# Fiche Méthode : Intégration

**Niveau Sup MPSI/PCSI | Les Incontournables**

**Mémento : Riemann, Wallis, Bornes Variables  Astuces**

## I. Le Pont Suites-Intégrales (Riemann)

Soit $f$ une fonction **continue** sur $[0,1]$. Alors la moyenne des valeurs converge vers l'intégrale :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt$$

*Note :* Cela fonctionne aussi en sommant de $k=0$ à $n-1$.

### A. Reconnaître la forme canonique

Si vous avez une somme dépendante de $n$ : 1. Factorisez par $n$ (ou $n^\alpha$) pour faire apparaitre le pas $\frac{1}{n}$ devant la somme. 2. Exprimez le terme général en fonction de $\frac{k}{n}$. 3. Identifiez la fonction $f$ et vérifiez sa continuité sur $[0,1]$.

---

Déterminer la limite de la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$. *Indication : Factoriser par $n^2$ au dénominateur pour faire apparaître $1+(k/n)^2$.*

## II. Intégrales à Bornes Variables

### A. Dérivation et Variations

Soit $f$ continue sur $I$. Si $\varphi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$, alors $\varphi$ est dérivable sur son domaine de définition (si $u, v$ dérivables) et :

$$\varphi'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

Pour étudier $F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$ :

- **Définition :** Vérifier que l'intervalle $[x, 2x]$ est inclus dans le domaine de continuité de $f$.
- **Dérivée :** Ne cherchez pas de primitive explicite ! Utilisez la formule ci-dessus.
- **Limites :** Utilisez l'encadrement de $f(t)$ sur $[x, 2x]$ puis intégrez l'inégalité.

---

Soit $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$. 1. Montrer que $f$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. 2. Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe. 3. Déterminer $\lim_{x\to0^+} f(x)$ par encadrement.

## III. Suites d'Intégrales et Récurrence

### A. Intégration par Parties (IPP) pour Récurrence

Pour calculer des intégrales du type $I_n = \int_a^b (P(t))^n dt$ ou $\int_a^b f(t)^n dt$ : L'IPP est l'outil roi pour trouver une relation entre $I_n$ et $I_{n-1}$ (ou $I_{n-2}$). **Astuce :** Poser $u'(t) = 1$ ou séparer $\sin^n t = \sin t \cdot \sin^{n-1} t$.

---

**(Intégrales de Wallis)** Soit $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt$. En intégrant par parties ($\sin^n t = \sin t \sin^{n-1} t$), montrer que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. En déduire $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

## IV. Astuces Classiques de Calcul

### A. Changement de Variable "Royal"

Si $u = a + b - t$, alors $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(a+b-t)dt$. C'est très puissant quand les bornes sont 0 et $\pi/2$ (via $\cos(\pi/2 - t) = \sin t$).

---

Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt$ en utilisant le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$. *Indication : Montrer que* $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt$ *puis calculer* $2I$.

### B. Fonctions Continues et Positives

Si $f$ est **continue** et **positive** sur $[a, b]$ ($a < b$), alors :

$$\int_a^b f(t)dt = 0 \iff \forall t \in [a, b], f(t) = 0$$

C'est l'argument n°1 pour l'injectivité dans les espaces préhilbertiens.