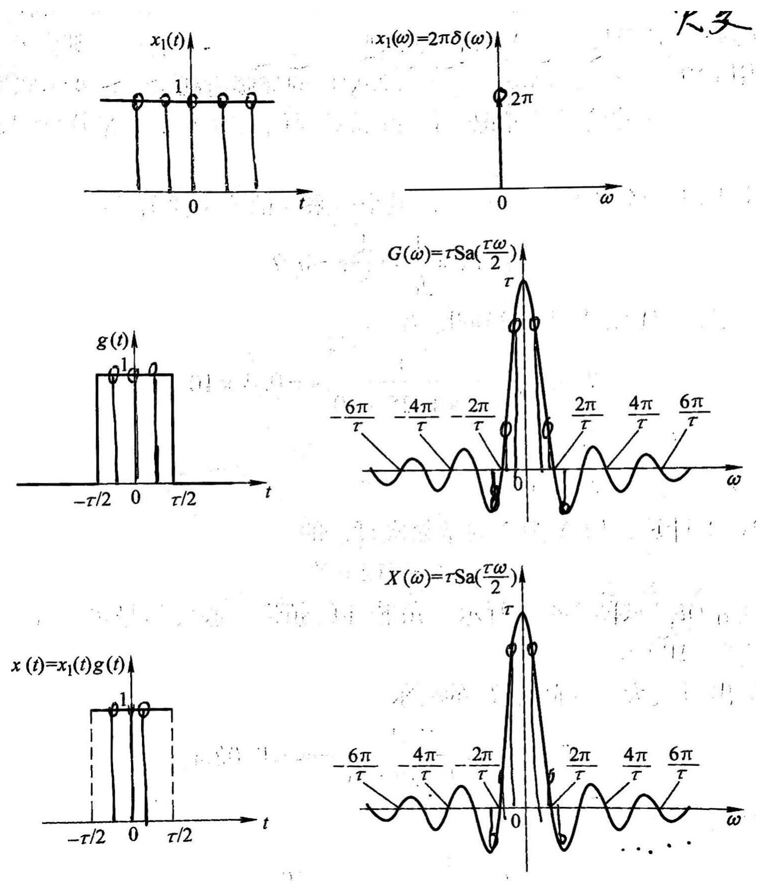
窗函数

窗函数是数字信号处理中用于减少泄漏误差的加权函数。

> 在数字信号处理过程中，每次傅里叶变换只能对有限长度的时域数据进行变换，因此，需要对时域信号进行信号截断。即使是周期信号，如果截断的时间长度不是周期的整数倍（周期截断），那么，截取后的信号将会存在泄漏。为了将这个泄漏误差减少到最小程度（注意我说是的减少，而不是消除），我们需要使用加权函数，也叫窗函数。

一般带限信号的时宽是无限的，不符合DFT在时域对信号的要求，为此要进行加窗截断。

下面给出了一个对单位直流信号加矩形窗截断的例子。



由图可以看出，理论上，我们应当得到形如 $2\pi\delta(\omega)$ 的频谱。但是，当对单位直流信号进行采样、加窗截断后进行 DFT 变换时，却得到了形如 $Sinc$ 函数的频谱；在高频区段，该频谱原则上永远不会衰减至0。

矩形窗的存在造成了频谱泄露，使得得到的频谱谱峰下降、频带扩展。这是矩形窗在时域的突变导致了频域中高频成分衰减比理想状态慢导致的。

解决该问题的方法之一为选取形状合适的窗函数，如三角形窗、升余弦窗等；这些函数在频域有较低的旁瓣，可以有效减少频谱泄露。

4 由差分方程描述的离散时间滤波器

滤波需要体现系统的因果性。

如，某系统经过信号处理后，使得单位脉冲信号的响应为存在双边的 $Sinc$ 函数，这是不符合时间的因果关系的。系统不能在原始的脉冲信号出现之前，就对信号做出响应。

非递归离散时间滤波器

一个有限脉冲响应非递归差分方程的一般形式是：

$$y[n]=\sum_{-N}^{M} b_k x[n-k]$$

若 $N>0$，这类系统是非因果的，因为现在的输出 $y[n]$ 需要依靠未来的输入 $x[n-1]$。当信号处理设计实时处理时，需要取 $N\le 0$。

移动平均滤波

移动平均滤波器就属于一类非递归离散时间滤波器。它的工作原理是：平均输入信号中的多个点，以产生输出信号中的每个点。

这是一种简单的信号滤波算法，用于减小信号中的噪声或去除高频成分，从而平滑信号。它基于对信号中一定窗口内数据的平均值进行计算，对数据进行平滑操作。

e.g. 三点移动平均滤波器

$$y[n]=\frac{1}{3}(x[n-1]+x[n]+x[n+1])$$

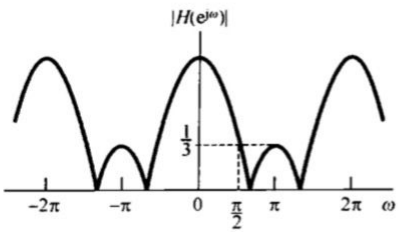
此时的系统响应 $h[n]$：

$$h[n]=\frac{1}{3}(\delta[n-1]+\delta[n]+\delta[n+1])$$

根据信号的特性，此时，相应的频率响应为：

$$H(e^{jw})=\frac{1}{3}(e^{jw}+1+e^{-jw})=\frac{1}{3}(1+2\,cosw)$$

如图所示：



Q：推导两点移动平均滤波器的平滑操作在频域中对应什么操作?

ANS：

$$y[n]=\frac{x[n]+x[n-1]}{2}$$
$$Y(k)=\frac{X(k)+X(k)\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}{2}$$
$$\frac{Y(k)}{X(k)}=\frac{1+e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}{2}$$

5 MATLAB上的实现

5.1 生成并绘制信号和滤波器的频谱和波形

代码：

```
N=100;
n=1:N;
x=sin(pi*35*n/N)./sin(pi*n/N);
x=fftshif(x); %只是把后一半挪到前面去
hold on;
plot(x,'-o')

clear;clc
ideal_filter=[1 ones(1,10) zeros(1,100) ones(1,10)];
ideal_filter=ifft(ideal_filter);
ideal_filter=fftshift(ideal_filter); %可以加
plot(ideal_filter)
clear;clc
ideal_filter=[1 ones(1,100) zeros(1,100) ones(1,100)];
figure;
subplot 221
stem(ideal_filter)
title('spectrum')

ideal_filter=ifft(ideal_filter);
ideal_filter=fftshift(ideal_filter); %可以加
subplot 222
stem(ideal_filter)
title('wave')
```

5.2 加入窗

代码：

```
%有专门的窗函数 window:
%比如bartlet窗即为三角窗，hann窗到末尾是衰减到0的（避免跳变
win_filter=ideal_filter.*hann(length(ideal_filter))';
subplot 223
stem(ideal_filter)
title('wave(windowed)') %加窗之后的振荡小了很多

subplot 224
spec=abs(fft(win_filter));
stem(fftshift(spec))
title('spectrum(windowed)')
```

5.3 使用FIR滤波器

代码：

```
%fir1-FIR滤波器，默认用hamming窗来截断
%低通滤波
clear;clc
fs=100;
N=fs*10;
x=randn(N,1);
x(fs:fs*2)=x(fs:fs*2)+50;%执行这句的时候如果关心这个突然的跳变，需要变成低通（可以整体往前面挪100/2个单位，但是这样就会出现非因果性的信号）；如果希望去除，应该用高通滤波

M=100;
h=fir1(100,10/(fs/2));%如果换成高通，直接加上第三个参数'high'
M=length(h);

figure;
subplot 211
plot(h)
subplot 212
f=0:[M-1];f=f*fs/M;
plot(f,abs(fftH9h))
plot(h)

figure;
subplot 211
plot(x)
subplot 212
y=filter(h,1,x);%信号解读一下，滤波后的更光滑，开头有一段时间没有变化（每个滤波器都会有延迟-暂态相应
y=y([M/2+1]:end);%补偿延迟的代码
%另一种补偿方式：y=filtfilt(h,1,x); 相当于朝前朝后都滤波一遍，不推荐的原因-会改变原先的性质
plot(y)

%看下频谱
f=0:[N-1];f=fs*N
figure;
subplot 211
```

```
plot(f,abs(fft(x)))
subplot 211
y=filter(h,1,x);%信号解读一下，滤波后的更光滑，开头有一段时间没有变化（每个滤波器都会有延迟-暂态相应
plot(y)

%考虑做两点平均
clear;clc
fs=100;
N=fs*10;
x=randn(N,1);
x(fs:fs*2)=x(fs:fs*2)+50;

h=[1/2 1/2];
M=length(h);
```