Fiche Méthode : Algèbre Bilinéaire

Spéciale PSI* | Synthèse de TD

Mémento : Produit Scalaire, Orthogonalité & Distances

I. Produit Scalaire et Norme

Soit E un espace préhilbertien réel muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

✓ **Cauchy-Schwarz :** $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$.

✓ **Cas d'égalité :** Si et seulement si la famille (x, y) est liée (vecteurs colinéaires).

✓ **Identité de la médiane (Parallélogramme) :**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Pour montrer que $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire : 1. **Symétrique :** $\forall (x, y), \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$. 2. **Bilinéaire :** Linéaire par rapport à une variable (donc les deux par symétrie). 3. **Positive :** $\forall x, \varphi(x, x) \geq 0$. 4. **Définie :** $\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0_E$.

Montrer que l'application $\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

II. Orthogonalité et Bases

- **Pythagore :** $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- **Famille Orthogonale :** Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
- **Somme Directe :** En dimension finie, $E = F \oplus F^{\perp}$.

A. Procédé de Gram-Schmidt

Transformer une base libre $(e_1, \dots, e_n)$ en une base orthonormée (B.O.N) $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ telle que $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$.
Méthode : On construit par récurrence :

$$\tilde{\varepsilon}_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i \quad \text{puis} \quad \varepsilon_k = \frac{\tilde{\varepsilon}_k}{\|\tilde{\varepsilon}_k\|}$$

Astuce : On retire à e_k sa projection sur l'espace déjà construit pour l'orthogonaliser, puis on divise par la norme.

Déterminer une famille orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.

III. Projection et Distance

Si F est un SEV de dimension finie, la distance de x à F est atteinte en un unique point : le projeté orthogonal $p_F(x)$.

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \min_{y \in F} \|x - y\|$$

Formule de Pythagore : $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2$.

A. Calcul Pratique de la Distance

Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une **B.O.N.** de F :

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle x, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_k$$

Distance : $d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{p} \langle x, \varepsilon_k \rangle^2$ (Inégalité de Bessel). *Attention :* Si la base est orthogonale mais pas normée, diviser chaque terme de la somme par $\|\varepsilon_k\|^2$.

Calculer $\inf_{(a,b)} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$. Interpréter cela comme le carré de la distance de X^2 au plan $\mathbb{R}_1[X]$.

B. Distance à un Hyperplan

Tout hyperplan H d'un espace euclidien possède un vecteur normal a tel que $H = (\text{Vect}(a))^\perp$.

$$d(x, H) = \frac{|\langle x, a \rangle|}{\|a\|}$$

Le projeté est donné par $p_H(x) = x - \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a$.

IV. Compléments Transposition

A. Transposée et Noyaux

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

✓ $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^T A)$.

✓ $\text{Im}(A^T) = (\text{Ker}(A))^\perp$.

B. Matrice de Gram & Moindres Carrés

La distance de x à $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ peut se calculer via le déterminant de Gram $G(u_i) = (\langle u_i, u_j \rangle)_{i,j}$:

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(u_1, \dots, u_p, x)}{\det G(u_1, \dots, u_p)}}$$

Chercher X minimisant $\|AX - B\|$ revient à projeter B sur $\mathrm{Im}(A)$. Le vecteur X_0 solution vérifie l'équation normale :

$$A^T A X_0 = A^T B$$