

Fondamenti di Controlli Automatici

Simone Montali - monta.li

7 giugno 2020

1 Il controllo attivo di un processo

Innanzitutto definiamo due termini fondamentali per la materia: un **processo** è l'evoluzione nel tempo di ciò che caratterizza un sistema. Con **controllo attivo** intendiamo una strategia di controllo che prevede un'azione di comando esercitata sul processo. Il controllo attivo risolve il problema di imporre una modalità di funzionamento desiderato ad un processo: l'obiettivo è che una variabile del processo coincida con una preassegnata. Parliamo di **regolazione** quando l'ingresso è costante, di **asservimento** quando l'ingresso è variabile. Un **sistema** è un complesso, normalmente composto da più elementi interconnessi, in cui si possono distinguere grandezze soggette a variare nel tempo (variabili). Un **segnale** è una funzione che rappresenta l'andamento delle variabili nel tempo. Distinguiamo queste ultime in indipendenti (ingressi) e dipendenti (uscite). Arriviamo così al concetto di **sistema orientato**. Un **modello matematico** è la descrizione di un sistema che permette di determinare i segnali delle uscite noti gli ingressi e le condizioni iniziali. Distinguiamo tra sistemi multivariabili (MIMO) e scalari (SISO). Un sistema è detto **statico** quando l'uscita al tempo t dipende esclusivamente dall'ingresso al medesimo tempo t . Un **sistema dinamico**, invece, ha uscita dipendente dal segnale di ingresso sull'intervallo $(-\infty, t]$, e ha quindi memoria. Per questi ultimi sistemi introduciamo i concetti di sistema in quiete (*equilibrio*) e sistema in condizioni asintotiche (*stazionarie*).

1.1 Insieme dei behavior

Definiamo ora l'**insieme dei behavior** \mathcal{B} come l'insieme di tutte le possibili coppie causa-effetto associate ad un sistema.

$$\mathcal{B} := (u(t), y(t)) : y(t)$$

è l'uscita del sistema corrispondente all'ingresso $u(t)$, con $u(t)$ e $y(t)$ che tipicamente appartengono agli spazi funzionali delle funzioni continue o differenziabili a tratti. Un sistema è **lineare** se soddisfa la proprietà di sovrapposizione degli effetti.

$$\forall (u_1, y_1), (u_2, y_2) \in \mathcal{B}, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{R} \rightarrow \alpha_1(u_1, y_1) + \alpha_2(u_2, y_2) := (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \in \mathcal{B}$$

Con **stazionario** intendiamo un sistema invariante nel tempo, ossia:

$$(u(t), y(t)) \in \mathcal{B} \rightarrow (u(t - T), y(t - T)) \in \mathcal{B}$$

1.2 Controllo ad azione diretta e retroazione

Vi è, tra le tipologie di controllo, una distinzione importantissima: quella tra i controlli **ad azione diretta** e quelli **in retroazione**. Nel primo, l'azione di comando dipende da: obiettivo perseguito, informazioni

sul modello del sistema controllato, ingressi agenti sul sistema controllato. Nel secondo, oltre ai suddetti, vi è l'intervento della **variabile controllata**. In altri termini, l'ingresso dipende anche dall'uscita. Introduciamo poi anche i controlli feedforward/feedback a due/tre gradi di libertà. È utile notare come in sistemi disturbati, in cui cioè abbiamo una perturbazione data dal sistema stesso, il controllo ad azione diretta non la smorza, mentre quello in retroazione riduce l'errore di svariati ordini di grandezza. Bisogna però portare attenzione ai **fenomeni di instabilità** che nascono all'aumentare del guadagno di anello.

2 Modellistica ed equazioni differenziali lineari

2.1 Cenni di modellistica

La **modellistica** è la costruzione dei modelli matematici dei sistemi, a partire da leggi fondamentali o dati sperimentali.

2.1.1 Circuiti elettrici

Citiamo anzitutto alcuni esempi elettrici di leggi fondamentali:

$$\begin{aligned}\text{Resistenza: } v_R &= Ri \\ \text{Induttanza: } v_L &= L \frac{di}{dt} = LDi \\ \text{Capacità: } v_c &= \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \rightarrow Dv_c = \frac{i}{C}\end{aligned}$$

Un circuito RLC diventa quindi

$$v_i = v_L + v_R + v_c v_i(t) = LDi(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

Calcoliamo quindi l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$LD^2i + RD i + \frac{1}{C}i = Dv_i$$

Costruiamo il modello matematico orientato da v_i a v_u .

$$LCD^2v_u + RCDv_u + v_u = v_i$$

2.1.2 Sistemi meccanici

Citiamo ora tre sistemi meccanici e le rispettive leggi del moto.

$$\begin{aligned}\text{Massa: } MD^2x(t) &= f_1(t) - f_2(t) \\ \text{Molla: } f(t) &= K(x_1(t) - x_2(t)) \\ \text{Ammortizzatore: } f(t) &= B(v_1(t) - v_2(t)) \quad f(t) = BD(x_1(t) - x_2(t))\end{aligned}$$

Introduciamo un sistema meccanico vibrante composto dai tre elementi, che avrà quindi equazione da f a x :

$$mD^2x(t) + bDx(t) + kx(t) = f(t)$$

Otteniamo l'equazione differenziale

$$mD^2y + bDy + ky = Df$$

2.1.3 OP-AMP

Citiamo anche i circuiti elettrici con OP-AMP, deducendo

$$R_1 CDy + y = -R_2 CDu - u$$

2.2 Equazioni differenziali lineari

Le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti possono rappresentare quindi sistemi scalari, generalizzando così:

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$$

Otteniamo così un modello matematico formale del sistema dinamico (orientato) Σ , y = variabile d'uscita, u = variabile d'ingresso, $a_n \neq 0, b_m \neq 0$. n è l'ordine dell'eq. differenziale per estensione ordine di Σ , $n \geq m$; $\rho := n - m$ ordine relativo o grado relativo di Σ . Ricollegandoci al concetto di **insieme dei behaviors** \mathcal{B} di Σ , la coppia di segnali $\mathcal{B} := \{(u(t), y(t))\}$ soddisfa l'equazione differenziale se $u(t)$ e $y(t)$ sono derivabili tante volte quanto necessario.

2.2.1 Proprietà del sistema

Citiamo allora alcune proprietà del sistema. Per le dimostrazioni riferirsi alle slide.

- Il sistema è lineare.
- Il sistema è stazionario.

2.3 Determinazione dei segnali di uscita

Una volta introdotto il sistema, sorge spontaneo un dubbio fondamentale:

Noto il segnale di ingresso $u(t)|_{[0,+\infty]}$ e le condizioni iniziali $y(0), Dy(0), \dots, D^{n-1}y(0)$ determinare il segnale di uscita $y(t)|_{[0,+\infty]}$

Se avessimo un'equazione omogenea, la soluzione sarebbe immediata. Ma spesso non è così, e ci serve un metodo generale per poter trattare le diverse casistiche. La classe dei segnali che utilizzeremo è C_p^∞ , insieme delle funzioni infinitamente derivabili a tratti.

Una funzione appartiene a C_p^∞ se esiste un insieme sparso \mathcal{S} per il quale $f \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathcal{S}, \mathbb{R})$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $t \in \mathcal{S}$ i limiti $f^{(n)}(t^-)$ e $f^{(n)}(t^+)$ esistono e sono finiti. Quando f è definita in $t \in \mathcal{S}$, convenzionalmente $f(t) := f(t^+)$. In particolare $C^{-1} := C_p^\infty(\mathbb{R})$ definisce l'insieme delle funzioni di classe C^∞ a tratti definite su tutto \mathbb{R}

2.3.1 Proprietà di C_p^∞

In generale, sappiamo che $C^k \not\subset C_p^\infty$ e che $C_p^{k,\infty} := C^k \cap C_p^\infty$.

2.3.2 Grado di continuità di una funzione o segnale

Definiamo il grado di continuità di una funzione o segnale:

$$\begin{aligned} &\text{Se } f \in C_p^{k,\infty}, k \text{ è il grado di continuità di } f. \\ \overline{C_p^{k,\infty}} &:= \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \in C_p^{k,\infty} \wedge f \notin C_p^{k+1,\infty} \right\} \end{aligned}$$

Se $f \in \overline{C_p^{k,\infty}}$ allora k è il grado massimo di continuità di f .

2.3.3 Trasformate di Laplace

Il metodo generale proposto per "integrare" l'equazione differenziale di Σ si basa sulla **trasformata di Laplace**, che permette di trasformare un'equazione differenziale in un'equazione algebrica.

3 Cenni di analisi complessa

3.1 Limite di una funzione complessa

Consideriamo una funzione complessa di variabile complessa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, s \rightarrow f(s)$. Se $s = \sigma + j\omega$, allora $f(s) = u(\sigma, \omega) + jv(\sigma, \omega)$. Definiamo il limite $\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = \lambda$ con la classica definizione da Analisi 1:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \rho > 0 \text{ tale che se } s \text{ soddisfa } 0 < |s - s_0| < \rho \rightarrow |f(s) - \lambda| < \epsilon$$

3.1.1 Altre proprietà derivate

Data questa definizione, possiamo definire altre proprietà, come la **continuità**: f è continua in $s = s_0$ se $\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = f(s_0)$. Da qui, $f(s)$ è continua in $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ sse le funzioni reali $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$ sono continue in (σ_0, ω_0) . Definiamo poi la **derivabilità**: $f(s)$ è derivabile in $s = s_0$ se esiste il limite

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(s_0 + \Delta s) - f(s_0)}{\Delta s}$$

Le regole base di derivabilità dell'analisi rimangono valide. Definiamo l'**analiticità**, ossia, $f(s)$ è analitica/olomorfa in $s = s_0$ se $f(s)$ è derivabile su di un intorno aperto contenente s_0 . Infine, definiamo le **condizioni di Cauchy-Riemann**: $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$ soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann se

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\partial v}{\partial \omega} \\ \frac{\partial u}{\partial \omega} = -\frac{\partial v}{\partial \sigma} \end{cases}$$

Teorema Sia $f(s) = u(s) + jv(s)$:

1. Se esiste $f^{(1)}(s_0)$ con $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ allora esistono le derivate parziali di $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$ in (σ_0, ω_0) e soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann
2. Se $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$ e le loro derivate parziali sono continue in (σ_0, ω_0) e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann, allora esiste $f^{(1)}(s_0)$ con $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$

Corollario Sia $f(s) = u(s) + jv(s)$ con $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$ e le loro derivate parziali continue su di un dominio aperto $U \subseteq \mathbb{C}$. Allora $f(s)$ è analitica su U se e solo se $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$ soddisfano, su U , le condizioni di Cauchy-Riemann.

Teorema Sia $f(s)$ analitica su di una regione aperta $U \subseteq \mathbb{C}$. Allora la derivata $Df(s)$ è anch'essa una funzione analitica su U .

Corollario Se $f(s)$ è analitica sulla regione aperta U , allora $f(s)$ è ivi derivabile indefinitivamente.

3.2 Integrali di linea nel piano complesso

Definiamo innanzitutto l'**integrale**: data una funzione $f(s)$ ed una curva Γ su \mathbb{C} percorsa da s_a a s_b , definiamo $\int_{\Gamma} f(s) ds \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(s_i)(s_i - s_{i-1})$ dove s_0, \dots, s_n è una discretizzazione uniforme della curva Γ .

3.2.1 Calcolo dell'integrale di linea

Sia Γ una curva parametrica di classe C^1 .

$$\int_{\Gamma} f(s) ds = \int_a^b f(\Gamma(u)) \frac{d\Gamma}{du} du$$

Definiamo una **curva chiusa semplice** come una curva continua tale che $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ e $\Gamma(u_1) \neq \Gamma(u_2) \forall u_1 \neq u_2 \in (a, b)$. Il **teorema di Jordan** afferma che se Γ è una curva chiusa semplice in \mathbb{C} questa suddivide il piano complesso in due regioni distinte, una esterna e una interna. Definiamo un **insieme connesso** se per ogni coppia di punti appartenenti all'insieme esiste una curva continua Γ che li congiunge tutta contenuta in \mathbb{R} . È invece detto **semplicemente connesso** se è connesso e per ogni curva chiusa semplice Γ appartenente all'insieme la regione interna di Γ è tutta contenuta in \mathbb{R} .

Teorema dell'integrale di Cauchy Sia $f(s)$ una funzione analitica su di una regione aperta e semplicemente connessa U e Γ una curva semplice ivi contenuta. Allora $\oint_{\Gamma} f(s) ds = 0$.

Corollario Sia $f(s)$ una funzione analitica su di una regione aperta e semplicemente connessa U e Γ una curva ivi contenuta che congiunge s_a ad s_b . Allora l'integrale di linea $\int_{\Gamma} f(s) ds$ non dipende dal percorso Γ ma solo da s_a, s_b e $f(s)$:

$$\int_{\Gamma} f(s) ds = \int_{s_a}^{s_b} f(s) ds$$

Teorema - Sviluppo in serie di Taylor Sia $f(s)$ una funzione analitica su di un cerchio $B(s_0, r_0)$ centrato su s_0 e con raggio r_0 . Allora $\forall s \in B(s_0, r_0)$

$$f(s) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (s - s_0)^i$$

dove

$$c_i = \frac{f^{(i)}(s_0)}{i!} = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{f(s)}{(s - s_0)^{i+1}} ds$$

Come corollario, otteniamo la **formula integrale di Cauchy**

$$f(s_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{s - s_0} ds$$

Teorema - Sviluppo in serie di Laurent Sia $f(s)$ una funzione analitica sul cerchio $B(s_0, r_0)$ ad eccezione del suo centro s_0 . Allora $\forall s \in B(s_0, r_0) - \{s_0\}$

$$f(s) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i (s - s_0)^i$$

dove

$$c_i = \frac{f^{(i)}(s_0)}{i!} = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{f(s)}{(s - s_0)^{i+1}} ds$$

3.3 Classificazione del punto isolato s_0

Se $c_i = 0 \forall i \in \mathbb{Z}^-$ definendo $f(s_0) = c_0$ risulta $f(s)$ analitica in $s = s_0$. Se $c_i \neq 0$ per qualche $i \in \mathbb{Z}^-$, s_0 è una singolarità di $f(s)$, detta **singolarità polo** quando i $c_i \neq 0$ sono in numero finito, con $-n = \min\{i \in \mathbb{Z}^- : c_i \neq 0\}$ s_0 è polo di ordine n . Invece abbiamo una **singolarità essenziale** quando i $c_i \neq 0$ con $i \in \mathbb{Z}^-$ sono infiniti. Se abbiamo una $f(s)$ analitica in $B(s_0, r_0) - \{s_0\}$, s_0 è una singolarità di $f(s)$ se e solo se $f(s)$ assume valori illimitati in un intorno di s_0 . Il **Teorema di Picard** afferma che se abbiamo s_0 singolarità essenziale di $f(s)$, in ogni intorno di s_0 la funzione $f(s)$ assume ogni valore complesso infinite volte con l'eventuale eccezione di un solo particolare valore.

3.3.1 Residui

Data una singolarità s_0 , definiamo il **residuo** come il coefficiente c_{-1} dello sviluppo in serie di Laurent.

Teorema dei residui di Cauchy Sia Γ una curva chiusa semplice e $f(s)$ una funzione analitica su Γ e nella sua regione interna ad eccezione dei punti singolari s_1, \dots, s_n in essa contenuti, allora

$$\oint_{\Gamma} f(s) ds = 2\pi j \sum_{i=1}^n \text{Res}\{f, s_i\}$$

3.3.2 Poli e zeri

Sia s_0 una singolarità polo di $f(s)$. Allora s_0 è polo di ordine n sse esiste $g(s)$ analitica in s_0 con $g(s_0) \neq 0$ tale che

$$f(s) = \frac{g(s)}{(s - s_0)^n}$$

Sia $f(s)$ analitica in z . z è detto **zero** di f se $f(z) = 0$. Considerato lo sviluppo di Taylor $f(s) = c_1(s - z) + \dots$ ed $n := \min\{i \in \mathbb{N} : c_i \neq 0\}$, z è detto zero di ordine n di $f(s)$. È detto tale se e solo se esiste $g(s)$ analitica in z con $g(z) \neq 0$ tale che $f(s) = (s - z)^n g(s)$. Ricaviamo un'ultima proprietà: se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ha una singolarità polare in p di ordine n allora

$$\text{Res}\{f, p\} = \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1} (f(s)(s-p)^n) |_{s=p}$$

3.4 Continuazione analitica

Data una funzione $f(s)$ definita da uno sviluppo in serie di Taylor su di un cerchio $B_0(s_0, r_0)$ è possibile estendere/continuare la definizione di $f(s)$ all'esterno di B_0 mediante lo sviluppo in serie di Taylor di altri punti di B_0 . Il procedimento è ricorsivo. Possono anche emergere funzioni a più valori!

4 La trasformata di Laplace

La **trasformata di Laplace** è un operatore funzionale che converte un'equazione differenziale in un'equazione algebrica, permettendo di risolvere anche equazioni differenziali lineari con condizioni iniziali arbitrarie. Permette inoltre di analizzare i fenomeni transitori ed asintotici di una grande varietà di sistemi. Si applica ad una funzione f di variabile reale con codominio \mathbb{R} o \mathbb{C} . Assumiamo ora $f \in \mathbb{C}_p^\infty(\mathbb{R})$, sappiamo che $\exists \sigma \in \mathbb{R}$ per il quale $\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < +\infty$. Se vale quest'ultima condizione, allora $\forall \sigma_1 > \sigma : \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < +\infty$. Definiamo l'**ascissa di convergenza** di $f(t)$ come

$\sigma_c := \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt \right\}$ Spesso assumeremo $f(t) = 0$ per $t < 0$. Volendo ora dare una definizione rigorosa della trasformata,

La trasformata di Laplace di un segnale (funzione) $f(t)$ è la funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ definita da

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

per i valori $s \in \mathbb{C}$ per i quali l'integrale converge.

Notiamo alcune cose:

- F è una funzione complessa di variabile complessa, $\mathcal{L}[\cdot]$ indica l'operatore di Laplace.
- La notazione usuale prevede che le lettere minuscole denotino segnali e funzioni, le corrispondenti maiuscole le loro trasformate.

4.1 Proprietà della trasformata

4.1.1 Analitica

La trasformata $F(s)$ è una funzione analitica sul semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re } s > \sigma_c\}$

4.1.2 Coniugato

Denotando il coniugato con $\overline{\cdot}$, $\overline{F(s)} = F(\bar{s})$

4.1.3 Linearità

La trasformata di Laplace è un operatore lineare: per ogni segnale $f_1(t)$ e $f_2(t)$ e per ogni scalare c_1 e c_2 :

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$$

4.1.4 Iniettività

La trasformata di Laplace è **iniettiva**:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)] \rightarrow f(t) = g(t) \text{ su } [0, +\infty)$$

È quindi ben definita la trasformata inversa.

4.2 La trasformata inversa di Laplace

Sia $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ allora, per ogni $\sigma_0 > \sigma_c$

$$\mathcal{L}^{-1} \rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

4.3 Trasformate notevoli

4.3.1 Trasformata della derivata

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}_{>0})$ segue

$$\mathcal{L}[Df(t)] = sF(s) - f(0+)$$

Generalizzando per gli ordini superiori, otteniamo

$$\mathcal{L}[D^i f] = s^i F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-1-j} f_+$$

4.3.2 Trasformata dell'integrale

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(v)dv\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

4.4 Teoremi e gotchas

4.4.1 Teorema del valore finale

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ con f e Df aventi ascisse di convergenza non positive. Se esiste il limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ vale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

4.4.2 Teorema del valore iniziale

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$. Se esiste il limite $\lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$ vale

$$f(0+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$$

4.4.3 Traslazione nel tempo

Per ogni $t_0 \geq 0$ vale

$$\mathcal{L}[f(t - t_0) \cdot 1(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$$

4.4.4 Traslazione nella variabile complessa s

Per ogni $a \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ vale

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a)$$

4.4.5 Teorema di convoluzione

Si abbia $f(t) = g(t) = 0$ per $t < 0$. La convoluzione dei segnali f e g , spesso indicata come $f * g$, è il segnale

$$\int_0^t f(v)g(t-v)dv$$

rappresentabile anche come $f * g = g * f$

$$\int_0^t g(v)f(t-v)dv$$

La trasformata della convoluzione è

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(v)g(t-v)dv\right] = F(s)G(s)$$

4.5 Antitrasformazione di funzioni razionali

Per antitrasformare le funzioni razionali, sfruttiamo il **metodo dei fratti semplici**, ossia scomponiamo il denominatore in poli semplici e poi cerchiamo i k_i :

$$F(s) = \frac{k_1}{(s - p_1)} + \frac{k_2}{(s - p_2)} + \dots + \frac{k_n}{(s - p_n)}$$

Con i k_i rappresentanti il residuo di $F(s)$ in p_i , e pari a

$$k_i = (s - p_i)F(s)|_{s=p_i}$$

Ottenendo

$$f(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{p_i t}$$

4.6 Trasformate notevoli

Citiamo infine altre due trasformate notevoli:

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s - a}$$

5 Le funzioni impulsive e l'insieme dei behaviors

Consideriamo anzitutto un sistema dinamico Σ descritto da $Dy(t) + 2y(t) = 2Du(t) + 2u(t)$ ed assumiamo che per i tempi negativi sia $y(t) = e^{-2t}$ e $u(t) = 0$ con $t < 0$. Questa coppia di funzioni soddisfa l'eq. differenziale

$$Dy(t) = -2e^{-2t} \rightarrow (-2e^{-2t}) + 2(e^{-2t}) = 0 \forall t < 0$$

Quindi:

$$(0, e^{-2t})|_{(-\infty, 0)} \in \mathcal{B}$$

Introduciamo ora nel sistema una azione forzante $u(t) = 1$ per $t \geq 0$. Quindi $u(t) = 1(t) \forall t \in \mathbb{R}$. Vogliamo determinare $y(t)$ per $t \geq 0$. Non possiamo però definire l'insieme dei behaviors eseguendo la trasformata di Laplace sull'equazione differenziale: otterremmo una soluzione valida per qualsiasi valore del parametro y_+ , che sarebbe assurdo. L'insieme dei behaviors **errato** che si genera sarebbe così fatto:

$$\mathcal{B} = \{(u(t), y(t)) \in C_p^\infty(\mathbb{R})^2 : Dy + 2y = 2Du + 2u \forall t \in \mathbb{R} - \{t_1, t_2, \dots\}\}$$

Osserviamo però, che dato $C_p^{1,\infty} = C^1 \cap C_p^\infty$:

$$\{(u(t), y(t)) \in (C_p^{1,\infty})^2 : Dy + 2y = 2Du + 2u \forall t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{B}$$

Per risolvere l'impasse, definiamo l'azione forzante come

$$u(t) := \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 3\frac{t^2}{\tau^2} - 2\frac{t^3}{\tau^3} & \text{per } t \in [0, \tau] \\ 1 & \text{per } t \geq \tau \end{cases} \rightarrow u(t) \in C_p^{1,\infty} \forall \tau > 0$$

Assumendo $y(t) \in C_p^\infty$ segue $y(0-) = y(0+) = 1$. Possiamo quindi determinare $y(t)$ con le condizioni iniziali al tempo $0+$: $u(0+) = 0$ e $y(0+) = 1$. Portando $\tau \rightarrow 0+$ otteniamo la soluzione desiderata. Ma se la volessimo senza dover applicare tutte le volte questo metodo di smoothing? Osserviamo che quando $\tau \rightarrow 0+$, $Du(t)$ in un intorno dell'origine diverge all'infinito. $Du(t) = 6\frac{t}{\tau^2} - 6\frac{t^2}{\tau^3}$ per $t \in [0, \tau] \rightarrow \max_{t \in [0, \tau]} Du(t) = Du(t)|_{t=\frac{\tau}{2}} = \frac{3}{2\tau}$. Insomma, $Du(t)$ converge ad una funzione impulsiva (distribuzione) detta **delta di Dirac** $\delta(t)$.

5.1 Cenni di teoria delle funzioni impulsive

La funzione impulsiva più semplice è il gradino unitario $1(t)$:

$$1(t) := \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

Introduciamo $f(t < \tau) \in C_p^{0,\infty}$:

$$f(t : \tau) := \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \frac{1}{\tau} t & \text{per } 0 \leq t \leq \tau \\ 1 & \text{per } t > \tau \end{cases}$$

$\lim_{\tau \rightarrow 0+} f(t : \tau) = 1(t)$. La derivata di questa funzione sarà ovviamente pari a 0 per $t < 0$ e $t \geq \tau$:

$$Df(t; \tau) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \frac{1}{\tau} & \text{per } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{per } t \geq \tau \end{cases}$$

Notiamo altresì che $\lim_{\tau \rightarrow 0+} Df(t; \tau)$ è proprio la delta di Dirac! $\delta(t)$ è una distribuzione, o, più informalmente, una funzione impulsiva. È la **derivata generalizzata** del gradino unitario $\delta(t) := D^*1(t)$. D^* è proprio l'operatore della derivata generalizzata: è un operatore lineare come D . Più precisamente, D^* è la derivata in senso distribuzionale. Sappiamo inoltre che, assumendo $t_a < T < t_b$

$$\int_{t_a}^{t_b} \delta(t - T) dt = 1 \quad \int_{t_a}^{t_b} f(t) \delta(t - T) dt = f(T)$$

Introduciamo le derivate generalizzate di $\delta(t)$:

$$D^{*i} \delta(t) \text{ è la derivata generalizzata di ordine } i \text{ della delta } =: \delta^{(i)}(t)$$

Possiamo costruire $\delta^{(1)}(t)$ mediante limite di una funzione continua a tratti:

$$1(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0+} f(t; \tau) \quad \delta(t) := D^*1(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0+} Df(t; \tau) \\ \delta^{(1)}(t) := D^* \delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0+} D^2 f(t; \tau)$$

Questo metodo si può estendere per mostrare il significato di $\delta^{(i)}(t)$, $i > 1$.

5.2 Derivate generalizzate di una funzione discontinua

Ipotizziamo $f \in C_p^\infty(\mathbb{R})$ e sia $t = 0$ l'unico istante di discontinuità:

$$g(t) := \begin{cases} f(t) & \text{per } t < 0 \\ f(t) - (f_+ - f_-) & \text{per } t \geq 0 \end{cases} \quad g(t) \in C_p^{0,\infty}$$

Ottenendo

$$g(t) = f(t) - (f_+ - f_-)1(t)$$

ovvero, una funzione discontinua è pari a una funzione continua + una funzione a gradino. Derivando in senso usuale otteniamo $Df(t) = Dg(t) \forall t \neq 0$. Assumiamo ora che la derivata generalizzata di una funzione continua sia $D^*g(t) := Dg(t^+)$. Applicando l'operatore D^* otteniamo

$$D^*f(t) = Df(t^+) + (f_+ - f_-)\delta(t)$$

Ossia, derivata gen. di ordine 1 = funzione discontinua + funzione impulsiva (di ordine 0). La funzione discontinua $Df(t^+)$ può essere scomposta nella somma di una funzione continua più una funzione a gradino:

derivata gen. di ordine 1 = f. continua + f. a gradino + f. impulsiva di ordine 0.

Applicando la derivata generalizzata alla relazione che esprime $D^*f(t)$, otteniamo

$$D^{*2}f(t) = Dg_1(t^+) + (Df_+ - Df_-)\delta(t) + (f_+ - f_-)\delta^{(1)}(t)$$

Iterando il tutto per generalizzare, otterremo

$$D^{*n}f(t) = D^n f(t^+) + (D^{n-1}f_+ - D^{n-1}f_-)\delta(t) + \dots + (f_+ - f_-)\delta^{(n-1)}(t)$$

Che, con $t < 0$ o $t > 0$ è $D^{*n}f(t) = D^n f(t)$, mentre con $t = 0$ è $D^{*n}f(0) = (D^{n-1}f_+ - D^{n-1}f_-)\delta(0) + \dots + (f_+ - f_-)\delta^{(n-1)}(0)$. Più in generale: $f \in C_p^\infty(\mathbb{R})$ con t_1, t_2, \dots istanti di possibile discontinuità:

$$\begin{aligned} D^{*n}f(t) = D^n f(t^+) + \\ (D^{n-1}(t_1^+) - D^{n-1}(t_1^-)) \delta(t - t_1) + \dots + (f(t_1^+) - f(t_1^-)) \delta^{(n-1)}(t - t_1) + \\ (D^{n-1}(t_2^+) - D^{n-1}(t_2^-)) \delta(t - t_2) + \dots + (f(t_2^+) - f(t_2^-)) \delta^{(n-1)}(t - t_2) + \dots \end{aligned}$$

5.3 Principio di identità delle funzioni impulsive

Le funzioni impulsive

$$c_{-1} + c_0\delta(0) + c_1\delta^{(1)}(0) + \dots + c_k\delta^{(k)}(0)$$

e

$$d_{-1} + d_0\delta(0) + d_1\delta^{(1)}(0) + \dots + d_k\delta^{(k)}(0)$$

sono uguali fra loro sse $c_0 = d_0, \dots, c_k = d_k$. Ritornando all'esempio iniziale, quindi, l'eq. differenziale di Σ interpretata in senso distribuzionale

$$D^*y(t) + 2y(t) = 2D^*u(t) + 2u(t)$$

deve essere soddisfatta per ogni $t \in \mathbb{R}$ compresi gli istanti di discontinuità.

5.4 Insieme dei behaviors

Dato un insieme dinamico Σ descritto dall'eq. differenziale

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$$

si definisce insieme dei behaviors di Σ

$$\mathcal{B} := \left\{ (u, y) \in C_p^\infty(\mathbb{R})^2 : \sum_{i=0}^n a_i D^{*i} y = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} u \right\}$$

L'equazione differenziale è soddisfatta in senso distribuzionale per ogni $t \in \mathbb{R}$. Se abbiamo $t = 0$ istante di discontinuità emergono le condizioni al tempo $0-$ e $0+$. Le relazioni fra i valori al tempo $0-$ ($y_-, Dy_-, \dots, D^{n-1}y_-; u_- \dots$) e quelli al tempo $0+$ ($y_+, Dy_+, \dots, D^{n+1}y_+; u_+ \dots$) sono determinabili eguagliando le espressioni impulsive dell'eq. differenziale al tempo $t = 0$.

5.4.1 Proprietà

Sia $(u(t), y(t)) \in \mathcal{B}$ con $u(t)$ funzione discontinua. Se $\rho = 0$ allora anche l'uscita $y(t)$ è una funzione discontinua. Se $\rho \geq 1$ allora $y(t) \in \overline{C_p^{\rho-1, \infty}}$.

Otteniamo anche una proprietà che definisce la relazione tra i gradi di continuità dell'ingresso e dell'uscita: sia $(u(t), y(t)) \in \mathcal{B}$ e $l \in \mathbb{N}$. Allora

$$u(t) \in C_p^{l, \infty} \Leftrightarrow y(t) \in C_p^{\rho+l, \infty}, \quad u(t) \in \overline{C_p^{l, \infty}} \Leftrightarrow y(t) \in \overline{C_p^{\rho+l, \infty}}$$

6 La funzione di trasferimento

Definiamo anzitutto lo spazio delle sequenze impulsive \mathcal{I}^* :

$$\mathcal{I}^* \triangleq \left\{ d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^* : d(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{r_i} c_{ij} \delta^{(j)}(t - t_i), c_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

Estensione distribuzionale delle funzioni derivabili a tratti: $C_p^\infty(\mathbb{R})^* \triangleq C_p^\infty(\mathbb{R}) + \mathcal{I}^*$.

6.1 La trasformata della derivata generalizzata

Tenendo conto del solo istante di discontinuità in $t = 0$, otteniamo, data $f \in C_p^\infty(\mathbb{R})(C_p^\infty(\mathbb{R})^*)$, segue

$$\mathcal{L}[D^* f(t)] = sF(s) - f(0-)$$

Per ottenere le derivate generalizzate di ordine superiore:

$$\mathcal{L}[D^{*i} f] = s^i F(s) - s^{i-1} f_- - s^{i-2} D f_- - \dots - s D^{i-2} f_- - D^{i-1} f_-$$

6.2 Estensione dell'insieme dei behaviors

Dato un sistema dinamico Σ descritto dall'eq. differenziale

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i u$$

si definisce estensione impulsiva dei behaviors o **behavior esteso**

$$\mathcal{B}^* := \left\{ (u, y) \in C_p^\infty(\mathbb{R})^* \times C_p^\infty(\mathbb{R})^* : \sum_{i=0}^n a_i D^{*i} y = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} u \right\}$$

Ancora l'equazione differenziale è soddisfatta in senso distribuzionale per ogni $t \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$$

6.2.1 Proprietà

- Sia $(u, y) \in \mathcal{B}^*$, segue $(D^* u, D^* y) \in \mathcal{B}^*$.
- Proprietà della coppia azione forzante-risposta forzata: sia $(u, y) \in \mathcal{B}^*$ con $u(t)$ azione forzante e $y(t)$ risposta forzata. Segue

$$\left(\int_{0-}^t u(v) dv, \int_{0-}^t y(v) dv \right) \in \mathcal{B}^*$$

6.3 Il problema fondamentale dell'analisi del dominio nel tempo di un sistema Σ

Note le condizioni iniziali al tempo $0-$ $y_-, Dy_-, \dots, D^{n-1}y_-$ e $u_-, Du_-, \dots, D^{m-1}u_-$ e l'azione forzante $u(t), t \geq 0$, vogliamo determinare la risposta $y(t), t \geq 0$. Risolviamo quindi l'equazione differenziale di Σ

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{*i} y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} u(t)$$

Applicando la trasformata di Laplace. Otterremmo una soluzione $y(t) = y_{for.}(t) + y_{lib.}(t), t \geq 0$, ossia un'uscita composta da risposta forzata di Σ all'azione forzante, e una risposta (evoluzione) libera di Σ .

6.4 Funzione di trasferimento

Definiamo ora la funzione di trasferimento di un sistema la funzione di variabile complessa $G(s)$ per la quale è valida la relazione

$$\mathcal{L}[y(t)] = G(s)\mathcal{L}[u(t)]$$

$\forall(u(t), y(t)) \in \mathcal{B}$ con $u(t) = 0, y(t) = 0$ per $t < 0$. Abbiamo quindi ottenuto un modello matematico alternativo all'eq. differenziale:

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

Se le condizioni iniziali sono tutte nulle (sistema in quiete per $0-$), $Y(s) = G(s)U(s) \rightarrow Y_{for.}(s) = G(s)U(s)$ (trasformata della risposta forzata). Sia $g(t) := \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ con $g(t) = 0, t < 0$: $g(t)$ è la **risposta all'impulso** a partire da una condizione di quiete $(\delta(t), g(t)) \in \mathcal{B}^*$. Dal teorema di convoluzione sappiamo che $y_{for.}(t) = \int_0^t g(t-v)u(v)dv$. Otteniamo quindi la **soluzione generale dell'equazione differenziale** ($t \geq 0$):

$$y(t) = \int_0^t g(t-v)u(v)dv + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_- s^j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_- s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \right]$$

6.5 Definizioni

6.5.1 Proprio

Un sistema Σ si dice **(strettamente) proprio** se la sua funzione di trasferimento è **(strettamente) propria**. Quindi, con $n \geq m(\rho \geq 0)$ abbiamo Σ proprio, se $n > m(\rho \geq 1)$ strettamente proprio.

6.5.2 Guadagno statico

Definiamo il **guadagno statico** di Σ come il rapporto fra il valore costante dell'uscita e il valore costante dell'ingresso ($\neq 0$) quando Σ è all'equilibrio:

$$K := \frac{y_c}{u_c} \text{ con } (u_c, y_c) \in \mathcal{B} \text{ e } u_c \neq 0$$

Dall'equazione differenziale otteniamo $K = \frac{b_0}{a_0} \rightarrow K = G(0)$.

6.5.3 Polinomio caratteristico di Σ

Dato il sistema Σ descritto dall'eq. differenziale $\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$, il polinomio $a(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$ è detto polinomio caratteristico di Σ . È utile notare che esso è il polinomio a denominatore della funzione di trasferimento.

6.5.4 Poli e zeri

I poli e zeri di Σ sono i poli e gli zeri della funzione di trasferimento.

6.5.5 Modi del sistema dinamico Σ

I **modi** sono le funzioni "tipiche" associate ai poli di Σ secondo la regola:

Se p è un polo reale di molteplicità h : $e^{pt}, te^{pt}, \dots, t^{h-1}e^{pt}$

Se $\sigma + j\omega$ è una coppia di poli complessi coniugati di molteplicità h :
 $e^{\sigma t} \text{sen}(\omega t + \phi_1), te^{\sigma t} \text{sen}(\omega t + \phi_2), \dots, t^{h-1}e^{\sigma t} \text{sen}(\omega t + \phi_h)$ oppure equivalentemente
 $e^{\sigma t} \text{sen}(\omega t), e^{\sigma t} \cos(\omega t), te^{\sigma t} \text{sen}(\omega t), te^{\sigma t} \cos(\omega t), \dots, t^{h-1}e^{\sigma t} \text{sen}(\omega t), t^{h-1}e^{\sigma t} \cos(\omega t)$

6.5.6 Risposta libera e modi di Σ

Sia Σ un sistema per il quale i poli coincidono con le radici del polinomio caratteristico ($a(s)$ e $b(s)$ coprimi fra loro). Allora la risposta libera è una combinazione lineare dei suoi modi.

6.5.7 Razionalità

Non tutti i sistemi dinamici lineari e stazionari sono caratterizzati da funzioni di trasferimento razionali. Un esempio è il ritardo finito.

6.5.8 Segnali tipici per l'ingresso di Σ

Alcuni segnali tipici di ingresso:

- $\delta(t)$ impulso unitario (delta di Dirac): $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$
- $1(t)$ gradino unitario: $\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$
- $t \cdot 1(t)$ rampa unitaria: $\mathcal{L}[t \cdot 1(t)] = \frac{1}{s^2}$
- $\frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)$ parabola unitaria: $\mathcal{L}[\frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)] = \frac{1}{s^3}$

6.5.9 Risposta canonica

La risposta canonica è la risposta forzata di Σ a un segnale tipico di ingresso. Quelle usualmente adottate sono $g(t)$, la risposta all'impulso, detta anche **risposta impulsiva**, e $g_s(t)$, la risposta al gradino $1(t)$ detta **risposta indiciale**. Sappiamo inoltre che

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] \quad g_s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}G(s)\right]$$

Una proprietà interessante è che

$$\int_{0-}^t g(v)dv = g_s(t) \quad g(t) = D^*g_s(t)$$

Per i sistemi strettamente propri, $g(t) = Dg_s(t^+)$.

6.5.10 Integrali di Vaschy

Nota la risposta al gradino $g_s(t)$, la risposta forzata $y_{for}(t), t \geq 0$ effetto dell'azione forzante $u(t), t \geq 0$ è determinabile come

$$y_{for}(t) = \int_0^t u'(v)g_s(t-v)dv + u(0+)g_s(t)$$
$$y_{for}(t) = \int_0^t g_s(v)u'(t-v)dv + u(0+)g_s(t)$$

7 Sistemi dinamici elementari

Con questa lezione ci poniamo due obiettivi: studiare le caratteristiche dei sistemi lineari più semplici (primo ordine con grado relativo uno e secondo ordine con grado relativo due) e semplificare i sistemi di più complessi comparandoli a sistemi di secondo ordine.

7.1 Sistemi del primo ordine (strettamente propri)

Un sistema del primo ordine strettamente proprio è definito da $G(s) = \frac{1}{1+\tau s}$ (guadagno statico normalizzato a 1), equazione differenziale $\tau Dy + y = u$ con τ costante di tempo (> 0). Ha un polo ($-\frac{1}{\tau}$) e un modo ($e^{-\frac{1}{\tau}t}$). Per determinare la risposta al gradino unitario $g_s(t)$ svolgiamo l'antitrasformata:

$$g_s(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{1+\tau s} \frac{1}{s} \right] = 1 - e^{-t/\tau}, t \geq 0$$

7.1.1 Parametri della risposta al gradino

Spesso la risposta al gradino unitario di un sistema dinamico generico ha un andamento caratteristico, dove distinguiamo alcuni parametri:

- S massima sovraelongazione (in % del valore di regime)
- T_r tempo di ritardo
- T_s tempo di salita
- T_m istante di massima sovraelongazione
- T_a tempo di assestamento $\inf \{T > 0 : |g_s(t) - y_{regime}| \leq 0,05y_{regime} \forall t \geq T\}$

7.2 Sistemi del secondo ordine (senza zeri)

La funzione di trasferimento $G(s)$ sia così parametrizzata:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}, G(0) = 1$$

Con equazione differenziale

$$D^2(y) + 2\delta\omega_n Dy + \omega_n^2 y = \omega_n^2 u$$

dove ω_n è la pulsazione naturale, mentre δ è il coefficiente di smorzamento, $\in (0, 1)$. Poli e zeri sono definiti da:

$$\{\text{poli di } G(s)\} = \left\{ -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} \right\} \quad \{\text{modi di } G(s)\} = \left\{ e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}t + \phi_1) \right\}$$

Determiniamo la risposta al gradino unitario, come sempre, con l'antitrasformata:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \right] = 1 - Ae^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega_n t + \phi)$$

$$\omega := \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} \quad A := \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}} \quad \phi := \arccos(\delta)$$

Notiamo che per $\delta = 1$, A tende ad infinito quindi bisogna ricalcolare l'antitrasformata. La massima sovraelongazione S è invece pari a

$$S = 100 \exp \left\{ -\frac{\delta\pi}{\sqrt{1 - \delta^2}} \right\}$$

I tempi di asservimento e salita, invece:

$$T_a \cong \frac{3}{\delta\omega_n} \quad T_s \approx \frac{1,8}{\omega_n}$$

Com'è evidente, la seconda è approssimata, frutto di interpolazione.

7.3 Poli dominanti di un sistema generico

Consideriamo un sistema Σ generico con funzione di trasferimento $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$, con n poli e m zeri, tutti i poli hanno parte reale negativa (i modi convergono a zero per $t \rightarrow +\infty$). Definiamo i **poli dominanti** come i poli (normalmente una coppia) non soggetti a quasi cancellazione polo-zero, più vicini all'asse immaginario. La risposta al gradino unitario dipende approssimativamente dai soli poli dominanti: se i poli dominanti sono complessi coniugati, i parametri della risposta S, T_a, T_s sono determinabili approssimativamente dalle relazioni per i sistemi di ordine due. Bisogna però fare attenzione: spesso può essere un'approssimazione abbondante, e non sempre è possibile individuare un insieme significativo di poli dominanti.

7.4 Specifiche sulla risposta al gradino per un sistema di controllo

Siamo ora in grado di poter definire delle specifiche sulla risposta al gradino grazie ai parametri definiti: imponiamo infatti le specifiche $S \leq S_{max}$ e $T_a \leq T_{a-max}$, ottenendo che i poli $-\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \delta^2}$ devono appartenere ad un cono troncato.

8 La stabilità dei sistemi dinamici

8.1 Stabilità alle perturbazioni

Consideriamo un sistema dinamico Σ nella solita forma $\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$ e andiamo ad analizzarne i punti di equilibrio, ossia quei valori costanti di ingresso/uscita che si mantengono inalterati nel tempo. Andiamo quindi ad analizzare una coppia di valori u_c, y_c che devono rispettare la relazione $y_c = G(0)u_c$. Possiamo quindi mettere i punti a grafico, che evidentemente staranno su una retta con pendenza data dal guadagno statico $\frac{b_0}{a_0}$. Introduciamo il concetto di stabilità. Per semplicità ci concentreremo solo sul punto di equilibrio che sta nell'origine. Ipotizziamo anche che $a(s)$ e $b(s)$ siano coprime (non hanno radici in comune). Esaminiamo una perturbazione alla condizione di equilibrio, ad esempio introducendo un segnale di ingresso o modificando l'uscita nell'intervallo $[t_0, 0)$. Distinguiamo tra tre tipologie di risposta a questa condizione: instabilità, stabilità semplice, stabilità asintotica. Formalizziamo la perturbazione come

$$u(t) = 0 \text{ per } t < t_0, u(t) \neq 0 \text{ per } t \in [t_0, 0), u(t) = 0 \text{ per } t \geq 0$$

$$y(t) = 0 \text{ per } t < t_0, y(t) \neq 0 \text{ per } t \in [t_0, 0), y(t) = y_{lib}(t) \text{ per } t \geq 0$$

Di conseguenza, l'uscita è in evoluzione libera per $t \geq 0$. Torniamo alla classificazione precedente:

- $y_{lib}(t)$ è limitata su $[0, +\infty)$ punto di equilibrio **stabile**
- $y_{lib}(t)$ non è limitata su $[0, +\infty)$ punto di equilibrio **instabile**
- Se è stabile e convergente a 0 per $t \rightarrow +\infty$ punto di equilibrio **asintoticamente stabile**
- È **semplicemente stabile** se è stabile ed esiste una perturbazione per la quale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{lib}(t) = y_\infty \neq 0 \vee \{\text{non esiste } \lim_{t \rightarrow +\infty} y_{lib}(t)\}$$

Per il sistema lineare Σ , il comportamento della risposta libera a seguito di perturbazioni su di un punto, rimane il medesimo per tutti gli altri punti. Possiamo quindi parlare di stabilità del sistema piuttosto che del singolo punto.

8.2 Teorema sui poli e la stabilità

La stabilità è strettamente legata ai poli del sistema. Consideriamo un sistema Σ lineare per il quale i poli coincidono con le radici del polinomio caratteristico ($a(s)$ e $b(s)$ coprimi). Valgono le seguenti condizioni necessarie e sufficienti:

- Σ è **stabile** se e solo se tutti i poli hanno parte reale non positiva e gli eventuali poli puramente immaginari sono semplici
- Σ è **asintoticamente stabile** se e solo se tutti i suoi poli hanno parte reale negativa
- Σ è **semplicemente stabile** se e solo se tutti i poli hanno parte reale non positiva e quelli puramente immaginari (che devono esistere, al massimo è $s = 0$) sono semplici
- Σ è **instabile** se e solo se esiste almeno un polo a parte reale positiva o un polo puramente immaginario con molteplicità maggiore di 1.

8.3 Stabilità bounded-input bounded-output

La cosiddetta **stabilità BIBO** è così definita:

Σ è BIBO stabile se per ogni azione forzante limitata la corrispondente risposta forzata è limitata.

Formalmente, è BIBO stabile se per ogni azione forzante la cui norma infinito $\|u(t)\|_\infty$ sia $< +\infty$, la norma infinito della risposta forzata $\|y(t)\|_\infty$ generata sia $< +\infty$. Grazie a un teorema, possiamo affermare che Σ è BIBO stabile se e solo se

$$\int_0^{+\infty} |g(\tau)| d\tau < +\infty$$

Un altro teorema utile è il seguente. Assumiamo $a(s)$ e $b(s)$ coprimi. Vale la seguente equivalenza:

Il sistema Σ è BIBO stabile se e solo se Σ è asintoticamente stabile.

I due concetti vengono spesso utilizzati equivalentemente.

8.4 Criterio di Routh

Partiamo da una premessa: abbiamo fino ad ora associato la stabilità ai poli del sistema dinamico. Questi ultimi sono le radici dell'equazione caratteristica: potremo dire che con routine numeriche possiamo risolvere i quesiti sulla stabilità. Questo è spesso opportuno, ma è anche utile saperlo fare senza calcolo di radici. Consideriamo il solito sistema lineare Σ descritto da $\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$ con f.d.t. $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$, con $a(s)$ polinomio caratteristico e relativa equazione caratteristica $a_s = 0$:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Vediamo una prima proprietà, ricordando anzitutto cos'è un polinomio di Hurwitz: un polinomio $a(s)$ è detto tale se tutte le radici hanno parte reale negativa. Assumiamo ora $a_n > 0$; il polinomio è hurwitziano solo se tutti i suoi coefficienti sono positivi. Non è sempre vero il contrario. Lo dimostriamo fattorizzando in modo estensivo $a(s)$ con dei fattori $(s + \eta_i)$. È possibile determinare il segno delle radici di $a(s)$ attraverso una **tabella di Routh**, senza doverle effettivamente calcolare. La tabella è costituita da $n - 1$ righe, calcolate a ritroso. Le prime due righe contengono i coefficienti alternati del polinomio $a(s)$. In assenza di abbastanza coefficienti, riempiamo con 0. A questo punto, la terza riga viene calcolata a partire dalle due righe superiori. La quarta si baserà anch'essa sulle due righe superiori, a ritroso fino al calcolo di $\gamma_{n,1}$. Per calcolare i coefficienti delle righe dopo la seconda:

$$y_{k,j} = - \frac{\begin{vmatrix} \gamma_{k-2,1} & \gamma_{k-2,j+1} \\ \gamma_{k-1,1} & \gamma_{k-1,j+1} \end{vmatrix}}{\gamma_{k-1,1}} = \frac{\gamma_{k-1,1} \gamma_{k-2,j+1} - \gamma_{k-2,1} \gamma_{k-1,j+1}}{\gamma_{k-1,1}}$$

La riga finisce quando il determinante è 0.

8.4.1 Teorema di Routh

Per applicare il criterio, andiamo ad esaminare la prima colonna, osservando le variazioni di segno nella colonna. Determiniamo il numero di variazioni/permanenze, che sommate daranno n . Assumiamo che la tabella di Routh possa essere completata (assenza di singolarità). Allora, ad ogni variazione di segno corrisponde una radice a parte reale positiva, ad ogni permanenza corrisponde una radice a parte reale negativa.

8.4.2 Criterio di Routh

Il polinomio $a(s)$ è hurwitziano se e solo se l'associata tabella di Routh può essere completata (con l'algoritmo base) e presenta nella prima colonna solo permanenze di segno.

8.4.3 Proprietà della tabella

I termini di una riga possono essere moltiplicati tutti per uno stesso coefficiente senza che ciò modifichi le variazioni/permanenze di segno della prima colonna.

8.4.4 Singolarità della tabella

Distinguiamo due tipi di singolarità possibili:

1. Il primo elemento di una riga è zero
2. Tutti gli elementi di una riga sono nulli

Esistono metodi ad hoc per risolvere queste singolarità.

Prosecuzione della tabella nel caso 1 Per il primo tipo di singolarità, citiamo due metodi:

1. Metodo ϵ , obsoleto perché non sempre risolutivo e complesso: inserire un numero arbitrario ϵ sullo 0
2. Metodo di Benidir-Picinbono: algebricamente semplice e sempre risolutivo

Vediamo il secondo: ogni riga non nulla che inizia con p zeri viene sommata con la riga ottenuta moltiplicandola per -1^p e traslandola verso sinistra di p posizioni.

Prosecuzione della tabella nel caso 2 Questo accade sempre in una riga dispari: il polinomio non ha radici nell'origine ($a_0 \neq 0$). Introduciamo un polinomio ausiliario β ottenuto riportando le potenze pari di s :

$$\beta(s) := \gamma_{n-2i,1}s^{2i} + \gamma_{n-2i,2}s^{2i-2} + \gamma_{n-2i,3}s^{2i-4} + \cdots + \gamma_{n-2i,i}s^2 + \gamma_{n-2i,i+1}$$

L'equazione ausiliaria è quindi $\beta(s) = 0$. Il polinomio ausiliario $\beta(s)$ divide $a(s)$. Esiste quindi un polinomio $a(s)$ tale che $a(s) = \alpha(s)\beta(s)$. Inoltre, la prima parte di tabella dà informazioni sul segno delle radici di $\alpha(s)$. Enunciamo anche la proprietà di simmetria delle radici del polinomio ausiliario: queste radici sono disposte simmetricamente rispetto all'origine del piano complesso. Se ad esempio avessi una radice positiva in $+3$, il polinomio ausiliario avrà radice in -3 . Il numero di radici a parte reale positiva di $\beta(s)$ sarà quindi uguale al suo numero di radici a parte reale negativa. Può anche presentare radici puramente immaginarie. Come proseguire la costruzione della tabella?

1. Si fa la derivata del polinomio ausiliario
2. Sostituisco gli zeri della riga nulla coi coefficienti del polinomio ausiliario derivato
3. Nel conteggio, le variazioni avranno lo stesso significato (radice a parte reale positiva), mentre le permanenze potranno essere associate a radici a parte reale negativa o radici puramente immaginarie.

Insomma: **la simmetria delle radici di $\beta(s)$ permette di stabilire il segno della parte reale di tutte le radici.** Concludiamo facendo notare che il criterio di Routh viene utile anche quando lo applichiamo in funzione di parametri del sistema: otteniamo così un sistema di disequazioni che ci permette di progettare un sistema di controllo.

9 Analisi armonica e diagrammi di Bode

Ma anzitutto, cos'è il fenomeno armonico? Per spiegarlo, prendiamo una f.d.t. $G(s) = \frac{10}{s+1}$ e applichiamo il segnale armonico $u(t) = 2\sin(t)$. Calcoliamo $Y(s) = \frac{10}{s+1}(s)\mathcal{L}[2\sin(t)]$, poi calcoliamo i k_i . Risolviamo e notiamo che la risposta forzata è data da una parte transiente, ed una parte armonica. Concludiamo che quando $t \rightarrow +\infty$ scompare la parte armonica e quindi vale $y_\infty(t) = 10\sqrt{2}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$. Questa proprietà è generalizzabile. Fenomeno di risposta armonica:

Col sistema in quiete, all'istante $t = 0-$, si applichi $u(t) = U\sin(\omega t)$. La risposta forzata di Σ assume questa forma: $y_\infty(t) = Y(\omega)\sin(\omega t + \phi(\omega))$

Possiamo così definire una funzione di risposta armonica, che sarà $\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$. In particolare associamo ad ω un valore $F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{U}e^{j\phi(\omega)}$. In virtù della linearità di Σ , $F(\omega)$ è indipendente da U (grazie al principio di sovrapposizione degli effetti). Enunciamo così un teorema.

Teorema di analisi armonica Sia Σ un sistema asintoticamente stabile con f.d.t. $G(s)$ razionale. La risposta forzata di Σ ad un segnale armonico all'ingresso è ancora, a regime $t \rightarrow +\infty$, un segnale armonico con la stessa frequenza dell'ingresso. La funzione di risposta armonica associata soddisfa la relazione:

$$F(\omega) = G(j\omega)$$

Ovvero coincide con la funzione di trasferimento $G(s)$, valutata in $s = j\omega$. Alcune considerazioni necessarie:

- La funzione di risposta armonica è un modello matematico alternativo all'eq. diff., f.d.t. . .
- Può essere determinata sperimentalmente
- Sfruttando la relazione $F(\omega) = G(j\omega)$ la f. di risposta armonica è definibile anche per sistemi non asintoticamente stabili: in questo caso la risposta armonica descrive una soluzione instabile delle armoniche nel sistema.
- Relazioni fra la risposta armonica $G(j\omega)$ e la risposta all'impulso $g(t)$:

$$\begin{cases} G(j\omega) = \int_{0-}^{+\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt \\ g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \end{cases}$$

Queste sono trasformate di Fourier. La prima è ottenibile dalla definizione di trasformata di Laplace, sostituendo $j\omega$ ad s . La seconda si ricava dalla formula di antitrasformazione di Laplace, facendo un integrale di linea.

- Ponendo $G(j\omega) = R(\omega) + jI\omega$ (parte reale ed immaginaria)
- Rappresentazioni grafiche della funzione di risposta armonica: diagrammi di Bode, diagrammi di Nyquist (polari), diagrammi di Nichols.

9.1 Guadagni del sistema lineare Σ

Abbiamo quindi individuato tre guadagni relativi al sistema stesso:

- Funzione di trasferimento $G(s)$ (guadagno dinamico)
- Ponendo $s := j\omega$, otteniamo la funzione di risposta armonica $\rightarrow G(j\omega)$ o risposta in frequenza
- Ponendo $s := 0$ otteniamo il guadagno statico $G(0)$

9.2 I diagrammi di Bode

I **diagrammi di Bode** sono diagrammi (cartesiani) logaritmici della risposta armonica. In particolare, ripartiamo dalla rappresentazione polare di $G(j\omega)$ e applichiamo il logaritmo naturale. Spesso si indicano parte reale e immaginaria come α, β . Andremo quindi a mettere a grafico il **diagramma delle ampiezze**, che riporta il logaritmo del modulo della r.a. in funzione del logaritmo della pulsazione ω , ed il **diagramma delle fasi** che riporta l'argomento della r.a. in funzione del logaritmo della pulsazione ω . Usualmente, nelle ascisse, vengono riportati direttamente i valori delle pulsazioni ed i moduli in scala logaritmica. Può capitare che nel diagramma dei moduli, le ordinate (modulo della r.a.) siano espresse in decibel. La scala logaritmica ha diversi vantaggi: è possibile rappresentare grandezze variabili in campi molto estesi, è possibile sommare i diagrammi dei sistemi in cascata, ed è anche possibile costruire i diagrammi come somme di diagrammi elementari.

9.3 Rappresentazioni e parametri della f.d.t.

Una f.d.t. razionale $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ scrivibile nella **forma standard con polinomi monici**:

$$G(s) = K_1 \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

o nella **forma standard con poli e zeri**:

$$G(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2)\dots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n)}$$

Con K_1 costante di trasferimento. A partire dalla seconda forma possiamo fare un'altra elaborazione parametrica: ipotizziamo la presenza di un polo nell'origine di molteplicità h ("tipo" del sistema in oggetto)

$$G(s) = K_1 \frac{(s - z_1)\dots(s - z_m)}{s^h(s - p_{h+1})\dots(s - p_n)}$$

Fatto ciò possiamo separare i poli/zeri fra reali e complessi coniugati. Otteniamo quindi

$$G(s) = K_1 \frac{\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_2}\right) \dots (s^2 + 2\delta'_1\omega'_{n1}s + \omega_{n1}^{'2})(s^2 + 2\delta'_2\omega'_{n2}s + \omega_{n2}^{'2})}{s^h \left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_2}\right) \dots (s^2 + 2\delta'_1\omega'_{n1}s + \omega_{n1}^{'2})(s^2 + 2\delta'_2\omega'_{n2}s + \omega_{n2}^{'2})}$$

Con τ_i costante di tempo assoluta ad un polo (zero) reale, $\tau_i < 0$ se il polo/zero è positivo. ω_{ni} pulsazione naturale assoluta ad una coppia di poli/zeri complessi coniugati. δ_i coefficiente di smorzamento assoluto ad una coppia di poli/zeri complessi coniugati. Notiamo quindi che l'espressione è divisibile in un parte dovuta ai poli/zeri reali e una ai complessi coniugati. Osserviamo che tutte le coppie di complessi coniugati vengono parametrizzate attraverso dei polinomi di secondo ordine. A questo punto possiamo raccogliere le costanti τ e gli ω . Otteniamo quindi la scrittura della $G(s)$ seguente:

$$G(s) = K_1 \frac{\omega_{n1}^{'2}\omega_{n2}^{'2}\dots\tau_1\tau_2\dots}{\omega_{n1}^2\omega_{n2}^2\dots\tau_1'\tau_2'\dots} \cdot \frac{(1 + \tau_1's)(1 + \tau_2's) \dots \left(1 + 2\delta'_1\frac{s}{\omega_{n1}'} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^{'2}}\right)}{s^h(1 + \tau_1s)(1 + \tau_2s) \dots \left(1 + 2\delta_1\frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right)}$$

Raccogliamo il primo fattore come $K = K_1 \frac{\omega_{n1}^{'2}\omega_{n2}^{'2}\dots\tau_1\tau_2\dots}{\omega_{n1}^2\omega_{n2}^2\dots\tau_1'\tau_2'\dots}$, e otteniamo la **forma standard con le costanti di tempo**:

$$G(s) = K \frac{(1 + \tau_1's)(1 + \tau_2's) \dots \left(1 + 2\delta'_1\frac{s}{\omega_{n1}'} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^{'2}}\right)}{s^h(1 + \tau_1s)(1 + \tau_2s) \dots \left(1 + 2\delta_1\frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right)}$$

Con K costante di guadagno, che in base ad h è:

- $h = 0$ K è guadagno statico
- $h = 1$ K è guadagno di velocità
- $h = 2$ K è guadagno di accelerazione

Sostituiamo ora $j\omega$ ad s per trovare la risposta armonica con le costanti di tempo.

9.4 Diagrammi elementari

Vogliamo tracciare il diagramma di Bode partendo dai diagrammi elementari: $K, (j\omega)^{-h}, (1 + \tau j\omega)^{\pm 1}, \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n}\right)^{\pm 1}$. Il ± 1 dipende da se si tratta di zeri complessi coniugati o poli complessi coniugati. Prima di ciò definiamo alcuni parametri caratteristici:

- Pulsazione di risonanza $\omega_R := \operatorname{argmax}_{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}} |G(j\omega)|$
- Picco di risonanza $M_R := \frac{|G(j\omega_R)|}{|G(j0)|}$ oppure $M_R := |G(j\omega_R)|$
- Larghezza di banda $B_\omega := \omega_{t2} - \omega_{t1}$ ossia la differenza tra pulsazione di taglio superiore e di taglio inferiore

SLIDE A.

SLIDE B.

SLIDE C.

Qui, $\frac{1}{\tau}$ è detta anche pulsazione d'angolo. Possiamo inoltre, nel diagramma delle fasi, tracciare la tangente del diagramma delle pulsazioni. Otteniamo così un segmento che si raccorda coi due tratti asintotici identificati da ω_a e ω_b . Vogliamo quindi determinare i valori dei suddetti per poter tracciare il diagramma. Sappiamo che $\beta = -\arctg \omega \tau$. Deriviamo ora β rispetto al logaritmo naturale di ω .

$$\frac{d\beta}{d(\ln \omega)}|_{\omega=\omega_0} = -\frac{1}{2}$$

che è la pendenza della tangente. Otteniamo quindi che

$$\frac{\pi/4}{\ln \omega_0 - \ln \omega_a} = \frac{1}{2} \rightarrow \ln \frac{\omega_0}{\omega_a} \rightarrow e^{\frac{\pi}{2}} \cong 4,81$$

Sappiamo quindi che $\omega_a = \frac{\omega_0}{4,81}$ e $\omega_b = \omega_0 4,81$. I diagrammi di $G(j\omega) = q + j\omega\tau$ si ottengono per simmetria ribaltando i precedenti rispetto all'asse delle ascisse. SLIDE D. Per determinare il picco di risonanza ω_R sfruttiamo, solo quando $1 - 2\delta^2 > 0$, $\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}$. Quindi, inserendo il valore appena calcolato di ω_R in M_R :

$$M_R = \frac{|G(j\omega_R)|}{|G(j0)|} = \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \delta^2}}$$

$$\begin{cases} \delta \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \text{c'è risonanza} \\ \delta \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right] & \text{non c'è risonanza} \end{cases}$$

Possiamo anche fare un'altra osservazione:

$$\begin{cases} \delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right] & \text{il d. } \alpha \text{ è tutto al di sopra del d. asintotico} \\ \delta \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \text{il d. } \alpha \text{ interseca l'asse delle pulsazioni a sinistra di } \ln \omega_n(\omega_n) \\ \delta \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right] & \text{il d. } \alpha \text{ è tutto al di sotto del d. asintotico} \end{cases}$$

Potremmo chiederci perché in $\delta = 0$ il diagramma diverge. Questo succede perché esistono c_1, c_2, ϕ_1, ϕ_2 per cui otteniamo una risposta armonica con ampiezza divergente all'infinito $y(t) = c_1 \sin(\omega_n t + \phi_1) + c_2 t(\omega_n t + \phi_2)$. Infine, calcoliamo la larghezza di banda:

$$B_\omega = \omega_n \sqrt{(1 - 2\delta^2) + \sqrt{(1 - 2\delta^2)^2 + 1}}$$

Notiamo che i diagrammi di $G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n}$ si ottengono ribaltando i precedenti rispetto all'asse delle ascisse. Se $\delta < 0$, si ribalta il diagramma delle fasi.

10 I diagrammi di Nyquist e i sistemi a fase minima

10.1 I diagrammi di Nyquist

10.1.1 Definizione

Vediamo ora un'altra rappresentazione grafica delle risposte armoniche. Definiamo subito un diagramma polare (di Nyquist) della risposta armonica $G(j\omega)$ o della f.d.t. $G(s)$ come la curva tracciata sul piano complesso dal vettore $G(j\omega)$ per ω che varia da 0 a $+\infty$. Questi diagrammi sono utili per lo studio della stabilità, ad esempio tramite il criterio di Nyquist. Il tracciamento del diagramma può essere coadiuvato dal seguente procedimento grafico:

$$G(s) = K_1 \frac{(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} \quad G(j\omega) = K_1 \frac{(j\omega - z_1)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)(j\omega - p_3)}$$
$$|G(j\omega)| = |K_1| \frac{M_1}{M_2 M_3 M_4} \quad \arg G(j\omega) = \begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 & \text{se } K_1 > 0 \\ \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 - \pi & \text{se } K_1 < 0 \end{cases}$$

10.1.2 Comportamenti importanti

Citiamo i comportamenti più importanti per il diagramma polare:

Comportamento per $\omega \rightarrow +\infty$ Il diagramma polare di un sistema strettamente proprio termina (per $\omega \rightarrow +\infty$) sull'origine tangente ad uno degli assi coordinati.

Comportamento per $\omega \rightarrow 0+$, Σ di tipo 0 Il diagramma polare di un sistema di tipo zero (non ha poli nell'origine) parte da $\omega = 0$ dal punto dell'asse reale $G(j0) = K = K_1(b_0/a_0)$

Comportamento per $\omega \rightarrow 0+$, Σ di tipo ≥ 1 Si rappresenti $G(j\omega)$ con la forma standard con le costanti di tempo e sia $\tau_a := \sum_i \tau_i' - \sum_i \tau_i + \sum_i 2 \frac{\delta_i'}{\omega_{ni}}$. Vale

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} G(j\omega) = K \frac{1 + j\omega\tau_a}{(j\omega)^h}$$

Otteniamo anche il seguente corollario:

Comportamento asintotico del d.p. dei sistemi di tipo $h = 1, 2, 3$ Dall'espressione precedente otteniamo che se $h = 1$,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} G(j\omega) = K\tau_a - j \frac{K}{\omega}$$

e il d.p. parte adiacente ad una semiretta della retta di eq. $x = K\tau_a$. Se $h = 2$, otteniamo:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} G(j\omega) = -\frac{K}{\omega^2} - j \frac{K\tau_a}{\omega}$$

Osserviamo che la parte reale diverge ad infinito più velocemente della parte immaginaria. Questo risultato può essere interpretato come una curva parametrica, eliminando omega otteniamo che il d.p. parte adiacente ad un ramo della parabola di eq. $x = -\frac{1}{K\tau_a^2} y^2$. Infine, se $h = 3$, vale

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} G(j\omega) = -\frac{K\tau_a}{\omega^2} + j \frac{K}{\omega^3}$$

Notiamo che entrambe le componenti reali e immaginarie divergono ad infinito, con l'immaginaria che lo fa più velocemente, e individuiamo che il d.p. parte adiacente ad un ramo della curva cubica di eq. $y^2 = -\frac{1}{K\tau_a^3}x^3$.

10.2 I sistemi a fase minima

Ci si accorge che per una significativa classe di sistemi, detti a fase minima, nella funzione di risposta armonica l'andamento del diagramma delle fasi è strettamente associato a quello delle ampiezze: se in una certa banda di frequenze l'ampiezza è costante, la fase tende ad essere nulla; una pendenza negativa del diagramma delle ampiezze è associata invece ad un ritardo di fase, una pendenza positiva ad un anticipo. Questa constatazione è teorizzata nella **formula di Bode**. Prima di enunciarla, però, definiamo i sistemi a fase minima come:

Consideriamo Σ sistema lineare e stazionario con f.d.t. $G(s)$ e risposta armonica $G(j\omega)$. Σ è detto a fase minima se il diagramma delle fasi $\beta = \arg G(j\omega)$ è determinato univocamente, modulo 2π , dal diagramma dei moduli $\alpha = \ln|G(j\omega)|$ mediante la formula di Bode.

Se vale il contrario, il sistema è detto a **fase non minima**. Il progetto dei sistemi di controllo per questi ultimi è complesso. Un sistema con f.d.t. razionale è a fase minima s.s.e. non presenta poli o zeri a parte reale positiva.

10.3 Formula di Bode

Ricordiamo che

$$\alpha := \ln|G(j\omega)|, \beta := \arg G(j\omega)$$

Vogliamo trovare, una volta fissata una pulsazione ω_c , il corrispondente argomento β_c . Introduciamo una variabile $u := \ln \frac{\omega}{\omega_c} = \ln \omega - \ln \omega_c$. Otteniamo infine

$$\beta_c = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{du} \ln \cotgh \left| \frac{u}{2} \right| du \text{ se } \lim_{s \rightarrow 0} s^h G(s) > 0$$

$$\beta_c = \{\text{come sopra}\} - \pi \text{ se } \lim_{s \rightarrow 0} s^h G(s) < 0$$

con h tipo del sistema Σ , quindi $h = 0$ se non vi sono poli né zeri nell'origine. $h > 0$ se c'è un polo di molteplicità h nell'origine, $h < 0$ se c'è uno zero di molteplicità $|h|$ nell'origine. Approfondiamo il discorso della funzione peso che compare. Notiamo che su una pendenza pari a 1, l'integrale vale $\frac{\pi}{2}$, da cui la regola pratica: se $\frac{d\alpha}{du}$ è costante per due decadi di pulsazione centrate su ω_c , allora $\beta_c \approx \left(\frac{d\alpha}{du}\right) \cdot \frac{\pi}{2}$.

10.4 Ritardi finiti

Un ritardo finito è una funzione trascendente che nei sistemi di controllo assume particolare importanza: vogliamo ora approssimarli. Il fatto che sia una funzione trascendente crea qualche difficoltà: per questo l'approssimazione risulta utile. Introduciamo l'approssimante di Padé di $e^{-t_0 s}$ di ordine q come

$$G_q(s; t_0) := \frac{\sum_{k=0}^q \frac{(sq-k)!q!}{(2q)!k!(q-k)!} (-1)^k t_0^k s^k}{\sum_{k=0}^q \frac{(sq-k)!q!}{(2q)!k!(q-k)!} t_0^k s^k}$$

Notiamo una proprietà: lo sviluppo in serie di McLaurin coincide con l'analogo sviluppo di $e^{-t_0 s}$. Questa coincidenza avviene fino alla potenza $(2q)$ esima. In particolare, sviluppando $e^{-t_0 s}$, all'aumentare di q lo sviluppo è più preciso.

$$e^{-t_0 s} = 1 - t_0 s + \frac{t_0^2}{2!} s^2 - \frac{t_0^3}{3!} s^3$$

Calcolare l'approssimante del primo ordine è semplice:

$$G_1(s; t_0) = \frac{1 - \frac{t_0}{2} s}{1 + \frac{t_0}{2} s}$$

Notiamo una simmetria tra zeri e poli e una stabilità asintotica. L'approssimante di Padè del secondo ordine è invece

$$G_2(s; t_0) = \frac{1 - \frac{t_0}{2} s + \frac{t_0^2}{12} s^2}{1 + \frac{t_0}{2} s + \frac{t_0^2}{12} s^2}$$

Interpretiamo il diagramma di Nyquist (polare) del ritardo finito: sarà evidentemente una circonferenza percorsa infinite volte: è chiaro che il ritardo aumenta linearmente all'aumentare ω e diverge all'infinito con $\omega \rightarrow \infty$. Analizziamo i diagrammi polari delle approssimanti: nel primo ordine abbiamo una semicirconferenza, nel secondo una circonferenza percorsa una sola volta, nel terzo una circonferenza percorsa una volta e mezzo.

11 Sistemi retroazionati: proprietà ed analisi asintotica

11.1 Schemi a blocchi

Gli **schemi a blocchi** vengono utilizzati per rappresentare sistemi complessi aventi un ingresso e un'uscita. Evidenziamo due variabili u, y , ingresso e uscita, e k , guadagno (numerico o funzione). I blocchi sono collegati tra di loro mediante i **punti di diramazione** e le **giunzioni sommanti**. In generale è utile poter semplificare (ridurre) i blocchi tramite le cosiddette **regole di riduzione**. Ad esempio:

- Riduzione di blocchi in cascata tramite eliminazione delle variabili di mezzo $z = K_1 K_2 x$
- Riduzione di blocchi in parallelo $k = k_1 + k_2$
- Scambio di giunzioni sommanti (proprietà commutativa)
- Spostamento di prelievo di segnale a monte di un blocco
- Spostamento di prelievo di segnale a valle di un blocco
- Spostamento di giunzione sommanente a monte di un blocco
- Spostamento di giunzione sommanente a valle di un blocco
- Eliminazione di un anello

11.2 Proprietà generale dei sistemi in retroazione

Esiste una regola rapida per il calcolo della f.d.t. dei sistemi retroazionati (singolo anello con il segnale retroazionato sottratto alla giunzione sommanente):

$$f.d.t. = \left\{ \frac{\text{f.d.t. del percorso di segnale diretto}}{1 + \text{guadagno di anello}} \right\}$$

11.2.1 Sensibilità a variazioni di parametri nei sistemi retroazionati

Consideriamo un sistema definito da $T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$. Studiamo vari casi:

- Variazione di un parametro nella catena diretta: $G(s)$ è in realtà $G(s; \alpha)$ con $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$. Definiamo la sensibilità di T a variazioni di G come $\frac{\frac{\Delta T}{T(s; \alpha_0)}}{\frac{\Delta G}{G(s; \alpha_0)}}$. Otteniamo

$$S_G^T = \frac{1}{1 + G(s; \alpha_0)H(s)}$$

Quindi se il guadagno di anello è molto elevato, la var. relativa di T è molto più piccola della variazione relativa di G. Di conseguenza, un guadagno di anello elevato rende insensibile la f.d.t. del sistema retroazionato a variazioni della f.d.t. del sistema controllato.

- Variazione di un parametro nella catena di retroazione: $H(s)$ è in realtà $H(s; \beta)$ con $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$. Otteniamo $S_H^T = \frac{dT}{dH}|_{\beta=\beta_0} = G \frac{-G}{(1+GH)^2} \cdot \frac{H}{\frac{G}{1+GH}}$ e infine $S_H^T = -\frac{G(s)H(s; \beta_0)}{1+G(s)H(s; \beta_0)}$. Quindi se il guadagno di anello è elevato la variazione relativa di T è circa uguale (in modulo) alla variazione relativa di H. Di conseguenza, variazioni della f.d.t. nella catena di retroazione si riverberano senza attenuazione in variazioni della f.d.t. del sistema retroazionato.

11.3 Attenuazione dei disturbi

Vediamo ora come può essere resa possibile un'attenuazione dei disturbi. Abbiamo per esempio un disturbo $D(s)$ su un sistema avente uscita normalmente uguale a $P(s)R(s)$. Vogliamo incrementare il rapporto segnale disturbo utilizzando un sistema retroazionato. A questo fine ipotizziamo che il disturbo sia indipendente da $R(s)$. Introduciamo un controllore $C(s)$. Per avere un confronto omogeneo si richiede $\frac{CP}{1+CPH} \approx P$, ossia che il sistema retroazionato non modifichi fortemente il comportamento. L'uscita determinata dal segnale utile è ora $P(s)R(s)$ mentre quella determinata dal disturbo è $\frac{P(s)}{1+C(s)P(s)H(s)}D(s)$, ottenendo un rapporto segnale disturbo pari a $(1 + C(s)P(s)H(s)) \frac{R(s)}{D(s)}$. Quest'ultimo viene fortemente aumentato se nella banda di frequenze vale $|C(j\omega)P(j\omega)H(j\omega)| \gg 1$. In definitiva, se il guadagno di anello è elevato il rapporto segnale/disturbo si eleva all'incirca del medesimo fattore passando dallo schema in catena aperta a quello in catena chiusa. Quindi, a parità di segnale utile, il disturbo viene grandemente attenuato.

11.4 Allargamento della banda passante

Ipotizziamo che $H(s) = h > 0$. Significa quindi che la banda passante è infinita. Un guadagno di anello elevato implica un allargamento della banda passante. Sappiamo che

$$T(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + hG(j\omega)}$$

Quindi, se $hG(j\omega) \gg 1 \rightarrow T(j\omega) \approx 1/h$. Anche questo è un effetto benefico della retroazione. Possiamo esplicitare in termini quantitativi questo allargamento:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \tau j\omega} \rightarrow \omega_T = \frac{1 + h}{\tau}$$

11.5 Analisi a regime dei sistemi in retroazione

Vogliamo ora studiare l'errore di regolazione a regime in risposta a segnali tipici. Ipotizziamo un sistema asintoticamente stabile, e a retroazione unitaria (nessun blocco $H(s)$). I segnali tipici che consideriamo sono $r(t) \in \left\{ r_0 1(t), r_0 t 1(t), r_0 \frac{t^2}{2} 1(t) \right\}$, quindi il gradino unitario, una rampa, una parabola (tutti caratterizzati da r_0). Sappiamo che $e(t) := r(t) - y(t)$ (errore a regime), ne calcoliamo la trasformata $E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s)$ (catena diretta fratto guadagno di anello moltiplicato per la trasformata del segnale di ingresso). L'errore a regime è quindi $e_r := \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$. Ricordiamo anche che h è il tipo del sistema.

11.5.1 Gradino

Dopo un transitorio, l'uscita si stabilizza su un valore costante. Calcoliamo l'errore:

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \frac{r_0}{1 + K_p}$$

con $K_p := \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$ costante di posizione.

11.5.2 Rampa

Ora, abbiamo

$$r(t) = r_0 t 1(t) \rightarrow R(s) = \frac{r_0}{s^2}$$
$$e_r = \frac{r_0}{K_v}$$

con $K_v := \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)$ costante di velocità.

11.5.3 Parabola

Abbiamo infine

$$r(t) = r_0 \frac{t^2}{2} 1(t) \rightarrow R(s) = \frac{r_0}{s^3}$$
$$e_r = \frac{r_0}{K_a}$$

con $K_a := \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$ costante di accelerazione.

11.6 Errore a regime con retroazione non unitaria

Ipotizziamo ora che la retroazione non sia unitaria: la variabile controllata y è in generale dimensionalmente diversa dal segnale di set-point r e quindi occorre definire la condizione ideale di controllo:

$$y(t) \equiv K_c r(t)$$

dove K_c è detta costante di controllo o regolazione. Abbiamo quindi una variabile errore definita, ad esempio, come $e(t) := r(t) - \gamma y(t)$, $\gamma = 1/K_c$, e quindi $e(t) \equiv 0 \leftrightarrow y(t) \equiv K_c r(t)$. Potremmo applicare il teorema del valore finale, ma ci conviene utilizzare i risultati ottenuti precedentemente trasformando il sistema in uno con retroazione unitaria, con guadagno dato da

$$G_E(s) = \frac{G(s)\gamma}{1 + G(s)(H(s) - \gamma)}$$

Se avessimo $H(s) = h$ e $K_c = 1/h \rightarrow G_E(s) = G(s)h$.

12 Sistemi retroazionati: criterio di Nyquist e margini di stabilità

Citiamo innanzitutto il requisito di **buona connessione**. Abbiamo un sistema retroazionato definito da $T_{ry}(s) \frac{G(s)}{1+L(s)}$ e guadagno di anello $L(s) := G(s)H(s)$. Il sistema retroazionato è ben connesso se

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} 1 + L(s) \neq 0$$

Questa caratteristica è necessaria per la realizzabilità fisica dell'anello di retroazione. Ma cosa significa? Se il sistema non fosse ben connesso, otterremmo, ad esempio $T_{ry} = \frac{1}{0} \rightarrow y = r + y$ che è sempre impossibile per $r \neq 0$. Questo è un esempio estremo, ma aiuta a capire il rischio nell'avere sistemi non ben connessi.

12.1 Criterio di Nyquist

Il **criterio di Nyquist** è un criterio grafico per lo studio della stabilità asintotica. Introduciamo un sistema retroazionato definito come sempre da $T_{ry}(s) \frac{G(s)}{1+L(s)}$, con equazione caratteristica $1 + L(s)$ (le cui radici sono poli del sistema). Allora,

Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente se e solo se l'eq. caratteristica $1 + L(s) = 0$ ha tutte le radici a parte reale negativa.

Il criterio richiede il tracciamento del diagramma polare (o di Nyquist) di $L(j\omega)$.

12.1.1 Teorema dell'indice logaritmico (principle of the argument)

Ora, per arrivare al criterio è necessario enunciare il **teorema dell'indice logaritmico**: sia Γ una curva chiusa semplice nel piano complesso, e \mathcal{D} la regione ad esso interna ($\Gamma = \partial\mathcal{D}$). Sia $F(s)$ una funzione analitica su Γ e su \mathcal{D} ad eccezione di un numero finito di poli appartenenti a \mathcal{D} . Inoltre $F(s)$ non abbia zeri su Γ . Vale quindi la relazione

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \arg F(s) = n_z - n_p$$

dove $\Delta \arg F(s)$ denota la variazione dell'argomento di $F(s)$ al variare di s lungo Γ per un giro completo in senso antiorario ed n_z e n_p sono rispettivamente il numero degli zeri e dei poli di $F(s)$ su \mathcal{D} computati con le loro molteplicità. Quindi abbiamo una curva Γ che compie un giro completo, si determina tramite $F(s)$ un'altra curva immagine definita a una variazione di argomento. Se la curva fosse percorsa in senso orario c'è una differenza di segno e la relazione diventa $-\frac{1}{2\pi} \Delta \arg F(s) = n_z - n_p$. A questo punto possiamo citare un corollario: con la percorrenza di Γ antioraria vale

$$\{\text{numero di giri antiorari della curva immagine intorno all'origine}\} = n_z - n_p$$

mentre con la percorrenza oraria:

$$\{\text{numero di giri orari della curva immagine intorno all'origine}\} = n_z - n_p$$

A questo punto applichiamo il teorema alla stabilità dei sistemi retroazionati: la curva chiusa di figura percorsa in senso orario è detta **contorno di Nyquist**: è composta da una semicirconferenza all'infinito, semicirconferenze infinitesime, aggiranti i poli immaginari di $L(s)$ e da segmenti dell'asse immaginario. Dobbiamo porre però le condizioni di applicabilità:

- $1 + L(s)$ è analitica sul contorno di Nyquist ed è analitica su \mathbb{C}_+ ad eccezione di un numero finito di poli (vera per definizione)

- $1+L(s)$ non deve presentare zeri sul contorno: il contorno è percorso da tre parti: la semicirconferenza all'infinito (dove non possono esserci zeri), le semicirconferenze infinitesime (dove non possono esserci zeri), punti dell'asse immaginario (dove possono esserci, e dobbiamo evitarlo). Possono infatti esistere dei valori di $j\omega$ per cui $L(j\omega)$ attraversa $-1+j0$. Questo **non deve accadere** ed è una condizione da soddisfare.

A questo punto diamo definizioni specifiche:

- n_z numero degli zeri di $1+L(s)$ appartenenti a \mathbb{C}_+
- n_p numero dei poli di $1+L(s)$ (o $L(s)$) appartenenti a \mathbb{C}_+
- $\psi := \{ \text{numero di giri in senso orario della curva immagine di } 1+L(s) \text{ sul contorno di Nyquist intorno all'origine} \}$

Assumiamo che il diagramma polare non tocchi il punto -1 vale $\psi = n_z - n_p$.

12.2 Diagramma polare completo

Introduciamo ora il **diagramma polare completo**, ossia la curva chiusa immagine di $L(s)$ sul contorno di Nyquist. Quindi:

$$\psi = \{ \text{n. di giri in senso orario del d.p.c. intorno al punto } -1+j0 \}$$

Siamo in grado a questo punto di enunciare il criterio di Nyquist:

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo non tocchi il punto critico -1 ma lo circonda tante volte in senso antiorario quanti sono i poli del guadagno di anello con parte reale positiva

ed il corollario:

Nell'ipotesi che il guadagno di anello non abbia poli a parte reale positiva, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo non tocchi né circonda il punto critico -1

Nota che il corollario non è da associarsi ai sistemi stabili ad anello aperto. La dimostrazione del criterio è possibile verificandone la sufficienza e la necessità (vedi slide).

12.3 Margini di stabilità

La proprietà di stabilità (asintotica) di un sistema retroazionato è binaria: o c'è, o no. Tuttavia è opportuno e necessario inserire delle specifiche tecniche associate ad un sistema retroazionato una misura della distanza dell'instabilità. Ipotizziamo un guadagno ad anello $L(s)$ asintoticamente stabile. Definiamo il margine di stabilità come la distanza del diagramma polare dal punto -1 , che significherebbe un'instabilità. Introduciamo quindi il concetto di misura della distanza dell'instabilità: in particolare ne introduciamo 2, il **margine di ampiezza** M_A ed il **margine di fase** M_F . In particolare,

$$M_A := \frac{1}{|L(j\omega_p)|} \text{ dove } \omega_p \ni \arg L(j\omega_p) = -\pi \text{ con } \omega_p \text{ pulsazione di fase pi greco}$$

$$M_F := \pi - |\varphi_c| \text{ dove } \varphi_c = \arg L(j\omega_c) \text{ e } \omega_c \ni |L(j\omega_c)| = 1 \text{ con } \omega_c \text{ pulsazione critica}$$

M_A è a volte espresso in decibel ($20\log M_A$), M_F è solitamente espresso in gradi sessagesimali. Questi concetti sono individuabili anche sui diagrammi di Bode: $M_{A(dB)} = -20\log |L(j\omega_p)|$. Queste definizioni possono però creare dei problemi: spesso la definizione del margine di fase non è adatta, ed è necessaria una definizione più "robusta".

12.3.1 Definizioni generalizzate dei margini di stabilità

Ipotizziamo un sistema retroazionato stabile asintoticamente, allora:

$$M_A := \sup \left\{ M > 1 : |1 + \gamma L(j\omega)| > 0, \forall \gamma \in \left[\frac{1}{M}, M \right] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

$$M_F := \sup \left\{ \phi > 0 : |1 + e^{-j\varphi} L(j\omega)| > 0, \forall \varphi \in [-\phi, +\phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

I margini di stabilità sono "norme" che misurano la distanza del punto critico $-1 + j0$ dal diagramma polare di $L(j\omega)$. Abbiamo alcune proprietà da citare:

Proprietà 1 Sia $M > 1$. Vale la disequazione $|1 + \gamma L(j\omega)| > 0, \forall \gamma \in \left[\frac{1}{M}, M \right]$ e $\forall \omega \geq 0$ se e solo se il segmento dell'asse reale compreso fra $-M$ e $-1/M$ non interseca il diagramma polare di $L(j\omega)$.

Proprietà 2 Sia $\phi > 0$. Vale la disequazione $|1 + e^{-j\varphi} L(j\omega)| > 0, \forall \varphi \in [-\phi, +\phi]$ e $\forall \omega \geq 0$ se e solo se l'arco di circonferenza di equazione $e^{j(\pi+\varphi)}, \varphi \in [-\phi, +\phi]$ non interseca il diagramma polare di $L(j\omega)$.

12.3.2 Procedura generale per il calcolo dei margini di stabilità

Determiniamo ora una procedura generale: andiamo a trovare tutte le intersezioni più vicine a -1 , e ne prendiamo il minimo. Per il margine di fase, il procedimento è lo stesso: cerchiamo le intersezioni del diagramma polare con la circonferenza unitaria, e prendiamo la più vicina:

$$M_A = \min \{M_1, M_2\} \quad M_F = \min \{\phi_1, \phi_2\}$$

13 Il luogo delle radici

Ci occupiamo ora del metodo del luogo delle radici, che permette di analizzare i sistemi retroazionati.

13.1 Il luogo delle radici

Nel progetto di un sistema in retroazione è utile conoscere come i poli retroazionati si modificano al variare di più importanti parametri, come K_1 costante di trasferimento del guadagno di anello $L(s)$. Da quello che abbiamo visto, i poli retroazionati sono le radici dell'equazione $L(s) = K_1 \frac{(s-z_1)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)\dots(s-p_n)}$ ossia $G_1(s) := \frac{z(s)}{p(s)}$. Abbiamo quindi due definizioni:

- Luogo delle radici (diretto) è il luogo geometrico descritto dalle radici dell'eq. $1 + K_1 G_1(s) = 0$ al variare di K_1 da 0 a $+\infty$. Questo è importante dal punto di vista della stabilità. È quindi luogo geometrico descritto dalle radici dell'equazione suddetta.
- Luogo delle radici (inverso) è il luogo geometrico descritto dalle radici dell'eq. $1 + K_1 G_1(s) = 0$ al variare di K_1 da 0 a $-\infty$.

Se $K_1 > 0$, allora:

$$\{1 + K_1 G_1(s) = 0\} \leftrightarrow \begin{cases} \arg G_1(s) = \pi \mod 2\pi \\ |G_1(s)| = \frac{1}{K_1} \end{cases}$$

La prima condizione impone che G_1 sia reale negativo, la seconda impone che il modulo soddisfi la relazione $1 + K_1 G_1(s) = 0$. Se $K_1 < 0$, allora:

$$\{1 + K_1 G_1(s) = 0\} \leftrightarrow \begin{cases} \arg G_1(s) = 0 \mod 2\pi \\ |G_1(s)| = -\frac{1}{K_1} \end{cases}$$

13.2 Proprietà del luogo delle radici

Il luogo ha tanti rami quanti sono i poli di $G_1(s)$. Ogni ramo parte da un polo di $G_1(s)$ e termina in uno zero di $G_1(s)$ o in un punto all'infinito. I rami si intersecano in corrispondenza delle radici multiple. Una seconda proprietà è che il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale. Sappiamo inoltre che nel luogo delle radici diretto ($K_1 > 0$) un punto dell'asse reale fa parte del luogo se si lascia alla sua destra un numero totale **dispari** di zeri e poli di $G_1(s)$. Nel luogo delle radici inverso ($K_1 < 0$) un punto dell'asse reale fa parte del luogo se si lascia alla sua destra un numero totale **pari** di zeri e poli di $G_1(s)$. Definiamo gli angoli di partenza e arrivo nel luogo. L'angolo di partenza è formato dalla direzione dell'asse reale positivo, e dalla tangente al luogo. Quello di arrivo è formato ancora dalla tangente al luogo, ma con K_1 da 0 a $-\infty$. Nel luogo delle radici diretto ($K_1 > 0$), l'angolo di partenza è dato dalla relazione

$$\{\text{ang. di partenza da } p_i\} = \pi + \sum_{j=1}^m \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \neq i} \arg(p_i - p_j)$$

L'angolo di arrivo sullo zero z_i semplice è dato da

$$\{\text{ang. di arrivo su } z_i\} = \pi + \sum_{j=1}^n \arg(z_i - p_j) - \sum_{j \neq i} \arg(z_i - z_j)$$

Se il luogo delle radici è inverso ($K_1 < 0$), si sostituisce 0 a π . Se il polo p_i è multiplo con molteplicità $h > 1$, gli angoli di partenza φ_i da p_i si determinano con la congruenza:

$$h\varphi_i = \pi + \sum_{j=1}^m \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \neq i} \arg(p_i - p_j) \mod 2\pi$$

Se lo zero z_i è multiplo con molteplicità $h > 1$, gli h angoli di arrivo Ψ_i su z_i si determinano così:

$$h\Psi_i = \pi + \sum_{j=1}^n \arg(z_i - p_j) - \sum_{j \neq i} \arg(z_i - z_j) \mod 2\pi$$

Si potrebbe dimostrare che indipendentemente dalla molteplicità otteniamo sempre h soluzioni distinte. Sappiamo anche che una radice del luogo di molteplicità h corrisponde a un punto comune ad h rami in cui oltre all'eq. $1 + K_1 G_1(s) = 0$ sono soddisfatte le relazioni $D^i G_1(s) = 0, i = 1, \dots, h-1$ cioè la derivata i -esima si annulla. Abbiamo un corollario di questa proprietà, che afferma che una radice doppia del luogo soddisfa l'equazione $\sum_{i=1}^n \frac{1}{s-p_i} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{s-z_i} = 0$. L'ultima proprietà afferma che in corrispondenza di una radice di molteplicità h il luogo presenta h rami entranti ed h rami uscenti, alternati fra loro, le cui tangenti suddividono lo spazio circostante in settori uguali di π/h radianti. L'ultima proprietà che vediamo definisce il comportamento asintotico del luogo delle radici. Gli asintoti del luogo delle radici formano una cosiddetta "stella di asintoti" (di raggi) con centro nel punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right) / (n - m)$$

ossia il rapporto della sommatoria dei poli, meno la sommatoria degli zeri, diviso $n - m$. Se il luogo è diretto, gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

$$\vartheta_{a,\nu} = (2\nu + 1)\pi / (n - m), \nu = 0, 1, \dots, n - m - 1$$

Se il luogo è invece diretto, avremo

$$\vartheta_{a,\nu} = 2\nu\pi/(n-m), \nu = 0, 1, \dots, n-m-1$$

In pratica, questi asintoti si disporranno diversamente in base a $\rho := n-m$ grado relativo di $G_1(s)$. SLIDE 13.16 Quando abbiamo luoghi diretti del secondo ordine, possiamo trovare il raggio calcolando le distanze dei poli dallo zero $R = \sqrt{d_1 d_2}$.

13.3 Contorno delle radici

La tecnica del contorno delle radici permette di generalizzare il metodo del luogo delle radici. Il contorno delle radici è infatti un luogo delle radici (dell'eq. caratteristica) per variazioni di un parametro diverso (può variare, ci sono regole per decidere se il parametro è applicabile) dalla costante di trasferimento del guadagno di anello. Questa tecnica è infatti applicabile quando l'eq. caratteristica $1 + L(s; p) = 0$ con p parametro variante è riconducibile all'eq. caratteristica standard $1 + K_1 G_1(s) = 0$ con $K_1 = K_1(p)$ funzione biunivoca di p . Per esempio, se avessimo un contorno delle radici per variazioni di un polo, potremmo sfruttare τ per trovare un luogo delle radici. In $\tau = 0$ abbiamo $1 + \frac{K}{s} = 0$, ma con $\tau > 0$ avremo $1 + \tau \frac{s^2}{s+K}$. È convenzione fissare \bar{K} , e variare il parametro τ . Quest'equazione ha una scrittura standard in cui al posto di K_1 ritroviamo τ , notiamo però che il grado del numeratore è maggiore del denominatore. Questo è abbastanza tipico (a differenza dei luoghi visti precedentemente), significa che i rami partono dai poli e uno dall'infinito. I raggi si incontrano nella radice multipla, e convergono verso lo 0. SLIDE 13.21 L'eq. caratteristica $1 + L(s; p) = 0$ è riconducibile alla forma standard quando, trasformata in equazione polinomiale, i suoi coefficienti sono funzioni affini del parametro p .

13.4 Complementi

Vediamo ora alcuni complementi. Riscriviamo l'equazione del luogo, considerando i poli come parametri fissati e gli zeri variabili. L'eq. caratteristica dipenderà quindi dagli zeri e da K_1 .

$$1 + K_1 \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = 0 \quad 1 + K_1 G_1(s; z_1, \dots, z_m) = 0$$

con $\{p_{c1}, p_{c2}, \dots, p_{cn}\}$ radici dell'eq. caratteristica, queste radici dipendono da K_1 e gli zeri: $p_{ci} \equiv p_{ci}(K_1; z_1, \dots, z_m)$. Enunciamo il teorema del baricentro del luogo delle radici: se il guadagno di anello ha grado relativo $\rho \geq 2$ vale la relazione in cui la sommatoria delle radici dell'eq. caratteristica è pari alla sommatoria (fissa) dei poli del guadagno di anello, per qualunque valore di K_1 e degli zeri.

$$\sum_{i=1}^n p_{ci} = \sum_{i=1}^n p_i \quad \forall K_1 \in \mathbb{R}, \forall z_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, m$$

quindi consideriamo le radici dell'eq caratteristica come delle masse unitarie in movimento, ed un baricentro fisso.

13.5 Grado di stabilità

Introduciamo ora il grado di stabilità di un sistema. Consideriamo un sistema Σ asintoticamente stabile ($Rep_i < 0, i = 1, \dots, n$: dove i p_i sono i poli di Σ). Il grado di stabilità è la distanza minima dei poli di Σ dall'asse immaginario, ossia

$$G_s := \max \{Rep_1, Rep_2, \dots, Rep_n\}$$

Nell'ipotesi che fra i poli di Σ esista una coppia dominante, vale l'ipotesi che il tempo di assestamento T_a valga approssimativamente $T_a \approx \frac{3}{G_s}$. Ricordiamo che il tempo di assestamento è il tempo minimo per il quale la risposta al gradino del sistema entra in una fascia di $\pm 5\%$ del valore finale del sistema considerato.

14 Progetto di un sistema di controllo in retroazione

Iniziamo ora la sezione dedicata al progetto di un sistema di controllo.

14.1 Il progetto di un sistema di controllo in retroazione

Consideriamo un sistema scalare, con un singolo anello di retroazione. La struttura composta di un possibile sistema di controllo è la seguente, con P impianto controllato, Q disturbo di P (eventualmente modificato da parte dinamica di filtraggio), ingresso u determinato dall'uscita di un attuatore (A) e da un disturbo. Poi, nella linea di retroazione troviamo H funzione di trasferimento del possibile trasduttore, con disturbo n , un anello comparatore che sottrae la parte dedicata alla retroazione. Infine, il controllore C , elemento cruciale per la buona riuscita del sistema e protagonista del nostro progetto, e F prefiltraggio. A volte il progetto non riguarda solo C_s , ma anche una funzione di prefiltraggio F . Quando questo accade, avremo un sistema di feedforward-feedback. A volte F è semplicemente un guadagno algebrico. Usualmente si parte modellando l'impianto, prevedendo la scelta dei trasduttori (H_s) e dell'attuatore. È chiaro che il progetto di un sistema completo sia ben più complesso.

14.2 Specifiche di controllo

I requisiti per il sistema di controllo riguardano:

1. Buona connessione: ci deve essere buona connessione nella retroazione
2. Stabilità asintotica interna
3. Prestazioni statiche e/o asintotiche
4. Prestazioni dinamiche
5. Robustezza: alcuni di questi requisiti devono essere soddisfatti non solamente per il sistema nominale, ma per una classe di impianti

14.2.1 Buona connessione

Per avere un sistema retroazionato **ben connesso** deve valere $P(s)$ strettamente propria e $C(s)$ propria. $C(s)$ strettamente propria significa che il suo polinomio al numeratore dev'essere sempre \leq del polinomio al denominatore, per realizzabilità fisica: se così non fosse, la risposta armonica divergerebbe per $\omega \rightarrow \infty$.

14.2.2 Stabilità asintotica interna

Il sistema retroazionato è asintoticamente ed internamente stabile quando tutte le f.d.t. fra gli ingressi $\{r, d_1, d_2\}$ e le uscite $\{e, m, y\}$ sono asintoticamente stabili. Questo è del tutto ragionevole: se così non fosse, ci ritroveremmo una situazione in cui una variabile sull'uscita, o interna, divergerebbe all'infinito. Fino ad ora, parlavamo di sistema asintoticamente stabile quando l'uscita lo era: ciò non è sufficiente per la stabilità asintotica interna. Abbiamo una condizione necessaria e sufficiente per verificare la stabilità asintotica interna. Devono valere due condizioni:

1. Le radici dell'equazione $1 + L(s) = 0$ sono tutte a parte reale negativa
2. Le eventuali cancellazioni polo-zero fra $C(s)$ e $P(s)$ avvengono in \mathbb{C}_- .

14.3 Terminologie

Definiamo la **funzione di sensitività** $T_{re}(s)$ pari a $\frac{1}{1+L(s)}$, spesso indicata con S , e la funzione di sensitività complementare $T = 1 - S$. Otteniamo quindi $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$. Si noti che $T_{ry}(s) = T(s)$. Osserviamo anche che nei progetti con prevalenti specifiche in frequenza, vengono imposti vincoli su S e T in modo disgiunto: possono capitare problemi di compatibilità, in quanto deve valere $S(j\omega) + T(j\omega) = 1, \forall \omega$.

14.4 La sintesi con controllori di struttura prefissata

Nella letteratura controllistica tecnica c'è in realtà una moltitudine di approcci per la sintesi di controllori. Sfrutteremo l'approccio con i controllori di struttura prefissata o di ordine prefissato. Anzitutto, spieghiamo cosa sono i controllori di ordine prefissato.

14.4.1 Controllori di ordine prefissato

I **controllori di ordine prefissato** sono dei sistemi dinamici aventi un ordine fisso. Nell'ambito di questo parametro, ci manteniamo nella massima libertà progettuale. Li introduciamo come insiemi, in cui \mathcal{R}_p è l'insieme delle funzioni razionali proprie. Per esempio, il controllore di ordine zero sarà: $\mathcal{C}_0 := \{C \in \mathcal{R}_p : C(s)K, K \in \mathbb{R}\}$. Quelli di ordine superiore saranno:

1. $\mathcal{C}_1 := \left\{C \in \mathcal{R}_p : C(s) = \frac{b_1s+b_0}{s+a_0}, a_0, b_0, b_1 \in \mathbb{R}\right\}$
2. $\mathcal{C}_2 := \left\{C \in \mathcal{R}_p : C(s) = \frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{s^2+s+a_0}, a_0, a_1, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}\right\}$
3. $\mathcal{C}_n := \left\{C \in \mathcal{R}_p : C(s) = \frac{b_ns^n+\dots+b_1s+b_0}{s^n+\dots+s+a_0}, a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}\right\}$

14.4.2 Controllori di struttura prefissata

I **controllori di struttura prefissata** sono definiti mediante particolari parametrizzazioni della funzione di trasferimento del controllore. Alcuni esempi:

- $\mathcal{C}_A := \left\{C \in \mathcal{R}_p : C(s) = \gamma \frac{s+\beta}{s+\alpha}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}$. Si osservi che $\mathcal{C}_A \neq \mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_A \subset \mathcal{C}_1$. I successivi $\mathcal{C}_{A,B,C}$ sono delle ulteriori restrizioni a questo sottoinsieme.
- $\mathcal{C}_B := \left\{C \in \mathcal{R}_p : C(s) = \gamma \frac{s+\beta}{s+\alpha}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \gamma \in \mathbb{R}\right\}$. Si osservi che $\mathcal{C}_B \neq \mathcal{C}_A$ e $\mathcal{C}_B \subset \mathcal{C}_A$
- $\mathcal{C}_C := \left\{C \in \mathcal{R}_p : C(s) = \gamma \frac{s+\beta}{s+\alpha}, \alpha \in [10, 100], \beta \in (0, 10], \gamma \in \mathbb{R}\right\}$. Si osservi che $\mathcal{C}_C \subset \mathcal{C}_B$.

Notiamo quindi che questi insiemi vanno via via restringendosi.

14.5 Classi tradizionali di controllori a struttura fissa

Fra i controllori a struttura fissa, si individuano due classi tradizionali: reti correttive, e regolatori standard. Le **reti correttive** sono i più semplici controllori utilizzati nel progetto dei sistemi di controllo. Nell'approccio tradizionale vengono progettati per correggere il comportamento dinamico dell'anello di retroazione. In realtà le implementazioni non vengono più fatte con reti elettriche. I **regolatori standard** sono caratterizzati dalla combinazione di azioni proporzionale, derivativa e integrale. Vengono implementati su dispositivi standard adattabili a classi estese di applicazioni e per i quali è possibile il tuning diretto dei parametri di progetto anche in condizioni operative.

14.5.1 Principali reti corretttrici

Citiamo, tra le principali reti corretttrici,

- Rete integratrice
- Rete derivatrice
- Rete ritardatrice
- Rete anticipatrice
- Rete a ritardo e anticipo: rapporto di due polinomi dipendenti da $\omega_n, \delta, \delta'$
- Rete a T ponticellato: rapporto di due polinomi dipendenti da $\omega_n, \delta, \delta'$. Generalmente $\delta' \in (0, 1)$, e $\delta > 1$ mentre δ' non per forza

14.6 Struttura del controllore con rete corretttrice

Dovremo quindi progettare il parametro K_c ed i parametri della rete corretttrice $C_r(s)$, quindi un numero limitato di parametri per completare questo controllore.

14.7 I regolatori standard

I regolatori standard si basano sulla combinazione di effetti di controllo che si riconducono ad effetto **proporzionale** ($R(s) = K_p$) quindi non avente poli/zeri in quanto non dinamico, **integrale** ($R(s) = \frac{K_p}{T_i s}$) con l'integrale dell'ingresso pari all'uscita ed un polo nell'origine, **proporzionale-integrale** ($R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$), che avrà un polo nell'origine e uno zero. Citiamo poi il regolatore **proporzionale-derivativo** ($R(s) = K_p(1 + T_d s)$) dove in realtà abbiamo $R(s) = K_p \left(1 + \frac{T_d s}{1 + \tau s}\right)$ con $\tau \ll T_d$, ossia sostanzialmente una rete anticipatrice con uno zero e un polo. Se li sommiamo tutti otteniamo il cosiddetto regolatore PID, o **proporzionale-integrale-derivativo** dove $R(s) = \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s}\right)$. Sviluppiamo la f.d.t. e otteniamo

$$R(s) \approx K_p \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{T_i s(1 + \tau s)}$$

14.8 Rete ritardatrice

Introdotta $C_r(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s}$ procediamo ad ottenere i diagrammi di Bode e Nyquist. Otteniamo infine $\varphi_m = -\arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} = \arg C_r(j\omega_m)$ dove $\omega_m := \frac{1}{\sqrt{\alpha \cdot \tau}}$.

14.8.1 Azione compensatrice della rete ritardatrice

Sia $P(s)$ asintoticamente stabile e a fase minima. Per prima cosa, scegliamo un controllore proporzionale $C(s) = K_c > 0$. Progettiamo $K_c > 0$ al fine di assicurare una specifica di precisione. Tanto più grande K_c , tanto più piccolo sarà l'errore in risposta al gradino. Questo introduce la possibilità di ottenere un sistema instabile. Allora, qual è l'idea dell'azione compensatrice della rete ritardatrice? È proprio quello di attenuare in alta frequenza il guadagno di anello, modificando il diagramma polare per ottenere la stabilità. Questo in virtù del fatto che la rete ritardatrice è un filtro passa-basso. Progettiamo quindi α e τ per assicurare la stabilità asintotica con un buon margine di ampiezza e/o fase. Abbiamo vari metodi per il progetto, come i grafici (obsoleti), per tentativi/ad hoc, o con le formule di inversione. L'utilizzo

della rete ritardatrice ha come vantaggio che il guadagno di anello si mantiene elevato alle basse frequenze (buone prestazioni statiche), ma riduce la banda passante del g.d.a. ottenendo una riduzione della banda passante di $T_{ry}(j\omega)$ e quindi scarse prestazioni dinamiche.

14.9 Rete anticipatrice

Ottenuto $C_r(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$. Notiamo che la rete anticipatrice è l'esatto reciproco della precedente, caratteristica che possiamo sfruttare per l'analisi. Sarà quindi un filtro passa-alto. Otteniamo anche $\varphi_m = \arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \arg C_r(j\omega_m)$ dove $\omega_m := \frac{1}{\sqrt{\alpha}\tau}$. Interpretiamo ora il principio di funzionamento. Per esempio, se avessimo lo spostamento di un carrello su rotaia in cui il segnale di controllo fosse la forza applicata al carrello, potremmo applicare una forza proporzionale all'errore di posizione $e = y_R - y : f = K_c e$. Otteniamo come esito che, in assenza di attriti, il carrello oscilla indefinitamente. Questo perché quando arriva al punto giusto, sarà già in moto e andrà oltre al punto, nonostante l'inversione della forza. Quando l'errore diventa sufficientemente grande, il carrello tornerà indietro, ma non si fermerà, di nuovo, al punto giusto. Appliciamo al sistema il luogo delle radici. Determiniamo $P(s) = \frac{1}{Ms^2}$. L'equazione caratteristica sarà quindi $1 + K_c \frac{1}{Ms^2} = 0$. Ma quindi, come dovremmo stabilizzare questo carrello? Il problema è che la forza non cambia segno in prossimità del punto y_R , ma solo dopo. Vogliamo quindi ottenere il cambio di segno prima dell'arrivo al punto. Per questo, sommiamo al termine proporzionale di forza, un termine che dipende dalla derivata: se l'errore si sta riducendo, la derivata è negativa!

$$f = K_c e + K'_c \frac{de}{dt}$$

Sarà poi una pseudoderivata per i soliti motivi, ma il concetto funziona. Quindi, introduciamo $\tau := \frac{K'_c}{K_c}$, passando alle trasformate $F(s) = K_c(1+\tau s)E(s)$. Abbiamo introdotto una rete anticipatrice caratterizzata dai parametri τ, α :

$$C_r(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$$

14.9.1 Vantaggi/Svantaggi della rete anticipatrice

La rete anticipatrice ha diversi vantaggi, come il mantenimento delle prestazioni statiche e la stabilizzazione con allargamento della banda passante del guadagno di anello e quindi allargamento della banda passante per $T_{ry}(j\omega)$: aumento del grado di stabilità G_s , diminuzione del tempo di assestamento T_a , migliori capacità di inseguimento di segnale. C'è però uno svantaggio: la possibile introduzione di rumore. Infatti, il parametro α non può essere troppo piccolo. Anche qui, saltiamo i metodi grafici e citiamo i metodi per tentativi, i metodi con formule di inversione, ed infine anche la cancellazione polo-zero (non presente nelle ritardatrici).

14.9.2 Cancellazione polo-zero

Possiamo sintetizzare la rete anticipatrice mediante cancellazione polo-zero. La cancellazione deve avvenire sempre nella regione negativa (parte reale negativa) del diagramma. Scegliamo quale zero della rete il polo reale negativo di $P(s)$ più vicino all'asse immaginario determinando così nella funzione di trasferimento di catena diretta una cancellazione polo-zero ammissibile. Cancelliamo quindi il polo più vicino all'asse immaginario. Comparirà quindi un polo determinato dalla rete in $-\frac{1}{\alpha\tau}$. Abbiamo infatti imposto $\tau = -\frac{1}{p_1}$.

14.10 Sintesi in frequenza con le formule di inversione

La sintesi in frequenza delle reti ritardatrici/anticipatrici con imposizione dei margini di stabilità prestabiliti può essere svolta utilizzando le funzioni inverse delle stesse reti. Interpretiamo anzitutto la risposta armonica della rete anticipatrice $\frac{1+j\tau\omega}{1+j\alpha\tau\omega}$, studiandola come una funzione matematica $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2, (\alpha, \tau\omega) \rightarrow (M, \varphi)$ dove $\mathcal{D} := (0, 1) \times (0, +\infty)$ e $M = \frac{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}{\sqrt{1+(\alpha\tau\omega)^2}}, \varphi = \arctan(\tau\omega) - \arctan(\alpha\tau\omega)$. Ci porremo il problema di invertire questa funzione. Vogliamo quindi anzitutto provare che la stessa sia invertibile (biiettiva) e determinare f^{-1} e $f(\mathcal{D})$ codominio. Per arrivare all'inversa introduciamo un lemma algebrico. Quindi la funzione $f : \mathcal{D} \rightarrow f(\mathcal{D})$ è biiettiva e la sua funzione inversa $f^{-1} : f(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{D}, (M, \varphi) \rightarrow (\alpha, \tau\omega)$ è definita da

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}, \tau\omega = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi}$$

Poniamo infine una proposizione. Se noi assegniamo M, φ , l' α deve essere positivo e che quindi il suo numeratore sia maggiore di 0.

$$f(\mathcal{D}) = \left\{ (M, \varphi) \in (1, +\infty) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : \varphi < \arccos \frac{1}{M} \right\}$$

14.10.1 Sintesi della rete anticipatrice con imposizione del margine di fase M_F

Avremo un g.d.a. non compensato pari a $L(s)$, compensato pari a $\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s} L(s)$. Vogliamo che in virtù della presenza della rete anticipatrice, in corrispondenza di ω_0 la rete debba amplificare la fase per portare il punto di intersezione con il cerchio unitario alla destra di -1. Questa amplificazione sarà pari al rapporto tra la dimensione del vettore (1) diviso il modulo di $L(j\omega_0)$. Quindi, dovremo

1. Scegliere ω_0 affinché con $\varphi_0 := M_F - \arg L(j\omega_0) - \pi$ valga $\left(\frac{1}{|L(j\omega_0)|}, \varphi_0\right) \in f(\mathcal{D})$ quindi $\cos \varphi_0 > |L(j\omega_0)|$
2. Definiti $M := \frac{1}{|L(j\omega_0)|}$ e $\varphi := \varphi_0$ segue $\tau = \frac{M - \cos \varphi}{\omega_0 \sin \varphi}$ e $\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}$

Per massimizzare il margine di fase nella sintesi della rete anticipatrice, sappiamo, fissata una pulsazione ω_0 , che l'estremo superiore degli anticipi φ_0 ammissibili è dato da $\arccos |L(j\omega_0)|$. Con questo valore il margine di fase corrispondente nel g.d.a. compensato è

$$M_F(\omega_0) = \pi + \arg L(j\omega_0) + \arccos |L(j\omega_0)|$$

14.10.2 Sintesi della rete ritardatrice con imposizione del margine di fase M_F

Teniamo presente che questa è il reciproco della precedente. Cercheremo quindi un valore di ω_0 che non stia dentro il cerchio unitario, ma fuori: otterremo così il desiderato passaggio a destra di -1.

1. Scegliere ω_0 affinché con $\varphi_0 := \arg L(j\omega_0) + \pi - M_F$ valga $(|L(j\omega_0)|, \varphi_0) \in f(\mathcal{D})$ quindi $\cos \varphi_0 > \frac{1}{|L(j\omega_0)|}$
2. Definiti $M := |L(j\omega_0)|$ e $\varphi := \varphi_0$ segue $\tau = \frac{M - \cos \varphi}{\omega_0 \sin \varphi}$ e $\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}$

Abbiamo visto questi progetti, e possiamo espletare una considerazione: l'uso delle formule di inversione permette in generale di spostare nel piano complesso, per una data frequenza, un punto del diagramma di Nyquist in uno limitrofo del diagramma di Nyquist compensato. Lo scopo, al di là dell'imposizione di margini di stabilità, è quello di migliorare la risposta armonica del guadagno di anello in accordo a specifiche di progetto.

14.10.3 Sintesi della rete anticipatrice con imposizione del margine di ampiezza M_A

In questo caso, anzitutto tracciamo un cerchio di raggio $\frac{1}{M_A}$, trovando il vettore. Dovremo quindi, in corrispondenza di ω_0 , amplificare di $\frac{1}{M_A|L(j\omega_0)|}$ per spostare il punto sulla circonferenza.

1. Scegliere ω_0 affinché con $\varphi_0 := -\arg L(j\omega_0) - \pi$ valga $\left(\frac{1}{M_A|L(j\omega_0)|}, \varphi_0\right) \in f(\mathcal{D})$ quindi $\cos\varphi_0 > M_A|L(j\omega_0)|$
2. Definiti $M := \frac{1}{M_A|L(j\omega_0)|}$ e $\varphi := \varphi_0$ segue $\tau = \frac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \sin\varphi}$ e $\alpha = \frac{M \cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)}$

14.10.4 Sintesi della rete ritardatrice con imposizione del margine di ampiezza M_A

Tracciamo ancora il cerchio con raggio $\frac{1}{M_A}$, ma vogliamo ora posizionarci fuori dal cerchio. Otterremo quindi un'attenuazione di $M_A|L(j\omega_0)|$, e vorremo un ritardo di fase dato da φ_0 , ottenibile π meno il modulo dell'argomento di $L(j\omega_0)$.

1. Scegliere ω_0 affinché con $\varphi_0 := \arg L(j\omega_0) + \pi$ valga $(M_A|L(j\omega_0)|, \varphi_0) \in f(\mathcal{D})$ quindi $\cos\varphi_0 > \frac{1}{M_A|L(j\omega_0)|}$
2. Definiti $M := M_A|L(j\omega_0)|$ e $\varphi := \varphi_0$ segue $\tau = \frac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \sin\varphi}$ e $\alpha = \frac{M \cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)}$

14.11 La rete a ritardo e anticipo e la rete a T

Qui, abbiamo un controllore a struttura prefissata con f.d.t. $C_r(s) = \frac{1+2\delta'\frac{s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}}{1+2\delta\frac{s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$. È sostanzialmente un progetto frequenziale definito dai parametri $\omega_n, \delta, \delta'$ con, nella rete a ritardo e anticipo $\omega_n > 0, \delta > \delta' \geq 1$, e in quella a T $\omega_n > 0, \delta > 1, \delta > \delta' > 0$. Vedremo che potrà emergere naturalmente una rete a T o ritardo/anticipo in base ai parametri. In effetti, se esaminiamo la risposta armonica, in corrispondenza di $\omega = \omega_n$, la funzione assume il valore puramente reale (non c'è ritardo o anticipo) pari a $C_r(j\omega_n) = \frac{\delta'}{\delta} < 1$ (attenuazione di centro banda). Osservando i diagrammi di Bode e Nyquist, notiamo la presenza di un ritardo di fase e successivamente un anticipo, posti in modo simmetrico rispetto all'asse delle pulsazioni, in virtù di una intrinseca simmetria osservabile nel diagramma polare (circonferenza perfetta). È evidente che in corrispondenza di ω_n siamo nel punto di anticipo/ritardo 0, ed il punto di massimo anticipo sarà opposto a questo.

14.11.1 Progetto delle reti con imposizione del margine di fase M_F

Nel progetto, cerchiamo l'attenuazione adatta a spostare il punto ω_0 sulla circonferenza. L'attenuazione sarà pari al rapporto tra il segmento che intercetta la circonferenza, ed il modulo di $j\omega_0$. In sintesi:

1. Determiniamo ω_0 soluzione dell'equazione $\arg L(j\omega_0) = -\pi + M_F$
2. Imponiamo $\omega_n = \omega_0, \frac{\delta'}{\delta} = \frac{1}{|L(j\omega_0)|}$

Abbiamo sostanzialmente fissato due equazioni, ma con tre parametri ci rimane un grado di libertà.

14.11.2 Progetto delle reti con imposizione del margine di ampiezza M_A

Partiamo qui dal diagramma non compensato, che interseca l'asse reale negativo in ω_p (determiniamo questa pulsazione), poi andiamo a determinare un punto sull'asse che disti dall'origine $\frac{1}{M_A}$. Vogliamo sostanzialmente fissare una rete a ritardo/anticipo/T ponticellato, che determini una pulsazione tale da spostare il punto ω_p . L'attenuazione sarà quindi pari a $\frac{1}{M_A|L(j\omega_p)|}$. Quindi,

1. Determinare ω_p come $\arg L(j\omega_p) = -\pi$
2. Imporre $\omega_n = \omega_p$, $\frac{\delta'}{\delta} = \frac{1}{|L(j\omega_p)|M_A}$

Ora, mostriamo una parametrizzazione alternativa (equivalente) per la rete a ritardo anticipo:

$$C_r(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + \tau_{12} s}$$

Potremmo quindi dedurre che

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \quad \delta' = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \geq 1 \quad \delta = \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}} > \delta'$$

L'attenuazione di centro banda è esprimibile come $C_r(j\omega_n) = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}}$. Usualmente, nel progetto della rete a ritardo e anticipo si impone il rapporto $\frac{\tau_1}{\tau_2}$.

14.12 La sintesi con l'equazione diofantea

Abbandoniamo il controllore di struttura prefissata per occuparci di una problematica più generale: in particolare, questo metodo permette l'allocazione arbitraria dei poli retroazionati. In particolare, utilizza una soluzione dell'equazione di Diòfanto, riconducibile alla risoluzione di un sistema di equazioni algebriche lineari. Questo metodo può anche essere utilizzato ed adattato per il conseguimento di prestazioni asintotiche. Prendiamo uno schema di sistema di controllo retroazionato, e ipotizziamo che la f.d.t. $P(s)$ sia strettamente propria,

$$P(s) := \frac{b(s)}{a(s)} := \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

Il problema è ora **progettare un controllore proprio $C(s)$ affinché i poli retroazionati del sistema di controllo siano assegnabili arbitrariamente**. A questo fine introduciamo un controllore di ordine l , pari a $C(s) = \frac{y(s)}{x(s)}$. Vogliamo quindi che le radici dell'eq. caratteristica $1 + C(s)P(s) = 0$ coincidano con quelle prefissate $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}\}$. Otteniamo quindi il polinomio caratteristico associato al controllore introdotto: $a(s)x(s) + b(s)y(s)$, e introduciamo il polinomio caratteristico desiderato per il sistema retroazionato:

$$d(s) := \prod_{i=1}^{n+1} (s - \lambda_i)$$

Otteniamo quindi il polinomio associato ai poli, e quello al controllore. A questo punto dobbiamo quindi equagliarli, ottenendo l'**equazione diofantea**:

$$a(s)x(s) + b(s)y(s) = d(s)$$

L'equazione diofantea ammette soluzione **se e solo se** il massimo comun divisore di $a(s)$ e $b(s)$ è divisore di $d(s)$. Enunciamo ora alcune osservazioni.

Proprietà della parametrizzazione esaustiva delle soluzioni dell'eq. diofantea Sia $m(s)$ il m.c.d. di $a(s)$ e $b(s)$ per il quale valgono le fattorizzazioni $a(s) = m(s)a_1(s)$ e $b(s) = m(s)b_1(s)$. Se l'equazione diofantea ammette una soluzione $\{x_0(s), y_0(s)\}$ allora l'insieme di tutte le soluzioni è dato da

$$\begin{cases} x(s) = x_0(s) + b_1(s)p(s) \\ y(s) = y_0(s) - a_1(s)p(s) \end{cases}$$

dove $p(s)$ è un polinomio arbitrario.

Proprietà Assumiamo $a(s)$ e $b(s)$ coprimi fra loro. Allora indicato con $\{x(s), y(s)\}$ una soluzione dell'eq. diofantea, valgono le seguenti equivalenze: se $a(s)$ e $d(s)$ sono coprimi, $a(s)$ e $y(s)$ li saranno; se $b(s)$ e $d(s)$ sono coprimi s.se $b(s)$ e $x(s)$ li sono. Non possono quindi esserci cancellazioni polo-zero tra i poli dell'impianto e gli zeri del controllore. Analogamente, non possono esserci cancellazioni polo-zero tra i poli del controllore e gli zeri dell'impianto.

14.12.1 Soluzione

Entriamo ora nel merito della soluzione. Considerati $a(s)$ e $b(s)$ coprimi fra di loro, per ogni scelta di $d(s)$ esistono soluzioni dell'eq. diofantea, ma non tutte sono accettabili in quanto è necessario garantire $\deg y(s) \leq \deg x(s)$. Andiamo quindi a parametrizzare un controllore di ordine l che soddisfi l'equazione:

$$\frac{y(s)}{x(s)} := \frac{y_l s^l + y_{l-1} s^{l-1} + \dots + y_1 s + y_0}{x_l s^l + x_{l-1} s^{l-1} + \dots + x_1 s + x_0}, y_i \in \mathbb{R} \ i = 0, 1, \dots, l; x_i \in \mathbb{R} \ i = 0, 1, \dots, l-1$$

È una scelta corrispondente ad un controllore proprio di ordine l . A questo punto, se definiamo il controllore così, dovremo scegliere un controllore d con grado pari a $n+l$. In particolare, introduciamo questo polinomio desiderato:

$$d(s) = s^{n+l} + d_{n+l-1} s^{n+l-1} + \dots + d_1 s + d_0, d_i \in \mathbb{R} \ i = 0, 1, \dots, n+l-1$$

A questo punto, interpretiamo l'eq. diofantea con il principio di identità dei polinomi:

$$(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots)(s^l + x_{l-1} s^{l-1} + \dots) + (b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \dots)(y_l s^l + y_{l-1} s^{l-1} + \dots) = s^{n+l} + d_{n+l-1} s^{n+l-1} + \dots$$

Ottenendo quindi $n+l$ equazioni lineari nelle $2l+1$ incognite reali (le x_i ed y_i). È ragionevole imporre che il numero di equazioni lineari sia uguale al numero di incognite, ovvero

$$nl = 2l + 1 \rightarrow l = n - 1$$

Sviluppando i calcoli della produttoria, otteniamo

$$s^{2n-1} + d_{2n-2} s^{2n-2} + \dots + d_1 s + d_0$$

ed infine

$$\begin{cases} x_{n-2} + b_{n-1} y_{n-1} = d_{2n-2} - a_{n-1} \\ a_{n-1} x_{n-2} + x_{n-3} + b_{n-2} y_{n-1} + b_{n-1} y_{n-2} = d_{2n-3} - a_{n-2} \\ a_{n-2} x_{n-2} + a_{n-1} x_{n-3} + x_{n-4} + b_{n-3} y_{n-1} + b_{n-2} y_{n-2} + b_{n-1} y_{n-3} = d_{2n-4} - a_{n-3} \\ \dots \\ a_0 x_1 + a_1 x_0 + b_0 y_1 + b_1 y_0 = d_1 \\ a_0 x_0 + b_0 y_0 = d_0 \end{cases}$$

Queste equazioni sembrano complesse, ma ricordando la convenzione che il coefficiente di un certo monomio ha il pedice uguale alla potenza del monomio stesso, è semplice da ricordare. Osserviamo infatti che i pedici hanno somma costante per ogni equazione (pari al pedice del coefficiente d sul membro di destra). Trascrivendo in forma matriciale le equazioni, otteniamo questo: SCREENSHOT TODO Per capirne la struttura, è conveniente vederla come due sottomatrici affiancate: una prima composta dalle prime $n-1$ colonne, e quella con le successive n . Nella prima, avremo solo i coefficienti dei polinomi a , nella seconda solo i b . Notiamo che nelle diagonali gli elementi sono sempre uguali. Queste matrici sono dette matrici di Teplez: sono caratterizzate dal fatto di essere caratterizzate dalla prima riga e dalla prima colonna. Infatti,

sapendo che le diagonali sono costanti, possiamo ottenere l'intera matrice. Il problema di assegnabilità arbitraria è risolvibile con un controllore proprio $C(s)$ di ordine $n - 1$ se e solo se la matrice dei coefficienti del sistema di equazioni è non singolare. Per verificare questa condizione, costruiamo la matrice di Sylvester $S(a, b)$ di ordine $(m + n) \times (m + n)$ in accordo alla definizione seguente: nelle prime m righe compaiono solo i coefficienti a , nelle seguenti n righe i coefficienti b . Le prime m righe costituiscono ancora una matrice Tepleziana. Quella seguente non è Tepleziana ma è simile: la costanza non è più nelle diagonali, ma nelle **antidiagonali**. Queste matrici sono dette matrici di Ankel. Otteniamo, per definizione, il risultante di $a(s)$ e $b(s)$.

$$R(a, b) := \det S(a, b)$$

C'è un risultato teorico che afferma che se il risultante è diverso da 0, i polinomi $a(s)$ e $b(s)$ **sono coprimi**. A questo punto, facciamo la trasposta della matrice di Sylvester: se la prima è non singolare, anche la trasposta lo è. Notiamo che la matrice S^T coincide a meno di una permutazione di colonne con la matrice dei coefficienti del sistema di equazioni delle incognite: se S^T è non singolare, la sarà anche la matrice dei coefficienti. Siamo giunti al teorema desiderato:

Assunti $a(s)$ e $b(s)$ coprimi fra loro, i poli del sistema in retroazione unitaria sono assegnabili arbitrariamente con un controllore proprio di ordine $n - 1$.

Questo è un risultato importante:

- Il metodo di sintesi con l'eq. diofantea può essere adattato per incorporare specifiche di regolazione asintotica (principio del modello interno, ossia quando desideriamo che la risposta al gradino di un sistema retroazionato sia nulla, dobbiamo garantire che il sistema sia di tipo 1, cioè deve esserci un polo nell'origine, che sta a significare una sorta di modello interno di una costante) (scusate)
- Questo metodo può essere interpretato come una delle tecniche del progetto con il polinomio caratteristico (principio di identità dei polinomi). Il fatto è partito dal prendere un polinomio associato alla struttura del controllore, eguagliato al polinomio desiderato.
- Questo risultato non è una panacea per la sintesi dei controllori: non tutte le specifiche sono riconducibili ad imposizioni sui poli retroazionati o a prestazioni asintotiche
- L'assegnabilità dei poli retroazionati va utilizzata con cautela per evitare un uso eccessivo dell'azione di controllo ($\max_{t \in \mathbb{R}} |u(t)|$ limitato dalle caratteristiche dell'attuatore o dell'impianto). Se io scelgo i poli retroazionati molto a sinistra, rendo il sistema apparentemente velocissimo, ma questo si scontra con il fatto fisico: provando a usare questi poli retroazionati troveremmo dei segnali inutilizzabili.

15 Sistemi di controllo per la regolazione

Il problema di regolazione asintotica può essere così posto: sia dato un impianto con f.d.t. $P(s)$ strettamente propria, vogliamo determinare un controllore $C(s)$ per il quale si abbia nel sistema retroazionato la stabilità asintotica interna e un errore a regime nullo in risposta ad un gradino del segnale di riferimento. Assumiamo $P(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ con $a(s)$ e $b(s)$ coprimi. Sappiamo allora che

Il problema di regolazione asintotica ha soluzione se e solo se $P(0) \neq 0$ ovvero il guadagno statico dell'impianto è diverso da zero.

L'impianto non deve quindi avere zeri sull'origine. Possiamo quindi progettare un controllore $C(s)$ di ordine $n - 1$ affinché i poli del sistema retroazionati siano assegnati arbitrariamente e in particolare siano tutti a parte reale negativa nonché diversi dalle radici di $a(s)$ e $b(s)$. Ne consegue che il sistema retroazionato

è internamente asintoticamente stabile e di tipo maggiore o uguale ad 1. L'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento è dunque nullo. Il problema di regolazione è risolto. Analizziamo un altro caso: l'origine del piano complesso non è polo dell'impianto ($a_0 \neq 0$) e $P(0) \neq 0$ significa $b_0 \neq 0$. Il sistema retroazionato sia di tipo 1 con controllore di ordine l :

$$C(s) = \frac{z(s)}{x(s)} = \frac{z_l s^l + z_{l-1} s^{l-1} + \dots + z_1 s + z_0}{s^l + x_{l-1} s^{l-1} + \dots + x_1 s}$$

$$1 + \frac{z(s)}{x(s)} \cdot \frac{b(s)}{a(s)} = 0, \quad x(s)a(s) + z(s)b(s) = 0$$

Vogliamo quindi un polo nell'origine. Avremo $p_c(s) := x(s)a(s) + z(s)b(s)$ polinomio caratteristico associato al controllore, e $p_d(s) := s^{n+l} + d_{n+l-1} s^{n+l-1} + \dots + d_0$ polinomio caratteristico desiderato. Imponiamo allora $p_c(s) = p_d(s)$, da cui otteniamo $n+l$ equazioni con $2l$ incognite. Da qui, deduciamo che il grado del controllore n deve essere uguale a l . A questo punto possiamo effettuare la produttoria in $p_c(s)$ e la sviluppiamo. Otterremo un sistema, da riportare poi in una matrice, che sarà non singolare: esiste sempre una soluzione, e sarà una sola. Il problema può quindi essere risolto con assegnazione arbitraria dei poli del sistema retroazionato: la scelta è solitamente fatta con metodi numerici di ottimizzazione secondo possibili vincoli o indici da minimizzare/massimizzare.

16 I regolatori PID

Ricordiamo la f.d.t. dei regolatori PID: $R(s) = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s}\right)$, nell'ipotesi che l'azione derivativa sia pura. Ricordiamo che nelle implementazioni, $T_d s$ è sempre sostituito con un filtraggio, $\frac{T_d s}{1+\tau s}$. Ricordiamo anche K_p costante proporzionale, T_d costante di tempo dell'azione derivativa, T_i costante di tempo dell'azione integrale, $\frac{1}{K_p}$ banda proporzionale. Citiamo anche i casi particolari: regolatore P, regolatore I, regolatore PI, regolatore PD. Esaminiamo dal punto di vista frequenziale il progetto di un regolatore PID. Facciamo riferimento anzitutto al diagramma asintotico di Bode. $P(s)$ è asintoticamente stabile e a fase minima. Se al posto del regolatore avessimo un controllore di guadagno unitario, il guadagno di anello coincide con $P(s)$. Osserviamo che l'intersezione del diagramma dei moduli di $P(s)$ avviene all'incirca in pendenza -3 . Ricordiamo che nei sistemi a fase minima, il diagramma dei moduli determina univocamente quello delle fasi. Osserviamo che la pulsazione di rottura di $|R(j\omega)|$ è quasi corrispondente al punto in cui la pendenza di $|P(j\omega)|$ passa da -1 a -2 . È possibile in realtà fare un progetto frequenziale utilizzando relazioni abbastanza semplici. Riscriviamo $R(s)$ per ottenere ω_n e δ :

$$R(s) = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s}\right) = \frac{K_p}{T_i} \cdot \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{s} = \frac{K_p}{T_i} \cdot \frac{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{s}$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{T_d T_i}}, \quad \delta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{T_i}{T_d}}$$

$$R(j\omega) = \frac{K_p}{T_i} \cdot \frac{2\delta}{\omega_n} = K_p$$

$$R(j\omega_n) = \frac{K_p}{T_i} \cdot \frac{2\delta}{\omega_n} = K_p$$

Il guadagno algebrico è senza ritardi e senza anticipi. Determiniamo ω_0 soluzione di $\arg P(j\omega_0) = -\pi + M_f$, e imponiamo $\omega_n = \omega_0$ e $R(j\omega_n) = \frac{1}{|P(j\omega_0)|}$ da cui $K_p = \frac{1}{|P(j\omega_0)|}$. Scelto il rapporto $k := \frac{T_i}{T_d}$ segue $\delta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{k}$ e $T_i = \frac{2\delta}{\omega_n} = \frac{\sqrt{k}}{\omega_0}$. Infine, da $T_d T_i = \frac{1}{\omega_n^2}$ segue $T_d = \frac{1}{T_i \omega_0^2} = \frac{1}{\sqrt{k} \omega_0}$.

16.1 Implementazione dei regolatori PID

16.1.1 Limitazione dell'azione derivativa $\frac{T_d s}{1+\tau s}$

La modifica che facciamo per limitare la sovraelongazione è spostare l'azione derivativa: miglioreremo perché se noi la tenessimo nella posizione normale, l'introduzione di un gradino eccita significativamente questa azione pseudoderivativa. Spostandola in questa linea, filtriamo questa azione grazie alla presenza dell'impianto.

16.1.2 Desaturazione dell'azione integrale

Il problema risiede nella carica integrale quando l'attuatore è saturante. L'attuatore saturante viene modellato attraverso una caratteristica non lineare $m(t)$. Ipotizziamo un valore di gradino piuttosto elevato e vicino al valore di saturazione dell'attuatore. L'integratore integra il segnale errore, che raggiunge un valore elevato e satura u_M . Possiamo sfruttare quindi un regolatore PID con desaturazione (anti wind-up). L'idea è semplice: si tratta di replicare all'interno del regolatore, la saturazione dell'attuatore.

16.2 Metodi di taratura dei regolatori PID

Questi metodi sono progetti veloci, non particolarmente accurati, ma utili per la loro semplicità. Citiamo il metodo di Ziegler-Nichols ad anello aperto: identificazione del processo da regolare mediante applicazione di un gradino all'ingresso $u(t) = u_c 1(t)$. Questi metodi sono utili quando abbiamo, per esempio, un numero molto alto di regolatori da progettare. Dato t_0 tempo di ritardo, T costante di tempo, $R := \frac{t_0}{T}$ rapporto di ritardo, $K := \frac{y_c}{u_c}$ guadagno statico, $N := \frac{y_c}{T}$ velocità di risposta.

$$P(s) = \frac{K e^{-t_0 s}}{1 + Ts}$$

In altre parole, individuo il punto di flesso, e trovo la tangente. Le regole sono state poi riviste da Cohen e Coon, che hanno proposto queste regole:

- Regolatore P: $K_p = \frac{u_c}{N t_0} \left(1 + \frac{R}{3}\right)$
- Regolatore I: $\frac{K_p}{T_i} = \frac{4 u_c}{N t_0^2} \frac{R^2}{1+5R}$
- Regolatore PI: $K_p = \frac{u_c}{N t_0} \left(\frac{9}{10} + \frac{R}{12}\right)$, $T_i = t_0 \frac{30+3R}{9+20R}$
- Regolatore PD: $K_p = \frac{u_c}{N t_0} \left(\frac{5}{4} + \frac{R}{6}\right)$, $T_d = t_0 \frac{6-2R}{22+3R}$
- Regolatore PID: $K_p = \frac{u_c}{N t_0} \left(\frac{4}{3} + \frac{R}{4}\right)$, $T_i = t_0 \frac{32+6R}{13+8R}$, $T_d = t_0 \frac{4}{11+2R}$

C'è anche da segnalare un metodo ad anello chiuso: con un regolatore proporzionale si porta il sistema retrozionato nella condizione di stabilità limite (innesco di autooscillazioni sull'uscita dell'impianto). Avremo K_0 guadagno critico (del regolatore P nella condizione di stabilità limite) e T_0 periodo dell'oscillazione.

- Regolatore P: $K_p = 0.5 K_0$
- Regolatore PI: $K_p = 0.45 K_0$, $T_i = 0.85 T_0$
- Regolatore PD: $K_p = 0.5 K_0$, $T_d = 0.2 T_0$
- Regolatore PID: $K_p = 0.6 K_0$, $T_i = 0.5 T_0$, $T_d = 0.12 T_0$

Esistono inoltre tante regole di taratura pubblicate, ed algoritmi di auto-sintonia.

17 Controllo dei sistemi con ritardo

17.1 Schema a predittore di Smith

Lo schema visto fino ad ora impone una forte limitazione delle prestazioni in sistemi affetti da ritardo di tempo. Lo **schema a predittore di Smith** supera questa limitazione. L'idea centrale è quella di affiancare al controllore C una parte che contiene una replica del sistema controllato (possibilmente esatta), ovvero del ritardo finito $C_P(s) = (1 - e^{-t_0 s})G(s)$. Otteniamo quindi

$$T_{ry}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} e^{-t_0 s}$$

Il ritardo non crea così problemi: progetto il controllore C come se non esistesse questo ritardo, poi semplicemente ritardo i segnali. Lo schema può essere implementato anche con uno schema equivalente.

18 Controllo feedforward/feedback (schemi di controllo a due gradi di libertà)

Vediamo ora qualche schema avanzato di feedforward/feedback. Il primo che analizziamo è il **prefiltraggio del segnale di riferimento**. Appliciamo quindi il segnale di riferimento a monte di C_1 blocco di prefiltraggio. Esistono tre metodi: filtraggio statico ($C_1(s) = T_{r1y}(0)^{-1}$), filtraggio passa-basso, filtraggio passa-alto. Un altro schema è la **compensazione del segnale di riferimento**, dove C_1 non è più prefiltraggio su r ma come contributo di segnale che sommiamo direttamente al segnale del controllore feedback che introduciamo. Osserviamo che la f.d.t. di r e y è determinata da due contributi, uno su C_1 e uno su C_2 . In particolare sarà la somma. A questo punto, se $C_1(s)$ è il reciproco di $P(s)$, otteniamo che la f.d.t. risulta essere uguale ad 1. Questo può essere considerato un buon risultato. In realtà, inserire il sistema inverso può essere impraticabile: non posso implementare un sistema improprio (se C_1 è proprio l'inverso non lo è). Inoltre, se l'impianto ha degli zeri con parte reale non negativa, il sistema inverso sarà instabile. Certamente, non possiamo sfruttare un sistema instabile per aumentare la stabilità. Potremmo però costruire un sistema inverso approssimato per risolvere la prima condizione, mentre la seconda è possibile attraverso l'inversione dinamica stabile. Quest'ultima permette di ottenere un segnale inverso limitato, determinando anche per impianti a fase non minima dei segnali inversi u_d limitati. Il metodo dell'inversione dinamica stabile può essere anche utilizzato per generalizzare lo schema di controllo col prefiltraggio del segnale di riferimento: l'inversione non sarà più sull'impianto ma sul sistema chiuso in retroazione determinato da $C_2(s)$ e $P(s)$. Questa tecnica può ragionevolmente avere successo.

19 Conclusioni sul progetto dei controllori in retroazione

Elenchiamo alcune tecniche utili per la sintesi di un controllore in retroazione a struttura prefissata $C(s; p)$ dove $p = [p_1 p_2 \dots p_k]^T$ indica il vettore dei parametri di progetto ($p \in \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}$ e usualmente $\mathcal{P} = [p_1^- p_1^+] x \dots x [p_k^- p_k^+]$)

- Criterio di Routh o metodi con uso della tabella di Routh (imposizione di un prefissato grado di stabilità G_S , imposizione del margine di ampiezza M_A , ecc...)
- Diagrammi di Nyquist e formule di inversione (progetti in frequenza con imposizione di margini di stabilità, ecc...)
- Diagrammi di Bode (progetti in frequenza per sistemi a fase minima, progetti con specifiche frequenziali su $T_{ry}(j\omega)$ o $T_{dy}(j\omega)$, ecc...)

- Metodo di cancellazione polo-zero (anche utili per ridurre il numero k dei parametri di progetto)
- Metodo del polinomio caratteristico con uso del principio di identità dei polinomi (equazione diofantea, imposizione dei poli dominanti, ecc...)
- Metodo del luogo delle radici (sintesi con grado di stabilità massimo, specifiche sui poli dominanti, ecc...) Quale metodo qualitativo è utile nell'individuare la struttura appropriata per il controllore.

Nel progetto dei controllori e più in generale dei sistemi di controllo è una buona pratica l'uso di ottimizzazioni (dei parametri di progetto) e di simulazioni al calcolatore per la verifica delle evoluzioni nelle varie situazioni operative.

20 Introduzione al controllo digitale

I **sistemi di controllo digitale** comprendono un elaboratore digitale nel sistema di controllo. La sezione analogica si interfacerà quindi con una parte digitale, in cui i segnali sono a tempo discreto. I segnali m e c sono continui quindi analogici, mentre i segnali saranno digitali. Il controllore C_d sarà gestito da un programma che si occuperà dell'elaborazione, fornendo molte più possibilità, come per esempio una supervisione/diagnosi del controllo. Apre quindi ad aspetti di automazione avanzata.

20.1 Convertitore A/D

Questo convertitore effettua quindi il campionamento del segnale con periodo T :

$$x(t) \rightarrow \tilde{x}(k) \rightarrow x(kT), k \in \mathbb{Z}$$

C'è un aspetto importante al riguardo: la rappresentazione del campione. Abbiamo la necessità di rappresentare i numeri in modo finito: distinguiamo tra livelli di quantizzazione. Detto ciò, in questo corso trascureremo la quantizzazione: la campionatura sarà idealmente esatta, basterà tenere conto di un errore. La conversione inversa, però, non ammette un'unica soluzione! Questo problema venne affrontato da Shannon nel dopoguerra, portando al **teorema del campionamento**:

Un segnale $f(t)$ con spettro limitato da 0 a ω_s , cioè con trasformata di Fourier $F(j\omega)$ nulla per $\omega \geq \omega_s$, si può ricostruire dalla sequenza di campioni $\tilde{f}(k) = f(kT)$ se e solo se la pulsazione di campionamento

$$\Omega = 2\pi/T \text{ è non inferiore a } 2\omega_s$$

Questo risultato sottolinea quanto importante sia la frequenza di campionatura. Se il segnale viene sottocampionato, accade l'**aliasing**, attenuabile attraverso filtri anti-aliasing (passa-basso) di Butterworth o Bessel.

20.2 Convertitore D/A

Il più comune è il dispositivo di tenuta di ordine zero (zero-order hold). Semplicemente tiene in memoria l'ultimo campione ricevuto all'ingresso, e l'uscita corrispondente a tempo continuo su quel valore: l'uscita sarà una funzione a gradini. È ovvio che una frequenza bassa può portare a problemi.

20.3 La trasformata zeta

È opportuno definire uno strumento matematico per questi sistemi. La **trasformata Zeta** porta a una funzione complessa di variabile complessa, come la trasformata di Laplace.

Sia $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) un segnale a tempo discreto (anche sequenza o successione). La trasformata zeta di $x(k)$ è $\mathcal{Z}[x] = \mathcal{Z}[x(k)] := \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k}$ con z variabile complessa.

Se esistono $\rho > 0$ e $M > 0$ per i quali vale $x(k) \leq M\rho^k, k \geq 0$ allora $X(z)$ è analitica su $\mathbb{C}B_\rho$, ovvero per i valori $|z| > \rho$. Esempi:

$$x(k) = a^k, \mathcal{Z}[a^k] = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a}$$

convergente per $|z| > |a|$. Analogamente a come fatto in passato, possiamo procedere per continuazione analitica: $X(z) = \frac{z}{z-a}$ è ben definita per ogni $z \neq a$. Se $a = 1$, otteniamo $\mathcal{Z}[1^k] = \mathcal{Z}[1(k)] = \frac{z}{z-1}$. La trasformata considera solo i valori di k non negativi. Introduciamo ora la delta di Dirac discreta o impulso discreto (totalmente diversa da quella vista in passato):

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

È quindi molto semplice: $\mathcal{Z}[\delta(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k)z^{-k} = 1$. Un'altra proprietà interessante è la sua linearità: dati due segnali $x(k), y(k)$ e due costanti a, b anche complesse,

$$\mathcal{Z}[ax(k) + by(k)] = a\mathcal{Z}[x(k)] + b\mathcal{Z}[y(k)]$$

Possiamo ora introdurre la regione di convergenza (ROC). Semplicemente è definita come

Data la sequenza $x(k)$, la regione di convergenza (ROC) di $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)]$ è definita da:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \right| < \infty \right\}$$

Ha alcune proprietà:

- $X(z)$ è analitica su ROC
- Se ROC non è l'insieme vuoto, $ROC = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \rho_c\}$, con ρ_c è raggio di assoluta convergenza $\rho_c = \limsup_{k \rightarrow +\infty} |x(k)|^{1/k} := \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{m \geq k} \{ |x(m)|^{1/m} \}$
- Se $\rho > \rho_c$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$ è convergente uniformemente su $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \rho\}$.

21 Proprietà della trasformata zeta

Vediamo ora alcune proprietà della trasformata zeta.

21.1 Trasformata zeta di un segnale ritardato di n passi

Questa può essere espressa prendendo la trasformata zeta di $x(k)$, la si moltiplica per z^{-n} poi si aggiungono dei monomi con potenze negativa di z , che riportano i valori del segnale (condizioni iniziali). Nel caso di segnali non causali, vanno considerati per valutare correttamente la trasformata.

$$\mathcal{Z}[x(k-n)] = z^{-n}\mathcal{Z}[x(k)] + \sum_{k=0}^{n-1} x(k-n)z^{-k} = z^{-n}\mathcal{Z}[x(k)] + x(-n) + x(-n+1)z^{-1} + \dots + x(-1)z^{-n+1}$$

Questa proprietà vale per la definizione di \mathcal{Z} .

21.2 Trasformata zeta di un segnale anticipato di n passi

Questa è una proprietà *duale* della precedente:

$$\mathcal{Z}[x(k+n)] = z^n \mathcal{Z}[x(k)] - \sum_{i=0}^{n-1} x(i) z^{n-i} = z^n \mathcal{Z}[x(k)] - x(0)z^n - x(1)z^{n-1} - \dots - x(n-1)z$$

Un esempio valido è $\mathcal{Z}[2^{k+2}] = \frac{4z}{z-2}$.

21.3 Teorema del valore iniziale

Questo teorema afferma che il campione iniziale del segnale $x(0)$ si ottiene dal limite

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \mathcal{Z}[x(k)]$$

21.4 Teorema del valore finale

Dato il segnale $x(k)$ per il quale il limite $\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k)$ esiste ed è finito, vale

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \mathcal{Z}[x(k)]$$

Questo teorema può essere posto in una formulazione più utile, estesa: dato il segnale $x(k)$ sia $X(z) := \mathcal{Z}[x(k)]$

1. Se $X(z)$ non ha poli nella regione $|z| \geq 1$ allora $\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) = 0$. Vuol dire che quando i poli sono concentrati nel cerchio unitario aperto vale il limite.
2. Se $X(z)$ non ha poli nella regione $|z| \geq 1$ ad eccezione di un polo semplice in $z = 1$ allora $x(k)$ converge per $k \rightarrow +\infty$ e vale $\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) = \text{Res}\{X(z), 1\} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$.
3. Se $X(z)$ ha un polo multiplo in $z = 1$, allora $x(k)$ non converge per $k \rightarrow +\infty$. È sufficiente quindi l'esistenza di un polo multiplo nel punto per la non convergenza.
4. Se $X(z)$ ha un polo nella regione $|z| \geq 1, z \neq 1$ allora $x(k)$ non converge per $k \rightarrow +\infty$.

21.5 Trasformata zeta di $a^k x(k)$

In questo caso, la trasformata si ottiene dalla trasformata X valutandola in z/a :

$$\mathcal{Z}[a^k x(k)] = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

21.6 Convoluzione a tempo discreto

La convoluzione dei segnali discreti $x(k)$ e $y(k)$ è definita come:

$$(x * y)(k) = x(k) * y(k) := \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(k-i)y(i)$$

La convoluzione è quindi ottenuta sommando infinite copie di $x(k)$, ciascuna delle quali è traslata in avanti di i passi e moltiplicata per $y(i)$.

21.6.1 Commutatività della convoluzione

$$x(k) * y(k) = y(k) * x(k)$$

21.6.2 Trasformata zeta della convoluzione

Se $x(k)$ e $y(k)$ sono segnali discreti tali che $x(k) = 0, y(k) = 0$ per $k < 0$ (segnali causali) allora

$$\mathcal{Z}[x * y] = X(z)Y(z)$$

21.7 Derivata della trasformata zeta

Sia $x(k)$ un segnale discreto e $X(z)$ la corrispondente trasformata zeta. Nella regione in cui $X(z)$ è analitica, vale

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \mathcal{Z}[k \cdot x(k)]$$

22 Antitrasformazione zeta

Vediamo ora le tecniche di antitrasformazione zeta. È necessario un richiamo di analisi complessa: il teorema dei residui.

Sia Γ una curva chiusa semplice, e $f(z)$ una funzione analitica su Γ e nella sua regione interna ad eccezione dei punti singolari p_1, p_2, \dots, p_n in essa contenuti. Allora

$$\oint f(z) dz = 2\pi j \sum_{i=1}^n \text{Res}\{f, p_i\}$$

Esiste ora un lemma che dà sostanzialmente ragione del calcolo di questo integrale chiuso: sia $l \in \mathbb{Z}$, allora

$$\oint_{\Gamma} z^l dz = \begin{cases} 2\pi j & \text{se } l = -1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove Γ è una curva chiusa (semplice) che circonda l'origine del piano complesso (\mathbb{C}) percorsa in senso antiorario. Questo lemma è dimostrabile utilizzando il teorema dei residui. Quando quindi consideriamo i valori di l negativi, abbiamo la necessità di valutare il residuo in corrispondenza di $z = 0$. Questo lemma lo applichiamo al teorema di antitrasformazione, in cui indichiamo $X(z)$ come la trasformata di una sequenza $x(k)$, allora

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z) z^{k-1} dz$$

dove γ è una curva chiusa semplice, percorsa in senso antiorario, che circonda la regione di non convergenza di $Z[x(k)]$. La regione di non convergenza è

$$\mathbb{C}/ROC = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho_c\} \subset \{\text{regione interna di } \gamma\}$$

Formalmente, $x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$.

22.1 Antitrasformazione con il metodo dei residui

Applicando il teorema dei residui nel calcolo dell'integrale, segue

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \cdot 2\pi j \sum_i \text{Res} \left\{ X(z) \cdot z^{k-1}, p_i \right\}$$

I valori p_i sono le singolarità distinte di $X(z) \cdot z^{k-1}$. Quindi

$$x(k) = \sum_i \text{Res} \left\{ X(z) \cdot z^{k-1}, p_i \right\}$$

22.1.1 Proprietà (sommatoria dei residui di una funzione razionale strettamente propria)

Se avessimo una funzione razionale $F(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$ strettamente propria, con $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ e p_1, p_2, \dots, p_h i suoi poli distinti. Segue allora

$$\sum_{i=1}^h \text{Res} \{F, p_i\} = \begin{cases} 0 & \text{se } n - m > 1 \\ \frac{b_m}{a_n} & \text{se } n - m = 1 \end{cases}$$

Alcuni casi particolari:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{1}{z-a} \right] &= a^k - 1 \cdot 1(k-1) \\ \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{1}{(z-a)^2} \right] &= (k-1)a^{k-2} \cdot 1(k-1) \\ \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{1}{(z-a)^3} \right] &= \frac{(k-1)(k-2)}{2} a^{k-3} \cdot 1(k-1) \\ \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z-a} \right] &= a^k \cdot 1(k) \\ \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{(z-a)^2} \right] &= k a^{k-1} \cdot 1(k) \\ \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{(z-a)^3} \right] &= \frac{k(k-1)}{2} a^{k-2} \cdot 1(k) \end{aligned}$$

22.1.2 Antitrasformata zeta di fratti complessi

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{c}{z-p} + \frac{\bar{c}}{z-\bar{p}} \right] &= 2|c||p|^{k-1} \cos [\arg(p)(k-1) + \arg(c)] \cdot 1(k-1) \\ \mathcal{Z}^{-1} \left[c \frac{c}{z-p} + \bar{c} \frac{\bar{c}}{z-\bar{p}} \right] &= 2|c||p|^k \cos [\arg(p)(k) + \arg(c)] \cdot 1(k) \end{aligned}$$

oppure, equivalentemente

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{a+jb}{z-p} + \frac{a-jb}{z-\bar{p}} \right] &= 2|p|^{k-1} \{ \cos[\arg(p)(k-1)] - \sin[\arg(p)(k-1)] \} \cdot 1(k-1) \\ \mathcal{Z}^{-1} \left[(a+jb) \frac{z}{z-p} + (a-jb) \frac{z}{z-\bar{p}} \right] &= 2|p|^k \{ \cos[\arg(p)(k)] - \sin[\arg(p)(k)] \} \cdot 1(k) \end{aligned}$$

22.2 Antitrasformazione zeta con il metodo dello sviluppo in fratti semplici

Di norma nelle trasformate di Laplace, la funzione da antitrasformare è strettamente propria (altrimenti avremmo delle delta di Dirac nella soluzione). Nel caso delle antitrasformazioni zeta, però, le consideriamo proprie. Ricordiamo infine le due trasformate notevoli da cui tutto si può ricavare:

$$\mathcal{Z} \left[\binom{k}{n-1} a^{k-(n-1)} \right] = \frac{z}{(z-a)^n}$$
$$\mathcal{L} \left[\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\alpha t} \right] = \frac{1}{(s-a)^n}$$

23 Sistemi a tempo discreto

23.1 Generalità sui sistemi a tempo discreto

Consideriamo un generico sistema a tempo discreto, interpretabile come un processo con ingresso a tempo discreto $u(k)$ determinate un segnale di uscita a tempo discreto $y(k)$. I concetti tradizionali dei sistemi a tempo continuo possono essere introdotti anche qui:

Behavior Il behavior è l'insieme di tutte le coppie u, y con ingresso u e uscita y compatibili.

Linearità Il sistema si dice lineare quando soddisfa la proprietà di sovrapposizione degli effetti, ossia l'insieme \mathcal{B}_d è uno spazio vettoriale.

Stazionarietà Un sistema si dice stazionario (invariante nel tempo) se per ogni $n \in \mathbb{Z}$

$$(u(k), y(k)) \in \mathcal{B}_d \rightarrow (u(k-n), y(k-n)) \in \mathcal{B}_d$$

Il modello matematico che descrive il sistema sarà un'equazione alle differenze così strutturata:

$$f(y(k), y(k-1) \dots y(k-n)) = g(u(k-n+m), \dots, u(k-n))$$

Se f e g sono funzioni lineari degli argomenti si ottiene

$$a_n y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_0 y(k-n) = b_m u(k-n+m) + b_{m-1} u(k-n+m-1) + \dots + b_0 u(k-n)$$

La suddetta è l'equazione standard dei sistemi a tempo discreto. Affinche l'equazione sia ben posta, assumiamo

$$a_n \neq 0, b_m \neq 0, a_0 \neq 0 \bigvee b_0 \neq 0, m \leq n$$

E inoltre, assumiamo n ordine di Σ_d , $n-m$ grado relativo di Σ_d

23.2 Risposta di un sistema lineare a tempo discreto e la funzione di trasferimento

Definita l'equazione alle differenze, vogliamo risolverla in modo analitico. Definito il segnale $u(k)$ e le condizioni iniziali $(y(-1), y(-2) \dots, u(-1), u(-2), \dots)$, definire l'uscita è semplice. Notiamo che le condizioni iniziali esatte arrivano fino all'indice n_0 e m_0 , ossia il minimo tra i vari a_i e b_i rispettivamente. L'equazione può essere riscritta come

$$a_n y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_0 y(k-n) = b_n u(k) + b_{n-1} u(k-1) + \dots + b_0 u(k-n)$$

con m massimo tra i b_i . Possiamo allora:

$$\sum_{i=0}^n a_i y(k-n+i) = \sum_{i=0}^n b_i u(k-n+i)$$

E trasformare:

$$\sum_{i=0}^n a_i \mathcal{Z}[y(k-n+i)] = \sum_{i=0}^n \mathcal{Z}[u(k-n+i)]$$

Osserviamo che in $i = n$ non è un segnale ritardato, allora lo valutiamo a parte:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathcal{Z}[y(k-n+i)] + a_n Y(z) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{Z}[u(k-n+i)] + b_n U(z)$$

A questo punto, valutiamo la trasformata zeta dei segnali ritardati (con ritardo $n-i$), ottenendo infine:

$$\sum_{i=0}^n a_i z^i Y(z) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} a_i y(k-n+i) z^{n-k} = \sum_{i=0}^n b_i z^i U(z) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} b_i u(k-n+i) z^{n-k}$$

Otteniamo a questo punto i polinomi $a(z) := \sum_{i=0}^n a_i z^i$, $b(z) := \sum_{i=0}^n b_i z^i$ e $c(z)$ composto dalle sommatorie doppie $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} b_i u(k-n+i) z^{n-k} - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} a_i y(k-n+i) z^{n-k}$, abbiamo

$$Y(z) = \frac{b(z)}{a(z)} U(z) + \frac{c(z)}{a(z)}$$

e di conseguenza $Y(z) = Y_{for}(z) + Y_{lib}(z)$

$$Y_{for}(z) = \frac{b(z)}{a(z)} U(z) \quad Y_{lib}(z) = \frac{c(z)}{a(z)}$$

la prima infatti non dipende dalle condizioni iniziali, mentre la seconda contiene solamente le suddette. Allora,

$$y(k) = y_{for}(k) + y_{lib}(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{b(z)}{a(z)} U(z) \right] + \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{c(z)}{a(z)} \right]$$

Questo è del tutto analogo a quanto visto nei sistemi a tempo continuo.

23.3 Funzione di trasferimento

Definiamo quindi la funzione di trasferimento discreto Σ_d la funzione $H(z)$ per la quale

$$\mathcal{Z}[y(k)] = H(z) \mathcal{Z}[u(k)]$$

per ogni $(u, y) \in \mathcal{B}_d$ tale che $u(k) = 0, y(k) = 0, k < 0$. Quindi la f.d.t. di Σ_d è

$$H(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^i}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} = \frac{b_m z^m + \dots + b_0}{a_n z^n + \dots + a_0}$$

La risposta all'impulso è $h(k) = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)]$, si considera $h(k) = 0, k < 0$. Viceversa, nota la risposta all'impulso $H(z) = \mathcal{Z}[h(k)]$, dal teorema di convoluzione segue $y_{for}(k) = \sum_{i=0}^k h(k-i)u(i)$.

23.3.1 Analisi della risposta libera

L'analisi della risposta libera è cruciale per stabilire la stabilità del sistema. Individuiamo la struttura: avremo la necessità, essendo noto $a(z)$, di calcolare il polinomio $c(z)$, calcolabile tramite funzioni matriciali (vedi slide 20.11), definite da matrici triangolari Tepleziane. Queste si ottengono dalle doppie sommatorie viste prima, dove possiamo scambiare gli indici i con k , mantenendo l'identità della doppia sommatoria stessa.

23.4 Conversione continuo/discreto di un sistema con il mantenitore di ordine zero

Vogliamo ora calcolare la funzione di trasferimento includente anche i due convertitori D/A A/D. Il tempo di campionamento sia T ($\tilde{y}(k) = y(kT)$) e il convertitore D/A sia un mantenitore di ordine zero. Introduciamo, per questo, la trasformata zeta di un segnale a tempo continuo campionati. Sia $f(t)$ un segnale a tempo continuo e $F(s)$ la corrispondente trasformata di Laplace.

$$\mathcal{Z}[f(t), T] \triangleq \mathcal{Z}[f(kT)] \quad \mathcal{Z}[F(s), T] \triangleq \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}[F(s)]_{t=kT}]$$

Determiniamo quindi $P_d(z)$ come trasformata zeta della risposta all'impulso applicato all'ingresso del mantenitore di ordine zero $\tilde{u}(k) = \delta(k)$. Ci rendiamo conto che il segnale $u(t)$ è definito dalla differenza tra il gradino ed il gradino ritardato. Quindi, $p_s(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{P(s)}{s} \right]$, calcoliamo allora $P_d(z)$ e otteniamo

$$P_d(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{P(s)}{s}, T \right]$$