Control Digital - Maestría en Sistemas Embebidos

Control en Variables de Estado

3 de abril 2023

Índice

Espacio de Estados

Trabajar en el espacio de estados es escribir el sistema (planta) en n en diferencias de primer orden de manera matricial.

Esta manera de modelar permite incluir condiciones iniciales dentro del diseño

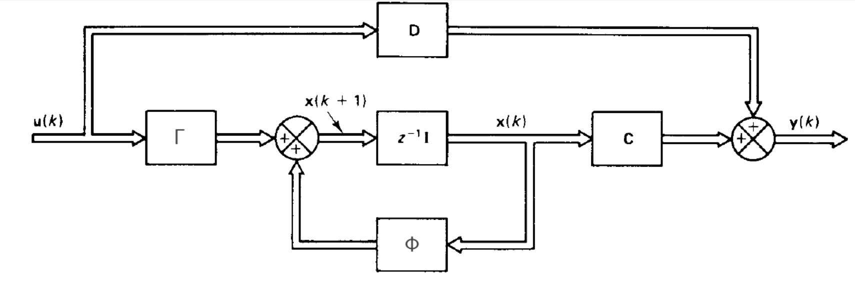
Definición de Estado

Conjunto de variables tales que su conocimiento en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada en $t \geq t_0$ determinan por completo el comportamiento del sistema para cualquier $t \geq t_0$.

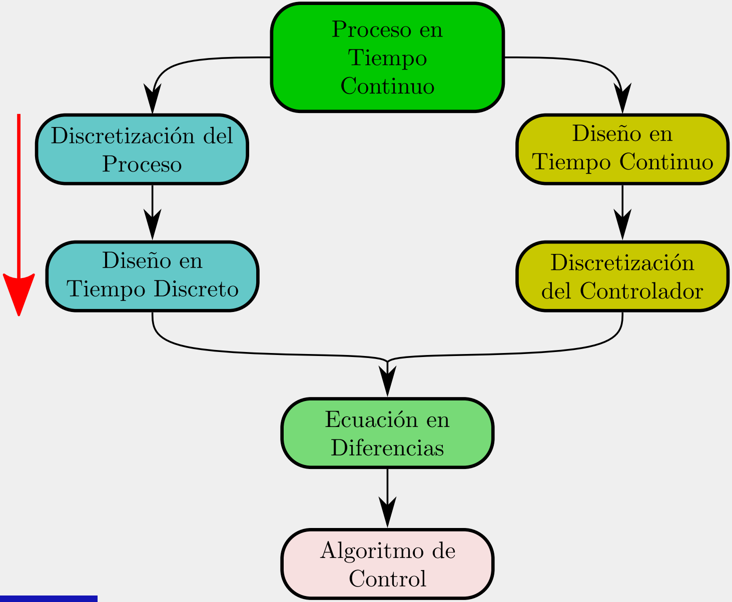
Para los SLID, la ecuación de estado y la ecuación de salida son:

$$x[k+1] = \Phi x[k] + \Gamma u[k]$$
$$y[k] = Cx[k] + Du[k]$$

Donde $\Phi \in \mathbb{R}^{nxn}$; $\Gamma \in \mathbb{R}^{nxr}$; $C \in \mathbb{R}^{mxn}$; $D \in \mathbb{R}^{mxr}$



Diseño vía ubicación de polos


Proceso en Tiempo Continuo
Discretización del Proceso
Diseño en Tiempo Discreto
Diseño en Tiempo Continuo
Discretización del Controlador
Ecuación en Diferencias
Algoritmo de Control

Trabajaremos con:

- Sistemas SISO.
- Todas las variables de estado medibles y disponibles para realimentación.
- Sistema completamente controlable $\longrightarrow$ los polos se pueden ubicar en cualquier parte del plano z.

Trabajaremos con:

- Sistemas SISO.
- Todas las variables de estado medibles y disponibles para realimentación.
- Sistema completamente controlable $\longrightarrow$ los polos se pueden ubicar en cualquier parte del plano z.

El controlador debe atacar diferentes factores:

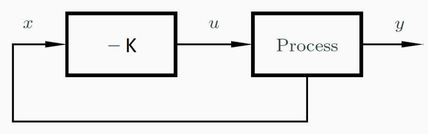
- Atenuación de las perturbaciones.
- Reducción del efecto del ruido de medición.
- Seguimiento de una señal de referencia.
- Variaciones e incertidumbres en el comportamiento del proceso.

Para explicar *pole-placement* vamos a dividir los problemas de control en:

Problemas de Regulación: Resolver el compromiso entre rechazar perturbaciones y limitar el ruido de medición.

Problemas de Servomotor: Hacer que la salida responda a una señal de comando de la manera deseada.

Índice



- El modelo del proceso en tiempo discreto es:

$$x[k+1] = \Phi x[k] + \Gamma u[k]$$

- La realimentación de todos los estados se escribe:

$$u[k] = -Kx[k]$$

- En un principio, modelaremos perturbaciones como estados iniciales distintos de cero $\longrightarrow x[0] = x_0$.
- Objetivo: Controlar los estados al origen, usando una señal de control razonable.

La ecuación de estado

$$x[k+1] = \Phi x[k] + \Gamma u[k]$$

con la acción de control

$$u[k] = -Kx[k]$$

da el siguiente sistema a lazo cerrado

$$x[k+1] = (\Phi - \Gamma K)\, x[k]$$

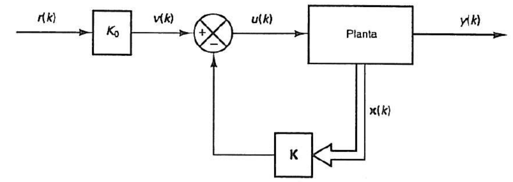
Diseño de ubicación de polos: Elegir K para obtener la ecuación característica deseada

$$det\,(zI - \Phi + \Gamma K) = 0$$

Comando

$>>$ place(Φ,Γ,P)
Donde P tiene la ubicación de los polos deseados.

Índice



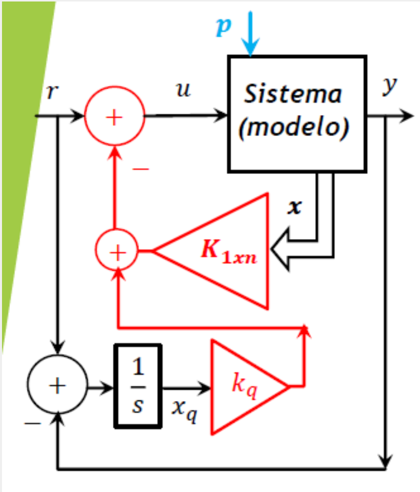
Cuando se requiere controlar un sistema para realizar un seguimiento, la variable de control es:

$$u[k] = K_0 r[k] - Kx[k]$$

Reemplazando esta nueva $u[k]$ en la ecuación de estados queda:

$$x[k+1] = (\Phi - \Gamma K)x[k] + \Gamma K_0 r[k]$$

La ecuación característica para el sistema realimentado es la misma y K_0 es una ganancia que se ajusta para que la respuesta al escalón unitario del sistema sea 1.



Para eliminar en estado estacionario la diferencia entre la referencia y la salida, la misma debe encontrarse a la entrada de un integrador de lazo cerrado.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + Bu$$
$$\dot{x}_q = 0x_q + r - C\boldsymbol{x}$$

Sistema dinámicamente expandido:

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{x}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ x_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

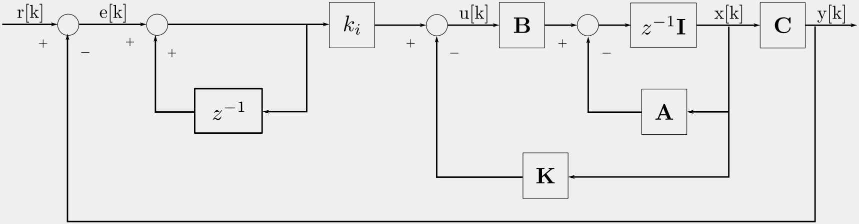
En tiempo discreto, el integrador tiene la forma:

$$x_i[k+1] = x_i[k] + y[k] = x_i[k] + Cx[k]$$

Por lo tanto, la matriz expandida en lazo abierto queda:

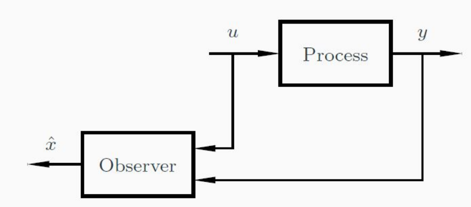
$$\begin{bmatrix} x[k+1] \\ x_i[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[k] \\ x_i[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} u[k]$$

Las ganancias de realimentación se calculan de la misma manera.



Observadores

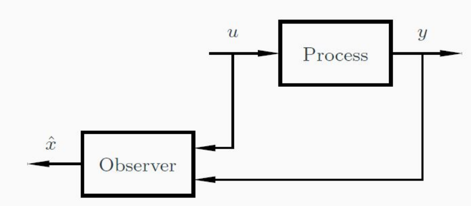
¿Qué sucede si no podemos medir todos las variables de estados del vector de estado, o algunas de esas mediciones son demasiado ruidosas?



Observador

El observador de estados es un subsistema del sistema de control, el cual realiza una estimación de las variables de estado, a partir de la medición de la entrada y la salida.

Nosotros vamos a desarrollar un observador de *orden completo*. Donde estimamos todos los estados del sistema, independientemente de que se puedan medir o no.



La idea es hacer un modelo similar al de la planta para estimar los estados:

$$\hat{x}[k+1] = \Phi\hat{x}[k] + \Gamma u[k]$$
$$\hat{y}[k] = C\hat{x}[k]$$

Cómo el comportamiento del modelo con el que estimamos el estado va a ser diferente al de la plata, con la medición de la salida ajustamos el estado estimado:

$$\hat{x}[k+1] = \Phi\hat{x}[k] + \Gamma u[k] + L(y[k] - C\hat{x}[k])$$

De esta manera, la dinámica del error entre los estados $e = x - \hat{x}$ se puede obtener de la siguiente manera:

$$x[k+1] - \hat{x}[k+1] = \Phi x[k] + \Gamma u[k] - (\Phi - LC)\hat{x}[k] - \Gamma u[k] - Ly[k]$$

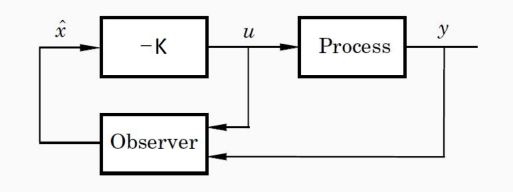
sabiendo que $y[k]$ es la señal medida del sistema, entonces va a contener los estados originales, es decir $y[k] = Cx[k]$. Por lo tanto:

$$e[k+1] = (\Phi - LC)e[k]$$

El error en la observación tendrá la dinámica dada por $(\Phi - LC)$. Lo que nos interesa es diseñar un observador estable, cuya dinámica sea más rápida que los polos de lazo cerrado del sistema.

Realimentación de estado con observadores

Ahora que logramos estimar los estados, nos va a interesar hacer una realimentación usando esa información.



Volviendo sobre lo que vimos en *pole placement*, la realimentación es del tipo:

$$u[k] = -K\hat{x}[k]$$

donde ya estamos usando los estados estimados para realimentar.

¿Cómo afecta la dinámica del observador en el lazo cerrado?

¿Cómo afecta la dinámica del observador en el lazo cerrado?
Analizando realimentación con estados estimados:

$$x[k+1] = \Phi x[k] - \Gamma K\hat{x} = (\Phi - \Gamma K)x[k] + \Gamma K(x[k] - \hat{x}[k])$$

¿Cómo afecta la dinámica del observador en el lazo cerrado?
Analizando realimentación con estados estimados:

$$x[k+1] = \Phi x[k] - \Gamma K \hat{x} = (\Phi - \Gamma K)x[k] + \Gamma K(x[k] - \hat{x}[k])$$

Sabiendo que $e[k] = x[k] - \hat{x}[k]$ y conociendo su dinámica:

$$\begin{bmatrix} x[k+1] \\ e[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - \Gamma K & \Gamma K \\ 0 & \Phi - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[k] \\ e[k] \end{bmatrix}$$

¿Cómo afecta la dinámica del observador en el lazo cerrado?
Analizando realimentación con estados estimados:

$$x[k+1] = \Phi x[k] - \Gamma K\hat{x} = (\Phi - \Gamma K)x[k] + \Gamma K(x[k] - \hat{x}[k])$$

Sabiendo que $e[k] = x[k] - \hat{x}[k]$ y conociendo su dinámica:

$$\begin{bmatrix} x[k+1] \\ e[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - \Gamma K & \Gamma K \\ 0 & \Phi - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[k] \\ e[k] \end{bmatrix}$$

Principio de separación.

Polos del controlador $\longrightarrow A_c(z) = det(zI - \Phi + \Gamma K)$

Polos del observador $\longrightarrow A_o(z) = det(zI - \Phi + LC)$

Nota: Los polos del observador deben ser más rápidos que los del controlador.

Pseudo código:

```
y = ReadInput();
u = K_o*r-K*x_hat;
WriteOutput(u);
x_hat = Phi*x_hat + Gamma*u + L*(y - C*x_hat);
```