

電磁気学 ver.4.6.0

ヒカル@ヒカルの家/Hikaru's House

平成 26 年 5 月 16 日

概 要

電磁気の基本は Maxwell が導出した 4 つの式ですべて表現される。そして高校電磁気学における最終目標はその Maxwell の 4 つの式を導出し、扱えることである。力学などは古典範囲しか扱わなかったが、電磁気については高校までの内容で基本的な内容はすべて網羅され、大学以降で扱う電磁気学も基本は高校電磁気と同じである。その分内容としては難しく感じるかもしれないが、ここでしっかり抑えておけば今後の学習が非常に楽になるだろう。

1 電荷

自然には正・負の電荷が存在し、同符号の電荷同士は反発しあい、異符号の電荷同士は引き合う。電荷が具体的に何かを問われると難しいが、粒子の持つ性質の一つである。粒子の持つ電氣的な性質を電荷といい、ここから電荷をもつ粒子自体を電荷と呼ぶこともある。物体が電荷を帯びることを帯電といい、電荷間に働く力を静電気力またはクーロン力という。電荷の最小単位を電気素量といい、

$$e = 1.60217733 \times 10^{-19} [\text{C}] \quad (1)$$

である。なお、電子 1 つの持つ電荷が $-e$ に相当する。物質の持つ電荷量は必ずこれの整数倍となる。

電荷の保存則 principle of conservation of charge

外界と電荷のやり取りをしない孤立した系において、電荷の移動等によって電荷の空間分布が変化しても、その系内の電荷の総量は常に一定に保たれる。

1.1 クーロンの法則 Coulomb's law

電荷をもった小さな物体を点電荷といい、点電荷の間に働くクーロン力は次のようにあらわされる。

静止した二つの点電荷が互いに及ぼしあう力は、両電荷間の積に比例し、電荷間の距離の 2 乗に反比例する。

距離 $r[\text{m}]$ 離れた点電荷 $q_1, q_2[\text{C}]$ がある。一方の点電荷が他方の点電荷に及ぼす力 F は、

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (2)$$

と表される。この比例係数 k は空間の誘電率 ε を用いて、

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon} [\text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2] \quad (3)$$

と与えられる。特に真空の誘電率 ε_0 は、真空中での光の速さ $c = 2.99792458 \times 10^8 [\text{m/s}]$ を用いて、

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8.854187817 \times 10^{-12} [\text{C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2] \quad (4)$$

と表される。

参考

真空のクーロン定数

$$k_0 = 9.0 \times 10^9 [\text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2] \quad (5)$$

ベクトルを用いて向きを合わせて記述するしてみる。 q_1 が q_2 に及ぼす力を表現してみると、

$$\mathbf{F} = k_0 \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \quad (6)$$

とかける。ただし、 r_{12} は q_1 から q_2 への位置ベクトルである。これからわかるように、電荷間に働く力は q_1, q_2 が正なら引力、負なら斥力となる。

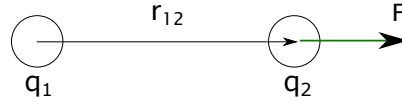


図 1: クーロンの法則。電荷が周囲の空間に‘場’というものを作り出し、その場から他の電荷が力を受ける。クーロン力は距離の 2 乗に比例し、これは重力と同じである。しかし、静電気力を考えるような空間では、重力よりも圧倒的に電磁気力が強い。なので、重力は特に考える必要はない。

1.2 重ね合わせの原理 principle of superposition

複数の電荷 q_1, q_2, \dots, q_N が存在する場合、一つの電荷 q_i が受ける力 \mathbf{F}_i は、他の電荷が独立に q_i に及ぼす力のクーロン力のベクトル和で与えられる。

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{1i} + \mathbf{F}_{2i} + \dots + \mathbf{F}_{Ni} \quad (7)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_i}{r_{1i}^2} \frac{\mathbf{r}_{1i}}{r_{1i}} + \dots + \frac{q_N q_i}{r_{Ni}^2} \frac{\mathbf{r}_{Ni}}{r_{Ni}} \right) \quad (8)$$

$$= \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j q_i}{r_{ji}^2} \frac{\mathbf{r}_{ji}}{r_{ji}} \quad (9)$$

2 電場

空間中の電荷 Q は付近の電荷 q に対して力を及ぼす。これを電荷 Q が電荷 q の存在する位置に電場 electric field を作り出し、 q がこの電場 \mathbf{E} から力を受けていると考え、

$$\mathbf{F} = k_0 \frac{Qq}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = q\mathbf{E} \quad (10)$$

$$\mathbf{E} = k_0 \frac{Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (11)$$

と表せる。

なお、電場に関しても重ね合わせの法則は成り立つ。つまり、空間中に複数の電荷 q_1, q_2, \dots, q_N が存在する場合、空間の任意の点 P に発生する電場 \mathbf{E} はそれぞれの電荷が点 P に作り出す電場のベクトル和で与えられる (実際に計算してみれば簡単にわかる)。なお、特に外部からの影響がなければ、一つの点電荷が周囲に作る電場は等方的である。

電気力線

ベクトル場である電界を視覚的にあらわすための図のことである。電場の大きさと向きが分かるように書く。

1. 任意の点における電気力線の向きは電場の向きに一致する
2. 電気力線は正電荷に始まり、負電荷で終わる。それ以外の場所では交差したり枝分かれしない。ただし、 $E = 0$ となる場所については注意が必要。
3. 電界の強さが $|E| = E$ である点を中心とした電界に垂直な単位面積あたりを貫く電気力線の本数が E 本になるようにする。 のちに「 Gauss の法則」で説明

3 電場に関する Gauss の法則

点電荷 q によって作られる電場 E の中に任意の曲面 S をとる。このとき、曲面 S を通過する電気力線の総本数を、電気力束という。

以下、空間中の点電荷 q と閉曲面 S について考える。

1. 点電荷 q を中心とする半径 r の球状閉曲面 S を考える
点電荷 q から出る電界は等方的なので、球面 S 上に対して電場 E は常に垂直かつ常に大きさは等しい。よって、この点電荷 q から出る電気力線の総本数 Φ は、

$$\Phi = E \times (S \text{ の表面積}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (12)$$

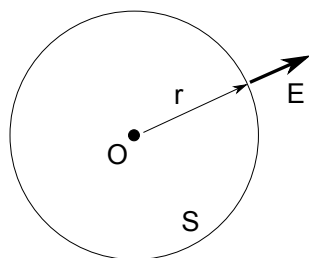


図 2: 対称性を用いた電場に関するガウスの法則。点電荷を中心に半径 r の球を描き、その閉曲面でガウスの法則を適用する。

2. 同様に点電荷 q を囲う任意の閉曲面 S を考える。
このとき、閉曲面 S を内から外に貫く S は、(1) より S の形によらず

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (13)$$

である。

(ちょっと進んだ説明) 電気力束 Φ を閉曲面 S 上の電場 E を用いて表すことを考える。閉曲面 S を微小な面積に分割し、 i 番目の微小面積 ΔS_i を通過する電場を E_i とする。 ΔS_i に垂直で閉曲面 S の内から外に貫く向きの長さ ΔS_i のベクトルを ΔS_i 、 ΔS_i と E_i のなす角を θ_i とすると、この微小面積 ΔS_i を通過する電気力束 $\Delta\Phi_i$ は、

$$\Delta\Phi_i = E_i \Delta S_i \cos \theta_i = \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i \quad (14)$$

これを全ての ΔS_i について足し合わせると電気力束 Φ は、

$$\Phi = \sum_i \Delta \Phi_i = \sum_i \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i \rightarrow \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (\Delta S_i \rightarrow 0, \Delta S_i \rightarrow 0) \quad (15)$$

$$\therefore \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad (16)$$

3. 閉曲面 S が q を取り囲まない場合について考える。

Q から出た電気力線の一部は閉曲面 S を外から内に貫いて入るが、同じ量の電気力線が出て行っている。よって、閉曲面 S を内から外に貫く電気力線の総和は 0 である。

以上より、任意の閉曲面 S と点電荷 q に関して、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} \frac{q}{\varepsilon_0} & (S \text{ が } q \text{ を含むとき}) \\ 0 & (S \text{ が } q \text{ を含まないとき}) \end{cases} \quad (17)$$

となる。

複数の電荷がある場合

空間上に複数の点電荷と閉曲面 S が存在する。任意の閉曲面 S について、 S 内にある点電荷を q_1, q_2, \dots, q_N としたとき、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\varepsilon_0} \quad (18)$$

となる。これと電場の対称性より閉曲面 S をうまくとれば、電場 E を簡単に求めることができる。

3.1 曲面 S を上手にとる

曲面 S を上手にとれば、空間的な対称性のある電場は求めることが可能である。その上手な曲面 S の取り方は球面と円柱面の 2 通りである。球面についてはこれまで述べたとおりである。これから、円柱面を用いた電場の求め方について説明する。

3.1.1 無限に長い直線上に一様分布した電荷の周りの電場

無限に長い直線上に電荷線密度 ρ で電荷が分布しているとする。この直線と同軸中心とする半径 r 、高さ h の円柱面 S を考える。直線に関する対称性から直線状のどこから見ても同じ電場が直線に垂直かつ等方的に生じる。円柱面 S にガウスの法則を用いて、

$$E(r) \times 2\pi r h = \frac{\rho h}{\varepsilon_0} \quad (19)$$

$$\therefore E(r) = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad (20)$$

となる。

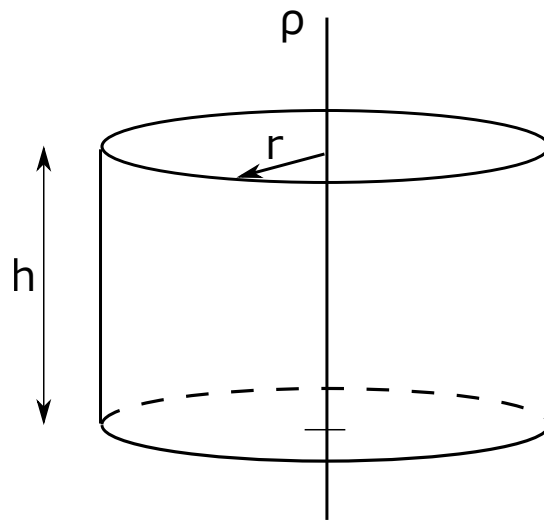


図 3: 無限に長い直線上一様分布した電荷の周りの電場を求めるためのモデル。直線上に軸を持つ円柱を曲面 S としてとることで、対称性を利用して電場を簡単に求めることができる。

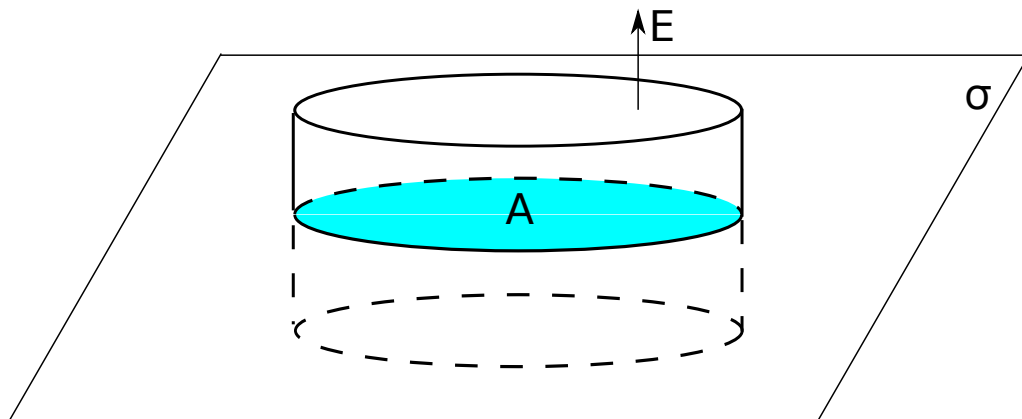


図 4: 無限に広い平面上に一様分布した電荷の周りの電場を求めるためのモデル。平面上に円柱を曲面 S としてとることで、対称性を利用して電場を簡単に求めることができる。

3.1.2 無限に広い平面上に一様分布した電荷の周りの電場

無限に広い平面上に電荷面密度 σ で電荷が分布しているとする。この平面に垂直で底面積が A 、高さが $2a$ の円柱面 S をとる。すると平面に対する対称性より面上のいたるところに同じ強さの電場が面に垂直に生じる。円柱面 S にガウスの法則を用いれば、

$$E(r) \times A \times 2 = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \quad (21)$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (22)$$

となる。

4 Potential Energy と電位

力学の部分で説明したが、もう一度ポテンシャルエネルギーについて確認しよう。

一般に力 F がする仕事 W は

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (23)$$

となり、始点・終点の位置のみで決まらず、経路にも依存する。つまり一般に、同じ始点と終点を持つ 2 つの経路 C_1, C_2 があったとして、

$$\int_{C_1} \neq \int_{C_2} \quad (24)$$

という関係がある。ここで、仕事 W が始点・終点の位置のみで決まり経路によらないとき、力 F を『保存力』という。

$$\text{「力 } F \text{ が保存力である」} \Leftrightarrow \text{「任意の経路 } C_1, C_2, \dots \text{ に対し、} \int_{C_1} = \int_{C_2} = \dots \text{」} \quad (25)$$

$$\Leftrightarrow \text{「任意のループ } C \text{ に対し、} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \text{」} \quad (26)$$

力 F が保存力であるとき、 A を基準とした B の力 F による Potential Energy を次のように定義する。

$$U_B = - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (B \text{ から } A \text{ まで動くとき、保存力自身のする仕事}) \quad (27)$$

静電気力はまさに保存力であり、それを次で説明する。

ex) 重ね合わせの原理から点電荷からの静電気力が保存力であることを示す。

図のようなギザギザを小さくとれば、任意の経路をこれらの組み合わせで作れる。このとき、 $r_1 = r_A, r_N = r_B$ として、そのほかの経路については経路によって異なる。

$A \rightarrow B$ に電荷 q を移動させるのに必要な仕事 W は

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (28)$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} k_0 \frac{Qq}{r^2} dr + \int_{r_2}^{r_3} k_0 \frac{Qq}{r^2} dr + \dots + \int_{r_{N-1}}^{r_N} k_0 \frac{Qq}{r^2} dr \quad (29)$$

$$= \int_{r_1}^{r_N} k_0 \frac{Qq}{r^2} dr \quad (30)$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} k_0 \frac{Qq}{r^2} dr \quad (31)$$

$$= -k_0 Qq \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (32)$$

ここで、電場という考え方でみると

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (33)$$

いま、静電気力は保存力なので上式の W は C によらず一定。一方、 q は電荷の持つ電気量なので定数。よって、何が分かるかというと、

$$C \text{ によらず } \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \text{一定} \quad (34)$$

C の始点を A 、終点を B としたとき、

$$V = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (35)$$

これを、基準点 A に対する点 B の電位という。特に、基準点を無限遠にとった場合、

$$V = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = k_0 Q \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \rightarrow k_0 \frac{Q}{r_B} \quad (36)$$

となる。

なお、電位に関しても重ね合わせの法則は成立し、静電場 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots$ と表せられるとき、

$$V_B = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_A^B \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r} - \int_A^B \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} - \dots = V_{1B} + V_{2B} + \dots \quad (37)$$

となる。

4.1 電位差

電場 \mathbf{E} の中に二つの点 B と点 C がとれたとき、

$$V = V_B - V_C = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_A^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (38)$$

を、点 B と点 C の電位差もしくは電圧という。

4.2 等電位面と等電位線

電場内の各点には電位が与えられるが、等電位の点を連ねてできたものを、空間では等電位面、平面では等電位線という。なお、等電位面 (線) と電気力線は直交している。

4.3 Potential Energy から保存力を逆算する

定義より、

$$U(r) = - \int_{r_0}^r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (\mathbf{F} : \text{保存力}) \quad (39)$$

これを、 xyz 座標で考える。

$$U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z) = - \int_x^{x+\Delta x} F_x dx \quad (40)$$

このとき、 Δx を十分小さくとれば、

$$U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z) = - F_x \Delta x \quad (41)$$

$$(42)$$

$$\therefore F_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x} \quad (43)$$

$$= -\frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z) \quad (44)$$

同様にして、

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z) \\ -\frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z) \\ -\frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix} = -\nabla U \quad (45)$$

とかける。

ただし、

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (46)$$

である。この ∇ は”ナブラ”と読むが、高校を超える範囲なので知らなくても気にしなくて良い表現である。

なぜ保存力・Potential Energy が大事か

保存力のみを受ける物体の運動は、Potential Energy のグラフで分かる。

4.4 静電エネルギー

考えている電荷分布を作るのに必要な、静電気力につりあわせる外力のする仕事
複数の電荷 q_1, q_2, \dots, q_N からなる形を考える。

1. 何もない空間に電荷 q_1 を持ってくる。

電界が存在しないので、必要な仕事は

$$W_1 = 0 \quad (47)$$

である。

2. 同じ空間に電荷 q_2 を持ってくる。

電荷 q_1 のつくる電界の影響を受けるので、それに要する仕事量

$$W_2 = k_0 \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (48)$$

3. 同じ空間に電荷 q_3 を持ってくる。

電荷 q_1, q_2 のつくる電界の影響を受けるので、

$$W_3 = k_0 \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k_0 \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \quad (49)$$

これらを以下同様に続けて、 N 個の電荷からなる系の静電エネルギーは

$$U_N = \sum_{i=1}^N W_i = \sum_{i < j} k_0 \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (50)$$

となる。

5 導体

内部に自由電子を無数に持つ物体を導体という。導体を電界内に置くと、自由電子が電界の影響を受けて移動する。これを、静電誘導という。外部電界と静電誘導によって分布した電荷のつくる電界の重ね合わせにより、金属内部の電界は 0 (= 電荷の移動の終了) になる。このとき、金属内部は等電位で、マクロに見た電荷分布は表面のみになる。

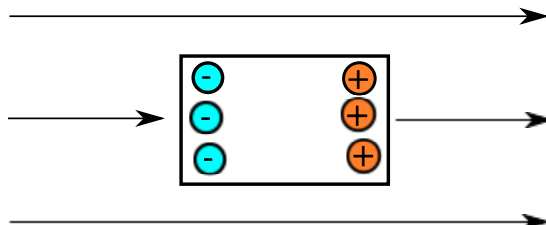


図 5: 静電誘導が起きている時のモデル。導体内部の電荷が移動し、外部電場を打ち消す。

地球も電気を通す性質を持っているので、実は巨大な導体とみなせる。地球は通常扱う実験装置に比べて非常に大きいので、電位が 0 で無限遠まで続いていると考えてよい。導体を地球と導線でつなぐなどして電氣的に接触させることを接地 earth といい、導体を設置すると導体の電位は 0 になる。

5.1 コンデンサー

導体間に電荷を移動させ、保持したときこれらの導体はコンデンサーを形成するという。このとき、移動された電荷の大きさ Q を、コンデンサーに蓄えられた電荷、という。また、

$$C = \frac{Q}{V} [\text{F}] (\text{ファラッド}) \quad (51)$$

$$[\text{F}] = [\text{C}/\text{V}] \quad (52)$$

をコンデンサーの (電気) 容量という。 C は理想的に扱うとき、極板の形・配置・周囲の状況等によって決まる定数とみなせる。

5.2 コンデンサーの静電エネルギー

蓄えられた電荷が 0 の状態のコンデンサーを考える。一方から他方に微小電荷 dq を少しずつ移動させることを考える。このとき、最初は電位差が 0 だから力はないが、コンデンサーに蓄えられた電荷が q のとき、外力の仕事

$$v \times dq = \frac{q}{C} dq \quad (53)$$

が発生する。これを繰り返すため、蓄えられた電荷が Q のコンデンサーの静電エネルギー U は

$$U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 \quad (54)$$

である。

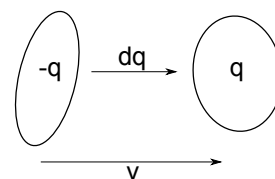


図 6: 簡単なコンデンサーのモデル。教科書でよく見るのは平板金属コンデンサーであるが、導体が 2 つあればコンデンサーをなす。なので例えば電子機器などでも、筐体の金属部分同士が予期せぬコンデンサーをなすことがある。これを容量結合という。

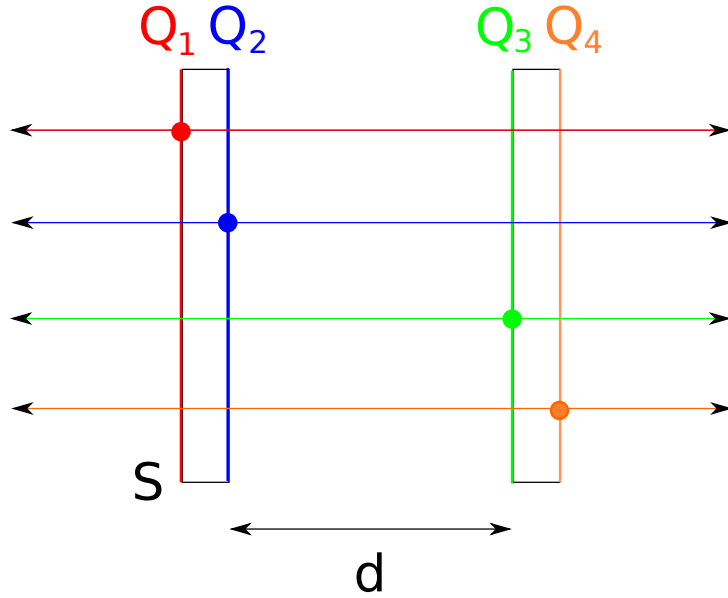


図 7: 平行板コンデンサーのモデル図。

5.3 平行板コンデンサー

(無限に広いとみなせる) 平行金属板コンデンサーを考える。断面積を S , コンデンサー間の距離を d , コンデンサーに蓄えられた電荷を Q とする。導体の性質より導体内部に電荷は分布しないから、平衡状態における電荷の分布は導体表面上に限られる。この電荷分布を図のように Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 とする。

電荷の保存則と金属内部の電場が 0 であることを利用すると、

$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 = Q \\ Q_3 + Q_4 = -Q \end{cases} \quad (55)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon_0 S} (Q_1 - Q_2 - Q_3 - Q_4) = 0 \\ \frac{1}{2\varepsilon_0 S} (Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_4) = 0 \end{cases} \quad (56)$$

の 2 式が立式される。これを解くと

$$Q_1 = 0, Q_2 = Q, Q_3 = -Q, Q_4 = 0 \quad (57)$$

を得る。これから導かれる結論はコンデンサーを構成する導体に蓄えられる電荷は向かい合う部分に集まり、重ね合わせの法則により電場はコンデンサー間にしか存在しない。このときコンデンサー間の電圧 V とコンデンサーの (電気) 容量 C 、そしてコンデンサーに蓄えられる静電エネルギー U は

$$V = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0} \quad (58)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad (59)$$

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 S} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \times Sd \quad (60)$$

となる。特に最後の静電エネルギーについて、一様電場 E が体積 Sd のコンデンサー間に存在している。静電エネルギーがコンデンサー間の電場に蓄えられると考えれば、電場 E の空間に単位体積当たりに蓄えられる静電エ

エネルギー u は

$$u = \frac{U}{Sd} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \quad (61)$$

とかける。

5.4 コンデンサー極板間への異物の挿入

これまでは真空中におかれたコンデンサーについて考えており、その他の干渉については一切考慮していない。ここではコンデンサーのみからなる空間に別の物質を持ってきたときどのような働きが起きるかどうかを考える。

5.4.1 コンデンサー間に導体を入れる場合

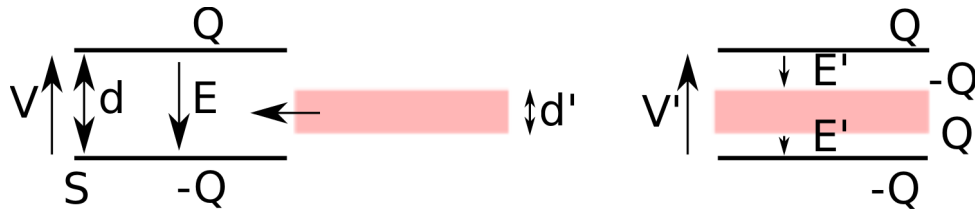


図 8: 平行板コンデンサーの間に長さ d' の導体を入れた場合のモデル。静電誘導により導体内には電場が発生しないことを用いれば、計算ができる。

平行金属板からなるコンデンサーを考える。面積は S 、極板間距離は d 、蓄えられている電荷は Q とする。

このコンデンサーの間に面積 S 、厚さ d' の導体板を差し込む。すると誘電分極が起こり、差し込んだ導体板にも電荷分布が起きる。このときコンデンサー間の電場は $\frac{Q}{\epsilon_0 S}$ のままだが、コンデンサー全体にかかる電圧 V'

$$V' = E(d - d') = \frac{Q(d - d')}{\epsilon_0 S} = \frac{d - d'}{d} V \quad (62)$$

となり、電位差は元よりも下がる。続いて、容量 C' は

$$C' = \frac{Q}{V'} = \frac{\epsilon_0 S}{d - d'} = \frac{d}{d - d'} C \quad (63)$$

となり、容量は元よりも大きくなる。最後に静電エネルギー U' は

$$U' = \frac{1}{2} Q V' = \frac{1}{2} \frac{Q^2 (d - d')}{\epsilon_0 S} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \times S (d - d') = \frac{d}{d - d'} U \quad (64)$$

となり、静電エネルギーは下がる。

5.4.2 コンデンサー間に電荷をもった導体を入れる場合

次に電荷をもった導体を挿入する場合を考える。導体が電荷 Q を持っていたとすると挿入後の電荷分布は図のようになる。これはガウスの法則などを用いることで導くことができる。

さらにコンデンサーの一方をアースする。するとコンデンサーと導体からなる系の電荷は全体で 0 になるから、全体の電荷分布を見積もることができる。

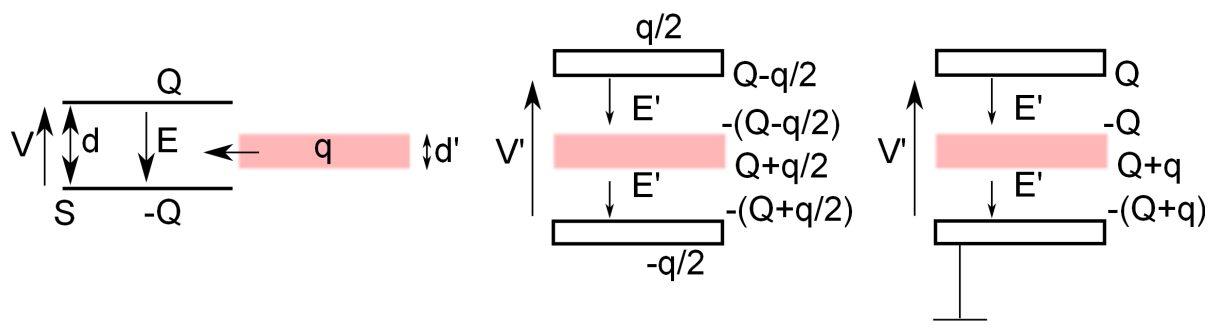


図 9: 平行板コンデンサーの間に電荷 q を帯電した長さ d' の導体を入れた場合のモデル。電荷 q に帯電した導体を差し込んだときの電荷分布は、電場に対するガウスの法則と電磁誘導により導体内部に電場が存在しないことを用いれば、求めることができる。この時はコンデンサーの上下の金属板の両面にそれぞれ異なる電荷が帯電している。一方、一番右の図のようにコンデンサーをアースすると、コンデンサーと導体全体で帯電しなくなる。このことと、これまでのことを合わせれば電荷分布を導くことができる。



図 10: 平行板コンデンサーの間に長さ d の絶縁体を入れた場合のモデル。絶縁体では自由電子の移動は起きないが、表面にわずかながら電荷が生じる。これにより、コンデンサー内の電場は少し弱まる。

5.4.3 コンデンサー間に絶縁体を入れる場合

最後に絶縁体を挿入するときを考える。簡単のため、最初絶縁体は帯電していないとする。絶縁体が導体と違うところは自由電子を持たないところである。すなわち平行版コンデンサーの間という電場の中に入れても静電誘導は起きない。ここで絶縁体を構成する個々の分子を見てみよう。個々の分子は正の電荷をもつ原子核 (正確には陽子) と負の電荷をもつ電子によってできている。これを電場中に入れれば正の電荷をもつ原子核と負の電荷をもつ電子はそれぞれ逆方向に少しだけ偏る。つまり、分子のレベルで正と負の電荷をもつようになるのである。これを分極という。絶縁体全体としてみれば結局表面部分の分子の分極だけが有意であるから、絶縁体の表面に少しだけ帯電した形になる。

このとき絶縁体の表面に帯電した電荷をそれぞれ $-q, q$ としよう。するとこのときの電気容量 C' , 電圧 V' , 静電エネルギー U' を考える。電圧について

$$V' = \frac{(Q - q)d}{\varepsilon_0 S} \quad (65)$$

となる。ここで比誘電率 ε_r

$$\varepsilon_r = \frac{Q}{Q - q} \quad (66)$$

と定義すれば

$$V' = \frac{(Q - q)d}{\varepsilon_0 S} = \frac{Qd}{\varepsilon_r \varepsilon_0 S} = \frac{Qd}{\varepsilon S} \quad (67)$$

となる。ただし

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad (68)$$

をこの絶縁体の誘電率という。

5.5 コンデンサーに関する静電気力

コンデンサーが符号の異なる電荷を蓄えた導体の対によって構成されることは述べた。このとき一方の導体に蓄えられる電荷が周囲に電場を作り、その電場によってもう一方の導体に蓄えられた電荷が力が受ける。端的に言えば、コンデンサーを作る導体通しは力を及ぼしあう。

実際にこの力がどれだけか考えてみる。モデルとして平行金属板コンデンサーを考える。説明のために 2 つある平行金属板をそれぞれ A, B と呼ぶことにする。平行金属板 B を原点 O に固定し、位置 x に平行金属板 A を置く。それぞれの面積を S とする。

まずは電氣的に絶縁された並行金属板コンデンサーに電荷 Q が蓄えられた状態を考える。A に蓄えられた電荷 Q によって、作られる電場 E_A は、

$$E_A(x') = \begin{cases} \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} & (x' > x) \\ \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} & (x' < x) \end{cases} \quad (69)$$

で表される。平行金属板 B の電荷 $-Q$ は電場 E_A から力 F_B を受け、

$$F_B = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} \quad (70)$$

となる。これより、 F_B は引力である。同様に平行金属板 A が B から受ける力 F_A も引力である。

これを静電エネルギーの観点から考える。平行金属板 A に対し x 軸正方向の力 $F_{\text{外}}(x)$ を加えて $x \rightarrow x + dx$ に微小変位させた時を考える。このとき静電エネルギー $U(x)$ は

$$U(x) = \frac{1}{2}QV \quad (71)$$

$$= \frac{1}{2}QE_B x \quad (72)$$

$$= \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} x \quad (73)$$

であるが、微小変位させたときに外力がした仕事は、

$$F_{\text{外}} dx = U(x + dx) - U(x) \quad (74)$$

$$= \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} dx \quad (75)$$

$$\therefore \frac{dF_{\text{外}}(x)}{dx} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} \quad (76)$$

であり、正の仕事をしている。よって平行金属板 A に働いている力は x 軸負方向に働き、その大きさ F は

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{1}{2}QE = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \times S \quad (77)$$

とかける。このとき S は平行金属板の面積だから、それにかかっている $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ が単位面積にかかる力と解釈できる。

6 電流と抵抗

導線内部に電界が発生する、すなわち、導線内部に電位差が発生すると、導線内部の自由電子は電界から静電気力を受けて移動する。個々の自由電子によってその動きは異なるが、マクロに見れば導線内部を一定速度の電荷の流れが生じる。これを、電流という。

電流は正の電荷の流れる方向を考える。実際に導線内を動くのは負の電荷をもった自由電子であるから、電流の流れる方向と自由電子の流れる方向は逆向きである。また、その大きさは単位時間あたりに導線の断面を流れる電気量が 1 [C] のとき、1 [A] と定める。

$$1[A] = 1[C/s] \quad (78)$$

断面積 $S[\text{m}^2]$ の導線を考える。この断面を微小時間 Δt の間に ΔQ の電荷が流れたとする。このとき、断面を流れる電流 I は、

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q} \quad (79)$$

と表される。¹

6.1 オームの法則

一様な材質でできた断面積 S 、長さ l の導線の両端に電位差 V を与えたとき、導線を流れる電流 I と電圧 V の間にはオームの法則が成り立つ。

$$V = RI \quad (80)$$

¹ 国際的な基準としては、アンペアの強さが先に定義され、それからクーロンが定義されている。二本の平行導線に電流を流すと力が作用するが (後で説明)、その時の力を基準にしてアンペアを定義している。

R は電気抵抗といい、導線の材質・形状・温度によって決まる。特に、導線内に生じている電界 E は、

$$V = El \Leftrightarrow E = \frac{V}{l} \quad (81)$$

で与えられる。

6.2 キルヒホッフの法則 Kirchhoffsches Strahlungsgesetz

電流および電圧の総和についてキルヒホッフがまとめたものを、キルヒホッフ²の法則という。キルヒホッフの法則自体は目標とするマクスウェル方程式から直接得ることができるが、キルヒホッフはマクスウェルよりも先に一般化した。このキルヒホッフの法則は、回路を考えるうえで基礎となる重要な法則である。

6.2.1 キルヒホッフの第1法則

電気回路の任意の点において、流れ込む電流と流れ出す電流の総和は等しい。これをキルヒホッフの第一法則といい、回路上における電荷の保存則を示したものである。例えば点 A に流れ込む電流を I_1, I_2, \dots で表現する。これは符号付き電流で点 A に流れ込む電流は $I_i > 0$ 、流れ出す電流は $I_i < 0$ とする。このときキルヒホッフの第1法則は

$$\sum_i I_i = 0 \quad (82)$$

と表現できる。

この法則は当たり前すぎて忘れられがちだが、非常に重要な法則である。

6.2.2 キルヒホッフの第2法則

回路内に任意の閉路をとりその閉路 (ループ) にそって電圧をすべて足し合わせた時、その総和は0である。これをキルヒホッフの第2法則といい、回路上における電圧の保存則を示している。例えば回路上の点 A から適当にループ1をとったとする。このときループ1に沿ってかかっている電圧 V_i を足し合わせると、

$$\sum_i V_i = 0 \quad (83)$$

となる。つまり任意のループに対し、ループ1周の起電力 = ループ1周の電圧降下を意味している。

回路を考えていくうえで最終的な目標は電荷・電流の様子を記述することであり、そのために用いられるのがキルヒホッフの第2法則である。この法則を用いれば回路上で未知数を文字式において、必要なだけループをとって立式をできる。これで未知数を求められる。実際キルヒホッフの法則といわれると第2法則を意味することが多いが、あくまで二つ合わさってキルヒホッフの法則である。

6.3 コンデンサーの過渡現象

スイッチを閉じてから充電が完了するまでの様子を考える。回路の式より

$$\begin{cases} V &= RI + \frac{Q}{C} \\ I &= +\frac{dQ}{dt} \end{cases} \quad (84)$$

²グスタフ・ローベルト・キルヒホッフ Gustav Robert Kirchhoff, 1824-1887, ドイツ, 物理学者。プロイセン (現在のロシア、カリーニングラード州) の生まれ。

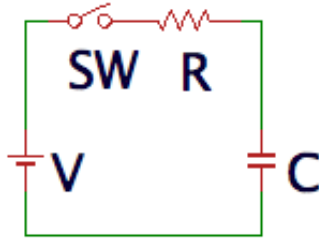


図 11: コンデンサの過渡現象を考えるときの回路図。スイッチを押してからコンデンサが充電されるまでの様子を考える。

となるが、これは指数関数型の微分方程式である。第 1 式に第 2 式を代入して I を消去してやれば

$$V = R\dot{Q} + \frac{Q}{C} \quad (85)$$

$$\therefore \dot{Q} = -\frac{1}{RC}(Q - CV) \quad (86)$$

$$Q - CV = Ae^{-\frac{t}{RC}} \quad (87)$$

となる。初期状態 $t = 0$ はコンデンサは充電されていないので $Q = 0$ となる。よって $A = -CV$ となるので、先の式を変形して

$$Q = CV(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (88)$$

を得る。³

7 抵抗についての補足

導線内の電場により流れる自由電子は加速するが、熱振動をしている陽イオンなどにぶつかり減速される。これにより両者の力学的バランスが取れるので、平均として自由電子は一定速度 v で移動していると考えられる。

断面積 S 、自由電子の密度 n 、の導線内を流れる電流 I を考える。

$$I = enSv \quad (92)$$

である。このとき、長さ l の導線に電圧 V を作る電界 E がかかっているとき、オームの法則より、

$$R = \frac{V}{I} = \frac{El}{enSv} \quad (93)$$

これより、 R に影響する要素は次の通りである。

1. 金属の種類 (n に影響)

³一般に $\dot{x} = k(x - x_0)$ の解は

$$x - x_0 = Ae^{kt} \quad (A: \text{定数}) \quad (89)$$

$t = 0$ において $Q = 0$ より $A = -CV$ となるが、この極限状態を考えると次のようになる。

$$\therefore Q = CV(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} CV = Q_0 \quad (90)$$

$$I = \dot{Q} = \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad (91)$$

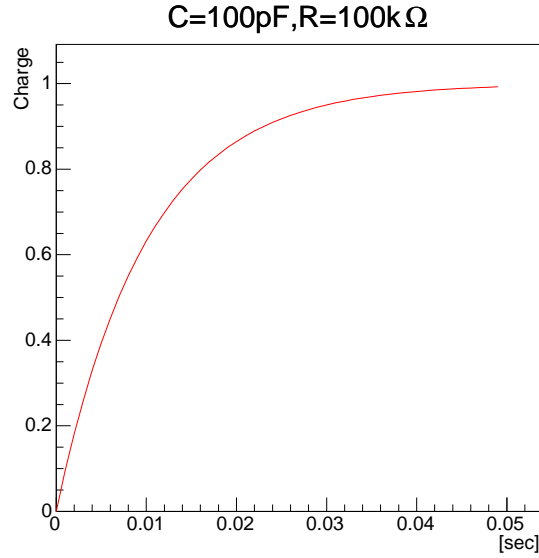


図 12: コンデンサの過渡現象の様子。縦軸はコンデンサに貯まっている電荷量を示している (ただし、規格化をしている)。コンデンサの容量を 100pF, 抵抗を 100k Ω と仮定して計算している。この組み合わせだと、数百分の 1 秒のオーダーで充電される。

2. 導線の形 (S, l に影響)

3. 導線の温度 (v に影響)

金属の種類と導線の温度を考慮する必要性はあまりない。なので、 $R \propto l/S$ と考えられる。

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (94)$$

とかくとき、 ρ を抵抗率という。 ρ の依存性は金属の種類と導線の温度にあるものと考えられ、 n が小さく、また導線の温度が高いほど、 ρ は大きくなると考えられている。

7.1 Joule 熱

導線中の自由電子は単位時間当たり電場から IV の仕事をされているが、 I が一定のとき、これは陽イオンとの衝突により同じ量のエネルギーが失われる。これが単位時間当たりの発生 Joule 熱 (= 消費電力) となり、

$$P = IV = RI^2 = \frac{V^2}{R} \quad (95)$$

有限の電気量を動かして Joule 熱を 0 に近づけるには

合計 Q の電荷を時間 Δt かけて一定電流 I で運ぶ時に発生する Joule 熱 W_J は、

$$W_J = RI^2 \Delta t = R \left(\frac{Q}{\Delta t} \right)^2 \Delta t = \frac{RQ^2}{\Delta t} \quad (96)$$

$$\therefore \quad \Delta t \text{ が有限のとき } R \rightarrow 0 \text{ であれば } W_J \rightarrow 0 \quad (97)$$

$$R \text{ が有限のとき } t \rightarrow \infty \text{ であれば } W_J \rightarrow 0 \quad (98)$$

7.2 ホイートストンブリッジ Wheatstone bridge

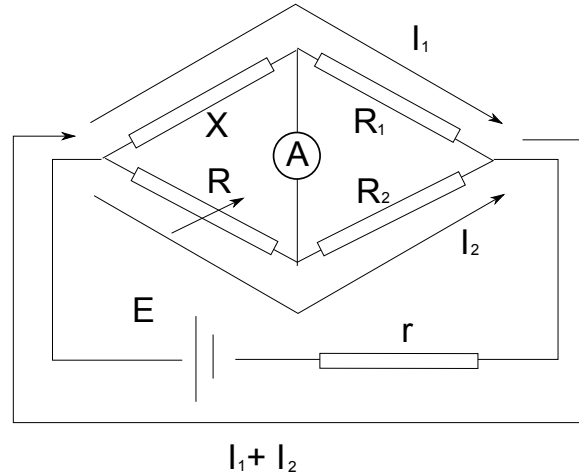


図 13: ホイートストンブリッジ回路

未知抵抗を求める際に用いられる回路のことである。未知抵抗 X の値を求めたい。いま、既知の抵抗 R_1, R_2 , 可変抵抗 R と電源 E を用意する。さらに電源 E の内部抵抗として r を考える。この回路に関してキルヒホッフの第 2 法則を用いると、

$$\begin{cases} 0 &= XI_1 - RI_2 \\ 0 &= R_1 I_1 - R_2 I_2 \\ E &= (R_1 + R_2)I_2 + r(I_1 + I_2) = rI_1 + (R_1 + R_2 + r)I_2 \end{cases} \quad (99)$$

となる。第 1 式と第 2 式から I_1, I_2 を消去すれば、

$$\frac{X}{R_1} = \frac{R}{R_2} \quad (100)$$

となる。これをホイートストンブリッジの平衡条件、これと上の 3 式を合わせた計 4 式を用いることで、回路を解くことができる。

8 電荷・電流に作用する力と磁束密度

空間中を速度 v で移動する電荷 q の受ける力 F は次のようにあらわされる。

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (101)$$

これをローレンツ力という。特に $f = qv \times B$ について、この力は速度 v に垂直 (つまり磁場から受ける力は仕事をしない) で、磁束密度 B に垂直。⁴

⁴素粒子レベルの粒子が通常の実験で受ける電磁気力は、重力よりもはるかに大きい (重力など無視できる程度の大きさ)。実際に計算してみよう。

地球上で電子が 1m の距離に 2 つおいてあるとする。電子の受ける重力 F_g は質量 m_e が $9.109 \times 10^{-31} \text{kg}$ であるから、

$$F_g = m_e \times g \approx 8.927 \times 10^{-30} [\text{N}] \quad (102)$$

である。一方真空における誘電率 ϵ_0 は $8.854 \times 10^{-12} [\text{F/m}]$ 、素電荷 e は $1.60 \times 10^{-19} [\text{C}]$ であるから、電荷が受ける静電気力 F_E は

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e^2}{1^2} \approx 2.300 \times 10^{-28} [\text{N}] \quad (103)$$

である。この値を見れば、電磁気力は重力よりも 2 桁大きい数値である事がわかる。

8.1 磁界と磁束密度の定義

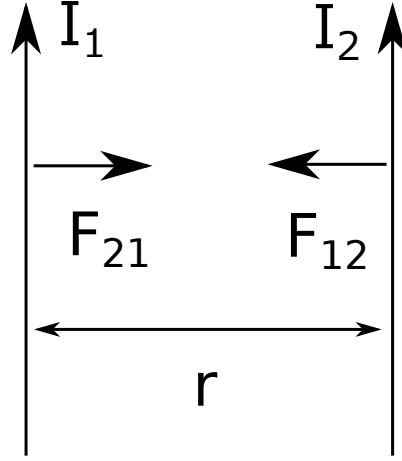


図 14: 2本の並行電流が力を及ぼしあうモデル。一方の電流が周囲に磁場を作り、その磁場からもう一方の電流が力を受ける。

2本の導線に電流を流すと力を及ぼしあう。特に平行に並べた導線に電流を流すと、導線の長さ l の部分に働く力は、向きは作用反作用の法則より逆向きで、その大きさは

$$F = F_{12} = F_{21} = \frac{2k_m I_1 I_2 l}{r} \quad (104)$$

k_m は真空中で $k_m = 1 \times 10^{-7} [\text{N}/\text{A}^2]$ だが、ここで真空の透磁率 $\mu_0 = 4\pi k_m$ を用いると、

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2 l}{r} \quad (105)$$

となる。

しかし、互いにもない空間から力を受けると考えるのは不自然である。なので、次のように考える。

「一方の導線に電流が流れると、そのまわりに磁界が発生し、もう一方の導線を通る電流はその影響を受ける。」

2本の導線に電流 I_1, I_2 が流れている。導線2上の微小な線分 Δs をとり、この部分を通る電流 $I_2 \Delta s$ (電流素片という) が電流 I_1 から受ける力を ΔF_{12} とすると、

$$\Delta F_{12} = I_2 \Delta s \times B_1 \quad (106)$$

と表される。物理量として力・電流および長さを測れば上式から B_1 が分かるので、これは電流 I_1 がつくる磁束密度 B_1 の定義式ともとれる。磁束密度の単位は $[\text{T}]$ (テスラ) であり次が成立。

$$[\text{T}] = [\text{Wb}/\text{m}^2] = [\text{N}/\text{Am}] \quad (107)$$

ただし、ウェーバー $[\text{Wb}]$ は後述する磁束の単位である。

特に電流 I_1, I_2 とが平行である場合、 $\Delta F_{12}, I_2 \Delta s, B_1$ は互いに直交するため、

$$\Delta F_{12} = I_2 \Delta s B_1 \quad (108)$$

$$F_{12} = I_2 l B_1 \quad (109)$$

$$B_1 = \frac{F_{12}}{I_2 l} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \quad (110)$$

このように、直線電流のつくる磁束密度は与えられる。(これは後述の法則でも求められる。)

一般に、空間の有る点における磁束密度 B は、その点におかれた電流素片 $I\Delta s$ とそれに働く力 ΔF によって、

$$\Delta F = I\Delta s \times B \quad (111)$$

と定義される。この式からわかるように ΔF , $I\Delta s$, B のいずれか一つが定まれば残りの一つが分かる。この関係はフレミング Fleming の左手の法則として知られている。

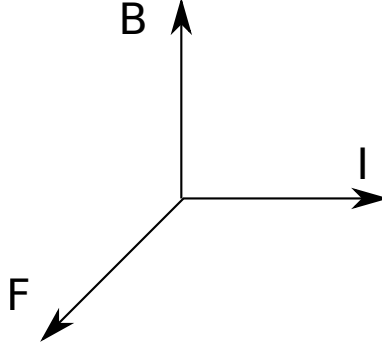


図 15: フレミングの左手の法則の図。この法則は手の形は覚えられても、どの指がどの物理量に対応するかは覚えづらいかもしれない。私が好きなのは、親指・人差し指・中指の順に FBI と覚える方法である。

8.2 電流の受ける力

電流は電子の流れであるので、電流が磁界から受ける力は運動する荷電粒子に働く力と考えることができる。

周囲の磁束密度 B 、断面積 S 、自由電子の密度 n 、の導線内を流れる電子の平均速度を v とすると、この導線を通る電流ベクトル I は、

$$I = -enSv \quad (112)$$

長さ l の部分に含まれる nSl 個の電子が、一つ当たり磁束密度から力 $f = -ev \times B$ を受けるので、この部分全体が受ける力 F は、

$$F = nSlf = l(-enSv \times B) = lI \times B \quad (113)$$

となる。

9 アンペール Ampere の法則

任意のループ C に沿って磁荷を動かすとき、磁場のする単位磁荷当たりの仕事量はループ C を縁とする任意の曲面 S を貫く電流の総和に等しい。

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{s} \quad (114)$$

9.1 無限に長い直流電流の周りの磁場

無限に長いと仮定できる直線電流 I を考える。この直線上に z 軸をもつ円柱座標系をおく。対称性より、直線電流に磁場の z 軸方向成分は存在しないと考えられる。加えて、磁荷が存在しないことから磁場の湧き出し口があってもいけない。よって、磁場は ϕ 成分のみとわかる。

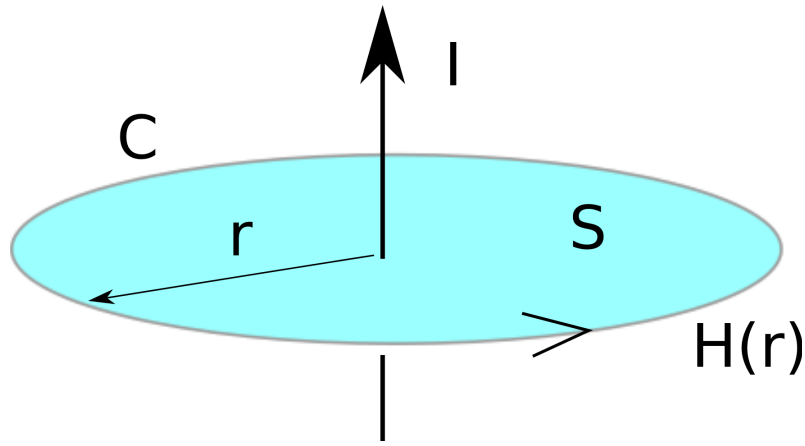


図 16: 無限に長い直線電流周りの磁場のモデル。対称性より直線電流の周りの磁場は ϕ 成分方向しか存在せず、図のような円周上の経路をとってやれば磁場を簡単に計算できる。

この直線電流に垂直で、 z 軸上に中心のある半径 r の円周を考える。この円周上を一周する経路を C としよう。このとき、アンペールの法則より

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{s} \quad (115)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = H(r) \int_C dr = 2\pi H(r) \quad (116)$$

$$\int_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{s} = I \quad (117)$$

$$\therefore H(r) = \frac{I}{2\pi r} \quad (118)$$

となる。

9.2 無限に長いソレノイドコイルの電流の周りの磁場

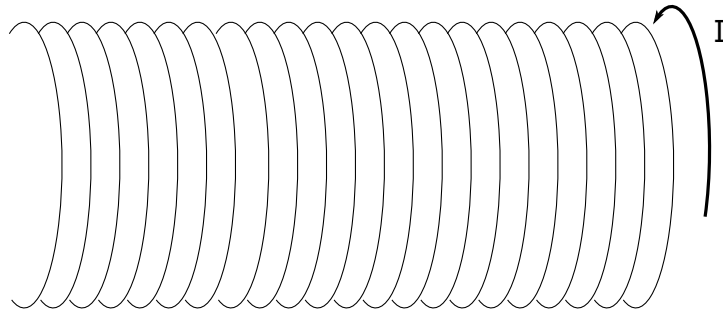


図 17: 無限に長いソレノイドコイルのモデル。単位長さあたりの巻き数を n , 流れる電流を I とする。

無限に長いと仮定できるソレノイドコイルに電流 I が流れていると考える。単位長さ辺りのコイルの巻数を n とする。ソレノイドコイルの中心軸に z 軸をとる円柱座標系をとると、対称性より磁場の r 方向成分は 0 である。また、アンペールの法則より直線電流に対して磁場が垂直であることを思い出せば、ソレノイドコイルにおいては磁場は z 軸方向成分しかなく、特に対称性より半径 r が等しければ同じ大きさの磁場だとわかる。

これから示すような 2 つの経路に対するアンペールの法則、およびソレノイドコイルから十分遠い点における磁場の大きさを考えよう。

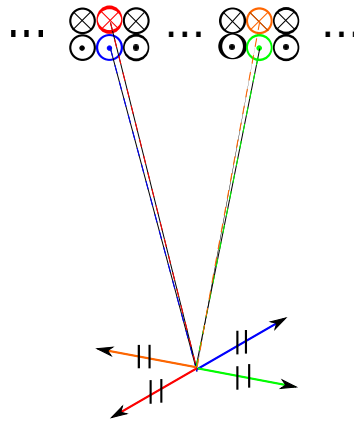


図 18: ソレノイドコイルから十分離れた点における磁場を考える。コイル一巻きずつがその場所に作る磁場を考え、すべてを重ねあわせる。すると、ソレノイドコイルから十分離れた遠方ではコイルひと巻きずつがつくる磁場がキャンセルし合い、ソレノイドコイル全体としてつくる磁場は 0 だとわかる。

まずソレノイドコイルから十分遠い点における磁場について、図 18 を見てみる。ここでの磁場はコイル一巻きずつがつくる磁場の重ね合わせで表記されるが、図のようにコイルがつくる磁場がキャンセルされ、結果としてソレノイドコイルから十分離れた地点における磁場の大きさは 0 である。よってソレノイドコイルから十分離れた部分では磁場は存在しない。

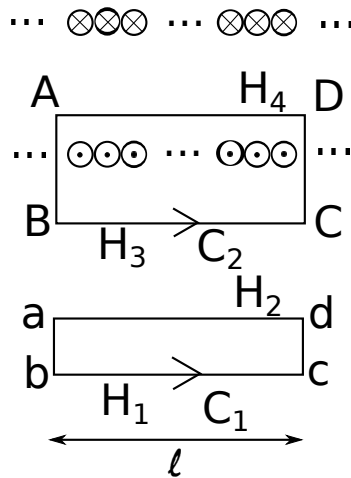


図 19: ソレノイドコイルの内部と周辺の磁場を考えるためのモデル。経路 C_1 はソレノイドコイルの外にとった経路、一方経路 C_2 はソレノイドコイルの長さ l を含むようにとった経路である。

次に、経路 C_1 を考える。対称性から磁場は z 軸方向にしか存在しないから、経路積分において bc 上の磁場の大きさを H_1 , ad 上の磁場の大きさを H_2 とする。また、磁場の正方向は図で左向きとする。この経路に対してア

ンペールの法則を適用してみる。

$$\int_{C_1} \mathbf{H}(r) \cdot d\mathbf{r} = H_2 l - H_1 l \quad (119)$$

$$\oint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (120)$$

$$\therefore H_2 = H_1 \quad (121)$$

となる。ところで、bc を十分遠くにとれば、先の議論より $H_1 \rightarrow 0$ となる。よってソレノイドコイルの外側では磁場は常に 0 である。

最後に経路 C_2 を考える。同様に対称性から磁場は z 軸方向にしか存在しないから、経路積分において BC 上の磁場の大きさを H_3 , AD 上の磁場の大きさを H_4 とする。また、磁場の正方向は図で左向きとする。この経路に対してアンペールの法則を適用してみる。

$$\int_{C_2} \mathbf{H}(r) \cdot d\mathbf{r} = H_4 l - H_3 l \quad (122)$$

$$\oint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{s} = nIl \quad (123)$$

$$\therefore H_4 - H_3 = nI \quad (124)$$

となる。ところで H_3 はソレノイドコイルの外側での磁場だから、先の議論より $H_3 = 0$ である。以上より、次の結果を得る。

$$H_4 = In \quad (125)$$

10 ビオ・サバル Biot - Savart の法則

アンペールの法則から磁場の強さ H が求められるのは対称性がある場合など、限定的である。考える系に対称性がない場合、系を流れる電流が作る磁場を求めるのに用いるのがビオ・サバルの法則である。電流素片ベクトルが作る微小電場の強さを表す式で、

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{Id\mathbf{s}}{|r-s|^2} \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|} \quad (126)$$

である。

参考：磁束密度と磁場

古典物理学では、分子電流のつくる磁場から考える。原子核の周りを回転する電子は見方を変えれば電流であり、原子 (分子) は磁石としても見れる。磁石でない物体は、この原子 (分子) 磁石の向きがランダムになっているため、総じて磁場を打ち消しあう。一方、原子 (分子) 磁石の向きが整った場合、重ね合わせの法則から物体は磁石となる。

なお、真空中では

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (127)$$

の関係がある。真空以外のとき、理想化すれば

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (128)$$

とかける。このとき、 μ を物質の透磁率という。

11 磁束密度に関するガウスの法則

電界ベクトルを連ねて描いたものを電気力線と呼んだが、同様に磁束密度ベクトルを連ねて描いた曲線を磁束線と呼ぶ。ある点における磁束密度が B のとき、その点を中心とする磁界に垂直な単位面積を通る磁束線が B 本になるように描く。

磁界の中にある任意の曲面 S をとった時、曲面を一方から貫く磁束線の総本数 Φ を、 S を通過する磁束という。これより、 Φ は、

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (129)$$

と表される。磁束の単位は $[\text{Wb}]$ (ウェーバー) であり、次のような関係がある。

$$[\text{Wb}] = [\text{Tm}^2] = [\text{Nm/A}] = [\text{Nms/C}] = [\text{Js/C}] = [\text{Vs}] \quad (130)$$

ビオ・サバールの法則より、任意の電流素片が作る磁束線は円を描き、始点と終点が存在しない。なので、任意の閉曲面 S に対して、 S に入る磁束と S から出る磁束の本数は等しい。なので、

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (131)$$

これを、磁束密度に関するガウスの法則という。

12 電磁誘導

相対的に磁場が変化することにより、導体内に起電力が生じること。

1. 磁場中を運動する導体中の自由電子がローレンツ力によって電荷の流れを生じる。
2. 磁場が時間変化することにより、周囲に電場が発生。この電場が導体中の電荷に対して影響し、電荷の流れを生み出す。

電磁誘導によって生じる起電力を誘導起電力、これによって導体内に発生する電界を誘導電界、これによって導体内を流れる電流を誘導電流という。

1. について

PQ 中に考えた単位正電荷は $Q \rightarrow P$ 向きの力 $|(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{PQ}|$ を受け、 Q から P へ動かされるとき、単位電荷当たり、

$$\text{仕事 } V = l|(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{PQ}| \quad (132)$$

をされる。これが、 $Q \rightarrow P$ 向きに生じる誘導起電力である (電荷に対して何かしらの仕事をする構造があるとき、“起電力がある”という)。これにより PQ 中には電荷の偏りが生じるため、静電場が発生する。定常状態での力のつり合いより、

$$0 = (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{PQ} - \mathbf{E} \quad (133)$$

なので、 Q に対する P の電位は、

$$\phi_P - \phi_Q = |\mathbf{E}|l = l|(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{PQ}| = V \quad (134)$$

である。

誘導起電力の向きだけならば、フレミングの“右手”の法則によっても確認できる。

2. について

電場は時間変動の周りを取り囲む

導線でできた閉回路 C が磁界の中にあるとき、 C を貫く磁束の総本数 Φ は、一般に閉回路 C を縁とする任意の閉曲面 S で面積分したものに等しい。

$$\Phi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (135)$$

ファラデーはこの磁束が時間的に変動すると閉回路内に起電力が生じ、そのために閉回路内に電流が流れることを実験で示した。この現象は以下のようにまとめられる。

1. 閉回路を貫く磁束が時間的に変化すると、閉回路内に起電力 (電位差) が生じ、その起電力の大きさは閉回路を貫く磁束の時間微分に等しい。
2. 閉回路内に発生する起電力は、これによって回路に流れる電流が作る磁束が閉回路を貫く元の磁束の変化を打ち消すような向きに発生する。

これらの法則をファラデーの法則といい、特に後者をレンツの法則ということもある。

上記の法則を数式的にあらわすと次のようになる。回路に生ずる誘導起電力を V 、回路内に生ずる誘導電界を E とすると、

$$V = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} \quad (136)$$

回路に生ずる電磁誘導はどちらによっても説明できる。

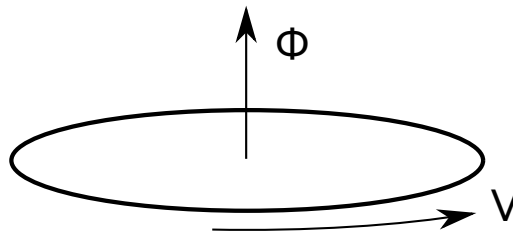


図 20: レンツの法則のモデル。磁束密度の変化を妨げる方向に誘導起電力が生じる。

12.1 サイクロトロン

荷電粒子を加速させる装置である。金属導体間にうまく交流電源を仕込むことにより、粒子を加速させていく。磁束密度と進行方向に対し常に垂直に働くクーロン力を中心力にした円運動を利用している。このとき、角速度は一定である。ただし、サイクロトロンはその性質上、粒子は加速されるたびに回転半径が大きくなる。中心力を操作することによって粒子を常に円運動させるのがベータトロン。粒子の円軌道の内部を貫く磁束の量をうまく調整して、円運動をさせ続ける。

12.2 ベータトロン

サイクロトロンが荷電粒子が加速されるにつれてその回転半径が大きくなる一方、ベータトロンは回転半径を一定に保ったまま荷電粒子を加速する装置である。その方法は、回転運動する粒子の軌跡を貫く磁束密度を増加させることである。

z 軸正方向に磁場 B がかかっている場において、 xy 平面上を質量 m , 電荷 q の粒子が半径 R の円運動をしている。このとき、この円運動の半径を R に保ったまま荷電粒子を加速するための磁場に関する条件を考える。ただし、磁場の強さは z 軸に対し回転対称であるとする。

円柱座標を考える。この空間ではレンツの法則より電場は E_ϕ 方向しか存在せず、その大きさは、

$$E_\phi = \frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r r' B(r', t) dr' \quad (137)$$

である。この電場から力を受けて、荷電粒子は加速される。加速度は

$$m \frac{dv}{dt} = qE_\phi \quad (138)$$

によって決まる。一方、 r 方向の運動方程式は遠心力とローレンツ力が釣りあうため、

$$m \frac{v^2}{R} = qvB(R, t) \quad (139)$$

が成立する。以上 2 式より、

$$m \frac{dv}{dt} = qR \frac{\partial B}{\partial t} = qE_\phi \quad (140)$$

となる。これよりまとめると、

$$B(R, t) = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r B(r, t) dr = \frac{1}{2} \overline{B(t)} \quad (141)$$

となる。ただし、 $\overline{B(t)}$ は半径 R の円の内部の平均磁束密度である。これを、ベータトロン条件と呼ぶ。

12.3 ホール効果

電流が流れている導体板に、電流に垂直に磁場を加えると電位差が生じる。これは流れる荷電粒子が磁場によってローレンツ力を受けるからである。この現象をホール効果という。ホール効果によって磁束密度や導体中の自由電子の密度を求めることができる。

具体的に未知の磁束密度を求めてみる。磁束密度の大きさを B , 電子の速度を v とする。導体中の電子はローレンツ力によって偏りを生じ、それによって電場 E が生じる。電子の偏りは電子が電場から受ける力とローレンツ力が釣り合うまで続く。よって、定常状態での釣り合いの式は、

$$eE = evB \quad \therefore E = vB \quad (142)$$

となる。一方流れる電流 I について、導体板の断面積を S , 高さを h , 幅を d , 電子密度を n とすると、

$$I = envS = env \times hd \quad (143)$$

$$\therefore v = \frac{I}{enhd} \quad (144)$$

となる。導体板に電圧計を設置し、測定した電圧が V だったとき、これがホール効果による電圧であるから、

$$V = Ed \quad (145)$$

となる。以上をすべてまとめると、

$$B = \frac{nehV}{I} \quad (146)$$

となる。

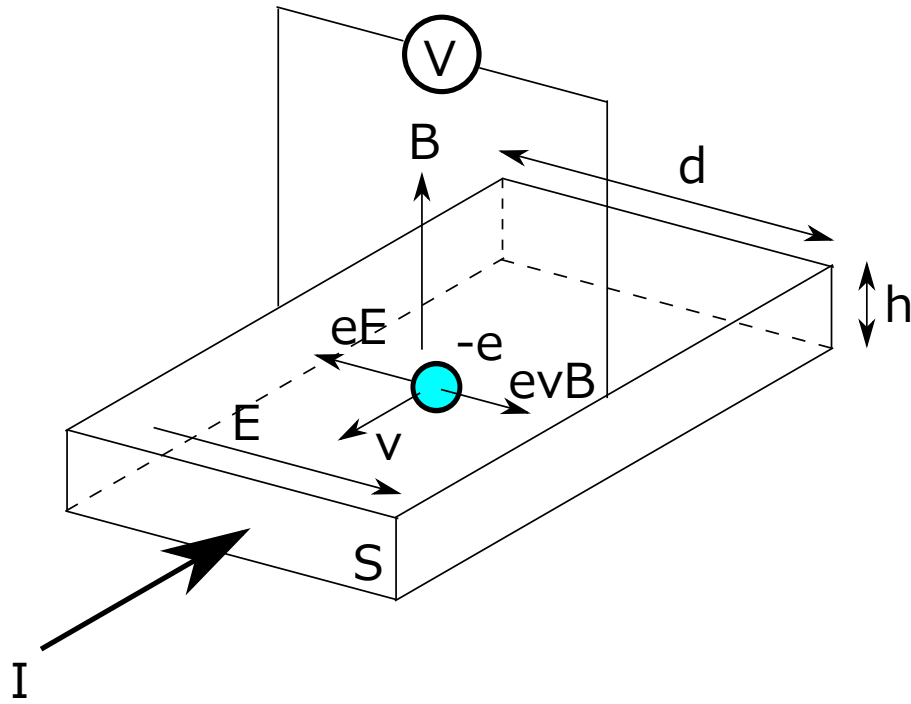


図 21: ホール効果から磁束密度の大きさを測定するためのモデル。電子が磁束密度からローレンツ力を受け偏りを生じ、電場が生まれる。電場による静電気力とローレンツ力がつりあう時に定常状態になる。

13 コイル

13.1 自己誘導

アンペールの法則およびビオ・サバルの法則より、任意のコイルに電流 I を流すとコイルの内側にできる磁束密度 B は I に比例する。したがって、コイルを貫く磁束 Φ も電流 I に比例する。即ち、磁束 Φ は L を比例定数として、

$$\Phi = LI \quad (147)$$

とかける。したがって、コイル内にはファラデーの法則によって、

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (148)$$

と表される誘導起電力が、コイルに元から流れている電流の向きを妨げる方向に働く。つまり、回路の中に抵抗の代わりにコイルを入れても同じ働きが期待できる。(ただし、時間的に変動する電流に限る)

特に、 N 回巻かれたソレノイドコイルなどの場合、一巻きあたりを貫く磁束を ϕ とすると、ソレノイドコイルを貫く全磁束は $\Phi = N\phi$ となる。また、ソレノイドコイル全体で生じる誘導起電力 V も、一巻きあたりが生じる誘導起電力を v とすると、 $V = Nv$ となる。

このように、コイルを流れる電流が時間的に変動するとコイル内に流れる電流を妨げる向きに誘導起電力が発生する現象を自己誘導 self-induction とよび、比例定数 L を自己インダクタンス self-inductance という。なお、自己インダクタンスはコイルの形状によって決まる。自己インダクタンスの単位はヘンリー [H] であり、次の関係がある。

$$[H] = [Wb/A] = [Vs/A] \quad (149)$$

13.2 相互誘導

コイル1とコイル2が相対しておいてあるときを考える。コイル1に電流 I_1 が流れると周囲に磁界が生じ、コイル2を貫く磁束 Φ_2 が生じる。電流 I_1 が変化すると磁束 Φ_2 も時間変化し、それによってコイル2に誘導起電力が生じる。磁束 Φ_2 は電流 I_1 に比例するのでその比例定数を M_{21} とすれば、コイルの誘導起電力 V_2 は、

$$V_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (150)$$

このように、一方のコイルに流れる電流が時間的に変動すると、もう一方のコイル内に誘導起電力を生じる現象を相互誘導 mutual induction、比例定数 M_{21} を相互インダクタンス mutual inductance という。

なお、コイル1の誘導起電力 V_1 についても同じことが言え、

$$V_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt} \quad (151)$$

となる。なお、相互インダクタンスはそれぞれのコイルの形状と位置関係で決まり、

$$M_{12} = M_{21} \quad (152)$$

の関係がある。

以上より、自己誘導と相互誘導の両効果によってコイルに生じる誘導起電力をまとめると次のようになる。

$$V_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \quad (153)$$

$$V_2 = -M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} \quad (154)$$

13.3 コイルの磁気エネルギーと磁界のエネルギー

コイルに電流を流し始めてから定常電流 I が流れるまで、コイルを流れる電流は時間変化し、その間コイルは誘導起電力 V を生じる。電流を I にするためにはこの誘導起電力 V に逆らって電荷を運ぶ必要がある。微小時間 dt に運ばれる電荷は $dq = I' dt$ だから、これに必要な仕事 dW は

$$dW = -V dq = -V I' dt = L I' \frac{dI'}{dt} dt \quad (155)$$

$t = 0$ で $I' = 0$, $t = t'$ で $I' = I$ とすれば電源がする仕事 W は

$$W = \int dW = \int_0^{t'} L I' \frac{dI'}{dt} dt = \int_0^I L I' dI' = \frac{1}{2} L I^2 \quad (156)$$

これが電流 I が流れるコイルの持つエネルギーで、磁気エネルギー magnetic energy と呼ぶ。磁気エネルギーはコイル自体が蓄えているとも、コイルが作る磁界に蓄えられているとも解釈できる。

あえて磁気エネルギーはコイルのつくる磁界が蓄えていると考える。半径 a 、長さ l 、単位当たりの巻き数 n のソレノイドコイルに電流 I が流れているとする。 $a \leq l$ とすれば、内部の磁束密度は一様で、外部の磁束密度は無視できる。このとき

$$B = \mu_0 n I \quad (157)$$

$$\phi = \pi a^2 B = \mu_0 n I \pi a^2 \quad (158)$$

$$\Phi = n l \phi = \mu_0 n^2 l I \pi a^2 \quad (159)$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 n^2 l \pi a^2 \quad (160)$$

となる。⁵ だから、磁気エネルギー W は

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \frac{(\mu_0 n I)^2}{\mu_0} l \pi a^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} \times l \pi a^2 \quad (165)$$

ここで $l \pi a^2$ はソレノイドコイルの内部の体積 = 磁界の存在する空間の体積なので、磁界に蓄えられる単位体積当たりのエネルギーは

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (166)$$

とわかる。これは、ソレノイドコイルに限らず一般に成り立つ。

14 交流回路～時間変化する電圧に対して

14.1 リアクタンスとインピーダンス

これまでさんざん扱ってきた抵抗は電流の流れにくさを表す。直流・交流を問わず抵抗値が大きいほど電流は流れにくい。ここで新たな量としてリアクタンスとインピーダンスを定義する。

リアクタンスは交流回路のコイルとコンデンサにおける電圧と電流の比である。詳しくは後述するがコイルとコンデンサは交流回路において「電流の流れにくくする素子」として作用する。その作用の大きさを表したのがリアクタンスである。リアクタンスはオームの次元を持ち、リアクタンスはエネルギーを消費しない擬似的な抵抗である。

インピーダンスとは圧と流の比を表す言葉である。この考え方は電気回路においても成立する。電気信号も波動であるのはもはや説明する必要はないと思うが、そのため電流・電圧は複素数を用いて表現できる。⁶ 電気回路におけるインピーダンスは交流回路における電圧と電流の比を表す。よってインピーダンスは複素数となるが、実数部を抵抗、虚数部をリアクタンスという。

14.2 抵抗の場合

交流電源 v と抵抗 R からのみなる回路を考える。回路を流れる電流を i_R とする。

$$v = v_0 \sin \omega t \quad (167)$$

$$v = Ri_R \quad (168)$$

$$\therefore i_R = \frac{v_0}{R} \sin \omega t \quad (i_R \text{ は } v \text{ と同位相}) \quad (169)$$

$$\text{実効値 } V = \sqrt{\overline{v^2}} = v_0 \sqrt{\overline{\sin^2 \omega t}} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \quad (170)$$

$$I_R = \sqrt{\overline{i_R^2}} = \frac{v_0}{\sqrt{2}R} \quad (171)$$

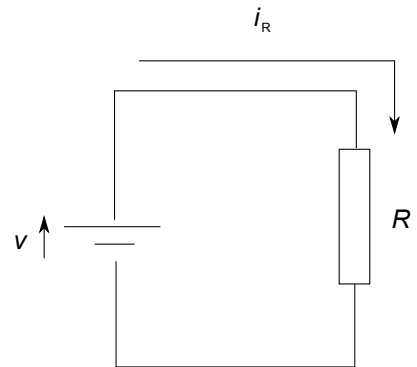


図 22: 抵抗と交流電源による回路モ

⁵ 具体的にコイルの自己インダクタンス L がどれくらいになるか計算してみよう。20 回巻き、長さ 1cm、直系 22cm のエナメル線コイルを考える。先の式に代入するには $nl = 20, l = 0.01, a = 0.11, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ なので、計算してやれば、

$$L = \mu_0 n^2 l \pi a^2 \quad (161)$$

$$= 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{20^2}{0.01} \times \pi (0.11)^2 \quad (162)$$

$$= 0.0019107... \quad (163)$$

$$= 0.0019[\text{H}] \quad (164)$$

となる。このコイルは筆者がループアンテナとして実際に作成したものであり、これをインバータ蛍光灯の近くにおくと 50kHz の振動を観測することができる。

⁶ 電気回路において正弦信号を複素数で表現することを、フェザー表示という。

この時リアクタンス X_R (抵抗の場合は $\frac{v}{i_R} = R$ で一定なので、特にリアクタンスとは呼ばない) は

$$X_R = \frac{V}{i_R} = R \quad (172)$$

となる。これより、電流の位相と電圧の位相は等しいことがわかる。

また、この時のエネルギー収支は、

$$vi_R = Ri_R^2 \quad (173)$$

である。この左辺は電源供給電力 p 、右辺は R での消費電力 p_R を表す。

$$\therefore p = p_R = \frac{v_0^2}{R} \sin^2 \omega t \quad (174)$$

$$\therefore \bar{p} = \bar{p}_R = \frac{v_0^2}{R} \sin^2 \omega t = \frac{v_0^2}{2R} = \frac{V^2}{R} = I_R = RI_R^2 \quad (175)$$

14.3 コンデンサー

交流電源 v とコンデンサー C からのみなる回路を考える。回路を流れる電流を i_C とし、そのとき電流の流れる向きはコンデンサーに蓄えられる電荷 q が増える向きであるとする。

$$v = v_0 \sin \omega t \quad (176)$$

$$\begin{cases} v = \frac{q}{C} \\ i_C = \frac{dq}{dt} \end{cases} \quad (177)$$

$$\therefore i_C = \frac{d}{dt} Cv = \omega C v_0 \cos \omega t = \omega C v_0 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (178)$$

となる。これより、電流の位相は電源の位相に対して $\frac{\pi}{2}$ 進んでいることがわかる。

$$\text{実効値 } V = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \quad (179)$$

$$I_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega C v_0 \quad (180)$$

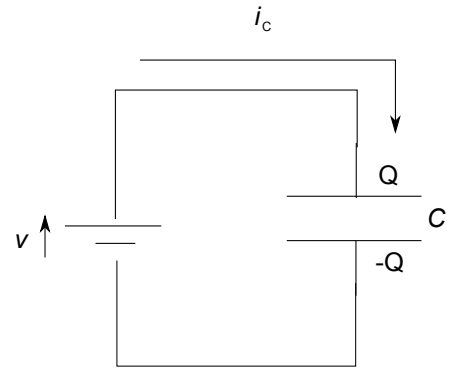


図 23: コンデンサーと交流電源の回路モデル。

この時リアクタンス X_C (コンデンサによるリアクタンスは、容量リアクタンスとも) は

$$X_C = \frac{V}{I_C} = \frac{1}{\omega C} \quad (181)$$

となる。これより、コンデンサーは交流に対しては抵抗として働き、低周波のものほど電流として通しにくく、高周波のものほど電流として通しやすい。

また、この時のエネルギー収支は、

$$vi_C = \frac{q}{C} \dot{q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2C} \right) \quad (182)$$

である。この左辺は電源供給電力 p 、右辺は C での”コンデンサーの消費電力” p_C を表す。

$$\therefore p = p_C = \omega C v_0^2 \sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} \omega C v_0^2 \sin 2\omega t \quad (183)$$

$$\therefore \bar{p} = \bar{p}_C = 0 \quad (\text{この回路で消費される電力はない当たり前の結果}) \quad (184)$$

となる。

14.4 誘導コイル

交流電源 v と誘導コイル L からのみなる回路を考える。回路を流れる電流を i_L とする。

$$v = v_0 \sin \omega t \quad (185)$$

$$v - L \frac{di_L}{dt} = 0 \cdot i_L \quad (186)$$

$$\therefore i_L = \int \frac{v}{L} dt = -\frac{v_0}{\omega L} \cos \omega t + \text{定数} \quad (187)$$

となる。しかし、実際この電流の定数部分は回路自身のもつ微小抵抗により十分時間がたつと減衰してしまう。

であるからして、定常解としては

$$i_L = -\frac{v_0}{\omega L} \cos(\omega t) \quad (188)$$

$$= \frac{v_0}{\omega L} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (189)$$

となる。これより、電流の位相は電源の位相より $\frac{\pi}{2}$ 遅れていることがわかる。

$$\text{実効値 } V = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \quad (190)$$

$$I_C = \frac{v_0}{\sqrt{2}\omega L} \quad (191)$$

この時リアクタンス X_L (誘導リアクタンスとも) は

$$X_L = \frac{V}{I_L} = \omega L \quad (192)$$

となる。これより、誘導コイルは交流に対しては抵抗として働き、高周波のものほど電流として通しにくく、低周波のものほど電流として通しやすい (コンデンサーと逆)。

また、この時のエネルギー収支は、

$$vi_L - Li_L \dot{i}_L = 0 \quad (193)$$

$$vi_L = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li_L^2 \right) \quad (194)$$

である。この左辺は電源供給電力 p 、右辺は L での”コイルの消費電力” p_L ということもある。

$$\therefore p = p_L = -\frac{v_0^2}{\omega L} \sin \omega t \cos \omega t = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\omega L} \sin 2\omega t \quad (195)$$

$$\therefore \bar{p} = \bar{p}_L = 0 \quad (196)$$

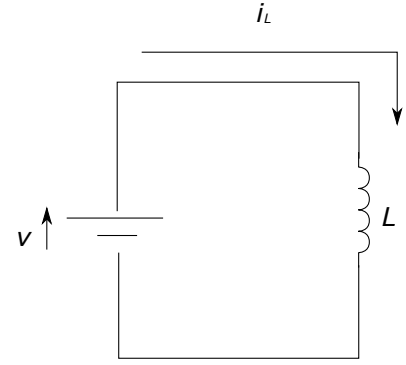


図 24: 誘導コイルと交流電源の回路モデル。