Fiche Méthode : Séries Entières

Rayon, Sommation & Équa Diff

Mémento : Algorithmes de Résolution & Astuces Concours

I. Calcul du Rayon de Convergence

Pour une série $\sum a_n z^n$ (avec $a_n \neq 0$), on calcule la limite :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Le rayon de convergence est alors :

$$R = \frac{1}{\ell} \quad (\text{Si } \ell = 0, R = +\infty \text{ ; Si } \ell = +\infty, R = 0)$$

Si la série est de la forme $\sum a_n z^{2n}$ (exemple : $\sum \frac{1}{n} z^{2n}$). **Ne faites surtout pas d'Alembert sur a_n directement pour trouver R !**

1. Poser $Z = z^2$.
2. Trouver le rayon R_Z de la série géométrique ou classique $\sum a_n Z^n$.
3. Le rayon final est $R_z = \sqrt{R_Z}$.

Exemple Type :

Rayon de $\sum\limits_{n\geq 0} 3^n z^{2n}$. Posons $u_n = 3^n (z^2)^n$. C'est une série géométrique de raison $q = 3z^2$. Elle converge ssi $|3z^2| < 1 \iff |z|^2 < \frac{1}{3} \iff |z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Donc $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

II. Calcul de Sommes : $\sum P(n)x^n$

Pour calculer $\sum n^2 x^n$ ou $\sum n x^n$, n'apprenez pas les formules par cœur. Utilisez l'opérateur : Dériver $\xrightarrow{\times x}$ Ajuster.

L'astuce n^2 : Ne dérivez pas deux fois brutalement. Décomposez le polynôme : $\mathbf{n^2 = n(n-1) + n}$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \underbrace{\sum n(n-1)x^n}_{x^2(\sum x^n)''} + \underbrace{\sum n x^n}_{x(\sum x^n)'}$$

III. DSE par Équation Différentielle (L'Algorithme)

C'est la méthode reine pour $f(x) = (\arcsin x)^2$ ou $e^{(\arcsin x)^2}$.

Chercher une relation entre f, f', f'' pour éliminer les fonctions transcendantes. *Exemple :* $y = (\arcsin x)^2 \implies y' = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. Élever au carré et dériver :

$$(1-x^2)y'' - xy' - 2 = 0$$

C'est l'étape où tout le monde se trompe. Soyez rigoureux. On injecte $y = \sum a_n x^n$. Le terme $(1-x^2)y''$ donne deux sommes. La somme "difficile" est $y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$.

L'Action (Changement de variable dans la somme) : Poser $\mathbf{k = n - 2}$ (donc $n = k+2$).

— **Bornes :** $n = 2 \implies k = 0$.

— **Terme :** $n(n-1)a_n \implies (k+2)(k+1)a_{k+2}$.

— **Puissance :** $x^{n-2} \implies x^k$.

On obtient la nouvelle somme propre : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k$.

On regroupe les termes en x^k (ou x^n, c'est un indice muet) :

$$\forall k \geq 0, \quad (k+2)(k+1)a_{k+2} - k^2 a_k = 0$$

On calcule a_0, a_1 avec les conditions initiales $(f(0), f'(0))$ et on remonte de proche en proche.

IV. Retrouver les DSE Usuels

Si vous avez un doute sur arcsin ou arctan, ne devinez pas. Reconstruisez-le.

Pour $f(x) = \arctan x$ ou $\arcsin x$: 1. Calculer la dérivée $f'(x)$. (Ex : $\frac{1}{1+x^2}$ ou $(1-x^2)^{-1/2}$). 2. Développer $f'(x)$ en série entière (Binôme généralisé $(1+u)^\alpha$). 3. **Intégrer terme à terme** entre 0 et x.

$$\int_0^x \left(\sum a_n t^n\right) dt = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Pour calculer le DSE d'un produit $f(x)g(x)$ (ex : $e^x \sin x$) :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

Avec la formule de convolution : $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.