

Feuille d'exercice n°1 : Suites

1 Suites : les bases

1.1 Calcul de termes

Exercice 1 Calculez le terme demandé des suites dont on donne le terme général

1. Que vaut u_3 dans la suite de terme général $u_n = 4n - 3$?
2. Que vaut v_5 dans la suite de terme général $v_n = 13 - 3n$?
3. Que vaut w_7 dans la suite de terme général $w_n = n^2$?

Exercice 2 Calculez le terme demandé des suites dont on donne le terme général

1. Que vaut u_3 dans la suite de terme général $u_n = \frac{1}{3}n + 2$?
2. Que vaut v_5 dans la suite de terme général $v_n = n - (\frac{1}{n} - 1)$?
3. Que vaut w_7 dans la suite de terme général $w_n = 2n^2 - 6n - 14$?

Exercice 3 Faites un tableau de valeur des 6 premiers termes des suites u, v et w définies récursivement :

1. $u_1 = 6$ et, pour $n > 0$, $u_{n+1} = u_n - 1$
2. $v_1 = 3$ et, pour $n > 0$, $v_{n+1} = 18 - v_n$
3. $w_1 = 1$ et, pour $n > 0$, $w_{n+1} = 2w_n$

Exercice 4 Faites un tableau de valeur des 6 premiers termes des suites u, v et w définies récursivement :

1. $u_1 = 0$ et, pour $n > 0$, $u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{3}$
2. $v_1 = \frac{8}{3}$ et, pour $n > 0$, $v_{n+1} = \frac{3v_n}{2}$
3. $w_1 = 1, w_2 = 1$ et, pour $n > 0$, $w_{n+2} = w_n + w_{n+1}$ (Suite de Fibonacci)

Exercice 5 Faites un tableau de valeur des 6 premiers termes des suites u, v et w définies récursivement :

1. $u_1 = 1$ et, pour $n > 0$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$
2. $v_1 = 2$ et, pour $n > 0$, $v_{n+1} = 2v_n - 1$
3. $w_1 = 1$, et, pour $n > 0$, $w_{n+1} = \frac{w_n}{2} + \frac{1}{w_n}$

Exercice 6 Soit u la suite définie par $u_1 = 1$, et dont chaque terme est égal à la somme de tous les termes qui précèdent. Calculer les 6 premiers termes de la suite.

1. Cet énoncé permet-il de calculer chaque terme de la suite u ?
2. Calculer les 6 premiers termes de la suite u en utilisant la formule récursive.
3. Pourriez vous conjecturer, sans nécessairement la montrer ou la calculer, une formule pour u_{20} ?
4. Comparer (sans les effectuer) le nombre d'opérations nécessaires au calcul de u_{20} en utilisant la formule récursive, et en utilisant la formule conjecturée à la question précédente.

Exercice 7 (Algorithme) A l'aide d'un tableur ou d'un langage de programmation, calculez et donnez (sous une forme adaptée) l'expression du 10-ième, 20-ième, et 100-ième terme de la suite de Fibonacci définie à l'exercice précédent.

Exercice 8 (Algorithme) Implémentez en Python un programme permettant de calculer la 10000000-ème valeur de la suite u utilisée en exemple en utilisant la formule récursive. Combien de temps met-il à s'exécuter ? Et en utilisant la formule du terme général ?

1.2 Sens de variation

Exercice 9 Déterminez le sens de variation des suites :

- u où pour $n > 0$, $u_n = n^2$
- v où pour $n > 0$, $v_n = 4 + \frac{1}{n}$
- w où $w_1 = 1$, et, pour $n > 0$, $w_{n+1} = w_n + \frac{1}{w_n}$

Exercice 10 Déterminez le sens de variation des suites :

- u où pour $n > 0$, $u_n = n^2 - 2n + 1$
- v où pour $n > 0$, $v_n = 165 - \frac{1}{n} - n^2$
- w où $w_1 = 1$, et l'on a un certain réel r tel que pour $n > 0$, $w_{n+1} = w_n + r$ en fonction du signe de r .

2 Suites arithmétiques

2.1 Reconnaître une suite arithmétique, moyenne arithmétique

Exercice 11 Dans chacun des cas suivants, on donne une liste de nombres. Indiquer si les nombres peuvent être les premiers termes d'une suite arithmétique

1. (Exemple) 4; 5; 6 peuvent être les premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 4 et de raison 1
2. 12; 17; 22
3. 10; 13; 18; 21
4. 5; 5; 5
5. 2; -2; -6
6. 33; 44; 55; 77
7. $\frac{3}{2}$; 2,5; $\frac{7}{2}$

Exercice 12 Déterminer la moyenne arithmétique de a et b dans les cas suivants :

1. $a = 5$ et $b = 13$
2. $a = -\frac{3}{7}$ et $b = \frac{3}{7}$
3. $a = 108$ et $b = -208$
4. $a = \frac{1}{4}$ et $b = -\frac{2}{3}$

Exercice 13 Dire si chacune des suites suivantes est arithmétique. Si oui, préciser leur raison

1. pour tout entier n : $u_n = -3 + 6n$
2. pour tout entier n : $v_n = n^2 + 3n + 1$
3. pour tout entier n : $w_n = 4(n - 3) - 3n$

2.2 Caractériser une suite arithmétique à partir de deux informations

Exercice 14 Dans chacun de ces exemples, la suite présentée est arithmétique.

Compléter les tableaux suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
3	8

La raison de la suite est ...

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
...	...	7	9	...

La raison de la suite est ...

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
2

La raison de la suite est 4

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
...	...	7

La raison de la suite est -3

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
3	19

La raison de la suite est ...

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
...	4	14

La raison de la suite est ...

Exercice 15 1. Quelle est la raison d'une suite arithmétique u telle que $u_4 = 7$ et $u_{11} = 49$?

2. Quelle est la raison d'une suite arithmétique u telle que $u_4 = 30$ et $u_{12} = -8$?

2.3 Somme de termes consécutifs d'une suites arithmétiques

Exercice 16 On considère u_n une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 12$ et de raison 7.

1. Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier n

2. Calculer $S = \sum_{i=4}^{15} u_i = u_4 + u_5 + \dots + u_{15}$

Exercice 17 Chaque jour, un élève fait 2500 pas pour aller au lycée (il vient même le week-end et les vacances prenez en de la graine). Cette année, il décide de faire le trajet normal le premier jour, qui est le 1er septembre, puis de prendre chaque jour un détour qui augmente de 100 pas la durée du trajet. On modélise la situation par une suite p_n (pour $n \geq 1$) op_n est le nombre de pas effectués le n -ième jour.

1. Que valent p_1 et p_2 ?

2. Exprimer p_n en fonction de n

3. Combien de pas l'élève devra-t-il faire le dernier jour de l'année, le 31 août ?

4. Au total, combien de pas l'élève aura-t-il fait dans l'année ?

Exercice 18 Vous êtes embauchés dans une entreprise pour un contrat de 3 ans. Cette entreprise vous propose de choisir entre deux contrats :

— Contrat A : Un salaire de 1000 € par mois, et une augmentation de 20 € par mois

— Contrat B : Un salaire de 1000 € par mois, et une augmentation de 300 € par an (c'est à dire qu'à chaque anniversaire annuel, le salaire augmente de 300 euros et reste à ce niveau jusqu'au prochain anniversaire).

1. On appelle u_n le salaire reçu le n -ième mois dans le contrat A (n va de 1 à 36). Montrer que u_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison. Quel est le montant reçu lors du mois 15 ? Lors du mois m où m est un mois quelconque entre 1 et 36 ?

2. On appelle v_n le salaire reçu la n -ième année dans le contrat B (n va de 1 à 3). v_n est-elle une suite arithmétique ? Si oui, quelle est sa raison ?

3. Quel contrat rapportera plus d'argent au total au cours des 3 années ?

4. On demande au service RH de préparer un contrat C, formulé de la même manière que le contrat B, mais avec une augmentation annuelle différente : Contrat C : Un salaire de 1000 € par mois, et une augmentation de X € par an. Que doit valoir X pour que ce contrat rapporte exactement autant en 3 ans que le contrat A ?

3 Suites géométriques

3.1 Evolutions et pourcentages

Exercice 21 *Questions Flash :*

Complétez les phrases suivantes :

1. Augmenter de 3%, c'est multiplier par ...
2. Augmenter de 150%, c'est multiplier par ...
3. Diminuer de 0,5%, c'est multiplier par ...
4. Diminuer de 92%, c'est multiplier par ...
5. Augmenter de ...%, c'est multiplier par 1,2
6. Diminuer de ...%, c'est multiplier par 0,94
7. Augmenter de ...%, c'est multiplier par 2
8. Diminuer de ...%, c'est multiplier par 0

Exercice 22 *Calculez dans ces situations :*

1. Un téléphone qui coûte 320 € voit son prix réduit de 15%. Quel est le prix final ?
2. Le montant du Smic Brut est de 1680€ par mois. Pour obtenir le montant net, on lui retire 20%. Quel est le montant net du Smic ?
3. les ventes de stylos d'une entreprise augmentent de 5% par an. En 2022, 6300 stylos ont été vendus. Combien seront vendus en 2023 ?
4. Combien de stylos ont été vendus en 2021 ? (toujours pour l'entreprise de la question précédente)
5. Une marque de chips vend 100 grammes de chips pour 24€. Elle augmente le prix de vente au kilo de 10%, mais diminue la quantité de chips dans le paquet de 15%. Quel est le nouveau prix d'un paquet de chips ?

Exercice 23 *Une suite peut-elle être à la fois géométrique et arithmétique ? Si oui, donnez un exemple, sinon, prouvez que c'est impossible.*

Exercice 24 *On donne les premiers termes d'une suite. Cette suite peut elle être géométrique ? Si oui, quelle est sa raison ?*

1. 1; 3; 6; 9
2. 1; 3; 9; 27; 81
3. 5; 5; 5
4. 4; -6; 9; $-\frac{27}{2}$
5. 320; 160; 80; 40

Exercice 25 *Pour chacune de ces suites, dites si elle est géométrique, et si oui, préciser le terme d'indice 1 (par exemple u_1 si la suite s'appelle (u_n)) et la raison de la suite.*

1. La suite (u_n) est définie pour tout entier n par $u_n = 2 \times 4^{n+1}$.
2. La suite (v_n) est définie pour tout entier n par $v_n = 3n$.
3. La suite (w_n) est définie par $w_1 = 2$ et pour tout entier n $w_{n+1} = \frac{1}{5}w_n$.
4. La suite (t_n) est définie par $t_1 = 2$ et pour tout entier n , $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_1$.

Exercice 26 Dans chacun de ces exemples, la suite présentée est **géométrique**.

Recopier et compléter les tableaux suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
2	6

La raison de la suite est ...

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
...	...	7

La raison de la suite est -1

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
24

La raison de la suite est $0,5$

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
100	...	121

La raison de la suite est ...

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
...	...	2	3	...

La raison de la suite est ...

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
...	2	54

La raison de la suite est ...

Exercice 27 Complétez les phrases suivantes :

- Soit u une suite géométrique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison 2 . $u_{10} = \dots$
- Soit v une suite géométrique de premier terme $v_1 = 2$ et de raison $1,07$. $v_{31} \approx \dots$
- Soit w une suite géométrique de premier terme $w_0 = 4$ et de raison 3 . $w_{20} = \dots$
- Soit t une suite géométrique de premier terme $t_0 = \dots$ et de raison 2 . $t_{10} = 3072$

Exercice 28 Chaque année, le prix du dernier Iphone augmente de $7,25\%$. Chaque année, le SMIC augmente de $1,25\%$. En 2022, l'Iphone et le SMIC mensuel valent tous les deux environ 1600 €. On suppose que ces valeurs continuent de suivre cette même évolution dans le futur.

- Combien l'Iphone vaudra-t-il (au centime près) en 2032 s'il suit l'évolution de l'énoncé ?
- Combien le SMIC vaudra-t-il (au centime près) en 2032 s'il suit l'évolution de l'énoncé ?
- Combien de mois de SMIC brut faudra-t-il pour se payer le dernier Iphone en 2032 ? En 2042 ?
- En quelle année une année de SMIC devient-elle insuffisante pour se payer le dernier Iphone ?

Exercice 29 Les suites présentées dans ce tableau sont géométriques. Complétez le tableau de manière cohérente, la colonne "sens de variation" doit contenir une des propositions suivantes :

- croissante
- strictement croissante
- ni croissante ni décroissante
- décroissante
- strictement décroissante
- constante

premier terme de la suite : u_1	raison q	sens de variation	premier terme de la suite : u_1	raison q	sens de variation
1	3		2	0	
10	$\frac{3}{2}$		-1	3	
8	$\frac{3}{5}$		3	-1	
16	1		-2	0	

Exercice 30 Le problème le plus classique du monde sur les suites géométriques : Comme récompense pour avoir inventé le jeu d'échecs, on raconte que son inventeur avait demandé au roi d'Inde la chose suivante : Il veut un grain de riz sur la 1^{ère} case de l'échiquier, 2 sur la deuxième case, 4 sur la troisième case, et ainsi de suite, en doublant à chaque case le nombre de grains de riz par rapport à la case précédente.

- On appelle (u_n) le nombre de grains sur la n -ième case de l'échiquier. Quelle est la nature de la suite u ?

2. Donner la formule du nombre de grains de riz qui seront sur la 64^{ème} case (un échiquier compte 64 cases en tout)
3. Donner la formule du nombre de grains de riz qui devront être au total donnés par le roi
4. Sachant qu'un grain de riz vaut 0,04 grammes, quel est le poids total de riz qui devra être donné à l'inventeur des échecs ?
5. Combien de temps faudrait-il aujourd'hui pour produire une telle quantité sachant que la production mondiale de riz est de 450 millions de tonnes ?

Exercice 31 Vous vous faites embaucher dans une entreprise pour un contrat à durée déterminée de 3 ans. On vous donne encore le choix entre deux contrats différents :

- Contrat A : Un salaire de 1500 € par mois, et une augmentation de 150 € par mois
 - Contrat B : Un salaire de 1200 € par mois, et une augmentation de 8% par mois
1. Pour le contrat A, calculer la relation entre le salaire du mois n et le salaire du mois $n + 1$. En déduire la nature de la suite u telle que u_1 soit le salaire perçu dans le contrat A le premier mois, u_2 le deuxième mois, etc.
 2. Même question pour le contrat B, en appelant v_n le montant reçu le n -ième mois dans le contrat B
 3. Calculer le montant reçu le dernier mois du contrat dans les deux cas
 4. Calculer la somme totale perçue au cours des trois ans pour chacun des deux contrats.
 5. Conclure : quel contrat préférez vous ?