

Renormalisation pour une émission dans un cône restreint

Simulation Monte Carlo – Source Eu-152

1 Problématique

1.1 Contexte

La source Eu-152 a une activité de $A = 44$ kBq sur 4π stéradians (émission isotrope). Cependant, pour optimiser le temps de calcul de la simulation Monte Carlo, on souhaite restreindre l'émission des gammas dans un cône de demi-angle $\theta_{\text{cone}} = 20^\circ$ dirigé vers le détecteur (couronnes d'eau).

1.2 Question

Comment relier les résultats obtenus avec N_{sim} événements simulés dans le cône de 20° à un temps d'irradiation réel correspondant à la source isotrope de 44 kBq ?

2 Calcul de l'angle solide

2.1 Formule générale

L'angle solide Ω d'un cône de demi-angle θ vu depuis son sommet est :

$$\boxed{\Omega = 2\pi (1 - \cos \theta)} \quad (1)$$

2.2 Application numérique

2.2.1 Cône de 20° (simulation optimisée)

$$\Omega_{20} = 2\pi (1 - \cos 20) \quad (2)$$

$$= 2\pi (1 - 0.9397) \quad (3)$$

$$= 2\pi \times 0.0603 \quad (4)$$

$$= \boxed{0.379 \text{ sr}} \quad (5)$$

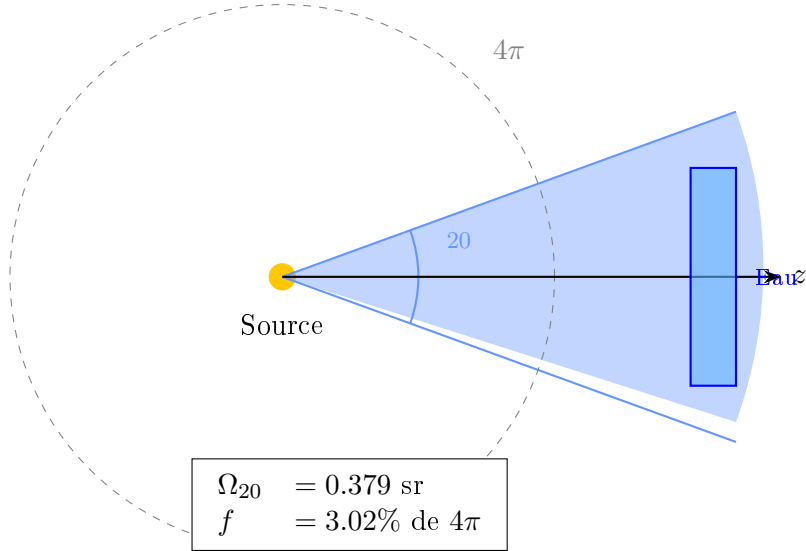
2.2.2 Sphère complète

$$\Omega_{4\pi} = 4\pi = 12.566 \text{ sr} \quad (6)$$

2.3 Fraction de l'angle solide

La fraction de l'émission 4π couverte par le cône de 20° est :

$$f = \frac{\Omega_{20}}{\Omega_{4\pi}} = \frac{0.379}{12.566} = \boxed{0.0302 = 3.02\%} \quad (7)$$



3 Principe de la renormalisation

3.1 Équivalence physique

Lorsqu'on simule N_{sim} événements (désintégrations) dans un cône de demi-angle θ_{cone} , on échantillonne uniquement la fraction f de l'émission totale.

Principe fondamental : Ces N_{sim} événements dans le cône correspondent au même nombre de gammas qu'une source isotrope aurait émis dans ce même cône après avoir effectué $N_{4\pi}$ désintégrations sur 4π .

$$N_{4\pi} = \frac{N_{\text{sim}}}{f} \quad (8)$$

3.2 Interprétation

- N_{sim} = nombre d'événements simulés dans le cône
- $N_{4\pi}$ = nombre équivalent de désintégrations de la source isotrope
- f = fraction de l'angle solide ($\Omega_{\text{cone}}/4\pi$)

Exemple : Si on simule $N_{\text{sim}} = 100\,000$ événements dans un cône de 20° :

$$N_{4\pi} = \frac{100\,000}{0.0302} = 3.31 \times 10^6 \text{ désintégrations sur } 4\pi \quad (9)$$

4 Calcul du temps d'irradiation

4.1 Relation activité – temps

L'activité A de la source est définie comme le nombre de désintégrations par seconde :

$$A = \frac{N_{\text{désintégrations}}}{\Delta t} \quad (10)$$

Donc le temps correspondant à $N_{4\pi}$ désintégrations est :

$$T_{\text{irr}} = \frac{N_{4\pi}}{A} = \frac{N_{\text{sim}}}{f \cdot A} \quad (11)$$

4.2 Prise en compte du nombre de gammas par désintégration

Pour l'Eu-152, chaque désintégration produit en moyenne $\bar{n}_\gamma = 1.924$ gammas (dans le spectre considéré). Si la simulation génère des *gammas* (et non des désintégrations), il faut en tenir compte :

$$T_{\text{irr}} = \frac{N_{\text{sim}}}{f \cdot A \cdot \bar{n}_\gamma} \quad (12)$$

4.3 Application numérique

Paramètre	Valeur
Activité A	44 000 Bq
Demi-angle du cône θ	20
Fraction f	0.0302
Gammas par désintégration \bar{n}_γ	1.924

4.3.1 Temps par événement simulé

$$t_1 = \frac{1}{f \cdot A \cdot \bar{n}_\gamma} \quad (13)$$

$$= \frac{1}{0.0302 \times 44\,000 \times 1.924} \quad (14)$$

$$= \frac{1}{2556} \text{ s} \quad (15)$$

$$= \boxed{0.391 \text{ ms par événement}} \quad (16)$$

4.3.2 Temps pour N_{sim} événements

$$T_{\text{irr}} = N_{\text{sim}} \times 0.391 \text{ ms} \quad (17)$$

N_{sim}	T_{irr}
10 000	3.91 s
100 000	39.1 s
1 000 000	6.52 min
10 000 000	1.09 h

5 Formules récapitulatives

5.1 Formule générale du temps d'irradiation

$$T_{\text{irr}} = \frac{N_{\text{sim}} \cdot 4\pi}{2\pi(1 - \cos \theta_{\text{cone}}) \cdot A \cdot \bar{n}_\gamma} = \frac{2 \cdot N_{\text{sim}}}{(1 - \cos \theta_{\text{cone}}) \cdot A \cdot \bar{n}_\gamma} \quad (18)$$

5.2 Formule du débit de dose

Si la simulation donne une dose totale D_{sim} (en Gy) pour N_{sim} événements, le débit de dose est :

$$\dot{D} = \frac{D_{\text{sim}}}{T_{\text{irr}}} = \frac{D_{\text{sim}} \cdot f \cdot A \cdot \bar{n}_\gamma}{N_{\text{sim}}} \quad (19)$$

5.3 Vérification dimensionnelle

$$[\dot{D}] = \frac{[\text{Gy}] \times [\text{sr}] \times [\text{Bq}] \times [1]}{[\text{sr}] \times [1]} \quad (20)$$

$$= \frac{\text{Gy} \times \text{s}^{-1}}{1} = \text{Gy/s} \quad (21)$$

6 Comparaison des configurations

Configuration	θ	f	T_{irr} pour 10^5 évts
Cône actuel (60°)	60	25.0%	4.72 s
Cône optimisé (20°)	20	3.02%	39.1 s
Cône très restreint (10°)	10	0.76%	155 s
Isotrope (4π)	180	100%	1.18 s

Interprétation : Plus le cône est restreint, plus chaque événement simulé représente un temps d'irradiation long (car on concentre les gammas simulés dans une direction utile).

7 Implémentation dans le code Geant4

7.1 Modification de PrimaryGeneratorAction

Pour changer le demi-angle du cône d'émission, modifier dans `PrimaryGeneratorAction.cc` :

```
// Ancien (60°)
G4double maxCosTheta = std::cos(60.0 * deg);

// Nouveau (20°)
G4double maxCosTheta = std::cos(20.0 * deg);
```

7.2 Calcul automatique dans RunAction

Modifier `RunAction.cc` pour calculer le temps d'irradiation correct :

```
// Paramètres
G4double coneAngle = 20.0 * deg;           // Demi-angle du cône
G4double activity = 44000.0;               // Bq
G4double gammasPerDecay = 1.924;

// Fraction de l'angle solide
G4double f = (1.0 - std::cos(coneAngle)) / 2.0;

// Temps d'irradiation
G4double T_irr = nofEvents / (f * activity * gammasPerDecay);
```

8 Résumé et formules clés

Formules essentielles pour la renormalisation

1. Fraction de l'angle solide :

$$f = \frac{1 - \cos \theta_{\text{cone}}}{2}$$

2. Temps d'irradiation équivalent :

$$T_{\text{irr}} = \frac{N_{\text{sim}}}{f \cdot A \cdot \bar{n}_{\gamma}}$$

3. Application pour $\theta = 20$, $A = 44 \text{ kBq}$, $\bar{n}_{\gamma} = 1.924$:

$$T_{\text{irr}} = N_{\text{sim}} \times 0.391 \text{ ms}$$

4. Débit de dose :

$$\dot{D} = \frac{D_{\text{sim}}}{T_{\text{irr}}}$$

9 Annexe : Schéma géométrique

10 Annexe : Tableau de conversion rapide

Pour $\theta = 20$, $A = 44$ kBq, $\bar{n}_\gamma = 1.924$:

N_{sim}	T_{irr}		Commentaire
1 000	0.391 s		Test rapide
10 000	3.91 s		Validation
100 000	39.1 s	≈ 0.65 min	Production légère
500 000	196 s	≈ 3.3 min	Production moyenne
1 000 000	391 s	≈ 6.5 min	Production standard
5 000 000	1956 s	≈ 33 min	Haute statistique
10 000 000	3912 s	≈ 1.1 h	Très haute statistique

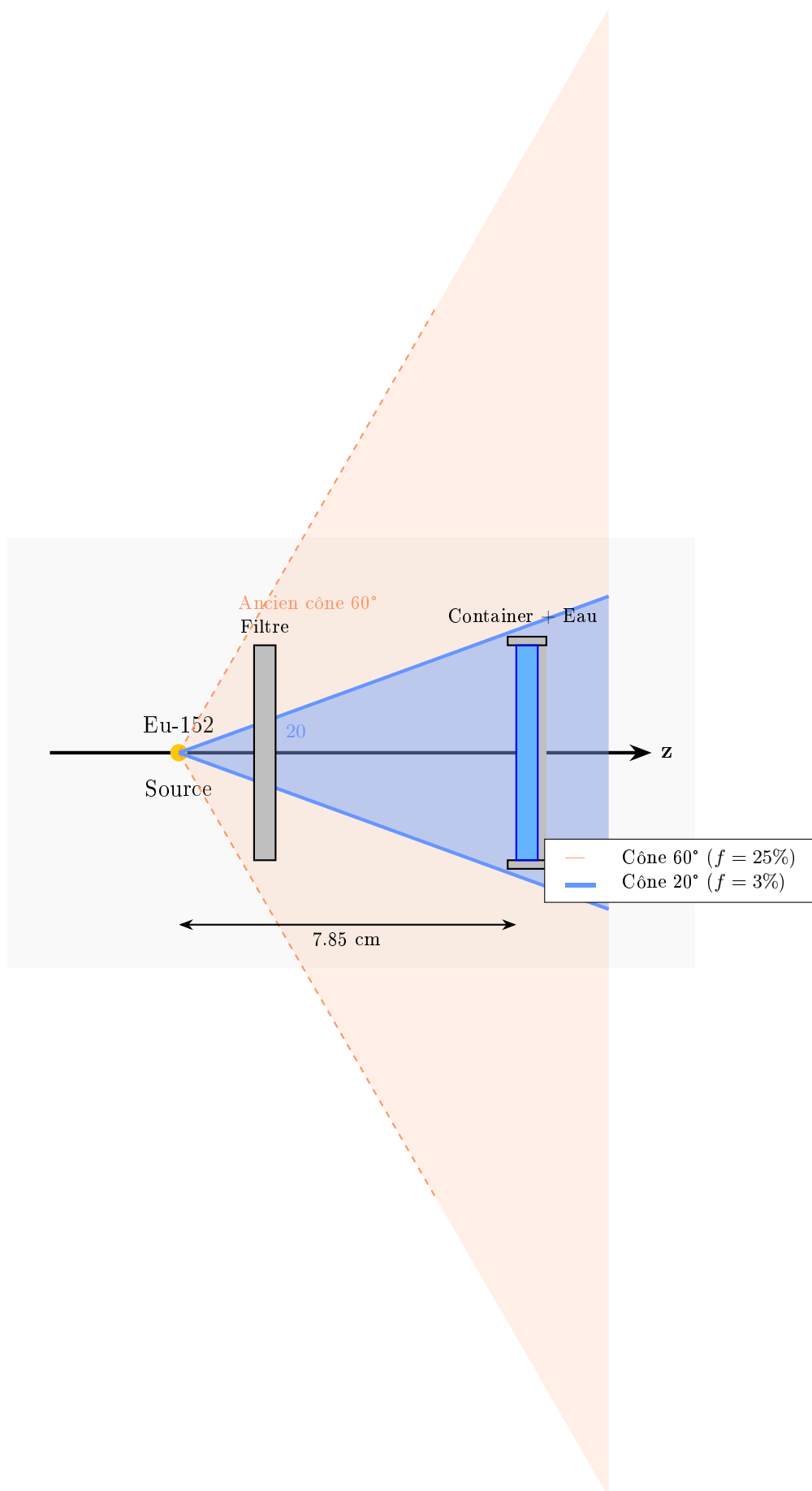


Figure 1: Comparaison entre le cône d'émission de 60° (actuel) et le cône optimisé de 20°. Le cône de 20° concentre les gammas simulés vers le détecteur, améliorant l'efficacité statistique au prix d'un temps d'irradiation équivalent plus long par événement.