Fiche Méthode : Probabilités

Variables Discrètes (Finies & Infinies)

I. Espace Probabilisé et Propriétés Fondamentales

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

— **σ-additivité :** Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux disjoints :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

— **Continuité croissante/décroissante :** Si $A_n \subset A_{n+1}$, alors $\mathbb{P}(\bigcup A_n) = \lim \mathbb{P}(A_n)$.
Si $A_n \supset A_{n+1}$, alors $\mathbb{P}(\bigcap A_n) = \lim \mathbb{P}(A_n)$.

— **Formule des Probabilités Totales :** Pour tout système complet d'événements $(A_n)_{n\in I}$ (fini ou dénombrable) :

$$\forall B \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{P}(B) = \sum_{n\in I} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n\in I, \mathbb{P}(A_n)\neq 0} \mathbb{P}(B \mid A_n)\mathbb{P}(A_n)$$

II. Variables Aléatoires Discrètes

Loi	**Univers** $X(\Omega)$	$\mathbb{P}(X=k)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{V}(X)$
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$\{0,1\}$	$P(1)=p, P(0)=q$	p	pq
Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	$[\![0,n]\!]$	$\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$	np	npq
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

✓ Rédaction Type (Mots-Clés)

Pour justifier l'utilisation d'une loi, il faut identifier le schéma sous-jacent :

— **Pour la Loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$:** « On répète n fois la même épreuve de Bernoulli de paramètre p (succès/échec). Les épreuves sont **indépendantes**. La variable X compte le **nombre de succès**. »

— **Pour la Loi Géométrique $\mathcal{G}(p)$:** « On répète des épreuves de Bernoulli **indépendantes** de paramètre p. La variable X est le **rang du premier succès**. »

— **Pour la Loi Uniforme $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$:** « Le tirage est **équiprobable** dans l'ensemble fini $\{1,\dots,n\}$. »

— **Pour la Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:** Souvent donnée par l'énoncé ou issue d'une limite de loi Binomiale (événements rares).

Soit X une V.A. à valeurs dans un ensemble dénombrable $E = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$.

— X admet une espérance ssi la famille $(x_k \mathbb{P}(X = x_k))_k$ est **sommable** (convergence absolue).

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$

— **Théorème de Transfert :** $\mathbb{E}(\varphi(X))$ existe ssi la série $\sum |\varphi(x_k)|\mathbb{P}(X = x_k)$ converge. Dans ce cas :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(x_k)\mathbb{P}(X = x_k)$$

III. Fonctions Génératrices (Spécifique PSI)

Pour une V.A. X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit la série entière :

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$$

— **Rayon de convergence :** $R \geq 1$. G_X est continue sur $[-1, 1]$.

— **Caractérisation :** La fonction génératrice caractérise la loi. ($G_X = G_Y \iff X \sim Y$).

— **Indépendance :** Si X et Y sont indépendantes, $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$.

Si le rayon de convergence $R > 1$ ou par continuité en 1^- :

1. **Espérance :** $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.
2. **Variance :** $\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2$.

Note : $G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1))$ *(Moment factoriel d'ordre 2).*

Exemple Type :

Somme de deux lois de Poisson indépendantes : Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$ indépendantes.

— $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} t^k = e^{-\lambda_1} e^{\lambda_1 t} = e^{\lambda_1(t-1)}$.

— $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{\lambda_1(t-1)}e^{\lambda_2(t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(t-1)}$.

— On reconnaît la fonction génératrice d'une loi $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

IV. Inégalités et Théorèmes Limites

— **Inégalité de Markov :** Si $X \geq 0$ admet une espérance :

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

— **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :** Si X admet une variance :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires **indépendantes et de même loi** (i.i.d) admettant une espérance μ et une variance σ^2. Soit $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ la moyenne empirique.
Alors $\overline{X}_n$ converge **en probabilité** vers μ :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$