Práctica 1 - AD137-Estadística

Julio César Ramirez-Pacheco

01/10/2020

Variables aleatorias discretas

Como se ha mencionado en clases pasadas existen tres tipos de variables aleatorias; discretas, continuas y mixtas. Para nuestro curso, estaremos interesados en las variables aleatorias discretas y continuas. Recordemos que para las variables aleatorias discretas contamos con dos funciones que las describen totalmente; la función de distribución y la función de densidad. La función de distribución está dada por:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

para cualquier valor $x \in \mathbb{R}$. La función de masa de probabilidad es la otra función que se define de la siguiente manera:

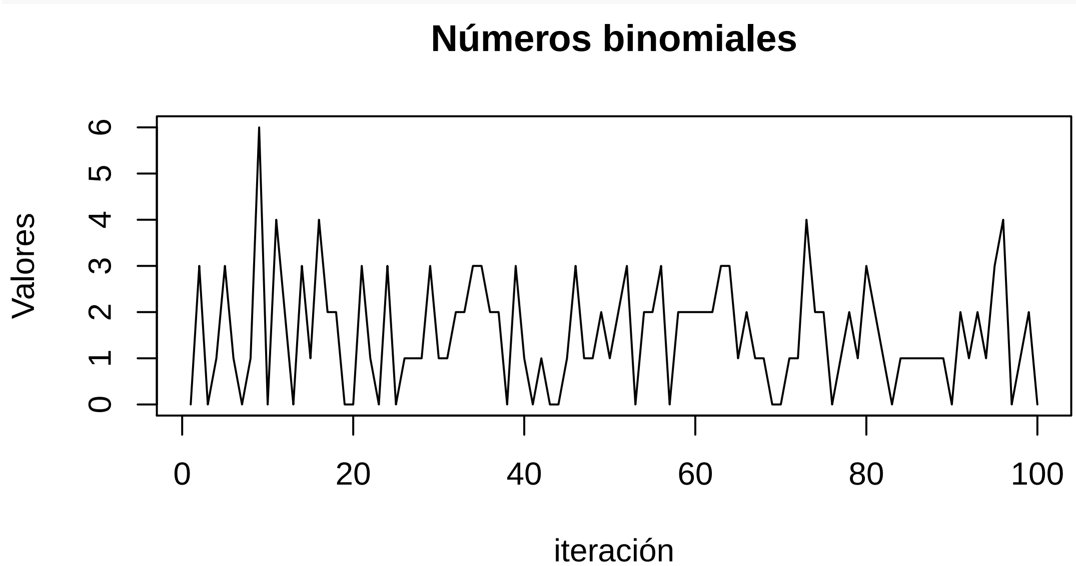
$$p_X(k) = P(X = k)$$

Por lo tanto, cuando se nos dá una variable aleatoria discreta ésta está definida por una fórmula que representa $p_X(k)$ o $F_X(x)$. La variable aleatoria binomial, por ejemplo está dada por:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, 2, \dots n$$

En R, los comandos `dbinom, pbinom, rbinom` y `qbinom` generan las pmfs, distribuciones y números aleatorios relacionados a la variable aleatoria discreta Binomial. Por ejemplo, el siguiente código genera 100 números aleatorios de una distriubción binomial con parámetros $n = 16$, $p = 0.1$ y posteriormente se grafican.

```
vars <-rbinom(100, size=16, prob=0.1)
plot(vars, type="l", main="Números binomiales", xlab="iteración", ylab="Valores")
```



Actividad

Investigue la generación de *pmfs* y *cdfs* discretas en R o python y posteriormente calcule las siguientes probabilidades usando únicamente código:

1. Sea X una variable aleatoria que tiene distribución binomial con $p = 0.4$ y $n = 20$. Calcular:

a. $P(X \leq 6)$
b. $P(X \geq 12)$
c. $P(X = 8)$

2. El comando `sample`, me permite generar números aleatorios con una *pmf* que define el usuario. Generar 100 números aleatorios con las siguientes pmfs:

a. $p_X(k) = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

b. $p_X(k) = \frac{k^2}{2870}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 19, 20$

c. $p_X(k) = \log_{10}\left(\frac{k+1}{k}\right) \quad k = 1, 2, 3, \ldots 9$

3. La variable aleatoria binomial depende de los parámetros n y p. Grafique las pmfs y cdfs para (Nota para graficar por parejas puede usar el comando `par(mfrow=(filas, columnas))`) y responda las preguntas:

a. $n = 10$ y $p = 1/2$
b. $n = 10$ y $p = 1/8$
c. $n = 10$ y $4/5$
d. $n = 10$ y $p = 1/2$
e. ¿Tiene algún efecto n y p para que la pmf sea simétrica? ¿Cuál?
f. ¿Qué efecto tiene p en la asimetría?

Variables aletorias continuas

Las variables aleatorias continuas, a diferencia de las discretas, quedan totalmente definidas mediante su PDF y CDF. Existen múltiples variables aleatorias bien conocidas y que sirven para modelar diversos fenómenos. La densidad Gamma está dada por la siguiente ecuación:

$$f_X(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

Actividad

1. ¿Qué efecto tiene incrementar α? Grafique para contestar.
2. ¿Qué efecto tiene β en la forma de la densidad? Grafique para contestar.

Otra variable aleatoria de interés es la variable aleatoria de Cauchy que está definida de la siguiente manera:

$$f_X(x) = \frac{\beta}{\pi([x - \alpha]^2 + \beta^2)}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta > 0$. Supógamos que $\alpha = 5$.

Actividad

1. ¿Qué efecto tiene β en la función de densidad? Grafique para contestar.

Supóngamos que tenemos la siguiente PDF:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a \leq x < c \\ \frac{2}{b-a} & x = c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & c < x \leq b \\ 0 & b < x \end{cases}$$

donde $a < c < c$.

Actividad

1. Grafique la densidad triangular cuando $a = 0$, $b = 4$, $c = 2$
2. Grafique la densidad triangular cuando $a = 1$, $c = 2$, $b = 4$
3. Grafique la densidad triangular cuando $a = -1$, $c = 0$, $b = 1$

Tanto `R` como `python` nos permiten calcular integrales usando los comandos básicos o bién usando sistemas de cómputo algebraíco. R, por ejemplo, puede utilizar un sistema llamado `Ryacas` que permite hacer muchos cálculos de forma simbólica. Ahora, consideremos que tenemos la siguiente PDF:

$$f_X(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Actividad

Calcular, usando los comando de integración o `Ryacas` o `python` las siguientes probabilidades usando la PDF de arriba:

1. $P(X > 1)$
2. $P(2 < X \leq 4)$
3. $P(X \leq 2)$

Finalmente, supongamos que tenemos la siguiente PDF:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-3)^2}{2}}$$

Actividad

1. Graficar $f_X(3 + x)$.
2. Graficar $f_X(3 - x)$.
3. Que hay en común entre estas dos gráficas y qué se puede inferir de $f_X(3 + x)$ y $f_X(3 - x)$

Fecha de entrega: Jueves 8 de Octubre de 2020 ha las 19:00