Fondamenti di Controlli Automatici

Simone Montali - monta.li

31 marzo 2020

1 Il controllo attivo di un processo

Innanzitutto definiamo due termini fondamentali per la materia: un **processo** è l'evoluzione nel tempo di ciò che caratterizza un sistema. Con **controllo attivo** intendiamo una strategia di controllo che prevede un'azione di comando esercitata sul processo. Il controllo attivo risolve il problema di imporre una modalità di funzionamento desiderato ad un processo: l'obiettivo è che una variabile del processo coincida con una preassegnata. Parliamo di **regolazione** quando l'ingresso è costante, di **asservimento** quando l'ingresso è variabile. Un **sistema** è un complesso, normalmente composto da più elementi interconnessi, in cui si possono distinguere grandezze soggette a variare nel tempo (variabili). Un **segnale** è una funzione che rappresenta l'andamento delle variabili nel tempo. Distinguiamo queste ultime in indipendenti (ingressi) e dipendenti (uscite). Arriviamo così al concetto di **sistema orientato**. Un **modello matematico** è la descrizione di un sistema che permette di determinare i segnali delle uscite noti gli ingressi e le condizioni iniziali. Distinguiamo tra sistemi multivariabili (MIMO) e scalari (SISO). Un sistema è detto **statico** quando l'uscita al tempo t dipende esclusivamente dall'ingresso al medesimo tempo t. Un **sistema dinamico**, invece, ha uscita dipendente dal segnale di ingresso sull'intervallo $(-\infty, t]$, e ha quindi memoria. Per questi ultimi sistemi introduciamo i concetti di sistema in quiete (*equilibrio*) e sistema in condizioni asintotiche(*stazionarie*).

1.1 Insieme dei behavior

Definiamo ora l'**insieme dei behavior** $\mathcal{B}$ come l'insieme di tutte le possibili coppie causa-effetto associate ad un sistema.

$$\mathcal{B} := (u(t), y(t)) : y(t)$$

è l'uscita del sistema corrispondente all'ingresso $u(t)$, con $u(t)$ e $y(t)$ che tipicamente appartengono agli spazi funzionali delle funzioni continue o differenziabili a tratti. Un sistema è **lineare** se soddisfa la proprietà di sovrapposizione degli effetti.

$$\forall (u_1, y_1), (u_2, y_2) \in \mathcal{B}, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{R} \rightarrow \alpha_1(u_1, y_1) + \alpha_2(u_2, y_2) := (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \in \mathcal{B}$$

Con **stazionario** intendiamo un sistema invariante nel tempo, ossia:

$$(u(t), y(t)) \in \mathcal{B} \rightarrow (u(t-T), y(t-T)) \in \mathcal{B}$$

1.2 Controllo ad azione diretta e retroazione

Vi è, tra le tipologie di controllo, una distinzione importantissima: quella tra i controlli **ad azione diretta** e quelli **in retroazione**. Nel primo, l'azione di comando dipende da: obiettivo perseguito, informazioni sul modello del sistema controllato, ingressi agenti sul sistema controllato. Nel secondo, oltre ai suddetti, vi è l'intervento della **variabile controllata**. In altri termini, l'ingresso dipende anche dall'uscita. Introduciamo poi anche i controlli feedforward/feedback a due/tre gradi di libertà. È utile notare come in sistemi disturbati, in cui cioè abbiamo una perturbazione data dal sistema stesso, il controllo ad azione diretta non la smorza, mentre quello in retroazione riduce l'errore di svariati ordini di grandezza. Bisogna però portare attenzione ai **fenomeni di instabilità** che nascono all'aumentare del guadagno di anello.

2 Modellistica ed equazioni differenziali lineari

2.1 Cenni di modellistica

La **modellistica** è la costruzione dei modelli matematici dei sistemi, a partire da leggi fondamentali o dati sperimentali.

2.1.1 Circuiti elettrici

Citiamo anzitutto alcuni esempi elettrici di leggi fondamentali:

$$\text{Resistenza: } v_R = Ri$$
$$\text{Induttanza: } v_L = L\tfrac{di}{dt} = LDi$$
$$\text{Capacità: } v_c = \tfrac{Q}{C} = \tfrac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \to Dv_c = \tfrac{i}{C}$$

Un circuito RLC diventa quindi

$$v_i = v_L + v_R + v_c v_i(t) = LDi(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$$

Calcoliamo quindi l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$LD^2i + RDi + \frac{1}{C}i = Dv_i$$

Costruiamo il modello matematico orientato da v_i a v_u.

$$LCD^2v_u + RCDv_u + v_u = v_i$$

2.1.2 Sistemi meccanici

Citiamo ora tre sistemi meccanici e le rispettive leggi del moto.

$$\text{Massa: } MD^2x(t) = f_1(t) - f_2(t)$$
$$\text{Molla: } f(t) = K(x_1(t) - x_2(t))$$
$$\text{Ammortizzatore: } f(t) = B(v_1(t) - v_2(t)) \qquad f(t) = BD(x_1(t) - x_2(t))$$

Introduciamo un sistema meccanico vibrante composto dai tre elementi, che avrà quindi equazione da f a x:

$$mD^2x(t) + bDx(t) + kx(t) = f(t)$$

Otteniamo l'equazione differenziale

$$mD^2y + bDy + ky = Df$$

2.1.3 OP-AMP

Citiamo anche i circuiti elettrici con OP-AMP, deducendo

$$R_1CDy + y = -R_2CDu - u$$

2.2 Equazioni differenziali lineari

Le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti possono rappresentare quindi sistemi scalari, generalizzando così:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u$$

Otteniamo così un modello matematico formale del sistema dinamico (orientato) $\Sigma, y =$ variabile d'uscita, $u =$ variabile d'ingresso, $a_n \neq 0, b_m \neq 0$. n è l'ordine dell'eq. differenziale per estensione ordine di Σ, $n \geq m$; $\rho := n - m$ ordine relativo o grado relativo di Σ. Ricollegandoci al concetto di **insieme dei behaviors** $\mathcal{B}$ di Σ, la coppia di segnali $\mathcal{B} := \{(u(t), y(t))$ soddisfa l'equazione differenziale se $u(t)$ e $y(t)$ sono derivabili tante volte quanto necessario.

2.2.1 Proprietà del sistema

Citiamo allora alcune proprietà del sistema. Per le dimostrazioni riferirsi alle slide.

- Il sistema è lineare.
- Il sistema è stazionario.

2.3 Determinazione dei segnali di uscita

Una volta introdotto il sistema, sorge spontaneo un dubbio fondamentale:

Noto il segnale di ingresso $u(t)|_{[0,+\infty]}$ **e le condizioni iniziali** $y(0), Dy(0), ..., D^{n-1}y(0)$
determinare il segnale di uscita $y(t)|_{[0,+\infty]}$

Se avessimo un'equazione omogenea, la soluzione sarebbe immediata. Ma spesso non è così, e ci serve un metodo generale per poter trattare le diverse casistiche. La classe dei segnali che utilizzeremo è C_p^∞, insieme delle funzioni infinitamente derivabili a tratti.

Una funzione appartiene a C_p^∞ se esiste un insieme sparso $\mathcal{S}$ per il quale $f \in C^\infty(\mathbb{R}/S, \mathbb{R})$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $t \in \mathcal{S}$ i limiti $f^{(n)}(t^-)$ e $f^{(n)}(t^+)$ esistono e sono finiti. Quando f è definita in $t \in \mathcal{S}$, convenzionalmente $f(t) := f(t^+)$. In particolare $C^{-1} := C_p^\infty(\mathbb{R})$ definisce l'insieme delle funzioni di classe C^∞ a tratti definite su tutto $\mathbb{R}$

2.3.1 Proprietà di C_p^∞

In generale, sappiamo che $C^k \not\subset C_p^\infty$ e che $C_p^{k,\infty} := C^k \cap C_p^\infty$.

2.3.2 Grado di continuità di una funzione o segnale

Definiamo il grado di continuità di una funzione o segnale:

Se $f \in C_p^{k,\infty}, k$ è il grado di continuità di f.

$$\overline{C_p^{k,\infty}} := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \in C_p^{k,\infty} \wedge f \notin C_p^{k+1,\infty} \right\}$$

Se $f \in \overline{C_p^{k,\infty}}$ allora k è il grado massimo di continuità di f.

2.3.3 Trasformate di Laplace

Il metodo generale proposto per "integrare" l'equazione differenziale di Σ si basa sulla **trasformata di Laplace**, che permette di trasformare un'equazione differenziale in un'equazione algebrica.

3 Cenni di analisi complessa

3.1 Limite di una funzione complessa

Consideriamo una funzione complessa di variabile complessa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} s \to f(s)$. Se $s = \sigma + j\omega$, allora $f(s) = u(\sigma, \omega) + jv(\sigma, \omega)$. Definiamo il limite $lim_{s \to s_0} f(s) = \lambda$ con la classica definizione da Analisi 1:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \rho > 0 \text{ tale che se } s \text{ soddisfa } 0 < |s - s_0| < \rho \to |f(s) - \lambda| < \epsilon$$

3.1.1 Altre proprietà derivate

Data questa definizione, possiamo definire altre proprietà, come la **continuità**: f è continua in $s = s_0$ se $lim_{s \to s_0} f(s) = f(s_0)$. Da qui, $f(s)$ è continua in $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ sse le funzioni reali $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$ sono continue in (σ_0, ω_0). Definiamo poi la **derivabilità**: $f(s)$ è derivabile in $s = s_0$ se esiste il limite

$$lim_{\Delta s \to 0} \frac{f(s_0 + \Delta s) - f(s_0)}{\Delta s}$$

Le regole base di derivabilità dell'analisi rimangono valide. Definiamo l'**analiticità**, ossia, $f(s)$ è analitica/olomorfa in $s = s_0$ se $f(s)$ è derivabile su di un intorno aperto contenente s_0. Infine, definiamo le **condizioni di Cauchy-Riemann**: $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$ soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann se

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\partial v}{\partial \omega} \\ \frac{\partial u}{\partial \omega} = -\frac{\partial v}{\partial \sigma} \end{cases}$$

Teorema Sia $f(s) = u(s) + jv(s)$:

1. Se esiste $f^{(1)}(s_0)$ con $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ allora esistono le derivate parziali di $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$ in (σ_0, ω_0) e soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann

2. Se $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$ e le loro derivate parziali sono continue in (σ_0, ω_0) e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann, allora esiste $f^{(1)}(s_0)$ con $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$

Corollario Sia $f(s) = u(s) + jv(s)$ con $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$ e le loro derivate parziali continue su di un dominio aperto $U \subseteq C$. Allora $f(s)$ è analitica su U se e solo se $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$ soddisfano, su U, le condizioni di Cauchy-Riemann.

Teorema Sia $f(s)$ analitica su di una regione aperta $U \subseteq C$. Allora la derivata $Df(s)$ è anch'essa una funzione analitica su U.

Corollario Se $f(s)$ è analitica sulla regione aperta U, allora $f(s)$ è ivi derivabile indefinitivamente.

3.2 Integrali di linea nel piano complesso

Definiamo innanzitutto l'**integrale**: data una funzione $f(s)$ ed una curva Γ su $\mathbb{C}$ percorsa da s_a a s_b, definiamo $\int_\Gamma f(s) ds \triangleq lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(s_i - s_{i-1})$ dove $s_0, ..., s_n$ è una discretizzazione uniforme della curva Γ.

3.2.1 Calcolo dell'integrale di linea

Sia Γ una curva parametrica di classe C^1.

$$\int_\Gamma f(s)ds = \int_a^b f\left(\Gamma(u)\right)\frac{d\Gamma}{du}du$$

Definiamo una **curva chiusa semplice** come una curva continua tale che $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ e $\Gamma(u_1) \neq \Gamma(u_2) \forall u_1 \neq u_2 \in (a,b)$ Il **teorema di Jordan** afferma che se Γ è una curva chiusa semplice in $\mathbb{C}$ questa suddivide il piano complesso in due regioni distinte, una esterna e una interna. Definiamo un **insieme connesso** se per ogni coppia di punti appartenenti all'insieme esiste una curva continua Γ che li congiunge tutta contenuta in R. È invece detto **semplicemente connesso** se è connesso e per ogni curva chiusa semplice Γ appartenente all'insieme la regione interna di Γ è tutta contenuta in R.

Teorema dell'integrale di Cauchy Sia $f(s)$ una funzione analitica su di una regione aperta e semplicemente connessa U e Γ una curva semplice ivi contenuta. Allora $\oint_\Gamma f(s)ds = 0$.

Corollario Sia $f(s)$ una funzione analitica su di una regione aperta e semplicemente connessa U e Γ una curva ivi contenuta che congiunge s_a ad s_b. Allora l'integrale di linea $\int_\Gamma f(s)ds$ non dipende dal percorso Γ ma solo da s_a, s_b e $f(s)$:

$$\int_\Gamma f(s)ds = \int_{s_a}^{s_b} f(s)ds$$

Teorema - Sviluppo in serie di Taylor Sia $f(s)$ una funzione analitica su di un cerchio $B(s_0, r_0)$ centrato su s_0 e con raggio r_0. Allora $\forall s \in B(s_0, r_0)$

$$f(s) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (s - s_0)^i$$

dove

$$c_i = \frac{f^{(i)(s_0)}}{i!} = \frac{1}{2\pi j}\oint \frac{f(s)}{(s-s_0)^{i+1}}ds$$

Come corollario, otteniamo la **formula integrale di Cauchy**

$$f(s_0) = \frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{f(s)}{s-s_0}ds$$

Teorema - Sviluppo in serie di Laurent Sia $f(s)$ una funzione analitica sul cerchio $B(s_0, r_0)$ ad eccezione del suo centro s_0. Allora $\forall s \in B(s_0, r_0) - \{s_0\}$

$$f(s) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i (s - s_0)^i$$

dove

$$c_i = \frac{f^{(i)(s_0)}}{i!} = \frac{1}{2\pi j}\oint \frac{f(s)}{(s-s_0)^{i+1}}ds$$

3.3 Classificazione del punto isolato s_0

Se $c_i = 0 \forall i \in \mathbb{Z}^-$ definendo $f(s_0) = c_0$ risulta $f(s)$ analitica in $s = s_0$. Se $c_i \neq 0$ per qualche $i \in \mathbb{Z}^-$, s_0 è una singolarità di $f(s)$, detta **singolarità polo** quando i $c_i \neq 0$ sono in numero finito, con $-n = min\{i \in \mathbb{Z}^- : c_i \neq 0\}$ s_0 è polo di ordine n. Invece abbiamo una **singolarità essenziale** quando i $c_i \neq 0$ con $i \in \mathbb{Z}^-$ sono infiniti. Se abbiamo una $f(s)$ analitica in $B(s_0, r_0) - \{s_0\}$, s_0 è una singolarità di $f(s)$ se e solo se $f(s)$ assume valori illimitati in un intorno di s_0. Il **Teorema di Picard** afferma che se abbiamo s_0 singolarità essenziale di $f(s)$, in ogni intorno di s_0 la funzione $f(s)$ assume ogni valore complesso infinite volte con l'eventuale eccezione di un solo particolare valore.

3.3.1 Residui

Data una singolarità s_0, definiamo il **residuo** come il coefficiente c_{-1} dello sviluppo in serie di Laurent.

Teorema dei residui di Cauchy Sia Γ una curva chiusa semplice e $f(s)$ una funzione analitica su Γ e nella sua regione interna ad eccezione dei punti singolari $s_1, ..., s_n$ in essa contenuti, allora

$$\oint_\Gamma f(s)ds = 2\pi j \sum_{i=1}^{n} Res\{f, s_i\}$$

3.3.2 Poli e zeri

Sia s_0 una singolarità polo di $f(s)$. Allora s_0 è polo di ordine n sse esiste $g(s)$ analitica in s_0 con $g(s_0) \neq 0$ tale che

$$f(s) = \frac{g(s)}{(s - s_0)^n}$$

Sia $f(s)$ analitica in z. z è detto **zero** di f se $f(z) = 0$. Considerato lo sviluppo di Taylor $f(s) = c_1(s - z) + \dots$ ed $n := min\{i \in \mathbb{N} : c_i \neq 0\}$, z è detto zero di ordine n di $f(s)$. È detto tale se e solo se esiste $g(s)$ analitica in z con $g(z) \neq 0$ tale che $f(s) = (s - z)^n g(s)$. Ricaviamo un'ultima proprietà: se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ha una singolarità polare in p di ordine n allora

$$Res\{f, p\} = \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1} \left(f(s)(s-p)^n \right) |_{s=p}$$

3.4 Continuazione analitica

Data una funzione $f(s)$ definita da uno sviluppo in serie di Taylor su di un cerchio $B_0(s_0, r_0)$ è possibile estendere/continuare la definizione di $f(s)$ all'esterno di B_0 mediante lo sviluppo in serie di Taylor di altri punti di B_0. Il procedimento è ricorsivo. Possono anche emergere funzioni a più valori!

4 La trasformata di Laplace

La **trasformata di Laplace** è un operatore funzionale che converte un'equazione differenziale in un'equazione algebrica, permettendo di risolvere anche equazioni differenziali lineari con condizioni iniziali arbitrarie. Permette inoltre di analizzare i fenomeni transitori ed asintotici di una grande varietà di sistemi. Si applica ad una funzione f di variabile reale con codominio $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Assumiamo ora $f \in \mathbb{C}_p^\infty(\mathbb{R})$, sappiamo che $\exists \sigma \in \mathbb{R}$ per il quale $\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < +\infty$. Se vale quest'ultima condizione, allora $\forall \sigma_1 > \sigma : \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < +\infty$. Definiamo l'**ascissa di convergenza** di $f(t)$ come

$\sigma_c := inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt \right\}$ Spesso assumeremo $f(t) = 0$ per $t < 0$. Volendo ora dare una definizione rigorosa della trasformata,

La trasformata di Laplace di un segnale (funzione) $f(t)$ è la funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ definita da

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

per i valori $s \in \mathbb{C}$ per i quali l'integrale converge.

Notiamo alcune cose:

- F è una funzione complessa di variabile complessa, $\mathcal{L}[\dot{}]$ indica l'operatore di Laplace.
- La notazione usuale prevede che le lettere minuscole denotino segnali e funzioni, le corrispondenti maiuscole le loro trasformate.

4.1 Proprietà della trasformata

4.1.1 Analitica

La trasformata $F(s)$ è una funzione analitica sul semipiano $\{s \in \mathbb{C} : Res > \sigma_c\}$

4.1.2 Coniugato

Denotando il coniugato con , $\overline{F(s)} = F(\overline{s})$

4.1.3 Linearità

La trasformata di Laplace è un operatore lineare: per ogni segnale $f_1(t)$ e $f_2(t)$ e per ogni scalare c_1 e c_2:

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$$

4.1.4 Iniettività

La trasformata di Laplace è **iniettiva**:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)] \rightarrow f(t) = g(t) \text{ su } [0, +\infty)$$

È quindi ben definita la trasformata inversa.

4.2 La trasformata inversa di Laplace

Sia $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ allora, per ogni $\sigma_0 > \sigma_c$

$$\mathcal{L}^{-1} \rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

4.3 Trasformate notevoli

4.3.1 Trasformata della derivata

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}_{>0})$ segue

$$\mathcal{L}[Df(t)] = sF(s) - f(0+)$$

Generalizzando per gli ordini superiori, otteniamo

$$\mathcal{L}[D^i f] = s^i F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-1-j} f_+$$

4.3.2 Trasformata dell'integrale

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(v)dv\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

4.4 Teoremi e gotchas

4.4.1 Teorema del valore finale

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ con f e Df aventi ascisse di convergenza non positive. Se esiste il limite $lim_{t\to+\infty}f(t)$ vale

$$lim_{t\to+\infty}f(t) = lim_{s\to0}sF(s)$$

4.4.2 Teorema del valore iniziale

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$. Se esiste il limite $lim_{s\to+\infty}sF(s)$ vale

$$f(0+) = lim_{s\to+\infty}sF(s)$$

4.4.3 Traslazione nel tempo

Per ogni $t_0 \geq 0$ vale

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)\cdot 1(t-t_0)] = e^{-t_0 s}F(s)$$

4.4.4 Traslazione nella variabile complessa s

Per ogni $a \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ vale

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}f(t)] = F(s-a)$$

4.4.5 Teorema di convoluzione

Si abbia $f(t) = g(t) = 0$ per $t < 0$. La convoluzione dei segnali f e g, spesso indicata come $f * g$, è il segnale

$$\int_0^t f(v)g(t-v)dv$$

rappresentabile anche come $f * g = g * f$

$$\int_0^t g(v)f(t-v)dv$$

La trasformata della convoluzione è

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(v)g(t-v)dv\right] = F(s)G(s)$$

4.5 Antitrasformazione di funzioni razionali

Per antitrasformare le funzioni razionali, sfruttiamo il **metodo dei fratti semplici**, ossia scomponiamo il denominatore in poli semplici e poi cerchiamo i k_i:

$$F(s) = \frac{k_1}{(s-p_1)} + \frac{k_2}{(s-p_2)} + ... + \frac{k_n}{(s-p_n)}$$

Con i k_i rappresentanti il residuo di $F(s)$ in p_i, e pari a

$$k_i = (s-p_i)F(s)|_{s=p_i}$$

Ottenendo

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{p_i t}$$

4.6 Trasformate notevoli

Citiamo infine altre due trasformate notevoli:

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-a}$$

5 Le funzioni impulsive e l'insieme dei behaviors

Consideriamo anzitutto un sistema dinamico Σ descritto da $Dy(t) + 2y(t) = 2Du(t) + 2u(t)$ ed assumiamo che per i tempi negativi sia $y(t) = e^{-2t}$ e $u(t) = 0$ con $t < 0$. Questa coppia di funzioni soddisfa l'eq. differenziale

$$Dy(t) = -2e^{-2t} \rightarrow (-2e^{-2t}) + 2(e^{-2t}) = 0 \forall t < 0$$

Quindi:

$$\left(0, e^{-2t}\right)|_{(-\infty,0)} \in \mathcal{B}$$

Introduciamo ora nel sistema una azione forzante $u(t) = 1$ per $t \geq 0$. Quindi $u(t) = 1(t) \forall t \in \mathbb{R}$. Vogliamo determinare $y(t)$ per $t \geq 0$. Non possiamo però definire l'insieme dei behaviors eseguendo la trasformata di Laplace sull'equazione differenziale: otterremmo una soluzione valida per qualsiasi valore del parametro y_+, che sarebbe assurdo. L'insieme dei behaviors **errato** che si genera sarebbe così fatto:

$$\mathcal{B} = \left\{(u(t), y(t)) \in C_p^{\infty}(\mathbb{R})^2 : Dy + 2y = 2Du + 2u \forall t \in \mathbb{R} - \{t_1, t_2, ...\}\right\}$$

Osserviamo però, che dato $C_p^{1,\infty} = C^1 \cap C_p^{\infty}$:

$$\left\{(u(t), y(t)) \in (C_p^{1,\infty})^2 : Dy + 2y = 2Du + 2u \forall t \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathcal{B}$$

Per risolvere l'impasse, definiamo l'azione forzante come

$$u(t) := \begin{cases} 0 \text{ per } t < 0 \\ 3\frac{t^2}{\tau^2} - 2\frac{t^3}{\tau^3} \text{ per } t \in [0, \tau) \\ 1 \text{ per } t \geq \tau \end{cases} \quad \rightarrow u(t) \in C_p^{1,\infty} \forall \tau > 0$$

Assumendo $y(t) \in C_p^{\infty}$ segue $y(0-) = y(0+) = 1$. Possiamo quindi determinare $y(t)$ con le condizioni iniziali al tempo 0+: $u(0+) = 0$ e $y(0+) = 1$. Portando $\tau \rightarrow 0+$ otteniamo la soluzione desiderata. Ma se la volessimo senza dover applicare tutte le volte questo metodo di smoothing? Osserviamo che quando $\tau \rightarrow 0+$, $Du(t)$ in un intorno dell'origine diverge all'infinito. $Du(t) = 6\frac{t}{\tau^2} - 6\frac{t^2}{\tau^3}$ per $t \in [0, \tau] \rightarrow max_{t \in [0,\tau]} Du(t) = Du(t)|_{t=\frac{\tau}{2}} = \frac{3}{2\tau}$. Insomma, $Du(t)$ converge ad una funzione impulsiva (distribuzione) detta **delta di Dirac** $\delta(t)$.

5.1 Cenni di teoria delle funzioni impulsive

La funzione impulsiva più semplice è il gradino unitario $1(t)$:

$$1(t) := \begin{cases} 0 \text{ per } t < 0 \\ 1 \text{ per } t \geq 0 \end{cases}$$

Introduciamo $f(t < \tau) \in C_p^{0,\infty}$:

$$f(t : \tau) := \begin{cases} 0 \text{ per } t < 0 \\ \frac{1}{\tau} t \text{ per } 0 \leq \leq \tau \\ 1 \text{ per } t > \tau \end{cases}$$

$lim_{\tau \to 0+} f(t : \tau) = 1(t)$. La derivata di questa funzione sarà ovviamente pari a 0 per $t < 0$ e $t \geq \tau$:

$$Df(t;\tau) = \begin{cases} 0 \text{ per } t < 0 \\ \frac{1}{\tau} \text{ per } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 \text{ per } t \geq \tau \end{cases}$$

Notiamo altresì che $lim_{\tau \to 0+} Df(t;\tau)$ è proprio la delta di Dirac! $\delta(t)$ è una distribuzione, o, più informalmente, una funzione impulsiva. È la **derivata generalizzata** del gradino unitario $\delta(t) := D^* 1(t)$. D^* è proprio l'operatore della derivata generalizzata: è un operatore lineare come D. Più precisamente, D^* è la derivata in senso distribuzionale. Sappiamo inoltre che, assumendo $t_a < T < t_b$

$$\int_{t_a}^{t_b} \delta(t - T) dt = 1 \quad \int_{t_a}^{t_b} f(t) \delta(t - T) dt = f(T)$$

Introduciamo le derivate generalizzate di $\delta(t)$:

$$D^{*i} \delta(t) \text{è la derivata generalizzata di ordine i della delta } =: \delta^{(i)}(t)$$

Possiamo costruire $\delta^{(1)}(t)$ mediante limite di una funzione continua a tratti:

$$1(t) = lim_{\tau \to 0+} f(t;\tau) \quad \delta(t) := D^* 1(t) = lim_{\tau \to 0+} Df(t;\tau)$$

$$\delta^{(1)}(t) := D^* \delta(t) = lim_{\tau \to 0+} D^2 f(t;\tau)$$

Questo metodo si può estendere per mostrare il significato di $\delta^{(i)}(t), i > 1$.

5.2 Derivate generalizzate di una funzione discontinua

Ipotizziamo $f \in C_p^\infty(\mathbb{R})$ e sia $t = 0$ l'unico istante di discontinuità:

$$g(t) := \begin{cases} f(t) \text{ per } t < 0 \\ f(t) - (f_+ - f_-) \text{ per } t \geq 0 \end{cases} \quad g(t) \in C_p^{0,\infty}$$

Ottenendo

$$g(t) = f(t) - (f_+ - f_-) 1(t)$$

ovvero, una funzione discontinua è pari a una funzione continua + una funzione a gradino. Derivando in senso usuale otteniamo $Df(t) = Dg(t) \forall t \neq 0$. Assumiamo ora che la derivata generalizzata di una funzione continua sia $D^* g(t) := Dg(t^+)$. Applicando l'operatore D^* otteniamo

$$D^* f(t) = Df(t^+) + (f_+ - f_-) \delta(t)$$

Ossia, derivata gen. di ordine 1 = funzione discontinua + funzione impulsiva (di ordine 0). La funzione discontinua $Df(t^+)$ può essere scomposta nella somma di una funzione continua più una funzione a gradino:

$$\text{derivata gen. di ordine 1} = \text{f. continua} + \text{f. a gradino} + \text{f. impulsiva di ordine 0.}$$

Applicando la derivata generalizzata alla relazione che esprime $D^*f(t)$, otteniamo

$$D^{*2}f(t) = Dg_1(t^+) + (Df_+ - Df_-)\delta(t) + (f_+ - f_-)\delta^{(1)}(t)$$

Iterando il tutto per generalizzare, otterremo

$$D^{*n}f(t) = D^nf(t^+) + (D^{n-1}f_+ - D^{n-1}f_-)\delta(t) + ... + (f_+ - f_-)\delta^{(n-1)}(t)$$

Che, con $t < 0$ o $t > 0$ è $D^{*n}f(t) = D^nf(t)$, mentre con $t = 0$ è $D^{*n}f(0) = (D^{n-1}f_+ - D^{n-1}f_-)\delta(0) + ... + (f_+ - f_-)\delta^{(n-1)}(0)$. Più in generale: $f \in C_p^\infty(\mathbb{R})$ con $t_1, t_2, ...$ istanti di possibile discontinuita:

$$D^{*n}f(t) = D^nf(t^+) +$$
$$\left(D^{n-1}(t_1^+) - D^{n-1}(t_1^-)\right)\delta(t - t_1) + ... + \left(f(t_1^+) - f(t_1^-)\right)\delta^{(n-1)}(t - t_1) +$$
$$\left(D^{n-1}(t_2^+) - D^{n-1}(t_2^-)\right)\delta(t - t_2) + ... + \left(f(t_2^+) - f(t_2^-)\right)\delta^{(n-1)}(t - t_2) + \dots$$

5.3 Principio di identità delle funzioni impulsive

Le funzioni impulsive

$$c_{-1} + c_0\delta(0) + c_1\delta^{(1)}(0) + \dots + c_k\delta^{(k)}(0)$$

e

$$d_{-1} + d_0\delta(0) + d_1\delta^{(1)}(0) + \dots + d_k\delta^{(k)}(0)$$

sono uguali fra loro sse $c_0 = d_0, \dots, c_k = d_k$. Ritornando all'esempio iniziale, quindi, l'eq. differenziale di Σ interpretata in senso distribuzionale

$$D^*y(t) + 2y(t) = 2D^*u(t) + 2u(t)$$

deve essere soddisfatta per ogni $t \in \mathbb{R}$ compresi gli istanti di discontinuità.

5.4 Insieme dei behaviors

Dato un insieme dinamico Σ descritto dall'eq. differenziale

$$\sum_{i=0}^{n} a_iD^iy = \sum_{i=0}^{m} b_iD^iu$$

si definisce insieme dei behaviors di Σ

$$\mathcal{B} := \left\{(u, y) \in C_p^\infty(\mathbb{R})^2 : \sum_{i=0}^{n} a_iD^{*i}y = \sum_{i=0}^{m} b_iD^{*i}u\right\}$$

L'equazione differenziale è soddisfatta in senso distribuzionale per ogni $t \in \mathbb{R}$. Se abbiamo $t = 0$ istante di discontinuità emergono le condizioni al tempo $0-$ e $0+$. Le relazioni fra i valori al tempo $0+$ $(y_-, Dy_-, \dots, D^{n-1}y_-; u_- \dots)$ e quelli al tempo $0+$ $(y_+, Dy_+, \dots, D^{n+1}y_+; u_+ \dots)$ sono determinabili eguagliando le espressioni impulsive dell'eq. differenziale al tempo $t = 0$.

5.4.1 Proprietà

Sia $(u(t), y(t)) \in \mathcal{B}$ con $u(t)$ funzione discontinua. Se $\rho = 0$ allora anche l'uscita $y(t)$ è una funzione discontinua. Se $\rho \geq 1$ allora $y(t) \in \overline{C_p^{\rho-1,\infty}}$.
Otteniamo anche una proprietà che definisce la relazione tra i gradi di continuità dell'ingresso e dell'uscita: sia $(u(t), y(t)) \in \mathcal{B}$ e $l \in \mathbb{N}$. Allora

$$u(t) \in C_p^{l,\infty} \Leftrightarrow y(t) \in C_p^{\rho+l,\infty}, \quad u(t) \in \overline{C_p^{l,\infty}} \Leftrightarrow y(t) \in \overline{C_p^{\rho+l,\infty}}$$

6 La funzione di trasferimento

Definiamo anzitutto lo spazio delle sequenze impulsive $\mathcal{I}^*$:

$$\mathcal{I}^* \triangleq \left\{ d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^* : d(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{r_i} c_{ij} \delta^{(j)}(t - t_i), c_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

Estensione distribuzionale delle funzioni derivabili a tratti: $C_p^\infty(\mathbb{R})^* \triangleq C_p^\infty(\mathbb{R}) + \mathcal{I}^*$.

6.1 La trasformata della derivata generalizzata

Tenendo conto del solo istante di discontinuità in $t = 0$, otteniamo, data $f \in C_p^\infty(\mathbb{R})(C_p^\infty(\mathbb{R})^*)$, segue

$$\mathcal{L}[D^* f(t)] = sF(s) - f(0-)$$

Per ottenere le derivate generalizzate di ordine superiore:

$$\mathcal{L}[D^{*i} f] = s^i F(s) - s^{i-1} f_- - s^{i-2} D f_- - \cdots - s D^{i-2} f_- - D^{i-1} f_-$$

6.2 Estensione dell'insieme dei behaviors

Dato un sistema dinamico Σ descritto dall'eq. differenziale

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y = \sum_{i=0}^{m} b_i u$$

si definisce estensione impulsiva dei behaviors o **behavior esteso**

$$\mathcal{B}^* := \left\{ (u, y) \in C_p^\infty(\mathbb{R})^* \times C_p^\infty(\mathbb{R})^* : \sum_{i=0}^{n} a_i D^{*i} y = \sum_{i=0}^{m} b_i D^{*i} u \right\}$$

Ancora l'equazione differenziale è soddisfatta in senso distribuzionale per ogni $t \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$$

6.2.1 Proprietà

- Sia $(u, y) \in \mathcal{B}^*$, segue $(D^* u, D^* y) \in \mathcal{B}^*$.
- Proprietà della coppia azione forzante-risposta forzata: sia $(u, y) \in \mathcal{B}^*$ con $u(t)$ azione forzante e $y(t)$ risposta forzata. Segue

$$\left(\int_{0-}^{t} u(v) dv, \int_{0-}^{t} y(v) dv \right) \in \mathcal{B}^*$$

6.3 Il problema fondamentale dell'analisi del dominio nel tempo di un sistema Σ

Note le condizioni iniziali al tempo $0-$ $y_-, Dy_-, ..., D^{n-1}y_-$ e $u_-, Du_-, \ldots, D^{m-1}u_-$ e l'azione forzante $u(t), t \geq 0$, vogliamo determinare la risposta $y(t), t \geq 0$. Risolviamo quindi l'equazione differenziale di Σ

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^{*i} y(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i D^{*i} u(t)$$

Applicando la trasformata di Laplace. Otterremmo una soluzione $y(t) = y_{for.}(t) + y_{lib.}(t), t \geq 0$, ossia un'uscita composta da risposta forzata di Σ all'azione forzante, e una risposta (evoluzione) libera di Σ.

6.4 Funzione di trasferimento

Definiamo ora la funzione di trasferimento di un sistema la funzione di variabile complessa $G(s)$ per la quale è valida la relazione

$$\mathcal{L}[y(t)] = G(s)\mathcal{L}[u(t)]$$

$\forall(u(t), y(t)) \in \mathcal{B}$ con $u(t) = 0, y(t) = 0$ per $t < 0$. Abbiamo quindi ottenuto un modello matematico alternativo all'eq. differenzialie:

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

Se le condizioni iniziali sono tutte nulle (sistema in quiete per $0-$), $Y(s) = G(s)U(s) \rightarrow Y_{for.}(s) = G(s)U(s)$ (trasformata della risposta forzata). Sia $g(t) := \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ con $g(t) = 0, t < 0 : g(t)$ è la **risposta all'impulso** a partire da una condizione di quiete $(\delta(t), g(t)) \in \mathcal{B}^*$. Dal teorema di convoluzione sappiamo che $y_{for.}(t) = \int_0^t g(t-v)u(v)dv$. Otteniamo quindi la **soluzione generale dell'equazione differenziale** $(t \geq 0)$:

$$y(t) = \int_0^t g(t-v)u(v)dv + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_- s^j - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_- s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right]$$

6.5 Definizioni

6.5.1 Proprio

Un sistema Σ si dice **(strettamente) proprio** se la sua funzione di trasferimento è **(strettamente) propria**. Quindi, con $n \geq m(\rho \geq 0)$ abbiamo Σ proprio, se $n > m(\rho \geq 1)$ strettamente proprio.

6.5.2 Guadagno statico

Definiamo il **guadagno statico di** Σ come il rapporto fra il valore costante dell'uscita e il valore costante dell'ingresso ($\neq 0$) quando Σ è all'equilibrio:

$$K := \frac{y_c}{u_c} \text{ con } (u_c, y_c) \in \mathcal{B} \text{ e } u_c \neq 0$$

Dall'equazione differenziale otteniamo $K = \frac{b_0}{a_0} \rightarrow K = G(0)$.

6.5.3 Polinomio caratteristico di Σ

Dato il sistema Σ descritto dall'eq. differenziale $\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u$, il polinomio $a(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i$ è detto polinomio caratteristico di Σ. È utile notare che esso è il polinomio a denominatore della funzione di trasferimento.

6.5.4 Poli e zeri

I poli e zeri di Σ sono i poli e gli zeri della funzione di trasferimento.

6.5.5 Modi del sistema dinamico Σ

I **modi** sono le funzioni "tipiche" associate ai poli di Σ secondo la regola:

Se p è un polo reale di molteplicità h: $e^{pt}, te^{pt}, \ldots, t^{h-1}e^{pt}$

Se $\sigma + j\omega$ è una coppia di poli complessi coniugati di molteplicità h:
$e^{\sigma t}sen(\omega t + \phi_1), te^{\sigma t}sen(\omega t + \phi_2), \ldots, t^{h-1}e^{\sigma t}sen(\omega t + \phi_h)$ oppure equivalentemente
$e^{\sigma t}sen(\omega t), e^{\sigma t}cos(\omega t), te^{\sigma t}sen(\omega t), te^{\sigma t}cos(\omega t), \ldots, t^{h-1}e^{\sigma t}sen(\omega t), t^{h-1}e^{\sigma t}cos(\omega t)$

6.5.6 Risposta libera e modi di Σ

Sia Σ un sistema per il quale i poli coincidono con le radici del polinomio caratteristico ($a(s)$ e $b(s)$ coprimi fra loro). Allora la risposta libera è una combinazione lineare dei suoi modi.

6.5.7 Razionalità

Non tutti i sistemi dinamici lineari e stazionari sono caratterizzati da funzioni di trasferimento razionali. Un esempio è il ritardo finito.

6.5.8 Segnali tipici per l'ingresso di Σ

Alcuni segnali tipici di ingresso:

- $\delta(t)$ impulso unitario (delta di Dirac): $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$
- $1(t)$ gradino unitario: $\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$
- $t \cdot 1(t)$ rampa unitaria: $\mathcal{L}[t \cdot 1(t)] = \frac{1}{s^2}$
- $\frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)$ parabola unitaria: $\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)\right] = \frac{1}{s^3}$

6.5.9 Risposta canonica

La risposta canonica è la risposta forzata di Σ a un segnale tipico di ingresso. Quelle usualmente adottate sono $g(t)$, la risposta all'impulso, detta anche **risposta impulsiva**, e $g_s(t)$, la risposta al gradino $1(t)$ detta **risposta indiciale**. Sappiamo inoltre che

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] \quad g_s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}G(s)\right]$$

Una proprietà interessante è che

$$\int_{0-}^{t} g(v)dv = g_s(t) \quad g(t) = D^* g_s(t)$$

Per i sistemi strettamente propri, $g(t) = Dg_s(t^+)$.

6.5.10 Integrali di Vaschy

Nota la risposta al gradino $g_s(t)$, la risposta forzata $y_{for}(t), t \geq 0$ effetto dell'azione forzante $u(t), t \geq 0$ è determinabile come

$$y_{for}(t) = \int_0^t u'(v) g_s(t-v) dv + u(0+) g_s(t)$$

$$y_{for}(t) = \int_0^t g_s(v) u'(t-v) dv + u(0+) g_s(t)$$