Algèbre VI - Introduction progressive à la théorie des représentations

---

Notes extraites du cours de Mr Philippe Caldero
Contributeur(s)
Mr Payet Thibault Benjamin

Sommaire

Première partie

Algèbre linéaire - Compléments formes linéaires

1 Dualité

1.1 Applications linéaires et matrices

$\mathbb{K}$ est un corp quelconque (après ce sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soient E, F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ $\varphi \in L(E,F)$(application linéaire de E dans F). E, F de dimension finie. On fixe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F. $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)\,, \mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$

Définition $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}\mathscr{B}}(\varphi) = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$, avec a_{ij} tel que $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$, et on a $\dim E = n$ et $\dim F = m$. $\mathrm{M}_{\mathscr{C}\mathscr{B}}(\varphi) \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Exemple

$$u\colon \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X], \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P(X{+}1)}$$

u est bien linéaire , $\mathscr{C} = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$, $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et on a :

$$\mathrm{M}_{\mathscr{C}\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque Une matrice se lit en colone

Définition Dualité

$$E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$$

Une forme linéaire est un élément de E^* , i.e une application de E dans $\mathbb{K}$

Remarque

$$\dim_{\mathbb{K}} E^* = \dim_{\mathbb{K}} \mathscr{L}(E, \mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}} E \cdot \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = \dim_{\mathbb{K}} E$$

Proposition 1.1.1 *On fixe une base $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E. Alors on a :*

$$\mathscr{L}(E, F) = E^* \xrightarrow{\sim} M_{1n}(\mathbb{K}), \varphi \mapsto Mat_{(1)\beta}(\varphi) = (\varphi(e_j))_{1\leq j\leq n}$$

Preuve Vrai car on a toujours un isomorphisme : $\mathscr{L}(E, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \varphi \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}\mathscr{B}}(\varphi)$
Description de $\mathrm{Mat}_{(1)\mathscr{B}}(\varphi)$ pour $\varphi \in E^*$.

$$\mathrm{Mat}_{(1)\mathscr{B}}(\varphi) = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 1\\ 1\leq j\leq n}}, f_i = 1$$

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{1} a_{ij} \Rightarrow \varphi(e_j) = a_{1j}$$

$\boxed{\text{Utilisation}}$ Soit $x \in E, X = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, vecteur colonne des coordonnés de x dans la base $\mathscr{B}$.

$$X = (x_{i1})_{1 \leq i \leq n}, x = \sum_{i=1}^{n} x_{i1} \cdot e_i$$

On pose $x_i = x_{i1}$, alors on a :

$$\varphi(x) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \varphi(e_i)$$

Soit $L = (\varphi(e_i)) = \text{Mat}_{(1)\mathscr{B}}(\varphi)$, alors on a :

$$\varphi(x) = L \cdot X = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \dots & \varphi(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \varphi(x) \in \mathbb{K}$$

Ainsi, on peut associer :

$$\left(\underbrace{\varphi}_{\text{forme linéaire}} , \underbrace{x}_{\text{vecteur}} \right) \longmapsto \varphi(x)$$

A :

$$\left(\underbrace{L}_{\text{matrice ligne}} , \underbrace{X}_{\text{matrice colone}} \right) \longmapsto \underbrace{L \cdot X}_{\text{multiplication matricielle}}$$

Définition Base duale
Soit $\mathscr{B} = (e_i)$ une base de E. On appelle *base duale* la famille (e_i^*) de E^* tel que $e_i^*(x) = x_i$

Remarque e_i^* est l'application qui envoie un vecteur sur sa i-ème coordonnée. Les e_i^* sont appelés formes coordonnées.

Proposition 1.1.2 *(AOC)*
Les e_i^* sont bien dans E^* et la famille $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E^*

Preuve Montrer que : $e_i^* \in E^*, e_i^* : E \to \mathbb{K}, x \mapsto x_i$
$\boxed{\text{On vérifie qu'il est linéaire.}}$

$$e_i^*(\lambda x + \mu y) = e_i^*(\lambda \sum x_j e_j + \mu \sum y_j e_j) = e_i^*(\sum_{j=1}^{n} (\lambda x_j + \mu y_j) e_j)$$

$$= \lambda x_i + \mu y_i \, \text{(On prend la } i\text{-ème coordonnée)}$$

$$= \lambda e_i^*(x) + \mu e_i^*(y)$$

On a donc bien $e_i^* \in E^*$. On veut montrer que $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ est une base. Comme il y en a n et que $n = \dim E^*$, il suffit de montrer que la famille est libre.

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i}_{\in \mathbb{K}} \underbrace{e_i^*}_{\in E^*} = \underbrace{0}_{\in E^*}$$

On applique cette égalité à $e_j \in E$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* \right) (e_j) = 0(e_j) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*(e_j) = 0(e_j) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{i,j} = 0 \, , (e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}) \Leftrightarrow 1 \cdot \lambda_j = 0$$

Donc, comme on a pris λ_j quelconque(enfin e_j quelconque) , tous les λ_j sont nuls, la famille est libre.

2

Orthogonalité

2.1 Hyperplans

Lemme 2.1.1 *Soit* $F \underset{ss\text{-}ev}{\subset} E$

$$\dim F = \dim E - 1 \Leftrightarrow \exists \varphi \in E^* \backslash \{0\}, F = \ker \varphi$$

Dans ce cas, on dit que F est un hyperplan.

Preuve $\boxed{\Leftarrow}$ $\varphi : E \to \mathbb{K}$
Si $\varphi \neq 0, \underbrace{\operatorname{Im} \varphi}_{\neq \{0\}} \subset \mathbb{K}$.
Forcément, $\dim \operatorname{Im} \varphi = 1$, d'où $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{K}$ or,$\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim E$
On a donc $\dim \ker \varphi = n - 1$
$\boxed{\Rightarrow}$ Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $\dim E - 1$
On a une base de F : $(e_1, \ldots, e_{n-1})$, on *complète* en une base de E grâce au théorème de la base incomplète.

$$\underbrace{\left(\overbrace{e_1, \ldots, e_{n-1}}^{\text{base de } F}, e_n\right)}_{\text{base de } E}$$

$\varphi = e_n^*$ est l'élément cherché.

- $\varphi \neq 0$, en effet e_n^* fait partie d'une base(duale) donc non nul ;
- $F = \ker \varphi$, en effet : $\underset{\dim n-1}{F} \subset \underset{\dim n-1}{\ker \varphi}$
  Soit $x \in F$, alors $\varphi(x) = e_n^* \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i \right) = 0$, et donc $x \in \ker \varphi$

2.2 Orthogonalité de E* vers E

On part d'un sous espace vectoriel G de E^*. On va voir G comme un ensemble d'équations.
$\boxed{\text{Explication}}$
"Dual" $x^2 + y^2 = 1$, équation implicite

"Espace" $\begin{cases} x = cos\theta \\ y = sin\theta \end{cases}$

Soit $\varphi \in E^*$, une équation dans E : $\varphi(X) = 0$.
Equation implicite : $ax + by + cz = 0$, on a $L = (a, b, c), L \cdot X = 0$
OPS(On peut supposer) $a \neq 0$, on a alors le système suivant :

$$\begin{cases} x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

Alors on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit $G \subset E^*$

Définition On pose $G^o \subset E$ l'ensemble

$$G^o = \{x \in E, \varphi(x) = 0, \forall \varphi \in G\}$$

G^o est appelé l'orthogonal de G, on vérifie en exercice que G^o est bien un sous espace vectoriel de E

Proposition 2.2.1 *Soient* $G, G_1, G_2 \underset{ss\text{-}ev}{\subset} E^*$ *, alors on a les propriété suivantes :*

1. $\dim G^o + \dim G = \dim E$
2. $G_1 \subset G_2 \Leftrightarrow G_1^o \supset G_2^o$
3. $(G_1 + G_2)^o = G_1^o \cap G_2^o$
4. $(G_1 \cap G_2)^o = G_1^o + G_2^o$

Table des matières