Fiche Méthode : Algèbre Linéaire

Spéciale PSI* | Synthèse de TD

Mémento de Révision : Matrices, Trace, Polynômes Projecteurs

I. Matrices par Blocs et Trace

- ✓ **Produit :** Si $A = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} M' & N' \\ P' & Q' \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} MM' + NP' & \dots \\ \dots & PN' + QQ' \end{pmatrix}$.
- ✓ **Puissance Triangulaire :** Si $P = 0$, alors $A^k = \begin{pmatrix} M^k & * \\ 0 & Q^k \end{pmatrix}$.
- ✓ **Déterminant :** Si $P = 0$ (bloc de zéros strict), $\det(A) = \det(M) \times \det(Q)$.

A. Le Réflexe "Trace" (Impossibilité)

La trace est un invariant de similitude et $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Pour montrer qu'une égalité matricielle est impossible, on applique la trace. Exemple classique : $AB - BA = I_n$ n'a pas de solution.

Montrer qu'il n'existe pas de matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ telles que $AB - BA = I_n$.

B. Calcul de Déterminant par Blocs

Pour calculer un déterminant par blocs, on utilise le pivot de Gauss sur les lignes/colonnes de blocs pour se ramener à une forme triangulaire par blocs. Attention : $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$ en général.

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(M) = \det(A)\det(D)$. En déduire le calcul de $\det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ en utilisant des opérations $L \leftarrow L \pm iL'$.

II. Polynômes d'Endomorphismes

A. Calcul de l'Inverse via Polynôme Annulateur

Si $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ annule A ($P(A) = 0$) et $a_0 \neq 0$: On isole le terme constant $a_0 I_n = -\sum_{k=1}^{d} a_k A^k$. On factorise par A pour identifier l'inverse : $A^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{d} a_k A^{k-1}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tel que $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I_3 = 0$. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et A^2.

B. Calcul de A^n par Division Euclidienne

1. Effectuer la division euclidienne de X^n par le polynôme annulateur Π_A : $X^n = Q\Pi_A + R$ avec $\deg(R) < \deg(\Pi_A)$. 2. Trouver les coefficients de R en évaluant en les racines de Π_A. 3. Conclure $A^n = R(A)$ car $\Pi_A(A) = 0$.

On suppose $A^2 - 3A + 2I = 0$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en utilisant la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.

III. Espaces Vectoriels et Projecteurs

A. Sommes Directes

Pour montrer $E = F \oplus G$, il suffit de vérifier deux points :

- **Intersection :** $F \cap G = \{0_E\}$ (Le plus simple à rédiger).
- **Dimension :** $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$. Soient $F = \{f \in E \mid f \text{ constante}\}$ et $G = \{f \in E \mid \int_{-1}^{1} f(t)dt = 0\}$. Montrer que $E = F \oplus G$.

B. Projecteurs et Symétries

Si on a la relation $p^2 = p$ (ou $p \circ p = p$), alors p est un projecteur.

$\rightarrow$ Décomposition : $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

$\rightarrow$ Trace : $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Soient p et q deux projecteurs qui commutent ($pq = qp$). Montrer que pq est un projecteur. Déterminer son image et son noyau en fonction de ceux de p et q.

IV. Hyperplans et Interpolation

A. Intersection d'Hyperplans

L'intersection de r hyperplans est un sous-espace de dimension $\geq n - r$. La dimension vaut exactement $n - r$ si les formes linéaires associées sont indépendantes.

Soit E de dimension n. Montrer que tout SEV de dimension $n - r$ est l'intersection de r hyperplans.

B. Interpolation de Lagrange

Ne jamais résoudre de système linéaire pour trouver un polynôme prenant des valeurs fixées. Utiliser la base de Lagrange (L_i) définie par $L_i(x_j) = \delta_{ij}$.

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(X) \quad \text{avec} \quad L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

Déterminer le polynôme interpolateur de Lagrange P tel que $P(0) = 1, P(1) = 0, P(2) = 4$.