



VJ1214 - Consolas y dispositivos

Bloque 1: Arquitectura de computadores

Introducción al Álgebra de Boole

1. Señales digitales

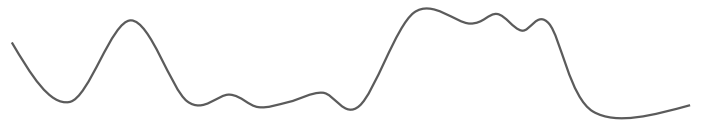
Índice de contenidos

1. Señales digitales
2. Álgebra de Boole
3. Funciones lógicas
4. Tabla de verdad
5. Propiedades
6. Formas estándar
7. Simplificación de funciones lógicas



1. Señales digitales

- Analógico



- Digital



Libro de referencia



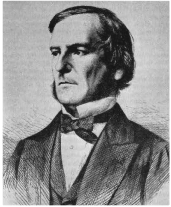
- Capítulo 4

1. Señales digitales

- Digital: 1/0



2. Álgebra de Boole



2. Álgebra de Boole

- Suma booleana: $A + B$

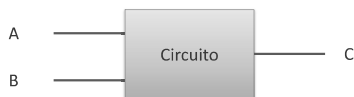
A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- La puerta lógica OR realiza la suma booleana



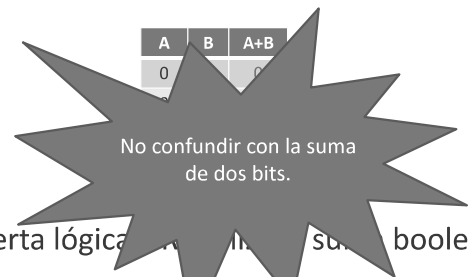
2. Álgebra de Boole

- Variable booleana:
 - Se usa para simbolizar la entrada o salida de un circuito digital
 - Puede tomar valor 1 ó 0



2. Álgebra de Boole

- Suma booleana: $A + B$



- La puerta lógica OR realiza la suma booleana



2. Álgebra de Boole

- Negación booleana: \overline{A}

A	\overline{A}
0	1
1	0

- La puerta lógica NOT realiza la negación booleana



2. Álgebra de Boole

- Suma booleana: $A + B$

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- La puerta lógica OR realiza la suma booleana



2. Álgebra de Boole

- Multiplicación booleana: AB

A	B	AB
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- La puerta lógica AND realiza la multiplicación booleana



2. Álgebra de Boole

- Puertas lógicas básicas:



2. Álgebra de Boole

- ¿Cuál es el resultado de las siguientes expresiones booleanas sabiendo que $A=0$ y $B=1$?
 - $AB+A+B$
 - $A+B\bar{A}$
 - $\bar{A}B+AB$
 - $BB+\bar{B}AB$
 - $A+B+\bar{A}+\bar{B}$

2. Álgebra de Boole

- ¿Cuál es el resultado de las siguientes expresiones booleanas sabiendo que $A=0$ y $B=1$?
 - $AB+A+B = 1$
 - $A+B\bar{A} = 1$
 - $\bar{A}B+AB = 1$
 - $BB+\bar{B}AB = 1$
 - $A+B+\bar{A}+\bar{B} = 1$

2. Álgebra de Boole

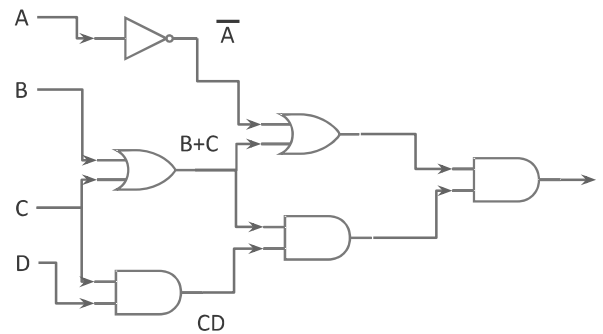
- ¿Cuál es el resultado de las siguientes expresiones booleanas sabiendo que $A=0$, $B=1$, $C=0$ y $D=1$?
 - $AB+C+D$
 - $A+D\bar{A}$
 - $\bar{B}C+AD$
 - $AD+\bar{B}DB$
 - $A+C+\bar{A}+\bar{C}$

2. Álgebra de Boole

- ¿Cuál es el resultado de las siguientes expresiones booleanas sabiendo que $A=0$, $B=1$, $C=0$ y $D=1$?
 - $AB+C+D = 1$
 - $A+D\bar{A} = 1$
 - $\bar{B}C+AD = 0$
 - $AD+\bar{B}DB = 0$
 - $A+C+\bar{A}+\bar{C} = 1$

3. Funciones lógicas

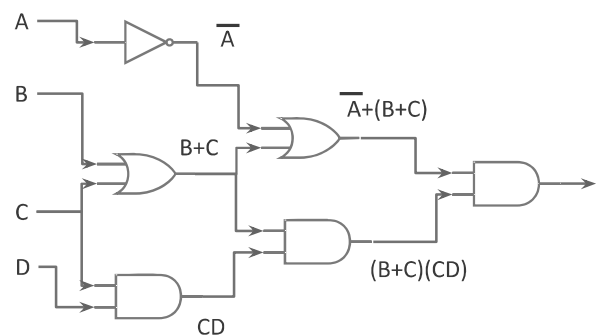
3. Funciones lógicas



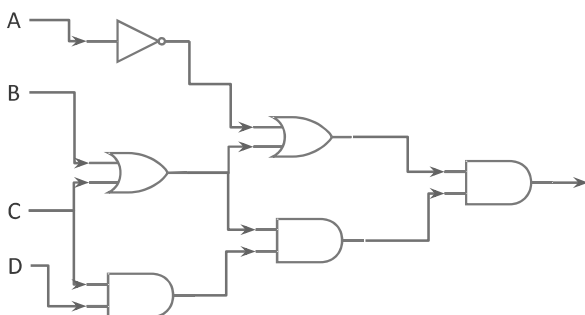
3. Funciones lógicas

- “El álgebra de Boole proporciona una manera concisa de expresar el **funcionamiento de un circuito digital** formado por una combinación de puertas lógicas, de tal forma que la salida puede determinarse por la **combinación de valores de entrada**”

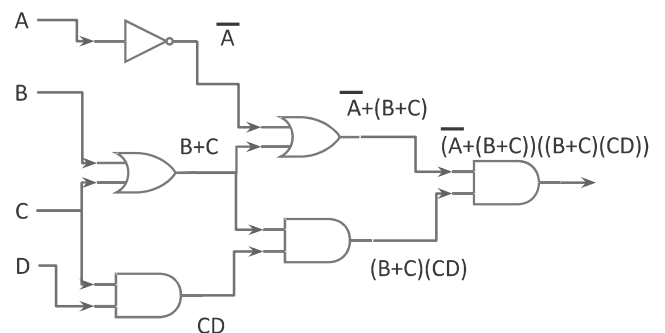
3. Funciones lógicas



3. Funciones lógicas



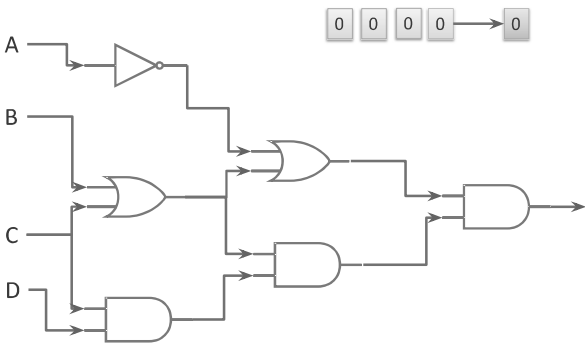
3. Funciones lógicas



3. Funciones lógicas

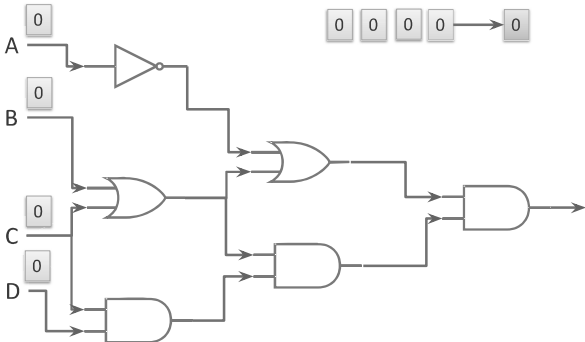
- El resultado es:
$$F(A,B,C,D) = \overline{A + (B + C)}((B + C)(CD))$$

4. Tabla de verdad



4. Tabla de verdad

4. Tabla de verdad

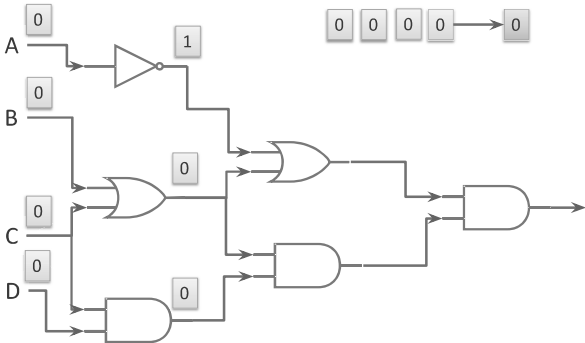


4. Tabla de verdad

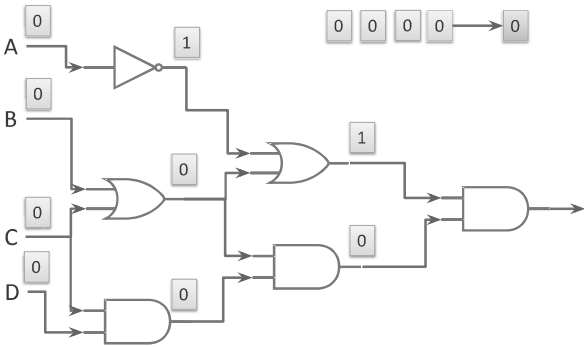
4. Tabla de verdad

A	B	C	D	F(A,B,C,D)=CD
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1

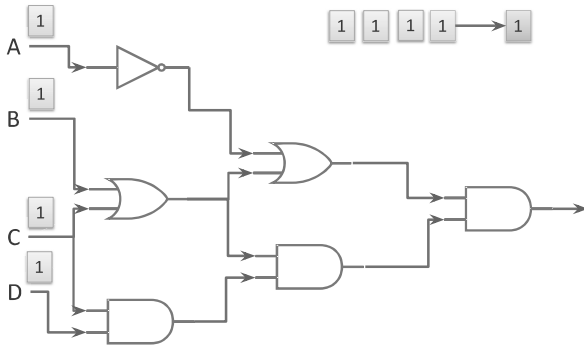
A	B	C	D	F(A,B,C,D)=CD
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1



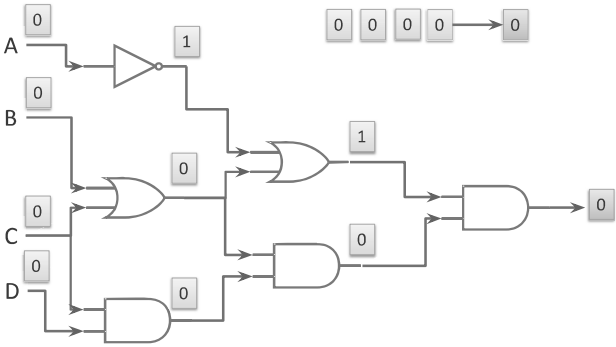
4. Tabla de verdad



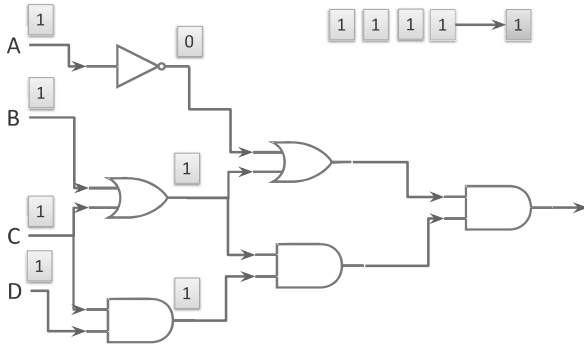
4. Tabla de verdad



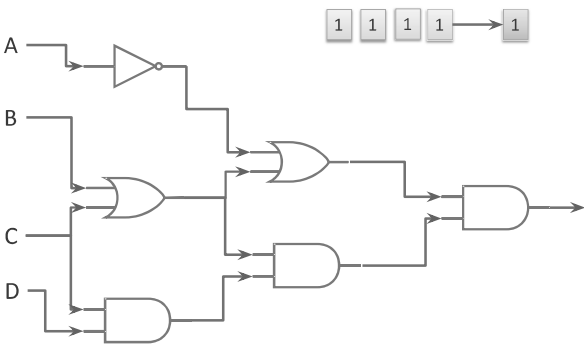
4. Tabla de verdad



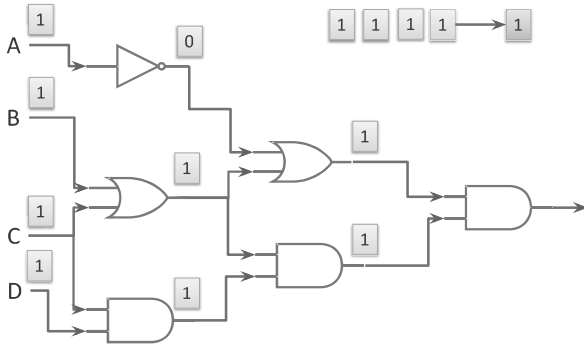
4. Tabla de verdad



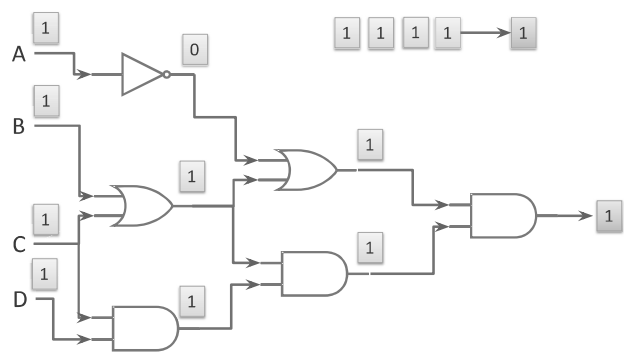
4. Tabla de verdad



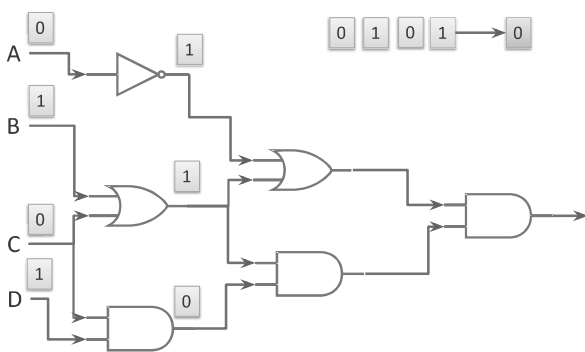
4. Tabla de verdad



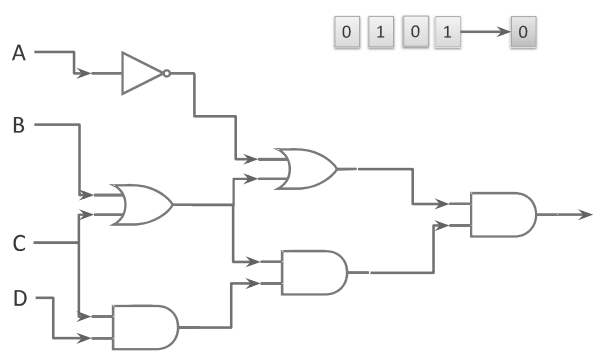
4. Tabla de verdad



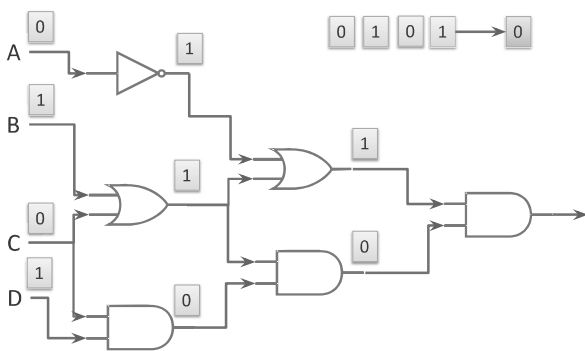
4. Tabla de verdad



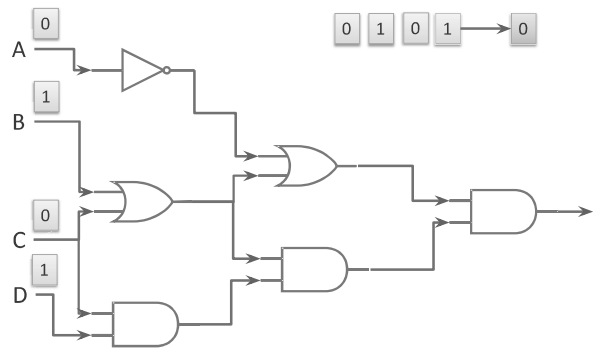
4. Tabla de verdad



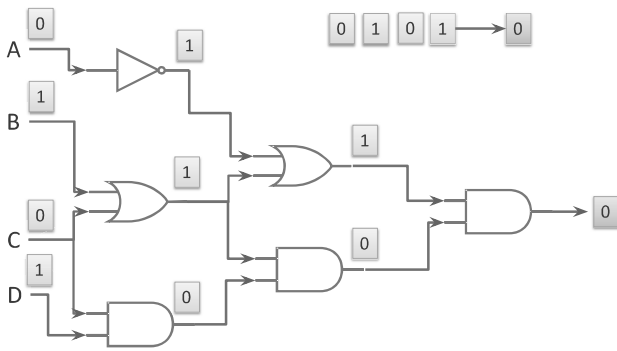
4. Tabla de verdad



4. Tabla de verdad



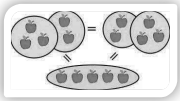
4. Tabla de verdad



5. Propiedades

- Algunas reglas

5. Propiedades



- | | |
|----------------------|-------------------------------|
| 1. $A + 0 = A$ | 7. $A \cdot A = A$ |
| 2. $A + 1 = 1$ | 8. $A \cdot \bar{A} = 0$ |
| 3. $A \cdot 0 = 0$ | 9. $\bar{\bar{A}} = A$ |
| 4. $A \cdot 1 = A$ | 10. $A + AB = A$ |
| 5. $A + A = A$ | 11. $A + \bar{A}B = A + B$ |
| 6. $A + \bar{A} = 1$ | 12. $(A + B)(A + C) = A + BC$ |

5. Propiedades

- Conmutativa
- Asociativa
- Distributiva
- Reglas
- Teorema de DeMorgan

5. Propiedades



- Teoremas de DeMorgan
 - El complemento de un producto de dos variables es igual a la suma de los complementos de las variables.

$$\bullet \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$$

- El complemento de una suma de dos variables es igual al producto de los complementos de las variables.

$$\bullet \overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$$

5. Propiedades

- Conmutativa
 - $A + B = B + A$
 - $AB = BA$
- Asociativa
 - $A + (B + C) = (A + B) + C$
 - $A(BC) = (AB)C$
- Distributiva
 - $A(B + C) = AB + AC$

5. Propiedades



- Teoremas de DeMorgan
 - El complemento de un producto de dos variables es igual a la suma de los complementos de las variables.

$$\bullet \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$$

- El complemento de una suma de dos variables es igual al producto de los complementos de las variables.

$$\bullet \overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$$

Este teorema será fundamental más adelante

5. Propiedades

- Función:

$$F(A,B,C,D) = \overline{A+(B+C)}((B+C)(CD))$$

- Aplicando las reglas y propiedades del álgebra de Boole podemos simplificar la expresión a:

$$F(A,B,C,D) = CD$$

5. Propiedades

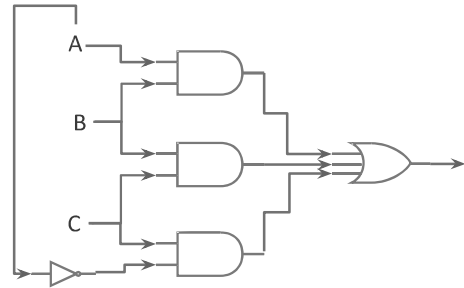
$$F(A,B,C,D) = (\bar{A} + (B+C))((B+C)(CD)) = CD$$

$$\begin{aligned} ((B+C)(CD)) &= BCD + CCD && \swarrow \text{AA=A} \\ ((B+C)(CD)) &= BCD + CD && \swarrow \text{A+AB=A} \\ ((B+C)(CD)) &= CD \\ (\bar{A} + (B+C))CD &= \bar{A}CD + BCD + CCD && \swarrow \text{AA=A} \\ (\bar{A} + (B+C))CD &= \bar{A}CD + BCD + CD && \swarrow \text{A+AB=A} \\ (\bar{A} + (B+C))CD &= \bar{A}CD + CD && \swarrow \text{A+AB=A} \\ (\bar{A} + (B+C))CD &= CD \end{aligned}$$

6. Formas estándar

- Suma de productos

$$F(A,B,C) = AB + BC + C\bar{A}$$



6. Formas estándar

- De tabla de verdad a circuito usando forma estándar

A	B	C	Salida	Término
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\bar{A}\bar{B}C$
0	1	0	1	$\bar{A}B\bar{C}$
0	1	1	1	$\bar{A}BC$
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	$AB\bar{C}$
1	1	1	1	ABC

$$F(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + AB\bar{C} + ABC$$

6. Formas estándar

7. Simplificación de funciones lógicas

7. Simplificación de funciones lógicas

• Mapas de Karnaugh

– A partir de la suma de productos calculamos su expresión equivalente simplificada.

– Algoritmo:

- Poner un 1 por cada producto
- Agrupar 1s
- Determinar operación producto mínimo
- Sumar todos los productos



7. Simplificación de funciones lógicas

$$F(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + ABC$$

AB\C	0	1
00		1
01		
11		
10		

7. Simplificación de funciones lógicas

$$F(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + ABC$$

AB\C	0	1
00		
01		
11		
10		

7. Simplificación de funciones lógicas

$$F(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + ABC$$

AB\C	0	1
00		1
01	1	
11		
10		

7. Simplificación de funciones lógicas

$$F(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + ABC$$



¡OJO! hay que poner 11

AB\C	0	1
00		
01		
11		
10		

7. Simplificación de funciones lógicas

$$F(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + ABC$$

AB\C	0	1
00		1
01	1	1
11	1	1
10		

7. Simplificación de funciones lógicas

- $F(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + ABC$

AB\C	0	1
00		1
01	1	1
11	1	1
10		

7. Simplificación de funciones lógicas

- ¿No Estándar?
- $F(A,B,C) = \bar{A} + AB + \bar{A}BC$

AB\C	0	1
00		1
01	1	1
11	1	1
10		

7. Simplificación de funciones lógicas

- ¿No Estándar?
- $F(A,B,C) = \bar{A} + AB + \bar{A}BC$

AB\C	0	1
00		
01		
11		
10		

7. Simplificación de funciones lógicas

- ¿No Estándar?
- $F(A,B,C) = \bar{A} + AB + \bar{A}BC$

AB\C	0	1
00	1	1
01	1	1
11	1	1
10		

7. Simplificación de funciones lógicas

- ¿No Estándar?
- $F(A,B,C) = \bar{A} + AB + \bar{A}BC$

AB\C	0	1
00		1
01	1	1
11		
10		

7. Simplificación de funciones lógicas

AB\C	0	1
00		1
01	1	1
11	1	1
10		

AB\C	0	1
00	1	1
01	1	1
11	1	1
10		



7. Simplificación de funciones lógicas

AB\C	0	1
00		1
01	1	1
11	1	1
10		

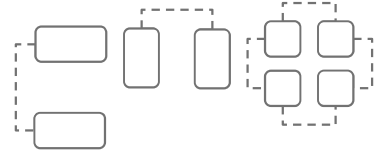
AB\C	0	1
00		1
01	1	1
11	1	1
10		



- En algunos casos:

AB\C	0	1
00		1
01		
11		
10	1	1

AB\C	0	1
00	1	1
01	1	1
11		
10	1	1



7. Simplificación de funciones lógicas

AB\C	0	1
00		1
01	1	1
11	1	1
10		

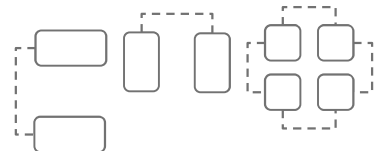
AB\C	0	1
00		1
01	1	1
11	1	1
10		



- En algunos casos:

AB\C	0	1
00		1
01		
11		
10	1	1

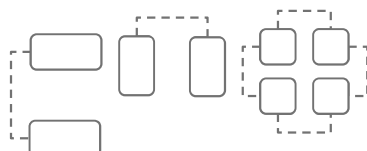
AB\C	0	1
00	1	1
01	1	1
11		
10	1	1



- En algunos casos:

AB\C	0	1
00		1
01		
11		
10	1	1

AB\C	0	1
00	1	1
01		
11		
10	1	1



7. Simplificación de funciones lógicas

- Volviendo al ejemplo:

AB\C	0	1
00		1
01	1	1
11	1	1
10		

AB\C	0	1
00	1	1
01	1	1
11	1	1
10		

7. Simplificación de funciones lógicas

- Para cada agrupación se obtiene el/los valor/es que no cambia/n.

AB\C	0	1
00		1
01	1	1
11	1	1
10		

→ B

- En una agrupación de 2x2, 1x4 o 4x1 únicamente no cambia una variable

7. Simplificación de funciones lógicas

AB\C	0	1
00	1	1
01	1	1
11	1	1
10		

7. Simplificación de funciones lógicas

AB\C	0	1
00		1
01	1	1
11	1	1
10		

→ $\bar{A}C$

- En una agrupación de 2x1, 1x2 no cambian dos variables.

7. Simplificación de funciones lógicas

AB\C	0	1
00	1	1
01	1	1
11	1	1
10		

→ \bar{A}
→ B

$$F(A,B,C) = \bar{A} + B$$

7. Simplificación de funciones lógicas

- Se suman las agrupaciones obtenidas:

AB\C	0	1
00		1
01	1	1
11	1	1
10		

→ $\bar{A}C$
→ B

$$F(A,B,C) = B + \bar{A}C$$

7. Simplificación de funciones lógicas

$$F(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + ABC = B + \bar{A}C$$

$$F(A,B,C) = \bar{A} + AB + \bar{A}BC = \bar{A} + B$$

Créditos imágenes utilizadas

- <https://www.flickr.com/photos/qaisur/4351196974/>
- <https://www.flickr.com/photos/mibddidph/2489332318/>
- http://es.wikipedia.org/wiki/George_Boole.jpg
- <http://www.expertosensistemas.com/wp-content/uploads/2013/11/Lupa.jpg>
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/36/Commutative_Addition.svg/330px-Commutative_Addition.svg.png
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2c/De_Morgan_Augustus.jpg
- https://www.ecured.cu/images/2/2d/Maurice_Karnaugh.jpg
- <http://2.bp.blogspot.com/-pT-uxoRBXtc/VcFYxNAJIII/AAAAAAACCM/-hAHXWiZdpk/s1600/Alerta.png>

