Fiche classique : Séries Numériques

Carnet d'Ingé

1 L'Arbre de Décision : Quelle méthode choisir ?

Réflexe Concours : Comment attaquer une série $\sum u_n$?

1. **Vérifier la divergence grossière :** Si $u_n \not\to 0$, la série diverge. Terminé.
2. **Si u_n est de signe constant (positif) :**
   — Chercher un **équivalent** simple $u_n \sim v_n$ (Riemann $\frac{1}{n^\alpha}$, Géométrique q^n).
   — Utiliser les **croissances comparées** ($n^\alpha u_n \to 0$).
   — Comparaison **Série-Intégrale** (si $u_n = f(n)$ avec f décroissante).
   — Règle de **d'Alembert** (si factorielles).
3. **Si u_n change de signe :**
   — Tester la **convergence absolue** ($\sum |u_n|$). Si oui, c'est gagné.
   — Sinon, Critère Spécial des Séries Alternées (**CSSA**).
   — Sinon, développement asymptotique : $u_n = v_n + w_n$ avec $\sum v_n$ convergente (CSSA) et $\sum w_n$ absolument convergente.

2 Niveau 1 : Étude de Nature (Équivalents et DL)

Exercice 1 : Les Cas d'École

Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ *(Le piège du grossier)*
2. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ *(L'équivalent n'est pas nul !)*
3. $u_n = e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *(DL obligatoire)*
4. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ *(Série alternée)*

Conseil : Pour le 3, passez à l'exponentielle : $(1+1/n)^n = \exp(n\ln(1+1/n))$. Poussez le DL assez loin pour attraper le terme en $1/n$ ou $1/n^2$.

Attention aux équivalences !

L'équivalence $u_n \sim v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ de même nature ne marche **QUE pour les séries à termes positifs** (ou de signe constant à partir d'un certain rang). **Interdit** sur les séries alternées (ex : $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, pourtant l'une diverge et l'autre converge).

3 Niveau 2 : Calcul de Sommes (Télescopage)

Méthode : Élément Simple + Télescopage

Si u_n est une fraction rationnelle $P(n)/Q(n)$, on décompose en éléments simples pour faire apparaître une somme télescopique du type $(v_n - v_{n+1})$ ou $(v_n - v_{n+2})$.

Exercice 2 : Fractions Rationnelles

Montrer la convergence et calculer la somme de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Méthode : Décomposer en $\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$. Écrire les sommes partielles S_N, faire les changements d'indice pour annuler les termes, puis passer à la limite $N \to \infty$.

Exercice 3 : Logarithmes

Étudier la nature et la somme éventuelle de la série :

$$u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-2}\right) \quad \text{ou} \quad v_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$$

Indication : Tout ce qui est logarithmique se télescope souvent ($\ln(a/b) = \ln a - \ln b$).

4 Niveau 3 : Comparaison Série-Intégrale

Le Théorème

Si f est continue, positive et **décroissante** sur $[1, +\infty[$, alors $\sum f(n)$ et $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature. De plus, on a l'encadrement pour le reste ou la somme partielle :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq R_n \leq \int_{n}^{+\infty} f(t)dt$$

Exercice 4 : Bertrand et Asymptotique

1. Déterminer la nature de la série de Bertrand : $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}$.
2. Trouver un équivalent simple de la somme partielle : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

Méthode : Encadrer u_k par $\int_k^{k+1} f(t)dt$ et $\int_{k-1}^{k} f(t)dt$, puis sommer les inégalités (Chasles).

5 Niveau 4 : Séries Alternées et Semi-Convergence

Exercice 5 : Le développement asymptotique (Vital en Spé)

Étudier la convergence de la série :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

Piège : $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, mais on ne peut pas conclure (termes non positifs). **Méthode :** Faire un DL en $1/\sqrt{n}$.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

La série est la somme d'une série convergente (CSSA) et d'une série divergente (Harmonique). Donc elle **diverge**.

6 Raisonnements Fins

Exercice 6 : Transformation d'Abel

Étudier la convergence de la série $\sum \frac{\cos(n)}{n}$ ou $\sum \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$.
Méthode : C'est la "sœur" de l'intégration par parties pour les sommes discrètes. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k$ (qui est bornée). On écrit $\frac{1}{\sqrt{n}}$ comme différence.

Exercice 7 : Série des Restes

Soit $\alpha > 1$. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Trouver un équivalent de R_n quand $n \to \infty$.
2. Quelle est la nature de la série $\sum R_n$?

Indication : Comparaison Série-Intégrale pour l'équivalent ($R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$). Puis on réapplique Riemann sur le résultat.

Exercice 8 : Produit de Séries

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^{n} \ln(1 + x/k)$.
Méthode : Passer au logarithme pour transformer le produit en somme : $\ln(u_n) = \sum \ln(\dots) - n \ln x + \ln n!$. Utiliser Stirling.