

Algèbre VI - Introduction progressive à la théorie des représentations

Notes extraites du cours de Mr Philippe Caldero
Contributeur(s)
Mr Payet Thibault Benjamin

Sommaire	iii
I Algèbre linéaire - Compléments formes linéaires	1
1 Dualité	3
2 Orthogonalité	5
Table des matières	7

Première partie

Algèbre linéaire - Compléments formes linéaires

1.1 Applications linéaires et matrices

\mathbb{K} est un corp quelconque (après ce sera \mathbb{R} ou \mathbb{C}). Soient E, F deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} $\varphi \in L(E, F)$ (application linéaire de E dans F). E, F de dimension finie. On fixe une base \mathcal{B} de E et une base \mathcal{C} de F . $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n), \mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$

Définition $\text{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\varphi) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, avec a_{ij} tel que $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i$, et on a $\dim E = n$ et $\dim F = m$. $\text{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\varphi) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

Exemple

$$u: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X], P \mapsto P(X+1)$$

u est bien linéaire, $\mathcal{C} = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque Une matrice se lit en colonne

Définition Dualité

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$$

Une forme linéaire est un élément de E^* , i.e une application de E dans \mathbb{K}

Remarque

$$\dim_{\mathbb{K}} E^* = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}} E \cdot \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = \dim_{\mathbb{K}} E$$

Proposition 1.1.1 On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E . Alors on a :

$$\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^* \xrightarrow{\sim} M_{1n}(\mathbb{K}), \varphi \mapsto \text{Mat}_{(1)\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_j))_{1 \leq j \leq n}$$

Preuve Vrai car on a toujours un isomorphisme : $\mathcal{L}(E, F) \xrightarrow{\sim} M_{m,n}(\mathbb{K}), \varphi \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\varphi)$
Description de $\text{Mat}_{(1)\mathcal{B}}(\varphi)$ pour $\varphi \in E^*$.

$$\text{Mat}_{(1)\mathcal{B}}(\varphi) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 1 \\ 1 \leq j \leq n}}, f_i = 1$$

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^1 a_{ij} f_i \Rightarrow \varphi(e_j) = a_{1j}$$

Utilisation Soit $x \in E, X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, vecteur colonne des coordonnées de x dans la base \mathcal{B} .

$$X = (x_{i1})_{1 \leq i \leq n}, x = \sum_{i=1}^n x_{i1} \cdot e_i$$

On pose $x_i = x_{i1}$, alors on a :

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \varphi(e_i)$$

Soit $L = (\varphi(e_i)) = \text{Mat}_{(1)\mathcal{B}}(\varphi)$, alors on a :

$$\varphi(x) = L \cdot X = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \dots & \varphi(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \varphi(x) \in \mathbb{K}$$

Ainsi, on peut associer :

$$\left(\underbrace{\varphi}_{\text{forme linéaire}}, \underbrace{x}_{\text{vecteur}} \right) \mapsto \varphi(x)$$

A :

$$\left(\underbrace{L}_{\text{matrice ligne}}, \underbrace{X}_{\text{matrice colonne}} \right) \mapsto \underbrace{L \cdot X}_{\text{multiplication matricielle}}$$

Définition Base duale

Soit $\mathcal{B} = (e_i)$ une base de E . On appelle *base duale* la famille (e_i^*) de E^* tel que $e_i^*(x) = x_i$

Remarque e_i^* est l'application qui envoie un vecteur sur sa i -ème coordonnée. Les e_i^* sont appelés formes coordonnées.

Proposition 1.1.2 (AOC)

Les e_i^* sont bien dans E^* et la famille $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E^*

Preuve Montrer que : $e_i^* \in E^*, e_i^* : E \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto x_i$

On vérifie qu'il est linéaire.

$$\begin{aligned} e_i^*(\lambda x + \mu y) &= e_i^*\left(\lambda \sum x_j e_j + \mu \sum y_j e_j\right) = e_i^*\left(\sum_{j=1}^n (\lambda x_j + \mu y_j) e_j\right) \\ &= \lambda x_i + \mu y_i \text{ (On prend la } i\text{-ème coordonnée)} \\ &= \lambda e_i^*(x) + \mu e_i^*(y) \end{aligned}$$

On a donc bien $e_i^* \in E^*$. On veut montrer que $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ est une base. Comme il y en a n et que $n = \dim E^*$, il suffit de montrer que la famille est libre.

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i}_{\in \mathbb{K}} \underbrace{e_i^*}_{\in E^*} = \underbrace{0}_{\in E^*}$$

On applique cette égalité à $e_j \in E$

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* \right) (e_j) = 0(e_j) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*(e_j) = 0(e_j) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{i,j} = 0, (e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}) \Leftrightarrow 1 \cdot \lambda_j = 0$$

Donc, comme on a pris λ_j quelconque (enfin e_j quelconque), tous les λ_j sont nuls, la famille est libre.

2.1 Hyperplans

Lemme 2.1.1 Soit $F \subset E$
ss-ev

$$\dim F = \dim E - 1 \Leftrightarrow \exists \varphi \in E^* \setminus \{0\}, F = \ker \varphi$$

Dans ce cas, on dit que F est un hyperplan.

Preuve $\boxed{\Leftarrow}$ $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$

Si $\varphi \neq 0, \underbrace{\text{Im } \varphi}_{\neq \{0\}} \subset \mathbb{K}$.

Forcément, $\dim \text{Im } \varphi = 1$, d'où $\text{Im } \varphi = \mathbb{K}$ or, $\dim \ker \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim E$

On a donc $\dim \ker \varphi = n - 1$

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $\dim E - 1$

On a une base de $F : (e_1, \dots, e_{n-1})$, on *complète* en une base de E grâce au théorème de la base incomplète.

$$\underbrace{\left(\overbrace{e_1, \dots, e_{n-1}}^{\text{base de } F}, e_n \right)}_{\text{base de } E}$$

$\varphi = e_n^*$ est l'élément cherché.

- $\varphi \neq 0$, en effet e_n^* fait partie d'une base (duale) donc non nul ;
- $F = \ker \varphi$, en effet : $\underbrace{F}_{\dim n-1} \subset \underbrace{\ker \varphi}_{\dim n-1}$

Soit $x \in F$, alors $\varphi(x) = e_n^* \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i \right) = 0$, et donc $x \in \ker \varphi$

2.2 Orthogonalité de E^* vers E

On part d'un sous espace vectoriel G de E^* . On va voir G comme un ensemble d'équations.

Explication

"Dual" $x^2 + y^2 = 1$, équation implicite

"Espace" $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$

Soit $\varphi \in E^*$, une équation dans $E : \varphi(X) = 0$.

Equation implicite : $ax + by + cz = 0$, on a $L = (a, b, c), L \cdot X = 0$

OPS (On peut supposer) $a \neq 0$, on a alors le système suivant :

$$\begin{cases} x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

Alors on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit $G \subset E^*$

Définition On pose $G^o \subset E$ l'ensemble

$$G^o = \{x \in E, \varphi(x) = 0, \forall \varphi \in G\}$$

G^o est appelé l'orthogonal de G , on vérifie en exercice que G^o est bien un sous espace vectoriel de E

Proposition 2.2.1 Soient $G, G_1, G_2 \subset E^*$, alors on a les propriétés suivantes :

1. $\dim G^o + \dim G = \dim E$
2. $G_1 \subset G_2 \Leftrightarrow G_1^o \supset G_2^o$
3. $(G_1 + G_2)^o = G_1^o \cap G_2^o$
4. $(G_1 \cap G_2)^o = G_1^o + G_2^o$

Preuve 1. On reconnaît la formule du rang. G est un sous espace vectoriel, donc possède une base $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq d}$ avec $d = \dim G$, on a :

$$v \in G^o \Leftrightarrow \forall \varphi \in G, \varphi(v) = 0 \Leftrightarrow \forall i, 1 \leq i \leq d, \varphi_i(v) = 0$$

Soit $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x), L_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\varphi_i)$

$$\forall i, \varphi_i(x) = 0 \Leftrightarrow L_i X = 0, \forall i \Leftrightarrow \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} X = 0$$

On pose $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$, alors on a :

$$\dim G^o = \dim\{X, LX = 0\} = \dim \ker L = \dim E - \dim \text{Im } L = \dim E - \dim \langle L_i \rangle_{1 \leq i \leq d} = \dim E - \dim G$$

Table des matières

Sommaire	iii
I Algèbre linéaire - Compléments formes linéaires	1
1 Dualité	3
1.1 Applications linéaires et matrices	3
2 Orthogonalité	5
2.1 Hyperplans	5
2.2 Orthogonalité de E^* vers E	5
Table des matières	7