Trasformate zeta fondamentali

Simone Montali - monta.li

10 giugno 2020

1 Trasformate zeta fondamentali

1.1 Trasformata di un segnale ritardato di n passi

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x(k-n)] =& z^{-n}\mathcal{Z}[x(k)] + \sum_{k=0}^{n-1} x(k-n)z^{-k} \\ &= z^{-n}\mathcal{Z}[x(k)] + x(-n) + x(-n+1)z^{-1} + \cdots + x(-1)z^{-n+1}\end{aligned}$$

Se le condizioni iniziali sono nulle, ovviamente:

$$\mathcal{Z}[x(k-n)1(k-n)] = z^{-n}\mathcal{Z}[x(k)]$$

1.2 Trasformata di un segnale anticipato di n passi

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x(k+n)] &= z^{n}\mathcal{Z}[x(k)] - \sum_{i=0}^{n-1} x(i)z^{n-i} \\ &= z^{n}\mathcal{Z}[x(k)] - x(0)z^{n} - x(1)z^{n-1} - \cdots - x(n-1)z\end{aligned}$$

1.3 Teorema del valore iniziale

$$x(0) = \lim_{z\to+\infty} \mathcal{Z}[x(k)]$$

1.4 Teorema del valore finale

$$\lim_{k\to+\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)\mathcal{Z}[x(k)]$$

1.5 Trasformata zeta di $a^k x(k)$

$$\mathcal{Z}\left[a^k x(k)\right] = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

1.6 Convoluzione

$$x * y = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(k-i)y(i)$$

1.7 Gradino, rampa, parabola

$$\mathcal{Z}[1(k)] = \frac{z}{z-1}, \mathcal{Z}[k1(k)] = \frac{z}{(z-1)^2}, \mathcal{Z}\left[k^2 1(k)\right] = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

2 Antitrasformate zeta

2.1 Metodo dei fratti semplici

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^n}\right] = \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!} a^{k-n} 1(k-1) = \left(\begin{array}{c} k-1 \\ n-1 \end{array}\right) a^{k-n} 1(k-1)$$

2.2 Casi particolari

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z-a}\right] = a^{k-1} \cdot 1(k-1) & \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\right] = a^{k} \cdot 1(k) \\
\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^2}\right] = (k-1)a^{k-2} \cdot 1(k-1) & \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-a)^2}\right] = k a^{k-1} \cdot 1(k) \\
\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^3}\right] = \frac{(k-1)(k-2)}{2} a^{k-3} \cdot 1(k-1) & \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-a)^3}\right] = \frac{k(k-1)}{2} a^{k-2} \cdot 1(k)
\end{array}$$

2.3 Complessi coniugati

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[c\frac{z}{z-p} + \bar{c}\frac{z}{z-\bar{p}}\right] = 2|c||p|^k \cos[\arg(p)k + \arg(c)] \cdot 1(k)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[(a+jb)\frac{z}{z-p} + (a-jb)\frac{z}{z-\bar{p}}\right] = 2|p|^k\{a\cos[\arg(p)\cdot k] - b\sin[\arg(p)\cdot k]\} \cdot 1(k)$$