Fiche de Révision : Suites Numériques (Niveau Sup)

Carnet d'Ingé

1 Outils Fondamentaux de Convergence

Théorèmes de base

— **Théorème de la Limite Monotone :** Toute suite réelle croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge. (Sinon, elle diverge vers l'infini).

— **Théorème des Gendarmes :** Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ et que $v_n \to \ell$ et $w_n \to \ell$, alors $u_n \to \ell$.

— **Suites Extraites :** Si (u_n) converge vers ℓ, alors toutes ses suites extraites (u_{2n}, u_{2n+1}, etc.) convergent vers ℓ.

— **Recouvrement :** Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la **même** limite ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.

Exercice Type : Croissance et convergence

Soit (u_n) une suite **croissante**. Si la suite extraite (u_{2n}) converge, alors (u_n) converge. *Idée :* Utiliser la croissance pour encadrer u_n par des termes de la sous-suite convergente ($u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_{2n+2}$).

2 Suites Adjacentes

Définition et Théorème

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si :

1. L'une est croissante, l'autre est décroissante.
2. $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Conséquence : Elles convergent vers la **même limite** ℓ et on a l'encadrement $\forall n, u_n \leq \ell \leq v_n$ (si u croissante).

Classique 1 : Sommes Harmoniques

Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On ne peut pas appliquer les adjacentes directement sur H_n (elle diverge). Mais on étudie souvent les suites modifiées :

$$u_n = H_n - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = H_n - \ln(n+1)$$

Elles sont adjacentes et convergent vers la **constante d'Euler** γ.

Classique 2 : Moyenne Arithmético-Géométrique

Soient $0 < a < b$. On définit $u_0 = a, v_0 = b$ et :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

On montre que $u_n \leq v_n$ (Inégalité arithmético-géométrique), que u croît, v décroît et $v_n - u_n \to 0$. Elles convergent vers une limite commune $M(a, b)$.

3 Limites de Sommes (Lien Analyse)

Comparaison Série-Intégrale

Pour encadrer $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ où f est monotone (ex : $f(t) = 1/t$). On utilise $\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt$ (si f décroissante). Puis on somme les inégalités (Relation de Chasles sur l'intégrale).

Sommes de Riemann

Si f est continue sur $[0,1]$, alors la moyenne des valeurs converge vers l'intégrale :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt$$

Exemple : $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim \frac{1}{n}\sum \frac{1}{1+k/n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$.

4 Suites Classiques à Maîtriser

Suites Arithmético-Géométriques ($u_{n+1} = au_n + b$)

Si $a \neq 1$, on cherche le point fixe r solution de $r = ar + b \Rightarrow r = \frac{b}{1-a}$. On pose $v_n = u_n - r$.

— On montre que (v_n) est géométrique de raison a.

— On exprime $v_n = a^n v_0$, puis $u_n = a^n(u_0 - r) + r$.

Suites Récurrentes Linéaires d'Ordre 2 ($u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$)

On résout l'équation caractéristique : $r^2 - ar - b = 0$.

— **$\Delta > 0$ (2 racines réelles r_1, r_2) :** $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$

— **$\Delta = 0$ (1 racine double r_0) :** $u_n = (\lambda + \mu n)r_0^n$

— **$\Delta < 0$ (2 racines complexes $\rho e^{\pm i\theta}$) :** $u_n = \rho^n(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta))$

5 Suites Homographiques $u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$

Méthode de résolution

Soit $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. On cherche les points fixes α tels que $f(\alpha) = \alpha$.

1. **Si deux points fixes distincts α et β :** On introduit la suite auxiliaire $v_n = \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$. Elle est **géométrique**.
2. **Si un seul point fixe double α :** On introduit la suite auxiliaire $v_n = \frac{1}{u_n-\alpha}$. Elle est **arithmétique**.

6 Suites Récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

C'est LE gros morceau des concours en Sup.

Méthode d'étude

Soit f continue sur un intervalle I stable par f (i.e., $f(I) \subset I$).

— **Monotonie :** Si f est croissante, (u_n) est monotone (le sens dépend de $u_1 - u_0$). Si f est décroissante, (u_n) n'est pas monotone (souvent oscillante).

— **Limite :** Si (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors ℓ est un **point fixe** : $f(\ell) = \ell$.

— **Convergence :** On utilise souvent $|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$ (Inégalité des Accroissements Finis) pour prouver la convergence si $|f'| \leq k < 1$.

Classique : Racine itérée

Étudier la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

1. Montrer que $f(x) = \sqrt{1 + x}$ est stable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Résoudre $f(x) = x$ pour trouver la limite potentielle $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Nombre d'or).
3. Montrer que $|f'(x)| \leq k < 1$ au voisinage de la limite pour prouver la convergence (Point fixe attractif).

7 Suites Implicites

Principe

On définit une suite (x_n) où x_n est l'unique solution d'une équation dépendant de n (ex : $x + x^n = 1$ ou $x^n + \ln x = 0$).

Exercice Type : L'équation $xe^x = n$

Pour tout n, l'équation $f(x) = xe^x = n$ admet une solution unique x_n sur $\mathbb{R}_+$.

1. **Existence :** Théorème de la bijection (fonction continue strictement monotone).
2. **Monotonie :** Comparer $f(x_{n+1})$ et $f(x_n)$ en utilisant l'équation. Ici $x_{n+1}e^{x_{n+1}} = n + 1 > n = x_n e^{x_n}$. Comme f est croissante, on en déduit $x_{n+1} > x_n$.
3. **Limite :** Montrer que $x_n \to +\infty$ (par l'absurde ou par comparaison).
4. **Asymptotique :** Repartir de l'équation en passant au log : $\ln(x_n) + x_n = \ln(n)$. Comme $x_n \to +\infty$, on a $x_n \sim \ln n$.

8 Limites Classiques et Critères

Critères de d'Alembert et Cauchy

Soit (u_n) une suite de termes strictement positifs.

— **Règle d'Alembert :** Si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.
  — Si $\ell < 1$, alors $u_n \to 0$.
  — Si $\ell > 1$, alors $u_n \to +\infty$.

— **Lien d'Alembert → Cauchy :** Si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors $\lim \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

Limites "Must-Know"

— $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e$

— $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

— Croissances comparées : $\frac{n!}{n^n} \to 0$, mais $\frac{a^n}{n!} \to 0$ (pour tout $a \in \mathbb{R}$).

Théorème de Cesàro

Si $u_n \to \ell$, alors la moyenne arithmétique converge aussi vers ℓ :

$$\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \ell$$

La réciproque est fausse (contre-exemple : $u_n = (-1)^n$).

9 Compléments d'Excellence (Vers ENS/X)

Théorème de Bolzano-Weierstrass et Valeurs d'Adhérence

— De toute suite réelle **bornée**, on peut extraire une sous-suite convergente.

— Une valeur d'adhérence est une limite d'une sous-suite extraite. Pour une suite bornée, l'ensemble des valeurs d'adhérence est compact, non vide, et possède un plus grand élément ($\limsup$) et un plus petit ($\liminf$).

Application : Divergence de $\sin(n)$ (dense dans $[-1, 1]$).

Suites Récurrentes "Lentes" ($f'(l) = 1$)

Cas où $|f'(\ell)| = 1$, la convergence n'est plus géométrique mais polynomiale. *Exemple type :* $u_{n+1} = \sin(u_n)$ ou $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. **Méthode pour l'équivalent (Bootstrap) :**

1. Montrer que $u_n \to 0$.
2. Chercher $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite non nulle.
3. Utiliser un DL de $f(x)$ en 0. Pour $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, on prend $\alpha = -1$.
4. Appliquer Cesàro à la suite $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$ pour trouver $u_n \sim \frac{C}{n^{1/\alpha}}$.