

Cours de Seconde 1 2022-2023

Table des matières

1	Ensembles de nombres	3
1.1	Ensemble : vocabulaire et notations	3
1.2	Les ensembles de nombres	4
1.2.1	Les entiers naturels \mathbb{N}	4
1.2.2	Les entiers relatifs \mathbb{Z}	4
1.2.3	Les nombres décimaux \mathbb{D}	5
1.2.4	Les nombres rationnels \mathbb{Q}	5
1.2.5	Les nombres réels \mathbb{R}	5
1.3	La droite des réels	5
1.4	Intervalles de \mathbb{R}	7
1.4.1	Les intervalles	7
1.5	Les dernières notations du chapitre	8
1.5.1	Equivalence	8
1.5.2	Union et intersections d'ensembles	8
2	Fonctions : généralités	10
2.1	Définition	10
2.1.1	Image et antécédent, tableau de valeurs	11
2.2	Représentation graphique	11
2.3	Fonctions et équations	12
2.3.1	Inéquation	13
2.4	Parité d'une fonction	13
2.5	Sens de variation d'une fonction	14
2.6	Tableau de variations d'une fonction	15
2.6.1	Extremums d'une fonction	16
3	Vecteurs du plan	17
3.1	Dans un repère cartésien.	17
3.1.1	Coordonnées d'un vecteur	17
3.1.2	vecteur nul	19
3.1.3	Somme de vecteurs	19
3.1.4	Multiplication par un nombre réel	19
3.1.5	Vecteurs colinéaires	20
3.1.6	Direction et sens d'un vecteurs	21
3.1.7	Norme d'un vecteur	21
4	Informations chiffrées	24
4.1	Proportion et pourcentage	24
4.1.1	pourcentage	24
4.1.2	Proportion : vocabulaire	24
4.1.3	Proportion d'une proportion	25
4.2	Evolution	25
4.2.1	Variation absolue et relative	25
4.2.2	Variation en pourcentage, coefficient multiplicateur	26
4.2.3	Evolutions successives	26
4.2.4	Evolution réciproque	27
5	Vecteurs et droites	28

5.0.1 Vecteurs directeurs et équations d’une droite 28

Chapitre 1

Ensembles de nombres

1.1 Ensemble : vocabulaire et notations

Définition 1

Un ensemble est une collection d'objets, appelés éléments, qu'il contient.

Quand on peut décrire tous les éléments contenus dans un ensemble, on peut noter ces éléments séparés par des points-virgules (ou des virgules si on ne peut pas prendre les éléments pour des nombres décimaux) entre des $\{\}$

Exemples :

- L'ensemble des nombres premiers plus petits que 10 est $\{2; 3; 5; 7\}$
- L'ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'ensemble vide et est noté \emptyset
- L'ensemble des jours de la semaine peut être noté $\{\text{lundi}, \text{mardi}, \text{mercredi}, \text{jeudi}, \text{vendredi}, \text{samedi}, \text{dimanche}\}$
(On peut faire des ensembles d'autre chose que de nombres)

Définition 2

Si un élément est contenu dans un ensemble, on dit qu'il appartient à cet ensemble, que l'on note \in .
Si un élément n'appartient pas à un ensemble, on note \notin

Exemples :

- $2 \in \{2; 3; 5; 7\}$
- $4 \notin \{2; 3; 5; 7\}$
- $\{2; 7\} \notin \{2; 3; 5; 7\}$ (L'ensemble de droite contient des nombres, pas des ensembles)
- Cette notation avait déjà été vue en 6-ème : on disait qu'un point appartient à une droite. En effet, une droite est un ensemble de points (des ensembles de points qui vérifient une certaine équation, cf les équations de droite)
- On a $A = \{2; 3; 5; 9\}$, $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ et $C = \{1; 12\}$ alors $A \subset B$ et mais C n'est pas inclus dans B , ni dans A .

Remarques :

- Un ensemble est entièrement caractérisé par les éléments qu'il contient. Deux ensembles contenant exactement les mêmes éléments sont égaux. Ainsi, l'ordre des éléments n'importe pas dans un ensemble et on pourrait aussi noter $\{7; 2; 5; 3\}$ au lieu de $\{2; 3; 5; 7\}$
- Comme tous les objets mathématiques, on peut donner un nom à un ensemble pour généraliser ou l'écrire plus rapidement. Par exemple si on note E l'ensemble $\{2; 3; 5; 7\}$, $2 \in E$

Définition 3

Si un ensemble E contient exclusivement des éléments contenus dans un autre ensemble F , on dit que E est inclus dans F et l'on note $E \subset F$.

Remarques :

- Si un ensemble E n'est pas inclus dans un ensemble F , on écrit $E \not\subset F$
- Comme pour le signe $<$, le signe \subset se transmet dans le sens où Si E est inclus dans F qui est inclus dans G , alors E est inclus dans G . Ou sous la forme de formule : Si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$. On dit que *la relation d'inclusion est transitive*

Exemples :

- $\{2; 7\} \subset \{2; 3; 5; 7\}$
- $\{2; 7; 9\} \not\subset \{2; 3; 5; 7\}$
- Un ensemble E est toujours par définition inclus dans lui même : $E \subset E$.
- Attention : ne jamais écrire $2 \subset \{2; 3; 5; 7\}$, 2 est un élément qui appartient à l'ensemble, mais seul un ensemble peut-être inclus dans un autre. Il faudrait écrire $\{2\} \subset \{2; 3; 5; 7\}$ ou $2 \in \{2; 3; 5; 7\}$

On peut dessiner des ensembles, on appelle cela des diagrammes de Venn. On représente souvent deux ensembles inclus l'un dans l'autre par deux sacs inclus l'un dans l'autre, comme dans la figure 1.1

Exercice 1 — Représenter graphiquement sous forme de diagramme de Venn (en respectant les inclusions) les ensembles suivants :

- Mammifères
- Canidés
- Animaux
- Chiens
- Chats
- Placez correctement dans les ensembles les animaux suivants :
 - Hélène la baleine
 - Igor le labrador
 - Sacha le chat
 - Edgar le renard
 - Miche-Miche le caniche
 - Régine la sardine
- Dites si les expressions suivantes sont vraies ou fausses :
 - $Igor \in \text{Chiens}$
 - $Régine \in \text{Chats}$
 - $Igor \in \text{Canidés}$
 - $\text{Chats} \subset \text{Mammifères}$
 - $\text{Mammifères} \not\subset \text{Chiens}$
 - $\text{Chats} \subset \text{Mammifères}$

1.2 Les ensembles de nombres

Les nombres utilisés en mathématiques, suivant leurs caractéristiques, sont regroupés dans des ensembles. On distingue six grandes familles de nombres :

1.2.1 Les entiers naturels \mathbb{N}

Les entiers naturels sont les nombres entiers positifs c'est à dire, en notant \mathbb{N} (notation) l'ensemble des entiers naturels, on a :

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$$

1.2.2 Les entiers relatifs \mathbb{Z}

Les entiers relatifs sont les nombres entiers positifs ou négatifs c'est à dire, en notant \mathbb{Z} (notation) l'ensemble des entiers relatifs, on a :

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

1.2.3 Les nombres décimaux \mathbb{D}

Les nombres décimaux sont les nombres qui s'écrivent avec un nombre fini de chiffres après la virgule, c'est à dire, en notant \mathbb{D} (notation) l'ensemble des nombres décimaux, on a :

$$\mathbb{D} = \{\dots; -0,5; -16,15; 0; 1,125; 2,4567; 3,00017; \dots\}$$

Remarque : les nombres entiers sont tous des nombres décimaux : ils ont zéro chiffres après la virgule, ce qui rentre bien dans la définition notée plus haut.

Propriété 4

Un nombre $x \in \mathbb{D}$ si et seulement il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \times 10^n \in \mathbb{Z}$.

Cette propriété signifie que tout nombre décimal x peut s'écrire sous la forme :

$$x = \frac{a}{10^n}$$

Où $a \in \mathbb{Z}$. De plus, tout nombre pouvant s'écrire sous cette forme est décimal.

1.2.4 Les nombres rationnels \mathbb{Q}

Les nombres rationnels sont les quotients d'entiers relatifs, c'est à dire, en notant \mathbb{Q} (notation) l'ensemble des nombres rationnels, on a :

$$\mathbb{Q} = \{\dots; -\frac{7}{5}; -\frac{1}{3}; -\frac{12}{151}; 0; \frac{17}{13}; \frac{2}{7}; \frac{3}{8}; \dots\}$$

Remarque : Les nombres décimaux sont tous des nombres rationnels, puisque l'on a vu que tout nombre décimal pouvait s'écrire comme une fraction d'entiers.

1.2.5 Les nombres réels \mathbb{R}

Les nombres réels sont tous les nombres, c'est à dire, en notant \mathbb{R} (notation) l'ensemble des nombres réels, \mathbb{R} contient tous les nombres cités précédemment et aussi ceux qui n'entrent pas dans les familles précédentes (qu'on appelle nombres irrationnels). On a :

$$\mathbb{R} = \{\dots; -\frac{7}{5}; -\frac{\pi}{3}; -\frac{12}{\sqrt{2}}; 0; \sqrt{3}; \pi; 127; \dots\}$$

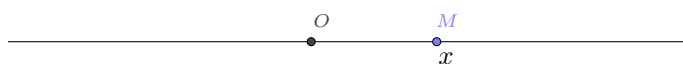
On peut remarquer les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

On peut aussi visualiser cela ainsi :

1.3 La droite des réels

On peut représenter chaque réel $x \in \mathbb{R}$ sur une droite graduée. C'est à dire qu'à tout point de la droite graduée on peut associer un réel x :



On dit que le point M a pour abscisse x . Le point O d'abscisse 0 est appelé origine de la droite.

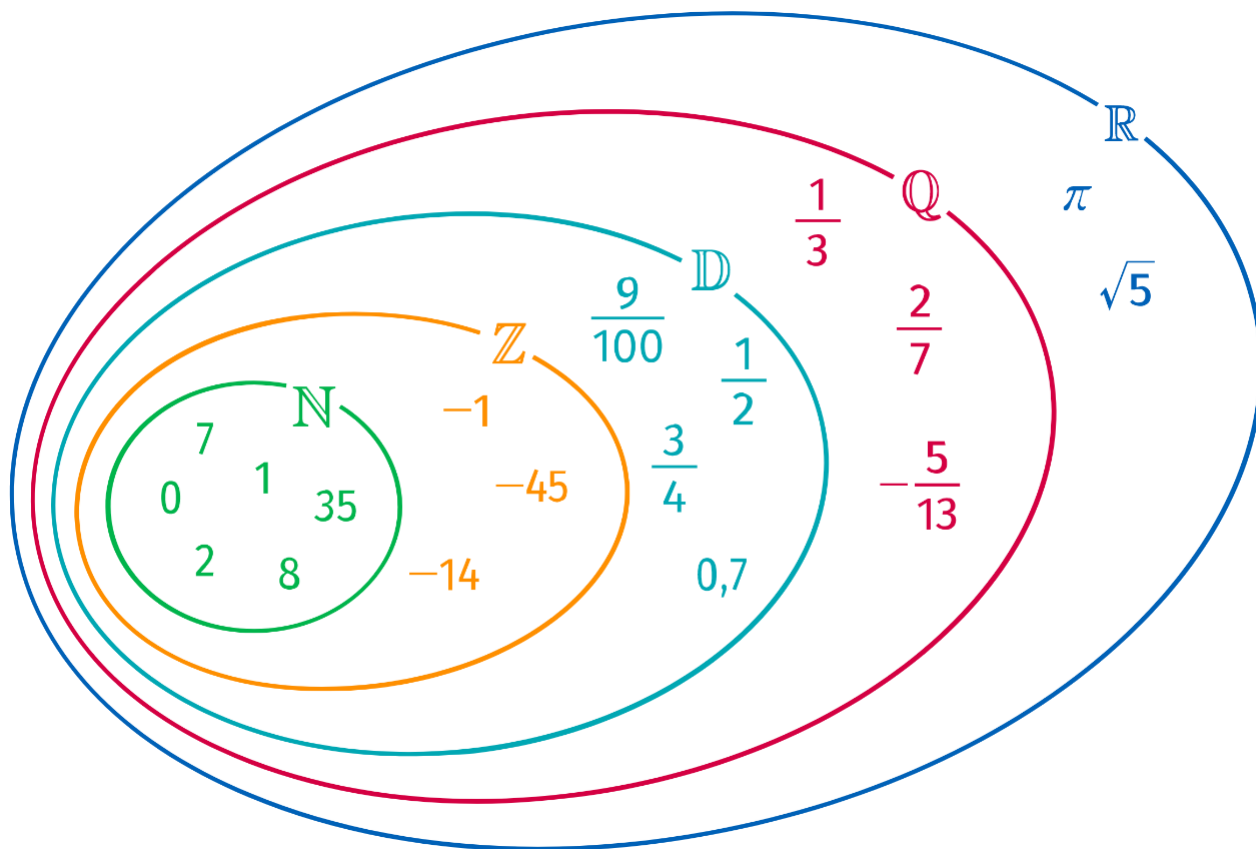


FIGURE 1.1 – Les ensembles de nombres

Définition 5 (Valeur absolue)

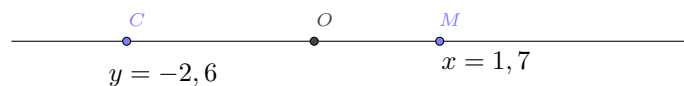
On appelle valeur absolue d'un réel x la distance entre le point M et l'origine O de la droite des réels. La valeur absolue de x se note $|x|$. C'est un nombre positif ou nul.

Un nombre est donc toujours égal à sa valeur absolue multipliée par 1 ou -1 . En fait, un nombre est constitué de deux parties :

- Son signe, qui peut être $+$ ou $-$
- Sa valeur absolue, qui est donc en quelque sorte la "valeur quantitative" d'un nombre.

Exemple 6

On considère les points M et C ci-dessous :



On a alors $|y| = 2,6$ et $|x| = 1,7$.

Propriété 7 (Distance entre deux points)

On considère le point A d'abscisse a et le point B d'abscisse b . La distance AB est la valeur absolue de la différence entre a et b . C'est à dire $AB = |b - a|$.

1.4 Intervalles de \mathbb{R}

Définition 8 (Symbole de l'infini)

En mathématiques on note ∞ pour dire l'infini.

Définition 9 (Ordre)

Soient x et y deux nombre réels on a alors forcément une (et seulement une) des trois situations suivantes :

1. x est égal à y . On note classiquement $x = y$.
2. x est plus petit que y . On note $x \leq y$ ou $x < y$ (strictement plus petit).
3. x est plus grand que y . On note $y \geq x$ ou $y > x$ (strictement plus grand).

1.4.1 Les intervalles

Définition 10 (intervalle)

Un intervalle de \mathbb{R} est l'ensemble des nombres compris entre deux valeurs fixées. Ces deux valeurs peuvent-être infinies.

Les huit types d'intervalles

Soient a et b deux réels. On donne les différentes définitions sous forme d'équivalences. Le symbole \Longleftrightarrow signifie équivalent.

1. Les intervalles bornés

(a) Intervalle fermé borné $[a; b]$:

$$x \in [a; b] \Longleftrightarrow a \leq x \leq b$$

Ici x peut être égal à a ou à b .

(b) Intervalle semi ouvert borné $]a; b]$ ou $[a; b[$:

$$x \in]a; b] \Longleftrightarrow a < x \leq b$$

$$x \in [a; b[\Longleftrightarrow a \leq x < b$$

Dans un cas x ne peut pas être égal à a et dans l'autre x ne peut pas être égal à b .

(c) Intervalle ouvert borné $]a; b[$:

$$x \in]a; b[\Longleftrightarrow a < x < b$$

Ici x ne peut pas être égal à a et à b .

Définition 11

Les réels a et b s'appellent les bornes de l'intervalle.

2. Intervalles non bornés :

(a)

$$x \in [a; +\infty[\Longleftrightarrow x \geq a$$

(b)

$$x \in]-\infty; a] \Longleftrightarrow x \leq a$$

(c)

$$x \in]a; +\infty[\Longleftrightarrow x > a$$

(d)

$$x \in]-\infty; a[\iff x > a$$

Remarques :

- On peut définir \mathbb{R} comme un intervalle : $] -\infty; +\infty[$
- L'infini n'étant pas un nombre réel, un intervalle est toujours ouvert en l'infini (plus ou moins)

Réels compris dans un intervalle de longueur donnée

On considère un intervalle **borné** (ouvert ou fermé).

Définition 12

Soient $a < b$ deux réels. La longueur d'un intervalle borné entre a et b est le réel $b - a$. On l'appelle aussi amplitude de l'intervalle.

1.5 Les dernières notations du chapitre

1.5.1 Equivalence

Un prédicat est une proposition qui peut être vraie ou fausse, elle peut dépendre d'une variable.

Exemples :

- $1 = 0$ est un prédicat qui est toujours faux.
- $3 = \frac{6}{2}$ est un prédicat qui est toujours vrai.
- $x - 1 = 0$ est un prédicat qui sera vrai ou faux selon la valeur de x .

Définition 13

Deux prédicats sont dits équivalents si les situations où ils sont vrais sont les mêmes. On note cette relation \Leftrightarrow

Exemples :

- On a vu dans le chapitre sur les équations que $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$: les deux prédicats auront le même statut (vrai ou faux) quel que soit x
- Dès qu'on a plusieurs manières d'écrire un prédicat, on peut dire que les prédicats sont équivalents. Par exemple pour les intervalles : $x \in [3, 5] \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 5$

1.5.2 Union et intersections d'ensembles

Définition 14

Soient deux ensembles E et F :

- $E \cup F$ (on dit " E union F ") représente l'union de E et de F . C'est l'ensemble des éléments qui appartiennent à E **ou** à F
- $E \cap F$ (on dit " E inter F ") représente l'ensemble des éléments qui appartiennent à E **et** à F
- $E \setminus F$ (on dit " E privé de F ") représente l'ensemble des éléments qui appartiennent à E **mais pas** à F

Exemple :

- Soient $E = \{1; 2; 4; 8\}$ et $F = \{2; 4; 6; 8\}$. $E \cup F = \{1; 2; 4; 6; 8\}$ et $E \cap F = \{2; 4; 8\}$
- Mettre une étoile $*$ à côté d'un ensemble comme \mathbb{N} ou \mathbb{R} , c'est lui enlever l'élément 0 : $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

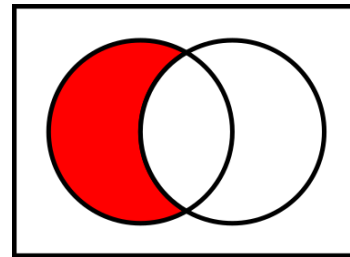
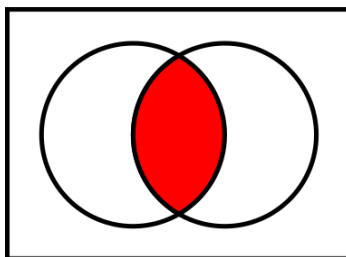
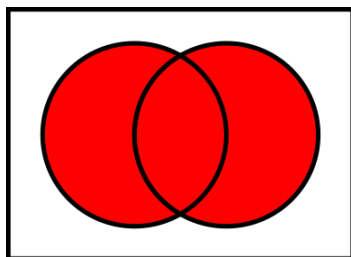


FIGURE 1.2 – Union : $E \cup F$ FIGURE 1.3 – Intersection : $E \cap F$ FIGURE 1.4 – Différence : $E \setminus F$

Notation	Comment le lire	Comment l'utiliser
\emptyset	"Ensemble vide"	Désigne l'ensemble qui ne contient aucun élément (il est unique !)
\in, \notin	"Appartient à" / "N'appartient pas à"	Signale que l'élément à gauche du signe appartient (ou non) à l'ensemble à droite du signe.
$\subset, \not\subset$	"Est inclus dans" / "N'est pas inclus dans"	Signale que l'ensemble de gauche est inclus dans l'ensemble de droite.
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	"Grand N" (etc...)	Désigne l'ensemble de nombre correspondant dans le cours : entiers naturels, entiers relatifs, décimaux, rationnels et réels
$[2, 3]$	"L'intervalle 2, 3 fermé"	Tous les nombres contenus entre le nombre de gauche de l'intervalle et le nombre de droite, bornes incluses
$]2, 3[$	"L'intervalle 2, 3 ouvert"	Tous les nombres contenus entre le nombre de gauche de l'intervalle et le nombre de droite, bornes non incluses
$ x $	"Valeur absolue de x "	Désigne la valeur absolue d'un nombre (c'est à dire sa valeur numérique à laquelle on a retiré le signe s'il est négatif).
$\infty, +\infty$	"L'infini", "plus l'infini"	Désigne le concept d'infini : une grandeur plus grande que n'importe quel nombre réel.
$A \cup B$	"A union B"	Pour noter tous les éléments contenus dans n'importe quel ensemble à gauche ou à droite du signe
$A \cap B$	"A inter B"	Pour noter tous les éléments contenus dans les deux ensembles décrits à gauche et à droite du signe.
$A \setminus B$	"A privé de B"	Pour noter tous les éléments contenus dans l'ensemble de gauche mais pas l'ensemble de droite.
\Leftrightarrow	"est équivalent à"	Signale que la proposition de droite est équivalente à la proposition de gauche : L'une est vraie si et seulement si l'autre est vraie
$\{1; 2; 4\}$	"L'ensemble contenant les nombres 1, 2 et 4"	Désigne l'ensemble constitué des éléments situés entre les $\{\}$
\mathbb{R}^*	"Grand R étoile"	Signale qu'on a retiré le nombre 0 de l'ensemble de nombre à gauche. Ici, on a tous les réels non nuls
\mathbb{R}^+	"Grand R +"	Signale qu'on considère seulement les nombres positifs de l'ensemble à gauche du "+". Ici on désigne tous les réels positifs ou nuls.

FIGURE 1.5 – Les (nombreuses) notations vues dans le chapitre

Chapitre 2

Fonctions : généralités

2.1 Définition

Les objets mathématiques ont chacun un rôle. Le rôle d'une fonction est d'**associer**. Associer, cela veut dire transformer un objet en un autre. Cette année, on verra surtout les fonctions qui transforment un nombre réel en un autre nombre réel, mais une fonction peut techniquement associer n'importe quel type d'objet à n'importe quel autre :

- Fonction qui associe à une chaîne de caractère son initiale
- Fonction qui associe un point à un autre. Par exemple, on peut associer chaque point qui se trouve sur une carte de la ville au point auquel il correspond dans la vraie vie. Plus mathématiquement, une symétrie est un point qui va associer à chaque point un autre.

Dans le cours de mathématiques, on utilisera presque exclusivement des fonctions d'un intervalle réel dans les nombres réels. Il est à noter qu'en python, on utilisera des fonctions dans un sens plus large.

Définition 15 (Fonction d'un intervalle de \mathbb{R})

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On dit que f est une fonction de I dans \mathbb{R} si à tout élément x de I , f associe un et un seul élément de \mathbb{R} , qu'on note $f(x)$. On note :

$$\begin{array}{rcl} f & : & I \rightarrow \mathbb{R} \\ & & x \mapsto f(x) \end{array}$$

x est appelée la variable de la fonction f . On l'appelle variable tant qu'on ne lui fixe pas de valeur. Ce terme sera seulement utilisé pour :

- Dire que x n'a pas encore été fixé et qu'il peut donc varier
- Décrire le nombre de variables d'une fonction.

Dans l'année, on étudiera beaucoup de fonctions à une variable, mais il y a aussi des fonctions à deux variables (ou encore plus), et vous avez même probablement vu des fonctions à deux variables avant les fonctions à une variable : l'addition par exemple, est une fonction qui prend deux nombres en entrée, et qui ressort un nombre en sortie. On pourrait aussi bien déclarer que l'addition est une fonction à deux variables, qui prend en entrée deux nombres réels, et qui leur associe un nombre réel : leur somme.

Exemple : la fonction carré : à tout nombre réel x , elle associe x^2 . Si on appelle g cette fonction, on note :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & & x \mapsto x^2 \end{array}$$

2.1.1 Image et antécédent, tableau de valeurs

Définition 16

$f(x)$ s'appelle l' image de x . On dit que x est un antécédent de $f(x)$.

La manière de présenter la fonction qui apparaît ci-dessus est une des manières standard de le faire quand il existe une formule. (On peut aussi noter un peu abusivement La fonction f telle que $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Mais il n'existe pas toujours de formule simple pour décrire la valeur que prend une fonction selon la valeur prise par sa variable. Une manière de la présenter dans ces cas là est de faire appel à un tableau de valeurs.

Définition 17

Un tableau de valeurs d'une fonction f est un tableau dans lequel apparaît sur une ligne certaines valeurs prises par la variable, et sur la ligne du dessous l'image de chacune de ces valeurs par la fonction.

Pour la fonction carré, présentée ci-dessus, un tableau de valeur se présenterait ainsi :

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	0	1	4	9	16

2.2 Représentation graphique

Avant de pouvoir tracer la courbe représentative d'une fonction, il nous faut savoir associer à des coordonnées un point du plan, et vice-versa. Pour cela, on utilise un repère.

Définition 18 (Repère)

Pour repérer un point dans le plan, on trace deux droites (les axes) sécantes en un point O , origine du repère. Sur un axe, on place un point I et la distance OI sert de référence. De même sur l'autre axe on place un point J et la distance OJ sert de référence. $(O; I, J)$ définit un repère du plan. Soit M un point quelconque. On trace les parallèles aux axes passant par M . Elles coupent ces deux axes en M' et M'' .

M' est repéré par un nombre x_M sur l'axe $[OI]$ et M'' par un nombre y_M sur l'axe $[OJ]$.

On dit que x_M et y_M sont les coordonnées de M dans le repère $(O; I, J)$. x_M est l'abscisse de M et y_M l'ordonnée de M .

On représente en règle générale les fonctions dans un repère orthonormé, c'est à dire que les droites (OI) et (OJ) seront perpendiculaires, et que les longueurs OI et OJ seront égales.

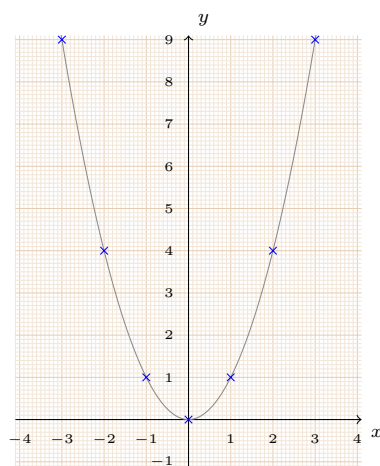
Axe	Nom	Lettre associée
Horizontal	Abcisse	x
Vertical	Ordonnées	y

Définition 19 (Courbe représentative d'une fonction)

La courbe représentative d'une fonction f est l'ensemble des points $(x, f(x))$, où x parcourt l'ensemble des points où la fonction est définie, qu'on a placé sur un repère orthonormé.

Concrètement, pour représenter une fonction, on commence par faire un tableau de valeurs pour calculer l'image de certains points qui seront situés dans la partie de l'axe des abscisses que l'on représente. Puis on place ces points sur le repère. Enfin, on relie ces points par une courbe, dont l'allure dépend de la manière dont la fonction est définie (Elle ne va pas en ligne droite entre les points du tableau de valeur, sauf si la fonction est affine sur l'intervalle entre les deux points). Pour cette dernière partie, on peut s'aider de la représentation graphique sur une calculatrice, de son expérience, ou rajouter des valeurs supplémentaires dans le tableau de valeur pour voir ce que la courbe fait entre les points qu'on a tracé.

1. Tracer un repère
2. Préparer un tableau de valeurs de la fonction
3. Placer les points du tableau de valeur sur le repère
4. Tracer une courbe qui passe par ces points



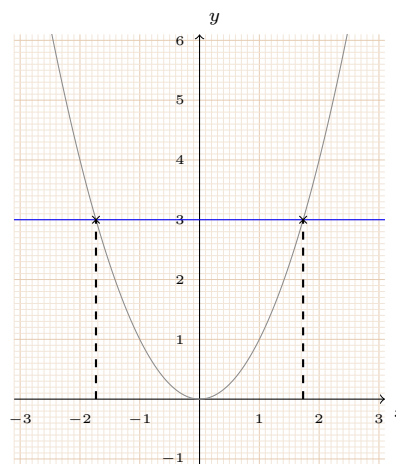
Courbe représentative de $f(x) = x^2$

2.3 Fonctions et équations

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble des réels, et a un nombre.

Résoudre $f(x) = a$ c'est trouver tous les antécédents de a par la fonction f .

Graphiquement, c'est trouver toutes les abscisses en lesquelles la courbe représentative de la fonction croise la droite horizontale d'ordonnée a .



Résolution graphique de $x^2 = 3$: les deux solutions valent environ -1.7 et 1.7

On peut appliquer cela à toutes les équations : Les équations à une inconnue, qu'on notera ici x , sont toujours de la forme $A(x) = B(x)$ où A et B sont des fonctions, puisque les deux membres de l'égalité sont calculables pour un x donné. On peut donc toujours la transformer en une égalité de la forme $f(x) = 0$, où $f(x) = A(x) - B(x)$ (f est la différence de deux fonctions, c'est donc elle même une fonction)

2.3.1 Inéquation

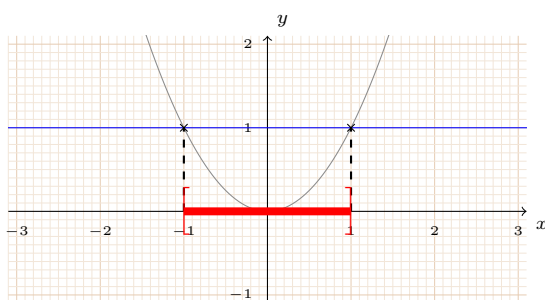
Définition 20

Une inéquation, c'est une inégalité entre deux expressions qui s'expriment chacune en fonction d'une même inconnue. Comme dans le cadre d'une équation, résoudre une inéquation c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue qui rendent l'inégalité vraie.

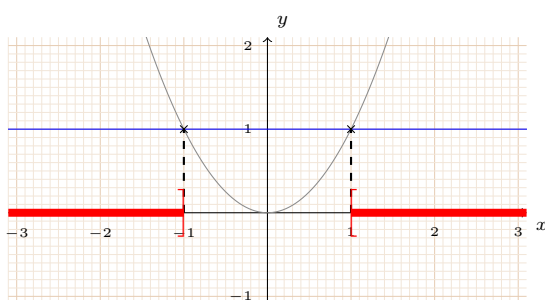
Résoudre $f(x) \geq a$ c'est trouver tous les antécédents de nombres plus petits que a par la fonction f .

Graphiquement, c'est trouver toutes les abscisses en lesquelles la courbe représentative de la fonction est **en dessous** de l'ordonnée a (c'est à dire en dessous de la droite d'équation $y = a$).

A l'inverse, Résoudre $f(x) \leq a$ c'est trouver tous les antécédents de nombres plus grands que a par la fonction f . Graphiquement, c'est trouver toutes les abscisses en lesquelles la courbe représentative de la fonction est **au dessus** de la droite d'équation $y = a$.



Résolution graphique de $x^2 \leq 1$: Les solutions valides sont les x de $[-1; 1]$



Les solutions valides de $x^2 \geq 1$ sont les x de $] -\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

2.4 Parité d'une fonction

Ces propriétés permettent notamment de tracer le graphique d'une fonction sur les entiers négatifs, elles divisent donc la quantité de travail par 2.

Définition 21

Une fonction f est dite paire si l'image de l'opposé de tout nombre de son ensemble de définition est égale à l'image de ce nombre. Pour tout nombre x tel que $f(x)$ est défini alors $f(-x)$ est défini et

$$f(x) = f(-x)$$

Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction paire sera symétrique par rapport à l'axe des ordonnées dans un repère orthonormé. (Donc par rapport à **une droite**)

Par exemple, la fonction carré est paire : pour tout x réel, $x^2 = (-x)^2$

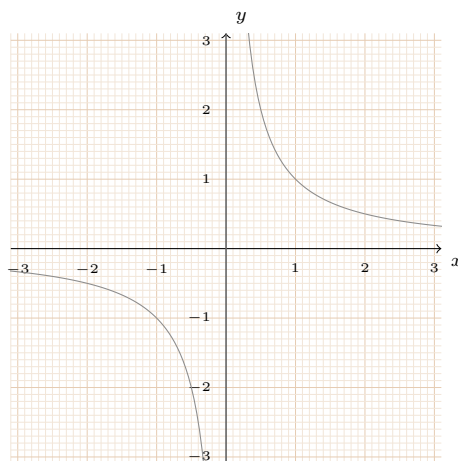
Définition 22

Une fonction f est dite impaire si l'image de l'opposé de tout nombre de son ensemble de définition est égale à l'opposé de l'image de ce nombre. Pour tout nombre x tel que $f(x)$ est défini alors $f(-x)$ est défini et

$$f(-x) = -f(x)$$

Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction impaire sera symétrique par rapport à l'origine dans un repère orthonormé (Donc par rapport à **un point**)

Par exemple, la fonction inverse, qui à tout x non nul associe $\frac{1}{x}$ est impaire : pour tout x réel, $x^2 = (-x)^2$



La Courbe représentative de $g(x) = \frac{1}{x}$ est impaire

2.5 Sens de variation d'une fonction

Définition 23

Une fonction f est dite croissante sur un intervalle I si pour deux nombres a et b de cet intervalle :

$$\text{si } a \leq b, \text{ alors } f(a) \leq f(b)$$

Remarques :

- On dit souvent qu'une fonction croissante sur un intervalle conserve l'ordre : Comparer (au sens de "se demander quel nombre est le plus grand") les images de deux éléments donnera le même résultat que comparer ces deux éléments.
- Graphiquement, la courbe représentative sur un intervalle "montera" : en parcourant la courbe de gauche à droite, l'image en ordonnée devient de plus en plus haute.

Une fonction décroissante, c'est le contraire :

Définition 24

Une fonction est dite décroissante sur un intervalle I si pour deux nombres a et b de cet intervalle :

$$\text{si } a \leq b, \text{ alors } f(a) \geq f(b)$$

- On dit souvent qu'une fonction décroissante sur un intervalle inverse l'ordre : Comparer les images de deux éléments donnera le résultat inverse que comparer ces deux éléments.
- Graphiquement, la courbe représentative sur un intervalle "descend" : en parcourant la courbe de gauche à droite, l'image en ordonnée devient de plus en plus basse.
- Sur un intervalle donné, une fonction qui est soit décroissante, soit croissante est dite monotone. Attention, la fonction doit garder le même sens de variation tout au long de l'intervalle.

Contrairement aux fonctions affines que vous aviez vu jusqu'à présent, qui gardaient toujours le même sens de variation, une fonction peut être croissante sur certains intervalles et décroissante sur d'autres.

La fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ c'est à dire sur les réels positifs et décroissante sur $] -\infty; 0]$. En revanche, on ne peut pas dire qu'elle est monotone sur \mathbb{R} , car elle ne reste pas monotone sur l'intervalle.

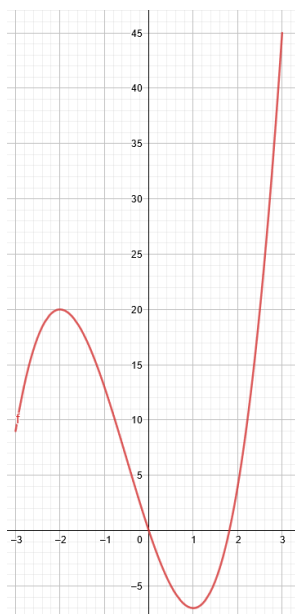
2.6 Tableau de variations d'une fonction

Un tableau de variations résume en un seul schéma des informations importantes sur une fonction.

Ainsi, le tableau ci-dessous présente les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[-3; 3]$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$, dont la courbe représentative apparaît à droite.

Tableau de variations de la fonction f :

x	-3	-2	1	3
$f(x)$	9	20	-7	45



Sur la première ligne d'un tableau de variations d'une fonction figurent les antécédents remarquables par la fonction f :

- Les bornes de l'intervalle où la fonction est définie
- Les bornes des intervalles où la fonction est monotone (Ce sont les points où la fonction change de sens de variation)

La deuxième partie d'un tableau de variations indique les intervalles croissants par une flèche qui va vers le haut, et les intervalles décroissants par une flèche qui va vers le bas. Puis, on écrit sous les valeurs de la première ligne leurs images par la fonction.

2.6.1 Extremums d'une fonction

Un extremum est une valeur extrême, prise par une fonction sur un intervalle donné. Cela peut être un minimum ou un maximum.

Définition 25

On dit que f admet un maximum sur l'intervalle I en la valeur $a \in I$ si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$.
On dit que f admet un minimum sur l'intervalle I en la valeur $a \in I$ si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$.

Si l'intervalle I est l'ensemble sur lequel la fonction est défini, on parle de maximum (ou minimum) **global**. Sinon, on parle de maximum (ou minimum) **local**.

Les valeurs au bord des intervalles fermés qui apparaissent dans des tableaux de variation sont des extremums locaux.

Par exemple, dans le tableau ci-dessus

- $f(-2) = 20$ est la valeur maximum prise par la fonction sur l'intervalle $[-3; 1]$. f admet un maximum local en -2 qui vaut 20.
- f admet un minimum global en 1, en lequel elle prend la valeur de -7 .

Chapitre 3

Vecteurs du plan

Dans un repère, on place deux points A et B . Intuitivement, un vecteur décrit le chemin à parcourir pour passer de A à B . C'est un déplacement, qu'on appelle translation.

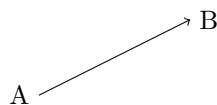
Définition 26 (Translation)

Rappel : Une translation est une glissade qui transforme un point du plan en un autre. Opérer une translation sur une figure, c'est effectuer **la même** translation à tous les points de la figure. Opérer une translation sur une figure conserve ses distances, ses angles, son aire, et en général toutes les grandeurs qui ne dépendent que du placement des points de la figure les uns par rapport aux autres.

Définition 27 (Vecteur)

La translation qui transforme le point A en le point B , est appelée translation de vecteur \overrightarrow{AB} .

On peut noter un vecteur par son point de départ et son point d'arrivée. On peut également lui donner son propre nom, qui est souvent \vec{u} ou \vec{v} (ici, u et v sont en minuscule, car on réserve généralement les lettres majuscules pour les points du plan).



On va commencer par décrire les vecteurs dans le plan muni d'un repère cartésien. Cela facilite les notations. Puis nous verrons les propriétés dans un cadre plus général.

3.1 Dans un repère cartésien.

3.1.1 Coordonnées d'un vecteur

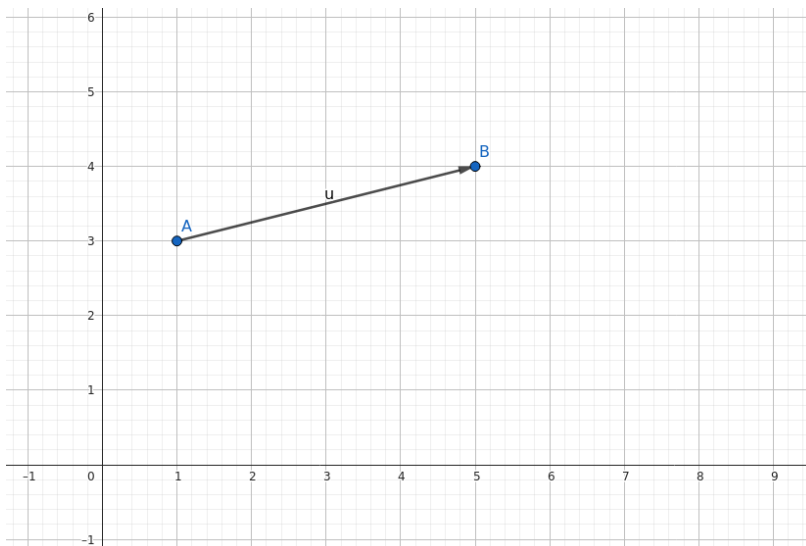
Un vecteur représente un chemin d'un point à un autre du plan En deux dimensions. Si l'on dispose d'un repère cartésien, on peut décrire un vecteur par deux coordonnées : Le déplacement effectué sur l'axe des abscisses, et le déplacement effectué sur l'axe des ordonnées.

Pour passer du point $A(1, 3)$ au point $B(5, 4)$, on se déplace de $+4$ sur l'axe des abscisses et de $+1$ sur l'axe des ordonnées.

Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On peut également le noter $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

On peut voir un vecteur comme un plan de route : Pour atteindre B en partant de A , avancez de 4 sur l'axe des abscisses, et de 1 sur l'axe des ordonnées.



On note les coordonnées d'un vecteur verticalement. Si la translation diminue les abscisses ou les ordonnées, la coordonnée du vecteur associé sera négative.

Propriété 28

Soient deux points $M(x_M, y_M)$ et $M'(x_{M'}, y_{M'})$ dans un repère. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ sont $\begin{pmatrix} x_{M'} - x_M \\ y_{M'} - y_M \end{pmatrix}$.

Note : C'est simplement la formule de la différence de deux points en deux dimensions.

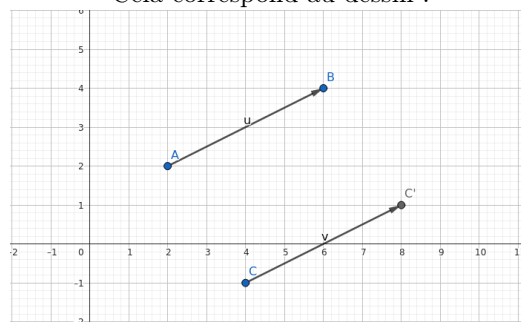
Définition 29

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont les mêmes coordonnées. Attention : On peut dessiner deux fois le même vecteur à différents endroits du plan, et ils seront tout de même égaux.

Quand on dessine sur le plan un vecteur \overrightarrow{AB} , égal à un certain vecteur \vec{u} , on dit que \overrightarrow{AB} est un représentant de \vec{u} .

On vous demandera souvent de donner l'image d'un point C par une translation correspondant à un vecteur donné \vec{u} . Pour ce faire, il suffit de donner le point d'arrivée du même vecteur que \vec{u} partant de C .

Cela correspond au dessin :



La formule est donnée par :

soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ un vecteur, et $C(x_c, y_c)$ un point. L'image C' de C par la translation de vecteur u a pour coordonnées $C'(x_c + x_u, y_c + y_u)$.

3.1.2 vecteur nul

Définition 30

Le vecteur nul est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il est le vecteur associé à la translation qui transforme tout point en lui-même. On le note $\vec{0}$.

Note : En général, on ne dessine pas le vecteur nul.

3.1.3 Somme de vecteurs

Effectuer plusieurs translations d'affilée revient à effectuer une seule translation, associée à un vecteur qui correspond à la somme des vecteurs directeurs des translations : $\vec{u} + \vec{v}$ aura pour coordonnées la somme des coordonnées de \vec{u} et de \vec{v} .

Définition 31

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. On note $\vec{u} + \vec{v}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$.

Exercice 2 Comme l'addition de nombres, l'addition de vecteur est commutative (c'est à dire que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$) et associative. Le montrer.

On va voir tout de suite une expression mathématique du fait que vous connaissez sûrement déjà : Aller de Monaco à Paris puis de Paris à Madrid, c'est aller de Monaco à Madrid.

Propriété 32 (Relation de Chasles)

Soient A , B et C trois points du plan.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Démonstration en exercice (Avec des coordonnées)

3.1.4 Multiplication par un nombre réel

En plus d'additionner deux vecteurs, on peut également les multiplier par un nombre réel. Multiplier un vecteur par le réel k , c'est simplement obtenir un chemin k fois plus grand, coordonnée par coordonnée :

Définition 33

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur du plan, et k un nombre réel. On appelle $k\vec{u}$, ou $k \times \vec{u}$, ou $k \cdot \vec{u}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Propriété 34

Cette multiplication de vecteurs par des réels se comporte comme une multiplication traditionnelle : pour k et k' des nombres réels et \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs :

1. $1 \times \vec{u} = \vec{u}$, $\vec{u} + \vec{u} = 2\vec{u}$, $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$
2. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ (distributivité par rapport à l'addition)
3. $(kk')\vec{u} = k(k'\vec{u})$ (Associativité mixte)

3.1.5 Vecteurs colinéaires

La colinéarité est une relation, c'est à dire qu'elle n'a un sens quand on parle de deux vecteurs (ou plus). Elle désigne des vecteurs qui pointent dans la même direction (ou dans un direction opposée). On va cependant voir une définition qui utilise le concept de multiplication par un réel.

Définition 35 (Colinéarité de deux vecteurs)

Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont dits colinéaires si \vec{u} est égal à \vec{v} multiplié par un certain réel k .

Ainsi, les vecteurs $\vec{a} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires, car $\vec{b} = 2\vec{a}$

Propriété 36

Deux vecteurs non nuls $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si le tableau de leurs coordonnées est un tableau de proportionnalité.

Toujours avec les mêmes vecteurs \vec{a} et \vec{b} qu'à l'exemple précédent, $\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$ est bien un tableau de proportionnalité.

Remarques :

- la définition ci-dessus ne traite que des vecteurs non nuls. Si l'un des deux vecteurs u et v est nul, alors les deux vecteurs sont forcément colinéaires. Mais ça n'est pas très intéressant, c'est comme de dire que 0 est un multiple de tous les nombres entiers n puisque $0 = 0 \times n$.
- Cas particulier : Multiplier un vecteur \vec{u} par -1 donne un vecteur dont chaque coordonnée est l'opposé de la coordonnée du vecteur de départ. On appelle le résultat vecteur opposé de \vec{u} . On le note $-\vec{u}$.
- Deux vecteurs colinéaires sont les supports de droites parallèles. Cela "se voit" sur un dessin, nous l'énoncerons formellement dans la prochaine partie, et nous clarifierons plus tard dans l'année quand on énoncera plus précisément ce qu'est une droite.

Propriété 37

l'opposé d'un vecteur \overrightarrow{AB} est le vecteur \overrightarrow{BA} : Prendre l'opposé d'un vecteur est la même chose que d'inverser le point de départ et d'arrivée.

Démonstration : Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. On a donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA} = \vec{0} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}$.

Remarque : C'était prévisible en considérant le vecteur comme un trajet : L'opposé d'un trajet Strasbourg-

Paris, c'est un trajet Paris-Strasbourg.

3.1.6 Direction et sens d'un vecteurs

Définition 38

On dit de deux vecteurs non nuls colinéaires qu'ils ont la même direction.
Deux vecteurs non nuls u et v non nuls ont donc même direction si et seulement si il existe un entier k tel que $u = kv$.

On voit effectivement graphiquement dans un repère que les droites (AB) et (CD) sont "orientées de la même manière" si et seulement si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires.

On tire de cette vision géométrique (qu'on précisera plus tard dans l'année) des propriétés très utiles pour savoir si des droites sont parallèles :

Propriété 39 (Admise pour l'instant)

Soient quatre points A, B, C et D . Si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont non nuls, et colinéaires entre eux, alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Deux droites parallèles qui ont un point commun sont confondues, on tire donc de la propriété essentielle ci-dessus le résultat suivant :

Propriété 40

Soient trois points A, B et C , les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires.

Si deux vecteurs ont la même direction, on peut alors se demander s'ils ont le même sens. Concrètement, cela veut dire que les flèches apparaissent dans le même sens sur un représentant de chaque vecteur.

Définition 41

Si u et v sont deux vecteurs de même direction, c'est à dire que pour un certain k réel, $u = kv$, alors :
— Si $k > 0$, alors on dit que u et v ont **même sens**.
— Si $k < 0$, alors on dit que u et v ont un **sens opposé**

Exemples : les vecteurs dessinés sur la figure 3.1.

3.1.7 Norme d'un vecteur

Comme souvent en mathématiques, on aime calculer la taille des objets, parce que cela exprime une partie des propriétés d'un objet sous la forme d'un nombre. La longueur d'un vecteur s'appelle la norme.

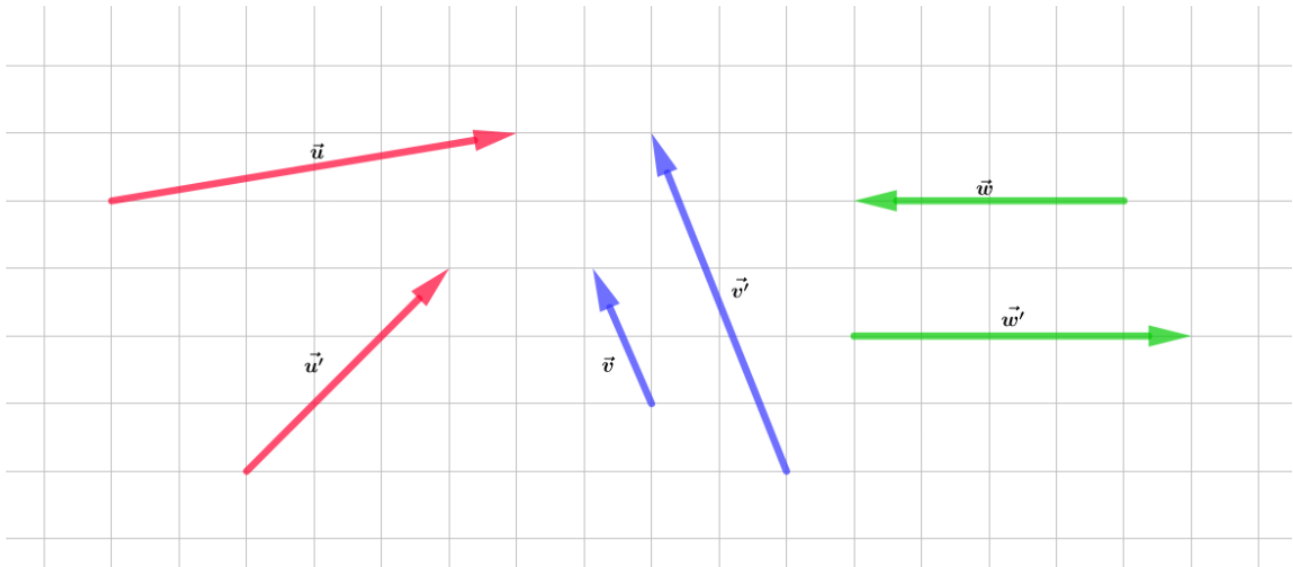


FIGURE 3.1 – Les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' n'ont pas la même direction, les vecteurs \vec{v} et \vec{v}' ont même direction et même sens, les vecteurs \vec{w} et \vec{w}' ont même direction, mais un sens opposé.

Définition 42 (Norme d'un vecteur)

La norme d'un vecteur \overrightarrow{AB} est égale à la longueur du vecteur, c'est à dire à la distance AB . On la note $\|\overrightarrow{AB}\|$

Pour calculer cette distance quand on dispose des coordonnées, il suffit d'utiliser le bon vieux théorème de Pythagore.

Propriété 43 (Norme d'un vecteur dont on connaît les coordonnées)

Soit \vec{u} un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, la norme de \vec{u} est donnée par la formule

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Note : La norme est donc toujours positive, et même toujours strictement positive si le vecteur n'est pas nul : $\vec{0}$ est le seul vecteur qui a une norme nulle.

On dispose maintenant des trois éléments caractéristiques d'un vecteur :

Propriété 44

Deux vecteurs non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même **direction**, même **sens**, et même **norme**.

Exercice : dessiner deux vecteurs qui ont même norme mais pas même direction, deux autres même direction et norme mais pas même sens, et enfin deux qui ont même direction et sens mais pas même norme.

On a déjà vu que multiplier un vecteur par un réel k (différent de 0) conservait la direction du vecteur, et conservait le sens si $k > 0$ (et l'inverse si $k < 0$). On va voir que la multiplication par un réel a aussi un effet simple sur la norme du vecteur :

Propriété 45

soit k un nombre réel et \vec{u} un vecteur, $\|k \times \vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$

On déduit de tout ceci le théorème suivant.

Théorème 46

Soient A, B, C et D quatre points du plan. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Un sens est montré en exercice, la partie "seulement si" est plus ardue : Si $ABCD$ est un parallélogramme, il est facile de montrer que \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DC} ont même norme (car les côtés opposés d'un parallélogramme ont même longueur), et ont même direction (car les côtés opposés du parallélogramme), on ne dispose pas vraiment d'argument formel pour dire qu'ils ont même sens, hormis "ça se voit, sinon le quadrilatère $ABCD$ serait croisé".

Attention, le parallélogramme ainsi défini peut être aplati, si les points A,B,C et D sont alignés.

Chapitre 4

Informations chiffrées

4.1 Proportion et pourcentage

4.1.1 pourcentage

Définition 47

Un pourcentage est un nombre, $t\% = \frac{t}{100}$ (On prononce "t pour cent"). Il peut s'exprimer sous forme de pourcentage, mais aussi sous forme de fraction ou sous forme décimale.

Remarque importante : Un pourcentage est un nombre, mais vous le verrez toujours comme étant un pourcentage **de** quelque chose.

Définition 48

Pour calculer $t\%$ d'une quantité, on multiplie cette quantité par $\frac{t}{100}$. Il peut s'exprimer sous forme de pourcentage, mais aussi sous forme de fraction ou sous forme décimale.

4.1.2 Proportion : vocabulaire

Définition 49

Une population est un ensemble d'éléments appelés individus.
Une sous-population est un sous-ensemble de la population.
On appelle effectif de la population le nombre d'individus de la population

Une fois ces termes (très employés dans les statistiques) définis, on peut définir la proportion :

Définition 50

La proportion d'une sous-population dans une population est égal au rapport du nombre d'individus :
On note T la population (et n_T son effectif), et A la sous-population (et n_A son effectif). La proportion p de A dans T est donnée par la formule :

$$p = \frac{n_A}{n_T} = \frac{\text{nombre d'individus dans la sous-population}}{\text{nombre d'individus dans la population}}$$

Une proportion est un nombre, compris entre 0 et 1, qui peut être exprimé comme une fraction, un nombre décimal, ou un pourcentage.

Exemple : Une classe de 24 élèves comporte 9 élèves qui portent des lunettes. La proportion d'élèves qui portent des lunettes dans la classe est de $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$ (écriture fractionnaire), ou 0,75 (écriture décimale) ou 75% (écriture en pourcentage)

On vous demandera souvent de calculer la proportion à partir des effectifs, mais aussi de calculer un effectif manquant (de la population ou de la sous-population) à partir d'un effectif et de la proportion.

Pour cela, on peut calculer relativement facilement les formules correspondantes pour calculer :

- n_A en fonction de n_T et p : $n_A = n_T \times p$
- n_T en fonction de n_A et p : $n_T = \frac{n_A}{p}$

4.1.3 Proportion d'une proportion

Cette propriété permet de tisser des liens entre 3 populations imbriquées les unes dans les autres.

Propriété 51

Soit T une population, et A une sous-population non vide de T . Soit B une sous-population de A .
On note $p_{A,T}$ la proportion de A dans T , $p_{B,A}$ la proportion de B dans A .
La proportion $p_{B,T}$ d'individus de B dans T est égale à $p_{B,T} = p_{B,A} \times p_{A,T}$

Démonstration guidée 52

On utilise les notations et hypothèses du théorème :

1. On appelle n_T , n_A et n_B les effectifs respectifs de T , A et B . Exprimer $p_{B,T}$ en fonction de ces variables.
2. Faire de même pour $p_{A,T}$ et $p_{B,A}$
3. Exprimer $p_{B,A} \times p_{A,T}$ sous la forme d'une fraction.
4. Montrer que $p_{A,T} \times p_{B,A} = p_{B,T}$

4.2 Evolution

4.2.1 Variation absolue et relative

Quand une quantité évolue, elle passe d'une valeur initiale à une valeur finale.

Définition 53

On appelle :

- Variation absolue le nombre : $\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}$
- Variation relative le nombre : $\frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$

La variation absolue s'exprime dans la même unité que la quantité à laquelle elle se rapporte. La variation relative est un nombre sans unité. On l'exprime sous forme décimale, de fraction, ou de pourcentage.

La variation relative est aussi appelée taux d'évolution.

4.2.2 Variation en pourcentage, coefficient multiplicateur

Augmenter une quantité q de $t\%$, c'est lui faire subir une variation relative de $t\%$, c'est à dire lui ajouter $t\%$ de ce que la quantité q valait avant l'augmentation.

Si on appelle q' la quantité obtenue, on a donc :

$$q' = q + q \times \frac{t}{100}$$

On peut mettre q en facteur :

$$q' = q \left(1 + \frac{t}{100} \right)$$

q' est donc égal à q multiplié par un nombre qui ne dépend pas de q . On appelle ce nombre coefficient multiplicateur.

Propriété 54

Augmenter une quantité V_I de $t\%$, c'est la **multiplier** par $1 + \frac{t}{100}$. Le nombre $1 + \frac{t}{100}$ est appelé coefficient multiplicateur.

Diminuer une quantité V_I de $t\%$, c'est la **multiplier** par $1 - \frac{t}{100}$. Le nombre $1 - \frac{t}{100}$ est appelé coefficient multiplicateur.

Propriété 55

Coefficient multiplicateur = $1 + \text{taux d'évolution}$

taux d'évolution = Coefficient multiplicateur - 1

Si l'on définit le coefficient multiplicateur, c'est parce qu'il est pratique de voir les évolutions en pourcentage comme des multiplications, comme le montrent les deux propriétés suivantes :

4.2.3 Evolutions successives

Pour appliquer deux évolutions successives (l'une puis l'autre) à une quantité, on la multiplie successivement par les deux coefficients multiplicateurs :

On peut donc à partir de là calculer le taux d'évolution associé à plusieurs évolutions successives :

Le prix d'une

Propriété 56

Une quantité subit deux évolutions successives de taux d'évolution t_1 et t_2 .

Elle est donc multipliée par $(1 + t_1)$ puis par $(1 + t_2)$ (Passage aux coefficients multiplicateurs en ajoutant 1 au taux d'évolution)

Elle est donc au total multipliée par $(1 + t_1)(1 + t_2)$

Elle subit donc au total une évolution de $(1 + t_1)(1 + t_2) - 1$ (Passage au taux d'évolution en retirant 1 au coefficient multiplicateur)

En développant, on obtient : $(1 + t_1)(1 + t_2) - 1 = 1 + t_2 + t_1(1 + t_2) - 1 = 1 + t_2 + t_1 + t_1t_2 - 1 = t_1 + t_2 + t_1t_2$

Deux évolutions successives de t_1 puis t_2 n'est donc en général pas la même chose qu'une évolution de $t_1 + t_2$.

4.2.4 Evolution réciproque

L'essence, qui valait 2€, subit une augmentation de 25%. Elle vaut donc maintenant $(1 + \frac{25}{100}) \times 2 \text{ €} = 2,50 \text{ €}$

On se demande quelle évolution lui rendrait sa valeur de départ. La question à se poser c'est : "Par combien dois-je la multiplier pour obtenir la valeur de départ ?"

Pour ça, il faudrait un coefficient multiplicateur total de 1.

On veut donc, si l'on appelle c le coefficient multiplicateur de la deuxième évolution : $1,25 \times c = 1$, c'est à dire $c = \frac{1}{1,25}$

On obtient $c = 0,8$, et on en déduit que l'évolution réciproque (celle qui ramène au résultat de départ) d'une hausse de 25% est celle qui correspond à un coefficient multiplicateur de 0,8, à savoir une baisse de 20%

Chapitre 5

Vecteurs et droites

5.0.1 Vecteurs directeurs et équations d'une droite

Préparez-vous mentalement, cette sous-partie contient des concepts qui lient absolument **toutes** les notions vues depuis le début de l'année : Ensembles de nombres, fonctions, équations et vecteurs.

Exprimer une droite du plan dans un repère

Dans un repère, on peut exprimer presque toutes les droites sous la forme de l'équation **réduite** $y = ax + b$ (avec a et b des nombre réels). C'est à dire que presque toutes les droites sont des courbes représentatives de fonctions affines, c'est à dire des fonctions de forme $f : x \mapsto ax + b$. Mais il nous manque un type de droite si on se contente de cette paramétrisation : les droites verticales ne représentent pas des fonctions (car une fonction a toujours au maximum un point sur une ligne verticale), on ne peut donc les représenter sous la forme de cette équation.

Définition 57 (Équation d'un ensemble de points du plan)

Au même titre qu'un sous-ensemble de la droite réelle peut être exprimée par une ou plusieurs équations, un sous-ensemble du plan peut être exprimé par une équation à deux inconnues, qui expriment les valeurs de (x, y) qui doivent être dessinées : on dessine le point (x, y) si et seulement si le couple (x, y) est solution de l'équation.

Exemples :

- Sur une droite réelle, l'équation $x \geq 4$ est représentable par tous les points d'abscisse supérieure ou égale à 4 (Cf chapitre sur les intervalle)
- Dans le plan, on a vu que toute fonction $f(x)$ admet une représentation graphique, qui est l'ensemble des points (x, y) qui vérifient $y = f(x)$. Par exemple pour la fonction carré, on dessine tous les points tels que l'ordonnée est le carré de l'abscisse, soit $y = x^2$, et seulement ceux-ci.
- Toujours dans le plan, une fonction affine $f(x) = ax + b$ a pour représentation graphique une droite, qui admet pour équation réduite $y = ax + b$: les seuls points dessinés sont les points dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient l'équation.
- Une droite verticale (c'est à dire parallèle à l'axe des abscisses) a pour équation $x = a$ avec a un certain nombre réel. On voit que la variable y n'apparaît pas dans cette équation.
- Dans un repère orthonormé, un cercle autour de l'origine de rayon 1 est l'ensemble des points situés à une distance de 1 de l'origine, c'est à dire l'ensemble des points vérifiant $x^2 + y^2 = 1$. C'est l'équation d'un cercle.

Attention : Une équation n'est pas unique : on a vu de nombreuses manières d'exprimer une équation sous la forme équivalente. Pour avoir une seule expression, il faut plus de contraintes

Définition 58 (Équation réduite d'une droite)

Toute droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées dans un repère admet une seule équation de la forme $y = ax + b$ avec a et b des réels. On appelle cette équation l'équation réduite de la droite.

Pour obtenir une forme d'équation qui permette d'exprimer **toutes** les droites du plan, on fait appel à une nouvelle forme d'équation : l'équation cartésienne

Définition 59 (Équation cartésienne d'une droite)

Toute droite dans un repère peut être exprimée comme l'ensemble des points vérifiant une équation de forme $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont des constantes réelles.

Réciproquement, toute équation de cette forme où a et b ne sont pas tous deux égaux à 0 est l'équation d'une droite du plan.

Exemples :

— La droite d'équation réduite $y = 3x + 2$ s'exprime sous la forme $3x - y + 2 = 0$, qui est bien de la forme $ax + by + c = 0$

— La droite d'équation $x = 2$ s'exprime sous la forme $x + 0 \times y - 2 = 0$, qui est bien de la forme $ax + by + c = 0$

Attention :

— Si a et b sont tous deux nuls, l'équation devient $c = 0$ et est donc vérifiée soit par aucun couple (x, y) soit par tous les couples (x, y) du plan. Ce n'est donc pas une droite

— Une équation cartésienne n'est pas unique : $2x + 3y + 4 = 0$ est une équation équivalente à $4x + 6y + 8 = 0$ (On a multiplié les deux termes de l'égalité par 2, ce qui préserve l'équivalence comme vu dans le cours sur les équations)

Vecteur directeur d'une droite**Définition 60**

Dans le plan, tout vecteur non nul tel que l'image d'un point d'une droite par ce vecteur est un autre point de cette droite est appelé vecteur directeur de cette droite.

Une définition alternative est : Soient deux points A et B du plan. Le vecteur \overrightarrow{AB} , et donc tout vecteur qui lui est égal est appelé vecteur directeur de la droite (AB)

Il existe un lien profond entre vecteur directeur d'une droite et équation cartésienne de la droite :

Propriété 61

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur non nul. Toute droite ayant \vec{u} pour vecteur directeur admet une équation cartésienne de la forme $bx - ay + c = 0$, où c est un nombre réel.

Remarques :

— Ici, l'expression est unique car on ne peut plus multiplier l'équation par un réel sinon on perd les a et les b .

— **Attention** : Pour retenir cette formule, il faut se rappeler que l'abscisse du vecteur est devant le y de l'équation, et l'ordonnée devant le x . Il y a donc une inversion de l'ordre naturel entre les deux expressions. De plus, un signe moins fait son apparition.