

Fiche classique : Séries Numériques

Carnet d'Ingé

1 L'Arbre de Décision : Quelle méthode choisir ?

Réflexe Concours : Comment attaquer une série $\sum u_n$?

1. **Vérifier la divergence grossière** : Si $u_n \not\rightarrow 0$, la série diverge. Terminé.
2. **Si u_n est de signe constant (positif)** :
 - Chercher un ****équivalent**** simple $u_n \sim v_n$ (Riemann $\frac{1}{n^\alpha}$, Géométrique q^n).
 - Utiliser les ****croissances comparées**** ($n^\alpha u_n \rightarrow 0$).
 - Comparaison ****Série-Intégrale**** (si $u_n = f(n)$ avec f décroissante).
 - Règle de ****d'Alembert**** (si factorielles).
3. **Si u_n change de signe** :
 - Tester la ****convergence absolue**** ($\sum |u_n|$). Si oui, c'est gagné.
 - Sinon, Critère Spécial des Séries Alternées (****CSSA****).
 - Sinon, développement asymptotique : $u_n = v_n + w_n$ avec $\sum v_n$ convergente (CSSA) et $\sum w_n$ absolument convergente.

2 Niveau 1 : Étude de Nature (Équivalents et DL)

Exercice 1 : Les Cas d'École

Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$ (Le piège du grossier)
2. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$ (L'équivalent n'est pas nul !)
3. $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (DL obligatoire)
4. $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$ (Série alternée)

Conseil : Pour le 3, passez à l'exponentielle : $(1 + 1/n)^n = \exp(n \ln(1 + 1/n))$. Poussez le DL assez loin pour attraper le terme en $1/n$ ou $1/n^2$.

Attention aux équivalences !

L'équivalence $u_n \sim v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ de même nature ne marche ****QUE**** pour les séries à termes positifs (ou de signe constant à partir d'un certain rang). **Interdit** sur les séries alternées (ex : $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, pourtant l'une diverge et l'autre converge).

3 Niveau 2 : Calcul de Sommes (Télescopage)

Méthode : Élément Simple + Télescopage

Si u_n est une fraction rationnelle $P(n)/Q(n)$, on décompose en éléments simples pour faire apparaître une somme télescopique du type $(v_n - v_{n+1})$ ou $(v_n - v_{n+2})$.

Exercice 2 : Fractions Rationnelles

Montrer la convergence et calculer la somme de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Méthode : Décomposer en $\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$. Écrire les sommes partielles S_N , faire les changements d'indice pour annuler les termes, puis passer à la limite $N \rightarrow \infty$.

Exercice 3 : Logarithmes

Étudier la nature et la somme éventuelle de la série :

$$u_n = \ln \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 2} \right) \quad \text{ou} \quad v_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$$

Indication : Tout ce qui est logarithmique se télescope souvent ($\ln(a/b) = \ln a - \ln b$).

4 Niveau 3 : Comparaison Série-Intégrale

Le Théorème

Si f est continue, positive et **décroissante** sur $[1, +\infty[$, alors $\sum f(n)$ et $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature. De plus, on a l'encadrement pour le reste ou la somme partielle :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt$$

Exercice 4 : Bertrand et Asymptotique

1. Déterminer la nature de la série de Bertrand : $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$.
2. Trouver un équivalent simple de la somme partielle : $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$.

Méthode : Encadrer u_k par $\int_k^{k+1} f(t)dt$ et $\int_{k-1}^k f(t)dt$, puis sommer les inégalités (Chasles).

5 Niveau 4 : Séries Alternées et Semi-Convergence

Exercice 5 : Le développement asymptotique (Vital en Spé)

Étudier la convergence de la série :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

Piège : $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, mais on ne peut pas conclure (termes non positifs). **Méthode** : Faire un DL en $1/\sqrt{n}$.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

La série est la somme d'une série convergente (CSSA) et d'une série divergente (Harmonique). Donc elle **diverge**.

6 Raisonnements Fins

EXERCICE 6 : TRANSFORMATION D'ABEL

Étudier la convergence de la série $\sum \frac{\cos(n)}{n}$ ou $\sum \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$.

Méthode : C'est la "sœur" de l'intégration par parties pour les sommes discrètes. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \sin k$ (qui est bornée). On écrit $\frac{1}{\sqrt{n}}$ comme différence.

EXERCICE 7 : SÉRIE DES RESTES

Soit $\alpha > 1$. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Trouver un équivalent de R_n quand $n \rightarrow \infty$.
2. Quelle est la nature de la série $\sum R_n$?

Indication : Comparaison Série-Intégrale pour l'équivalent ($R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$). Puis on réapplique Riemann sur le résultat.

EXERCICE 8 : PRODUIT DE SÉRIES

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^n \ln(1 + x/k)$.

Méthode : Passer au logarithme pour transformer le produit en somme : $\ln(u_n) = \sum \ln(\dots) - n \ln x + \ln n!$. Utiliser Stirling.