第四周笔记整理

一、离散非周期信号的处理

在上课时，老师演示过用傅里叶变换处理有噪音的信号。若该信号是“$\sin(\omega t)+\varepsilon$”，$\varepsilon$是噪音，那么该信号严格来说并不是一个周期信号，不可能每隔一段时间完全重复，那么该信号可以用傅里叶变换吗？

答案是可以的。事实上对不同性质的信号进行处理所用的方法也是有不同的名字的：

①离散时间(Discrete Time, DT)周期信号 → 傅里叶级数 (DTFS)

②离散时间非周期信号 → 离散时间傅里叶变换 (DTFT)

③离散时间有限长信号 → 离散傅里叶变换 (DFT)

因此对于离散的非周期信号，我们也可以进行傅里叶变换分析，具体的数学证明可以阅读老师发的笔记。主要的思路就是，我们获得了一段时间的信号后，假设上一段和下一段相同的时间也是同样的信号（如下图所示，中间那段是我们实际观测到的信号），这样重复后我们就得到了一个周期性的信号，接着再用之前的傅里叶变换进行处理就行了。这样的过程有一个专门的名字：周期延拓。

可以发现，我们使用傅里叶变换仅能处理当前观测到的信号，它并不能对未来将出现的信号进行预测。

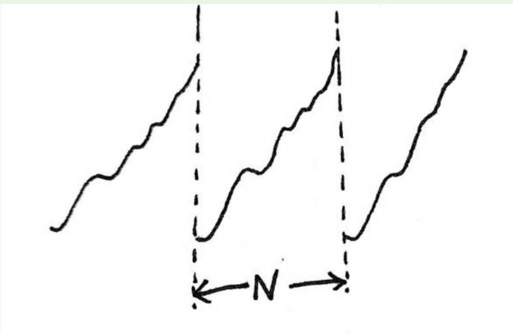


图 1-1 周期延拓示意图

下附老师的笔记：

5.4 非周期信号的离散时间傅里叶变换（DTFT）

错误!未找到引用源。小节介绍了周期信号可以通过傅里叶级数展开将其变为若干个不同频率的复指数信号的线性组合，相当于可以将周期信号由时域变化为频域，那对于一个离散的非周期信号，是否可以表示为若干个复指数信号的线性组合形式呢？

设序列 $x(n)$为长度为 N 的离散信号，即在 $0 \le n \le N$-1 范围之外，$x(n) = 0$，对于该信号，如果以 N 进行周期延拓，可以得到一个离散周期信号 $\tilde{x}(n)$，其中 $x(n)$为$\tilde{x}(n)$的主值序列，或者说 $x(n)$是$\tilde{x}(n)$的一个周期。对于周期信号$\tilde{x}(n)$，可以进行离散傅里叶级数展开：

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

(0.1)

因为在 $0 \le n \le N$-1 范围内，$x(n) = \tilde{x}(n)$ 所以，傅里叶级数的系数 a_k 可以进一步改写为：

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \end{aligned}$$

现在定义函数：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} \tag{0.2}$$

那么：

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega_0 k}), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N} \tag{0.3}$$

将式(0.3)代入式(0.1)，可得：

$$\begin{aligned} \tilde{x}(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N} \\ &= \frac{\omega_0}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \end{aligned}$$

当 N 趋近于∞时，$x(n) = \tilde{x}(n)$，上式求和形式进一步转化为积分的形式：

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \tag{0.4}$$

式 xx 表明，对于非周期离散信号，可以写成无数个复指数信号之和的形式，所以定义式(0.2)为离散时间傅里叶变化（DTFT），式(0.4)为离散时间傅里叶逆变化，也表明非周期

离散信号的频谱是周期为 2π 的连续信号。

即：

$$X(e^{j\omega}) = \mathrm{DTFT}(x(n)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \tag{0.5}$$

$$x(n) = \mathrm{IDTFT}(X(e^{j\omega})) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \tag{0.6}$$

特别说明一点，并不是对于所有的非周期离散时间信号都存在离散时间傅里叶变换，序列 $x(n)$的傅里叶变换存在的充要条件为序列 $x(n)$绝对可和，即满足：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty \tag{0.7}$$

二、离散时间傅里叶变换的性质

在学习性质之前，我们可以先了解一下复数的性质。如图 1-2 所示，$a = Ae^{j\theta}$是一个复数。$A = |a|$，被称为复数的模；θ是负数的相位；a的共轭复数为$a^{*} = Ae^{-j\theta}$。

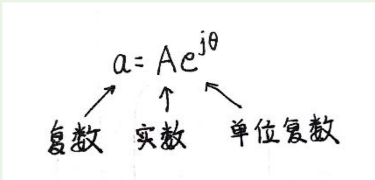


图 1-2 复数举例

下面就来看一下离散时间傅里叶变换的几个性质：

（一）共轭对称。得到的频谱是左右对称的，证明如下：

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\frac{2\pi k}{N}\cdot n}, \quad a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}\cdot n}$$

$$a_k^{*} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j\frac{2\pi k}{N}\cdot n} = a_{-k} = a_{N-k}$$

$$|a_k^{*}| = |a_{N-k}| = |a_k|$$

（二）线性：$ax(n) + by(n) \to aX(k) + bY(k)$

$$x[n] \xrightarrow{\mathrm{DFT}} X(k), \quad y[n] \xrightarrow{\mathrm{DFT}} Y(k)$$

令 $z[n] = ax[n] + by[n]$，$z[n] \longrightarrow Z(k)$

则 $Z(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} z[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}\cdot n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} (ax[n] + by[n]) e^{-j\frac{2\pi k}{N}\cdot n}$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} ax[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}\cdot n} + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} by[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}\cdot n}$$

$$= aX(k) + bY(k)$$

因此 $ax[n] + by[n] \longrightarrow aX(k) + bY(k)$

（三）时移特性：$x(n-m)\ =e^{-j\frac{2\pi k}{N}m}X(k)$

令 $y[n]=x[n-m]$

$$Y(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}y[n]e^{-j\frac{2\pi k}{N}\cdot n}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n-m]e^{-j\frac{2\pi k}{N}(n-m+m)}$$

$$=\frac{1}{N}\sum\left\{x[n-m]e^{-j\frac{2\pi k}{N}(n-m)}\right\}e^{-j\frac{2\pi k}{N}\cdot m}=e^{-j\frac{2\pi k}{N}\cdot m}X(k)$$

即 $x[n-m]\longrightarrow e^{-j\frac{2\pi k}{N}\cdot m}X(k)$

（四）线性卷积特性：$x(n)*y(n)\rightarrow X(\mathrm{k})Y(k)$

已知$x[n]\xrightarrow{DFT}X[k]$，$y[n]\xrightarrow{DFT}Y[k]$

两个信号的卷积运算的频域表示：$z[n]=x[n]*y[n]\xrightarrow{DFT}X[k]Y[k]$

证明：

根据卷积的定义：

$$z[n]=x[n]*y[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\cdot y[n-m]$$

对卷积结果 $z[n]$ 进行离散傅里叶变换：

$$Z[k]=\sum_{n=0}^{N-1}z[n]\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

将卷积的定义代入到离散傅里叶变换的表达式中：

$$Z[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\cdot y[n-m]\right)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

交换求和次序：

$$\begin{aligned}Z[k]&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\cdot\left(\sum_{n=0}^{N-1}y[n-m]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\right)\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\cdot Y[k]e^{-j\frac{2\pi k}{N}m}\\&=Y[k]\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]e^{-j\frac{2\pi k}{N}m}\\&=X[k]\cdot Y[k]\end{aligned}$$

因此，两个信号的卷积的傅里叶变换等于这两个信号各自的傅里叶变换的乘积。即

$$x[n]*y[n]\xrightarrow{\mathrm{DFT}}X[k]\cdot Y[k]$$

（感谢群内同学的分享）

下附老师的笔记：

5.5 离散时间傅里叶变换（DTFT）性质

若已知离散信号 $x(n)$，$y(n)$及其离散时间傅里叶变化 $X(e^{j\omega})$ 及 $Y(e^{j\omega})$，离散时间傅里叶变换存在以下性质

1）线性：

$$DTFT(ax(n)\ +by(n))\ =aX(e^{j\omega})+\ bY(e^{j\omega}) \tag{0.8}$$

2）时移特性：

$$DTFT(x(n-n_0))\ =e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega}) \tag{0.9}$$

3）线性卷积特性：

$$DTFT(x(n)*y(n))=X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) \tag{0.10}$$

其中*代表线性卷积运算。线性卷积特性表明两个信号时域的卷积相当于频域的相乘，这一性质为后续分析 LTI 系统频域特性提供了思路。

4）频域卷积特性：

$$IDTFT\big(X(e^{j\omega})*Y(e^{j\omega})\big)=x(n)y(n) \tag{0.11}$$

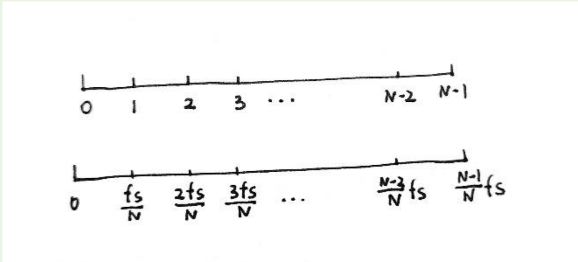
频域卷积特性表明两个信号频域的卷积相当于时域的相乘。

更多对于 DTFT 性质的讨论详见《信号与系统》。

三、周四课程笔记整理

周四的课没有很多的数学证明，老师主要讲了傅里叶变换结果中横坐标单位的理解，并用卷积展示了声音的变换。

（一）横坐标单位的理解



采样频率 fs：单位为 Hz

总采样点 N：无单位

总采样时间 $\frac{N}{fs}$ ：单位为 s

a_k 是$e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$的权重，令 s[n] = $e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$，

则有（s[0] , s[1] , s[2] , s[3],……) = $(e^{j\frac{2\pi k}{N}0}, e^{j\frac{2\pi k}{N}1}, e^{j\frac{2\pi k}{N}2}, e^{j\frac{2\pi k}{N}3},\ldots\ldots)$

$= (e^{j\frac{2\pi k}{Tfs}0}, e^{j\frac{2\pi k}{Tfs}1}, e^{j\frac{2\pi k}{Tfs}2}, e^{j\frac{2\pi k}{Tfs}3},\ldots\ldots) = (e^{j\frac{2\pi k}{T}\frac{0}{fs}}, e^{j\frac{2\pi k}{T}\frac{1}{fs}}, e^{j\frac{2\pi k}{T}\frac{2}{fs}}, e^{j\frac{2\pi k}{T}\frac{3}{fs}},\ldots\ldots)$

每两项间的时间差为$\frac{1}{fs}$ ，即采样周期。

$\frac{2\pi k}{T} = \frac{2\pi k\cdot fs}{N}$ ，单位为 Hz。

（二）Matlab 实践

上课展示的部分代码：

```
%正弦信号傅立叶变换后时域与频域图
clear,clc;
fs=100;
t=1/fs:1/fs:10;
N=length(t);
f=0:[N-1];f=fs*f/N;
x=sin(2*pi*12*t);

fx=fft(x);
figure;
subplot 211
plot (x)
subplot 212
plot(f,abs(fx))

x=sign(x);
fx=fft(x);
figure;
subplot 211
plot(x)

% %Matlab处理声音
% uiopen('   ')    %引号内填写文件路径
% data=data(:,1)    %读取第一个声道数据
% plot(data)
% sound(data,fs)
```