

ANALYSE VECTORIELLE : Opérateurs et Théorèmes

Carnet d'Ingé

1. L'Opérateur Nabla (∇)

Le vecteur symbolique ∇ représente les dérivées partielles spatiales. Dans une base cartésienne (x, y, z) :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

2. Les Opérateurs Différentiels

GRADIENT ($\vec{\nabla}f$)

S'applique à un **champs scalaire**. Résultat : **Vecteur**.

$$\vec{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

DIVERGENCE ($\nabla \cdot \vec{A}$)

S'applique à un **champ vectoriel**. Résultat : **Scalaire**.

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned}$$

ROTATIONNEL ($\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$)

S'applique à un **champ vectoriel**. Résultat : **Vecteur**.

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Interprétation Physique

- **Gradient** : Indique la direction de la plus forte variation du champ scalaire.
Exemple : La force dérive du potentiel $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$.
- **Divergence** : Mesure le flux local sortant d'un volume infinitésimal.
 - $\text{Div} > 0$: Source. $\text{Div} < 0$: Puits.
 - $\text{Div} = 0$: Champ à flux conservatif (ex : Fluide incompressible).
- **Rotationnel** : Caractérise la rotation locale du champ (vorticité).
 - $\text{Rot} \neq \vec{0}$: Présence de tourbillons.
 - $\text{Rot} = \vec{0}$: Champ irrotationnel (dérive d'un potentiel scalaire).

3. Théorèmes Intégraux Fondamentaux

Ces théorèmes lient une intégrale de volume/surface à une intégrale sur sa frontière.

Théorème de GREEN-OSTROGRADSKY (Flux-Divergence)

Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée Σ est égal à l'intégrale de sa divergence sur le volume \mathcal{V} délimité par Σ .

$$\oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{A} d\tau$$

Application : Électrostatique (Gauss), Bilans de masse.

Théorème de STOKES (Rotationnel)

La circulation d'un champ vectoriel le long d'un contour fermé \mathcal{C} est égale au flux de son rotationnel à travers une surface Σ s'appuyant sur \mathcal{C} .

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

Application : Théorème d'Ampère, Induction (Faraday).

4. Formulaire des Gradients

Cylindriques (r, θ, z)

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

Rappel : r est la distance à l'axe Oz .

Sphériques (r, θ, φ)

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Convention Physique : θ colatitude (angle / Oz), φ longitude.

Identités Remarquables (À connaître par cœur)

- $\text{rot}(\text{grad } f) = \vec{0}$ (Le rotationnel d'un gradient est nul).
- $\text{div}(\text{rot } \vec{A}) = 0$ (La divergence d'un rotationnel est nulle).
- $\text{div}(\text{grad } f) = \Delta f$ (Opérateur Laplacien scalaire).