ANALYSE VECTORIELLE : Opérateurs et Théorèmes

Carnet d'Ingé

1. L'Opérateur Nabla (∇)

Le vecteur symbolique ∇ représente les dérivées partielles spatiales. Dans une base cartésienne (x, y, z) :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

2. Les Opérateurs Différentiels

GRADIENT ($\vec{\nabla} f$)

S'applique à un **champs scalaire**. Résultat : **Vecteur**.

$$\vec{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

DIVERGENCE ($\nabla \cdot \vec{A}$)

S'applique à un **champ vectoriel**. Résultat : **Scalaire**.

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ROTATIONNEL ($\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$)

S'applique à un **champ vectoriel**. Résultat : **Vecteur**.

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Interprétation Physique

- **Gradient :** Indique la direction de la plus forte variation du champ scalaire.
  Exemple : La force dérive du potentiel $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$.
- **Divergence :** Mesure le flux local sortant d'un volume infinitésimal.
  - Div > 0 : Source. Div < 0 : Puits.
  - Div $= 0$: Champ à flux conservatif (ex : Fluide incompressible).
- **Rotationnel :** Caractérise la rotation locale du champ (vorticité).
  - Rot $\neq \vec{0}$: Présence de tourbillons.
  - Rot $= \vec{0}$: Champ irrotationnel (dérive d'un potentiel scalaire).

3. Théorèmes Intégraux Fondamentaux

Ces théorèmes lient une intégrale de volume/surface à une intégrale sur sa frontière.

Théorème de GREEN-OSTROGRADSKY (Flux-Divergence)

Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée Σ est égal à l'intégrale de sa divergence sur le volume $\mathcal{V}$ délimité par Σ.

$$\oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{A} \, d\tau$$

Application : Électrostatique (Gauss), Bilans de masse.

Théorème de STOKES (Rotationnel)

La circulation d'un champ vectoriel le long d'un contour fermé $\mathcal{C}$ est égale au flux de son rotationnel à travers une surface Σ s'appuyant sur $\mathcal{C}$.

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS$$

Application : Théorème d'Ampère, Induction (Faraday).

4. Formulaire et Identités

Coordonnées Cylindriques (r, θ, z)

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

Note : Attention au facteur $1/r$ devant la dérivée angulaire.

Identités Remarquables

— $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ f) = \vec{0}$ (Le rotationnel d'un gradient est nul).

— $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\ \vec{A}) = 0$ (La divergence d'un rotationnel est nulle).

— $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\ f) = \Delta f$ (Opérateur Laplacien scalaire).