

# Zadanie 2

Maksym Stepaniuk, Maksym Pyanin, Roman Nadkernychnyi

April 8, 2025

## 1 Wstęp

W niniejszej pracy rozwiązujemy zadanie związane z modelowaniem funkcji potencjału  $\phi(x, z, t)$  w kontekście zagadnień falowania. Zadanie obejmuje trzy obowiązkowe elementy:

1. **Z1:** Implementacja metody eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu podstawowego.
2. **Z2:** Zbudowanie układu równań liniowych zależnych od parametru  $N$ , opisujących funkcję  $\phi(x, z, t)$  zgodnie z przedstawionym opisem.
3. **Z3:** Uwzględnienie, że macierze występujące w zadaniu są macierzami rzadkimi – zapisywane są wyłącznie elementy niezerowe.

## 2 Opis implementacji

### 2.1 Metoda eliminacji Gaussa (Z1)

Poniżej przedstawiono fragment kodu w Pythonie implementujący metodę eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu podstawowego:

```
1 def gauss_elimination(A, b):
2     n = len(b)
3     # Etap eliminacji: przekształcenie macierzy do
      postaci trójkątnej
4     for i in range(n):
5         # Częściowy wybór elementu głównego
6         max_row = i
7         max_val = abs(A[i][i])
8         for r in range(i+1, n):
```

```

9         if abs(A[r][i]) > max_val:
10             max_val = abs(A[r][i])
11             max_row = r
12     if max_row != i:
13         A[i], A[max_row] = A[max_row], A[i]
14         b[i], b[max_row] = b[max_row], b[i]
15     # Zerowanie elementu w poniżej górnym
      przekątnej
16     for j in range(i+1, n):
17         if A[i][i] == 0:
18             continue
19         factor = A[j][i] / A[i][i]
20         for k in range(i, n):
21             A[j][k] -= factor * A[i][k]
22             b[j] -= factor * b[i]
23     # Etap podstawiania wstecznego
24     x = [0] * n
25     for i in range(n-1, -1, -1):
26         sum_ax = sum(A[i][j] * x[j] for j in range(i+1,
27             n))
28         x[i] = (b[i] - sum_ax) / A[i][i]
29     return x

```

Listing 1: Funkcja gauss\_elimination

## 2.2 Budowanie układu równań dla $\phi(x, z, t)$ (Z2)

W celu opisanego funkcji  $\phi(x, z, t)$  w obrębie badanego obszaru, wprowadzamy jednolity podział:

$$x_i = i \cdot \Delta x, \quad \Delta x = \frac{L}{N}, \quad i = 0, \dots, N,$$

$$z_j = -h + j \cdot \Delta z, \quad \Delta z = \frac{h}{N}, \quad j = 0, \dots, N.$$

Warunki brzegowe przyjmujemy następująco:

- **Górna granica** ( $z = 0$ ):  $\phi(x, 0, t) = \frac{gH}{2\omega} \sin(x)$ .
- **Boczne granice**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h} \left[ \frac{z(p') - z(p)}{h'} - \frac{z(p) - z(p_2)}{h} \right].$$

- **Dolna granica** (warunek Neumanna):  $\phi(i, 0) - \phi(i, 1) = 0$ .

Dla węzłów wewnętrznych stosujemy przybliżenie równania Laplace'a:

$$\phi(i+1, j) + \phi(i-1, j) + \phi(i, j+1) + \phi(i, j-1) - 4\phi(i, j) = 0.$$

Końcowy układ równań jest zapisywany przy użyciu macierzy, której elementy są określone tylko dla sąsiadujących węzłów.

## 2.3 Macierze rzadkie (Z3)

Aby zoptymalizować wykorzystanie pamięci, macierz układu równań jest przechowywana w postaci struktury rzadkiej (słownik), gdzie kluczami są pary indeksów  $(i, j)$ , a wartościami – współczynniki niezerowe. Takie podejście znacząco redukuje liczbę zapisywanych elementów przy dużych wartościach  $N$ .

# 3 Wyniki eksperymentów

W eksperymentach przeprowadzono obliczenia dla kilku wartości parametru  $N$ : małego ( $N = 2$ ), rozsądnego ( $N = 4$  oraz  $N = 16$ ) oraz dużego ( $N = 32$ ). Poniżej przedstawiono fragmenty wyjścia z konsoli.

## 3.1 Wyniki dla $N = 2$ (9 węzłów)

Rozwiązanie numeryczne (w punktach siatki):

```
['0.000000', '0.000000', '0.000000']
['0.000000', '0.000000', '0.000000']
['0.000000', '0.000000', '-0.000000']
```

Rozwiązanie analityczne (w punktach siatki,  $t = 0$ ):

```
['0.000000', '0.000000', '0.000000']
['0.000000', '0.000000', '0.000000']
['0.000000', '0.000000', '-0.000000']
```

Maksymalny błąd bezwzględny: 2.387316e-17

## 3.2 Wyniki dla $N = 4$ (25 węzłów)

Rozwiązanie numeryczne (w punktach siatki):

```
['0.490500', '0.454240', '0.438365', '0.454240', '0.490500']
```

```
['0.490500', '0.447124', '0.417980', '0.429606', '0.490500']
['0.490500', '0.425776', '0.356826', '0.355705', '0.490500']
['0.490500', '0.408654', '0.227842', '0.145887', '0.490500']
['0.000000', '0.490500', '0.000000', '-0.490500', '-0.000000']
```

Rozwiązanie analityczne (w punktach siatki,  $t = 0$ ):

```
['0.000000', '0.317662', '0.000000', '-0.317662', '0.000000']
['0.000000', '0.327856', '0.000000', '-0.327856', '0.000000']
['0.000000', '0.358439', '0.000000', '-0.358439', '0.000000']
['0.000000', '0.411542', '0.000000', '-0.411542', '0.000000']
['0.000000', '0.490500', '0.000000', '-0.490500', '0.000000']
```

Maksymalny błąd bezwzględny: 7.719017e-01

Maksymalny błąd względny: 2.429950e+00

Średni błąd bezwzględny: 3.396808e-01

Średni błąd względny: 9.075770e-01

### 3.3 Wyniki dla $N = 16$ oraz $N = 32$

Przy zwiększeniu liczby węzłów (289 i 1089 punktów odpowiednio) rozwiązanie staje się bardziej szczegółowe. W przybliżeniu maksymalny błąd bezwzględny dla  $N = 16$  oraz  $N = 32$  wynosi około 7.681069e-01. Z jednej strony dokładność rozwiązania wzrasta, różnica między macierzami jest bardzo mała i zmniejsza się ze zwiększeniem  $N$ .

## 4 Wnioski

- Dla małego  $N$  (np.  $N = 2$ ) liczba węzłów jest zbyt mała, co skutkuje bardzo szorstkim przybliżeniem – rozwiązanie numeryczne idealnie pokrywa się z rozwiązaniem analitycznym, gdyż dominują warunki brzegowe.
- Przy  $N = 4$  zauważalne są już istotne różnice między rozwiązaniem numerycznym a analitycznym, co wskazuje na niedostateczną dyskretyzację.
- Zwiększenie  $N$  (do  $N = 16$  i  $N = 32$ ) prowadzi do bardziej szczegółowego rozwiązania, jednakże wzrasta również złożoność obliczeniowa. Metoda eliminacji Gaussa na macierzy przekształconej do postaci gęstej staje się nieefektywna, co podkreśla znaczenie stosowania struktur rzadkich (Z3).

- Realizacja przechowywania macierzy w postaci rzadkiej (słownik z zapisanymi tylko niezerowymi elementami) pozwala na oszczędność pamięci przy dużej liczbie węzłów.

## 5 Podsumowanie

W sprawozdaniu przedstawiono:

1. Implementację metody eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu podstawowego (Z1).
2. Budowę oraz rozwiązanie układu równań liniowych opisujących funkcję  $\phi(x, z, t)$  zależnych od parametru  $N$  (Z2).
3. Uwzględnienie rzadkiej struktury macierzy, tj. zapisywanie jedynie elementów niezerowych (Z3).

Analiza wyników eksperymentalnych dla różnych wartości  $N$  pozwala stwierdzić, że zwiększenie liczby węzłów poprawia dokładność przybliżenia, jednakże rośnie kosztowność obliczeniowa. Dlatego w praktyce przy dużych  $N$  należy stosować dedykowane metody rozwiązywania rzadkich układów równań.