Control Digital - MSE

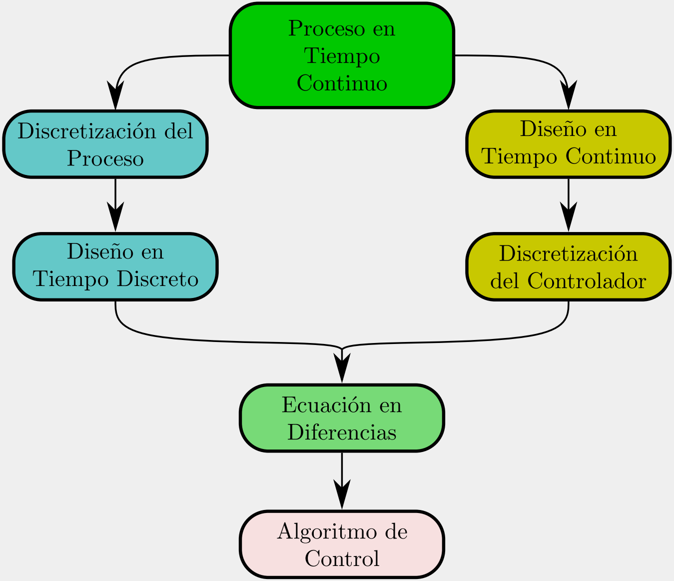
Controlador Proporcional - Integral - Derivativo (PID)

13 de marzo 2023

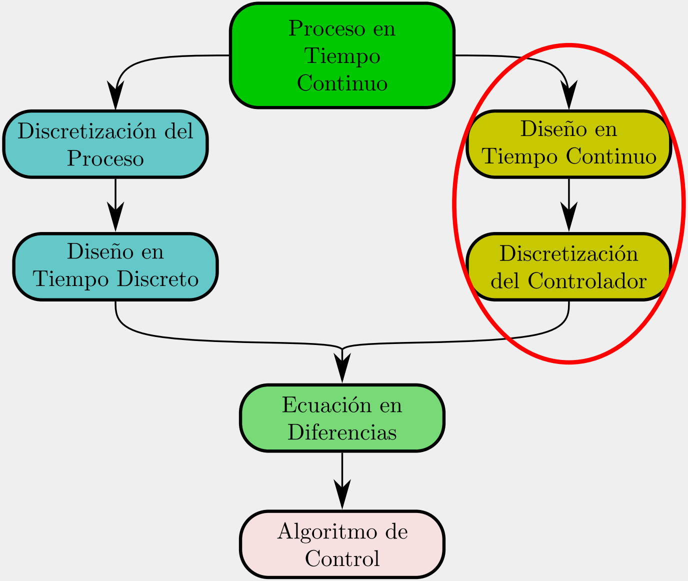
Índice

Aproximación discreta de controladores en tiempo continuo

Proceso de diseño de un controlador discreto



Proceso de diseño de un controlador discreto



Implementación digital de Controlador Analógico

Queremos aproximar un controlador $C(s)$ que fue diseñado utilizando técnicas analógicas.

Buscamos un algoritmo digital tal que:

$$\text{AD} + \text{Algortimo} + \text{DAC} \approx C(s)$$

Aclaración: Debemos hacer aproximaciones! [1]

Trabajaremos con:

- Diferencias hacia adelante (Método de Euler)

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x[k+1]-x[k]}{h} \longrightarrow sX(s) \approx X(z)\frac{(z-1)}{h}$$

- Diferencias hacia atrás

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x[k]-x[k-1]}{h} \longrightarrow sX(s) \approx X(z)\frac{(1-z^{-1})}{h}$$

- Aproximación Tustin (método trapezoidal, transformación bilineal)

$$z = e^{sh} \approx \frac{1+sh/2}{1-sh/2} \longrightarrow s \approx \frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1}$$

Si el controlador está en la forma de Función de Transferencia $C(s)$.
La aproximación en tiempo discreto $H(z)$ está dada por:

$$H(z) = C(s')$$

donde

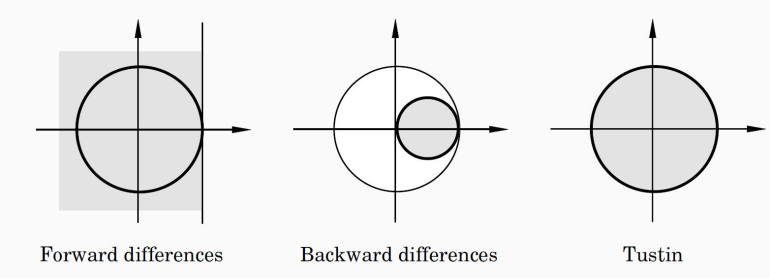
$$s' = \frac{z-1}{h} \quad \text{Diferencias hacia adelante}$$

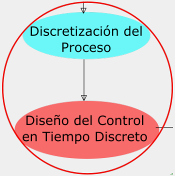
$$s' = \frac{z-1}{zh} \quad \text{Diferencias hacia atrás}$$

$$s' = \frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1} \quad \text{Aproximación de Tustin}$$

Propiedades de la discretización $H(z) = C(s')$

Donde se mapean los polos Estables de C(s)?

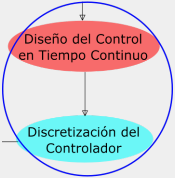




Diseño de control muestreado:

- Cuando la planta ya se encuentra en la forma discreta.
  - Ej: Fue obtenida por identificación.
- Cuando el diseño del control asume un modelo discreto.
  - Ej: Se realiza un control predictivo por modelo (MPC).
- Cuando un muestreo rápido no es posible.

Formas de Diseño: Cual elijo?



Aproximación de un diseño analógico:

- Cuando el controlador es diseñado/ajustado de manera empírica (sobre la planta).
  - Sin basar el diseño en un modelo.
  - Ej: Un PID que fue ajustado por Zieger-Nichols.
- Cuando el sistema es No-Lineal y solamente se puede representar así.

En el resto de los casos, la elección de que camino tomar es una cuestión de gusto.

Control PID

> *Based on a survey of over eleven thousand controllers in the refining, chemicals and pulp and paper industries, 97 % of regulatory controllers utilize PID feedback.*
>
> Desborough Honeywell, 2000.

Por qué estudiarlo?

- Es de los controladores más antiguos (Elmer Sperry en 1911).
- El más utilizado en la industria.
- Se puede contemplar como un dispositivo que puede operarse con pocas reglas heurísticas, pero que también puede estudiarse analíticamente.

El algoritmo de libro

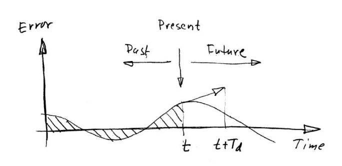
$$u(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau + T_d\frac{de(t)}{dt}\right)$$

$$u(t) = K_p e(t) + K_i\int_0^t e(\tau)d\tau + K_d\frac{de(t)}{dt}$$

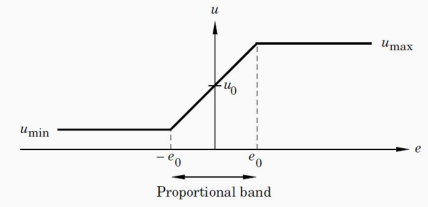
$$U(s) = K_p E(s) + \frac{K_i}{s}E(s) + K_d sE(s)$$

$$= \quad P \quad + \quad I \quad + \quad D$$

$e(t) = r(t) - y(t)$



Término Proporcional

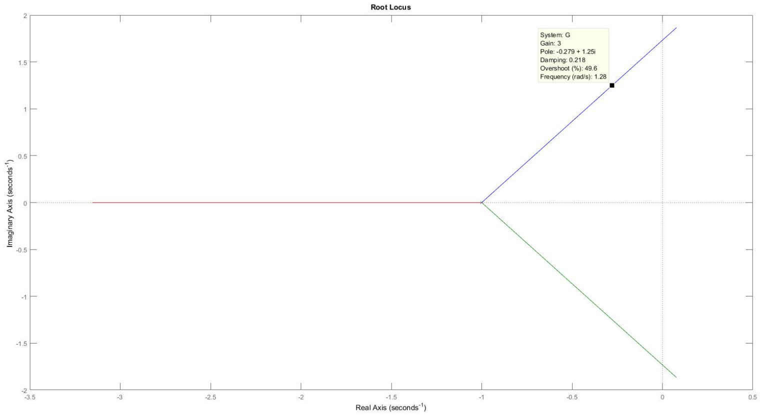


$$u = \begin{cases} u_{max} & e > e_0 \\ Ke + u_0 & -e_0 < e < e_0 \\ u_{min} & e < -e_0 \end{cases}$$

- La ganancia pura tiene error de estado estacionario.
- Agrandar K da una respuesta más rápida, pero empeora la estabilidad e incrementa la sensibilidad al ruido.

Proporcional

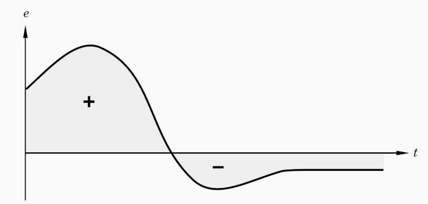
Al aumentar K aumentan las oscilaciones.



Término integral

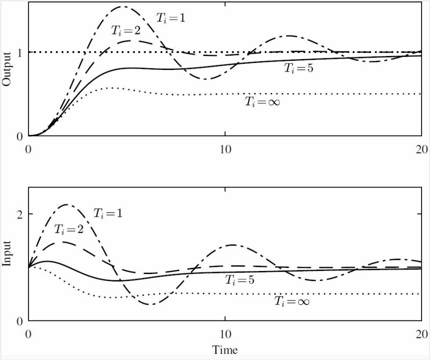
$$u = Ke \quad \text{(P)}$$

$$u = K\left(e + \frac{1}{T_i}\int e(\tau)d\tau\right) \quad \text{(PI)}$$



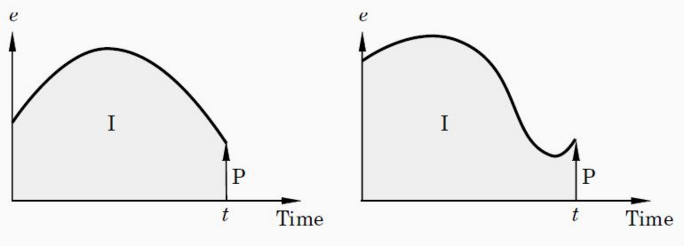
Si hay error estacionario presente $\longrightarrow \int e(\tau)d\tau$ se incrementa $\longrightarrow u$ se incrementa $\longrightarrow y$ se incrementa $\longrightarrow$ el error no es estacionario.

Proporcional - Integral

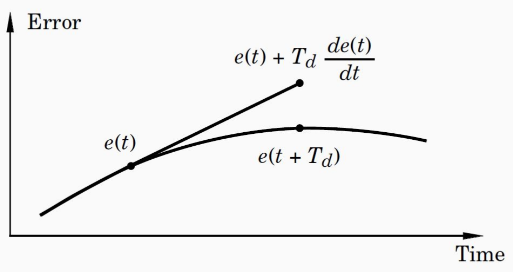


- Elimina el error de estado estacionario.
- Cuanto menor el T_i, más rápido se elimina el error de estado estacionario, pero incremente la inestabilidad.

Un controlador PI no posee manera de predecir el comportamiento del error.



Tanto si está decreciendo o se está incrementando, la ganancia será la misma para ambos casos.



P:

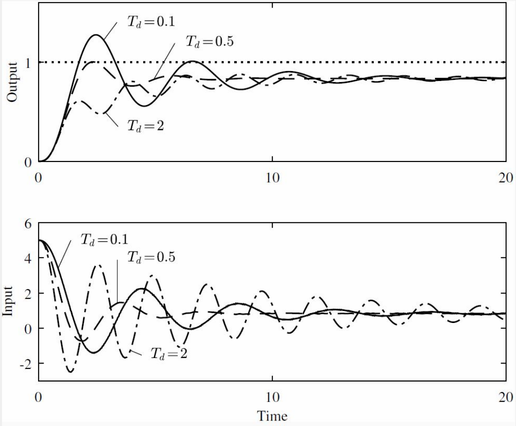
$$u(t) = Ke(t)$$

PD:

$$u(t) = K\left(e(t) + T_d\frac{de(t)}{dt}\right) \approx Ke(t + T_d)$$

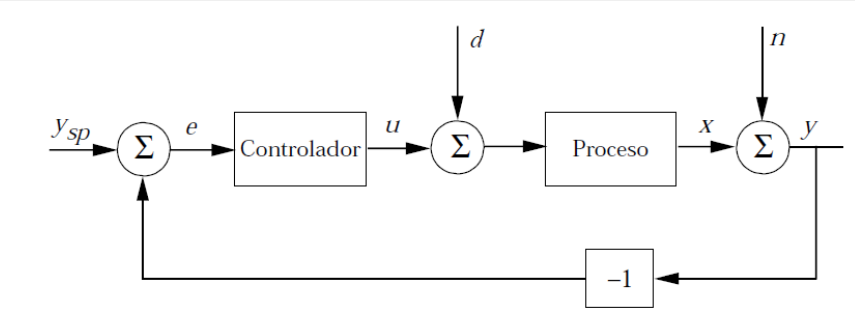
T_d: Horizonte de predicción.

Proporcional - Derivativo



- Si T_d es muy chico, no se produce ningún efecto.
- Si T_d es muy grande, se empeora el rendimiento.

Modificaciones Practicas


y_{sp}
Σ
e
Controlador
u
d
Σ
Proceso
x
n
Σ
y
-1

Es posible que el PID requiera modifiaciones de acuerdo con el problema de control que deba afrontar.

- Limitar la ganancia del derivador.
- Quitar derivada en la referencia.
- Ponderar la referencia.
- Anti-Reset Windup

No nos interesa derivar ruido de alta frecuencia (lo aumentaríamos), entonces se suele aplicar la siguiente modificación:

$$D(s) = sKT_dE(s) \longrightarrow D(s) = \frac{sK_d}{1 + sK_d/N}E(s)$$

la derivada ideal es filtrada por un sistema de primer orden con constante de tiempo K_d/N.
- Para s pequeño la TF es aproximadamente sK_d.
- Para s grandes la TF es N.
N : máxima ganancia para el ruido, típicamente 2 - 20 [2].

La referencia suele ser constante por largos periodos de tiempo.
A veces ésta cambia en escalones $\longrightarrow$ provocando grandes valores del término D.
Conviene aplicar la derivada en una fracción de la referencia o solamente en la señal medida.

$$D(s) = \frac{sK_d}{1 + sK_d/N}\left(\gamma R(s) - Y(s)\right)$$

En general, $\gamma = 0$ cuando se controla procesos (la referencia cambia con escalones), $\gamma = 1$ cuando se controla servomotores (la referencia sigue trayectorias suaves).

Ponderación del Set-Point

A veces conviene también ponderar la referencia.

$$P = K_p(r(t) - y(t))$$

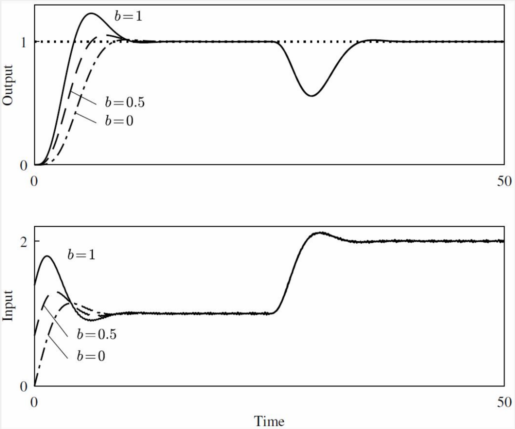
se reemplaza por

$$P = K_p(\beta r(t) - y(t))$$

con $\beta \geq 0$.

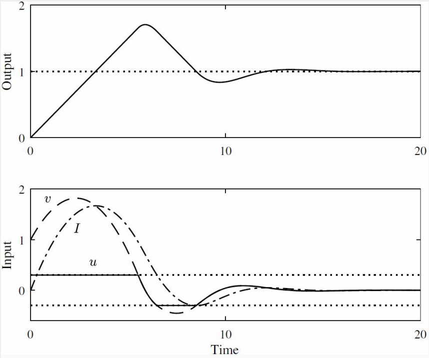
Siempre y cuando la parte integral este prendida! (Si no el controlador va a estar siguiendo una referencia equivocada).

Se utiliza para reducir los efectos de cambios abruptos en la referencia.


b=1
1
Output
b=0.5
b=0
0
0
50
2
b=1
Input
b=0.5
b=0
0
0
50
Time

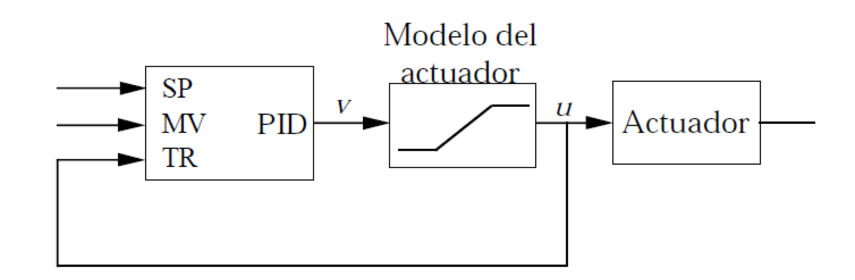
Todos los actuadores tienen un punto donde saturan. Eso es un problema para controladores con acción integral.

Cuando la acción de control satura, la parte integral sigue creciendo, esto provoca grandes sobrepasos en la salida. $\longrightarrow$ *Integrator windup*.



Existen diferentes soluciones, las más conocidas son [3]:

1. Desconectar la integral cuando el actuador satura (*Clamping*).
2. Recalcular el término integral cuando se produce saturación (*Back-Calculation*)



Discretización del PID

Se discretizan los términos P, I , D por separado.

Parte Proporcional (P):

$$P[k] = K_p\left(\beta r[k] - y[k]\right)$$

Parte Integral (I):

$$I(t) = K_i \int_0^t e(\tau)d\tau$$

$$\frac{dI}{dt} = K_i e$$

- Diferencias hacia adelante

$$\frac{I[k+1] - I[k]}{h} = K_i e[k]$$

$$I[k+1] = I[k] + hK_i e[k]$$

Discretización

Parte Derivativa (D) (Asumiendo $\gamma = 0$):

$$D(s) = \frac{sK_d}{1 + sK_d/N}(-Y(s))$$
$$\frac{K_d}{N}\frac{dD}{dt} + D = -K_d\frac{dy}{dt}$$

- Usar diferencias hacia adelante hace que el término sea inestable cuando K_d es pequeño o h es grande.
- Diferencias hacia atrás

$$\frac{K_d}{N}\frac{D[k] - D[k-1]}{h} + D[k] = -K_d\frac{y[k] - y[k-1]}{h}$$

$D[k] = \frac{K_d}{K_d+Nh}D[k-1] - \frac{K_dN}{K_d+Nh}\left(y[k] - y[k-1]\right)$

Especificaciones

Veremos como las propiedades de un sistema de control pueden ser especificadas. Esto es importante, ya que es la manera de saber los objetivos en el diseño de control.

Son importantes para los usuarios del control para saber como especificar, evaluar y probar un sistema que debe tener determinadas propiedades.

Las especificaciones típicamente incluyen:

- Estabilidad del lazo cerrado.
- Robustez a incertidumbres en el modelo.
- Atenuación del ruido de medición.
- Habilidad para seguir señales de referencia.

Índice

Sistema de Segundo Orden sin Ceros

Consideremos el siguiente sistema:

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

El sistema tiene 2 polos, que serán complejos si $\zeta < 1$ (Sub-amortiguado) y reales si $\zeta > 1$ (Sobre-amortiguado).

La respuesta al escalón del sistema es:

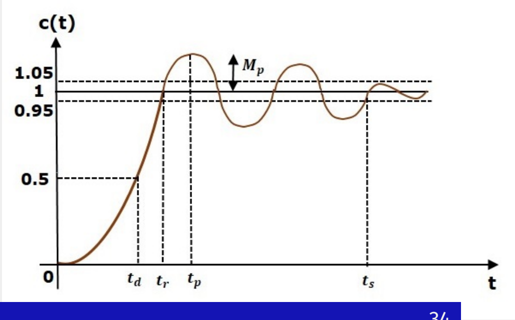
$$c(t) = \begin{cases} 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} sin(\omega_d t + \phi) & \text{para } 0 < \zeta < 1 \\ 1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t} & \text{para } \zeta = 1 \\ 1 - (cosh(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} sinh(\omega_d t))e^{-\zeta\omega_d t} & \text{para } \zeta > 1 \end{cases}$$

Donde $\omega_d = \omega_0\sqrt{|1 - \zeta^2|}$ y $\phi = arcos\zeta$

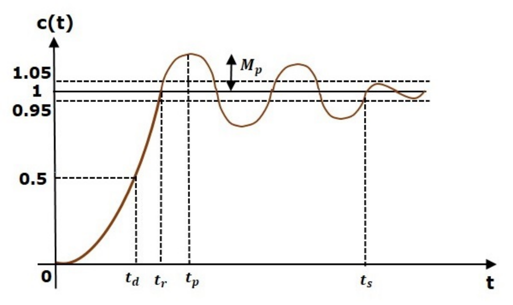
Índice

Las especificaciones en seguimiento de referencia son típicamente expresadas en el dominio del tiempo. Se definen como:

- *Tiempo de subida t_r*: Se define como la inversa de la pendiente más grande en la respuesta al escalón o cómo el tiempo que toma esa respuesta en ir del 10 % al 90 % de su valor final.
- *Tiempo de establecimiento t_s*: Es el tiempo que tarda la respuesta al escalón en llegar a un porcentaje p de su valor en estado estacionario. El valor $p = 2$ es comúnmente utilizado.



- *Tiempo de demora t_d*: Es el tiempo requerido por la respuesta al escalón en alcanzar el 50 % de su valor de estado estacionario.
- *Sobrepaso - Sobrepico o - M_p*: El cociente entre la diferencia entre el primer pico y el valor de estado estacionario y el valor de estado estacionario. En controles industriales es común especificar un sobrepico de 8 % − 10 %. $o = M_p = c(t_p) - c(\infty)$
- *Error de estado estacionario e_{ss}*: Es el valor del error $e = r - y$ en estado estacionario. Con un término integral en el controlador, ese error es siempre cero.



Parámetros sistema sub-amortiguado

Las propiedades a la respuesta de una refrencia para un sistema de 2do orden subamortiguado son:

Propiedad	Valor
Tiempo de subida	$t_r = \omega_0 e^{\phi/tan(\phi)}$
Tiempo de establecimiento	$t_s = 4/(\zeta\omega_0)$
Sobrepaso	$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$

Chequear el ancho de banda del sistema:

$$BW \approx 0{,}35/t_r \quad [\mathrm{Hz}]$$

Sintonización PID

Los parámetros a sintonizar son: K, T_i, T_d, N, β, γ

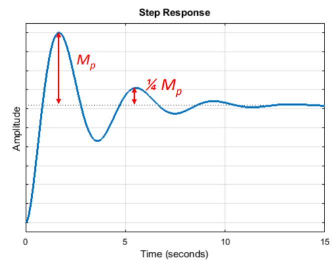
En particular, para sintonizar K, T_i, T_d:

- Métodos iterativos: Ajuste por prueba y error.
- Experimentos de sintonización
  - Ziegler - Nichols.
    - Método 1: Respuesta al escalón
    - Método 2: Oscilaciones sostenidas.
  - *Relay feedback methods*.
- Métodos directos:
  - Optimización.
  - Asignación de polos y ceros (*requiere modelo lineal de la planta*).

Índice

Resumen

Permite ajustar los parámetros del PID sin tener un modelo de la planta a controlar, tal que la respuesta temporal de lazo cerrado resulte oscilatoria y verifique la regla de *quarter decay* (la convergencia del valor final es tal que la amplitud del 2do sobrepico es $1/4$ del 1ro).

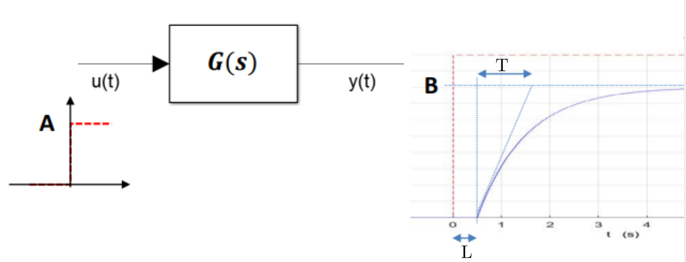


Encontraron que, en gral. en el PID debe cumplirse que $T_i = 4T_d$.

<u>Método 1:</u> Para procesos con respuesta sigmoide al escalón en Lazo Abierto (LA).

<u>Método 2:</u> Para procesos estables en LA que, excitados con un escalón en Lazo Cerrado (LC), pueden hacerse oscilar aumentando la ganancia.

Método 1: Para procesos con respuesta sigmoide (en "s") al escalón en LA.



	K_p	T_i	T_d
PID	$1{,}2\frac{T}{L}\frac{A}{B}$	$2L$	$0{,}5L$
PI	$0{,}9\frac{T}{L}\frac{A}{B}$	$3{,}3L$	0
P	$\frac{T}{L}\frac{A}{B}$	∞	0

Finalizando con un ajuste manual

En general la respuesta a LC con un PID ajustado por Ziegler-Nichols suele ser agresiva (tiene un sobrepico demasiado elevado), pero el tiempo de establecimiento es muy rápido.
Para modificar ese comportamiento y llevarlo a un comportamiento deseado se suele retocar las ganancias mediante pruebas en LC siguiendo estas reglas:

- Aumentar la ganancia propocional incrementa las oscilaciones.
- El error decae más rápidamente si se disminuye el tiempo de integración.
- Disminuir el tiempo de integración disminuye la estabilidad (aumentan las oscilaciones).
- Aumentar el tiempo derivativo mejora la estabilidad.

Índice

Suponiendo que el proceso se caracteriza por el siguiente modelo:

$$G(s) = \frac{k_s}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}.$$

Que es un modelo de 3 parámetros, por lo tanto si usamos un PID, es posible colocar arbitrariamente los polos del sistema.

La TF del PID puede escribirse:

$$C(s) = \frac{K_p(1 + sT_i + s^2 T_i T_d)}{sT_i}$$

Polinomios característicos

El polinomio característico de LC con C(s) es:

$$s^3 + s^2\left(\frac{1}{T_i} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{K_p k_s T_d}{\tau_1\tau_2}\right) + s\left(\frac{1 + K_p k_s}{\tau_1\tau_2}\right) + \frac{K_p k_s}{\tau_1\tau_2 T_i}$$

El polinomio deseado en lazo cerrado puede definirse como:

$$(s + \alpha\omega_0)(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0)$$

El término cuadrático me va a dar el comportamiento deseado y $-\alpha\omega_0$ debería ser un polo alejado.

Igualando los términos con iguales potencias de s en las ecuaciones anteriores se pueden despejar las ganancias del PID.

$$K = \frac{\tau_1\tau_2\omega_0^2(1+2\alpha\zeta)-1}{k_s}$$

$$T_i = \frac{\tau_1\tau_2\omega_0^2(1+2\alpha\zeta)-1}{\tau_1\tau_2\alpha\omega_0^3}$$

$$T_d = \frac{\tau_1\tau_2\omega_0(\alpha+2\zeta)-\tau_1-\tau_2}{\tau_1\tau_2\omega_0^2(1+2\alpha\zeta)-1}$$

Referencias

Referencias

- B. Wittenmark, K. J. Åström, and K. erik Årzén, "Computer control: An overview," IFAC PROFESSIONAL BRIEF, Tech. Rep., 2003.
- Astrom, *Control PID avanzado*. Madrid: Pearson Prentice Hall, 2009.
- A. Visioli, *Practical PID Control*. Springer London, 2006.