

Fondamenti di Controlli Automatici

Simone Montali - monta.li

28 marzo 2020

1 Il controllo attivo di un processo

Innanzitutto definiamo due termini fondamentali per la materia: un **processo** è l'evoluzione nel tempo di ciò che caratterizza un sistema. Con **controllo attivo** intendiamo una strategia di controllo che prevede un'azione di comando esercitata sul processo. Il controllo attivo risolve il problema di imporre una modalità di funzionamento desiderato ad un processo: l'obiettivo è che una variabile del processo coincida con una preassegnata. Parliamo di **regolazione** quando l'ingresso è costante, di **asservimento** quando l'ingresso è variabile. Un **sistema** è un complesso, normalmente composto da più elementi interconnessi, in cui si possono distinguere grandezze soggette a variare nel tempo (variabili). Un **segnale** è una funzione che rappresenta l'andamento delle variabili nel tempo. Distinguiamo queste ultime in indipendenti (ingressi) e dipendenti (uscite). Arriviamo così al concetto di **sistema orientato**. Un **modello matematico** è la descrizione di un sistema che permette di determinare i segnali delle uscite noti gli ingressi e le condizioni iniziali. Distinguiamo tra sistemi multivariabili (MIMO) e scalari (SISO). Un sistema è detto **statico** quando l'uscita al tempo t dipende esclusivamente dall'ingresso al medesimo tempo t . Un **sistema dinamico**, invece, ha uscita dipendente dal segnale di ingresso sull'intervallo $(-\infty, t]$, e ha quindi memoria. Per questi ultimi sistemi introduciamo i concetti di sistema in quiete (*equilibrio*) e sistema in condizioni asintotiche (*stazionarie*).

1.1 Insieme dei behavior

Definiamo ora l'**insieme dei behavior** \mathcal{B} come l'insieme di tutte le possibili coppie causa-effetto associate ad un sistema.

$$\mathcal{B} := (u(t), y(t)) : y(t)$$

è l'uscita del sistema corrispondente all'ingresso $u(t)$, con $u(t)$ e $y(t)$ che tipicamente appartengono agli spazi funzionali delle funzioni continue o differenziabili a tratti. Un sistema è **lineare** se soddisfa la proprietà di sovrapposizione degli effetti.

$$\forall (u_1, y_1), (u_2, y_2) \in \mathcal{B}, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{R} \rightarrow \alpha_1(u_1, y_1) + \alpha_2(u_2, y_2) := (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \in \mathcal{B}$$

Con **stazionario** intendiamo un sistema invariante nel tempo, ossia:

$$(u(t), y(t)) \in \mathcal{B} \rightarrow (u(t - T), y(t - T)) \in \mathcal{B}$$

1.2 Controllo ad azione diretta e retroazione

Vi è, tra le tipologie di controllo, una distinzione importantissima: quella tra i controlli **ad azione diretta** e quelli **in retroazione**. Nel primo, l'azione di comando dipende da: obiettivo perseguito, informazioni

sul modello del sistema controllato, ingressi agenti sul sistema controllato. Nel secondo, oltre ai suddetti, vi è l'intervento della **variabile controllata**. In altri termini, l'ingresso dipende anche dall'uscita. Introduciamo poi anche i controlli feedforward/feedback a due/tre gradi di libertà. È utile notare come in sistemi disturbati, in cui cioè abbiamo una perturbazione data dal sistema stesso, il controllo ad azione diretta non la smorza, mentre quello in retroazione riduce l'errore di svariati ordini di grandezza. Bisogna però portare attenzione ai **fenomeni di instabilità** che nascono all'aumentare del guadagno di anello.

2 Modellistica ed equazioni differenziali lineari

2.1 Cenni di modellistica

La **modellistica** è la costruzione dei modelli matematici dei sistemi, a partire da leggi fondamentali o dati sperimentali.

2.1.1 Circuiti elettrici

Citiamo anzitutto alcuni esempi elettrici di leggi fondamentali:

$$\begin{aligned}\text{Resistenza: } v_R &= Ri \\ \text{Induttanza: } v_L &= L \frac{di}{dt} = LDi \\ \text{Capacità: } v_c &= \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \rightarrow Dv_c = \frac{i}{C}\end{aligned}$$

Un circuito RLC diventa quindi

$$v_i = v_L + v_R + v_c v_i(t) = LDi(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

Calcoliamo quindi l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$LD^2i + RDi + \frac{1}{C}i = Dv_i$$

Costruiamo il modello matematico orientato da v_i a v_u .

$$LCD^2v_u + RCDv_u + v_u = v_i$$

2.1.2 Sistemi meccanici

Citiamo ora tre sistemi meccanici e le rispettive leggi del moto.

$$\begin{aligned}\text{Massa: } MD^2x(t) &= f_1(t) - f_2(t) \\ \text{Molla: } f(t) &= K(x_1(t) - x_2(t)) \\ \text{Ammortizzatore: } f(t) &= B(v_1(t) - v_2(t)) \quad f(t) = BD(x_1(t) - x_2(t))\end{aligned}$$

Introduciamo un sistema meccanico vibrante composto dai tre elementi, che avrà quindi equazione da f a x :

$$mD^2x(t) + bDx(t) + kx(t) = f(t)$$

Otteniamo l'equazione differenziale

$$mD^2y + bDy + ky = Df$$

2.1.3 OP-AMP

Citiamo anche i circuiti elettrici con OP-AMP, deducendo

$$R_1 CDy + y = -R_2 CDu - u$$

2.2 Equazioni differenziali lineari

Le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti possono rappresentare quindi sistemi scalari, generalizzando così:

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$$

Otteniamo così un modello matematico formale del sistema dinamico (orientato) Σ , y = variabile d'uscita, u = variabile d'ingresso, $a_n \neq 0, b_m \neq 0$. n è l'ordine dell'eq. differenziale per estensione ordine di Σ , $n \geq m$; $\rho := n - m$ ordine relativo o grado relativo di Σ . Ricollegandoci al concetto di **insieme dei behaviors** \mathcal{B} di Σ , la coppia di segnali $\mathcal{B} := \{(u(t), y(t))\}$ soddisfa l'equazione differenziale se $u(t)$ e $y(t)$ sono derivabili tante volte quanto necessario.

2.2.1 Proprietà del sistema

Citiamo allora alcune proprietà del sistema. Per le dimostrazioni riferirsi alle slide.

- Il sistema è lineare.
- Il sistema è stazionario.

2.3 Determinazione dei segnali di uscita

Una volta introdotto il sistema, sorge spontaneo un dubbio fondamentale:

Noto il segnale di ingresso $u(t)|_{[0,+\infty]}$ e le condizioni iniziali $y(0), Dy(0), \dots, D^{n-1}y(0)$ determinare il segnale di uscita $y(t)|_{[0,+\infty]}$

Se avessimo un'equazione omogenea, la soluzione sarebbe immediata. Ma spesso non è così, e ci serve un metodo generale per poter trattare le diverse casistiche. La classe dei segnali che utilizzeremo è C_p^∞ , insieme delle funzioni infinitamente derivabili a tratti.

Una funzione appartiene a C_p^∞ se esiste un insieme sparso \mathcal{S} per il quale $f \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathcal{S}, \mathbb{R})$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $t \in \mathcal{S}$ i limiti $f^{(n)}(t^-)$ e $f^{(n)}(t^+)$ esistono e sono finiti. Quando f è definita in $t \in \mathcal{S}$, convenzionalmente $f(t) := f(t^+)$. In particolare $C^{-1} := C_p^\infty(\mathbb{R})$ definisce l'insieme delle funzioni di classe C^∞ a tratti definite su tutto \mathbb{R}

2.3.1 Proprietà di C_p^∞

In generale, sappiamo che $C^k \not\subset C_p^\infty$ e che $C_p^{k,\infty} := C^k \cap C_p^\infty$.

2.3.2 Grado di continuità di una funzione o segnale

Definiamo il grado di continuità di una funzione o segnale:

$$\begin{aligned} &\text{Se } f \in C_p^{k,\infty}, k \text{ è il grado di continuità di } f. \\ \overline{C_p^{k,\infty}} &:= \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \in C_p^{k,\infty} \wedge f \notin C_p^{k+1,\infty} \right\} \end{aligned}$$

Se $f \in \overline{C_p^{k,\infty}}$ allora k è il grado massimo di continuità di f .

2.3.3 Trasformate di Laplace

Il metodo generale proposto per "integrare" l'equazione differenziale di Σ si basa sulla **trasformata di Laplace**, che permette di trasformare un'equazione differenziale in un'equazione algebrica.