

# Renormalisation pour une émission dans un cône restreint

Simulation Monte Carlo – Source Eu-152

## 1 Problématique

### 1.1 Contexte

La source Eu-152 a une activité de  $A = 44 \text{ kBq}$  sur  $4\pi$  stéradians (émission isotrope). Cependant, pour optimiser le temps de calcul de la simulation Monte Carlo, on souhaite restreindre l'émission des gammas dans un cône de demi-angle  $\theta_{\text{cone}} = 20^\circ$  dirigé vers le détecteur (couronnes d'eau).

### 1.2 Question

Comment relier les résultats obtenus avec  $N_{\text{sim}}$  événements simulés dans le cône de  $20^\circ$  à un temps d'irradiation réel correspondant à la source isotrope de  $44 \text{ kBq}$  ?

## 2 Calcul de l'angle solide

### 2.1 Formule générale

L'angle solide  $\Omega$  d'un cône de demi-angle  $\theta$  vu depuis son sommet est :

$$\boxed{\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta)} \quad (1)$$

### 2.2 Application numérique

#### 2.2.1 Cône de $20^\circ$ (simulation optimisée)

$$\Omega_{20} = 2\pi(1 - \cos 20) \quad (2)$$

$$= 2\pi(1 - 0.9397) \quad (3)$$

$$= 2\pi \times 0.0603 \quad (4)$$

$$= \boxed{0.379 \text{ sr}} \quad (5)$$

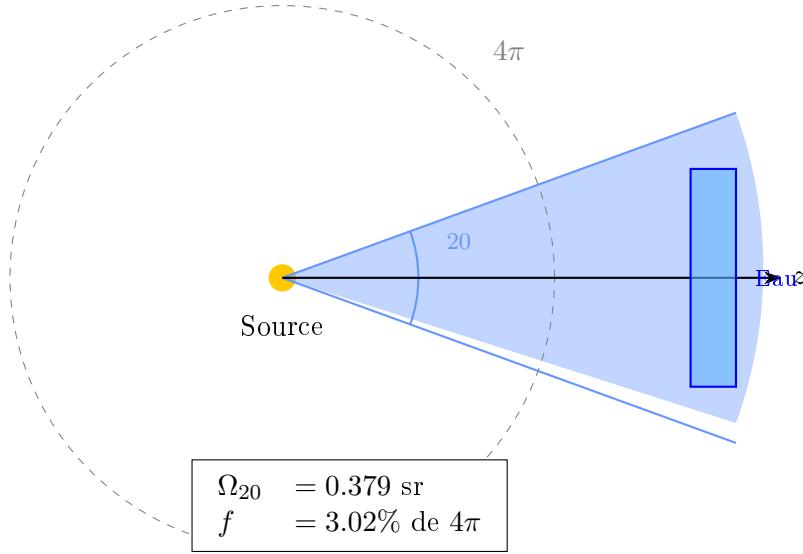
#### 2.2.2 Sphère complète

$$\Omega_{4\pi} = 4\pi = 12.566 \text{ sr} \quad (6)$$

### 2.3 Fraction de l'angle solide

La fraction de l'émission  $4\pi$  couverte par le cône de  $20^\circ$  est :

$$f = \frac{\Omega_{20}}{\Omega_{4\pi}} = \frac{0.379}{12.566} = \boxed{0.0302 = 3.02\%} \quad (7)$$



### 3 Principe de la renormalisation

#### 3.1 Équivalence physique

Lorsqu'on simule  $N_{\text{sim}}$  événements (désintégrations) dans un cône de demi-angle  $\theta_{\text{cone}}$ , on échantillonne uniquement la fraction  $f$  de l'émission totale.

**Principe fondamental :** Ces  $N_{\text{sim}}$  événements dans le cône correspondent au même nombre de gammas qu'une source isotrope aurait émis dans ce même cône après avoir effectué  $N_{4\pi}$  désintégrations sur  $4\pi$ .

$$N_{4\pi} = \frac{N_{\text{sim}}}{f} \quad (8)$$

#### 3.2 Interprétation

- $N_{\text{sim}}$  = nombre d'événements simulés dans le cône
- $N_{4\pi}$  = nombre équivalent de désintégrations de la source isotrope
- $f$  = fraction de l'angle solide ( $\Omega_{\text{cone}}/4\pi$ )

**Exemple :** Si on simule  $N_{\text{sim}} = 100\,000$  événements dans un cône de  $20^\circ$  :

$$N_{4\pi} = \frac{100\,000}{0.0302} = 3.31 \times 10^6 \text{ désintégrations sur } 4\pi \quad (9)$$

### 4 Calcul du temps d'irradiation

#### 4.1 Relation activité – temps

L'activité  $A$  de la source est définie comme le nombre de désintégrations par seconde :

$$A = \frac{N_{\text{désintégrations}}}{\Delta t} \quad (10)$$

Donc le temps correspondant à  $N_{4\pi}$  désintégrations est :

$$T_{\text{irr}} = \frac{N_{4\pi}}{A} = \frac{N_{\text{sim}}}{f \cdot A} \quad (11)$$

## 4.2 Prise en compte du nombre de gammas par désintégration

Pour l'Eu-152, chaque désintégration produit en moyenne  $\bar{n}_\gamma = 1.924$  gammas (dans le spectre considéré). Si la simulation génère des *gammas* (et non des désintégrations), il faut en tenir compte :

$$T_{\text{irr}} = \frac{N_{\text{sim}}}{f \cdot A \cdot \bar{n}_\gamma} \quad (12)$$

## 4.3 Application numérique

Paramètre	Valeur
Activité $A$	44 000 Bq
Demi-angle du cône $\theta$	20
Fraction $f$	0.0302
Gammas par désintégration $\bar{n}_\gamma$	1.924

### 4.3.1 Temps par événement simulé

$$t_1 = \frac{1}{f \cdot A \cdot \bar{n}_\gamma} \quad (13)$$

$$= \frac{1}{0.0302 \times 44 000 \times 1.924} \quad (14)$$

$$= \frac{1}{2556} \text{ s} \quad (15)$$

$$= [0.391 \text{ ms par événement}] \quad (16)$$

### 4.3.2 Temps pour $N_{\text{sim}}$ événements

$$T_{\text{irr}} = N_{\text{sim}} \times 0.391 \text{ ms} \quad (17)$$

$N_{\text{sim}}$	$T_{\text{irr}}$
10 000	3.91 s
100 000	39.1 s
1 000 000	6.52 min
10 000 000	1.09 h

## 5 Formules récapitulatives

### 5.1 Formule générale du temps d'irradiation

$$T_{\text{irr}} = \frac{N_{\text{sim}} \cdot 4\pi}{2\pi(1 - \cos \theta_{\text{cone}}) \cdot A \cdot \bar{n}_\gamma} = \frac{2 \cdot N_{\text{sim}}}{(1 - \cos \theta_{\text{cone}}) \cdot A \cdot \bar{n}_\gamma} \quad (18)$$

### 5.2 Formule du débit de dose

Si la simulation donne une dose totale  $D_{\text{sim}}$  (en Gy) pour  $N_{\text{sim}}$  événements, le débit de dose est :

$$\dot{D} = \frac{D_{\text{sim}}}{T_{\text{irr}}} = \frac{D_{\text{sim}} \cdot f \cdot A \cdot \bar{n}_\gamma}{N_{\text{sim}}} \quad (19)$$

### 5.3 Vérification dimensionnelle

$$[\dot{D}] = \frac{[\text{Gy}] \times [\text{sr}] \times [\text{Bq}] \times [1]}{[\text{sr}] \times [1]} \quad (20)$$

$$= \frac{\text{Gy} \times \text{s}^{-1}}{1} = \text{Gy/s} \quad (21)$$

## 6 Comparaison des configurations

Configuration	$\theta$	$f$	$T_{\text{irr}}$ pour $10^5$ évts
Cône actuel ( $60^\circ$ )	60	25.0%	4.72 s
Cône optimisé ( $20^\circ$ )	20	3.02%	39.1 s
Cône très restreint ( $10^\circ$ )	10	0.76%	155 s
Isotrope ( $4\pi$ )	180	100%	1.18 s

**Interprétation :** Plus le cône est restreint, plus chaque événement simulé représente un temps d'irradiation long (car on concentre les gammas simulés dans une direction utile).

## 7 Implémentation dans le code Geant4

### 7.1 Modification de PrimaryGeneratorAction

Pour changer le demi-angle du cône d'émission, modifier dans `PrimaryGeneratorAction.cc` :

```
// Ancien (60°)
G4double maxCosTheta = std::cos(60.0 * deg);

// Nouveau (20°)
G4double maxCosTheta = std::cos(20.0 * deg);
```

### 7.2 Calcul automatique dans RunAction

Modifier `RunAction.cc` pour calculer le temps d'irradiation correct :

```
// Paramètres
G4double coneAngle = 20.0 * deg;           // Demi-angle du cône
G4double activity = 44000.0;                // Bq
G4double gammasPerDecay = 1.924;

// Fraction de l'angle solide
G4double f = (1.0 - std::cos(coneAngle)) / 2.0;

// Temps d'irradiation
G4double T_irr = nofEvents / (f * activity * gammasPerDecay);
```

## 8 Résumé et formules clés

**Formules essentielles pour la renormalisation**

**1. Fraction de l'angle solide :**

$$f = \frac{1 - \cos \theta_{\text{cone}}}{2}$$

**2. Temps d'irradiation équivalent :**

$$T_{\text{irr}} = \frac{N_{\text{sim}}}{f \cdot A \cdot \bar{n}_{\gamma}}$$

**3. Application pour  $\theta = 20^\circ$ ,  $A = 44 \text{ kBq}$ ,  $\bar{n}_{\gamma} = 1.924$  :**

$$T_{\text{irr}} = N_{\text{sim}} \times 0.391 \text{ ms}$$

**4. Débit de dose :**

$$\dot{D} = \frac{D_{\text{sim}}}{T_{\text{irr}}}$$

## 9 Annexe : Schéma géométrique

## 10 Annexe : Tableau de conversion rapide

Pour  $\theta = 20$ ,  $A = 44$  kBq,  $\bar{n}_\gamma = 1.924$  :

$N_{\text{sim}}$	$T_{\text{irr}}$	Commentaire
1 000	0.391 s	Test rapide
10 000	3.91 s	Validation
100 000	39.1 s	$\approx 0.65$ min
500 000	196 s	$\approx 3.3$ min
1 000 000	391 s	$\approx 6.5$ min
5 000 000	1956 s	$\approx 33$ min
10 000 000	3912 s	$\approx 1.1$ h
		Très haute statistique

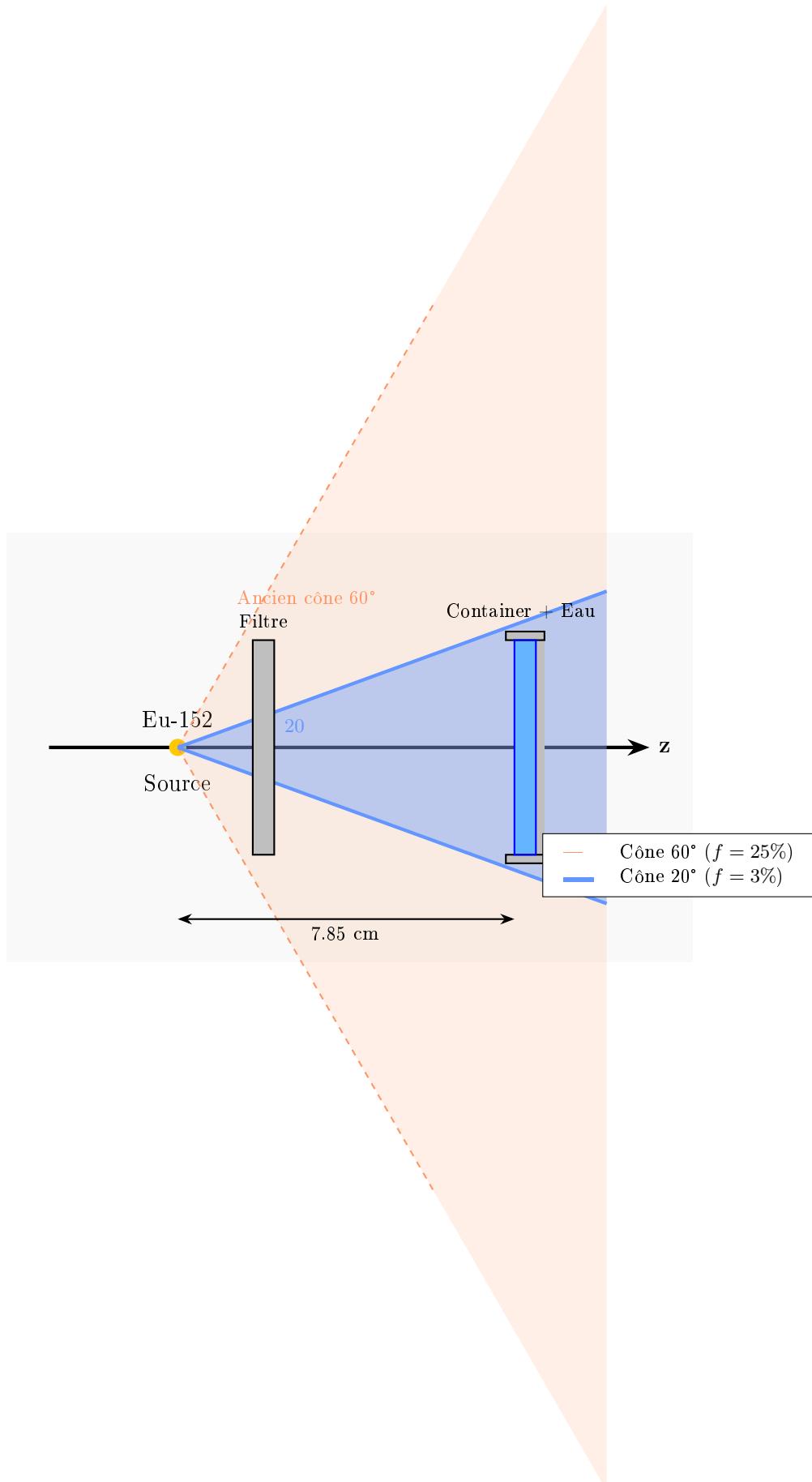


Figure 1: Comparaison entre le cône d'émission de  $60^\circ$  (actuel) et le cône optimisé de  $20^\circ$ . Le cône de  $20^\circ$  concentre les gammas simulés vers le détecteur, améliorant l'efficacité statistique au prix d'un temps d'irradiation équivalent plus long par événement.