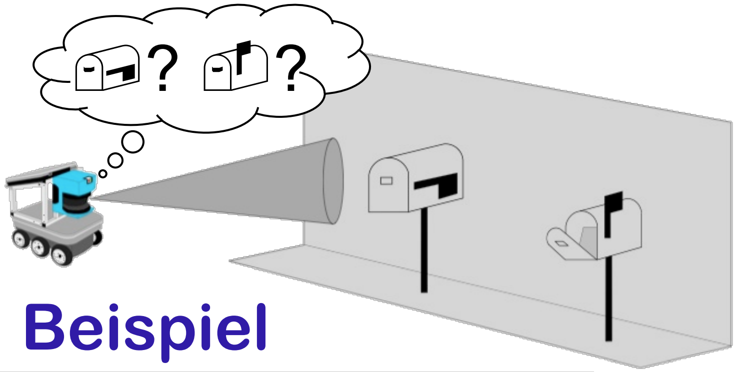
Probabilistische Robotik: Briefkastenbeispiel



Beispiel

Ist Post da?

oder:

$$\mathbf{P}(S|E) = \frac{\mathbf{P}(E|S)\mathbf{P}(S)}{\mathbf{P}(E)}$$

- Für Briefkasten betrachte ZV S (Status) mit $\mathcal{D}(S)=\{l(\text{eer}), v(\text{oll})\}$
- Evidenzen E mit $\mathcal{D}(E)=\{e_l, e_v\}$
- Gegeben (lange Erfahrung!) seien:

$$\mathbf{P}(S) = \langle P(l), P(v)\rangle = \langle 0.5, 0.5\rangle \text{ ;}$$

$$\mathbf{P}(E|S) = \langle P(e_l|l), P(e_l|v), P(e_v|v), P(e_v|l)\rangle = \langle 0.7, 0.2, 0.8, 0.3\rangle$$

z.B.: $$P(l|e_l) = \frac{P(e_l|l)P(l)}{P(e_l)} = \frac{0{,}7\cdot 0{,}5}{P(e_l)}$$

Kennen wir $P(e_l)$? Ja: $$P(e_l) = P(e_l|l)P(l) + P(e_l|v)P(v) = 0{,}35 + 0{,}1$$

Marginalisierung

$$\hookrightarrow \; P(l|e_l) = 0{,}7778$$

Löst „schärfer Hingucken“ Unsicherheit auf?

Extrembeispiel: Benutze dieselbe Information mehrmals!

↳ Intuition sagt: das kann nichts bringen!
W‘theorie sagt: Stimmt! $P(a|b,b) = P(a|b)P(b|b) = P(a|b)$

Messungen müssen (statistisch) unabhängig sein!

$P(a \cap b) = P(a) \cdot P(b)$ also $P(a|b)=\mathrm{P}(a)$ und $P(b|a)=\mathrm{P}(b)$

- Messungen „desselben“ an derselben Stelle sind abhängig
- Modelliere alle Messungen 1 Zustands als 1 Messung
- Auch konsekutive Messungen auf Robotern (z.B. bei Lokalisierung) sind statistisch meist nicht unabhängig
- Praktisch kümmert man sich meist nicht darum!

Bayes-Filter allgemein: Modell (1/2)

Gesucht: Evidenzbasierte Zustandsschätzung **„rekursiver Zustandsschätzer“**

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{X}_{t+1} \middle| \mathbf{e}_{1:t+1}\right) = f\left(\mathbf{e}_{1:t+1}, \mathbf{P}\left(\mathbf{X}_t \middle| \mathbf{e}_{1:t}\right)\right)$$

… für irgendeine Fkt. f und **Evidenzen** (Aktion oder Messung) $\mathbf{e}$

Ansatz

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\mathbf{X}_{t+1} \middle| \mathbf{e}_{1:t+1}\right) &= \mathbf{P}\left(\mathbf{X}_{t+1} \middle| \mathbf{e}_{1:t}, \mathbf{e}_{t+1}\right) \\
&= \eta \cdot \mathbf{P}\left(\mathbf{e}_{t+1} \middle| \mathbf{X}_{t+1}, \mathbf{e}_{1:t}\right) \cdot \mathbf{P}\left(\mathbf{X}_{t+1} \middle| \mathbf{e}_{1:t}\right) && \text{[Bayessche Regel]} \\
&= \eta \cdot \mathbf{P}\left(\mathbf{e}_{t+1} \middle| \mathbf{X}_{t+1}\right) \cdot \mathbf{P}\left(\mathbf{X}_{t+1} \middle| \mathbf{e}_{1:t}\right) && \text{[Markow-Annahme]}
\end{aligned}$$

Filterung

Prädiktion
(s. nächste Folie)

Bayes-Filter allgemein: Modell (2/2)

Vereinfachung der Prädiktion

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t}) = \int_{\mathbf{x}_t} \left[\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{x}_t, \mathbf{e}_{1:t}) \cdot P(\mathbf{x}_t|\mathbf{e}_{1:t}) \right]$$

aktuelle W'keit f. Zust.

$$= \int_{\mathbf{x}_t} \left[\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{x}_t) \cdot P(\mathbf{x}_t|\mathbf{e}_{1:t}) \right]$$

[Markow-Annahme]

Zusammengefasst

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t+1}) = \eta \cdot \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1}) \cdot \int_{\mathbf{x}_t} \left[\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{x}_t) \cdot P(\mathbf{x}_t|\mathbf{e}_{1:t}) \right]$$

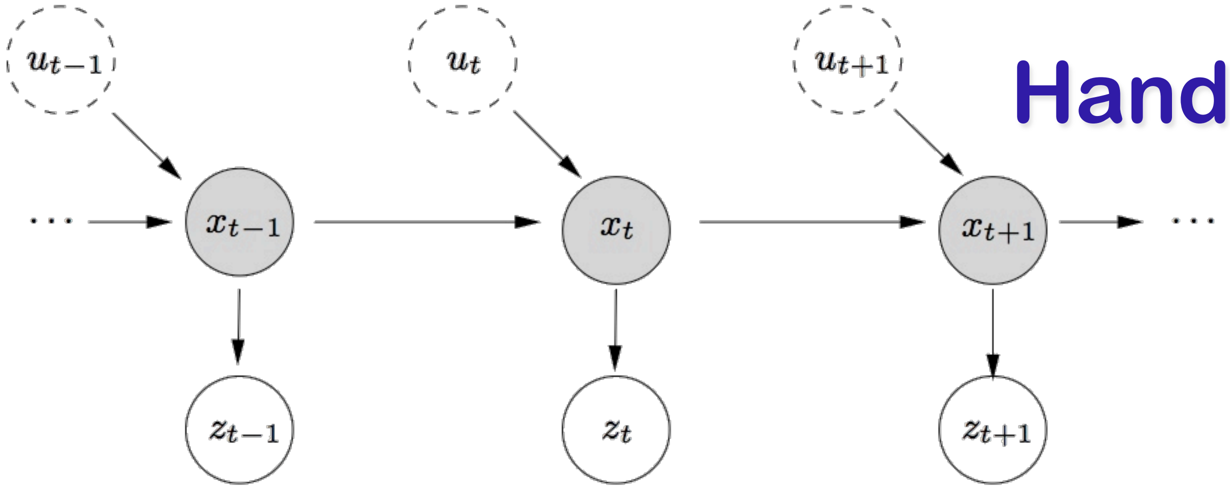
- So **nicht praktikabel** (kontinuierl. Verteilungen, Integration)
- Unterschiedliche Vereinfachungen/Approximationen möglich

Spezieller Bayes-Filter: Idee

Russell/Norvig, Kap.15.2

Voraussetzung: Roboterhandeln/Umgebungsdynamik wird beschrieben als Folge von **abwechselnd** Aktion/Ereignis und Zustandsmessung. Gegeben Start-Zustandsschätzung,

1. **Prädiktion**: Sage resultierenden Zustand für Aktion/Ereignis voraus (**a-priori-Zustandsschätzung**)
   (**z.B.** berechne erwartete Zielpose für Raddrehungen (Odometrie));
   führe die Aktion aus (bzw. unabhängige Ereignis geschieht)
2. **Filterung**: Miss resultierenden Zustand; ggf. mach mehrere unabhängige Messungen (die sich widersprechen dürfen)
   z.B. miss Pose durch Odometrie und durch Gyroskop;
   berechne aktuelle Zustandsverteilung, die maximal gut zu allen Messungen und der Vorhersage passt (**a-posteriori-Zustandsschätzung**); weiter bei 1.



Handeln und Messen

Zustand x: gleichzeitige Ausprägung der ZVn

- Erziele Unabhängigkeit durch Abwechseln von Messen-Handeln-Messen-Handeln-…
- **Konvention**: Sortiere Evidenzen in Aktionen (u_i), Messungen (z_i)
- **Konvention**: W'keit des Zustands x heißt $Bel(x)$ (*belief*)

$$Bel(x_t) := P(x_t | u_1, z_1, \ldots, u_t, z_t)$$

- **Vereinfachung**: Diskrete Zustände ➥ ersetze $\int$ durch $\sum$

Entsprechend dem Bayes-Filter-Modell (Folie 162) gilt:

$$Bel(x_t) = \eta \cdot P(z_t | x_t) \sum_{x_{t-1}} P(x_t | x_{t-1}, u_t) \cdot Bel(x_{t-1})$$

(statisches) **Sensormodell** (st.) **Aktionsmodell**

Briefkastenbeispiel, die Zweite

- Aktion *leeren* leert den Briefkasten (meistens):

  $\mathbf{P}(S \mid leeren, S^{-}) =$

  $= \langle P(l \mid leeren, v), P(v \mid leeren, v), P(l \mid leeren, l), P(v \mid leeren, l) \rangle$

  $:= \langle 0.8, 0.2, 1, 0 \rangle$

- Gelte für Anfangszustand x_0:

  $Bel(x_0{:}S{=}v) = P(v) := 0.75$

- Führe Aktion *leeren* zum Zustand x_1. Dann gilt a priori:

  $Bel(x_1{:}S{=}l) \quad = \sum_S P(l \mid leeren, S) \cdot Bel(x_0{:}S)$

  $= P(l \mid leeren, v) \cdot P(v) + P(l \mid leeren, l) \cdot P(l)$

  $= 0.8 \cdot 0.75 + 1 \cdot 0.25 = 0.85$

  $Bel(x_1{:}S{=}v) = 1 - Bel(x_1{:}S{=}l)$ (Nachprüfen zur Übung!)

Hier Belief noch ohne Messung ➥ a-posteriori-Schätzung analog dem 1. Beispiel-Teil mit Normalisierung!

Algorithmus Bayes-Filter

Buch, Algorithmus 4.1

Eingabe : Aktueller Belief $Bel(x_t)$, sowie ein Paar (u, z).

Ausgabe: Aktualisierter Belief $Bel(x_{t+1})$

for alle Zustände x_t **do** *// Update nach Aktion*

$\quad \overline{Bel}(x_{t+1}) = \sum_{x_t} P(x_{t+1} \mid u, x_t) Bel(x_t)$

end for

$\eta = 0$

for alle Zustände x_{t+1} **do** *// Update nach Messung*

$\quad Bel(x_{t+1}) = P(z \mid x_{t+1}) \overline{Bel}(x_{t+1})$

$\quad \eta = \eta + Bel(x_{t+1})$

end for

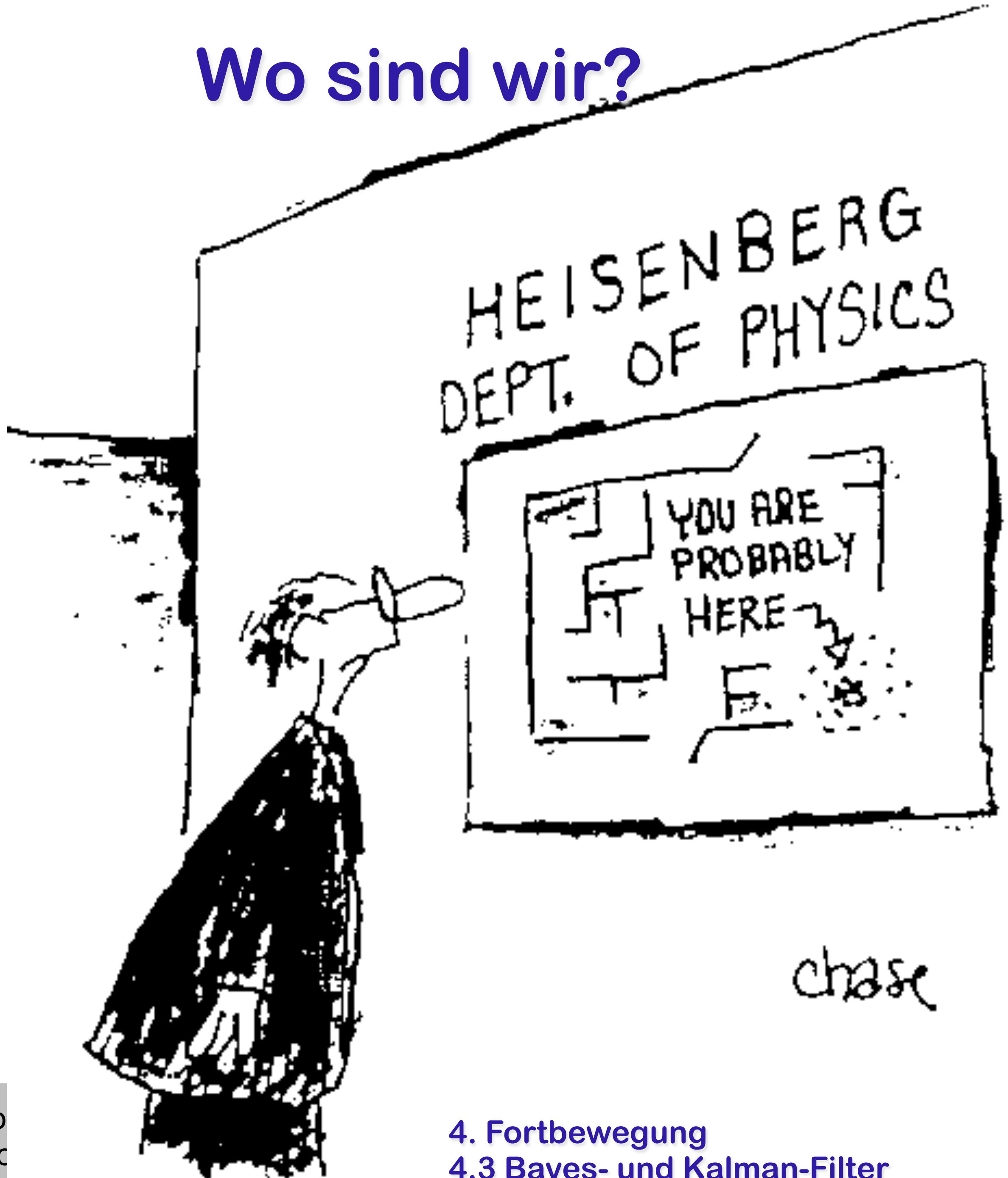
for alle Zustände x_{t+1} **do** *// Normierung*

$\quad Bel(x_{t+1}) = \eta^{-1} Bel(x_{t+1})$

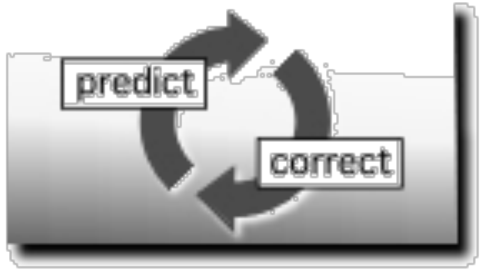
end for

return $Bel(x_{t+1})$

Wo sind wir?



Kalman-Filter: Die Idee



www.cs.unc.edu/~welch/kalman/
Russell/Norvig, Kap.15.4
Thrun/Burgard/Fox Kap.3.2

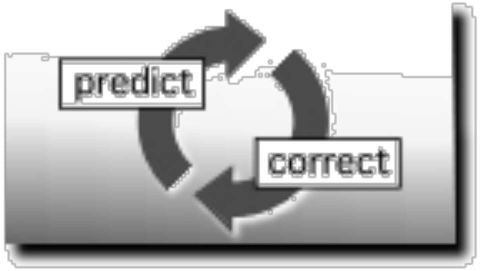
Ausgangspunkte

- n-dimensionale Zustandsschätzung
  z.B. Schätzung der Roboterpose in x, z, θ
- Lineares Fehlermodell für Aktionen
  z.B. Schätzung des Posefehlers bei Bewegung;

Ziel

- Gib zu jedem Zeitpunkt aktuelle Zustandsschätzung
  z.B. Poseschätzung in nächstem Zustand (vor/nach Aktion)
- Integriere Sensormessungen in Zustandsschätzung
  z.B. Aktualisiere Poseschätzung nach Aktion+Gyro-Wert
- **Aktualisiere Fehlermodell optimal**
  (bestmögliche Übereinstimmung mit bisherigen Aktionen+Messungen)

Kalman-Filter: Das Vorgehen

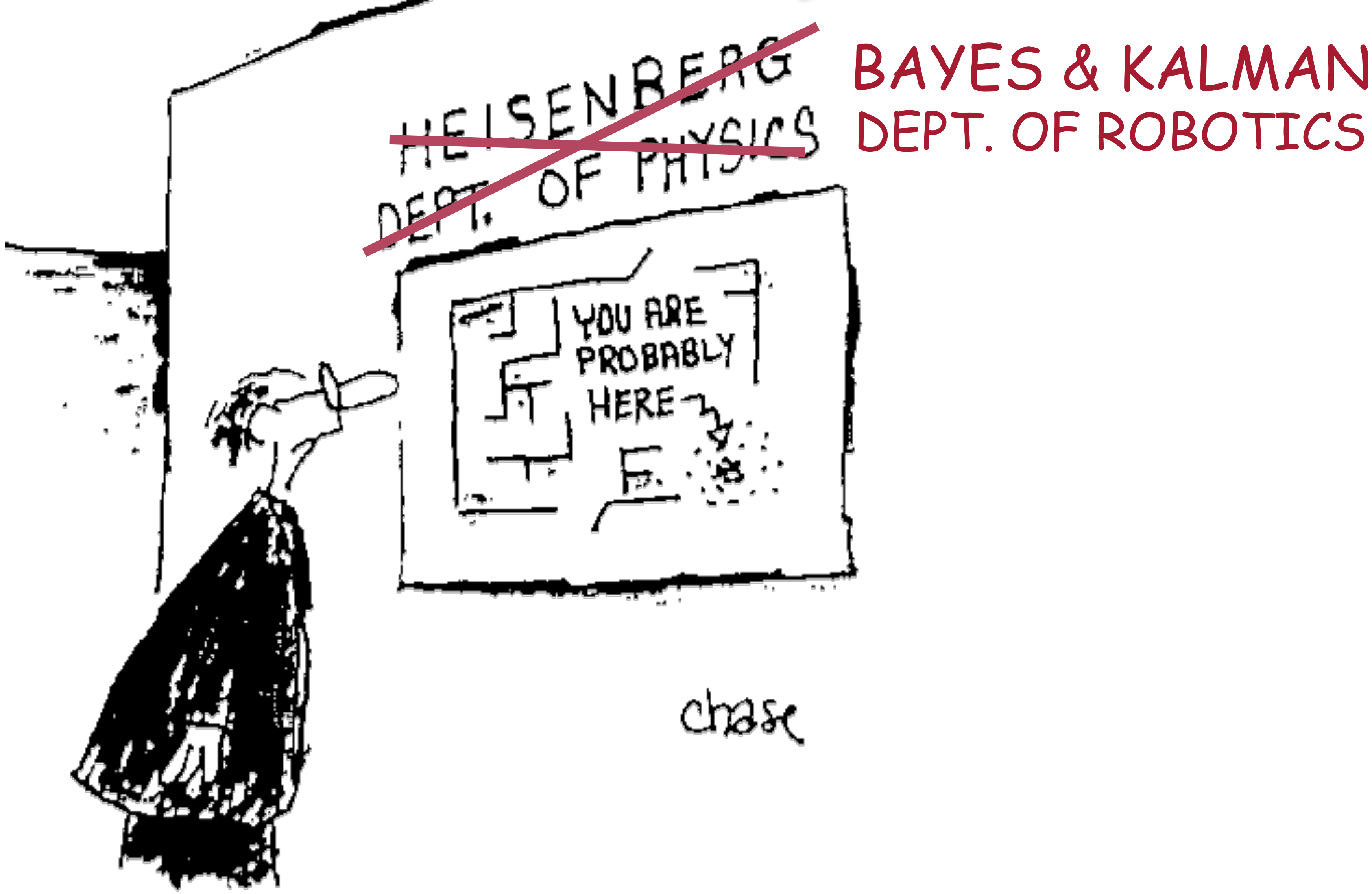


1. **Prädiktion**: Sage resultierenden Zustand für Aktion/Ereignisvoraus; <u>schätze den Fehler nach aktuellem Fehlermodell ab;</u> führe die Aktion aus (bzw. unabhängiges Ereignis geschieht)
2. **Filterung**: Miss resultierenden Zustand; ggf. mach mehrere unabhängige Messungen (die sich widersprechen dürfen); nimm als aktuellen Zustand den an, der maximal gut zu allen Messungen und dem letzten Fehlermodell passt; <u>aktualisiere Fehlermodell</u>(!); weiter bei 1.

Beschränkung 1: Fehlermodell ist Normalverteilung!
Beschränkung 2: Zustandsverteilung ist Normalverteilung!
Ein Kalman-Filter ist ein spezieller Bayes-Filter

Ausführlich: Vorlesung von Kai Lingemann, 8.11.2012!

Wo sind wir jetzt?



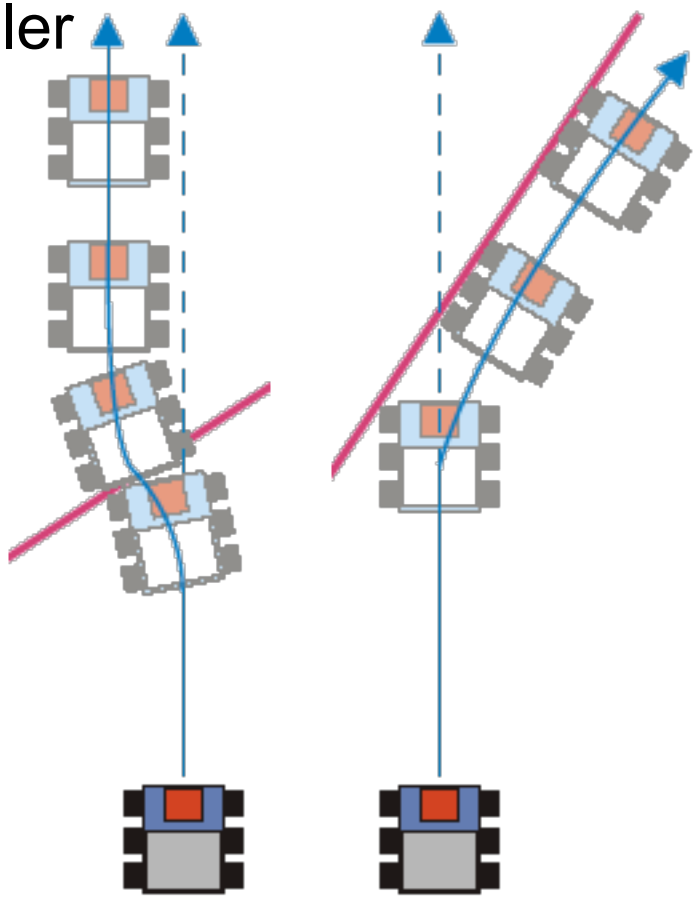
4.4 Fusion von Odometriedaten

- Praktisch alle mobilen Roboter nutzen Odometriedaten („fast geschenkt!")
- Normalerweise fusioniert mit anderen Messwerten
- Fusioniere mit solchen Messwerten, die unabhängig sind und anderen systematischen Fehlern unterliegen
- Fusionierung kann auf unterschiedliche Arten gehen (Kalman-Filter ist eine davon)
- In diesem Abschnitt Fusion von Odometriedaten mit
  1. Gyro-Daten („Gyrodometrie")
  2. Laser-Winkelhistogrammen

Gyrodometrie

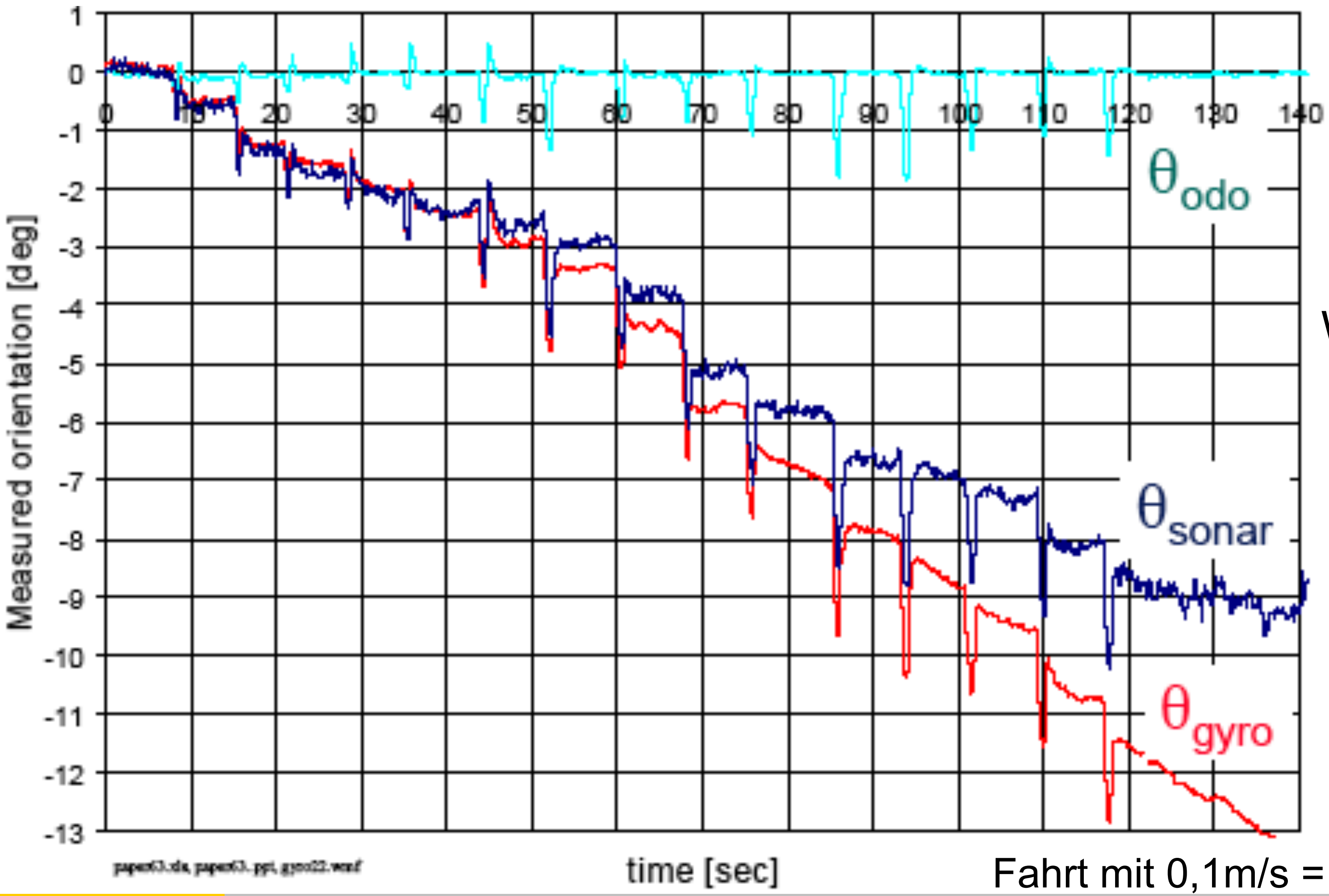
Quellen:
[Borenstein&Feng, ICRA-1996]
[Solda, Dipl.-Arbeit RWTH Aachen, 2003]

- Gyros unterliegen systematischer Drift
- Kurzfristig sind sie verlässlich, besonders auch bei Drehung
- Odometrie erzeugt kumulative Messfehler
- Die größten Messfehler entstehen an „kritischen" Stellen:
  - Drehungen
  - „Holpern" (z.B. Schwelle)
- **Idee**: **Determinstische** Fusion
  - Über kurze Zeit sollten beide dieselben Ergebnisse bringen (bis auf Rauschen)
  - Tritt kurzfristig Differenz auf, nimm verlässlicheren Wert



Messfehlerkumulation über Schwellen [Borenstein/ Feng 1996]

9cm-Kabel schräg zur Fahrt in gleichen Abständen gelegt



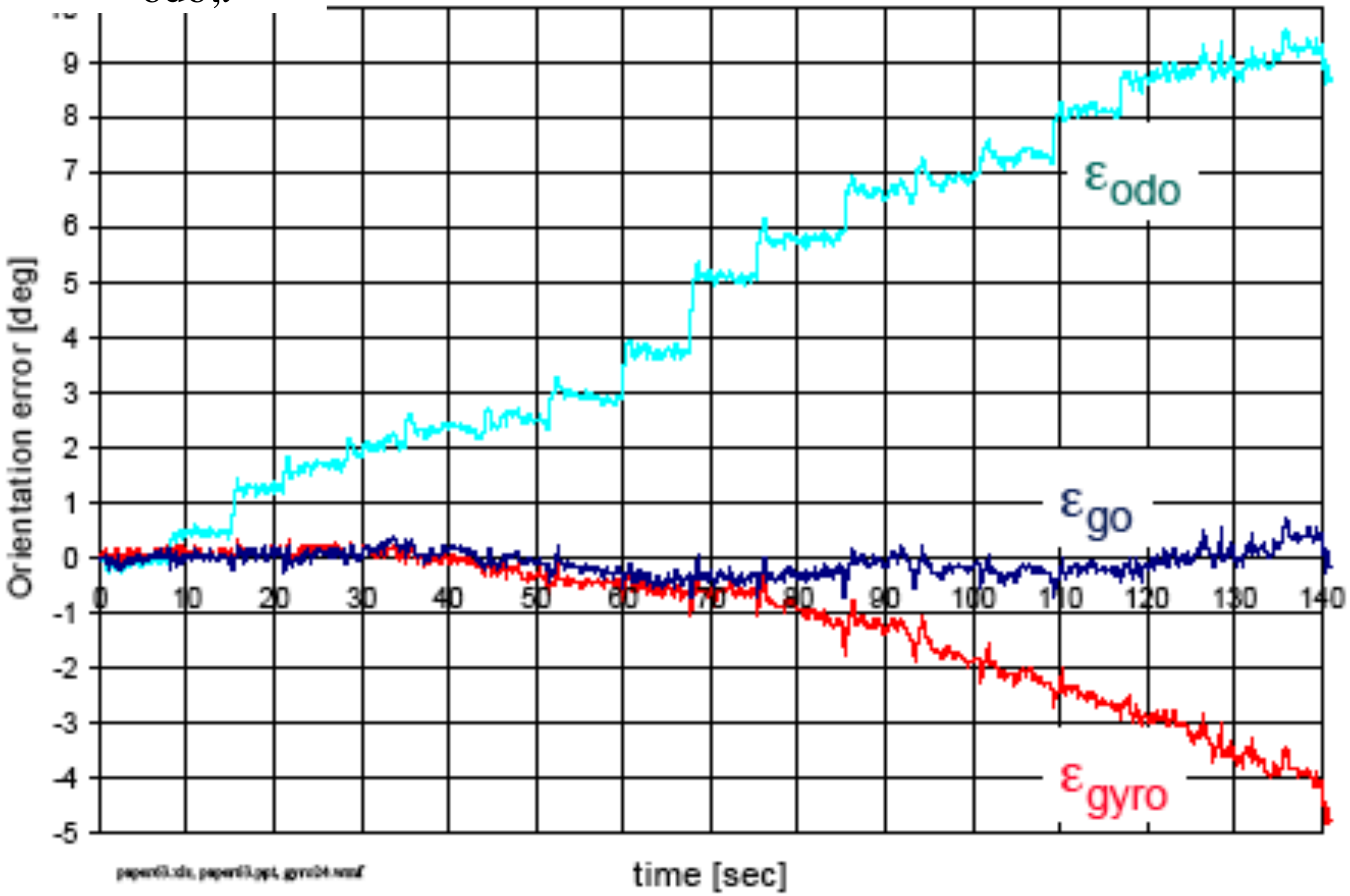
Sonar/ Wandabstand als *genuine truth* bzgl. Orientierung

Fahrt mit 0,1m/s = 14m

$$\text{if}\left(\left|\Delta\theta_{\text{gyro},i} - \Delta\theta_{\text{odo},i}\right| > \Delta\theta_{\min}\right)$$
$$\text{then} \quad \theta_i := \theta_{i-1} + t\Delta\theta_{\text{gyro},i}$$
$$\text{else} \quad \theta_i := \theta_{i-1} + t\Delta\theta_{\text{odo},i}$$

Deterministische Korrektur

[Borenstein/ Feng 1996]



Algorithmus: Deterministische Gyrodometrie

Buch, Algorithmus 4.4

Eingabe: Rotationsschätzungen $\Delta\theta_{\text{gyro}}$, $\Delta\theta_{\text{odo}}$. Feste Schwellwerte γ_{odo}, γ_{gyro} für Odometrie resp. Gyroskop, sowie eine Aktualisierungs-Gewichtung α.

Ausgabe: Fusionierte Orientierung θ_{t+1}, Update der Schätzung von $\varepsilon_{\text{gyro}}$.

1: **if** $|\Delta\theta_{\text{odo}}| > \gamma_{\text{odo}}$ **or** $|\Delta\theta_{\text{gyro}} - \varepsilon_{\text{gyro}}| > \gamma_{\text{gyro}}$ **then** *// Kurvenfahrt laut Odometrie o. Gyroskop*

2: $\quad \Delta\theta_{\text{gyro}} = \Delta\theta_{\text{gyro}} - \varepsilon_{\text{gyro}}$ *// Drift korrigieren*

3: $\quad \theta_{t+1} = \theta_t + \Delta\theta_{\text{gyro}}$ *// Winkel nach Gyro*

4: **else** *// Fahrt relativ geradeaus*

5: $\quad \varepsilon_{\text{gyro}} = \alpha \cdot \varepsilon_{\text{gyro}} + (1-\alpha) \cdot \left(\Delta\theta_{\text{gyro}} - \Delta\theta_{\text{odo}}\right)$ *// Drift aktualisieren*

6: $\quad \theta_{t+1} = \theta_t + \Delta\theta_{\text{odo}}$ *// Winkel nach Odometrie*

7: **end if**

8: **return** $\theta_{t+1}, \varepsilon_{\text{gyro}}$