Fiche Méthode : Réduction des Endomorphismes

Spéciale PSI* | Synthèse de TD

Mémento de Révision : Les résultats et techniques incontournables

I. Critères Fondamentaux et Polynômes Annulateurs (PA)

- ✓ **CNS :** u est diagonalisable $\iff$ u annule un polynôme P **scindé à racines simples** sur $\mathbb{K}$.
- ✓ **Racines :** $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathrm{Racines}(P)$ pour tout PA P.
- ✓ **L.D.N. (Lemme de Décomposition des Noyaux) :** Si $P(u) = 0$ et $P = Q \times R$ avec $Q \wedge R = 1$, alors :

$$\mathbf{E} = \mathrm{Ker}(\mathbf{Q}(\mathbf{u})) \oplus \mathrm{Ker}(\mathbf{R}(\mathbf{u}))$$

A. Cas des Matrices de Rang 1

- A annule le polynôme $\mathbf{P}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}(\mathbf{X} - \mathrm{tr}(\mathbf{A}))$.
- **Critère :** A est diagonalisable $\iff$ $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

B. Matrice Nilpotente et Déterminants

- A nilpotente $\iff$ $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ (dans $\mathbb{C}$).
- Si A et M commutent, et A est nilpotente : $\det(\mathbf{A} + \mathbf{M}) = \det(\mathbf{M})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ (i.e. A est nilpotente). Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$ commutant avec A. Calculer $\det(A + M)$.

II. Techniques Spécifiques de Réduction

A. Matrices Stochastiques

- ✓ **1** est toujours valeur propre.
- ✓ Pour toute valeur propre complexe λ, on a $|\lambda| \leq \mathbf{1}$.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} \in [0,1]$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$. Soit b une valeur propre complexe de A. Montrer que $|b| \leq 1$ et que si $|b| = 1$, alors $b = 1$.

B. Équation de Commutation $AX = XB$

✓ L'équation homogène $\mathbf{AX} = \mathbf{XB}$ a pour unique solution $\mathbf{X} = \mathbf{0_n}$.

✓ L'équation $\mathbf{AX} - \mathbf{XB} = \mathbf{M}$ admet une solution X **unique** pour tout M.

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ telles que A et B n'ont aucune valeur propre commune. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathbf{AX} - \mathbf{XB} = \mathbf{M}$.

C. Endomorphismes sur Espaces de Fonctions

Pour $T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$:

- L'équation $T(f) = \lambda f$ est équivalente à une E.D.L. 1 obtenue par dérivation.
- Le spectre est $\mathrm{Sp}(T) =]0, 1]$.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on définit $T(f) :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ par $T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$ pour $x > 0$. Déterminer les éléments propres de T.

III. Applications et Outils (Simultanéité)

A. Racines Matricielles

Si A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A)$ sans 0 ou v.p. répétées :

$\Rightarrow$ Une solution X s'écrit $\mathbf{X} = \mathbf{PYP^{-1}}$ où $Y^k = D$.

$\Rightarrow$ $\mathbf{Y}$ est nécessairement **diagonale**.

On veut résoudre l'équation matricielle $X^2 = A$ avec $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que X est solution de $(*)$ ssi $Y = P^{-1}XP$ est solution $Y^2 = D$. Montrer que Y commute avec D puis que Y est diagonale. En déduire les solutions de l'équation $X^2 = A$.

B. Systèmes Différentiels / Suites

Soit $X' = AX + B$ ou $X_{n+1} = AX_n$. Si A est diagonalisable ($A = PDP^{-1}$) :

- **SDL** : L'utilisation de $A = PDP^{-1}$ découple le système en $Y' = DY + P^{-1}B$. Les équations scalaires y_i' sont **indépendantes**.
- **Suites** : $X_n = A^n X_0 = PD^nP^{-1}X_0$. L'expression de u_n dépend des puissances $\lambda_{\mathbf{i}}^{\mathbf{n}}$.

On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in N}$ définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et $\forall n \in N$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 3u_n - 2v_n - w_n \\ w_{n+1} = -v_n + w_n \end{cases}$$

Déterminer une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$ et en déduire l'expression explicite de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

IV. Le Commutant et la Base Cyclique

- ✓ **Commutant :** $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$ est un sous-espace vectoriel stable.
- ✓ **Base Cyclique :** Si u admet une base cyclique (ou est non dérogatoire), alors $\mathcal{C}(\mathbf{u}) = \mathbb{K}[\mathbf{u}]$ (Le commutant est l'ensemble des polynômes en u).
- ✓ **Dimension (Diagonalisation) :** Si u est diagonalisable, alors la dimension de son commutant est $\dim(\mathcal{C}(\mathbf{u})) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathbf{u})} (\dim(\mathbf{E}_\lambda(\mathbf{u})))^{\mathbf{2}}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. On note E_{λ_i} les sous-espaces propres de A de dimensions d_i. Montrer que la dimension du commutant $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$ est égale à $\sum_i d_i^2$.