Fiche de Révision: DL & Asymptotique

Carnet d'Ingé

1 L'Arme Absolue : Le Formulaire

Développements Limités Usuels en 0 (À savoir par cœur)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + o(x^{2n+1}) \qquad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + o(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2) \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + o(x^{2n+2}) \qquad \tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + o(x^3) \qquad \sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

2 Technique Pure : Opérations Fondamentales

Méthode : La Division selon les Puissances Croissantes

Pour calculer le DL d'un quotient $\frac{A(x)}{B(x)}$ (avec $B(0) \neq 0$), on pose une division "à la main".

- **But du jeu :** Éliminer le terme de plus petit degré du reste à chaque étape.
- **Exemple :** $\tan(x) = \frac{x - x^3/6 + \ldots}{1 - x^2/2 + \ldots}$

$$\begin{array}{rl|ll}
x - \frac{1}{6}x^3 & & 1 - \frac{1}{2}x^2 & \\
\hline
-(x - \frac{1}{2}x^3) & \leftarrow \textit{(On retire } x \times (1 - x^2/2)\textit{)} & x + \frac{1}{3}x^3 & \leftarrow \textbf{Résultat} \\
\frac{1}{3}x^3 & \leftarrow \textit{Nouveau reste (le } x \textit{ est parti)} & &
\end{array}$$

- **Question mentale :** "Par quoi multiplier 1 (le terme constant du diviseur) pour obtenir x (le terme du numérateur) ?" $\rightarrow$ Réponse : x. On écrit x, on soustrait, et on recommence avec le reste.

Exercice 1 : Calculs de Référence

Déterminer les développements limités en 0 aux ordres indiqués :

1. $DL_3(0)$ de $\dfrac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$ *(Entraînez-vous à poser la division !)*
2. $DL_3(0)$ de $\sqrt{3 + \cos x}$ *(La racine composée)*
3. $DL_2(0)$ de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ *(La forme exponentielle)*

3 Limites et Précision

Méthode : Attention à l'ordre !

Si le dénominateur est équivalent à x^p, il faut impérativement pousser le DL du numérateur jusqu'à l'ordre p au minimum. Si vous trouvez 0, c'est que vous n'êtes pas allé assez loin.

Exercice 2 : Le piège de l'ordre

Déterminer la limite suivante lorsque $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

Indication : Mettre au même dénominateur. Le bas est équivalent à x^4, il faut donc un numérateur précis à l'ordre 4.

4 Le Changement de Variable

Règle d'Or

On ne connaît les formules usuelles qu'au voisinage de 0. Si on cherche un DL en $a \neq 0$, on pose toujours $h = x - a$ (donc $x = a + h$) pour se ramener en 0.

Exercice 3 : DL en un point non nul

Former le $DL_3(1)$ de la fonction $\arctan(x)$.
Astuce : Poser $x = 1 + h$. Passez par la dérivée ! $(\arctan(1+h))' = \frac{1}{1+(1+h)^2}$. Faites le DL de la dérivée, puis intégrez. N'oubliez pas $\arctan(1)$.

5 Analyse Asymptotique

Méthode : Le "Bootstrapping"

Pour obtenir un développement asymptotique d'une suite implicite x_n :

1. Trouver un équivalent simple (ex : $x_n \sim n$).
2. Réinjecter cet équivalent dans l'équation : $x_n = n - \ln(x_n) = n - \ln(n + o(n))$.
3. Développer et recommencer pour gagner en précision à chaque étape.

Exercice 4 : Suites Implicites ($x + \ln x = n$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation $x + \ln x = n$.

1. Montrer que l'équation admet une unique solution x_n et que $x_n \to +\infty$.
2. **Équivalent :** Montrer que $x_n \sim n$.
3. **Développement Asymptotique :** Donner les 3 premiers termes.

$$x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

6 Fonctions Réciproques

Méthode : Identification

Pour le DL d'une réciproque f^{-1}, n'essayez pas d'inverser f. Écrivez la forme théorique du polynôme $P(y)$ recherché, calculez $f(P(y))$, et identifiez les coefficients en utilisant $f(f^{-1}(y)) = y$.

Exercice 5 : DL d'une réciproque

Soit $f : x \mapsto xe^{x^2}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Former le DL à l'ordre 5 en 0 de f^{-1}.

7 Applications Géométriques

Exercice 6 : Position relative Courbe / Tangente

Soit $f(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Le prolongement est-il dérivable ?
3. Donner la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente en 0.

8 Intégration de DL

Exercice 7 : Intégrale Asymptotique

Donner un équivalent en $+\infty$ de :

$$u_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{dt}{1+t^2}$$

Indication : Utilisez une primitive explicite (arctan) et son DL en $+\infty$.

9 Objectif X / ENS : Au-delà du cours

Complément de Cours : Suites Récurrentes Lentes

On étudie les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.
La convergence n'est plus géométrique, elle est très lente (en $n^{-\alpha}$).
Méthode Universelle : Pour trouver l'équivalent, on cherche α tel que la suite $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$ converge vers une constante non nulle C. On utilise ensuite le lemme de l'escalier (Cesàro).

Le cas Sinus

On définit $u_0 \in]0, \pi/2[$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que $u_n \to 0$.
2. Chercher α tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite finie non nulle.
   Indication : Faire un DL de $\sin(x)$ *et tester* $\alpha = -2$.
3. En déduire que $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.
4. **(Niveau Ulm)** Pousser le développement asymptotique :

$$u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)$$