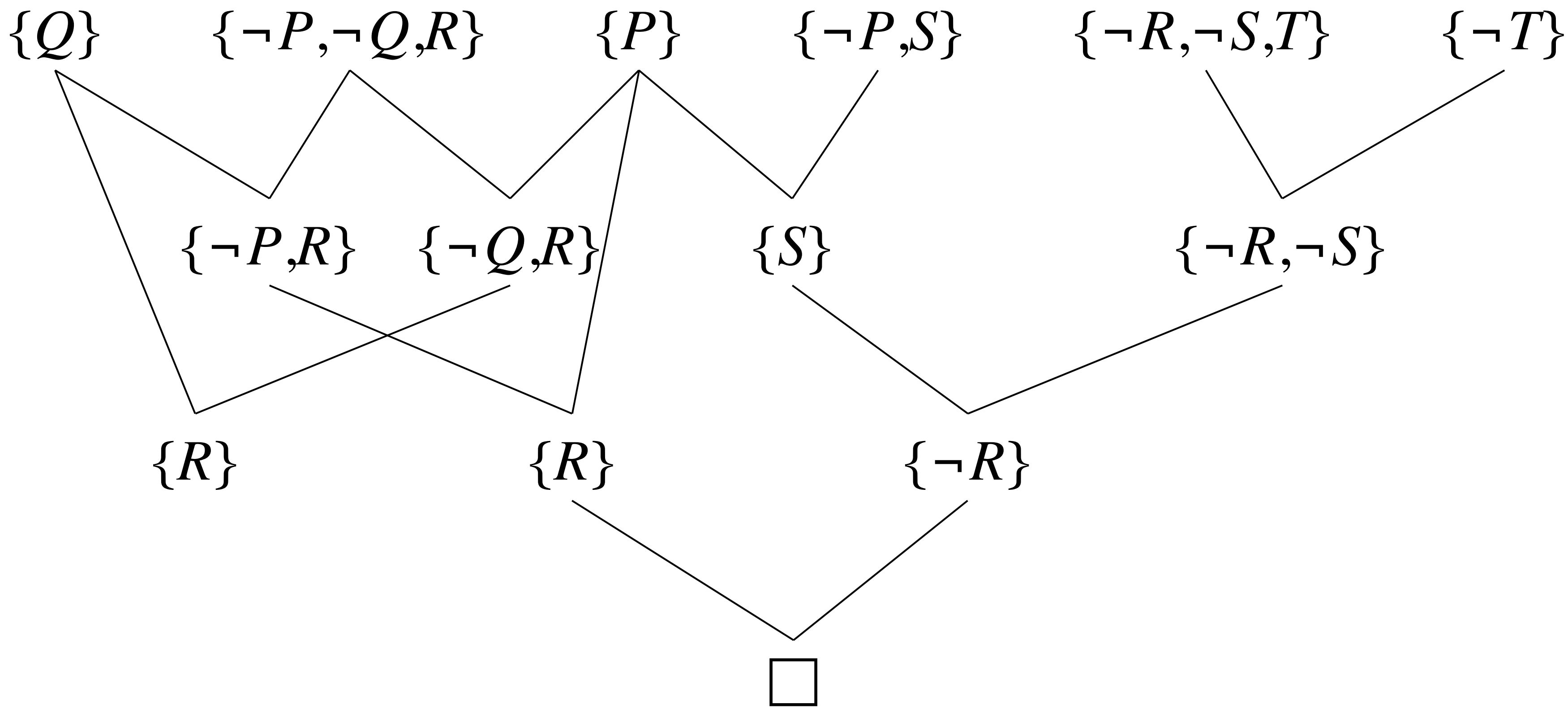
Beispiel Unit-Resolution



nicht alle möglichen Unit-Resolutionen dargestellt!

Hornklauseln und Definite Klauseln

Eine **Hornklausel** ist eine Klausel, die höchstens 1 positives Literal enthält.

Bemerkung: Wegen $(P \wedge Q \Rightarrow R) \equiv (\neg P \vee \neg Q \vee R)$
treten Hornklauseln auf natürliche Weise in der Wissensrepräsentation auf!
Weitere Anwendung: Logikprogrammierung (PROLOG).

Vollständigkeit v. Input- u. Unit-Resolution f. Hornklauseln

Sei $\mathcal{F}$ eine inkonsistente Hornklauselmenge.
Dann ist $\mathcal{F}$ unit-widerlegbar und input-widerlegbar.

Bew.: Für Unit-Resolution direkt mit Induktion über Variablenzahl in $\mathcal{F}$.
Für Input-Resolution dann über Äquivalenzsatz von Input- und Unit-Res.

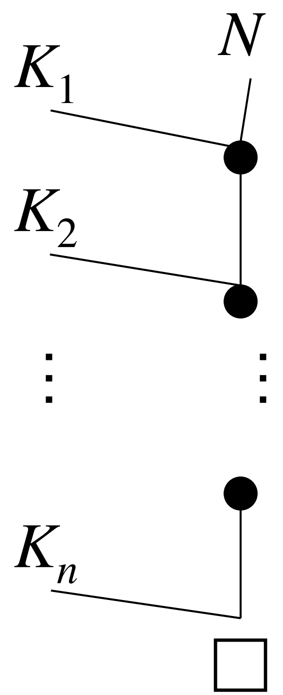
Eine **definite Klausel** ist eine (Horn-)Klausel, die genau 1 positives Literal enthält.

SLD-Resolution

Eine Widerlegung der Länge n einer Hornklauselmenge $\mathcal{F}$ liegt in **SLD-Resolution** vor, wenn gilt:

- Die erste Resolvente $Res(K_1,N)$ hat die negative Klausel N und die definite Klausel K_1 als Elternklauseln;
- die i-te Resolvente ist $Res(K_i,Res(K_{i-1},(\ldots(Res(K_1,N))\ldots)))$
- die n-te Resolvente ist $\square$, keine frühere Resolvente ist $\square$.

SLD-Struktur



SLD steht für: *linear resolution with selection function for definite clauses*

Beispiel SLD-Resolution

Klauselmenge

$$\{\{\neg P, \neg Q, R\}, \{\neg R, \neg S, T\}, \{\neg P, S\}, \{Q\}, \{P\}, \{\neg T\}\}$$

$\{\neg R, \neg S, T\}$ $\quad$ $\{\neg T\}$

$\{\neg P, S\}$ $\quad$ $\{\neg R, \neg S\}$

$\{\neg P, \neg Q, R\}$ $\quad$ $\{\neg P, \neg R\}$

$\{Q\}$ $\quad$ $\{\neg P, \neg Q\}$

$\{P\}$ $\quad$ $\{\neg P\}$

$\square$

Eigenschaften der SLD-Resolution

Vollständigkeit der SLD-Resolution für Hornklauseln

Sei $\mathcal{F}$ eine inkonsistente Hornklauselmenge.
Dann gibt es eine SLD-Widerlegung von $\mathcal{F}$.

Beweisskizze: Für inkonsistentes $\mathcal{F}$ muss es eine minimale inkonsistente Teilmenge $\mathcal{F}_0$ geben, die eine negative Klausel N enthält.
Für $\mathcal{F}_0$ gibt es eine Widerlegung durch Input-Resolution (s. Vollst.-Satz).
Diese Widerlegung lässt sich zu einer SLD-Widerlegung ausgehend von der negativen Klausel N umsortieren.

➥Prolog: Programmaufruf als Deduktion

Der Aufruf eines Prolog-Programms „entspricht“ einer SLD-Widerlegung von Programm-, Fakten- und Zielklausel, ausgehend von der Zielklausel!

Beispiel („aussagelogisches Prolog“)

Programm
```
r.
p :- r.
```

Zielklausel
```
?- p.
```

Ergebnis
```
Yes
```

entspricht

$$\{P, \neg R\} \qquad \{\neg P\}$$
$$\{R\} \qquad \{\neg R\}$$
$$\square$$

Mehr zu Prolog in den Übungen und später!

Fazit Aussagenlogik und Resolution

- Aussagenlogik ist e. Formalismus zur Wissensrepräsentation, aber mit schwacher Ausdrucksfähigkeit
- AL hat formal definierte Syntax und Semantik – wie jede Wissensrepräsentationssprache
- In AL sind (semantische) Folgerung und (syntaktische) Ableitbarkeit formal definiert; es gibt korrekte und vollständige Kalküle
- AL-Folgerung ist entscheidbar, aber NP-vollständig. Model-Checking und DPLL funktionieren. Resolution desgleichen.
- Hornklauseln kommen in der Wissensrepräsentation auf natürliche Weise vor. Es gibt effiziente Kalküle für Ableitbarkeit aus Hornklauselmengen.
  PROLOG nutzt das aus.

… und was hat das mit KI & Agenten zu tun?

Zur Erinnerung:

„Die KI ist der Teil der Informatik, der mittels algorithmischer Modelle Leistungen des <u>Denkens</u>, Tuns und Wahrnehmens untersucht.“

Zur Erinnerung:

„Ein Agent ist rational, wenn er stets die Aktion ausführt, die seine Performanz unter der aktuellen Perzept-Folge und <u>seinem gegebenen Wissen</u> maximiert.“

2.3 Prädikatenlogik 1. Stufe

- Aussagen der Aussagenlogik haben keine innere Struktur: Verknüpfung nur über Wahrheitswert möglich, nicht über Inhalt von Aussagen
- Prädikatenlogik kennt darüber hinaus
  - **Objekte/Individuen**: z.B. Menschen, Tiere, Ereignisse, Vorlesungen, Zahlen, Agenten, …
  - **Relationen**: z.B. ist_Kanzler(.), geschah_vor(.,.), >(.,.), haben_unterschiedliche_Farbe(.,.,.), …
  - **Funktionen**: z.B. kanzler_von(.), sinus(.), spielte_im_WM-Finale(.,.), …

Sprachelemente der Prädikatenlogik

- (Individuen-)**Variable**: x_i (i=1, …)
  (Variable in AL sind Aussagevariablen!)
- **Funktionssymbole**: f_i^k (i=1, …) (k=0, …: Stelligkeit)
  0-stellige Funktionen heißen **Konstante**
- **Prädikatensymbole**: p_i^k (i=1, …) (k=0, …: Stelligkeit)
  (0-stellige Prädikate entsprechen Aussagevariablen der AL)
- **Junktoren** (wie Aussagenlogik)
- **Quantoren**: $\exists$ (**Existenzquantor**), $\forall$ (**Allquantor**)

Für Variable, Funktionen und Prädikate verwende im Folgenden auch andere, Sinn tragende Namen.
Konvention: Variable x,y,z,u,v,w; Konstante a,b,c,d;
„echte“Funktionen f,g,h

Syntax der Prädikatenlogik

1. **Terme**
   - Eine **Variable** ist ein Term
   - Sind $t_1,\ldots,t_k$ Terme f_i^k Funktion, so ist $f_i^k(t_1,\ldots,t_k)$ ein Term
     Ein variablenfreier Term heißt **Grundterm**

2. **Formeln**:
   - Ist p_i^k ein Prädikatensymbol und sind $t_1,\ldots,t_k$ Terme, so ist $p_i^k(t_1,\ldots,t_k)$ eine Formel (**atomare** Formel, **Atomformel**)
     [Atom-]Formel ohne Variable: **Grund[atom]formel**
   - Sind α und β Formeln, so auch $\neg\alpha$, $\alpha\vee\beta$, $\alpha\wedge\beta$.
     [Wie AL: $\alpha\Rightarrow\beta$ steht für $\neg\alpha\vee\beta$, $\alpha\Leftrightarrow\beta$ für $(\alpha\Rightarrow\beta)\wedge(\beta\Rightarrow\alpha)$]
   - Ist x Variable, α Formel, so sind $\exists x.\alpha$ und $\forall x.\alpha$ Formeln
     Kommt x in α vor, so heißt es **gebunden**. (Gegenteil: **frei**)

Beispiel: Formulierungen in Prädikatenlogik

Everybody loves somebody sometime. *Irving Taylor/Dean Martin*

$$\forall x.\ \exists y.\ \exists t.\ \mathrm{loves}(x,y,t)$$

oder: $\forall x. \exists t. \exists y.\ \mathrm{loves}(x,y,t)$

aber nicht: $\exists t. \forall x. \exists y.\ \mathrm{loves}(x,y,t)$ oder $\exists y. \forall x. \exists t.\ \mathrm{loves}(x,y,t)$

Wer an der UOS studiert, ist schlau.

$$\forall x.\ \mathrm{studUOS}(x) \Rightarrow \mathrm{schlau}(x)$$

Es gibt ein schlaues Studierendes an der UOS.

$$\exists x.\ \mathrm{studUOS}(x) \wedge \mathrm{schlau}(x)$$

Semantik der Prädikatenlogik

Definition 3.6 *Eine* ***Belegung*** $\mathbb{B}$ *oder* ***Interpretation*** *ist definiert durch*

- *Eine Abbildung von der Menge der Konstanten und Variablen* $K \cup V$ *auf eine Menge* W *von Objekten aus der Welt.*
- *Eine Abbildung von der Menge der Funktionssymbole auf die Menge der Funktionen der Welt. Jedem* n*-stelligen Funktionssymbol wird eine* n*-stellige Funktion zugeordnet.*
- *Eine Abbildung von der Menge der Prädikatssymbole auf die Menge der Relationen der Welt. Jedem* n*-stelligen Prädikatssymbol wird eine* n*-stellige Relation zugeordnet.*

Den Ausschnitt der Welt (Objekte, Funktionen, Relationen: gemeinsam oft „**Universum**" genannt) und die Interpretation zusammen nennt man auch **Struktur**.

Wahrheit

Definition 3.8

- *Eine atomare Formel $p(t_1, \ldots, t_n)$ ist* **wahr** *unter der Belegung $\mathbb{B}$, wenn nach Belegung und Auswertung aller Terme $t_1, \ldots, t_n$ und Belegung des Prädikates p durch die n-stellige Relation r gilt*

$$(\mathbb{B}(t_1), \ldots, \mathbb{B}(t_n)) \in r.$$

r Relation in der Welt!
(nicht in der Sprache)

- *Die Wahrheit von quantorenfreien Formeln ergibt sich aus der Wahrheit der atomaren Formeln – wie in der Aussagenlogik – über die Semantik der logischen Operatoren.*
- *Eine Formel $\forall x\ F$ ist wahr unter der Belegung $\mathbb{B}$ genau dann wenn sie bei beliebiger Änderung der Belegung für die Variable x wahr ist.*
- *Eine Formel $\exists x\ F$ ist wahr unter der Belegung $\mathbb{B}$ genau dann wenn es für die Variable x eine Belegung gibt, welche die Formel wahr macht.*

Definitionen zur semantischen Äquivalenz von Formeln, für erfüllbar, wahr, unerfüllbar und Modell, semantische Folgerung werden aus der Aussagenlogik übernommen.

Beispiel für Interpretation in der PL1

Seien gegeben:
Konstanten c, d, e, zweistelliges Funktionssymbol $plus$, zweistelliges Prädikatssymbol gr.

$$F \equiv gr(plus(c,e),d)$$

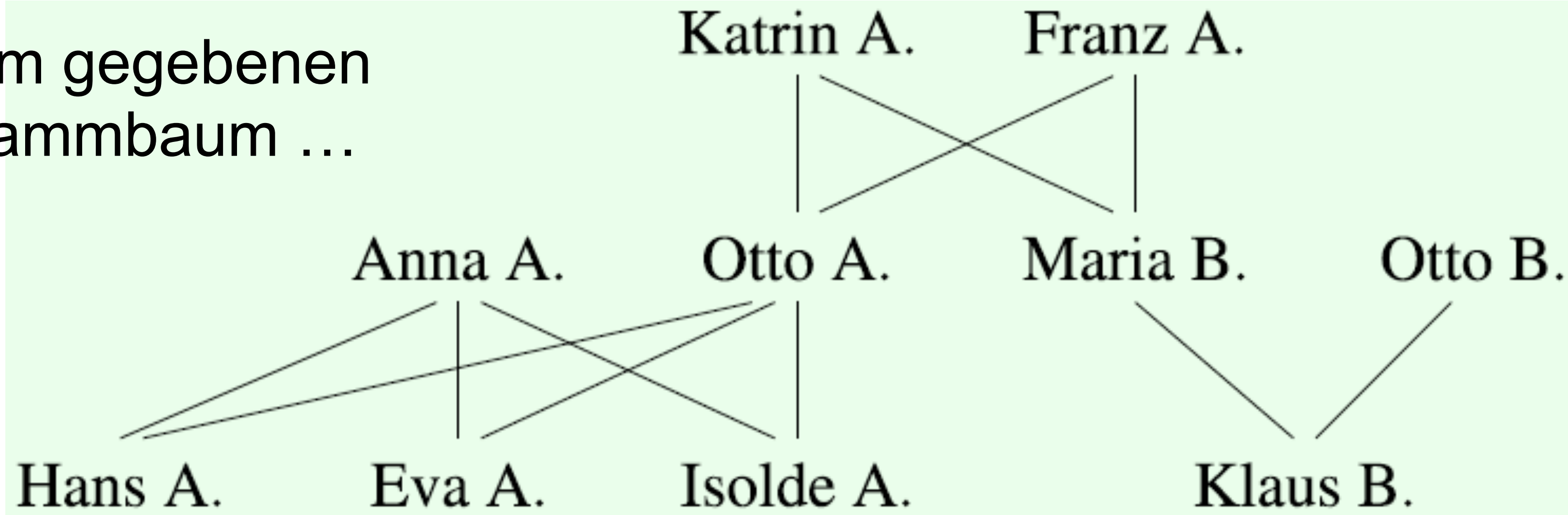
Bei Interpretation $\boldsymbol{I_1}$: $c \mapsto 1$, $d \mapsto 2$, $e \mapsto 3$, $plus \mapsto +$, $gr \mapsto >$
wird F abgebildet auf $>(1+3, 2)$ (oder in Infix-Notation: $1+3>2$),
also nach Auswertung im betroffenen Universum $4>2$

F ist also wahr unter $\boldsymbol{I_1}$.

Gilt in $\boldsymbol{I_2}$ dass $\mathrm{gr} \mapsto \#$ mit
$\#=\{(4,3),(5,9),(1,3),(4711,16)\}$ (und nicht $\#$ sonst),
ist folglich $\#(4,2)$ falsch, also F falsch unter $\boldsymbol{I_2}$!

Ertels Stammbaumbespiel 1/2

zum gegebenen Stammbaum …



… gehören im Universum die Relationen (z.B.)

Kind = { (Otto A., Katrin A., Franz A.), (Maria B., Katrin A., Franz A.),
(Hans A., Anna A., Otto A.), (Eva A., Anna A., Otto A.),
(Isolde A., Anna A., Otto A.), (Klaus B., Maria B., Otto B.) }

Weiblich = {Katrin A., Anna A., Maria B., Eva A., Isolde A.}

Ertels Stammbaumbeispiel 2/2

Wähle Prädikatensymbol

bei Ertel Belegung
= Interpretation

$\mathit{kind}(x, y, z)$ mit der Semantik:

$$\mathbb{B}(\mathit{kind}(x, y, z)) = w \quad \equiv \quad (\mathbb{B}(x), \mathbb{B}(y), \mathbb{B}(z)) \in \mathsf{Kind}.$$

Wähle Konstante (mit Interpretationen)

$$\mathbb{B}(\mathit{otto}) = \text{Otto A.},$$
$$\mathbb{B}(\mathit{eva}) = \text{Eva A.},$$
$$\mathbb{B}(\mathit{anna}) = \text{Anna A.}$$

Dann ist z.B. wahr: $kind(eva, anna, otto)$
Um $kind(eva, otto, anna)$ wahr zu machen, erweitere Kind-Relation oder verwende „Axiom"

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ \mathit{kind}(x, y, z) \Leftrightarrow \mathit{kind}(x, z, y)$$