

Fiche Méthode : Intégrales Généralisées

Analyse | Intervalle Quelconque

Mémento : Riemann, Comparaison Calculs

I. Les Intégrales de Référence (Riemann)

Ce sont les outils de base pour prouver la convergence par comparaison.

- **En $+\infty$** : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$.
- **En 0** : $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha < 1$.
- **Exponentielle** : $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ converge $\iff \lambda > 0$.

Pour montrer qu'une fonction f (continue par morceaux) est intégrable sur $[a, +\infty[$: 1. Calculez la limite de $t^\alpha f(t)$ en $+\infty$. 2. Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = 0$ avec $\alpha > 1$, alors $f(t) = o(\frac{1}{t^\alpha})$. 3. Par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, $\int f$ converge.

Étudier la convergence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$. Indication : Chercher la limite de $t^2 f(t)$ en $+\infty$ pour utiliser le critère de Riemann avec $\alpha = 2$.

II. Comparaison de Fonctions Positives

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux, **positives** au voisinage de la borne critique b . Si $f(t) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(t)$, alors $\int f$ et $\int g$ sont de **même nature**.

Attention : Ce théorème est faux si les fonctions changent de signe ! Dans ce cas, il faut passer par la convergence absolue (étudier $|f|$).

Étudier l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(\tanh t) dt$. Méthode : Étudier les équivalents en 0 (via $\tanh t \sim t$) et en $+\infty$ (via $\tanh t \rightarrow 1$ et $\ln(1-u) \sim -u$).

III. Techniques de Calcul

A. Changement de Variable (Bijection \mathcal{C}^1)

Pour calculer $I = \int_a^b f(t)dt$ via $u = \varphi(t)$:

1. Vérifier que φ est une bijection de classe \mathcal{C}^1 (strictement monotone).
2. Changer les bornes : $\alpha = \lim_{t \rightarrow a} \varphi(t)$ et $\beta = \lim_{t \rightarrow b} \varphi(t)$.
3. Ne pas oublier l'élément différentiel $dt = (\varphi^{-1})'(u)du$.

Si l'intégrale d'arrivée converge, alors l'intégrale de départ converge et les valeurs sont égales.

Calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$. Indication : Poser $u = \sqrt{t}$. Vérifier les nouvelles bornes et montrer que l'on se ramène à une intégrale de référence simple.

B. Intégration par Parties (IPP)

Soient u, v de classe \mathcal{C}^1 . L'égalité $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$ est valide si :

- Le crochet $[uv]_a^b$ admet une limite finie aux bornes.
- L'une des deux intégrales converge (l'autre convergera alors automatiquement).

Calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$. Astuce : Écrire $\frac{1}{(1+t^2)^2} = \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t \cdot t}{(1+t^2)^2}$. Intégrer la deuxième partie par parties ($u = t, v' = \frac{t}{(1+t^2)^2}$).

IV. La Convergence Absolue (Fonctions de signe quelconque)

Si l'intégrale $\int_I |f(t)|dt$ converge, alors l'intégrale $\int_I f(t)dt$ converge.

Contre-exemple classique (Semi-convergence) : L'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge, mais ne converge pas absolument (l'intégrale de $|\frac{\sin t}{t}|$ diverge).

Justifier la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$. Indication : Majorer la valeur absolue de la fonction par $\frac{1}{t^2}$ et conclure par comparaison avec Riemann.