

Fiche Méthode : Les Incontournables de la Topologie

Équivalence, Lipschitz & Matrices

Mémento : Normes usuelles, Matrices et Fonctions Clés

I. Comparaison et Équivalence des Normes

Deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

Théorème fondamental : En dimension finie, **toutes** les normes sont équivalentes.

Sur \mathbb{K}^n , avec $\|x\|_\infty = \max |x_i|$, $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ et $\|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2}$:

- $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$
- $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$
- $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$ (via Cauchy-Schwarz)

Astuce : Pour retrouver les constantes, tester avec $x = (1, 1, \dots, 1)$ et $x = (1, 0, \dots, 0)$.

Exemple du cours : Montrer que sur $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, $\|f\|_1$ et $\|f\|_\infty$ ne sont **pas** équivalentes.
Méthode : Trouver une suite de fonctions (f_n) telle que $\|f_n\|_1 \rightarrow 0$ mais $\|f_n\|_\infty = 1$ (ex : fonctions "pics" triangulaires de largeur $2/n$ et hauteur 1).

II. Continuité et Fonctions Lipschitziennes

Une application $f : E \rightarrow F$ est k -lipschitzienne si $\forall (x, y), \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E$. **Théorème** : Toute application lipschitzienne est uniformément continue (donc continue).

A. Les 2 Applications Lipschitziennes "Reflexes"

L'application $x \mapsto \|x\|$ est toujours continue. **Preuve** : D'après l'inégalité triangulaire inversée :

$$|||x| - |y|| \leq \|x - y\|$$

C'est l'argument n°1 pour montrer qu'une boule fermée (image réciproque de $[0, r]$) ou une sphère (image réciproque de $\{r\}$) est fermée.

Pour toute partie $A \subset E$ (même non vide quelconque), l'application $f : x \mapsto d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ est 1-lipschitzienne :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$$

Conséquence : L'adhérence \bar{A} est exactement l'ensemble des zéros de cette fonction continue : $\bar{A} = \{x \in E \mid d(x, A) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$.

III. Topologie des Matrices $M_n(\mathbb{K})$

L'application $\det : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est **continue**. **Justification** : Le déterminant est un **polynôme** en les coefficients de la matrice. En dimension finie, les fonctions polynomiales sont continues.

$GL_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices inversibles.

- **C'est un Ouvert** : Car $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$. C'est l'image réciproque de l'ouvert \mathbb{K}^* (\mathbb{R}^* ou \mathbb{C}^*) par l'application continue déterminant.
- **C'est Dense** : Toute matrice M est limite d'une suite de matrices inversibles ($M - \frac{1}{p}I_n$ est inversible pour p assez grand, sauf nombre fini de valeurs propres).
- **Conséquence** : Pour montrer une propriété sur $M_n(\mathbb{K})$ (ex : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$), on la montre sur $GL_n(\mathbb{K})$ et on prolonge par densité/continuité.

A. Continuité des Applications Linéaires et Multilinéaires

Soit E de dimension finie. Toute application linéaire $u : E \rightarrow F$ est **continue**. Il existe $C > 0$ tel que $\forall x, \|u(x)\| \leq C\|x\|$. On définit la norme subordonnée (ou triple norme) : $\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$.

L'application produit $(A, B) \mapsto A \times B$ est bilinéaire continue de $M_n(\mathbb{K})^2$ dans $M_n(\mathbb{K})$. En particulier, si $A_p \rightarrow A$ et $B_p \rightarrow B$, alors $A_p B_p \rightarrow AB$.