

# Fiche Méthode : Intégrales Généralisées

Analyse | Intervalle Quelconque

Mémento : Riemann, Comparaison Calculs

## I. Les Intégrales de Référence (Riemann)

Ce sont les outils de base pour prouver la convergence par comparaison.

- **En  $+\infty$**  :  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  converge  $\iff \alpha > 1$ .
- **En  $0$**  :  $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$  converge  $\iff \alpha < 1$ .
- **Exponentielle** :  $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$  converge  $\iff \lambda > 0$ .

Pour montrer qu'une fonction  $f$  (continue par morceaux) est intégrable sur  $[a, +\infty[$  : 1. Calculez la limite de  $t^\alpha f(t)$  en  $+\infty$ . 2. Si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = 0$  avec  $\alpha > 1$ , alors  $f(t) = o(\frac{1}{t^\alpha})$ . 3. Par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente,  $\int f$  converge.

---

Étudier la convergence de  $I = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$ . Indication : Chercher la limite de  $t^2 f(t)$  en  $+\infty$  pour utiliser le critère de Riemann avec  $\alpha = 2$ .

## II. Comparaison de Fonctions Positives

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux, **positives** au voisinage de la borne critique  $b$ . Si  $f(t) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(t)$ , alors  $\int f$  et  $\int g$  sont de **même nature**.

Attention : Ce théorème est faux si les fonctions changent de signe ! Dans ce cas, il faut passer par la convergence absolue (étudier  $|f|$ ).

---

Étudier l'existence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \ln(\tanh t) dt$ . Méthode : Étudier les équivalents en 0 (via  $\tanh t \sim t$ ) et en  $+\infty$  (via  $\tanh t \rightarrow 1$  et  $\ln(1-u) \sim -u$ ).

### III. Techniques de Calcul

#### A. Changement de Variable (Bijection $\mathcal{C}^1$ )

Pour calculer  $I = \int_a^b f(t)dt$  via  $u = \varphi(t)$  :

1. Vérifier que  $\varphi$  est une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  (strictement monotone).
2. Changer les bornes :  $\alpha = \lim_{t \rightarrow a} \varphi(t)$  et  $\beta = \lim_{t \rightarrow b} \varphi(t)$ .
3. Ne pas oublier l'élément différentiel  $dt = (\varphi^{-1})'(u)du$ .

Si l'intégrale d'arrivée converge, alors l'intégrale de départ converge et les valeurs sont égales.

---

Calculer  $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$ . Indication : Poser  $u = \sqrt{t}$ . Vérifier les nouvelles bornes et montrer que l'on se ramène à une intégrale de référence simple.

#### B. Intégration par Parties (IPP)

Soient  $u, v$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . L'égalité  $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$  est valide si :

- Le crochet  $[uv]_a^b$  admet une limite finie aux bornes.
- L'une des deux intégrales converge (l'autre convergera alors automatiquement).

---

Calculer  $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ . Astuce : Écrire  $\frac{1}{(1+t^2)^2} = \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t \cdot t}{(1+t^2)^2}$ . Intégrer la deuxième partie par parties ( $u = t, v' = \frac{t}{(1+t^2)^2}$ ).

### IV. La Convergence Absolue (Fonctions de signe quelconque)

Si l'intégrale  $\int_I |f(t)|dt$  converge, alors l'intégrale  $\int_I f(t)dt$  converge.

**Contre-exemple classique (Semi-convergence) :** L'intégrale de Dirichlet  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  converge, mais ne converge pas absolument (l'intégrale de  $|\frac{\sin t}{t}|$  diverge).

---

Justifier la convergence de  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ . Indication : Majorer la valeur absolue de la fonction par  $\frac{1}{t^2}$  et conclure par comparaison avec Riemann.