TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

LIMITES = Lim

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

→ Forma general de escribir el límite

→ Se lee limite cuando equis tiende a equis subcero de efe de equis es igual a ele

Función en estudio

$$\lim_{X \to X_0} f(x) = L$$

→ valor hallado

Variable en estudio → X

X_0 → Valor donde se evalúa la función

→ Tiende a

TEOREMAS BÁSICOS

1. Limite de una constante

$$\lim_{x \to x_0} C = C$$

→ Donde C es una constante es decir un valor cualquiera distinto a la variable en estudio.

Ejemplo:

$\lim_{x \to 3} 2 = 2$; $\lim_{x \to -1} 5 = 5$; $\lim_{x \to 0} 1 = 1$

2. Limite de la variable

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0$$

Ejemplo:

$\lim_{x \to -1} x = -1$; $\lim_{x \to 15} x = 15$; $\lim_{x \to a} x = a$

Ahora si tenemos

$$\lim_{x \to 2} x^2 + 3x + 1 = (2)^2 + 3(2) + 1$$
$$= 4 + 6 + 1$$
$$\boxed{= 11}$$

Se evalúa la función que consiste en sustituir el 2 donde va la variable "x" y se concluye de esta forma

$$\boxed{\therefore \lim_{x \to 2} x^2 + 3x + 1 = 11}$$

$\therefore \longrightarrow$ Significa por lo tanto, desde luego, entonces

LIMITES INDETERMINADOS DE LA FORMA CERO SOBRE CERO $\frac{0}{0}$

5 pasos básicos

1. Se evalúa el límite si resulta cero sobre cero; hay que levantar la indeterminación
2. ¿Como se levanta la indeterminación? Aplicando artificios matemáticos según sea el caso, se puede aplicar: factor común, desarrollos notables, desarrollos cúbicos, diferencias de cuadrados perfectos, diferencia cubicas, sumas cubicas, racionalización, doble racionalización, ruffini y otros.
3. ¿Para que aplico artificios matemáticos? Para necesariamente eliminar un factor del numerador con otro del denominador.
4. Después de eliminar los factores, copio el límite que me queda.
5. Se evalúa nuevamente el límite, se obtiene el resultado y se concluye.

Nota: debe tener en cuenta que la palabra limite, desaparece solo y únicamente cuando se evalúa la función, en los demás pasos cuando estoy resolviendo el limite debe aparecer la palabra limite o en su defecto (lim).

Ejemplo

$\Rightarrow$ **Paso 1**

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

$\Rightarrow$ **Paso 2**

Se tiene que aplicar artificio matemático en este caso, diferencia de cuadrados en el numerador

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} = \frac{x^2 - 1^2}{x - 1}$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)\ (a + b)$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x - 1)}\ (x + 1)}{\cancel{(x - 1)}}$$ $\longrightarrow$ se elimina factor del numerador y el denominador **(Paso 3)**

⇒ **Paso 4**

Se copia el limite que queda $\lim_{x \to 1} (x + 1)$

⇒ Paso 5

Se evalúa y se concluye $1 + 1 = 2$

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Ejemplo Nº 2

$$\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{x^2 - 16} = \frac{4 - 4}{4^2 - 16} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{x^2 - 4^2} = \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{x - 4}}{\cancel{(x - 4)}(x + 4)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{x + 4} = \frac{1}{4 + 4} = \frac{1}{8}$$

$$\boxed{\therefore \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{x^2 - 16} = \frac{1}{8}}$$

Ejemplo Nº 3

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{\sqrt{1} - 1}{1 - 1} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 1} \overset{(a\ -\ b)}{\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}} \left(\overset{(a\ +\ b)}{\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{(\cancel{\sqrt{x}})^{\cancel{2}} - 1^2}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

Se aplico racionalización por el método de la conjugada

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\therefore \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2}}$$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ $\longleftrightarrow$ Diferencia cúbica

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $\longleftrightarrow$ Desarrollo cúbico de la suma

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $\longleftrightarrow$ Desarrollo cúbico de la resta

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ $\longleftrightarrow$ Suma cúbica

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ $\longleftrightarrow$ Diferencia de cuadrados perfectos

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\longleftrightarrow$ Desarrollo notable de la suma

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\longleftrightarrow$ Desarrollo notable de la resta