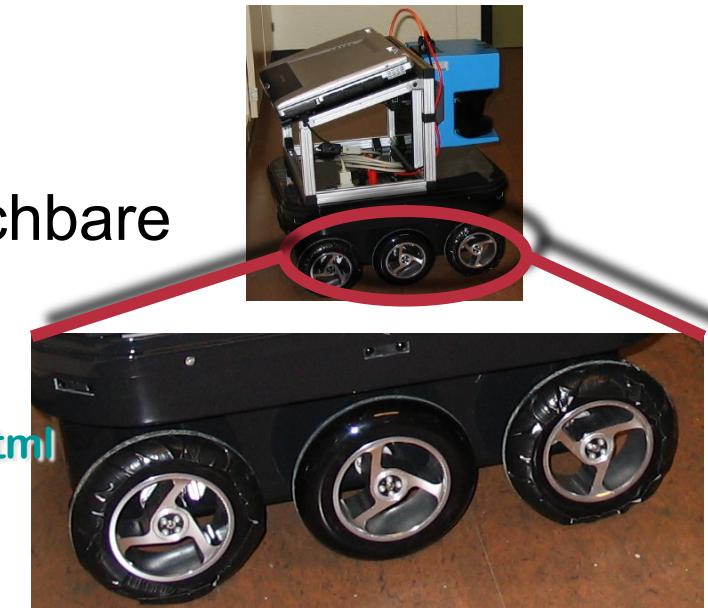


3D-Vorw.-Kinematik für Differenzialantrieb

Andere Kinematiken erfordern andere mathematische Modelle!

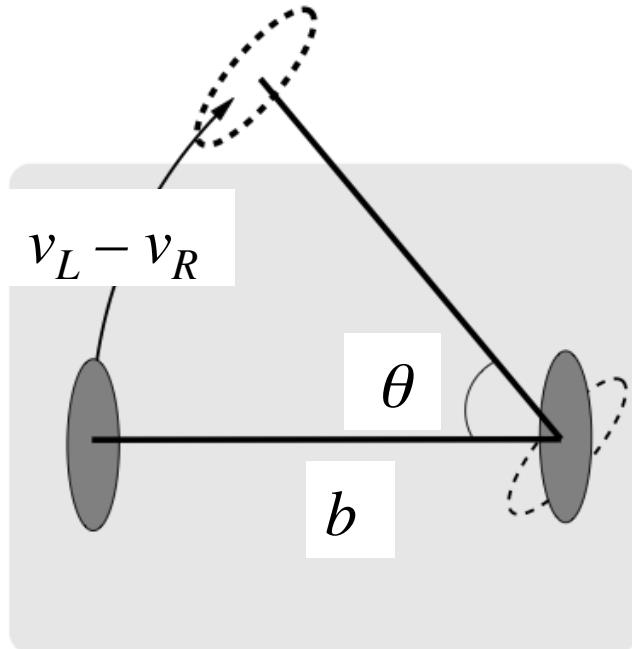
- Beispiele (Rad- und Beinantrieb) s. Dudek/Jenkin Kap. 2.1
- Weitere Kinematiken s. Buch
- Odometrie bei Beinantrieben unüblich
- Basis-Odometrie für KURT2 + Vergleichbare
- Praktische Aufgabe s. Übungen
- Exzellente Web-Darstellung:
rossum.sourceforge.net/papers/DiffSteer/DiffSteer.html



Koppelnavigation (*dead reckoning*)

Berechnung d. Trajektorie über fortlaufende Messung v. Orientierung, Geschwindigkeit & Zeit

Freizeitlektüretipp: Dava Sobel:
Longitude / Längengrad, 1995



$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(v_L - v_R)}{b}$$

Berechne Orientierung θ

- v_R, v_L : konstante(!) Geschwindigkeit re/li Rad (Proj. der Nabe) (**bekannt**)
- b : Achslänge (**bekannt**)
- θ : Schwenkwinkel bei Bewegung hier gemessen in rad, $\theta_{rad} = \theta^\circ (\pi/180)$; 1 rad $\approx 57,3^\circ$

Spezialfälle:

- $v_R = v_L$: $d\theta = 0$ (Geradeausfahrt)
- $v_L = 0$ oder $v_R = 0$: Kreissegment mit Radius b und Länge $b\theta$

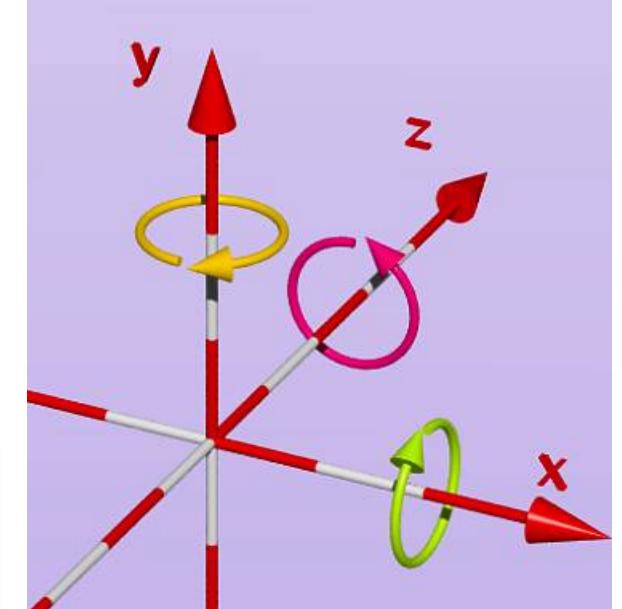
→ Integration mit Startwert θ_0 zur Berechnung der Pose im „nächsten“ Zeitschritt bei Bewegung

$$\theta_t = \theta_0 + \frac{(v_L - v_R)t}{b}$$

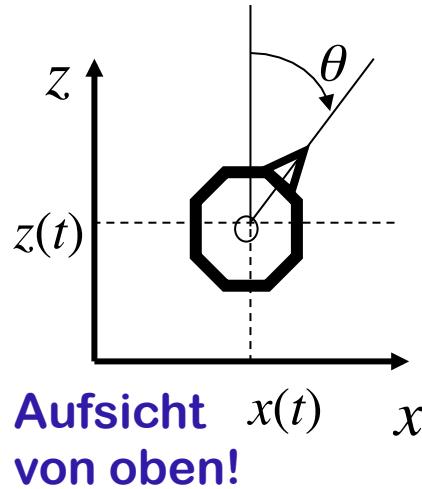
Nochmal: Koordinatensysteme

Erinnerung Folie 39:
Linkshändiges Koordinatensystem

Die positive Drehrichtung um y (und nur um y) ist hier im Uhrzeigersinn!



- Auch in Computergrafik gebräuchlich (Beispiel: POV-Ray)
- Eselsbrücke für Drehrichtungen im Linkshändigen Koordinatensystem
- Diese Drehung ist es, die wir in der Ebene betrachten!



Berechne Position x, z

$\theta=0$ rad bei Blick längs z ; Drehung im Uhrz.-Sinn
Referenzpunkt im Roboter: Achsmittelpunkt
Geschwindigkeit d. Ref.-Punkts: $v = (v_R + v_L)/2$

Spezialfälle:

- $v_R=v_L \rightarrow v=v_R=v_L$ (Geradeausfahrt)
- $v_R=0 \rightarrow v=v_L/2$ (Kreissegment mit Radius b)

$$dx / dt = v \sin(\theta_t) = [(v_R + v_L)/2] \sin(\theta_t)$$

$$dz / dt = v \cos(\theta_t) = [(v_R + v_L)/2] \cos(\theta_t)$$

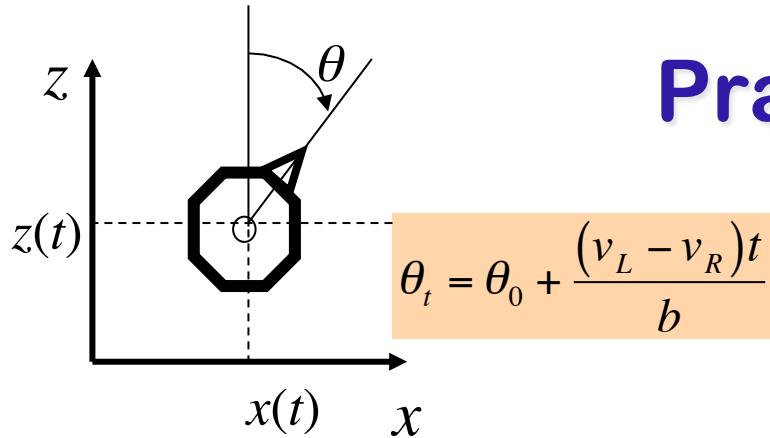
→ analog Winkelberechnung
Integration bei Startwerten x_0, z_0 ;
dann Einsetzen von

$$\theta_t = \theta_0 + \frac{(v_L - v_R)t}{b}$$

$$x(t) = \frac{(v_R + v_L)}{2} \int \sin \theta_t dt$$

$$z(t) = \frac{(v_R + v_L)}{2} \int \cos \theta_t dt$$

Achtung mit Wert $(v_L - v_R)$ im Nenner der Integral-Lösung! ...



$$\begin{aligned} dx/dt &= v \sin(\theta_t) = [(v_R + v_L)/2] \sin(\theta_t) \\ dz/dt &= [(v_R + v_L)/2] \cos(\theta_t) \end{aligned}$$

Praktische Approximationen

- Differenzmessung zwischen v_R, v_L fehlerbehaftet
- bei kleiner Differenz $(v_L - v_R)$ **numerisch instabil!**

→ **approximiere Pose** über Zeit Δt !
Während Δt seien $v = (v_R + v_L)/2$
 $\Delta\theta = (v_L - v_R)/b$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ z_n \\ \theta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ z_{n-1} \\ \theta_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \cdot \Delta t \cdot \sin(\theta_{n-1} + \frac{\Delta\theta}{2} \Delta t) \\ v \cdot \Delta t \cdot \cos(\theta_{n-1} + \frac{\Delta\theta}{2} \Delta t) \\ \Delta\theta \cdot \Delta t \end{bmatrix}$$

Alternativen:

- nur $v \cdot \Delta t \cdot \sin(\theta)$ bzw $v \cdot \Delta t \cdot \cos(\theta)$ für x, z -Aktualisierung
- kalibrierbares Fehlermodell für x, z (z.B. für KURT2)

Beispiel: Rechnung nach Approximation

$$\begin{bmatrix} x_n \\ z_n \\ \theta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ z_{n-1} \\ \theta_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \cdot \Delta t \cdot \sin(\theta_{n-1} + \frac{\Delta\theta}{2} \Delta t) \\ v \cdot \Delta t \cdot \cos(\theta_{n-1} + \frac{\Delta\theta}{2} \Delta t) \\ \Delta\theta \cdot \Delta t \end{bmatrix}, \text{ wobei } \begin{aligned} v \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right] &= (v_R + v_L)/2 \\ \Delta\theta \left[\frac{1}{\text{s}} \right] &= (v_L - v_R)/b \end{aligned}$$

Seien

- $b = 25\text{cm}$
- $v_L = 80\text{cm/s}$, $v_R = 75\text{cm/s}$
- aktuelle Pose $[0,0,0]^T$
- $\Delta t = 1\text{s}$

$$\Delta\theta \cdot \Delta t = \frac{(80 - 75) \frac{\text{cm}}{\text{s}}}{25\text{cm}} \cdot \Delta t = 0,2 \frac{1}{\text{s}} \cdot \Delta t$$

(Hinweis: $0,2\text{rad} \approx 11,46^\circ$)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ z_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}(1\text{s}) = \begin{bmatrix} 0\text{cm} \\ 0\text{cm} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 77,5 \sin(0 + 0,1)\text{cm} \\ 77,5 \cos(0 + 0,1)\text{cm} \\ 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,74\text{cm} \\ 77,11\text{cm} \\ 0,2 \end{bmatrix}$$

Bspl., Forts.: Verwende die Poseschätzungen

Geschätzte Pose nach 1s im $[x_0, z_0, \theta_0]^\top$ -Referenzsystem
 $[77,11\text{cm}, 7,74\text{cm}, 0,2]^\top$

Die „zweite Sekunde“(ohne Dimensionen der Werte; selbe v_L, v_R)

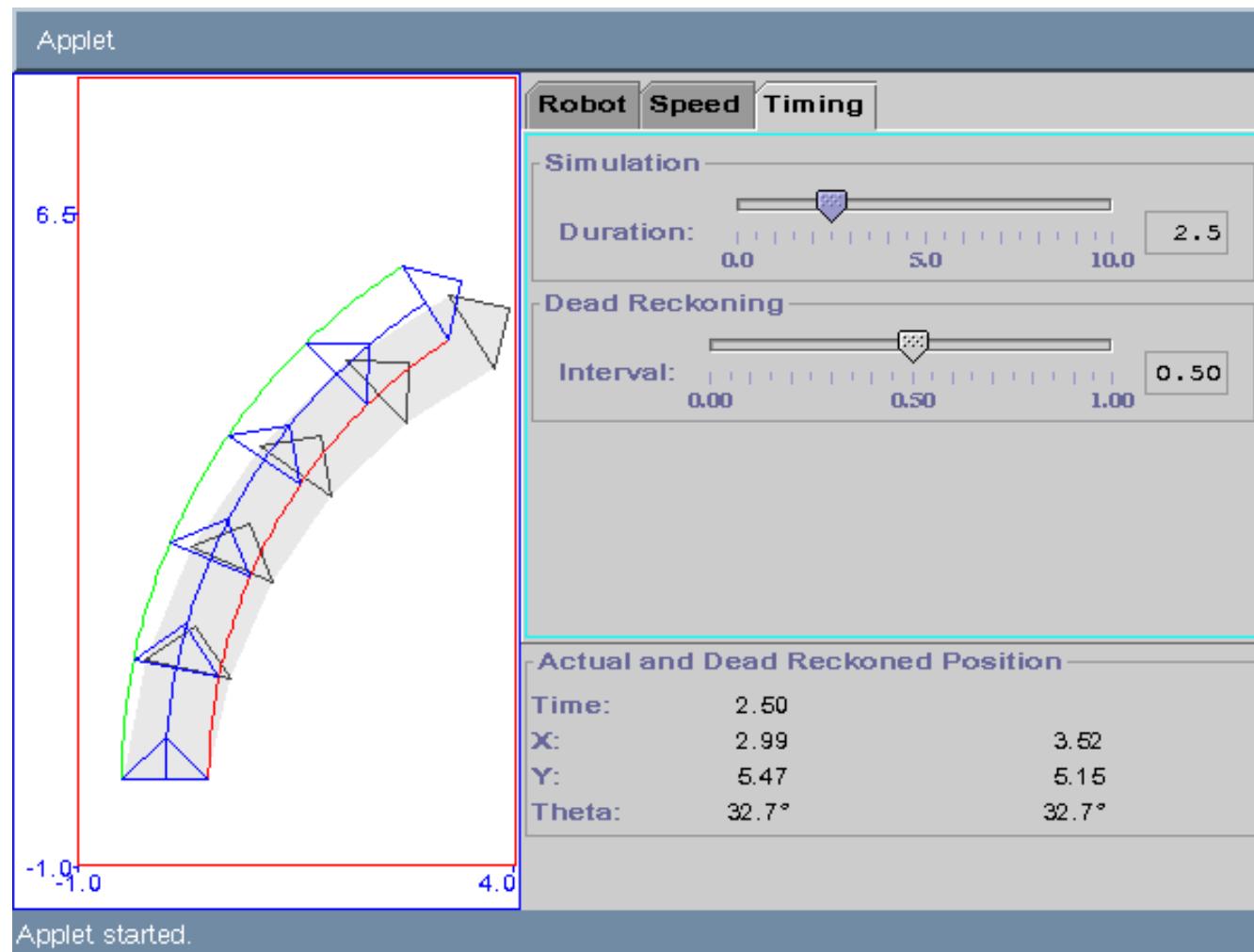
$$\begin{bmatrix} x_2 \\ z_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,74 \\ 77,11 \\ 0,2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 77,5 \sin(0,2 + 0,1) \\ 77,5 \cos(0,2 + 0,1) \\ 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,74 \\ 77,11 \\ 0,2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22,09 \\ 74,04 \\ 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29,83 \\ 151,15 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

→ Geschätzte Pose nach 2s im Referenzsystem
 $[29,83\text{cm}, 151,15\text{cm}, 0,4\text{rad}]^\top$

(Gesch. nach 2s ohne Zwischenpose: $[30,79\text{cm}, 151,91\text{cm}, 0,4\text{rad}]^\top$)

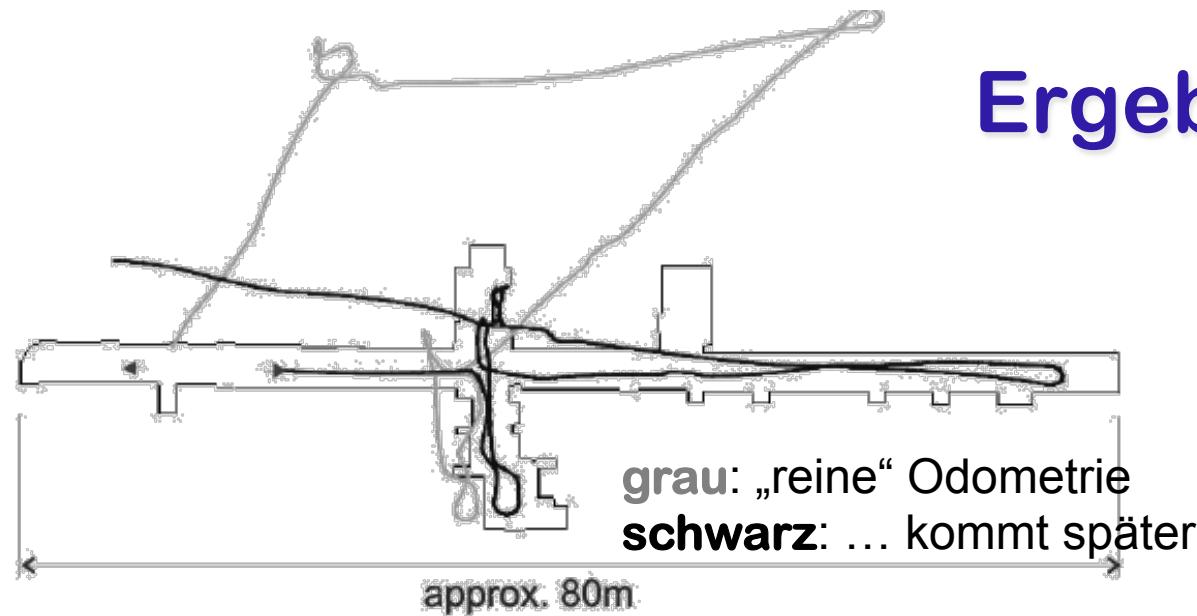
- Inkrementiere jeweils letzte Schätzung (relative Lokalisierung)
- Zykluszeit praktisch viel kürzer als 1s (eher $\sim 1/100\text{s}$)

Zum Spielen



... mit etwas
anderem
Koordinaten-
system!

rossum.sourceforge.net/tools/MotionApplet/MotionApplet.html



Ergebnisse, qualitativ

Beispiel:

- Flurfahrt ca. 200m mit KURT2

- Lokalisierung nach Odometrie (Koppelnavigation) ist kostenlos
- sie unterliegt gravierenden systematischen Fehlern
(variabler Schlupf (auch des Zahnriemens, KURT2), Kurvenmodell, ...)
- billige empirische Verbesserungen machen Sinn
- Fehler akkumulieren über die Zeit unbegrenzt
 - für kurze, besonders gerade Strecken ist sie okay!
 - fusioniert mit anderen Sensordaten ist sie hilfreich!

Was ist Wahrheit?

... auf der Suche nach der „*ground truth*“

Gegeben

ein physisch durchgeführtes Roboterexperiment, z.B. zur nachhaltenden Lokalisierung bei längerer Fahrt

Gesucht

valides Maß zur quantitativen Bewertung der Übereinstimmung zwischen physischem Verhalten und internem Modell, z.B. zwischen physischer Trajektorie und eigener Lokalisierung



In Methodik empirischer Untersuchung
sind Robotik-Arbeiten zuweilen fragwürdig!

4.3 Bayes- und Kalmanfilter

- Sensordaten unterliegen Fehlern (systematischen, anderen)
 - Aktionen desgleichen
 - Roboter- und Umgebungszustand sind nicht präzise wissbar
 - Zusammenführung unabhängiger Information reduziert diese Unsicherheit
 - „glaubwürdigere“ Information soll höher gewichtet werden
- **Fusioniere** Information unterschiedlicher Sensormessungen und Aktionsmodelle von unterschiedlichen Raum-Zeit-Punkten
- **„Aktive Wahrnehmung“**: Input gezielt suchen zur Reduktion von Unsicherheit (später)

Modellierte in (elementarer) Wahrscheinlichkeitstheorie!

W‘theorie Grundbegriffe: Ereignis, Variable

Ergebnisraum Ω : Mögliche Ergebnisse eines Zufallsexperiments

z.B.: $\{,,1“,,,2“,,,3“,,,4“,,,5“,,,6“\}$ beim Würfeln
 $\{[,,1“,sonnig], [,,1“,regnet], [,,2“,sonnig], …, [,,6“,regnet]\}$

Ereignis:

Teilmenge v. Ω . z.B.: $\{,,2“,,,4“,,,6“\}$ beim Würfeln („gerade“)

Elementarereignis:

$\omega \in \Omega$. (eigentlich: einelementiges Ereignis) z.B.: $[,,1“,sonnig]$

Zufallsvariable: Funktion von Elementarereignissen $\omega \in \Omega$ in einen Wertebereich \mathcal{D} . (Notation: beginnt mit Großbuchstabe)

$\mathcal{D}=\{\text{true}, \text{false}\}$: **Boolesche** Zufallsvariable, z.B.: *Zahnloch*

\mathcal{D} diskret: **Diskrete** ZV, z.B.: *Augenzahl* (auf einem Würfel)

\mathcal{D} stetig (hier: \mathfrak{R}): **kontinuierliche** ZV, z.B.: *Position* (Roboter im 2D)

W‘theorie Grundbegriffe: W‘raum

Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), $\Omega \neq \emptyset$: P ist eine so auf Ereignissen aus Ω definierte reellwertige Funktion („Wahrscheinlichkeit“), dass die **Kolmogorow-Axiome** gelten:

1. $0 \leq P(e) \leq 1$ für alle $e \subseteq \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Für $d, e \subseteq \Omega$, sodass $d \cap e = \emptyset$: $P(d \cup e) = P(d) + P(e)$

z.B.: $P(\text{,,gerade"}) = P(\text{,,2"}) + P(\text{,,4"}) + P(\text{,,6"}) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$

(W‘raum präziser (Ω, Σ, P) mit Ereignisraum Σ – hier verkürzt dargestellt)

Ereign. a, b sind **unabhängig** auf (Ω, P) , gdw:

$$P(a \cap b) = P(a) \cdot P(b)$$

W-theorie Grundbegriffe: W-verteilungen, -dichten

P induziert Funktionen auf den Zufallsvariablen über (Ω, P) :

Wahrscheinlichkeitsverteilung P einer diskreten Zufallsvariablen X : Liste aus W'keiten der möglichen

Werte für X , wobei $\sum_{x \in \text{Range}(X) \subseteq \Omega} P(x) = 1$

z.B.: $P(\text{Augenzahl}) = \langle P(,,1“), \dots, P(,,6“) \rangle = \langle 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6 \rangle$

Notation: $P(\text{Augenzahl} = „1“) = 1/6$

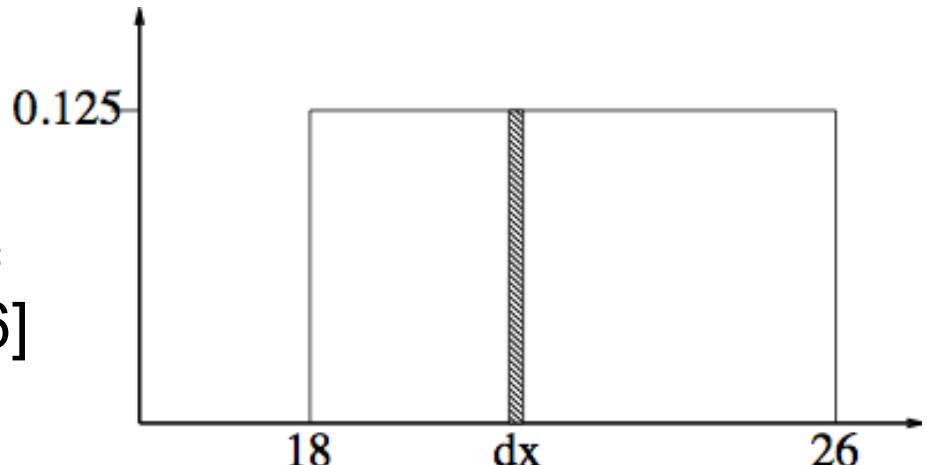
Wahrscheinlichkeitsdichte P einer kontinuierlichen Zufallsvariablen X : Fkt. vom Typ $\text{Range}(X) \rightarrow [0,1]$, wobei

$$\text{und } P(a \leq x \leq b) = \int_a^b P(x) dx \quad \int_{x \in \text{Range}(X) \subseteq \Omega} P(x) dx = 1$$

z.B.: ...

Beispiel 1 für W'dichte: Gleichverteilung

$\mathbf{P}(\text{Temperatur}) = U[18,26](x) =$
Gleichverteilung auf [18,26]



$$\int_{-\infty}^{\infty} U[18,26](x)dx = \int_{18}^{26} U[18,26](x)dx = 1$$

$$\mathbf{P}(20 \leq \text{Temperatur} \leq 22) = \int_{20}^{22} U[18,26](x)dx = 0,25 = P(\dots)$$

$$P(20,5) = 0$$

$$\mathbf{P}(\text{Temperatur}=20,5) = \lim_{dx \rightarrow 0} \mathbf{P}(20,5 \leq X \leq 20,5+dx)/dx = 0,125/\text{°C}$$

W'theorie Grundbegriffe: Unbedingte W'keiten

W'keit P „an sich“, ohne weitere Information:

Unbedingte Wahrscheinlichkeit (**a priori** W'keit)

z.B.: $P(\text{regnet}) = 0,3$

Verteilung für unbedingte W'keiten wie beschrieben

z.B.: $\mathbf{P}(\text{OSWetter}) = \langle P(\text{sonnig}), P(\text{wolkig}), P(\text{regnet}), P(\text{frostig}) \rangle$
 $= \langle 0,25, 0,4, 0,3, 0,05 \rangle$

Gemeinsame Verteilung von n ZVen entspricht n -dim. Tabelle:

Notation: $\mathbf{P}(ZV_1 \cap ZV_2)$
oder $\mathbf{P}(ZV_1, ZV_2)$

Beispiel:

$\mathbf{P}(\text{OSWetter}, \text{Zahnloch})$

$\text{OSWetter}=$ $\text{Zahnloch}=$	sonnig	wolkig	regnet	frostig
$false$	0,225	0,36	0,27	0,045
$true$	0,025	0,04	0,03	0,005

Vollständige gem. Verteilg.: W'keit aller Elementarereignisse
(hat $O(m^n)$ Einzelw'keiten für n ZVen mit max. m Werten)

W'theorie Grundbegriffe: Bedingte W'keiten

W'keit P bei gegebener Information:

Bedingte Wahrscheinlichkeit (a posteriori W'keit)

z.B.: $P(\text{regnet} \mid \text{lufldruck_hoch}) = 0,1$

Definiert (falls $P(b) > 0$) als
 $(P(a|b)=0, \text{ falls } P(b)=0)$

$$P(a \mid b) := \frac{P(a \cap b)}{P(b)}$$

... oder als („Produktregel“): $P(a \cap b) = P(a|b)P(b) = P(b|a)P(a)$

z.B.: $P(\text{sonnig} \neg \text{zahnloch}) = 0,225 / 0,9 = 0,25$

entspricht $P(\text{sonnig})$, weil unabhängig!

Entsprechend für W'verteilungen:

$$\mathbf{P(OSWetter, Zahnloch)} = \mathbf{P(OSWetter|Zahnloch)} \mathbf{P(Zahnloch)}$$

W-theorie Grundbegriffe: Bedingte Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse a, b sind **bedingt unabhängig**, gegeben c , gdw.:

$$P(a,b \mid c) = P(a \mid c) P(b \mid c)$$

Zwei Zufallsvariable A, B sind **bedingt unabhängig**, geg. C , gdw.:

$$\mathbf{P}(A, B \mid C) = \mathbf{P}(A \mid C) \mathbf{P}(B \mid C)$$

Damit äquivalent sind die Formulierungen

$$\mathbf{P}(A \mid B,C) = \mathbf{P}(A \mid C) \text{ und } \mathbf{P}(B \mid A,C) = \mathbf{P}(B \mid C)$$

→ kleinere Verteilungen ohne volle Unabhängigkeit!!

W‘theorie Grundbegriffe: Die Bayessche Regel

Erinnerung Produktregel: $P(a \cap b) = P(a|b)P(b) = P(b|a)P(a)$

„Satz“ von Bayes

$$P(b|a) = \frac{P(a|b)P(b)}{P(a)} = \alpha \cdot P(a|b)P(b)$$

... oder für Verteilungen:

$$\mathbf{P}(Y|X) = \frac{\mathbf{P}(X|Y)\mathbf{P}(Y)}{\mathbf{P}(X)} = \alpha \cdot \mathbf{P}(X|Y)\mathbf{P}(Y)$$

... oder bei vorhandener Evidenz e (Messungen oft \mathbf{z} genannt!):

$$P(y|\mathbf{z}) = P(y|z_1, \dots, z_n) = \frac{P(z_n|y, z_1, \dots, z_{n-1})P(y|z_1, \dots, z_{n-1})}{P(z_n|z_1, \dots, z_{n-1})}$$

Anwendung von Bayes: Diagnoseregeln

$$P(\text{ursache} \mid \text{wirkung}) = \frac{P(\text{wirkung} \mid \text{ursache}) \cdot P(\text{ursache})}{P(\text{wirkung})}$$

Oft sind kausale Zusammenhänge besser bekannt
als diagnostische

Verwendung in der Robotik

$$P(\text{Zustand} \mid \text{Messung}) = \frac{P(\text{Messung} \mid \text{Zustand}) \cdot P(\text{Zustand})}{P(\text{Messung})}$$

Beispiel (s.u. Folie 159)

$$P(\text{Briefbox} = \text{voll} \mid \text{Fahne} = \text{hoch}) = \frac{P(\text{Fahne} = \text{hoch} \mid \text{Briefbox} = \text{voll}) \cdot P(\text{Briefbox} = \text{voll})}{P(\text{Fahne} = \text{hoch})}$$

W^{theorie} Grundbegriffe: Erwartungswert

Erwartungswert

(e. numerischen diskreten ZV)

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i)$$

- repräsentiert „erwartetes“ Ergebnis e. zufälligen Messung
- i.a. nicht dasselbe wie Mittelwert!

Beispiele

- Würfel: $E(\text{Augenzahl}) = 1/6 \cdot (1+2+3+4+5+6) = 3,5$
- Münze: $E(\text{Münzwurf}) = 1/2 \cdot (0+1) = 0,5$
- bei gleichverteilter ZV ist E-Wert gleich Mittelwert

Wtheorie Grundbegriffe: (Ko)Varianz, Korrelation

Varianz ist „Streuung der Abweichung vom Erwartungswert“:

$$V(X) = \sigma_X^2 := E((X - E(X))^2)$$

Kovarianz ist „Zusammenhang“ zweier ZV:

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

- positiv bei gleichsinnigem Zusammenhang
- negativ bei gegensinnigem
- 0 bei fehlendem Zusammenhang
(\neq Unabhängigkeit! Aber: Wenn unabhängig, dann Kovarianz = 0)

Korrelation ist auf [-1,1] normierte Kovarianz

Eine **Kovarianzmatrix** Σ listet d. Kovarianzen aller Paare einer Menge v. ZV X_1, \dots, X_n .
(Symmetrisch, da $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$; ($\sigma_{ii} = \sigma_i^2$))

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Beispiel 2 für W'ichte: Gaußverteilung

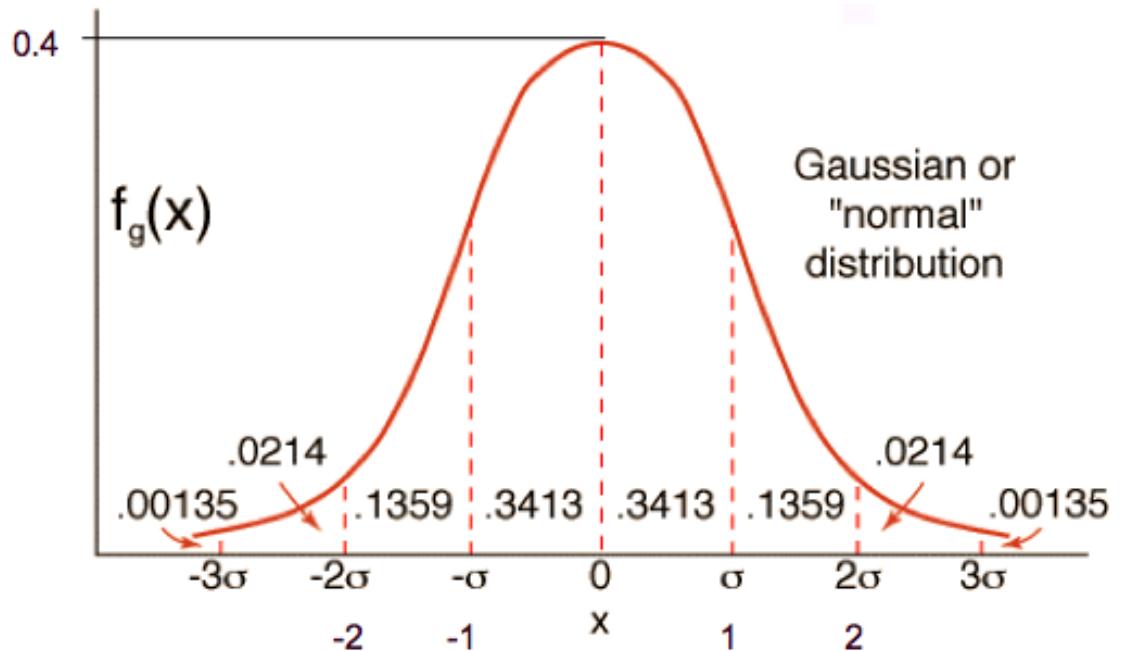
Gaußverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ :

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Standard-Normalverteilung ($\mu=0, \sigma=1$): $P(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$

$$\begin{aligned} P(\mu-\sigma < X \leq \mu+\sigma) &\approx 0.68 \\ P(\mu-2\sigma < X \leq \mu+2\sigma) &\approx 0.955 \\ P(\mu-3\sigma < X \leq \mu+3\sigma) &\approx 0.997 \end{aligned}$$

Standardabweichung σ ist die Wurzel der Varianz

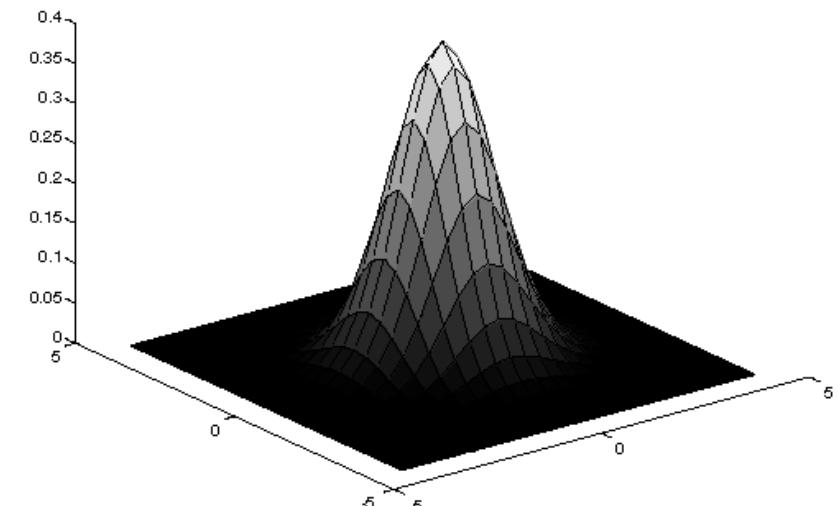


W'theo. Grundbgr.: Multivariate Gaußverteilungen

$$P(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

... sind direkte Verallgemeinerungen eindimensionaler Gaußverteilungen auf n -dim. Vektor \mathbf{x} für eine n -dim. Kovarianzmatrix Σ , wobei für Skalar x (also $n=1$) gilt: $\Sigma=\sigma^2$

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot \text{Det}(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2} ((\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu))}$$



(Nach Konstruktion:
 Σ invertierbar, $\text{Det}(\Sigma) \neq 0$!
Erinnerung: $\text{Det}(r)=r$)

Stichprobenziehen gemäß Verteilung

... werden wir immer mal wieder brauchen

... ist ein klassisches Problem in der Statistik

(„... Umfrage unter 1001 repräsentativ ausgewählten Dalmatinern“, „... Sitzverteilung nach d'Hondtschem Verfahren aus Wählerstimmen“, ...)

Grundidee theoretisch:

- Aufrufe `random` approximieren Gleichverteilung auf [0,1]
- Stichproben $S_{1,\dots,N}$ gleichverteilt auf [0,1] (bzw. (0,1)) lassen sich umrechnen auf beliebige Verteilung \mathbf{P}
 - Wert nach \mathbf{P} von S_i ist x_i für das gilt:
$$S_i = \int_{-\infty}^{x_i} \mathbf{P}(x) dx$$

Gleich- in Gaußverteilungen verwandeln

- **Box-Muller-Methode** (Satz): Sind U_1, U_2 gleichverteilte Var.n auf (0,1), so sind N_1, N_2 normalverteilte Var.n, wobei

$$N_1 = (-2 \cdot \ln U_1)^{1/2} \cdot \cos(2\pi U_2) \text{ und}$$

$$N_2 = (-2 \cdot \ln U_1)^{1/2} \cdot \sin(2\pi U_2)$$

- **N-Approximation, Zwölferregel**: Folgende Funktion approximiert Normalverteilung (Mittelwert 0, St.-Abw. b):

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} \text{random}(-b, b)$$

- noch einfacher:

Approximiere **b-Dreiecksverteilung**

durch:

$$\frac{\sqrt{6}}{2} [\text{random}(-b, b) + \text{random}(-b, b)]$$

