

# ANALYSE VECTORIELLE : Opérateurs et Théorèmes

Carnet d'Ingé

## 1. L'Opérateur Nabla ( $\nabla$ )

Le vecteur symbolique  $\nabla$  représente les dérivées partielles spatiales. Dans une base cartésienne  $(x, y, z)$  :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

## 2. Les Opérateurs Différentiels

### GRADIENT ( $\vec{\nabla} f$ )

S'applique à un **champs scalaire**. Résultat : Vecteur.

$$\vec{\text{grad}}f = \vec{\nabla}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

### DIVERGENCE ( $\nabla \cdot \vec{A}$ )

S'applique à un **champ vectoriel**. Résultat : Scalaire.

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned}$$

### ROTATIONNEL ( $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ )

S'applique à un **champ vectoriel**. Résultat : Vecteur.

$$\vec{\text{rot}}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

### Interprétation Physique

- **Gradient** : Indique la direction de la plus forte variation du champ scalaire.  
*Exemple* : La force dérive du potentiel  $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p$ .
- **Divergence** : Mesure le flux local sortant d'un volume infinitésimal.
  - $\text{Div} > 0$  : Source.  $\text{Div} < 0$  : Puits.
  - $\text{Div} = 0$  : Champ à flux conservatif (ex : Fluide incompressible).
- **Rotationnel** : Caractérise la rotation locale du champ (vorticité).
  - $\text{Rot} \neq \vec{0}$  : Présence de tourbillons.
  - $\text{Rot} = \vec{0}$  : Champ irrotationnel (dérive d'un potentiel scalaire).

## 3. Théorèmes Intégraux Fondamentaux

Ces théorèmes lient une intégrale de volume/surface à une intégrale sur sa frontière.

### Théorème de GREEN-OSTROGRADSKY (Flux-Divergence)

Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée  $\Sigma$  est égal à l'intégrale de sa divergence sur le volume  $\mathcal{V}$  délimité par  $\Sigma$ .

$$\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{A} d\tau$$

*Application* : Électrostatique (Gauss), Bilans de masse.

### Théorème de STOKES (Rotationnel)

La circulation d'un champ vectoriel le long d'un contour fermé  $\mathcal{C}$  est égale au flux de son rotationnel à travers une surface  $\Sigma$  s'appuyant sur  $\mathcal{C}$ .

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}}\vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

*Application* : Théorème d'Ampère, Induction (Faraday).

## 4. Formulaire des Gradients

### Cylindriques $(r, \theta, z)$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

Rappel :  $r$  est la distance à l'axe Oz.

### Sphériques $(r, \theta, \varphi)$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Convention Physique :  $\theta$  colatitude (angle / Oz),  $\varphi$  longitude.

### Identités Remarquables (À connaître par cœur)

- $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} f) = \vec{0}$  (Le rotationnel d'un gradient est nul).
- $\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = 0$  (La divergence d'un rotationnel est nulle).
- $\text{div}(\vec{\text{grad}} f) = \Delta f$  (Opérateur Laplacien scalaire).