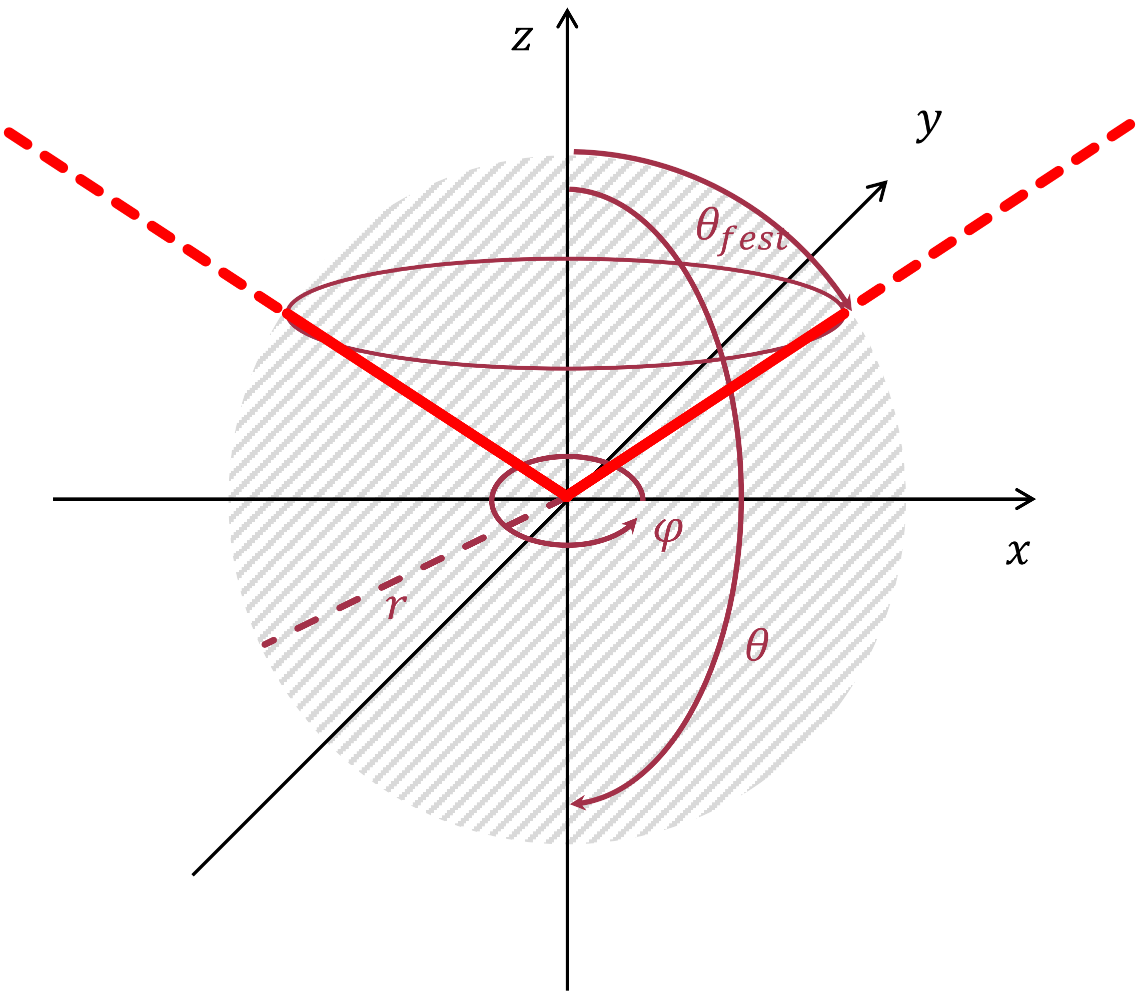
Computergrafik

Universität Osnabrück, Henning Wenke, 2012-05-30

Korrektur: Kugelkoordinaten II

- r und θ konstant:
  - Rand einer Kreisscheibe parallel zur $xy - Ebene$
- θ konstant, $r \leq R$:
  - Kegel, ausgehend vom Ursprung, bis zu diesem Ring
- θ konstant:
  - Unendlicher Kegel, ausgehend vom Ursprung



Kapitel III: Transformationen

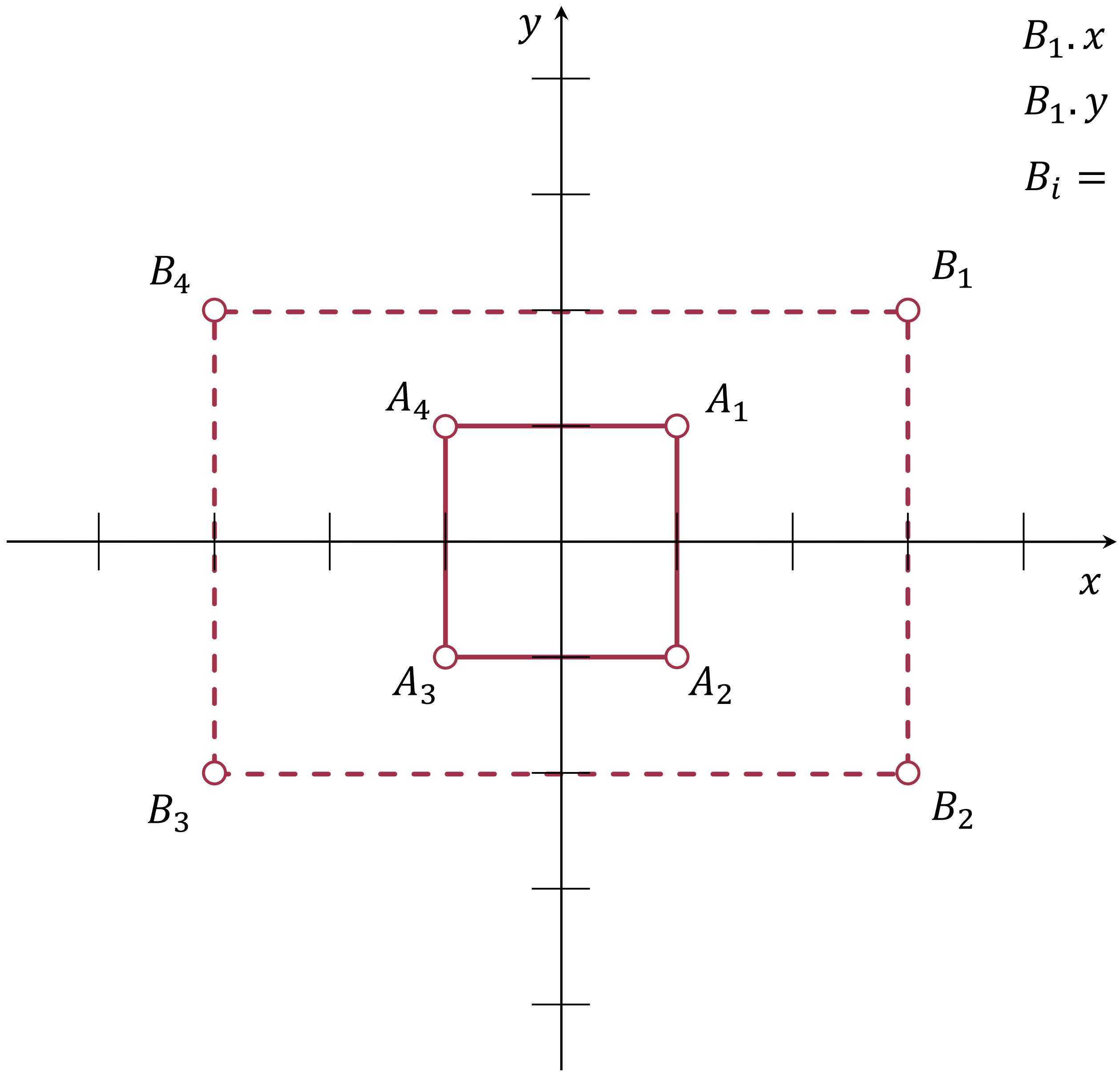
Allgemeines

- „Umformungen“ bestehender Größen wie Punkten, Vektoren oder Farben
  - Verformen, verschieben und animieren von Objekten
  - Manipulieren von Lichtquellen und Kameras
  - Projektion auf eine Ebene
- Lineare Transformation
  - $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$ Vektoraddition
  - $k\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(k\boldsymbol{x})$ Skalare Multiplikation
- Affine Transformation
  - Führt erst lineare Transformation, dann Translation aus
  - Erhält Parallelität von Linien
  - Winkel und Längen i.d.R. nicht

3.1

2D-Transformationen von Ortsvektoren

Scale I

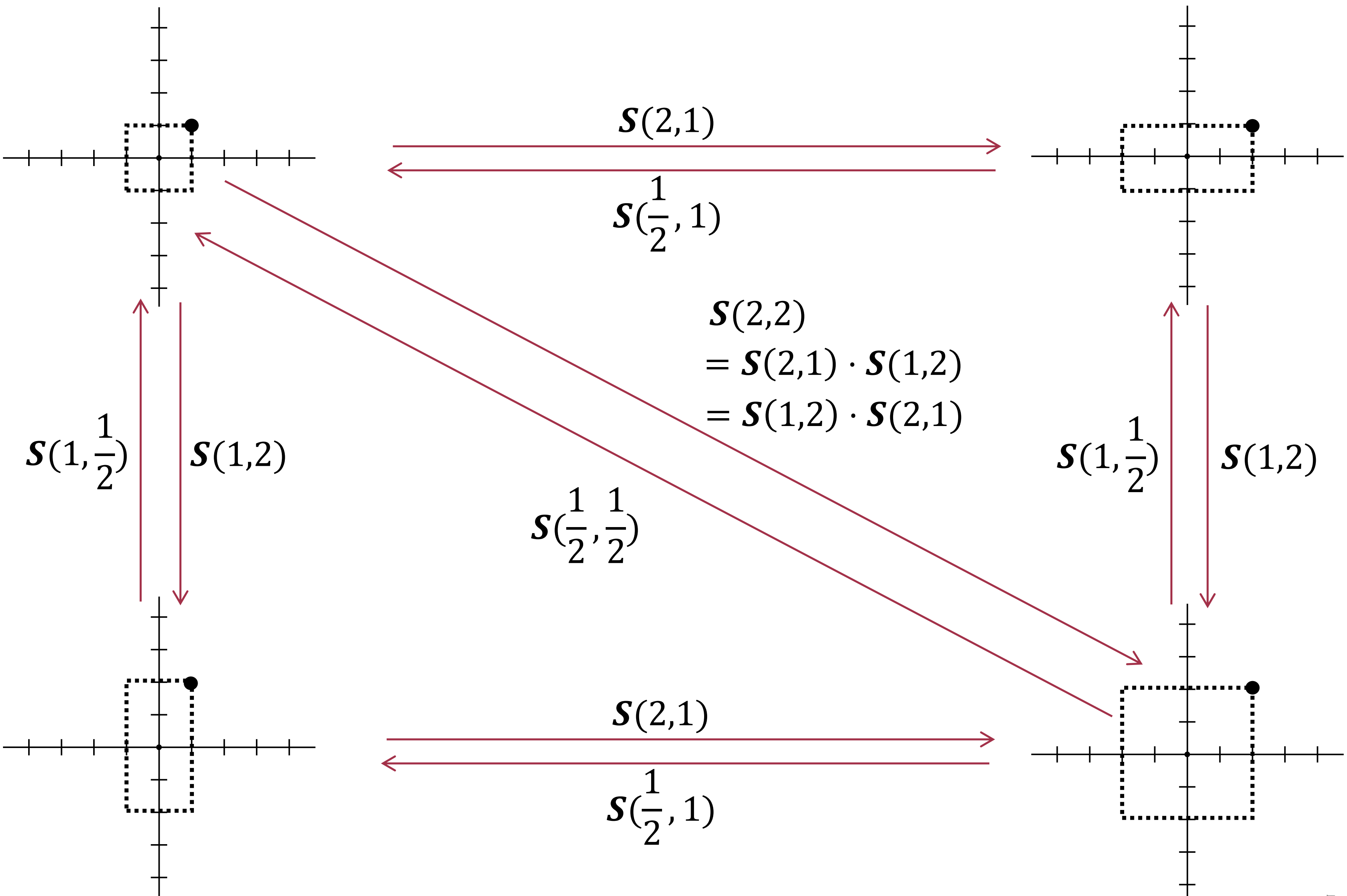


$B_1.x = 3 \cdot A_1.x$

$B_1.y = 2 \cdot A_1.y$

$B_i = \boldsymbol{S}(3,2) \cdot A_i$

Scale II

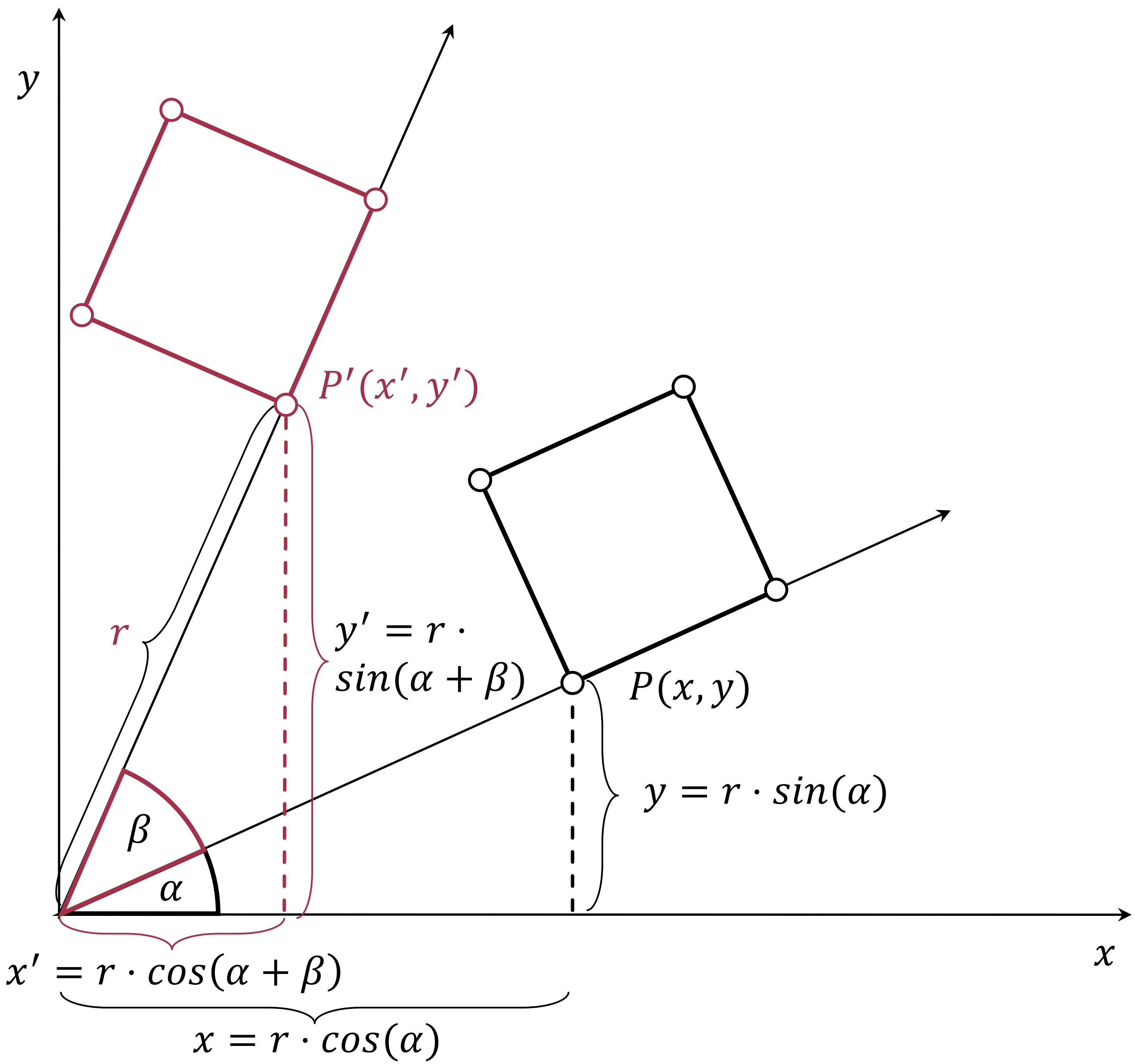


$S(2,1)$
$S(\frac{1}{2},1)$
$S(2,2)$
$= S(2,1)\cdot S(1,2)$
$= S(1,2)\cdot S(2,1)$
$S(1,\frac{1}{2})$
$S(1,2)$
$S(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
$S(1,\frac{1}{2})$
$S(1,2)$
$S(2,1)$
$S(\frac{1}{2},1)$

Scale III

- Skalierung von A mit Scalematrix $\boldsymbol{S}(s_x, s_y)$ ergibt B gemäß:
  - $B_x \coloneqq s_x \cdot A_x$
  - $B_y \coloneqq s_y \cdot A_y$
- $\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} \coloneqq \begin{pmatrix} s_x \cdot A_x \\ s_y \cdot A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{S}(s_x, s_y)^{-1} = \boldsymbol{S}(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y})$

2D Rotation I



2D Rotation II

$x = \boxed{r \cdot cos(\alpha)}$ $\qquad$ $y = r \cdot sin(\alpha)$

$$x' = r \cdot cos(\alpha + \beta)$$
$$x' = r \cdot (cos(\alpha) \cdot cos(\beta) - sin(\alpha) \cdot sin(\beta))$$
$$x' = \boxed{r \cdot cos(\alpha)} \cdot cos(\beta) - r \cdot sin(\alpha) \cdot sin(\beta)$$
$$x' = x \cdot cos(\beta) - y \cdot sin(\beta)$$

$$y' = r \cdot sin(\alpha + \beta)$$
$$y' = r \cdot (cos(\alpha) \cdot sin(\beta) + sin(\alpha) \cdot cos(\beta))$$
$$y' = \boxed{r \cdot cos(\alpha)} \cdot sin(\beta) + r \cdot sin(\alpha) \cdot cos(\beta)$$
$$y' = x \cdot sin(\beta) + y \cdot cos(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = cos(\alpha) \cdot sin(\beta) + sin(\alpha) \cdot cos(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha) \cdot cos(\beta) - sin(\alpha) \cdot sin(\beta)$$

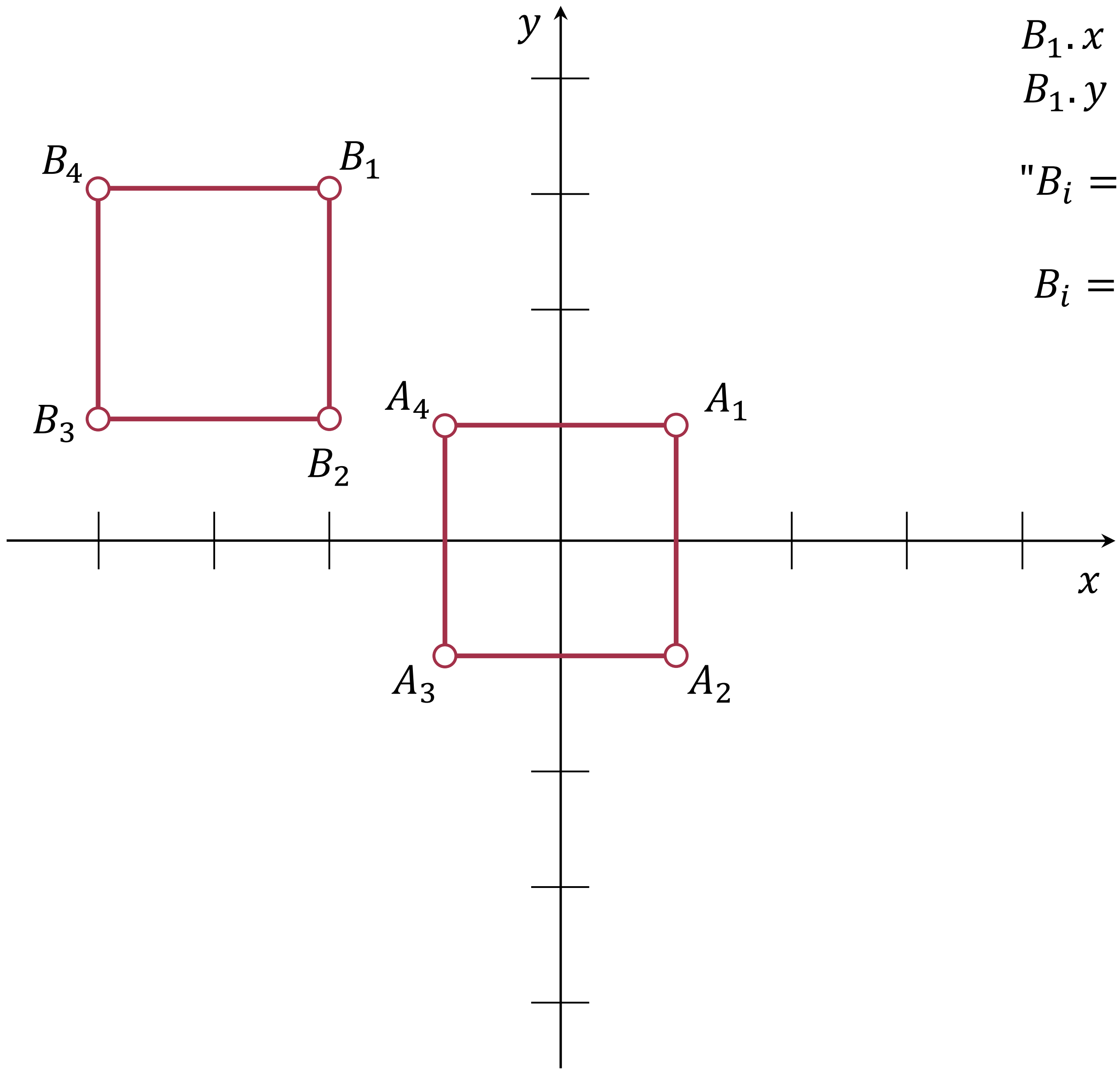
2D Rotation III

- Rotation von A mit Rotationsmatrix $\boldsymbol{R}(\beta)$ ergibt B gemäß:
  - $B_x \coloneqq A_x \cdot cos(\beta) - A_y \cdot sin(\beta)$
  - $B_y \coloneqq A_x \cdot sin(\beta) + A_y \cdot cos(\beta)$
- $\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} \coloneqq \begin{pmatrix} A_x \cdot cos(\beta) - A_y \cdot sin(\beta) \\ A_x \cdot sin(\beta) + A_y \cdot cos(\beta) \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} cos(\beta) & \text{-}sin(\beta) \\ sin(\beta) & cos(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

- $\boldsymbol{R}(\beta)^{-1} = \boldsymbol{R}(-\beta)$
- Orthogonal: $\boldsymbol{R}(\beta)^{-1} = \boldsymbol{R}^T(\beta)$
- $\boldsymbol{R}(\alpha) \cdot \boldsymbol{R}(\beta) = \boldsymbol{R}(\beta) \cdot \boldsymbol{R}(\alpha) = \boldsymbol{R}(\alpha + \beta)$

Translation I



$$B_1.x = A_1.x - 3$$
$$B_1.y = A_1.y + 2$$

$$"B_i = \boldsymbol{T}(-3,2) + A_i"$$

$$B_i = \boldsymbol{T}(-3,2) \cdot A_i$$

Translation II

- Translation von A mit Translationsmatrix $\boldsymbol{T}(t_x, t_y)$ soll B ergeben gemäß:
  - $B_x \coloneqq A_x + t_x$
  - $B_y \coloneqq A_y + t_y$
- $\boldsymbol{b} \coloneqq \boldsymbol{T}\left(t_x, t_y\right) \cdot \boldsymbol{a}$
- $\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} \coloneqq \begin{pmatrix} A_x + t_x \\ A_y + t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ? \\ ? & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$
- … nicht möglich!

Homogene Koordinaten I

- Gegeben: Ortsvektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ der 2D-Punkte A, B, mit:
  - $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$
- Diese haben dann 3D-Homogene Koordinaten der Form $\boldsymbol{r} = (x, y, w)^T$, unbestimmt bis auf einen Parameter $w, w \neq 0$:
  - $\boldsymbol{ah} = \begin{pmatrix} a_x \cdot a_w \\ a_y \cdot a_w \\ a_w \end{pmatrix}, \boldsymbol{bh} = \begin{pmatrix} b_x \cdot b_w \\ b_y \cdot b_w \\ b_w \end{pmatrix}$
- Beispiel: $(2,3,1)^T$ und $(8,12,4)^T$ entsprechen gleichem 2D-Punkt
- Die letzte Komponente der homogenen Koordinaten wird als „homogene Koordinate" oder „ w-Komponente" bezeichnet
- Eindeutige 2D-Koordinaten erhält man über:
  - $\boldsymbol{a} = \frac{1}{ah_w} \begin{pmatrix} ah_x \\ ah_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$

Homogene Koordinaten II

- Verrechnet werden dürfen nur Vektoren mit gleichem w, typischerweise 1
- Daher haben Richtungsvektoren immer die w-Koordinate 0:
  - $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_x \cdot w \\ a_y \cdot w \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \cdot w \\ b_y \cdot w \\ w \end{pmatrix} = w \cdot \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ 0 \end{pmatrix}$
- Homogene Koordinaten eines 3D-Orts- und Normalen Vektors:
  - $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$
  - $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$

Translation in homogenen Koordinaten

- Translation von A mit Translationsmatrix $\boldsymbol{T}(t_x, t_y)$ ergibt B gemäß:
  - $B_x \coloneqq A_x + t_x$
  - $B_y \coloneqq A_y + t_y$
  - $B_w \neq 0$
- $\boldsymbol{b} \coloneqq \boldsymbol{T}(t_x, t_y) \cdot \boldsymbol{a}$
- $\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ 1 \end{pmatrix} \coloneqq \begin{pmatrix} A_x + t_x \\ A_y + t_y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 1 \end{pmatrix}$
- Für die Inverse gilt: $\boldsymbol{T}^{-1}(t_x, t_y) = \boldsymbol{T}(-t_x, -t_y)$
- Affin

Hinweis: Auf dieser und den folgenden Folien wurde w eins gewählt. Dies hat keinerlei Einfluss auf die Matrizen.

3.2

3D Koordinatentransformationen in homogenen Koordinaten

Translation

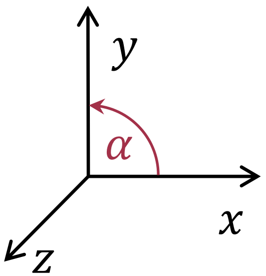
- Translation von P mit $\boldsymbol{T}$ ergibt P' gemäß:
  - $p_x{}' \coloneqq p_x + t_x$
  - $p_y{}' \coloneqq p_y + t_y$
  - $p_z{}' \coloneqq p_z + t_z$
  - $p_w{}' \neq 0$
- $\boldsymbol{T}(t_x, t_y, t_z) \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Für die Inverse gilt: $\boldsymbol{T}^{-1}(t_x, t_y, t_z) = \boldsymbol{T}(-t_x, -t_y, -t_z)$
- Affin

Scale

- Skalierung von P mit $\boldsymbol{S}$ ergibt P' gemäß:
  - $p'_x \coloneqq p_x \cdot s_x$
  - $p'_y \coloneqq p_y \cdot s_y$
  - $p'_z \coloneqq p_z \cdot s_z$
  - $p'_w \neq 0$
- $\boldsymbol{S}(s_x, s_y, s_z) \coloneqq \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{S}^{-1}(s_x, s_y, s_z) = \boldsymbol{S}({}^1/_{s_x}, {}^1/_{s_y}, {}^1/_{s_z})$
- Affin

Rotation (z-Axis)

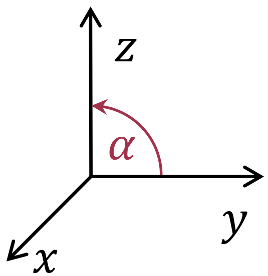
- Rotation um z-Achse von $\boldsymbol{P}$ um Winkel α ergibt $\boldsymbol{P}'$
  - $p'_x \coloneqq p_x \cos(\alpha) - p_y \sin(\alpha)$
  - $p'_y \coloneqq p_x \sin(\alpha) + p_y \cos(\alpha)$
  - $p'_z \coloneqq p_z$
  - $p'_w \neq 0$



- $\boldsymbol{R_z}(\alpha) \coloneqq \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Affin & orthogonal
- $\boldsymbol{R_z}^{-1}(\alpha) = \boldsymbol{R_z}(-\alpha)$

Rotation (x-Axis)

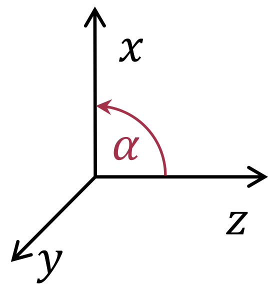
- Rotation um x-Achse von $\boldsymbol{P}$ um Winkel α ergibt $\boldsymbol{P}'$
  - $p_x' \coloneqq p_x$
  - $p_y' \coloneqq p_y \cos(\alpha) - p_z \sin(\alpha)$
  - $p_z' \coloneqq p_y \sin(\alpha) + p_z \cos(\alpha)$
  - $p_w' \neq 0$



- $\boldsymbol{R_x}(\alpha) \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Affin & orthogonal
- $\boldsymbol{R_x^{-1}}(\alpha) = \boldsymbol{R_x}(-\alpha)$

Rotation (y-Axis)

- Rotation um y-Achse von $\boldsymbol{P}$ um Winkel α ergibt $\boldsymbol{P}'$
  - $p'_x := p_z \sin(\alpha) + p_x \cos(\alpha)$
  - $p'_y := p_y$
  - $p'_z := p_z \cos(\alpha) - p_x \sin(\alpha)$
  - $p'_w \neq 0$



- $$\boldsymbol{R_y}(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Affin & orthogonal
- $\boldsymbol{R_y}^{-1}(\alpha) = \boldsymbol{R_y}(-\alpha)$

3.3

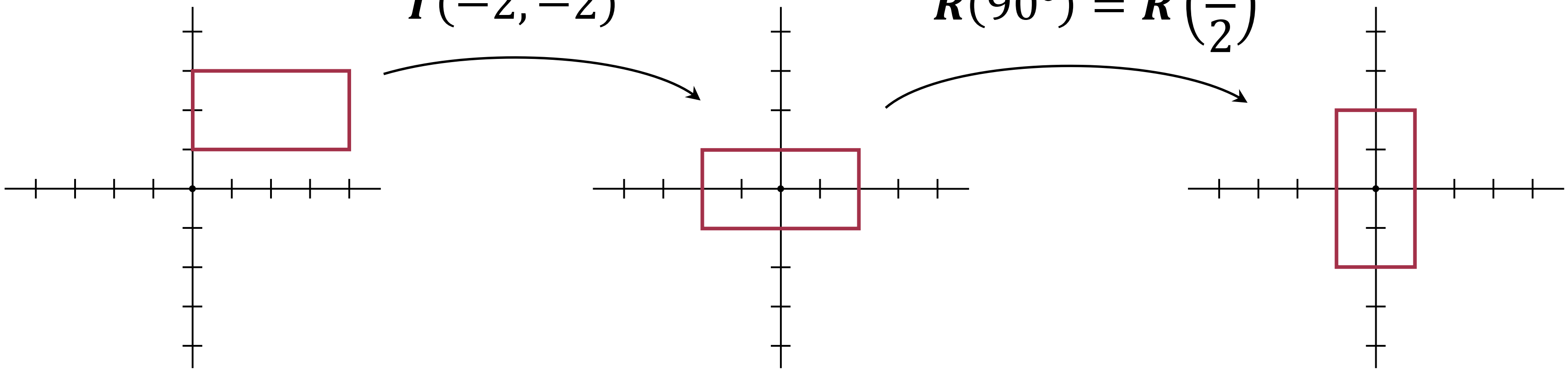
Zusammengesetzte Transformationen

Zusammengesetzte Transformationen

- Bis hier: Elementartransformationen
- Komplexere Transformationen können als Kombinationen davon beschrieben werden
- Reihenfolge i.d.R. nicht beliebig
- Assoziativ
- Inverse sind die in umgekehrter Reihenfolge aneinander multiplizierten inversen Elementarmatrizen

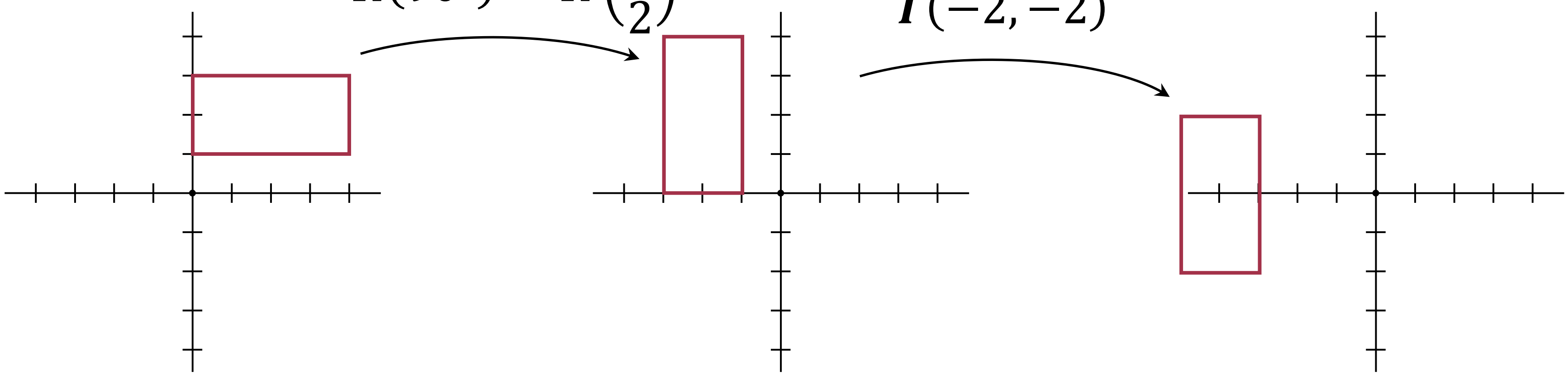
Transformationen i.A. nicht kommutativ

$\boldsymbol{T}(-2,-2)$ $\quad$ $\boldsymbol{R}(90°) = \boldsymbol{R}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

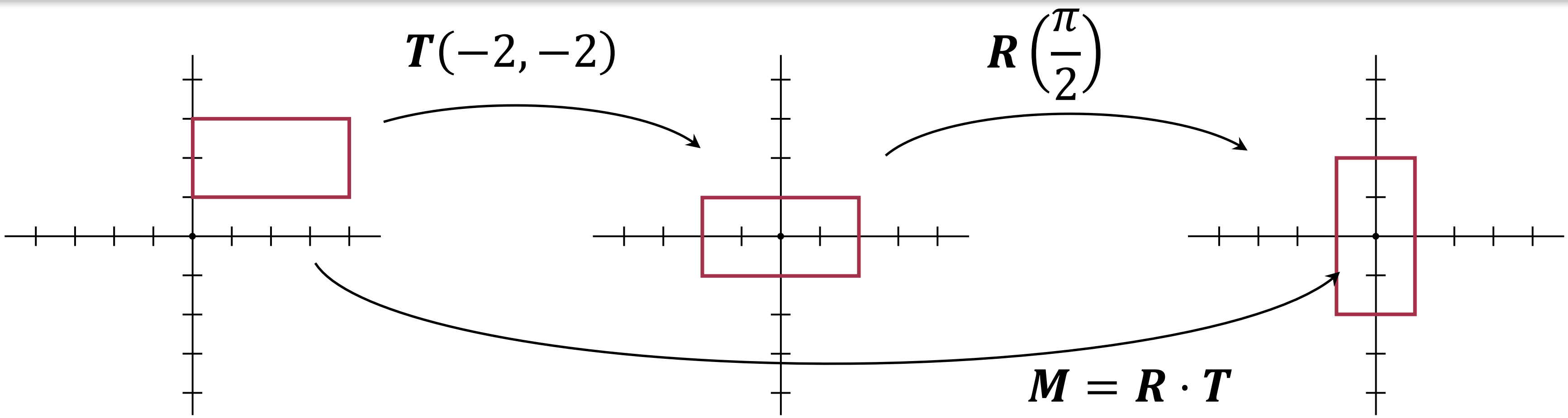


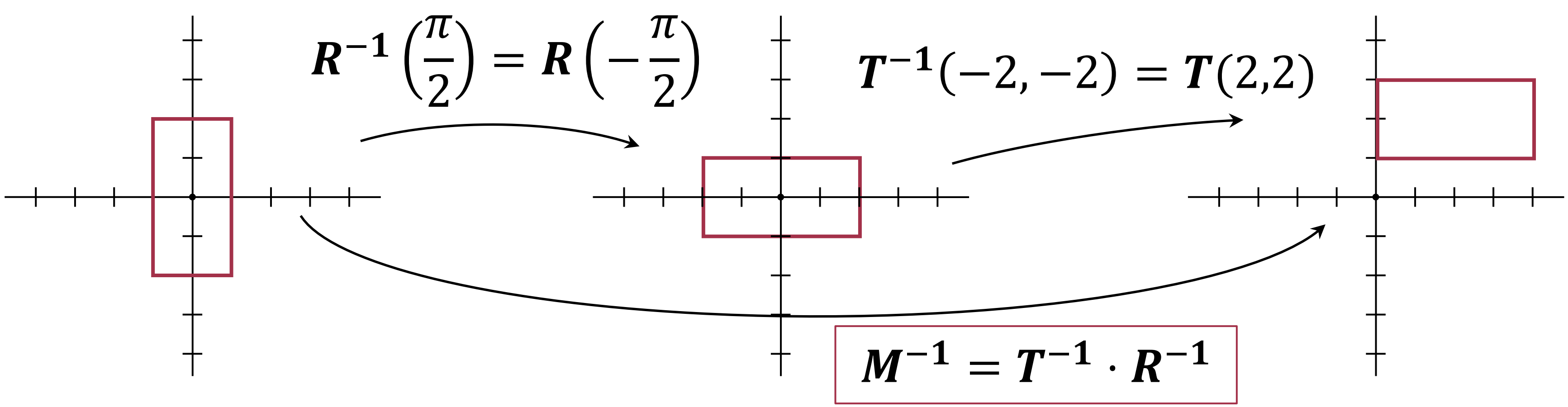
$$\boxed{\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{R} \neq \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{T}}$$

$\boldsymbol{R}(90°) = \boldsymbol{R}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad$ $\boldsymbol{T}(-2,-2)$

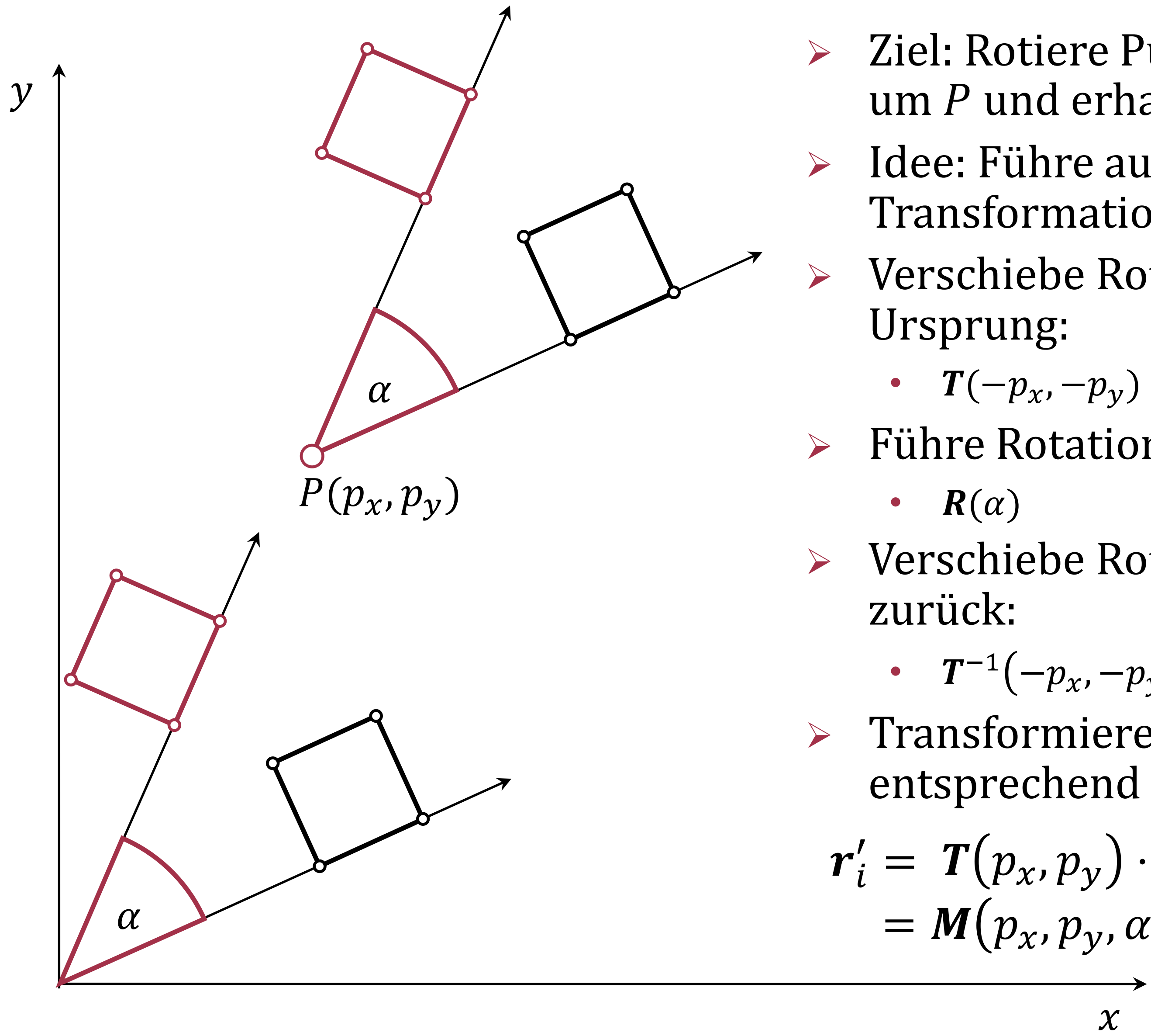


Inverse


$\boldsymbol{T}(-2,-2)$
$\boldsymbol{R}\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{T}$


$\boldsymbol{R}^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{R}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$
$\boldsymbol{T}^{-1}(-2,-2) = \boldsymbol{T}(2,2)$
$\boxed{\boldsymbol{M}^{-1} = \boldsymbol{T}^{-1} \cdot \boldsymbol{R}^{-1}}$

2D Rotation um freies Rotationszentrum



- Ziel: Rotiere Punkte $\boldsymbol{r}_i$ um Winkel α um P und erhalte $\boldsymbol{r}_i'$
- Idee: Führe auf elementare Transformationen zurück
- Verschiebe Rotationszentrum in Ursprung:
  - $\boldsymbol{T}(-p_x, -p_y)$
- Führe Rotation um Ursprung aus:
  - $\boldsymbol{R}(\alpha)$
- Verschiebe Rotationszentrum zurück:
  - $\boldsymbol{T}^{-1}(-p_x, -p_y) = \boldsymbol{T}(p_x, p_y)$
- Transformiere Koordinaten $\boldsymbol{r}_i$ entsprechend gemäß:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_i' &= \boldsymbol{T}(p_x, p_y) \cdot \boldsymbol{R}(\alpha) \cdot \boldsymbol{T}(-p_x, -p_y) \cdot \boldsymbol{r}_i \\ &= \boldsymbol{M}(p_x, p_y, \alpha) \cdot \boldsymbol{r}_i\end{aligned}$$

Versionshistorie

- 2012-04-30
  - Folie 10: Vorzeichenfehler des Additionstheorems korrigiert
  - Folie 16: Hinweis auf Wahl von $w = 1$ ohne Einschränkung der Allgemeinheit eingefügt