

# Fondamenti di Controlli Automatici

Simone Montali - monta.li

28 marzo 2020

## 1 Il controllo attivo di un processo

Innanzitutto definiamo due termini fondamentali per la materia: un **processo** è l'evoluzione nel tempo di ciò che caratterizza un sistema. Con **controllo attivo** intendiamo una strategia di controllo che prevede un'azione di comando esercitata sul processo. Il controllo attivo risolve il problema di imporre una modalità di funzionamento desiderato ad un processo: l'obiettivo è che una variabile del processo coincida con una preassegnata. Parliamo di **regolazione** quando l'ingresso è costante, di **asservimento** quando l'ingresso è variabile. Un **sistema** è un complesso, normalmente composto da più elementi interconnessi, in cui si possono distinguere grandezze soggette a variare nel tempo (variabili). Un **segnale** è una funzione che rappresenta l'andamento delle variabili nel tempo. Distinguiamo queste ultime in indipendenti (ingressi) e dipendenti (uscite). Arriviamo così al concetto di **sistema orientato**. Un **modello matematico** è la descrizione di un sistema che permette di determinare i segnali delle uscite noti gli ingressi e le condizioni iniziali. Distinguiamo tra sistemi multivariabili (MIMO) e scalari (SISO). Un sistema è detto **statico** quando l'uscita al tempo  $t$  dipende esclusivamente dall'ingresso al medesimo tempo  $t$ . Un **sistema dinamico**, invece, ha uscita dipendente dal segnale di ingresso sull'intervallo  $(-\infty, t]$ , e ha quindi memoria. Per questi ultimi sistemi introduciamo i concetti di sistema in quiete (*equilibrio*) e sistema in condizioni asintotiche (*stazionarie*).

### 1.1 Insieme dei behavior

Definiamo ora l'**insieme dei behavior**  $\mathcal{B}$  come l'insieme di tutte le possibili coppie causa-effetto associate ad un sistema.

$$\mathcal{B} := (u(t), y(t)) : y(t)$$

è l'uscita del sistema corrispondente all'ingresso  $u(t)$ , con  $u(t)$  e  $y(t)$  che tipicamente appartengono agli spazi funzionali delle funzioni continue o differenziabili a tratti. Un sistema è **lineare** se soddisfa la proprietà di sovrapposizione degli effetti.

$$\forall (u_1, y_1), (u_2, y_2) \in \mathcal{B}, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{R} \rightarrow \alpha_1(u_1, y_1) + \alpha_2(u_2, y_2) := (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \in \mathcal{B}$$

Con **stazionario** intendiamo un sistema invariante nel tempo, ossia:

$$(u(t), y(t)) \in \mathcal{B} \rightarrow (u(t - T), y(t - T)) \in \mathcal{B}$$

### 1.2 Controllo ad azione diretta e retroazione

Vi è, tra le tipologie di controllo, una distinzione importantissima: quella tra i controlli **ad azione diretta** e quelli **in retroazione**. Nel primo, l'azione di comando dipende da: obiettivo perseguito, informazioni

sul modello del sistema controllato, ingressi agenti sul sistema controllato. Nel secondo, oltre ai suddetti, vi è l'intervento della **variabile controllata**. In altri termini, l'ingresso dipende anche dall'uscita. Introduciamo poi anche i controlli feedforward/feedback a due/tre gradi di libertà. È utile notare come in sistemi disturbati, in cui cioè abbiamo una perturbazione data dal sistema stesso, il controllo ad azione diretta non la smorza, mentre quello in retroazione riduce l'errore di svariati ordini di grandezza. Bisogna però portare attenzione ai **fenomeni di instabilità** che nascono all'aumentare del guadagno di anello.

## 2 Modellistica ed equazioni differenziali lineari

### 2.1 Cenni di modellistica

La **modellistica** è la costruzione dei modelli matematici dei sistemi, a partire da leggi fondamentali o dati sperimentali.

#### 2.1.1 Circuiti elettrici

Citiamo anzitutto alcuni esempi elettrici di leggi fondamentali:

$$\begin{aligned}\text{Resistenza: } v_R &= Ri \\ \text{Induttanza: } v_L &= L \frac{di}{dt} = LDi \\ \text{Capacità: } v_c &= \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \rightarrow Dv_c = \frac{i}{C}\end{aligned}$$

Un circuito RLC diventa quindi

$$v_i = v_L + v_R + v_c v_i(t) = LDi(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

Calcoliamo quindi l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$LD^2i + RD i + \frac{1}{C}i = Dv_i$$

Costruiamo il modello matematico orientato da  $v_i$  a  $v_u$ .

$$LCD^2v_u + RCDv_u + v_u = v_i$$

#### 2.1.2 Sistemi meccanici

Citiamo ora tre sistemi meccanici e le rispettive leggi del moto.

$$\begin{aligned}\text{Massa: } MD^2x(t) &= f_1(t) - f_2(t) \\ \text{Molla: } f(t) &= K(x_1(t) - x_2(t)) \\ \text{Ammortizzatore: } f(t) &= B(v_1(t) - v_2(t)) \quad f(t) = BD(x_1(t) - x_2(t))\end{aligned}$$

Introduciamo un sistema meccanico vibrante composto dai tre elementi, che avrà quindi equazione da  $f$  a  $x$ :

$$mD^2x(t) + bDx(t) + kx(t) = f(t)$$

Otteniamo l'equazione differenziale

$$mD^2y + bDy + ky = Df$$

### 2.1.3 OP-AMP

Citiamo anche i circuiti elettrici con OP-AMP, deducendo

$$R_1 CDy + y = -R_2 CDu - u$$

## 2.2 Equazioni differenziali lineari

Le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti possono rappresentare quindi sistemi scalari, generalizzando così:

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$$

Otteniamo così un modello matematico formale del sistema dinamico (orientato)  $\Sigma$ ,  $y$  = variabile d'uscita,  $u$  = variabile d'ingresso,  $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ .  $n$  è l'ordine dell'eq. differenziale per estensione ordine di  $\Sigma$ ,  $n \geq m$ ;  $\rho := n - m$  ordine relativo o grado relativo di  $\Sigma$ . Ricollegandoci al concetto di **insieme dei behaviors**  $\mathcal{B}$  di  $\Sigma$ , la coppia di segnali  $\mathcal{B} := \{(u(t), y(t))\}$  soddisfa l'equazione differenziale se  $u(t)$  e  $y(t)$  sono derivabili tante volte quanto necessario.

### 2.2.1 Proprietà del sistema

Citiamo allora alcune proprietà del sistema. Per le dimostrazioni riferirsi alle slide.

- Il sistema è lineare.
- Il sistema è stazionario.

## 2.3 Determinazione dei segnali di uscita

Una volta introdotto il sistema, sorge spontaneo un dubbio fondamentale:

**Noto il segnale di ingresso  $u(t)|_{[0,+\infty]}$  e le condizioni iniziali  $y(0), Dy(0), \dots, D^{n-1}y(0)$  determinare il segnale di uscita  $y(t)|_{[0,+\infty]}$**

Se avessimo un'equazione omogenea, la soluzione sarebbe immediata. Ma spesso non è così, e ci serve un metodo generale per poter trattare le diverse casistiche. La classe dei segnali che utilizzeremo è  $C_p^\infty$ , insieme delle funzioni infinitamente derivabili a tratti.

*Una funzione appartiene a  $C_p^\infty$  se esiste un insieme sparso  $\mathcal{S}$  per il quale  $f \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathcal{S}, \mathbb{R})$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e per ogni  $t \in \mathcal{S}$  i limiti  $f^{(n)}(t^-)$  e  $f^{(n)}(t^+)$  esistono e sono finiti. Quando  $f$  è definita in  $t \in \mathcal{S}$ , convenzionalmente  $f(t) := f(t^+)$ . In particolare  $C^{-1} := C_p^\infty(\mathbb{R})$  definisce l'insieme delle funzioni di classe  $C^\infty$  a tratti definite su tutto  $\mathbb{R}$*

### 2.3.1 Proprietà di $C_p^\infty$

In generale, sappiamo che  $C^k \not\subset C_p^\infty$  e che  $C_p^{k,\infty} := C^k \cap C_p^\infty$ .

### 2.3.2 Grado di continuità di una funzione o segnale

Definiamo il grado di continuità di una funzione o segnale:

$$\begin{aligned} &\text{Se } f \in C_p^{k,\infty}, k \text{ è il grado di continuità di } f. \\ \overline{C_p^{k,\infty}} &:= \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \in C_p^{k,\infty} \wedge f \notin C_p^{k+1,\infty} \right\} \end{aligned}$$

Se  $f \in \overline{C_p^{k,\infty}}$  allora  $k$  è il grado massimo di continuità di  $f$ .

### 2.3.3 Trasformate di Laplace

Il metodo generale proposto per "integrare" l'equazione differenziale di  $\Sigma$  si basa sulla **trasformata di Laplace**, che permette di trasformare un'equazione differenziale in un'equazione algebrica.

## 3 Cenni di analisi complessa

### 3.1 Limite di una funzione complessa

Consideriamo una funzione complessa di variabile complessa  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   $s \rightarrow f(s)$ . Se  $s = \sigma + j\omega$ , allora  $f(s) = u(\sigma, \omega) + jv(\sigma, \omega)$ . Definiamo il limite  $\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = \lambda$  con la classica definizione da Analisi 1:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \rho > 0 \text{ tale che se } s \text{ soddisfa } 0 < |s - s_0| < \rho \rightarrow |f(s) - \lambda| < \epsilon$$

#### 3.1.1 Altre proprietà derivate

Data questa definizione, possiamo definire altre proprietà, come la **continuità**:  $f$  è continua in  $s = s_0$  se  $\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = f(s_0)$ . Da qui,  $f(s)$  è continua in  $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$  sse le funzioni reali  $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$  sono continue in  $(\sigma_0, \omega_0)$ . Definiamo poi la **derivabilità**:  $f(s)$  è derivabile in  $s = s_0$  se esiste il limite

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(s_0 + \Delta s) - f(s_0)}{\Delta s}$$

Le regole base di derivabilità dell'analisi rimangono valide. Definiamo l'**analiticità**, ossia,  $f(s)$  è analitica/olomorfa in  $s = s_0$  se  $f(s)$  è derivabile su di un intorno aperto contenente  $s_0$ . Infine, definiamo le **condizioni di Cauchy-Riemann**:  $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$  soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann se

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\partial v}{\partial \omega} \\ \frac{\partial u}{\partial \omega} = -\frac{\partial v}{\partial \sigma} \end{cases}$$

**Teorema** Sia  $f(s) = u(s) + jv(s)$ :

1. Se esiste  $f^{(1)}(s_0)$  con  $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$  allora esistono le derivate parziali di  $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$  in  $(\sigma_0, \omega_0)$  e soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann
2. Se  $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$  e le loro derivate parziali sono continue in  $(\sigma_0, \omega_0)$  e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann, allora esiste  $f^{(1)}(s_0)$  con  $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$

**Corollario** Sia  $f(s) = u(s) + jv(s)$  con  $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$  e le loro derivate parziali continue su di un dominio aperto  $U \subseteq \mathbb{C}$ . Allora  $f(s)$  è analitica su  $U$  se e solo se  $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$  soddisfano, su  $U$ , le condizioni di Cauchy-Riemann.

**Teorema** Sia  $f(s)$  analitica su di una regione aperta  $U \subseteq \mathbb{C}$ . Allora la derivata  $Df(s)$  è anch'essa una funzione analitica su  $U$ .

**Corollario** Se  $f(s)$  è analitica sulla regione aperta  $U$ , allora  $f(s)$  è ivi derivabile indefinitivamente.

### 3.2 Integrali di linea nel piano complesso

Definiamo innanzitutto l'**integrale**: data una funzione  $f(s)$  ed una curva  $\Gamma$  su  $\mathbb{C}$  percorsa da  $s_a$  a  $s_b$ , definiamo  $\int_{\Gamma} f(s) ds \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(s_i)(s_i - s_{i-1})$  dove  $s_0, \dots, s_n$  è una discretizzazione uniforme della curva  $\Gamma$ .

### 3.2.1 Calcolo dell'integrale di linea

Sia  $\Gamma$  una curva parametrica di classe  $C^1$ .

$$\int_{\Gamma} f(s) ds = \int_a^b f(\Gamma(u)) \frac{d\Gamma}{du} du$$

Definiamo una **curva chiusa semplice** come una curva continua tale che  $\Gamma(a) = \Gamma(b)$  e  $\Gamma(u_1) \neq \Gamma(u_2) \forall u_1 \neq u_2 \in (a, b)$ . Il **teorema di Jordan** afferma che se  $\Gamma$  è una curva chiusa semplice in  $\mathbb{C}$  questa suddivide il piano complesso in due regioni distinte, una esterna e una interna. Definiamo un **insieme connesso** se per ogni coppia di punti appartenenti all'insieme esiste una curva continua  $\Gamma$  che li congiunge tutta contenuta in  $\mathbb{R}$ . È invece detto **semplicemente connesso** se è connesso e per ogni curva chiusa semplice  $\Gamma$  appartenente all'insieme la regione interna di  $\Gamma$  è tutta contenuta in  $\mathbb{R}$ .

**Teorema dell'integrale di Cauchy** Sia  $f(s)$  una funzione analitica su di una regione aperta e semplicemente connessa  $U$  e  $\Gamma$  una curva semplice ivi contenuta. Allora  $\oint_{\Gamma} f(s) ds = 0$ .

**Corollario** Sia  $f(s)$  una funzione analitica su di una regione aperta e semplicemente connessa  $U$  e  $\Gamma$  una curva ivi contenuta che congiunge  $s_a$  ad  $s_b$ . Allora l'integrale di linea  $\int_{\Gamma} f(s) ds$  non dipende dal percorso  $\Gamma$  ma solo da  $s_a, s_b$  e  $f(s)$ :

$$\int_{\Gamma} f(s) ds = \int_{s_a}^{s_b} f(s) ds$$

**Teorema - Sviluppo in serie di Taylor** Sia  $f(s)$  una funzione analitica su di un cerchio  $B(s_0, r_0)$  centrato su  $s_0$  e con raggio  $r_0$ . Allora  $\forall s \in B(s_0, r_0)$

$$f(s) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (s - s_0)^i$$

dove

$$c_i = \frac{f^{(i)}(s_0)}{i!} = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{f(s)}{(s - s_0)^{i+1}} ds$$

Come corollario, otteniamo la **formula integrale di Cauchy**

$$f(s_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{s - s_0} ds$$

**Teorema - Sviluppo in serie di Laurent** Sia  $f(s)$  una funzione analitica sul cerchio  $B(s_0, r_0)$  ad eccezione del suo centro  $s_0$ . Allora  $\forall s \in B(s_0, r_0) - \{s_0\}$

$$f(s) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i (s - s_0)^i$$

dove

$$c_i = \frac{f^{(i)}(s_0)}{i!} = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{f(s)}{(s - s_0)^{i+1}} ds$$

### 3.3 Classificazione del punto isolato $s_0$

Se  $c_i = 0 \forall i \in \mathbb{Z}^-$  definendo  $f(s_0) = c_0$  risulta  $f(s)$  analitica in  $s = s_0$ . Se  $c_i \neq 0$  per qualche  $i \in \mathbb{Z}^-$ ,  $s_0$  è una singolarità di  $f(s)$ , detta **singolarità polo** quando i  $c_i \neq 0$  sono in numero finito, con  $-n = \min\{i \in \mathbb{Z}^- : c_i \neq 0\}$   $s_0$  è polo di ordine  $n$ . Invece abbiamo una **singolarità essenziale** quando i  $c_i \neq 0$  con  $i \in \mathbb{Z}^-$  sono infiniti. Se abbiamo una  $f(s)$  analitica in  $B(s_0, r_0) - \{s_0\}$ ,  $s_0$  è una singolarità di  $f(s)$  se e solo se  $f(s)$  assume valori illimitati in un intorno di  $s_0$ . Il **Teorema di Picard** afferma che se abbiamo  $s_0$  singolarità essenziale di  $f(s)$ , in ogni intorno di  $s_0$  la funzione  $f(s)$  assume ogni valore complesso infinite volte con l'eventuale eccezione di un solo particolare valore.

#### 3.3.1 Residui

Data una singolarità  $s_0$ , definiamo il **residuo** come il coefficiente  $c_{-1}$  dello sviluppo in serie di Laurent.

**Teorema dei residui di Cauchy** Sia  $\Gamma$  una curva chiusa semplice e  $f(s)$  una funzione analitica su  $\Gamma$  e nella sua regione interna ad eccezione dei punti singolari  $s_1, \dots, s_n$  in essa contenuti, allora

$$\oint_{\Gamma} f(s) ds = 2\pi j \sum_{i=1}^n \text{Res}\{f, s_i\}$$

#### 3.3.2 Poli e zeri

Sia  $s_0$  una singolarità polo di  $f(s)$ . Allora  $s_0$  è polo di ordine  $n$  sse esiste  $g(s)$  analitica in  $s_0$  con  $g(s_0) \neq 0$  tale che

$$f(s) = \frac{g(s)}{(s - s_0)^n}$$

Sia  $f(s)$  analitica in  $z$ .  $z$  è detto **zero** di  $f$  se  $f(z) = 0$ . Considerato lo sviluppo di Taylor  $f(s) = c_1(s - z) + \dots$  ed  $n := \min\{i \in \mathbb{N} : c_i \neq 0\}$ ,  $z$  è detto zero di ordine  $n$  di  $f(s)$ . È detto tale se e solo se esiste  $g(s)$  analitica in  $z$  con  $g(z) \neq 0$  tale che  $f(s) = (s - z)^n g(s)$ . Ricaviamo un'ultima proprietà: se  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ha una singolarità polare in  $p$  di ordine  $n$  allora

$$\text{Res}\{f, p\} = \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1} (f(s)(s-p)^n) |_{s=p}$$

### 3.4 Continuazione analitica

Data una funzione  $f(s)$  definita da uno sviluppo in serie di Taylor su di un cerchio  $B_0(s_0, r_0)$  è possibile estendere/continuare la definizione di  $f(s)$  all'esterno di  $B_0$  mediante lo sviluppo in serie di Taylor di altri punti di  $B_0$ . Il procedimento è ricorsivo. Possono anche emergere funzioni a più valori!