

# Algèbre VI - Introduction progressive à la théorie des représentations

---

Notes extraites du cours de Mr Philippe Caldero  
Contributeur(s)  
Mr Payet Thibault Benjamin



<b>Sommaire</b>	<b>iii</b>
<b>I Algèbre linéaire - Compléments formes linéaires</b>	<b>1</b>
<b>1 Dualité</b>	<b>3</b>
<b>2 Orthogonalité</b>	<b>5</b>
<b>Table des matières</b>	<b>7</b>



Première partie

# Algèbre linéaire - Compléments formes linéaires



## 1.1 Applications linéaires et matrices

$\mathbb{K}$  est un corp quelconque (après ce sera  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Soient  $E, F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$   $\varphi \in L(E, F)$  (application linéaire de  $E$  dans  $F$ ).  $E, F$  de dimension finie. On fixe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  et une base  $\mathcal{C}$  de  $F$ .  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n), \mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$

**Définition**  $\text{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\varphi) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ , avec  $a_{ij}$  tel que  $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i$ , et on a  $\dim E = n$  et  $\dim F = m$ .  $\text{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\varphi) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

**Exemple**

$$u: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X], P \mapsto P(X+1)$$

$u$  est bien linéaire,  $\mathcal{C} = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ ,  $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$  et on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Remarque** Une matrice se lit en colonne

**Définition** Dualité

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$$

Une forme linéaire est un élément de  $E^*$ , i.e une application de  $E$  dans  $\mathbb{K}$

**Remarque**

$$\dim_{\mathbb{K}} E^* = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}} E \cdot \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = \dim_{\mathbb{K}} E$$

**Proposition 1.1.1** On fixe une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ . Alors on a :

$$\mathcal{L}(E, F) = E^* \xrightarrow{\sim} M_{1n}(\mathbb{K}), \varphi \mapsto \text{Mat}_{(1)\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_j))_{1 \leq j \leq n}$$

**Preuve** Vrai car on a toujours un isomorphisme :  $\mathcal{L}(E, F) \xrightarrow{\sim} M_{m,n}(\mathbb{K}), \varphi \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\varphi)$   
Description de  $\text{Mat}_{(1)\mathcal{B}}(\varphi)$  pour  $\varphi \in E^*$ .

$$\text{Mat}_{(1)\mathcal{B}}(\varphi) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 1 \\ 1 \leq j \leq n}}, f_i = 1$$

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^1 a_{ij} f_i \Rightarrow \varphi(e_j) = a_{1j}$$

**Utilisation** Soit  $x \in E$ ,  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ , vecteur colonne des coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

$$X = (x_{i1})_{1 \leq i \leq n}, x = \sum_{i=1}^n x_{i1} \cdot e_i$$

On pose  $x_i = x_{i1}$ , alors on a :

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \varphi(e_i)$$

Soit  $L = (\varphi(e_i)) = \text{Mat}_{(1)\mathcal{B}}(\varphi)$ , alors on a :

$$\varphi(x) = L \cdot X = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \dots & \varphi(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \varphi(x) \in \mathbb{K}$$

Ainsi, on peut associer :

$$\left( \underbrace{\varphi}_{\text{forme linéaire}}, \underbrace{x}_{\text{vecteur}} \right) \mapsto \varphi(x)$$

A :

$$\left( \underbrace{L}_{\text{matrice ligne}}, \underbrace{X}_{\text{matrice colonne}} \right) \mapsto \underbrace{L \cdot X}_{\text{multiplication matricielle}}$$

**Définition** Base duale

Soit  $\mathcal{B} = (e_i)$  une base de  $E$ . On appelle *base duale* la famille  $(e_i^*)$  de  $E^*$  tel que  $e_i^*(x) = x_i$

**Remarque**  $e_i^*$  est l'application qui envoie un vecteur sur sa  $i$ -ème coordonnée. Les  $e_i^*$  sont appelés formes coordonnées.

**Proposition 1.1.2** (AOC)

Les  $e_i^*$  sont bien dans  $E^*$  et la famille  $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $E^*$

**Preuve** Montrer que :  $e_i^* \in E^*$ ,  $e_i^* : E \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto x_i$

On vérifie qu'il est linéaire.

$$\begin{aligned} e_i^*(\lambda x + \mu y) &= e_i^*\left(\lambda \sum x_j e_j + \mu \sum y_j e_j\right) = e_i^*\left(\sum_{j=1}^n (\lambda x_j + \mu y_j) e_j\right) \\ &= \lambda x_i + \mu y_i \quad (\text{On prend la } i\text{-ème coordonnée}) \\ &= \lambda e_i^*(x) + \mu e_i^*(y) \end{aligned}$$

On a donc bien  $e_i^* \in E^*$ . On veut montrer que  $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$  est une base. Comme il y en a  $n$  et que  $n = \dim E^*$ , il suffit de montrer que la famille est libre.

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i}_{\in \mathbb{K}} \underbrace{e_i^*}_{\in E^*} = \underbrace{0}_{\in E^*}$$

On applique cette égalité à  $e_j \in E$

$$\left( \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* \right) (e_j) = 0(e_j) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*(e_j) = 0(e_j) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{i,j} = 0, (e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}) \Leftrightarrow 1 \cdot \lambda_j = 0$$

Donc, comme on a pris  $\lambda_j$  quelconque (enfin  $e_j$  quelconque), tous les  $\lambda_j$  sont nuls, la famille est libre.



## 2.1 Hyperplans

**Lemme 2.1.1** Soit  $F \subset E$   
ss-ev

$$\dim F = \dim E - 1 \Leftrightarrow \exists \varphi \in E^* \setminus \{0\}, F = \ker \varphi$$

Dans ce cas, on dit que  $F$  est un hyperplan.

**Preuve**  $\boxed{\Leftarrow}$   $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$

Si  $\varphi \neq 0, \underbrace{\text{Im } \varphi}_{\neq \{0\}} \subset \mathbb{K}$ .

Forcément,  $\dim \text{Im } \varphi = 1$ , d'où  $\text{Im } \varphi = \mathbb{K}$  or,  $\dim \ker \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim E$

On a donc  $\dim \ker \varphi = n - 1$

$\boxed{\Rightarrow}$  Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension  $\dim E - 1$

On a une base de  $F : (e_1, \dots, e_{n-1})$ , on *complète* en une base de  $E$  grâce au théorème de la base incomplète.

$$\underbrace{\left( \overbrace{e_1, \dots, e_{n-1}}^{\text{base de } F}, e_n \right)}_{\text{base de } E}$$

$\varphi = e_n^*$  est l'élément cherché.

- $\varphi \neq 0$ , en effet  $e_n^*$  fait partie d'une base (duale) donc non nul ;
- $F = \ker \varphi$ , en effet :  $\underbrace{F}_{\dim n-1} \subset \underbrace{\ker \varphi}_{\dim n-1}$

Soit  $x \in F$ , alors  $\varphi(x) = e_n^* \left( \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i \right) = 0$ , et donc  $x \in \ker \varphi$

## 2.2 Orthogonalité de $E^*$ vers $E$

On part d'un sous espace vectoriel  $G$  de  $E^*$ . On va voir  $G$  comme un ensemble d'équations.

**Explication**

"Dual"  $x^2 + y^2 = 1$ , équation implicite

"Espace"  $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$

Soit  $\varphi \in E^*$ , une équation dans  $E : \varphi(X) = 0$ .

Equation implicite :  $ax + by + cz = 0$ , on a  $L = (a, b, c), L \cdot X = 0$

OPS (On peut supposer)  $a \neq 0$ , on a alors le système suivant :

$$\begin{cases} x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

Alors on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit  $G \subset E^*$

**Définition** On pose  $G^o \subset E$  l'ensemble

$$G^o = \{x \in E, \varphi(x) = 0, \forall \varphi \in G\}$$

$G^o$  est appelé l'orthogonal de  $G$ , on vérifie en exercice que  $G^o$  est bien un sous espace vectoriel de  $E$

**Proposition 2.2.1** Soient  $G, G_1, G_2 \subset E^*$  , alors on a les propriétés suivantes :

1.  $\dim G^o + \dim G = \dim E$
2.  $G_1 \subset G_2 \Leftrightarrow G_1^o \supset G_2^o$
3.  $(G_1 + G_2)^o = G_1^o \cap G_2^o$
4.  $(G_1 \cap G_2)^o = G_1^o + G_2^o$

**Preuve** 1. On reconnaît la formule du rang.  $G$  est un sous espace vectoriel, donc possède une base  $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq d}$  avec  $d = \dim G$ , On a :

$$v \in G^o \Leftrightarrow \forall \varphi \in G, \varphi(v) = 0 \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq d, \varphi_i(v) = 0$$

Soit  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x), L_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\varphi_i)$

$$\forall i, \varphi_i(x) = 0 \Leftrightarrow L_i X = 0, \forall i \Leftrightarrow \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} X = 0$$

On pose  $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ , alors on a :

$$\dim G^o = \dim\{X, LX = 0\} = \dim \ker L = \dim E - \dim \text{Im } L = \dim E - \dim \langle L_i \rangle_{1 \leq i \leq d} = \dim E - \dim G$$

## Table des matières

Sommaire	iii
<b>I Algèbre linéaire - Compléments formes linéaires</b>	<b>1</b>
<b>1 Dualité</b>	<b>3</b>
1.1 Applications linéaires et matrices . . . . .	3
<b>2 Orthogonalité</b>	<b>5</b>
2.1 Hyperplans . . . . .	5
2.2 Orthogonalité de $E^*$ vers $E$ . . . . .	5
<b>Table des matières</b>	<b>7</b>