Tarea 2

Estadística Actuarial II

José Ignacio Rojas Zárate, C16911 Montserrat Beirute Abarca, C10997
Valeria Vásquez Venegas, C18373

07 de febrero de 2024

Índice

1. Ejercicio 1

Usando un algoritmo de integración por Montecarlo estime ln(2) con un error absoluto de 10−3

Considere la siguiente integral:

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{2} + \frac{1}{2}\,dx$$

.

Solución:

Empezamos separando la integral en dos partes. Para $\int \frac{\ln(x+1)}{2}\,dx$: Realizamos la sustitución $u = x+1$ y $du = dx$. Note que si $x \to 0 \Rightarrow u \to 1$ y si $x \to 1 \Rightarrow u \to 2$. Esta primera integral se convierte en: $\frac{1}{2}\int_1^2 \ln(u)\,du$

Ahora, se aplica la regla de integración por partes, donde $m = \ln(u) \Rightarrow dm = \frac{1}{u}du$ y $dv = 1 \Rightarrow v = u$:

$$\frac{1}{2}\left(u\ln(u)\Big|_1^2 - \int_1^2 u\,\frac{1}{u}du\right)$$

Esto se simplifica a: $\frac{1}{2}(\ln(2)-1) = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}$.

La otra parte de la integral original, $\int_0^1 \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}$:

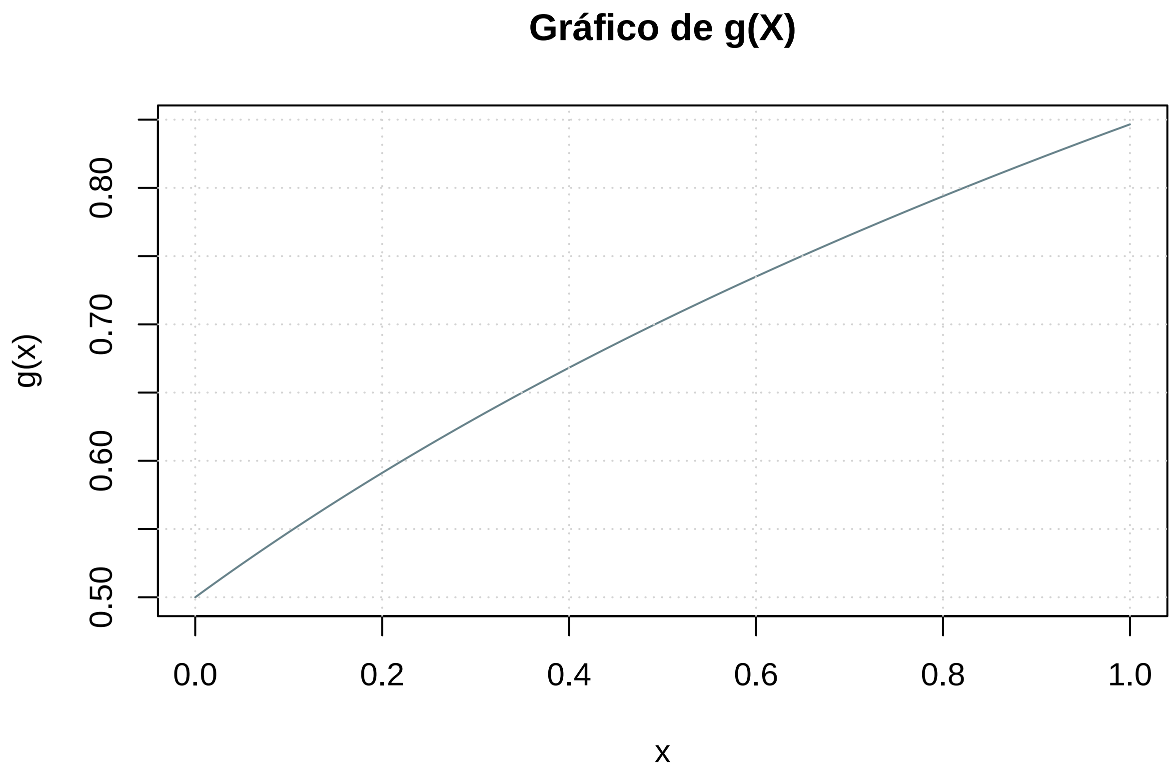
Por lo tanto, la solución a la integral es $\frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \ln(2)$.

Ahora, procedemos a aplicar el algoritmo de Montecarlo:

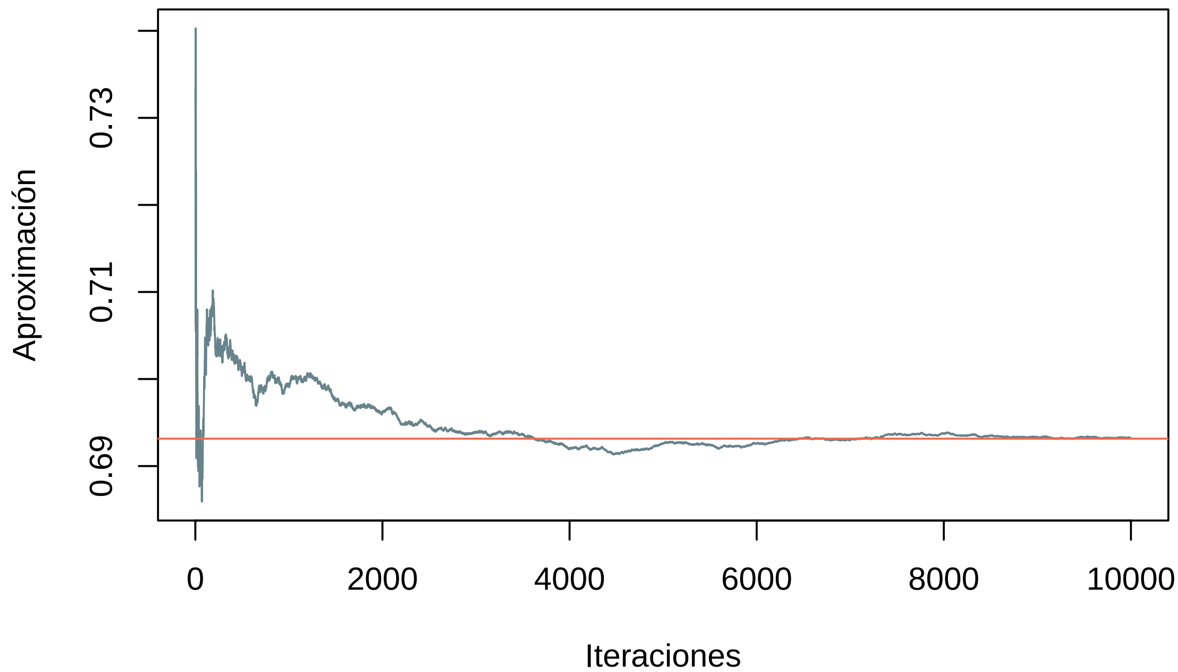
```r
set.seed(147) # definimos una semilla
n <-10^4 # tamaño de la muestra
U <-runif(n) # genera un vector con distribución uniforme

g <-Vectorize(function(x) (log(x + 1)/2) + (1/2) ) # construimos la función g

curve(g,0,1,col="lightblue4",lwd=1,main="Gráfico de g(X)")
grid()
```




```
Y <- g(U) #genera el vector para cada observación
acumulado<-cumsum(Y)/(1:n)
plot(1:n,acumulado,col="lightblue4",type="l",ylab="Aproximación",xlab="Iteraciones")
abline(h=integrate(g,0,1)$value,col="coral2",lwd=1)
```




```r
P_est1=mean(Y)

e1 <-(abs(P_est1-log(2)))
```

```r
e1
```

```
## [1] 4.587881e-05
```

Concluya que con la función considerada, el algrotimo de integración por Montecarlo arroja un error absoluto de 4.587881e-05 al estimar ln(2).

2. Ejercicio 2

Usando la metodología de Muestreo por Importancia, si $X \sim N(0{,}5, 0{,}5)$ estime:

a. $P(X \leq -5)$

```r
pnorm(6,mean = 0.5,sd = (0.5^(1/2)),lower.tail = F)
```

```
## [1] 3.678924e-15
```

Concluya que la $P(X \leq -5) = 3{,}678924e - 15$.

b. Estime el error absoluto de la estimación del punto a:

```r
n <-10^4 # Tamaño de la muestra
A <-rexp(n) + 6

g <-Vectorize(function(x) ((1/pi) * exp(-(x-0.5)^2)/(exp(-x+6))))

Y2<-g(A)

M<-matrix(c(mean(Y2),pnorm(6,mean = 0.5,sd = (0.5^(1/2)), lower.tail = F),
            abs(mean(Y2)-pnorm(6,mean = 0.5,sd = (0.5^(1/2)), lower.tail = F)),
            sqrt(var(Y2)/sqrt(10^4))),ncol=4, byrow=TRUE)

colnames(M) <- c("Estimacion", "Valor Real","Error Absoluto","Error Estandar")

M
```

```
##        Estimacion   Valor Real Error Absoluto Error Estandar
## [1,] 2.056013e-15 3.678924e-15   1.622911e-15   4.619617e-16
```

Conculuya que el error absoluto es de 1.622911e-15 al utilizar la metodología de Muestreo por Importancia.