Fiche Méthode : Intégrales à Paramètre

Analyse | Continuité, Dérivation & Limites

Mémento : Domination, Leibniz & Convergence Dominée

I. Continuité d'une Intégrale à Paramètre

Soit $F(x) = \int_I f(x,t)dt$. Pour montrer que F est continue sur un intervalle A, il faut vérifier 3 points ("Hypothèses Locales") :

1. $\forall x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
2. $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A.
3. **Hypothèse de Domination (HD) :** Pour tout segment $[a,b] \subset A$, il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ **intégrable** sur I telle que :

$$\forall x \in [a,b], \forall t \in I, \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

La fonction $\varphi(t)$ doit être **indépendante de x** ! **Astuce :** Sur un segment $[a,b]$ (par exemple $x \in [1,2]$), essayez de majorer les termes dépendant de x par des bornes fixes. *Exemple :* Si $x \geq 1$, alors $e^{-xt} \leq e^{-t}$ (pour $t > 0$).

(Fonction Gamma) On définit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. Montrer que Γ est définie et continue sur $]0,+\infty[$. *Indication : Pour la domination sur $[a,b] \subset]0,+\infty[$, couper l'intégrale en $\int_0^1$ (majorer t^{x-1} par t^{a-1}) et $\int_1^{+\infty}$ (majorer t^{x-1} par t^{b-1}).*

II. Dérivation sous le signe Intégral (Leibniz)

Pour montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et que $F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$:

1. $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable pour tout x.
2. $\forall t$, la dérivée partielle $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ existe et est continue.
3. $\forall x$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux.
4. **Domination de la dérivée :** Pour tout segment $[a,b] \subset A$, il existe $\psi(t)$ intégrable telle que $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \psi(t)$.

C'est une technique puissante pour calculer des intégrales "impossibles" directement. 1. Poser $F(x) = \int f(x,t)dt$. 2. Justifier la dérivabilité et calculer $F'(x)$. 3. Calculer l'intégrale $F'(x)$ (souvent plus simple, via IPP ou fractions rationnelles). 4. Intégrer $F'(x)$ pour retrouver $F(x)$ (attention à la constante d'intégration, souvent trouvée via $\lim_{x\to\infty} F(x)$).

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t} dt$ pour $x > 0$. 1. Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. 2. Montrer que $F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$. 3. En déduire la valeur de $F(x)$ sachant que $F(1) = 0$.

III. Limites et Convergence Dominée

Outil royal pour intervertir limite et intégrale ($\lim \int = \int \lim$) quand on est au bord de l'intervalle de définition ou en $+\infty$.

Hypothèses :

- Pour tout n (ou x), f_n (ou $f(x, \cdot)$) est continue par morceaux.
- La suite converge simplement vers une fonction f_∞ continue par morceaux.
- **Domination :** Il existe φ intégrable telle que $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$ pour tout n, t.

(Intégrale de Dirichlet) On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$ pour $x \geq 0$. 1. Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$. 2. Calculer $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ (utiliser la domination par $1/t$ ou e^{-xt}). 3. Sachant que $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ sur $]0, +\infty[$, déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = F(0)$.