Fiche Méthode : Calcul Différentiel

Gradients, Extrema & Changements de Variables

Mémento : Primitivation, Règle de la Chaîne Hessienne

I. Reconstruction de Fonctions (Primitivation)

On cherche $f(x,y)$ telle que $\nabla f = (P(x,y), Q(x,y))$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases}$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors l'ordre des dérivées n'importe pas :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Conséquence : Pour que le système admette une solution, il faut impérativement que :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

(C'est le critère de "Forme Différentielle Fermée").

1. **Intégrer** la première ligne par rapport à x (en considérant y constant).

$$f(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y)$$

Note : La constante d'intégration dépend de y !
2. **Dériver** le résultat obtenu par rapport à y.
3. **Identifier** avec la deuxième ligne $Q(x,y)$ pour trouver $\varphi'(y)$.
4. **Intégrer** $\varphi'(y)$ pour trouver $\varphi(y)$ (à une constante réelle près).

II. La Règle de la Chaîne (Chain Rule)

C'est l'outil n°1 pour les changements de variables (polaires, sphériques) dans les équations aux dérivées partielles (EDP).

Soit $g(t) = f(u(t), v(t))$. Alors :

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(u,v) \cdot u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u,v) \cdot v'(t)$$

Moyen mnémotechnique : Somme des chemins. Pour dériver par rapport à t, on passe par toutes les variables intermédiaires.

On pose $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Pour calculer $\frac{\partial F}{\partial r}$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}$:

1. $\dfrac{\partial F}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \underbrace{\cos\theta}_{\partial x/\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \underbrace{\sin\theta}_{\partial y/\partial r}$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \underbrace{(-r\sin\theta)}_{\partial x/\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \underbrace{(r\cos\theta)}_{\partial y/\partial \theta}$

Astuce : On inverse souvent le système pour exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction des dérivées en r et θ.

III. Recherche d'Extrema Locaux (Optimisation)

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U.

On résout le système $\nabla f(x,y) = \vec{0}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

Les solutions sont les "candidats" (points critiques).

En un point critique A, on calcule la Hessienne et ses notations de Monge :

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

On regarde le déterminant $\Delta = rt - s^2$ (ou le produit des valeurs propres).

- Si $\mathbf{rt - s^2 > 0}$: Il y a un extremum.
  - Si $r > 0$ (ou trace > 0) : **Minimum local**.
  - Si $r < 0$ (ou trace < 0) : **Maximum local**.
- Si $\mathbf{rt - s^2 < 0}$: Pas d'extremum. C'est un **Point Selle** (Col).
- Si $rt - s^2 = 0$: Cas douteux (il faut faire une étude locale à la main, ex : $f(x) - f(A)$).

Exemple Type :

Etude de $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$. 1. Gradient nul : $2x - y = 0$ et $2y - x = 0 \implies (0,0)$ seul point critique. 2. Hessienne : $r = 2, s = -1, t = 2$. 3. $rt - s^2 = 4 - 1 = 3 > 0$. Comme $r = 2 > 0$, c'est un **Minimum local**.

IV. Extrema Globaux sur un Compact

Si on cherche les extrema sur un ensemble fermé borné K (ex : disque, triangle) :

Une fonction continue sur un compact atteint ses bornes. L'extremum est soit dedans, soit au bord.
1. **À l'intérieur (l'ouvert) :** Chercher les points critiques (Gradient nul). S'il y en a, calculer la valeur de f en ces points.
2. **Sur la frontière (le bord) :** Paramétrer le bord. Exemple pour le disque $x^2 + y^2 \leq 1$: Le bord est $(\cos t, \sin t)$. Étudier la fonction d'une variable $g(t) = f(\cos t, \sin t)$ sur $[0, 2\pi]$.
3. **Conclusion :** Comparer les valeurs trouvées à l'étape 1 et 2. Le Max est le plus grand, le Min le plus petit.