

# Fiche de Révision: DL & Asymptotique

Carnet d'Ingé

## 1 L'Arme Absolue : Le Formulaire

### Développements Limités Usuels en 0 (À savoir par cœur)

$$\begin{array}{ll} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) & \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + o(x^{2n+1}) & \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + o(x^{2n+2}) \\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2) & \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\ \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + o(x^{2n+2}) & \tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6) \\ \cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + o(x^3) & \sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \end{array}$$

## 2 Technique Pure : Opérations Fondamentales

### Méthode : La Division selon les Puissances Croissantes

Pour calculer le DL d'un quotient  $\frac{A(x)}{B(x)}$  (avec  $B(0) \neq 0$ ), on pose une division "à la main".

— **But du jeu :** Éliminer le terme de plus petit degré du reste à chaque étape.

— **Exemple :**  $\tan(x) = \frac{x-x^3/6+\dots}{1-x^2/2+\dots}$

$$\begin{array}{rcl} x - \frac{1}{6}x^3 & & 1 - \frac{1}{2}x^2 \\ -(x - \frac{1}{2}x^3) & \leftarrow (\text{On retire } x \times (1 - x^2/2)) & x + \frac{1}{3}x^3 \quad \leftarrow \text{Résultat} \\ \hline \frac{1}{3}x^3 & \leftarrow \text{Nouveau reste (le } x \text{ est parti)} & \end{array}$$

— **Question mentale :** "Par quoi multiplier 1 (le terme constant du diviseur) pour obtenir  $x$  (le terme du numérateur)?" → Réponse :  $x$ . On écrit  $x$ , on soustrait, et on recommence avec le reste.

### Exercice 1 : Calculs de Référence

Déterminer les développements limités en 0 aux ordres indiqués :

1.  $DL_3(0)$  de  $\frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$  (*Entraînez-vous à poser la division !*)
2.  $DL_3(0)$  de  $\sqrt{3 + \cos x}$  (*La racine composée*)
3.  $DL_2(0)$  de  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$  (*La forme exponentielle*)

## 3 Limites et Précision

### Méthode : Attention à l'ordre !

Si le dénominateur est équivalent à  $x^p$ , il faut impérativement pousser le DL du numérateur jusqu'à l'ordre  $p$  au minimum. Si vous trouvez 0, c'est que vous n'êtes pas allé assez loin.

## Exercice 2 : Le piège de l'ordre

Déterminer la limite suivante lorsque  $x \rightarrow 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

*Indication :* Mettre au même dénominateur. Le bas est équivalent à  $x^4$ , il faut donc un numérateur précis à l'ordre 4.

## 4 Le Changement de Variable

### Règle d'Or

On ne connaît les formules usuelles qu'au voisinage de 0. Si on cherche un DL en  $a \neq 0$ , on pose toujours  $h = x - a$  (donc  $x = a + h$ ) pour se ramener en 0.

## Exercice 3 : DL en un point non nul

Former le  $DL_3(1)$  de la fonction  $\arctan(x)$ .

*Astuce :* Poser  $x = 1 + h$ . Passez par la dérivée !  $(\arctan(1 + h))' = \frac{1}{1+(1+h)^2}$ . Faites le DL de la dérivée, puis intégrez. N'oubliez pas  $\arctan(1)$ .

## 5 Analyse Asymptotique

### Méthode : Le "Bootstrapping"

Pour obtenir un développement asymptotique d'une suite implicite  $x_n$  :

1. Trouver un équivalent simple (ex :  $x_n \sim n$ ).
2. Réinjecter cet équivalent dans l'équation :  $x_n = n - \ln(x_n) = n - \ln(n + o(n))$ .
3. Développer et recommencer pour gagner en précision à chaque étape.

## Exercice 4 : Suites Implicites ( $x + \ln x = n$ )

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère l'équation  $x + \ln x = n$ .

1. Montrer que l'équation admet une unique solution  $x_n$  et que  $x_n \rightarrow +\infty$ .
2. **Équivalent** : Montrer que  $x_n \sim n$ .
3. **Développement Asymptotique** : Donner les 3 premiers termes.

$$x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

## 6 Fonctions Réciproques

### Méthode : Identification

Pour le DL d'une réciproque  $f^{-1}$ , n'essayez pas d'inverser  $f$ . Écrivez la forme théorique du polynôme  $P(y)$  recherché, calculez  $f(P(y))$ , et identifiez les coefficients en utilisant  $f(f^{-1}(y)) = y$ .

## Exercice 5 : DL d'une réciproque

Soit  $f : x \mapsto xe^{x^2}$ .

1. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Former le DL à l'ordre 5 en 0 de  $f^{-1}$ .

## 7 Applications Géométriques

### Exercice 6 : Position relative Courbe / Tangente

Soit  $f(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ .

1. Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0.
2. Le prolongement est-il dérivable ?
3. Donner la position relative de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à sa tangente en 0.

## 8 Intégration de DL

### Exercice 7 : Intégrale Asymptotique

Donner un équivalent en  $+\infty$  de :

$$u_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{dt}{1+t^2}$$

*Indication :* Utilisez une primitive explicite ( $\arctan$ ) et son DL en  $+\infty$ .

## 9 Objectif X / ENS : Au-delà du cours

### COMPLÉMENT DE COURS : SUITES RÉCURRENTES LENTES

On étudie les suites  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$ .

La convergence n'est plus géométrique, elle est très lente (en  $n^{-\alpha}$ ).

**Méthode Universelle :** Pour trouver l'équivalent, on cherche  $\alpha$  tel que la suite  $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$  converge vers une constante non nulle  $C$ . On utilise ensuite le lemme de l'escalier (Cesàro).

#### LE CAS SINUS

On définit  $u_0 \in ]0, \pi/2[$  et  $u_{n+1} = \sin(u_n)$ .

1. Montrer que  $u_n \rightarrow 0$ .
2. Chercher  $\alpha$  tel que  $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$  ait une limite finie non nulle.  
*Indication : Faire un DL de  $\sin(x)$  et tester  $\alpha = -2$ .*
3. En déduire que  $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$ .
4. Pousser le développement asymptotique :

$$u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)$$