Fiche Méthode : Suites de Fonctions

Convergence Simple vs Uniforme

Mémento : Définitions & Théorèmes de Transfert

I. Modes de Convergence

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I.

- **Convergence Simple (CVS) :** Pour tout $x \in I$ fixé, la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$.
- **Convergence Uniforme (CVU) :** La "distance max" entre f_n et f tend vers 0.

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Implication : CVU $\implies$ CVS. La réciproque est fausse !

1. Fixer x et déterminer la limite simple $f(x) = \lim f_n(x)$. 2. Calculer l'écart $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$. 3. Étudier la fonction g_n sur I (dérivée, tableau de variations) pour trouver son maximum $M_n = \sup_I g_n$. 4. Conclure : si $M_n \to 0$, il y a CVU. Si $M_n \not\to 0$ (ou si le sup est infini), pas de CVU.

Exemple Classique : Soit $f_n(x) = x^n$ sur $I = [0,1]$. 1. CVS : $f_n(x) \to 0$ si $x \in [0,1[$ et $f_n(1) \to 1$. La limite f est discontinue en 1. 2. CVU : $\sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0,1[} x^n = 1 \not\to 0$. **Pas de CVU sur [0,1]**.

II. Théorème de Continuité

Si (f_n) est une suite de fonctions **continues** sur I et qu'elle converge **uniformément** vers f sur I (ou sur tout segment de I), alors :

$$f \text{ est continue sur } I$$

Si la limite simple f est discontinue (alors que les f_n sont continues), alors la convergence **n'est pas uniforme**. *Exemple :* x^n sur $[0,1]$ converge vers une fonction discontinue $\implies$ pas de CVU.

III. Théorème d'Intégration

Soit (f_n) des fonctions continues (ou CPM) sur un segment $[a,b]$.

$$\text{Si } f_n \xrightarrow{CVU} f \text{ sur } [a,b] \implies \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

Le Contre-Exemple de la "Bosse Glissante" (Exercice 21) Soit f_n définie sur $[0,1]$ par un "pic" : $f_n(x) = n^2 x(1-nx)$ sur $[0,1/n]$ et 0 ailleurs. 1. **CVS :** Pour tout x fixé, $f_n(x) = 0$ à partir d'un certain rang (car le support $[0,1/n]$ se rétrécit). Donc $f(x) = 0$. 2. **Intégrale :** $\int_0^1 f_n(t)dt$ est proportionnelle à l'aire du triangle de base $1/n$ et de hauteur n. Le calcul donne souvent une constante non nulle (ex : $\neq 0$). 3. **Conclusion :** $\int f_n \not\to \int f (= 0)$. Donc la convergence **n'est pas uniforme**.

IV. Théorème de Dérivation

Attention, les hypothèses sont plus fortes ! Il faut contrôler la dérivée. Si :

1. Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
2. La suite $(f_n(x_0))$ converge en au moins un point x_0.
3. La suite des dérivées (f'_n) converge **uniformément** vers g sur I.

Alors (f_n) converge uniformément vers une fonction f dérivable, et $f' = g$.

$$(\lim f_n)' = \lim(f'_n)$$

Ne cherchez pas à montrer la CVU de f_n directement ! Concentrez-vous sur la CVU de la suite des dérivées f'_n. Si vous l'avez (et la CVS en un point), vous avez tout gagné.

V. Applications Classiques (À connaître par cœur)

A. Approximation de l'exponentielle (Exercice 20)

Soit $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ sur $\mathbb{R}^+$. 1. **CVS :** On sait que $\lim(1 + \frac{x}{n})^n = e^x$. 2. **CVU :** On montre qu'il y a CVU sur tout segment $[0, a]$ mais pas sur $\mathbb{R}^+$ entier (l'écart tend vers l'infini en $+\infty$).

B. Théorème de Weierstrass (Approximation)

Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes. *Utilité :* Pour démontrer une propriété sur les fonctions continues, on peut parfois la démontrer pour les polynômes puis passer à la limite (si la propriété résiste au passage à la limite uniforme, comme l'intégrale).

C. Fonction Zêta de Riemann (Séries - Lien)

Bien que ce soit une série, le lien est direct : $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. La série de fonctions $f_n(s) = n^{-s}$ converge uniformément sur tout demi-plan $[\sigma_0, +\infty[$ avec $\sigma_0 > 1$, assurant la continuité de ζ sur $]1, +\infty[$.