Fiche de Synthèse : Inégalités

Programme de prépa

I. Espaces Préhilbertiens et Normes (Algèbre Bilinéaire)

Soit E un espace préhilbertien réel muni du produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$.

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad |\langle x|y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Cas d'égalité : Si et seulement si la famille (x,y) est liée (colinéaires).

— **Espace $\mathbb{R}^n$ (Produit scalaire canonique) :**

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$$

— **Espace des fonctions continues (ou L^2) :**

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(t))^2 dt\right)\left(\int_a^b (g(t))^2 dt\right)$$

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Conséquence (Seconde inégalité triangulaire) :

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$$

Cas d'égalité : Ssi $y = \lambda x$ avec $\lambda \geq 0$ (positivement liés).

Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille **orthonormale** d'un espace préhilbertien E. Pour tout $x \in E$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \langle x|e_k\rangle^2 \leq \|x\|^2$$

Note : Il y a égalité (Parseval) si et seulement si x appartient à l'adhérence de l'espace engendré par les (e_k).

II. Analyse Réelle et Calcul Différentiel

Soit $f : I \to E$ une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans un e.v.n E. Si $\|f'\|$ est majorée par K sur I (i.e. $\sup_{t\in I} \|f'(t)\| \leq K$), alors :

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad \|f(b) - f(a)\| \leq K|b-a|$$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Soit $(a,b) \in I^2$. Si $|f^{(n+1)}|$ est majorée par M_{n+1} sur le segment $[a,b]$, alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|b-a|^{n+1}$$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe (dérivable).

— **Position relative Cordes :** $\forall t \in [0,1], \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$

— **Position relative Tangentes :** $\forall x \in I, \forall a \in I, \quad f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$

Inégalités usuelles dérivées :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x \quad ; \quad \forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x \quad ; \quad \forall x \in [0, \pi/2],\ \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

III. Topologie et Opérateurs

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ où E est de dimension finie. u est toujours continue. Il existe une constante $C \geq 0$ (norme subordonnée $|||u|||$) telle que :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E$$

Même principe pour les applications bilinéaires (ex : produit matriciel $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ pour une norme d'algèbre).

Si E est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Pour deux normes N_1 et N_2, il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

IV. Probabilités (Variables Discrètes)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète.

— **Inégalité de Markov :** Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ et $\mathbb{E}(X)$ existe :

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

— **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :** Si X admet une variance finie :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$