力学 ver4.8.2

ヒカル@ヒカルの家/Hikaru's House

平成 26 年 9 月 12 日

概 要

物理学全体において、高校までに扱う力学は古典力学と呼ばれる。これはニュートンの作った力学であり、すべての事象は初期状態さえわかればその後の運動を完全に記述できるというものである。しかし研究が進みより小さな世界、例えば原子や分子などについて考えるとき、これまでの物理では説明できなくなった。ここで新たに生まれたのが量子力学である。非常に小さな世界を扱う量子力学に対して、目に見える世界を扱う古典力学では想像することが大切である。

1 ニュートンの 3 法則

古典力学のニュートンの導いた 3 つの法則が基本となっており、この 3 つはそれぞれ慣性の法則・運動の法則・作用反作用の法則という。ここではその 3 つの法則について確認する。[1]

1.1 第一法則：慣性の法則

物体は力を受けない限り同じ運動を続ける。つまり運動している物体は同じ方向に等速運動を続けるし、静止している物体は静止状態のままである。この法則を慣性の法則とも呼ぶ。特に慣性の法則が成り立つような座標系を慣性系という。静止している状態を速度 $\mathbf{0}$ の等速直線運動と考えれば、慣性の法則は「速度一定の運動（＝速さ一定の等速直線運動）」と表現できる。

さて、こういう表現をしたからには当然慣性系以外の座標系も存在する。慣性の法則は常に成り立つわけではない。例えば、円状の道を一定の速さで走る車を考えよう。このとき、速さは一定であるが運動の方向が変わっているので速度は一定ではない。よって慣性の法則は成り立たない。

今度は電車とともに移動する座標系を考える。電車が一定の運動をしている間、乗客の体は何の力も受けないが、ブレーキがかかると体は前につんのめりそうになる。ブレーキがかかっている間乗客の体は減速しており、速さは一定ではない。よってブレーキしている最中の系は、慣性系ではない。慣性の法則が成り立たない座標系のことを非慣性系と呼ぶこともある。また、乗客がつんのめるということは力を受けていることになる。このように慣性系では生じないが、非慣性系だとあたかも生じているような力を慣性力という。ブレーキがかかった電車内で体を前に引っ張るのは慣性力である。

なぜ慣性力などを考えるのか? それは我々が物理を考える上で、地上と同じ慣性系で議論したいからである。非慣性系を慣性系と同じように扱うために導入された見かけの力、それが慣性力である。

1.2 第 2 法則：運動方程式

質量 m の物体に対しある方向に力 $\boldsymbol{F}$ を加えると、慣性の法則から物体は運動を変える。このとき力 F と同じ方向の物体の加速度 $\boldsymbol{a}$ は力 $\boldsymbol{F}$ に比例し、

$$\boldsymbol{a} = k\frac{\boldsymbol{F}}{m} \tag{1}$$

[1]ニュートンの 3 法則はニュートンの著書『自然哲学の数学的原理 Philosophiae Naturalis Principia Mathematica 』でまとめられている。

という関係があった。ただし k は比例係数である。これをニュートンの第 2 法則という。また力の単位ニュートン [N] を質量 1kg の物体が加速度 $1\mathrm{m/s^2}$ のとき、物体に作用している力の強さを 1N と定義する。[2]

特に運動の法則の比例係数 $k = 1$ とした時の

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\ddot{\boldsymbol{x}} \tag{2}$$

を運動方程式という。[3]

1.3 第 3 法則：作用反作用の法則

物体 A から物体 B に対して力 $\boldsymbol{F}_1$ を及ぼす際、同じ作用線上で大きさが等しくで逆向きの力 $\boldsymbol{F}_2$ が物体 B に対して作用する。これを作用反作用の法則という。

重要なのは作用反作用の法則が二つの物体の間において成立するということである。たとえば、机の上にのっている箱が机に及ぼす力と、箱が机から受ける力は作用反作用の関係にある。このとき箱も机も動かない。一方、この箱が左右からそれぞれ同じ力で押されていたとしよう。このときも箱は動かないが、左右から押される力はともに箱に対して作用している。このように同じ作用線上で大きさが等しく逆向きの力であっても、同じ物体に対して作用する力はつり合いの関係にあるという。[4]

1.4 古典力学と微積分

物理において微積分は非常に重要な概念である。まず微分について見てみよう。ただし、簡単のためにすべて一次元で考える。

単位時間あたりの距離の変化が速さであるから、$v = \dot{x}$ である。さらに単位時間あたりの速さの変化が加速度であるから $a = \dot{v} = \ddot{x}$ である。一般的にドットで微分を表記する場合、時間微分を表す。

つづいて教科書でよくみる位置、速度、加速度、時間の関係式をみてみる。簡単のため加速度 a は一定、初期位置を x_0 とする。時刻 t における位置、速度、加速度をそれぞれ x, v, a とする。

$$v = v_0 + at \tag{4}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{5}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2at \tag{6}$$

多くの人が物理の試験前にこぞって暗記したであろう式の一覧である。これまですべて暗記していたかもしれな

[2] ニュートン [N] は質量・長さ・時間によって表現される。質量・長さ・時間はどのように定義できるか？答えはこの 3 つの単位はそれぞれなんらかの物理量を基準に定められている。質量は国際キログラム原器というものが存在しており、これで 1kg の重さが定義される。時間はセシウム原子時計という普遍的な自然現象を用いて、1 秒を定義している。長さが光が 1 秒間に進む距離の何分の 1 ということで定義されている。これらはほかの単位の基本となる値であり、非常に重要な単位である。

[3] 何の説明もなく変数の上にドットを書いて混乱したかもしれないが、これはニュートンの記法と呼ばれる数学における微分の表現方法の一つである。ドットの数で何階微分であるかを意味する。一方数学でよくみる dy/dx という記法はライプニッツの記法と呼ばれる。さらに数学でみる積分記号はライプニッツの積分の記法と呼ばれる。つまり

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{3}$$

ニュートンの記法は主に古典力学において用いられ、特に用いられる際は時間微分の意味として用いられることがほとんどである。

[4] 物理において用いられる定数の記号は何かしらの英単語の頭文字であることが多い。具体例を上げると、力は force、質量は mass、加速度は acceleration、仕事は work といった具合である。無意味に記号を覚えるのではなく、どんな物理量か意味を考えながら覚えるといいだろう。

いが、これらはいずれも積分で説明できる。

$$\begin{aligned} v &= v_0 + \int_0^t a dt' = v_0 + at & (7) \\ x &= \int_0^t v(t') dt' = \int_0^t (v_0 + at') dt' = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 & (8) \\ v^2 &= (v_0 + at)^2 = v_0^2 + 2 v_0 a t + a^2 t^2 = v_0^2 + 2ax & (9) \\ \therefore v^2 - v_0^2 &= 2ax & (10) \end{aligned}$$

2 座標系

運動方程式 $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$ という因果律は慣性系という系でのみ成り立つ。この慣性系とは、慣性の法則が成り立つ座標系のことである。簡単にいえば、力を受けない物体が等速直線運動 (静止を含む) をする座標系のことである。[5] 非慣性系 (慣性系ではない系) において運動方程式を考える場合、慣性力という見かけの力を導入することによって現象を説明できる。ここでは、慣性系とは具体的にどのような系かを具体的に説明し、同じ現象を慣性系と非慣性系から見た時どのような違いがあるか、そして慣性力とは何かについて説明する。多くの人が 地球上での物体の運動を考えるとき、一般的に地球上に固定した座標系を考える。この 地球に固定した座標は慣性系[6]である。一方地球表面に対して運動する座標系は、並進座標系と回転座標系にわけて扱うことができる。並進座標系は静止座標系に対して軸の向きを変えずに移動する（平行移動する）系、回転座標系は軸の向きが変わる座標系である。

そもそも、これまで扱ってきた運動方程式 $bmF = m\ddot{\boldsymbol{r}}$ というのは一部の系でしか成り立たない。少しアドバンスな話をすると、静止座標系に対して平行移動する系であっても非常に大きな速度で移動する系ではこの運動方程式が適用できなくなり、これは相対論的な作用が働くからである (光速に近い速度で移動する物体の質量が増加する!!)。物理法則は系の形によらずに同じ式で書けるべきであり、ここで質量を一定としていた運動方程式を書き換える必要が生まれる。これは完全に高校範囲を超えるので今は扱わないが、そういう背景があるということを知っておいてほしい。

以下の部分は必ずしも必要ではない

それでは具体的な話をする。

慣性系 S に対して加速度を持っている座標系 S' を考える。はじめに加速度といっても回転を伴わない並進加速度[7] の場合とする。S, S' 系で表した質点の座標をそれぞれ $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$ とする。また、S の座標から見た S' の原点の位置座標を $\boldsymbol{R}$ とする。このとき、

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{R} \tag{11}$$

となる。この両辺を 2 回時間微分し、さらに質点の質量 m をかければ、

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = m\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} + m\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \tag{12}$$

とかけ、これより、S' 系での運動方程式は

$$\left\{ \begin{array}{rcl} m\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} &=& \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A} &=& \frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} \end{array} \right. \tag{13}$$

[5] 普段私達が生活している世界では、力を受けていない物体は同じ運動を続ける。なので私達が普段生活しているのは慣性系である。一方、メリーゴーランドの上に乗って、外にいる家族に手を降っている時を考えよう。読者の家族は力を受けていないが、読者から見ると家族は自分の周りをくるくると回っている。力を受けていない人 (物体) が等速直線運動をしていないので、メリーゴーランドの上から見た世界は慣性系ではない。

[6] 地面に固定した座標系を静止座標系という。

[7] 慣性系 S に対して座標系 S' が平行移動している状態。

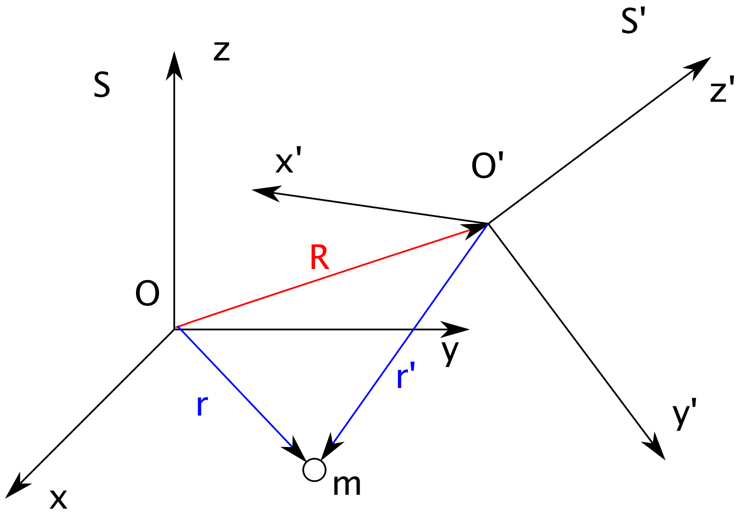


図 1: 静止系 S とそれに対して運動する系 S'。系 S の原点 O に対する系 S' の原点 O' の相対ベクトルを $\boldsymbol{R}$ とする。また、質量 m の質点の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'$ とする。

となる。このとき表れる見かけの力 $-m\boldsymbol{A}$ を、慣性力という。仮に S' が S に対して等速度運動をしていれば、運動方程式の形は変わらない。このことを、「運動方程式はガリレイ変換に対して不変である」という。[8]

今度は回転座標について考える。それにあたって、角速度ベクトルの話をする。図 2 のように、あるベクトル $\boldsymbol{A}$ が中心軸の周りを回転しているとする。この中心軸を z 軸としよう。また、ベクトル $\boldsymbol{A}$ の始点と終点をそれぞれ P, Q とする。ベクトル $\boldsymbol{A}$ の始点 P は z 軸上にあるとする。さらに、Q から z 軸に下した垂線の足を R とする。このとき、ベクトル $\boldsymbol{A}$ が z 軸の周りを回転しているというのは、P を固定し、Q が R を中心とする、z と垂直な円周上を回転している状態のことを指す。ある微小時間 δt の間に、Q が Q' に移ったとする。このときのベクトル $\boldsymbol{A}$ の変化量 $\delta\boldsymbol{A} = \overrightarrow{QQ'}$ とする。角 $QRQ' = \delta\varphi$ とする。さらに、z 軸上に $\boldsymbol{A}$ を射影した向きで大きさが $\delta\varphi$ の無限小回転ベクトル $\delta\boldsymbol{\varphi}$ をとる。するとこのとき、

$$\delta\boldsymbol{A} = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{A} \tag{14}$$

と書ける。これより、

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\boldsymbol{A}}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\boldsymbol{\varphi}}{\delta t} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A} \tag{15}$$

となる。ただし、

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\boldsymbol{\varphi}}{\delta t} \tag{16}$$

と回転ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を定義した。重要なことはこのような回転ベクトルを回転軸向きにとると、

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A} \tag{17}$$

という形で書けることである。

これを用いて回転座標系の場合を説明する。

慣性系 S に対して回転する座標系を S'' とする。簡単のため、S と S'' の原点は一致しているとする。このとき、S, S'' における質点の位置座標を $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}''$ とし、さらに回転座標 S'' における座標を (x, y, z) とする。そして、S'' の基底ベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする。このとき、

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'' = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \tag{18}$$

[8] ガリレイ変換とは、慣性系から慣性系への座標変換の方法である。相対論的効果を考慮していないため厳密には正しくないが、光速において十分遅い系、特に古典力学においてはよく成立する。一方、相対論的効果を考慮した変換をローレンツ変換という。

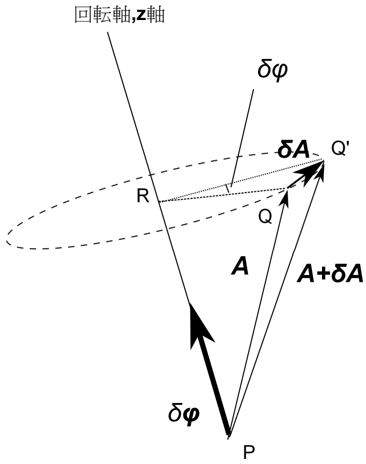


図 2: 角速度ベクトルの考え方

となる。[9] これを両辺微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} &= (\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k})+\left(x\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}+y\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}+z\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\right) \quad (19)\\ &= \boldsymbol{v}''+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'' \ \ \left(\because\ \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}\right) \quad (20) \end{aligned}$$

[10] ただし、$\boldsymbol{v}''$ は回転座標 S'' における速度であるとする。これをさらに両辺微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} &= \left\{(\ddot{x}\boldsymbol{i}+\ddot{y}\boldsymbol{j}+\ddot{z}\boldsymbol{k})+\left(\dot{x}\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}+\dot{y}\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}+\dot{z}\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\right)\right\}\\ &\quad+\left\{\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}''+\boldsymbol{\omega}\times(\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k})+\boldsymbol{\omega}\times\left(x\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}+y\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}+z\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\right)\right\} \quad (21)\\ &= \boldsymbol{a}''+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}''+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'')+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'' \quad (22) \end{aligned}$$

となる。このとき、$\boldsymbol{a}''$ は回転座標系 S'' における加速度である。これを回転座標系における運動方程式に書き直す。辺々移行して両辺に質点の質量 m をかければ

$$\begin{aligned} m\boldsymbol{a}'' &= m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt}-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}''-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'')-m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'' \quad (23)\\ &= \boldsymbol{F}-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}''-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'')-m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'' \quad (24) \end{aligned}$$

と書き直せる。このとき、右辺第 2 項以下はすべて回転系で現れる見かけに力である。右辺第 2 項はコリオリの力といい、質点が回転系に対して運動するときに速度に直角方向に現れる。第 3 項は遠心力であり、回転軸から離れる向きに働く。ω^2 に比例するのも特徴である。そして第 4 項は角速度が一様でないときに現れる力であるが、これについては特に名前はついていない。

等速円運動における回転座標を考えれば、質点は回転座標において静止かつ角速度は一様なので、回転座標における運動方程式は、

$$m\boldsymbol{a}''=\boldsymbol{F}-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'') \quad (25)$$

となる。

[9] $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'$ は座標系は違うが始点と終点が一致している。そして、(x,y,z) は回転座標系 S'' における 3 次元成分である。

[10] この式においては基底ベクトルの微分を行なっており、違和感を感じるかもしれない。しかし合成関数の微分を考えればこれは正しい。慣性系においては基底ベクトルが時間変化しないため、基底ベクトルの時間微分項はすべて 0 になる。しかし、回転座標系のように基底ベクトルが時間変化する場合は考慮し無くてはならない。

3　運動量と力積

3.1　運動量

これまで運動する物体を表現する指標として「質量 m」「加速度 $\boldsymbol{a}$」「力 $\boldsymbol{F}$」を中心に述べた。この 3 つを用いて表現される運動方程式は物体の運動の変化を表したものである。運動方程式を立式して解くことが出来ればすべての物体の位置や速度を記述することができる。しかし、物体の加速度や加わっている力というのはすぐさま測ることは難しい。これに対し、直感的に物体の運動の状態を表す量として運動量が存在する。

同質量の物体であれば、速さが大きいほうが運動の勢いも大きい。しかし同じ速さの物体が 2 つあった時、運動の勢いが大きいのは質量が重い方である。[11] ここで物体の質量 m と速度 $\boldsymbol{v}$ を用いて運動量 $\boldsymbol{p}$ を次の式のように定義する。

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \tag{26}$$

運動量はその名の通り運動の状態を表す量である。これは力学を考える上で非常に重要な量である。それについては次で説明する。

3.2　力積

物体に対しある時間内に加わった力の積分値を力積と呼ぶ。例えば物体に一定の大きさの力 F が時間 t の間作用していたとしたら、物体が受けた力は Ft である。ところで運動方程式を思い出せば

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r} && (27) \\ &= \frac{d}{dt}\left(m\dot{\boldsymbol{r}}\right) && (28) \\ &= \frac{d}{dt}\boldsymbol{p} && (29) \end{aligned}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{F}dt = d\boldsymbol{p} \tag{30}$$

となる。つまり力積とは運動量の変化分に相当し、単位時間あたりの運動量の変化は物体に加わった力に等しい。特に物体に力が加わっていない時は

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p} = 0 \tag{31}$$

となる。これを運動量保存の法則という。

4　仕事とエネルギー

4.1　エネルギー

エネルギー energy とは物体の運動の大きさ、もしくは運動できる能力を定量化したものである。エネルギーはあらゆる事象・作用の源としての概念であり、どの作用の源であるかによって様々なエネルギーがある。より細かくみれば、運動するためのエネルギーや温度を維持するためのエネルギーをはじめ、物体が存在するためのエネルギーもある。当然エネルギーは力学のみに関する概念ではなく、すべての物理現象において重要な概念である。一般にエネルギーは高いほど不安定であり、より安定なエネルギーが低い状態になろうとする。

[11] 前者については、同じ 2 台の普通車が異なる速さで走っていることを考えれば良い。一方、後者は普通自動車とダンプカーが同じ速さで走っていることを考えれば良い。

4.2 仕事

仕事 work とはエネルギーのやりとりのことである。例えば物体が E の仕事をする能力を持つとき、物体は E のエネルギーを持つという。物体の持つエネルギーが増えたならば「仕事をした」、物体の持つエネルギーが減ったならば「仕事をされた」という。

簡単のため 1 次元上で考える。物体に大きさ F の力を加えて物体が距離 x 動いたとしよう。このとき、次の量 W を定義する。

$$W = Fx \tag{32}$$

この量 W を物体がなされた「仕事」という。仕事の単位は [Nm]=[J](ジュール) である。エネルギーの単位もこの J である。

物体がなされた仕事は、移動した方向とその方向にかかっていた力によって決まる。どんなに力を加えていても物体が力の方向に動かなければ一切仕事はなされない。つまり、物体がなされた仕事はたとえ始点と終点が同じでも移動経路 C によって変わる。これを 3 次元一般化して式にすると次のようになる。

$$W = \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\mathrm{r} \tag{33}$$

[12]

4.2.1 運動エネルギー

運動している物体が持つエネルギーを運動エネルギー kinetic energy といい、静止している物体の運動エネルギーは 0 と定義する。

簡単のために 1 次元で考えよう。質量 m, 速度 0 の物体に力 F を加え、速度 v まで加速したときを考える。運動方程式より加速度 a は

$$a = \frac{F}{m} \tag{35}$$

であるから、速度 v までに移動した距離 x は

$$v^2 - 0^2 = 2\frac{F}{m}x \tag{36}$$

$$\therefore x = \frac{mv^2}{2F} \tag{37}$$

である。加速している間に物体になされた仕事が運動エネルギー K に等しいから

$$K = Fx \tag{38}$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 \tag{39}$$

となる。これを 3 次元に拡張すると、

$$K = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 \tag{40}$$

となる。

[12]単位時間あたりになされる仕事の割合を仕事率という。時間 t の間に仕事 W がなされたとき、仕事率 $P = W/t$ である。
力 F がかかっている物体が時間 Δt の間に距離 Δx 移動したとする。このときの仕事率 P は

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F\Delta x}{\Delta t} = Fv \tag{34}$$

となる。

ところで運動エネルギーについて

$$\frac{d}{dt}K = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2\right) = m\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} \tag{41}$$

となる。最左辺は運動エネルギーの時間変化である。一方再右辺は力と速度の積であり、単位時間あたりになされる仕事を意味する。これを仕事率という。運動エネルギーと仕事が等しいという定義通り、運動エネルギーの変化率と仕事率が等しいという結果を示している。特に物体に仕事を受けない物体の運動エネルギーは保存する。これを運動エネルギー保存の法則という。

4.2.2　ポテンシャルエネルギー Potential Energy

運動していない物体もエネルギーを有する。

一般に力 $\boldsymbol{F}$ がする仕事 W は

$$W = \int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \tag{42}$$

となり、始点・終点の位置のみで決まらず、経路にも依存する。つまり一般に、同じ始点と終点を持つ 2 つの経路 C_1, C_2 があったとして、

$$\int_{C_1} \neq \int_{C_2} \tag{43}$$

という関係がある。ここで、仕事 W が始点・終点の位置のみで決まり経路によらないとき、力 $\boldsymbol{F}$ を『保存力』という。

$$\text{「力 }\boldsymbol{F}\text{ が保存力である」} \Leftrightarrow \text{「任意の経路 } C_1, C_2, \cdots \text{ に対し、}\int_{C_1} = \int_{C_2} = \cdots\text{」} \tag{44}$$

$$\Leftrightarrow \text{「任意のループ } C \text{ に対し、}\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = 0\text{」} \tag{45}$$

力 $\boldsymbol{F}$ が保存力であるとき、A を基準とした B の力 $\boldsymbol{F}$ による Potential Energy を次のように定義する。

$$U_B = -\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = (B\text{ から }A\text{ まで動くとき、保存力自身のする仕事}) \tag{46}$$

ポテンシャルエネルギーのことを、位置エネルギーともいう。

具体例で考えよう。例えば、物体を地上から高さ h まで持ち上げることを考える。物体になされる仕事は mgh であり、仕事をなされた物体のエネルギーは増える。この増加したエネルギーを重力による位置エネルギーという。これは、この物体が mgh の仕事をなす能力を持っているということである。また、このときの保存力は重力 mg である。

他のポテンシャルエネルギーについては後々説明するとして、概念だけは抑えておこう。

4.3　力学的エネルギー保存則

一般に運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和を力学的エネルギーという。この 2 つの総和は保存する。これを利用すれば、物体の運動を簡単に描くことができる。

簡単のため、一次元上で運動する物体を考える。力学的エネルギーを E, 運動エネルギーを K, 位置エネルギーを U としよう。先の述べた関係性から $E = K + U$ である。位置エネルギー $U(x)$ は保存力から求められ、よって運動エネルギーは $K = E - U(x)$ として求められる。このとき $K \leq 0$ であるから物体の運動範囲は限定される。例えば図 3 のような状態を仮定しよう。初期条件 $x > x_3, \dot{x} < 0$ で物体が運動をはじめたとする。運動エネルギーが正の間、物体は x 軸負方向への運動を続けるが、x_1 と x_2 の間で $E = U(x)$ となる。このとき運動エネルギーが 0 になって物体の速さは 0 になる。しかしすぐに x 軸正方向へと運動をはじめ、そのまま $+\infty$ まで運動エネル

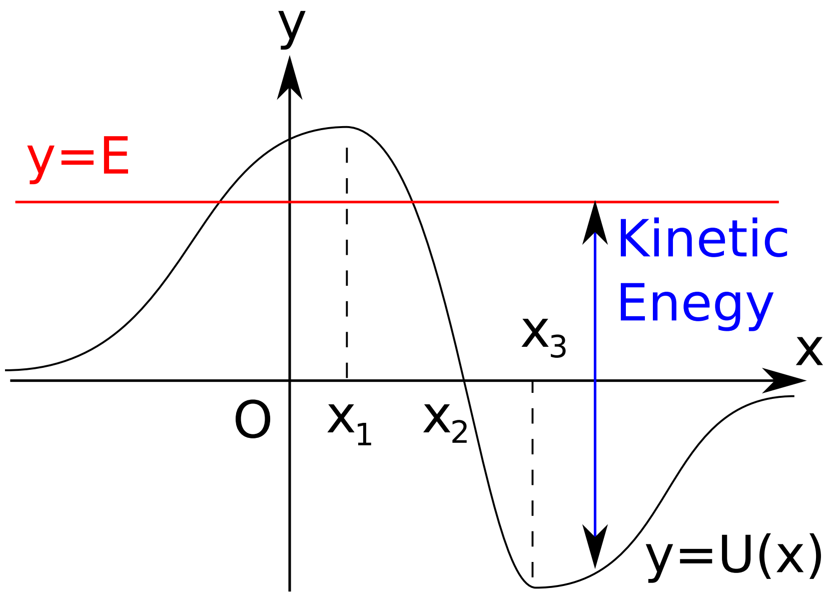


図 3: ポテンシャルエネルギーから物体の運動を予想する。力学的エネルギ-E は保存し、現在地からポテンシャルエネルギー $U(x)$ を求めることができる。その差分が、運動エネルギーとなる。

ギーが正のまま進んでいくことがわかる。つまるところ、ポテンシャルエネルギーの関数上を物体がどのような動きをするかイメージしてやればよいのである。このように、物体の運動はポテンシャルエネルギーを記述してやることで直感的に理解することができる。

ところで、ポテンシャルエネルギーは曲線であるから傾きが 0 な点が存在しうる。この図 3 では x_1 と x_3 がそうである。$x = x_1, x_3$ からちょっとだけ変化した位置に物体を静かにおいた時を考えよう。x_1 のすぐ近くに物体を静かにおいたときは、そのまま x_1 から離れるように動く。一方 x_3 のすぐ近くに物体を置いたときは、x_3 に戻るように動く。x_1 のように少しでもずれるとどんどん離れてしまうような傾きが 0 の点を不安定点、x_3 のようにすこしずれても運動がその近傍で収まるような傾きが 0 の点を安定点という。

5　力学に関する保存則

現実的には、運動方程式が必ずしもきれいに解けるとは限らず、運動方程式を解いて運動の完全な情報を求めることはできない。[13] しかし物体の運動に関する法則は何も運動方程式だけではない。それがこれから説明する 3 つの保存則である。

5.1　運動量保存の法則

$$\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{p} \tag{47}$$

最右辺は運動量の時間変化を意味する。一方最左辺は物体が受ける力である。これより運動量の時間変化は外力そのものである。外力を受けなければ運動量は保存する。

[13] 運動方程式のような微分を含んだ方程式のことを微分方程式というが、これは解けないことのほうが多い。

5.2 運動エネルギー保存の法則

運動方程式の両辺に $\dot{r}$ をかけて、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2\right) = m\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} \tag{48}$$

最左辺は運動エネルギーの時間変化である。一方最右辺は外力と距離の積であるので、仕事である。つまり運動エネルギーの時間変化は仕事そのものである。仕事を受けなければ運動エネルギーは保存する。

5.3 角運動量保存の法則

角運動量とは

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{49}$$

で定義される物理量である。いま、

$$\dot{\boldsymbol{p}} = m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} \tag{50}$$

という関係があるのでこれを用いれば、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} &= \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}) && (51)\\
&= \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{p} + \boldsymbol{r}\times\frac{d}{dt}\boldsymbol{p} && (52)\\
&= \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{p} + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} && (53)\\
&= \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}\quad (\because \boldsymbol{v}\text{ と }\boldsymbol{p}\text{ は平行}) && (54)
\end{aligned}$$

が導かれる。これは面積速度一定の法則に関係する。

これらが力学において覚えておくべき 3 つの保存則である。特に運動方程式が完全に解けない場合、これらの保存則を用いることで問題を解くことも可能になる。

6 色々な力と物理量

ここまで力学の基本となる公式等について話してきたが、ここでは力学で登場する具体的な力や法則、物理量といったものについて述べる。

6.1 重力と質量と重さ

全ての物体は互いに引力を及ぼしあう。これを万有引力の法則という。一般に物体同士が及ぼしあう力は他の力と比べて非常に小さいので、普通は地球との万有引力である重力のみ考える。つまり重力とは質量 m の物体が地球から受ける力のことを指し、その大きさは地球上では一般に mg である。

質量 m_1, m_2 の物体が距離 r をとってあったとき、それらの物体の間に働く万有引力 F は

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{55}$$

で与えられる。ただし、G は万有引力定数 ($G = 6.67300\times10^{-11}m^3kg^{-1}s^{-1}$) である。詳しくはケプラー問題について扱うときに譲る。

ここでよく間違えられる「質量」と「重さ」について述べる。日常生活では 2 つは同等のように扱われるが、物理的には両者は全く異なる量である。物理をやっていてよく見る単語は質量であろう。質量とは物質固有の状態量

であって、周囲が変化しても物質の質量は変化しない。一方で重さとは「物体にかかっている重力の大きさ」を示す。だから周囲が変化すると重さは変化しうる。例えば、地球上である物体の質量が $m$kg だとすると、その物体の重さは mgN である。同じ物体を月の上に持って行くと質量は $m$kg のままだが、月の重力は地球の 1/6 なので重さは $mg/6$ になる。

6.2　慣性質量と重力質量

何気なく質量という言葉を使ってきたが、この言葉を厳密に定義しよう。質量とは「物体の動かしにくさ」を表す量である。この概念の定義には、2 通りある。

ひとつは慣性質量と言うものである。これはニュートンの運動の法則から導かれる、加えた力と加速度の間にある比例係数である。

$$m_i\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \tag{56}$$

この慣性質量 m_i は実際に物体を既知の力で引っ張り、その時の加速度を求めることで得られる。

もう一つは重力質量である。これは重力とその場所での重力加速度の間の比例係数として得られる。

$$\boldsymbol{F}_g = m_g\boldsymbol{g} \tag{57}$$

この重力質量 m_g は体重計などで測ることができる。

これら 2 つの質量は異なる定義によって定められているが、実験的に両者が等価であることが示されている。これを等価原理という。以後、質量といった際は慣性質量もしくは重力質量だと考えてもらいたい。

6.3　摩擦

一般に二つの物体が接するとき、その間には接触面方向に力が働く。これを摩擦力という。

止まっている物体同士に働く力を静止摩擦力といい、その最大値を最大静止摩擦力という。この静止最大摩擦力は垂直抗力に比例し、その比例係数を静止摩擦係数という。また互いに動いている物体間に働く力を動摩擦力といい、これも垂直抗力に比例する。その比例係数を動摩擦係数という。

より具体的な話をしよう。床に対し静止している物体に外力を加えた時、最大静止摩擦力以下の力であれば物体は静止したままである。このとき物体は床から加えられた外力と同じ大きさ逆向きの摩擦力を受けている。このとき最大静止摩擦力 f は垂直抗力 N に比例する。

$$f = \mu N \tag{58}$$

μ を静止摩擦係数という。加えられた外力が最大静止摩擦力を超えた時、物体は動き出す。

続いて、水平な床の上を動く物体を考えよう。物体は床の上を動く限り常に床から一定な力を受け、この力を動摩擦力という。動摩擦力 f' も垂直抗力に比例し、次のように記述できる。

$$f' = \mu' N \tag{59}$$

このとき、μ' を動摩擦係数という。一般に $\mu > \mu'$ が成立し、つまり静止している物体を動かすために必要な力よりも動いている物体を動かし続けるのに必要な力の方が大きいのである。日常生活でも、物を動かす時が最も力が必要なのは経験したことがあるだろう。

さらに、粗い斜面に置かれた物体が受ける力を考える。物体の質量を m、重力加速度を g、静止摩擦係数を μ、動摩擦係数を μ' とする。また斜面が水平な床となす角を θ とする。斜面下向き水平方向に x 軸を、垂直方向上向きに y 軸をとろう。このとき、斜面に垂直な方向と水平な方向の運動方程式を書くと以下のようになる。

$$\text{水平方向} \quad : \quad m\ddot{x} = mg\sin\theta - f \tag{60}$$

$$\text{垂直方向} \quad : \quad m\ddot{y} = N - mg\cos\theta \tag{61}$$

ただし、f は摩擦を表す項である。

最初に、斜面の傾斜が浅く物体が静止している状態を考える。このとき、運動方程式は次の様に書き換えられる。

$$\text{水平方向} \quad : \quad 0 = mg\sin\theta - f \tag{62}$$
$$\text{垂直方向} \quad : \quad 0 = N - mg\cos\theta \tag{63}$$

ここからゆっくり θ を大きくしていこう。すると次第に $\sin\theta$ が大きくなり、いつかは静止最大摩擦力を超えて物体が動き出す。そのときの角度を具体的に求めることができる。物体が斜面で静止している条件を上の 2 式から連立して求めればいいから、

$$mg\sin\theta = f \leq \mu N = \mu mg\cos\theta \tag{64}$$
$$\therefore \mu \geq \tan\theta \tag{65}$$

となる。θ がこれを満たさなくなったとき、物体は斜面を滑り始める。

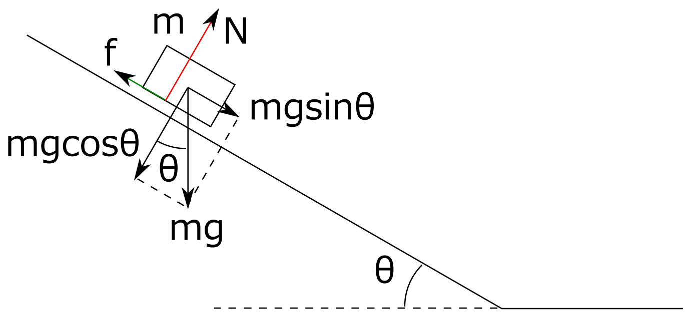


図 4: 斜面に物体があるときのモデル。θ が小さい時は物体は斜面上で静止しているが、$\mu = \tan\theta$ を超えると滑り始める。

6.4 自由度と束縛条件、束縛力

ここまでの話は質点があくまに自由に運動する場合について考えていた。しかし、実際に起こる運動においては運動に対して何らかの条件が付加されていることが多い。定められたレールの上を動く滑車。一端を固定された長さ一定の振り子、滑ることなく転がり落ちる車輪、などなど。こういったように、運動に対して何らかの制限がついているほうがむしろ普通であると考えられる。このように、運動に運動に対して起こる束縛を束縛条件(拘束条件) という。

通常、何の条件もない 1 個の質点の位置を決めるには、3 次元空間で直交座標を使えば (x, y, z)、極座標を用いれば (r, θ, φ) という具合に 3 つの変数が必要になる。仮にこれがある平面上を動くという条件が加われば平面座標をとりなおし、(x, y) もしくは (r, φ) といたように変数が 2 つとなる。さらに、質点がある曲線上を動くと定められていたとする。すると、質点の位置は曲線上のある定点からの距離 s によって決まる。つまり、変数が 1 つで表されることになる。ところで、曲線上を動くという条件は見方をかえれば、これは 2 つの曲面の交線上を動くというように見れる。つまり、この時の質点の束縛条件は“ 同時に 2 つの曲面上にある ”という 2 個の束縛条件ということになる。このように運動を記述する際に必要な変数の数というのは、自由に運動するときに必要とする変数の数から束縛条件の数を引いたものに相当する。一般に、力学系の位置を決定するのに必要十分な変数の個数を、力学系の自由度という。先ほど述べたように質点が平面上に固定されていれば自由度は 2、曲線上に固定されていれば自由度は 1 であり、この自由度は座標系に寄らないという特徴がある。

ところで、束縛が成立すると物体は外から与えられた力以外を受けることになる。たとえば単振り子は重力以外にひもからの張力を受けるし、床の上を滑る物体は床型の垂直抗力と摩擦力を受けるだろう。このように、「束縛

を成立させるために現れる力」のことを、束縛力という。束縛力は外力とは決定的に異なり、物体がどのような運動をしているかによって決まるのである。そのため、運動の様子が変われば束縛力の大きさも方向も変わりうる。

6.5 流体圧

流体中の圧力をこれまでの知識で考える。流体圧は、仮想的流体の柱を仮定し、それによる重力によって決まる。つまり、流体圧は自分の上にある流体の重さを身に受けている、という考えである。地上であれば上にある流体は大気圧であるし、水中であれば大気圧に加えて水による圧力もかかる。

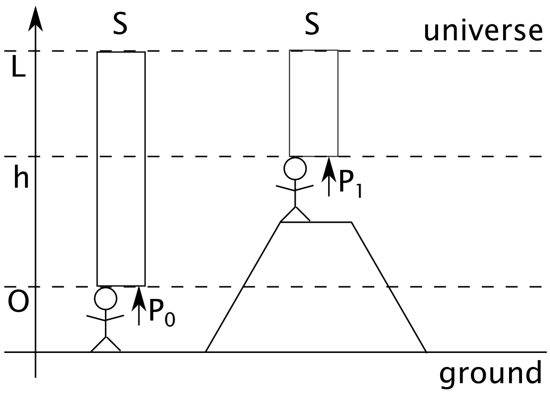


図 5: 空気の重さが大気圧として地上の人間にかかる図。その地点よりも上に存在する空気の重さの合計が大気圧となる。そのため、地上よりも山頂の方が気圧は低い。

具体的に、大気圧を考える。理想的に地上から大気の最上部まで伸びる大気の円柱を考える。大気の密度を ρ_0, 円柱の高さを L, 底面積を S とする。すると、この大気の円柱が地表に及ぼす力は地上が押し返す力 P_0 と釣り合っているため、

$$\rho_0 SLg = P_0 S \tag{66}$$

$$\therefore P_0 = \rho_0 Lg \tag{67}$$

となる。この圧力 P_0 が大気圧である。次に地上から h の高さにある山頂での圧力 P_1 を計算する。P_0 と同様に考えれば

$$\rho_0 S(L-h)g = P_0 S \tag{68}$$

$$\therefore P_1 = \rho_0 (L-h)g \tag{69}$$

となる。P_0 と P_1 の差はどれだけ余分に大気の円柱が上にあるかの違いによって生じている。以上より、標高が高いほうが気圧が低いことがわかる。

水中での圧力も同様に考えることはできる。水深 x での水圧を P_2 とする。また、理想的に水の密度を ρ_1 で一定であるとする。大気圧と同様に面積 S の面積を考えれば、

$$P_2 S = (\text{高さ } L, \text{面積 } S \text{ の大気の重力}) + (\text{高さ } x, \text{面積 } S \text{ の水の重力}) \tag{70}$$

$$= \rho_0 LSg + \rho_1 xSg \tag{71}$$

$$\therefore P_2 = \rho_0 Lg + \rho_1 xg \tag{72}$$

で与えられるというわけである。これより、確かに水深が深くなればなるほど水圧は高まる。

6.6 浮力

流体と流体中の物体面に働く流体圧の合力を流体中の物体に着目した時の呼び名。

流体中に沈む物体に働く浮力は、その物体が押しのけた流体の体積によって決まる。すなわち

$$(\text{物体に働く浮力}) = (\text{流体の密度}) \quad \times (\text{物体が押しのけた流体の体積}) \tag{73}$$

で決まる。物体が押しのけた体積というのは、たとえば水に物体を沈める際、水につかっている部分の体積のことをいう。

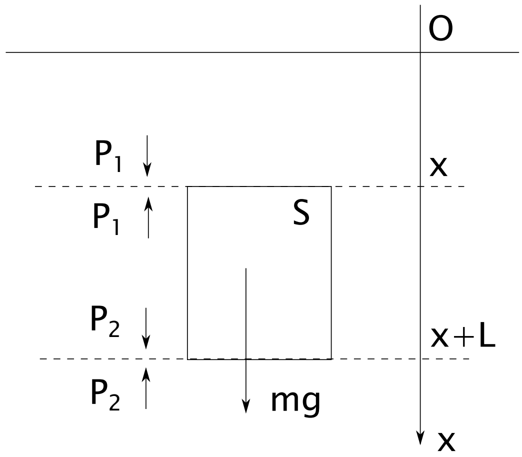


図 6: 浮力のモデル。水中の物体は自分自身が押しのけた液体に等しい質量相当の浮力を受ける。これは、物体の上面と下面の水圧の差によるものである。

図 6 を元に説明しよう。いま、水中に質量 m, 高さ L, 断面積 S の物体が沈んでいる。この物体が受ける浮力を考えよう。水の密度を ρ で一定だと仮定とすると、物体が水から受ける力の合計は上面と下面から受ける水圧の和になる。鉛直方向上向きを正にとれば、物体が水から受ける力の和 F は

$$F = P_2S - P_1S = S(P_2 - P_1) = SL\rho \tag{74}$$

となる。よって確かに、物体が水中で受ける浮力は自身が押しのけた水の質量に等しい。

7 粒子系

これまで物体を一つとして考えたが、有限の大きさの物体は実は有限個の質点の集合であり、それらの間には相互作用が働くはずである。

7.1 粒子系

質点 $m_1, m_2, \cdots, m_i, \cdots, m_N$ からなる粒子系がある。粒子 m_i における運動方程式は、

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{f}_{i\,\text{外}} \tag{75}$$

となる。ただし $\boldsymbol{F}_{ij}$ は i 番目の粒子に j 番目の粒子から受ける力であり、$f_{i\,\text{外}}$ は i 番目の粒子が受ける。これを i についてさらに和をとると、

$$\sum_i m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i\sum_j \boldsymbol{F}_{ij} + \sum_i \boldsymbol{f}_{i\,\text{外}} \tag{76}$$

を得る。ここで、作用反作用の法則より

$$\sum_i \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} = 0 \tag{77}$$

[14] でさらに、

$$M_{tot} = \sum_i m_i : \text{全質量}$$
$$\boldsymbol{r}_G = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{M_{tot}} : \text{重心}$$

とすると、

$$M_{tot}\ddot{\boldsymbol{r}_G} = \sum_i \boldsymbol{f}_{i\,\text{外}} \tag{82}$$

となる。また、

$$M_{tot}\ddot{\boldsymbol{r}_G} = \sum_i \boldsymbol{f}_{i\,\text{外}} = \dot{\boldsymbol{P}} \tag{83}$$

であり、これを内部運動量 $\boldsymbol{P}_{in}$ と重心運動量 $\boldsymbol{P}_G$ に分けて考えると、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_{in} &= \sum_i m_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_G) &(84)\\
&= \sum_i m_i \boldsymbol{v}_{iG} &(85)\\
\boldsymbol{r}_G = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + \cdots + m_N\boldsymbol{r}_N}{m_1 + \cdots + m_N} &\Leftrightarrow \sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G) = 0 &(86)\\
&\Leftrightarrow \sum_i m_i \boldsymbol{r}_{iG} = 0 &(87)
\end{aligned}$$

であるから、

$$\boldsymbol{P}_{in} = 0, \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_G, \quad \dot{\boldsymbol{P}} = \sum_i f_{i\,\text{外}} \tag{88}$$

同様に Kinetic energy についても計算すると、

$$\dot{K}_i = \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{f}_{i\,\text{外}} \cdot \boldsymbol{v}_i \tag{89}$$

$i = 1 \sim N$ まで足し合わせて、

$$\frac{d}{dt}\sum_i K_i = \sum_i \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i + \sum_i \boldsymbol{f}_{i\,\text{外}} \cdot \boldsymbol{v}_i \tag{90}$$

[14] これは作用反作用の法則を考えればよくて

$$\begin{aligned}
\sum_i \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} &= \sum_{i<j} \boldsymbol{F}_{ij} + \sum_{i=j} \boldsymbol{F}_{ij} + \sum_{i>j} \boldsymbol{F}_{ij} &(78)\\
&= \sum_{i<j} \boldsymbol{F}_{ij} + \sum_{i=j} \boldsymbol{F}_{ij} + \sum_{i>j} (-\boldsymbol{F}_{ji}) \quad (\because \text{作用反作用の法則}) &(79)\\
&= \sum_{i<j} \boldsymbol{F}_{ij} + 0 + \sum_{i<j} (-\boldsymbol{F}_{ij}) \quad (\because \text{添え字の交換}) &(80)\\
&= 0 &(81)
\end{aligned}$$

である。各自確認するように。

ここで、

$$
\begin{aligned}
K &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i{}^2 \\
&= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{v}_{iG})^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i\right) \boldsymbol{v}_G{}^2 + \boldsymbol{v}_G \left(\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i G\right) + \sum_i m_i \boldsymbol{v}_{iG} \\
&= \frac{1}{2} M_{tot} \boldsymbol{v}_G{}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_{iG}{}^2 \qquad (91)
\end{aligned}
$$

である。[15] 一方

$$
\begin{aligned}
\text{内力の仕事率} &= \sum_i \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i \\
&= \sum_{i<j} \boldsymbol{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i + \sum_{j<i} \boldsymbol{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i \quad \left(\because \sum_{i=j} \boldsymbol{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i = 0\right) \\
&= \sum_{i<j} \boldsymbol{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i + \sum_{i<j} \boldsymbol{F}_{ji} \cdot \boldsymbol{v}_j \\
&= \sum_{i<j} \boldsymbol{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i + \sum_{i<j} (-\boldsymbol{F}_{ij}) \cdot \boldsymbol{v}_j \\
&= \sum_{i<j} \boldsymbol{F}_{ij} \cdot (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j) \qquad (93)
\end{aligned}
$$

だが、この右辺は相対的な仕事率である。つまり、内力の仕事率は相対的な運動に対してのみ作用し、重心の運動には影響しない。さらに外部からの力についても考えると

$$
\begin{aligned}
\text{外力の仕事率} &= \sum_i \boldsymbol{f}_{i\,\text{外}} \cdot \boldsymbol{v}_i \\
&= \sum_i \boldsymbol{f}_{i\,\text{外}} \cdot \boldsymbol{v}_G + \sum_i \boldsymbol{f}_{i\,\text{外}} \cdot \boldsymbol{v}_{iG} \qquad (94)
\end{aligned}
$$

となる。このうち右辺第一項は「外力が重心に対してする仕事」であり、重心の運動エネルギーの変化量に等しい。[16] 一方第 2 項は「外力が内部運動に対してする仕事」である。

これらをまとめると、

$$
\begin{aligned}
\text{全}\, K.E. &= \text{重心}\, K.E. + \text{内部}\, K.E. \qquad (97) \\
\frac{dK_G}{dt} &= \left(\sum_i \boldsymbol{f}_{i\,\text{外}}\right) \cdot \boldsymbol{v}_G \qquad (98) \\
\frac{dK_{in}}{dt} &= \sum_{i<j} \boldsymbol{F}_{ij} \cdot (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j) + \sum_i \boldsymbol{f}_{i\,\text{外}} \cdot \boldsymbol{v}_{iG} \qquad (99)
\end{aligned}
$$

---

[15] この計算で一行省略したが、どのような計算があったかお分かりであろうか。内部運動量を計算した時の結果を使えば

$$
\sum_i m_i \boldsymbol{r}_{iG} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \boldsymbol{r}_{iG}\right) = \sum_i m_i \frac{d}{dt} \boldsymbol{r}_{iG} = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_{iG} = 0 \qquad (92)
$$

となる。よって、先のような計算が行える。

[16] すなわち

$$
M_{tot} \dot{\boldsymbol{v}_G} = \sum_i \boldsymbol{f}_{i\,\text{外}} \qquad (95)
$$

$$
\therefore \sum_i \boldsymbol{f}_{i\,\text{外}} \cdot \boldsymbol{v}_G = \frac{dK_G}{dt} \qquad (96)
$$

となる。なお、角運動量については

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \boldsymbol{L}_G + \boldsymbol{L}_{in} & (100) \\ \frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} &= \boldsymbol{r}_G \times \sum_i \boldsymbol{f}_{i\,外} & (101) \\ \frac{d\boldsymbol{L}_{in}}{dt} &= \sum_i \boldsymbol{r}_{iG} \times \boldsymbol{f}_{i\,外} & (102) \end{aligned}$$

が成り立つ。

7.2 衝突 (散乱) 問題

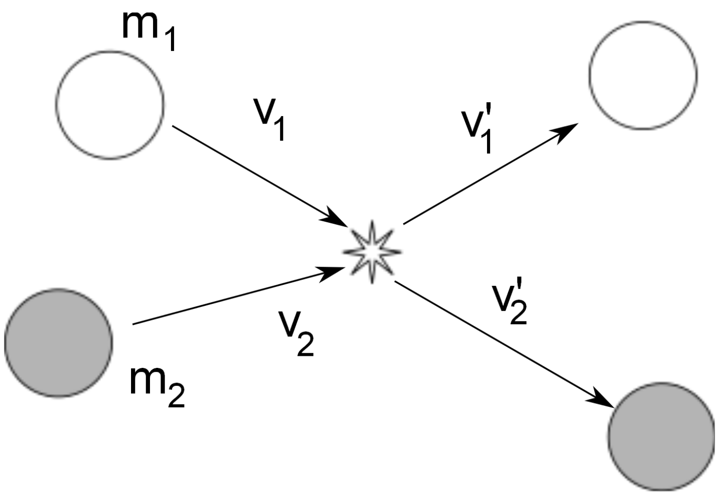


図 7: 衝突散乱問題のモデル。左が衝突前の様子で、右が衝突後の様子。異なる速さ、質量の物体の運動が衝突の前後でどのように変わるかを考える。

衝突は瞬間的で、その際の撃力は衝突する物体同士の内力のみとする。撃力は内力のみなので、衝突の前後で運動量は保存する。なので

$$m_1\boldsymbol{v_1} + m_2\boldsymbol{v_2} = m_1\boldsymbol{v'_1} + m_2\boldsymbol{v'_2} \tag{103}$$

と書ける。また内力の仕事 W により相対運動エネルギーが変化する。相対質量を $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$, 衝突前の相対速度を $v_r = |\boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{v_2}|$, 衝突後の相対速度を $v'_r = |\boldsymbol{v'_1} - \boldsymbol{v'_2}|$ とすれば、

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\mu v_r'^2 - \frac{1}{2}\mu v_r^2 & (104) \\ &= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\boldsymbol{v'_1} - \boldsymbol{v'_2})^2 - \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{v_2})^2 & (105) \\ &= (\frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v_1'^2} + \frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v_2'^2}) - (\frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v_1^2} + \frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v_2^2}) & (106) \\ &= (\text{衝突後の運動エネルギー}) - (\text{衝突前の運動エネルギー}) & (107) \end{aligned}$$

となる。この計算は各自確認すること。このとき、内力のした仕事は 2 つの物体から見れば、衝突によって失われたエネルギー ΔE に相当するから、

$$\Delta E = -W = \frac{1}{2}\mu(v_r^2 - v_r'^2) \geq 0 \tag{108}$$

とかける。特に、$v'_r = \varepsilon v_r (0 \le \varepsilon \le 1)$ とおくと

$$\Delta E = (1-\varepsilon^2)\frac{1}{2}\mu v_r^2 \tag{109}$$

と書ける。これより、

$$\begin{cases} \varepsilon = 1 & \Leftrightarrow & \Delta E = 0 \text{ のとき} & \text{(完全) 弾性衝突} \\ 0 \le \varepsilon < 1 & \Leftrightarrow & \Delta E > 0 \text{ のとき} & \text{非弾性衝突} \\ \text{特に}\varepsilon = 0 & \Leftrightarrow & \Delta E = \Delta E_{max} = \text{全相対運動エネルギー} & \text{完全非弾性衝突} \end{cases} \tag{110}$$

となる。

特に、跳ね返り係数 e という概念がある。これは、衝突面が定義されるとき、**その衝突面に垂直な方向の相対速度の大きさが e 倍になる**という意味である。なので、一般に e と ε は一致しないので注意が必要である。

多粒子系でも確認したことだが、**内力しか働かない場合、運動量は必ず保存する。**

7.3 1 次元運動衝突 (このとき、$e = \varepsilon$)

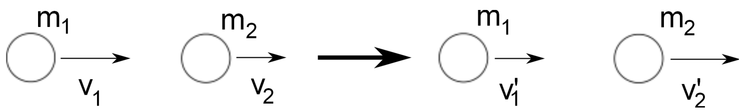


図 8: 1 次元衝突問題のモデル。左が衝突前で、右が衝突後を表す。

運動量保存と跳ね返り係数、衝突によって失われるエネルギーを考えれば、

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \tag{111}$$

$$e(v_1 - v_2) = -(v'_1 - v'_2) \tag{112}$$

$$\Delta E = (1-e^2)\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)^2 \tag{113}$$

$$= \left(\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}m_1 {v'_1}^2 + \frac{1}{2}m_2 {v'_2}^2\right) \tag{114}$$

となる。上の 2 式を解いて

$$v'_1 = \frac{m_1 - e m_2}{m_1+m_2}v_1 + \frac{(1+e)m_2}{m_1+m_2}v_2 \tag{115}$$

$$v'_2 = \frac{(1+e)m_1}{m_1+m_2}v_1 + \frac{m_2 - e m_1}{m_1+m_2}v_2 \tag{116}$$

という結果を得る。

これは重心系で考えても同じ結果を得られる。重心系の速度 v_G は

$$v_G = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1+m_2} \tag{117}$$

であるが、運動量保存の法則よりこれは一定となる。このとき、

$$\begin{aligned} v_{1G} &= v_1 - v_G \\ &= \frac{m_2}{m_1+m_2}(v_1 - v_2) \end{aligned} \tag{118}$$

$$\begin{aligned} v_{2G} &= v_2 - v_G \\ &= -\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_1 - v_2) \end{aligned} \tag{119}$$

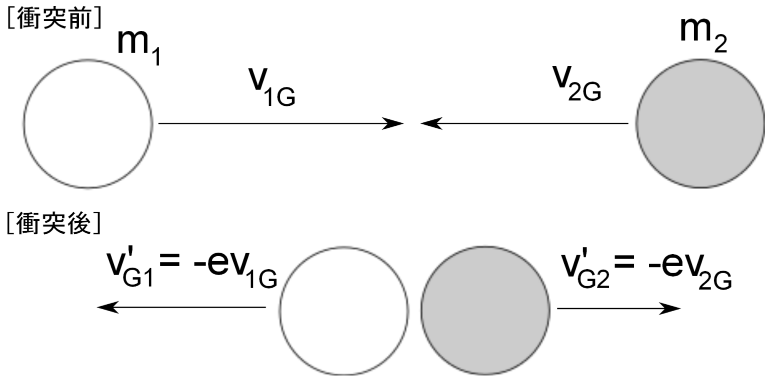


図 9: 弾性衝突を一般化した時のモデル。上が衝突前の 2 つの物体で、下が衝突後の 2 つの物体の様子。視点は 2 つの物体からなる系の重心にとった。

と初期状態が書き換えられる。これより衝突後は

$$\begin{aligned} v'_{G1} &= -ev_{1G} \\ &= -\frac{em_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2) \end{aligned} \tag{120}$$

$$\begin{aligned} v'_{G2} &= -ev_{2G} \\ &= \frac{em_1}{m_1+m_2}(v_1-v_2) \end{aligned} \tag{121}$$

となる。以上より、

$$v'_1 = v'_{G1}+v_G = \frac{m_1-em_2}{m_1+m_2}v_1+\frac{(1+e)m_2}{m_1+m_2}v_2 \tag{122}$$

$$v'_2 = v'_{G2}+v_G = \frac{(1+e)m_1}{m_1+m_2}v_1+\frac{m_2-em_1}{m_1+m_2}v_2 \tag{123}$$

という結果を得る。確かに一致した。

7.4 2 次元相対運動

ここでは万有引力を用いて、惑星の周囲を通過する衛星を考える。質量 M の惑星と質量 m の衛星がある。惑星は速度 $\boldsymbol{W}$ で動いている。衛星は惑星への接近時は速度 $\boldsymbol{V}_i$, 遠ざかるときは速度 $\boldsymbol{V}_f$ とする。今、この 2 物体以外からの力はすべて無視できるものとする。

惑星と衛星からなる系は外部から力を受けないので運動量は保存する。重心の座標と速度を $\boldsymbol{r}_G, \boldsymbol{v}_G$ とすると、$\boldsymbol{v}_G$ とすると、運動量保存則より次のように表記ができる。

$$\boldsymbol{v}_G = \frac{m}{M+m}\boldsymbol{V}_i+\frac{M}{M+m}\boldsymbol{W}_i \tag{124}$$

$$\quad = \frac{m}{M+m}\boldsymbol{V}_f+\frac{M}{M+m}\boldsymbol{W}_f \tag{125}$$

これらを用いて、

$$\boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{v}_G+\frac{M}{M+m}(\boldsymbol{V}_i-\boldsymbol{W}_i) \tag{126}$$

$$\boldsymbol{V}_f = \boldsymbol{v}_G+\frac{M}{M+m}(\boldsymbol{V}_f-\boldsymbol{W}_f) \tag{127}$$

$$\tag{128}$$

$\boldsymbol{r}_{mM}$ を衛星と惑星の相対位置ベクトルとすれば、運動方程式は換算質量 $\mu = Mm/(M+m)$ を用いて、次のように表現できる。

$$\mu \ddot{r}_{mM} = -\frac{GMm}{|\boldsymbol{r}_{mM}|^2} \frac{\boldsymbol{r}_{mM}}{|\boldsymbol{r}_{mM}|} \tag{129}$$

$$\therefore\ m\ddot{r}_{mM} = -\frac{G(M+m)m}{|\boldsymbol{r}_{mM}|^2} \frac{\boldsymbol{r}_{mM}}{|\boldsymbol{r}_m M|} \tag{130}$$

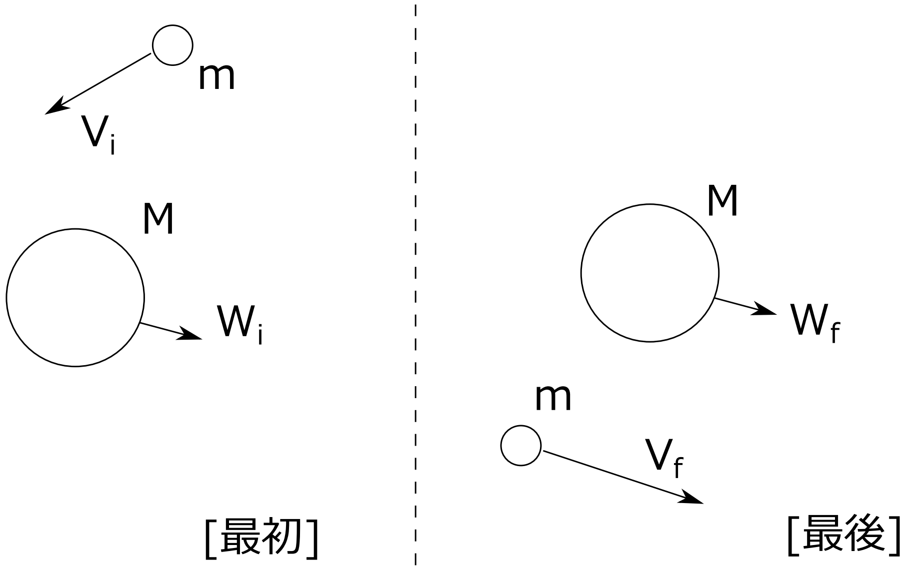


図 10: 星の周りを衛星がスイングバイしていく様子。星の近くに衛星が突入してくると、星から力を受ける。この力を受けて衛星は大きく軌道を変える。これによって衛星は方向を変える以外にも、速度を加速・減速をすることもできる。

8　円運動

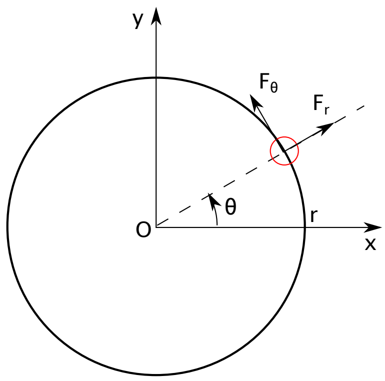


図 11: 円運動を考える時は極座標で考えると便利なことが多い。このとき θ 方向と r 方向に運動を分解し、式を立てる。

円運動を考えるとき、xy 座標系を適当に設定して、束縛条件などを考慮して計算してもいいが、これだと手間がかかる。なので、ここでは極座標系を導入し、回転方向 (θ 方向) と動径方向 (r 方向) に分けて運動方程式を立

てる。

$$\text{接}: mr\ddot{\theta} = F_\theta \tag{131}$$
$$\text{向}: -mr\dot{\theta}^2 = F_r \tag{132}$$

具体的な図は図 11 を参照して欲しい。一般に、円運動している物体に働く接線方向の力は 0 である。逆に、進行方向に対して常に垂直な力の働く物体の運動は円運動になる。

ここでは何の説明もなく述べてみたが、円運動の基本から説明しよう。

8.1 等速円運動の速度と角速度

物体が円周上を一定の速さでまわる運動を等速円運動という。

物体が速さ v、半径 r で円周上を動いているとする。時刻 t の間に円周上を l 動いた。このとき、物体の速さは次のように表現できる。

$$v = \frac{l}{t} = \frac{r\theta}{t} \tag{133}$$
$$\omega = \frac{\theta}{t} \tag{134}$$
$$v = r\omega \tag{135}$$

ここで定義した ω は角速度といい、単位時間あたりに回転する角度を指す。この ω とラジアンの定義を思い出せば、速さ v を書き直すことができる。円運動が円周上を移動する運動であることからも明らかであるが、この速さ v は円の接線方向を向く。また、等速円運動は角速度は一定の円運動を意味する。

8.2 周期と回転数

物体が円周上を一周するまでに要する時間を周期という。この周期を T とすると、円運動の円周を考えれば、次の等式が成立する。

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \tag{136}$$

また、一秒間辺りに回転する回数を回転数という。この回転数を n で表記すると、

$$n = \frac{1}{T} \tag{137}$$

で表される。

8.3 等速円運動の加速度

等速円運動において物体が受ける力およびそのときの加速度を考えよう。具体的に考えるため、質量 m の物体が半径 r、角速度 ω の等速円運動をしているとしよう。

等速円運動をする物体は常に同じ速さで動いている。そのため、接線方向への加速度は存在せず、接線方向への力は受けていないと考えられる。しかし慣性の法則を考えれば等速円運動をする物体は運動の方向を変えているので、物体は力を受けている。以上より力を受けている方向は接線と垂直な方向、すなわち中心方向である。

と、ここまでイメージで考えたところで、具体的な大きさを考えよう。(途中)

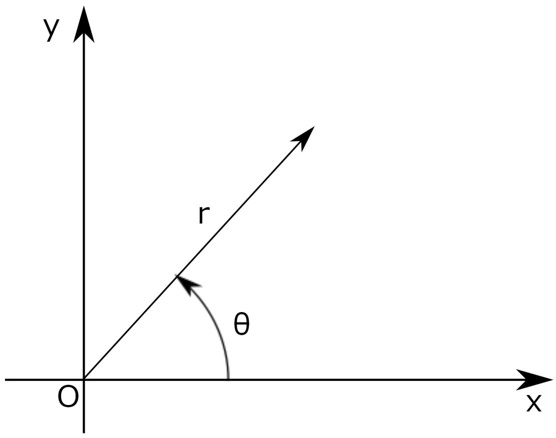


図 12: 直交座標と極座標

8.4　2次元運動の極座標

2次元極座標系における基底は次のようにとれる。

$$\boldsymbol{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \tag{138}$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{139}$$

これより、

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \tag{140}$$

$$= \dot{\theta}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \tag{141}$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\theta = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{142}$$

$$= -\dot{\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r \tag{143}$$

以上より、

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r \tag{144}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\boldsymbol{e}_r \tag{145}$$

$$= \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \tag{146}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta \tag{147}$$

ここから $r =$ 一定$, \dot{\theta} =$ 一定 とすることで、円運動の方程式が導かれる。

$$m\ddot{r} = -r\dot{\theta}^2\boldsymbol{e}_r \tag{148}$$

$$\therefore F_r = m\ddot{r} = -r\dot{\theta}^2 \tag{149}$$

ただし、F_r の方向は r 方向成分の力なので、中心 O から遠ざかる方向の力である。

8.5 直交座標系との比較

直前では極座標系における位置座標の微分を示してみた。しかしこれだけだといったい何のことかわからない人も多いことだろう。なので普段使い慣れているだろう直交座標系 (xy 軸) を用いて説明する。
このとき基底は

$$\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{150}$$

ととれる。これより、合成関数の微分を用いてやれば

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} && (151)\\
&= x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y && (152)\\
\therefore \dot{\boldsymbol{r}} &= \frac{d}{dt}(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y) && (153)\\
&= \dot{x}\boldsymbol{e}_x + x\dot{\boldsymbol{e}_x} + \dot{y}\boldsymbol{e}_y + y\dot{\boldsymbol{e}_y} && (154)\\
&= \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y \quad (\because \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y : \mathrm{const.}) && (155)\\
&= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} && (156)\\
&= \boldsymbol{v} && (157)
\end{aligned}$$

となる。これまではなんの断りもなく $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$ としてきたが、座標系が変わればまったく異なるものになるのである。同じようにして $\ddot{\boldsymbol{r}}$ についても求められるが、ここでは割愛する。各自確かめてみるといいだろう。

8.6 単振動

物理量 $x(t)$ が与えられた定数 $x_0, \omega(>0)$ を用いて、

$$x(t) - x_0 = asin(\omega t + \alpha) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{158}$$

とかけるとき、

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \omega\cos(\omega t + \alpha) && (159)\\
\ddot{x} &= -\omega^2 a\sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2(x - x_0) && (160)
\end{aligned}$$

となる。これの逆も成り立つ。高校生であればこれは当たり前のものとして用いても構わないが、一応証明しておく。

8.6.1 単振動型微分方程式を解く

$$\ddot{x} = -\omega^2(x - x_0) \tag{161}$$

$$\omega > 0, \omega \text{と } x_0 \text{は与えられた定数} \tag{162}$$

の微分方程式を解く。
$x - x_0 = X$ とおくと、

$$\ddot{X} = -\omega^2 X \tag{163}$$

さらに両辺に $\dot{X}$ をかけて

$$\begin{aligned}
\dot{X}\ddot{X}+\omega^2 X\dot{X}=0 \\
\therefore\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{X}^2+\frac{1}{2}\omega^2X^2\right)=0 \\
\therefore\ \frac{1}{2}\dot{X}^2+\frac{1}{2}\omega^2X^2=\frac{1}{2}C^2(=\text{一定}) \\
\therefore\ \dot{X}=\pm\sqrt{C^2-\omega^2X^2}
\end{aligned} \tag{164}$$

となる。

1. $C=0$ のとき

$$X\equiv 0 \tag{165}$$

である。

2. $C\neq 0$ のとき

$$\dot{X}=\pm\sqrt{C^2-\omega^2X^2}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega X}{C}\right)^2}}\frac{dX}{dt}dt=\pm C \tag{166}$$

となる。この両辺を t で積分して

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega X}{C}\right)^2}}\frac{dX}{dt}=\pm Ct+D\quad(D:\text{const.})\text{。} \tag{167}$$

左辺で $\frac{\omega X}{C}=\sin\theta\ (-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$ とおくと $\frac{\omega}{C}dX=\cos\theta d\theta$ となる。よって

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega X}{C}\right)^2}}\frac{dX}{dt}dt &= \int\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\frac{C}{\omega}\cos\theta d\theta \\
&= \frac{C}{\omega}\theta+E\quad(E:\text{const.}) \qquad (168)\\
\therefore\ \frac{C}{\omega}\theta+E &= \pm Ct+D \qquad (169)\\
\therefore\ \theta &= \pm\omega t+\text{定数} \qquad (170)
\end{aligned}$$

となる。さきほど $\frac{\omega X}{C}=\sin\theta$ とおいたからこれに代入すれば、

$$\begin{aligned}
X &= \frac{C}{\omega}\sin(\pm\omega t+\text{定数}) \\
&= \pm\frac{C}{\omega}\sin(\omega t+\text{定数}) \\
&= a'\sin(\omega t+\text{定数})\quad(a'\text{は }0\text{ でない定数})
\end{aligned} \tag{171}$$

となる。

以上をまとめれば、

$$X=x-x_0=a\sin(\omega t+\alpha)\quad(a,\alpha:\text{任意定数}) \tag{172}$$

とかけ、特に $a\sin\alpha=A,\ a\cos\alpha=B$ とおくと

$$x-x_0=A\cos\omega t+B\sin\omega t \tag{173}$$

となる。

8.7 フックの法則と弾性エネルギー

バネを伸ばす、もしくは縮めたとき、バネには自然長から変位に比例した復元力が働く。自然長からのバネの伸びを x とする。このとき物体にかかる復元力 F は

$$F = F(x) = -kx \tag{174}$$

となる。このようにバネの復元力が自然長からの伸び x に比例することをフックの法則と呼ぶ。

バネに質量 m の物体 A が結び付けられたとき、この物体 A の運動方程式を考えると、

$$m\ddot{x} = -kx \tag{175}$$

となる。これはまさしく単振動の運動方程式である。実際に解いてみると

$$\frac{d^2}{dt^2}x = -\frac{k}{m}x。 \tag{176}$$

ここで

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{177}$$

とすれば運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}x &= -\omega^2 x \\ \therefore\ x &= A\sin(\omega t + \delta) \end{aligned} \tag{178}$$

となる。A, δ は初期条件で決まる定数である。

自然長からバネを x 伸ばすのに必要なエネルギーを考える。これは自然長からの仕事を考えれば、

$$\int_0^x \left(-F(x')\right) dx' = \left[\frac{1}{2}kx'^2\right]_0^x = \frac{1}{2}kx^2 \tag{179}$$

となる。これが自然長のバネの伸びを x にするために要した仕事もといエネルギーである。ところで力学的エネルギーが保存されることを考えれば、このエネルギーはどこかしらに保存されるはずである。伸びが x になったバネは自然長に戻ろうとする。つまり、このバネはエネルギー的に高い状態にあるといえる。ここでバネを伸ばすのに要したエネルギーはバネ自体に蓄えられていると考える。これをバネの弾性エネルギーという。

9 剛体

剛体：絶対に変形しない形のある物体＝任意の構成 2 粒子の距離が不変に保たれるという束縛条件のある N 粒子系

一般に系の運動を指定するのに最低必要な変数の数を“系の自由度”というが、剛体の自由度はいくつであろうか。3 次元において考える。まず剛体から任意の点 A を選ぶ。そうすると、この点の位置を定めるためには 3 つの自由度が必要である。さらにこの点とは別の点 B を剛体から選ぶ。この新しい点 B の位置を決めるために必要な変数の数は、A からの距離は決まっているので点 B を決める要素は方向だけである。よって自由度は 2 である。そして A,B とは異なる点 C を剛体から選ぶ。点 C は A, B を通る直線を回転軸とする円周上を動くため、その自由度は 1 である。剛体はひずまないため、この 3 つの点の配置が決まれば残る点の配置は一意に定まる。このように、剛体の自由度は 6 である。

剛体の運動は外力のみで議論可能であり、次の関係によって議論するのが実用的である。

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{f}_{i\text{ 外}} \tag{180}$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_{i\text{ 外}} \tag{181}$$

高校では剛体について扱う場合、つり合いを考えることが多く、その場合は $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{L}$ ともに一定として扱い

$$0 = \sum_i \boldsymbol{f}_{i\text{ 外}} \tag{182}$$

$$0 = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_{i\text{ 外}} \tag{183}$$

となる。

9.1 重心の分離・合成について

N 個の質点系を考える。$i = 1 \sim n$ でつくられる剛体 1 (質量 M_1) と $i = n+1 \sim N$ でつくられる剛体 2 (質量 M_2) がある。このとき、

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{(\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i)}{M_{tot}} \tag{184}$$

$$= \frac{\frac{M_1 \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i}{M_1} + \frac{M_2 \sum_{i=n+1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i}{M_2}}{M_1 + M_2} \tag{185}$$

$$= \frac{M_1 \boldsymbol{r}_{1G} + M_2 \boldsymbol{r}_{2G}}{M_1 + M_2} \tag{186}$$

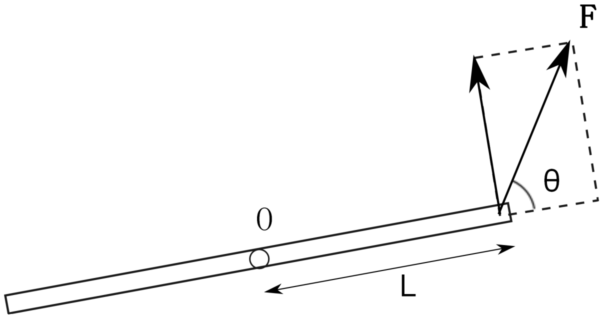
となる。

9.2 モーメント

原点 O に対して、$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{A}$ を、原点周りの $\boldsymbol{A}$ のモーメントという。剛体に力を加えると力点・支点・作用点が存在するのは知ってのとおりだが、これをモーメントとして考える。ある剛体に対して作用するモーメントをすべて書き表したのが、前で紹介した

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_{i\text{ 外}} \tag{187}$$

である。



簡単化して考える。2 次平面上に存在する剛体棒を考える。中心に原点をとり、回転だけできるように固定する。このとき、棒の長さを $2L$、一様な太さを持っており、かつ厚さは無視出来るとする。この棒の端に力 $\boldsymbol{F}$ を加えたとしよう。このとき棒に対して作用する力は $\boldsymbol{F}$ のうち、棒に対して垂直成分だけが作用する。棒と力のなす角を θ とすれば、このとき棒に作用するモーメント M は

$$M = LF\sin\theta \tag{188}$$

である。このように、剛体に作用するモーメントは、支点から作用点までの距離（＝腕の長さ）と、回転の角度方向の力によって決まる。

10　惑星の運動

10.1　ケプラーの法則

ケプラー (Johannes Kepler,1571～1630, 独) は惑星[17] の運動を詳細に観察し、ある法則を発見した。

1. 惑星の軌道は太陽を焦点の一つとする楕円である。
2. 惑星の面積速度は一定
3. 惑星の公転周期の 2 乗は、惑星の楕円軌道の長半径の 3 乗に比例

これらの法則をまとめて、ケプラーの法則という。

面積速度一定

$\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{r}$ が平行のとき、すなわち $\boldsymbol{F}$ が中心力のとき、物体の面積速度は一定、すなわち以下の量が一定と成る。

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rv_\theta \tag{189}$$

微小時間 Δt の間に動径の掃く面積を ΔS とする。Δt が十分に小さいと仮定すると、次のように近似できる。

$$\Delta S \approx \frac{1}{2}rv\Delta t\sin\alpha \tag{190}$$

$$\therefore\ S = \frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2}rv\sin\alpha = \frac{1}{2}rv_\theta \tag{191}$$

このとき、

$$L_z = mrv_\theta = 2mS \tag{192}$$

となる。これは角運動量保存の特別な場合に対応しており、

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{193}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = 0 \tag{194}$$

となる。ゆえに、$\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{r}$ が平行といえる。

[17] 惑星とは恒星の周りを回る天体のこと。ただし、質量には上限と下限があり、それを満たす必要がある。

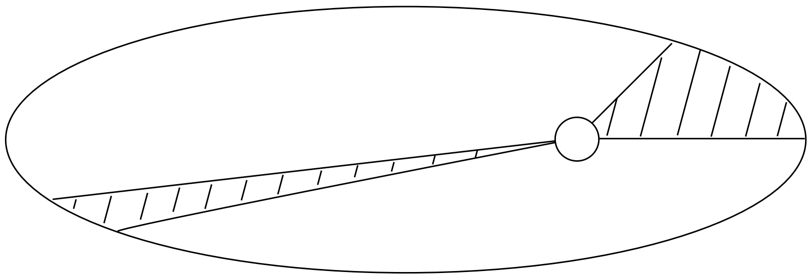


図 13: 面積速度一定の図。一定時間に動径が掃く面積が一定である。この図だと、斜線部の面積が等しい。特に近星点の近くほど惑星は早く、遠星点ほど惑星は遅く動く。

公転周期の 2 乗は長半径の 3 乗に比例する

面積速度 S [18] 、周期 T、長半径 a、短半径 b、楕円の焦点にある星の質量を M、惑星の質量を m とする。

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{(\pi ab/S)^2}{a^3} = \frac{\pi^2}{S^2}\frac{b^2}{a} \tag{195}$$

ここで

$$\begin{cases} a &= \frac{r_1+r_2}{2} \\ b^2 &= a^2 - \left(\frac{r_2-r_1}{2}\right)^2 = r_1 r_2 \end{cases} \tag{196}$$

となるから、面積速度一定とエネルギー保存の法則より、

$$\begin{cases} S &= \frac{1}{2}r_1 v_1 = \frac{1}{2}r_2 v_2 \\ E &= \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2} \end{cases} \tag{197}$$

が求まる。よって、r_1, r_2 は r の二次方程式

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{2S}{r}\right)^2 - \frac{GMm}{r} \tag{198}$$

$$\therefore Er^2 + GMmr - 2mS^2 = 0 \tag{199}$$

の二つの正の解である。ここで解と係数の関係より、

$$\begin{cases} r_1 + r_2 &= -\frac{GMm}{E} = a \\ r_1 r_2 &= -\frac{2mS}{E} = b^2 \end{cases} \tag{200}$$

となるから、

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{(\pi ab/S)^2}{a^3} = \frac{\pi^2}{S^2}\frac{b^2}{a} = \frac{4\ \pi^2}{GM} \tag{201}$$

となる。上で見てわかるように $E < 0$ である。E ≥ 0 であるとき軌道は放物線 or 双曲線となる。一般に星が無限遠に飛び去る条件は E≥0 といってよい。

10.2 万有引力の法則

ニュートン (Isaac Newton,1642~1727, 英) はケプラーの法則を基に万有引力の法則を導いた。

[18] 単位時間あたりに動径が掃く面積を面積速度という。

物体は互いにその物体を結ぶ方向に働く引力を及ぼしあい、その大きさは物体の質量の積に比例し、物体間の距離の 2 乗に反比例する。

$$F = \frac{GMm}{r^2} \tag{202}$$

$$G = 6.6720 \times 10^{-11} [\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}] : \text{万有引力定数} \tag{203}$$

物体の大きさが距離に対してどれだけのスケールであるかにもよるが、、少なくとも距離 r の位置にある二つの質点 M, m に働く力が分かる。では、M, m が質点とみなせないほど大きな物体だったらどうだろうか。例えば、地球と地球上の人を考えたとき、どうみても地球は質点ではない。

実はここで次が成り立つ。

有限の半径を持つ面密度が一様な球殻による万有引力は、球殻の全質量がその中心に集まった時と同じ。

これは認めることにする。

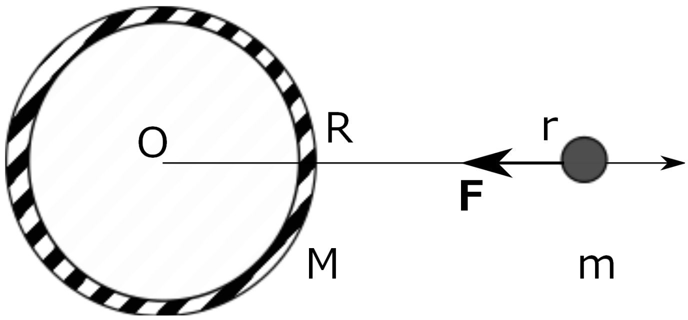


図 14: 半径 R, 質量 M の球殻。球殻の外にある質点 m に作用する力は、球殻の中心 O からの距離の 2 乗に反比例する。

半径 R, 質量 M の球殻が球対称だとする。球殻は十分薄いとしてその厚みは無視できる程度とする。球殻の中心を O とし、点 O から距離 r の位置にある質量 m の質点が受ける力 F は

$$F = \begin{cases} \frac{GMm}{r^2} & R \leq r \\ 0 & R > r \end{cases} \tag{204}$$

とかける。この証明はいささか複雑であるし、高校生に必ずしも必要というわけでもないので今回は割愛する。これを利用すると次の定理が導ける。

半径 R, 質量 M の球が球対称だとする。球を薄い球殻の集まりであると考える。このときすべての球殻の中心は円の中心と一致する。球の中心を O とし、点 O から距離 r の位置にある質量 m の質点が受ける力 F は

$$F = \begin{cases} \frac{GMm}{r^2} & R \leq r \\ \frac{GMm}{r^2}\frac{r^3}{R^3} & R > r \end{cases} \tag{205}$$

となる。(これらは事実として認めてよい→証明は別)

つまり、地球を完全な球と近似すれば、地球の重心はその中心にある。ここで、地球 M kg と地球上の人 m kg の間に働く力について考える。地球の半径を R とすれば、地球の半径に比べて人の身長は十分小さいのでふたつの重心の距離 $\approx$ 地球の半径と近似できる。これより、地球と人に働く力は万有引力の法則より、

$$F = \frac{GMm}{R^2} \tag{206}$$

である。ここで

$$
\begin{aligned}
G &= 6.6720 \times 10^{-11}[\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2] &(207)\\
M &\approx 6.0 \times 10^{24}[\mathrm{kg}] &(208)\\
R &\approx 6400[\mathrm{km}] &(209)
\end{aligned}
$$

を代入すると

$$
\frac{GM}{R^2} \approx g : \text{重力加速度} \tag{210}
$$

となる。(近似の値が大雑把だから少々誤差があるけれど) これらより、次のような状況を考える。

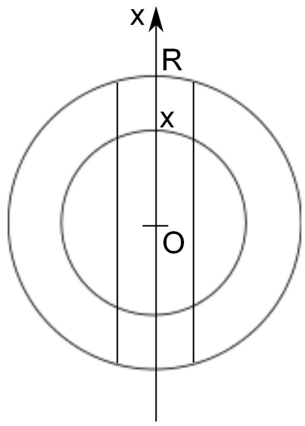


図 15: 地球トンネルのモデル。地球を完全な球体と仮定し、その中心を通過するトンネルを考える。

地球を完全に密度 ρ で一様な半径 R の球体だとする。今、地球の中心を通るようにまっすぐなトンネルを地球の内部でくりぬいた。一方のトンネルの入り口で質量 m の物体を速度 0 で放すと、この物体はこの後どのような運動をするか考える。図のように座標系をとり、地球の中心 O からの距離を x とする。R≥x のとき物体の受ける力は、地球の中心 O を中心とする半径 x の球部分の質量によるので、万有引力の法則より、

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= F(x) &(211)\\
&= -G\frac{M_x m}{x^2} &(212)\\
&\quad (M_x : \text{O を中心とする半径 } x \text{ の球部分の質量})\\
&= -G\frac{\rho 4/3\pi R^3 (x/R)^3 m}{x^2} &(213)\\
&= -\left(\frac{4}{3}G\pi\rho m\right)x &(214)
\end{aligned}
$$

となる。特に、

$$
G\frac{\left(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho\right)}{R^2} = g \tag{215}
$$

より、

$$
\ddot{x} = -\frac{g}{R}x \tag{216}
$$

これは、$x = 0$ を中心とする角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ の単振動である。よって、$t = 0$ で初速度 0,$x = R$ とすれば

$$
x = R\cos\sqrt{\frac{g}{R}}t \tag{217}
$$

と、物体の運動は表記できる。これより、物体が地球の裏側に達するまでに要する時間は周期の半分なので、

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{6.4\times 10^6[\mathrm{m}]}{9.8[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^2]}} \approx 2.54\times 10^3[\mathrm{s}] \approx 42[\text{分}] \tag{218}$$

つまり、仮にそのような条件を再現できたら、地球の裏側まで行くのに 40 分とちょっとで行けるということになる (もちろん、そのほかの要素を無視した場合だが)。

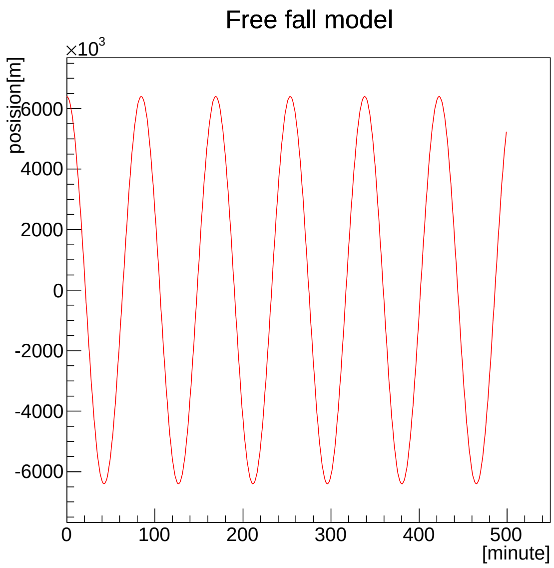


図 16: 中心を通るトンネルを地球内部に通して、その中に地表から物体を自由落下させた時の様子。空気抵抗などを無視して完全に理想化すれば、40 分ほどで反対側に到達する。

10.3 有限な大きさの物体が及ぼす力

ここまでの議論で「有限の大きさを持つ物体が周囲に及ぼす重力は、その重心にすべての質量が集まっている時に周囲に及ぼす力に等しい」として話してきた。また、「球対称な物体の内部に質点がある場合、質点には力は及ぼされない」とも約束してきた。それが果たして真実かどうかを説明する。

有限の大きさを持つ物体が外部に及ぼす力

質点として扱えない有限の大きさの物体が周囲へ及ぼす力を考える。それには有限の大きさの物体を微小体積に細分化し、それが位置 $\boldsymbol{r}$ に存在している質量 m の質点に及ぼす力を考える。

位置 r' にある微小体積 $dV(\boldsymbol{r}')$ が質点に及ぼす力 $d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')$ は、次のように表記できる。

$$d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}') = -\frac{G\rho(\boldsymbol{r}')dV(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}m\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{219}$$

ただし、$\rho(\boldsymbol{r}')$ は位置 $\boldsymbol{r}'$ における物質の密度である。これを全空間で積分してやれば、すべての力を計算できる。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \int d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}') && (220)\\
&= -\int \frac{G\rho(\boldsymbol{r}')dV(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} m \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} && (221)\\
&= -Gm\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'^3}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} && (222)
\end{aligned}$$

ここで積分の部分をさらに変換してみよう。

$$\begin{aligned}
\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d\boldsymbol{r}'^3 &= -\int \frac{\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{x}|^2}\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}d\boldsymbol{x}^3 \quad (\because\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) && (223)\\
&= -M\frac{1}{M}\int \frac{\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{x}|^2}\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}d\boldsymbol{x}^3 \quad \left(\text{ただし } M=\int\rho(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}^3\right) && (224)
\end{aligned}$$

このとき、M は質点に重力を及ぼす物体の全質量である。ここで有限の大きさを持つ物体の重心座標を $\boldsymbol{R}$ とすると、

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{M}\int \rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}d\boldsymbol{x} \tag{225}$$

であるが、このときの被積分関数の $\boldsymbol{x}$ を単位ベクトル化すると、積分結果も単位ベクトル可される。

$$\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} = \frac{1}{M}\int \rho(\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}d\boldsymbol{x} \tag{226}$$

被積分関数をさらに $|\boldsymbol{x}|^2$ で割ると、積分結果もそれに応じてベクトルの形式が変化する。

$$\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|^3} = \frac{1}{M}\int \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}|^2}\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}d\boldsymbol{x} \tag{227}$$

そして空間質量分布を表す $\rho(\boldsymbol{x}) \to \rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})$ とすると、重心の座標は $-\boldsymbol{r}$ だけ変化する。よって、

$$\frac{\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}|^3} = \frac{1}{M}\int \frac{\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{x}|^2}\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}d\boldsymbol{x} \tag{228}$$

となる。以上を全て先の積分の式に代入してやると、

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|} \tag{229}$$

となる。これより確かに、有限の大きさを持つ物体が質点に及ぼす力は、物質の全質量が重心位置にあるときに質点に及ぼす力と等しい。

球対称な物体の内部にある質点に及ぼされる力

簡単のために密度一定 ρ、半径 R、厚さ dR の球殻を考える。球殻の中心を原点にとり、そこから位置 $\boldsymbol{r}$(ただし $|\boldsymbol{r}| < R$) に質量 m の質点をとる。

このとき、質点を頂点とする頂角 $d\theta$ が十分小さな円錐曲線を描く。この円錐曲線が球殻から切り取る微小体積をそれぞれ A、B(質点に近い方を A ととる) とする。この A,B が質点に対して及ぼす力 $\boldsymbol{F}_A, \boldsymbol{B}_B$ を考える。

11 数学的処理

11.1 近似

x の関数 $f(x)$ が与えられていたとする。この関数 $f(x)$ を

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{230}$$

と展開することを考える。

一般に

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots & (231) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n & (232) \end{aligned}$$

と展開できる。[19] これを $x = x_0$ 周りのテイラー Taylor 展開という。

$x = 0$ 周りのテイラー展開を行うと、

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f^{(1)}(0)x + \frac{1}{2!} f^{(2)} x^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(0)x^3 + \cdots \tag{234}$$

となる。すなわち、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n f(0)}{dx^n} x^n \tag{235}$$

となる。このような $x = x_0$ におけるテイラー展開をマクローリン Maclaurin 展開という。$|x|$ が微小であれば、適当な次数のところで近似できる。

特に、高校物理で覚えておくべき近似は次の 3 つである。

$$\begin{aligned} (1+x)^p &= 1 + px + \frac{p(p-1)}{2} x^2 + \cdots & (236) \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} & (237) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} & (238) \end{aligned}$$

これらを適当なところ (たとえば 2 次) で近似すれば、どこかで見たことのある近似式になっていないだろうか。[20]

---

[19] ただし

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) \bigg|_{x=x_0} \tag{233}$$

とする。

[20] 例えば

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &= \left(1 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}} & (239) \\ &\approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) x^2 & (240) \\ &= 1 - \frac{1}{2} x^2 & (241) \end{aligned}$$

となる。

12　2 次曲線

天体の軌道は 2 次曲線で表現される。一般に、2 次曲線の方程式は次のように書く。

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{242}$$

A から F までの係数の違いによって 2 次曲線の種類が決まる。2 次曲線は直線円錐を平面で切った交点の切り口であり、円錐曲線とも呼ばれる。2 次の項の係数 A, B, C が 0 であれば点や直線にもなりうるが、今回は $ABC \neq 0$ の時のみ考える。このとき、$4AC - B^2 > 0$ を楕円、$4AC - B^2 < 0$ を双曲線、$4AC - B^2 = 0$ を放物線となる。二次曲線は次のような性質を持つ。二次曲線は一つの定点 (焦点) と定直線 (準線) からの距離が一定の点の描く図形である。この距離の比を離心率といい、離心率=焦点までの距離/準線までの距離である。離心率が $0 < e < 1$ なら楕円、$e = 1$ なら放物線、$e > 1$ なら双曲線という。

12.1　円（楕円）

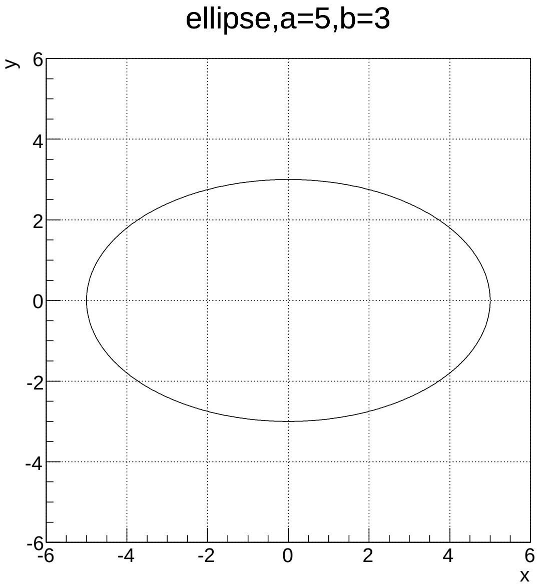


図 17: 楕円 $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

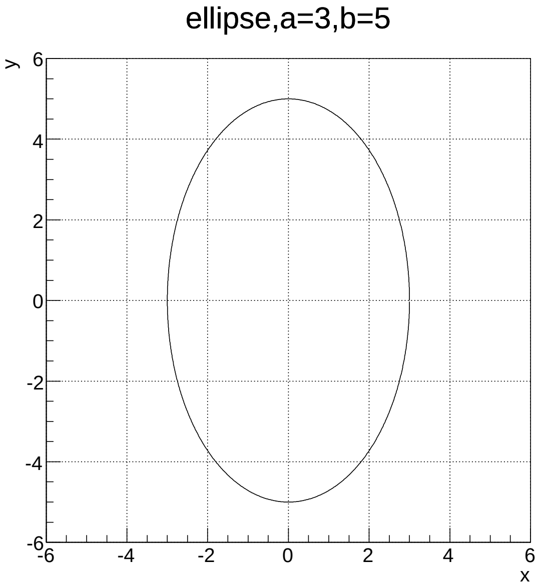


図 18: 楕円 $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{243}$$

$(a, 0), (0, -a), (0, b), (0, -b)$ の 4 点を通る楕円である。特に $a = b$ のとき、真円となる。

今、$a > b$ と仮定する。このとき楕円の焦点は $(\pm\sqrt{(a^2 - b^2)}, 0)$ となる。また、準線は $(\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}, 0)$ である。実際に離心率 e がどう表わされるか、計算してみる。離心率の定義から

$$\sqrt{(x - (\pm\sqrt{a^2 - b^2}))^2 + y^2} \quad = \quad e\left|x - \left(\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)\right| \tag{244}$$

$$(1 - e^2)x^2 - 2\left(\pm\sqrt{a^2 - b^2} \mp \frac{e^2a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)x + y^2 \quad = \quad \frac{e^2a^4}{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - b^2} \tag{245}$$

となる。ただし、複号同順である。原点中心な楕円を考えればxの1次項の係数は0である。よって離心率は

$$\sqrt{a^2-b^2}-\frac{e^2a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}=0 \tag{246}$$

$$\therefore e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} \tag{247}$$

である。その他の楕円の特徴は2つの焦点との距離の和が一定の点の集まりだということである。なお、楕円を媒介変数表示すると、

$$\begin{cases} x &= a\cos\theta \\ y &= b\sin\theta \end{cases} \tag{248}$$

とかける。

12.2 双曲線

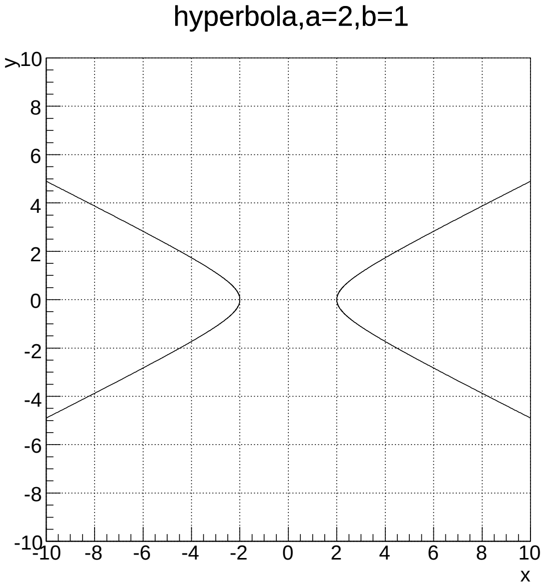


図 19: 双曲線 $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{1^2}=1$

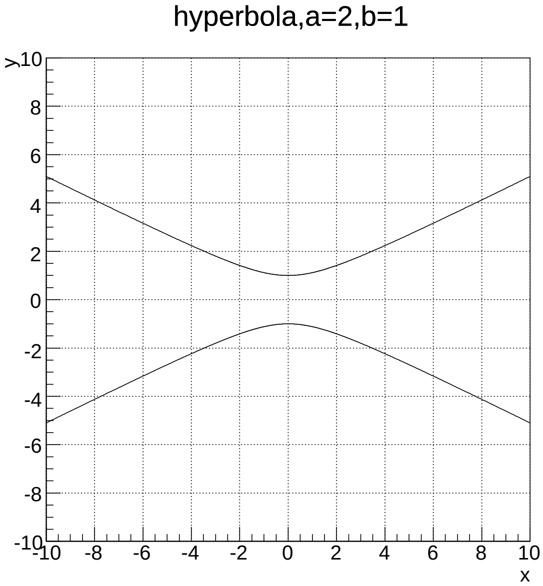


図 20: 双曲線 $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{1^2}=-1$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1 \tag{249}$$

右辺の符号の正負によって x 軸対称か y 軸対称かがかわる。ここでは、右辺は正で x 軸対称の場合を考える。このとき双曲線の焦点は $(\pm\sqrt{(a^2+b^2)},0)$ である。また、準線は $y=\pm\frac{b}{a}x$ である。円を媒介変表示したときは三角関数で表すことができたが、双曲線に関しては次のように表現できる。

$$\begin{cases} x &= \pm a\cosh\theta=\pm a\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2} \\ y &= b\sinh\theta=b\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2} \end{cases} \tag{250}$$

ここで用いた関数を双曲線関数と呼び、特にそれぞれ、ハイパボリックコサイン、ハイパボリックサインという。

また、双曲線はの特徴として、2 つの焦点までの距離の差が一定 (=2a)、というものがある。実際に計算してみる。双曲線上の点を $P(x,y)$ とし、2 つの焦点 $A(\sqrt{a^2+b^2},0)$,$B(-\sqrt{a^2+b^2},0)$ とする。このとき、

$$PB - PA = \pm 2a \tag{251}$$

$$= \sqrt{(x+\sqrt{a^2+b^2})^2+y^2} - \sqrt{(x-\sqrt{a^2+b^2})^2+y^2} \tag{252}$$

となる。再右辺第 2 項を移項して両辺 2 乗すれば、

$$\left(\pm 2a + \sqrt{(x-\sqrt{a^2+b^2})^2+y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x+\sqrt{a^2+b^2})^2+y^2}\right)^2 \tag{253}$$

$$\therefore\ \pm a\sqrt{(x-\sqrt{a^2+b^2})^2+y^2} = -a^2 + \sqrt{a^2+b^2}x \tag{254}$$

となり、さらに両辺を 2 乗すると

$$a^2\left((x-\sqrt{a^2+b^2})^2+y^2\right) = a^4 - 2a^2\sqrt{a^2+b^2}x + (a^2+b^2)x^2 \tag{255}$$

$$-b^2x^2 + a^2(a^2+b^2) + a^2y^2 = a^4 \therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{256}$$

となる。よって双曲線の式が得られた。

12.3 放物線

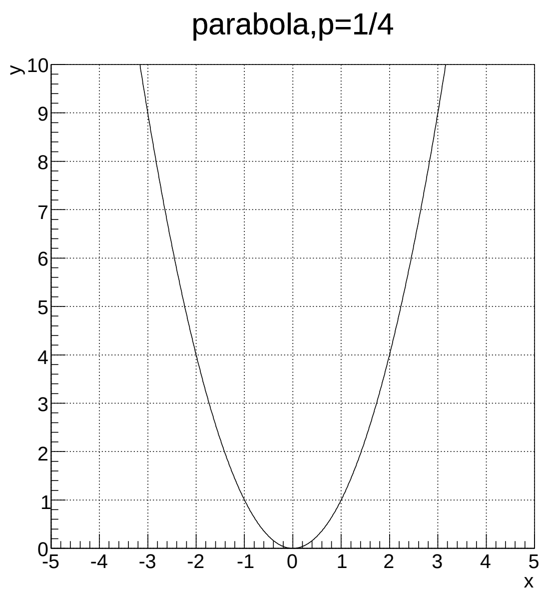


図 21: 放物線 $4 \cdot 1/4y = x^2$

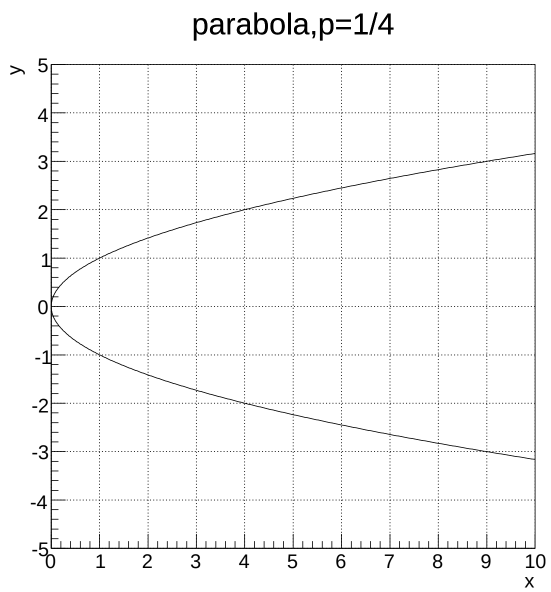


図 22: 放物線 $4 \cdot 1/4x = y^2$

$$x^2 = 4py \tag{257}$$

簡単のため、y 軸対称の場合について考える。このとき焦点は $(0,p)$、準線は $y=-p$ である。

放物線は焦点からの距離と準線からの距離が等しい点の集合である。焦点 $(0, p)$ と準線 $y = -p$ からの距離が等しい点 (x, y) を考えると、

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p|^2 \tag{258}$$

$$\therefore\ x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2 \tag{259}$$

$$\therefore\ x^2 = 4py \tag{260}$$

となる。確かに、放物線の方程式が得られた。