Fiche Méthode : Séries de Fonctions

Convergence Normale & Théorèmes

Mémento : CV Normale, Continuité, Dérivation & Intégration

I. La Convergence Normale (CVN)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions bornées sur I. On dit qu'il y a **Convergence Normale (CVN)** sur I si la série numérique à termes positifs $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.
Théorème fondamental :

$$\text{CV Normale} \implies \text{CV Uniforme} \implies \text{CV Simple}$$

C'est le critère absolu à tester en premier. S'il fonctionne, vous avez tout (continuité, limites...).

1. Étudier les variations de la fonction $g_n(t) = |f_n(t)|$ sur I. 2. Déterminer le maximum $\|f_n\|_{\infty,I} = \sup_{t\in I} |f_n(t)|$. 3. Montrer que la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge (souvent via Riemann $1/n^\alpha$ ou d'Alembert).

Exemple Type :

Exemple géométrique : La série $\sum_{n\geq 0} x^n$.

- Sur $]-1,1[$, elle converge simplement.
- Sur un segment $[-a,a]$ (avec $0 < a < 1$) :

$$\|x^n\|_\infty = \sup_{t\in[-a,a]} |t^n| = a^n$$

Comme la série géométrique $\sum a^n$ converge (car $|a| < 1$), il y a **CVN** sur tout segment inclus dans $]-1,1[$.

II. Continuité et Limites

Si les fonctions f_n sont continues sur I et que $\sum f_n$ converge **uniformément** (ou normalement) sur I (ou tout segment de I), alors :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \quad \text{est continue sur } I$$

Pour calculer $\lim_{x\to a}\sum f_n(x)$: Si $\sum f_n$ converge uniformément au voisinage de a et que chaque f_n admet une limite en a, alors on peut intervertir :

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$$

III. Dérivation Terme à Terme

Pour dériver une série $S(x)=\sum f_n(x)$, il faut vérifier :

1. Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
2. La série $\sum f_n$ converge simplement sur I.
3. La série des dérivées $\sum f_n'$ converge **uniformément** sur tout segment de I.

Alors S est $\mathcal{C}^1$ et $S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$.

Exemple Type :

La Fonction Zêta de Riemann : $\zeta(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$.

- **Domaine :** CVS pour $x>1$.
- **Dérivée :** $f_n'(x)=-\frac{\ln n}{n^x}$.
- Sur un intervalle $[a,+\infty[$ (avec $a>1$) :

$$\forall x\geq a,\quad |f_n'(x)|\leq\frac{\ln n}{n^a}$$

- La série de Bertrand $\sum\frac{\ln n}{n^a}$ converge (car $a>1$). Donc CVN de $\sum f_n'$.
- **Bilan :** ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ par récurrence.

IV. Intégration sur un Intervalle Quelconque

C'est l'outil puissant pour les intervalles non bornés (type $[0,+\infty[$). Soit f_n des fonctions continues par morceaux et intégrables sur I. Si :

1. La série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction S CPM.
2. La série des intégrales de la valeur absolue converge : $\displaystyle\sum\int_I |f_n(t)|dt<+\infty$.

Alors S est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)dt$.

- **Sur un segment** $[a,b]$ **:** La CV Uniforme suffit pour intégrer.
- **Sur** I **quelconque (**$[0,+\infty[$**) :** Il faut utiliser le TITT (hypothèse L^1).

Exemple Type :

Calcul de $I = \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt$.

1. On développe en série : $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$. Donc $\frac{\ln t}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln t$.
2. On vérifie l'hypothèse L^1 :

$$\int_0^1 |t^n \ln t| dt = -\int_0^1 t^n \ln t dt = \left[-\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^n}{n+1} dt = \frac{1}{(n+1)^2}$$

3. Comme $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge, on peut intégrer terme à terme.

V. Astuces : Quand la CV Normale échoue

Si $f_n(x) = (-1)^n a_n(x)$ et que la CVN échoue, pensez au **Critère des Séries Alternées**. Si pour tout x, $(a_n(x))_n$ est décroissante et tend vers 0, alors :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k(x) \right| \leq |a_{n+1}(x)|$$

Pour montrer la CV Uniforme, il suffit alors de montrer que $\sup_x |a_{n+1}(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Exemple Type :

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ sur $\mathbb{R}^+$.

— Il n'y a pas CVN (car en $x = 0$, $\sum \frac{1}{n}$ diverge).

— Mais le majorant du reste est $\frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}$.

— Comme $\frac{1}{n+1}$ ne dépend pas de x et tend vers 0, la convergence est Uniforme.