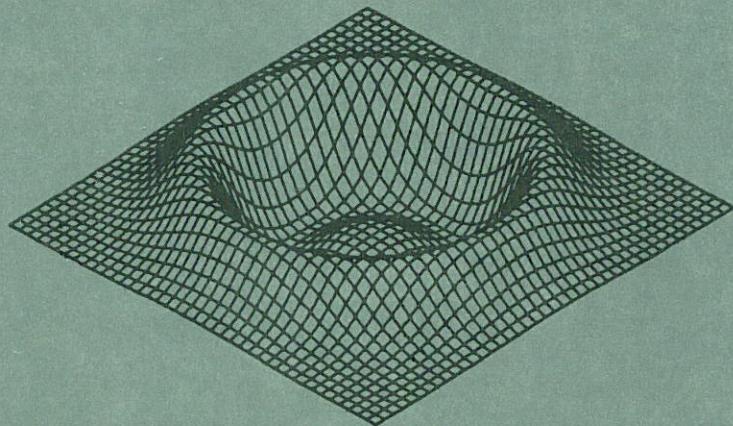


waterloopkundig laboratorium delft hydraulics laboratory

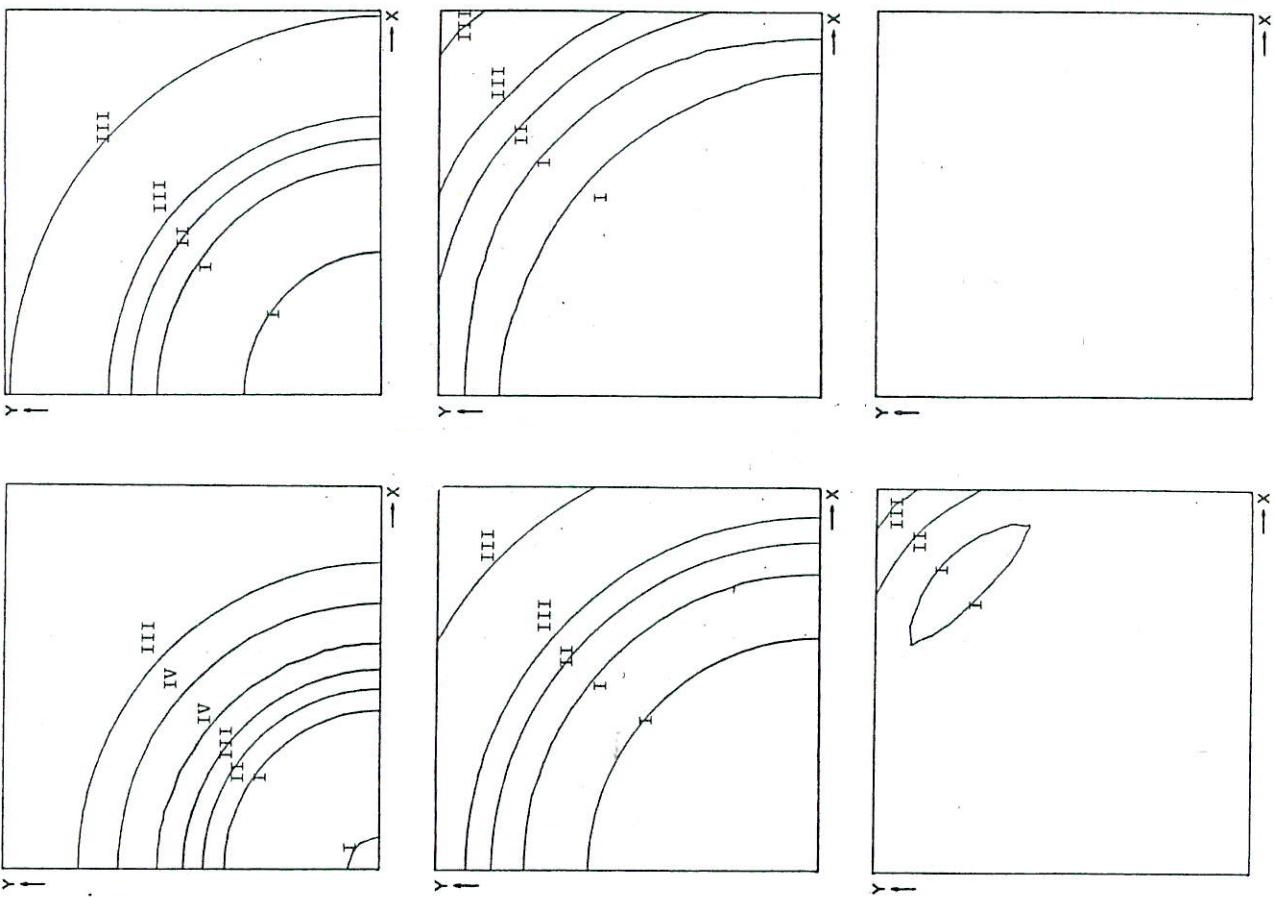
zwak-reflecterende randvoorwaarden
voor ondiepwatervergelijkingen in het
tweedimensionale model



afstudeerverslag

S 545-II

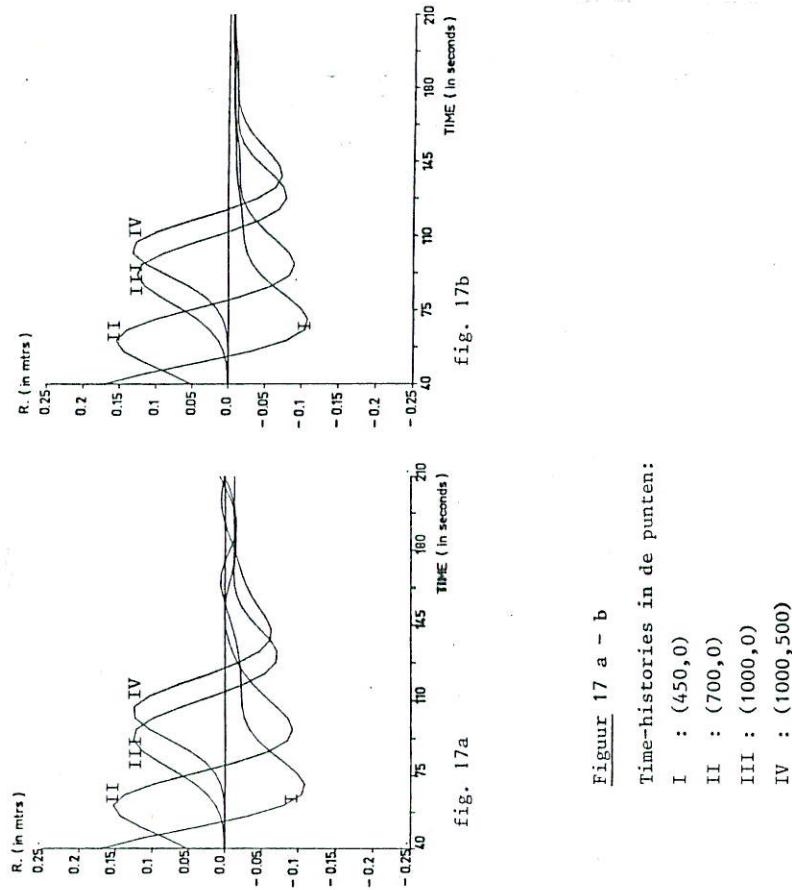
oktober 1983



Figuur 28 a - f

Hoogtelijnen voor het waterniveau ζ op tijdstippen $t = 55$ (20) 155.
ZRrvw'n van nulde orde, implementatie AIV.

I : -7.50 cm.	III : 7.50 cm.
II : 0.00	IV : 15.00



Figuur 17 a - b
Time-histories in de punten:

- I : (450,0)
- II : (700,0)
- III : (1000,0)
- IV : (1000,500)

In 17 a: ZWrvw'n van orde nul, implementatie AI.
In 17 b: ongestoorde oplossing

**zwak - reflecterende randvoorwaarden
voor ondiepwatervergelijkingen in het
tweedimensionale model**

Arie Slob

afstudeerverslag

S 545 - II

oktober 1983

INHOUD

	blz.
<u>1 Inleiding.....</u>	1
<u>2 De ondiepwatervergelijkingen.....</u>	5
2.1 De formulering van het stelsel.....	5
2.2 De symmetrische vorm.....	7
2.3 De karakteristieke vorm.....	8
<u>3 De randvoorwaarden in het twee-dimensionale geval.....</u>	11
3.1 Inleiding.....	11
3.2 Niet- en zwak-reflekterende randvoorwaarden voor een lineair stelsel.....	13
3.3 Zwak-reflekterende randvoorwaarden voor de ondiepwaterverge- lijkingen.....	19
3.3.1 Uitstroming.....	21
3.3.2 Instroming.....	22
<u>4 Numerieke behandeling.....</u>	27
4.1 Numerieke formulering van de ondiepwatervergelijkingen.....	27
4.1.1 Stabiliteit van het numerieke schema.....	34
4.2 Numerieke implementaties van de nulde en eerste orde zwak- reflekterende randvoorwaarden.....	35
4.2.1 Numerieke implementatie I.....	35
4.2.2 Numerieke implementatie II.....	39
<u>5 Numerieke experimenten.....</u>	44
5.1 Beschrijving van het testgeval.....	44
5.2 Resultaten van de nulde en eerste orde zwak-reflekterende randvoorwaarden.....	47
5.2.1 Resultaten numerieke implementatie I.....	47
5.2.2 Resultaten numerieke implementatie II.....	52
5.2.3 Invloed van Δt en Δx op de reflekties.....	53
5.3 Wijziging in de numerieke formulering van het stelsel.....	55

INHOUD (vervolg)

	blz.
<u>6 Konklusies.....</u>	57
<u>7 Literatuurverwijzingen.....</u>	59

Bijlage 1 Formulering niet-reflekterende randvoorwaarden

Bijlage 2 Transformaties, matrices en eigenwaarden

Bijlage 3 Afleiding van ZRrvw'n ingeval van uitstroming

Bijlage 4 Afleiding van ZRrvw'n ingeval van instroming

Bijlage 5 Diskretisatie van $\frac{\partial p_i}{\partial s}$

Appendix: Implementatie-onderzoek van de ZRrvw'n in het ééndimensionale model

1 Inleiding

De ondiepwatervergelijkingen beschrijven bijna horizontale bewegingen in ondiepe wateren. Het betreft hier golven met een periode in de grootte-orde van uren tot dagen en met een golflengte die aanzienlijk groter is dan de waterdiepte. Men zou hierbij kunnen denken aan verschijnselen als getijdegolven en stormvloeden in zeeën en hoogwatergolven in rivieren.

De vergelijkingen bestaan uit een drietal gekoppelde partiële differentiaalvergelijkingen voor snelheden en waterverhoging. De probleemstelling is deze snelheden en waterverhoging te berekenen als functie van de plaats en de tijd bij willekeurig gegeven krachten zoals windvelden, bodemwrijving en corioliskrachten en bij een willekeurige configuratie van kusten, bodemprofielen e.d.

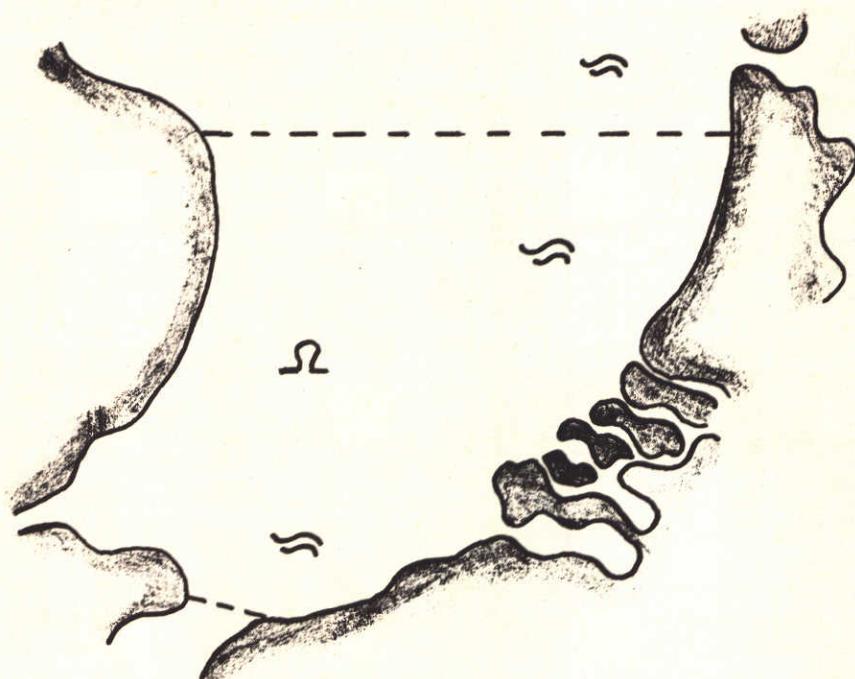
In de praktijk is men vaak geïnteresseerd in de oplossing voor een gebied dat een klein gedeelte is van een groter geheel. Men kan hierbij denken aan stromingen in een gedeelte van de Noordzee, bijvoorbeeld in de buurt van een olie- of gasboring; in dit verband heeft men slechts belangstelling voor de oplossing in dat specifieke gedeelte van de Noordzee, terwijl snelheden en waterníeaus in het gebied daarbuiten van ondergeschikt belang zijn.

Dit betekent dat men naast natuurlijke of gesloten randen, zoals een kust, denkbeeldige of open randen gaat invoeren teneinde het gebied waarvoor men een oplossing wil berekenen in te perken (zie figuur 1).

Het hiermee samenhangend voordeel is dat de simulatie binnen de technische en financiële mogelijkheden kan worden gehouden.

Het oplossen van het stelsel ondiepwatervergelijkingen vereist een aantal begin- en randvoorwaarden. De randvoorwaarden voor gesloten randen leveren geen probleem op. Uit de fysische eigenschappen van zo'n rand kunnen namelijk expliciet waarden voor bijvoorbeeld de snelheid worden afgeleid.

Voor open randen ligt dit minder eenvoudig. Snelheden en waterníeaus zijn niet a priori bekend; in het gunstige geval zijn een aantal meetresultaten vorhanden, bijvoorbeeld in een vijftal punten van de onderste open rand in figuur 1.



Figuur 1 Gedeelte van de Noordzee.

Ω : het te beschouwen gebied
---- : open randen van Ω .

Een belangrijke eigenschap van de open rand is dat golven die zo'n rand bereiken deze ongestoord kunnen passeren, ongeacht hun richting. De aan een open rand op te leggen randvoorwaarden moeten aan deze eigenschap voldoen; dergelijke randvoorwaarden noemen we niet-reflekterend. We zullen ons in dit verslag voornamelijk bezighouden met de problematiek rond deze niet-reflekterende randvoorwaarden.

Het voordeel van niet-reflekterende randvoorwaarden is niet slechts gelegen in het feit dat golven die de open randen passeren dit ongestoord kunnen doen, maar bovendien dat verstoringen in de beginvoorwaarden en die welke in het binnengebied worden opgewekt het gebied via de open rand kunnen verlaten.

Voert met de berekeningen uit over een lange tijdsperiode dan zullen effekten van de beginwaarden via de open randen zijn verdwenen; dit is vooral van belang voor het berekenen van getijdebewegingen.

Het verslag is als volgt opgebouwd:

In hoofdstuk 2 komt het te behandelen stelsel ondiepwatervergelijkingen aan de orde. We zullen ons beperken tot een hyperbolisch stelsel; termen die dit karakter verstoren, zoals de visceuze termen, worden buiten beschouwing gelaten.

In hoofdstuk 3 zullen niet-reflekterende randvoorwaarden worden afgeleid. Wegens de problemen die optreden bij het formuleren van de niet-reflekterende randvoorwaarden zullen we ons voornamelijk bezighouden met zwak-reflekterende randvoorwaarden, die het niet-reflekterende karakter zoveel mogelijk benaderen en eenvoudig in numeriek hanteerbare vorm zijn te brengen. Het effekt van zwak-reflekterende randvoorwaarden, welke in een open rand worden opgelegd, is dat passerende golven nu wel enige mate van "reflektie" ondervinden.

Voor de afleiding zullen we ons baseren op een artikel van Majda en Enquist [3].

Voor het formuleren van de zwak-reflekterende randvoorwaarden zal het noodzakelijk blijken, het stationaire gedeelte van de oplossing en de externe invloeden van buiten het gebied te kennen. Resultaten uit metingen of uit berekeningen ten aanzien van een groter model dat het te beschouwen gebied omvat, kunnen hierbij van nut zijn.

Hoofdstuk 4 geeft een beschrijving van de numerieke oplossingsmethode. De methode bestaat uit een eindige elementen methode in combinatie met het Sielecki-schema. Ook zullen enkele implementaties van zwak-reflekterende randvoorwaarden worden behandeld.

In hoofdstuk 5 onderzoeken we door middel van een numeriek experiment de mate van reflektie van de in hoofdstuk 4 beschreven implementaties. Het experiment bestaat voor elk van de onderhavige randvoorwaarden uit het vergelijken van de resultaten van een tweetal berekeningen. De eerste berekening betreft een gebied met een open rand, alwaar we een zwak-reflekterende randvoorwaarde opleggen. Bij de tweede berekening gaan we uit van dezelfde beginwaarden en berekenen het stromingsverloop over een groter gebied; dit gebied omvat het eerste en is zodanig dat nu ter plaatse van de open rand van het eerste gebied een onverstoerde oplossing wordt berekend. De reflekties van de zwak-reflekterende randvoorwaarde volgen nu eenvoudig uit het verschil van beide oplos-

singen. We zullen twee benaderingen van de niet-reflekterende randvoorwaarden beschouwen.

In hoofdstuk 6 vindt men enige slotopmerkingen en worden de resultaten samengevat.

2 De ondiepwatervergelijkingen

2.1 De formulering van het stelsel

Golven met golf lengten die aanzienlijk groter zijn dan de waterdiepte, zoals bij getijstromingen in ondiepe zeeën, laten zich beschrijven door de ondiepwatervergelijkingen. Het stelsel kan worden afgeleid door de kontinuiteitsvergelijking (de behoudswet van massa) en de Navier-Stokes vergelijkingen (de behoudswetten van impuls) te middelen over de turbulente beweging en over de diepte. Voor een gedetailleerde afleiding wordt verwezen naar [1] en [2].

Het is goed kennis te nemen van een aantal belangrijke eigenschappen, c.q. veronderstellingen welke essentieel zijn voor het model:

- de dichtheid van de vloeistof is konstant, deze aanname komt voort uit het feit dat de vloeistof als goed gemengd wordt beschouwd.
- de stroming is turbulent.
- de snelheidsvektor wordt verondersteld te zijn opgebouwd uit een hoofdgeelte, samenhangend met bijvoorbeeld de getijdebewegingen en een gedeelte, betrekking hebbend op turbulente fluktuaties. Alleen in het hoofdgeelte zijn we geïnteresseerd; de in de vergelijkingen voorkomende snelheidskomponenten u en v hebben betrekking op dat deel van de snelheidsvektor. De kortlopende snelheidsfluktuaties vindt men terug in de diffusietermen,
- de druk in de stroming is hydrostatisch; dit wil zeggen dat de druk lineair toeneemt van het vrije wateroppervlak tot de bodem.
- de vertikale snelheden zijn verwaarloosbaar ten opzichte van de horizontale snelheidskomponenten.
- het bodemoppervlak is konstant in de tijd.

Wanneer rekening wordt gehouden met Corioliskrachten, bodemwrijving en windinvloeden luiden de ondiepwatervergelijkingen als volgt (zie [1]):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \omega v + \lambda(\underline{u}) u - a \Delta u - \frac{K \bar{u} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{\frac{1}{2}}}{H} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \omega u + \lambda(\underline{u}) v$$

$$- a \Delta v - \frac{K \bar{v} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{\frac{1}{2}}}{H} = 0 \quad (2.2)$$

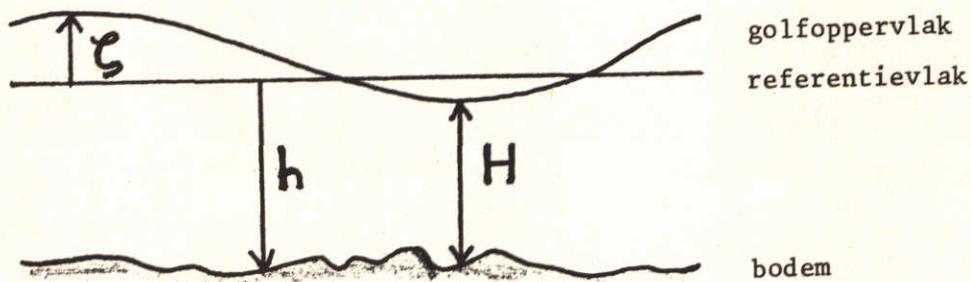
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (Hu)}{\partial x} + \frac{\partial (Hv)}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

waarbij

$$\lambda(\underline{u}) = \frac{g (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{\frac{1}{2}}}{C h^2 H}. \quad (2.4)$$

Van de volgende notities is gebruik gemaakt:

- x, y : koördinaten in het horizontale vlak langs respektievelijk de x- en y-as
- t : tijd
- u, v : over de diepte gemiddelde snelheidskomponenten in respektievelijk x- en y-richting
- ζ : waterverhoging, i.e. de afstand tussen het horizontale xy-vlak en het vrije wateroppervlak
- h : diepte, i.e. de afstand tussen het xy-vlak en het bodemoppervlak
- H : totale diepte; i.e. de afstand tussen het vrije oppervlak en de bodem; er geldt dus: $H = h + \zeta$ (zie figuur 2)
- ω : Coriolisparameter; $\omega = 2 \times \Omega_3$, waarbij Ω_s de vertikale komponent is van de rotatievector van de aarde
- g : zwaartekrachtversnelling
- Ch : de Chézy's koëfficiënt voor bodemwrijving
- a : koëfficiënt voor diffusie-achtige processen (molekulaire diffusie, turbulentie, vertikale fluktuaties, e.d.)
- K : koëfficiënt voor windkrachten
- \bar{u}, \bar{v} : snelheidskomponenten van de wind in respektievelijk x- en y-richting.



Figuur 2 Definitie van de grootheden ζ , h en H .

Het xy-vlak valt samen met het referentievlak.

We zullen in dit verslag $a=0$ kiezen. Windkrachten zullen buiten beschouwing blijven; we nemen derhalve $K=0$. Het resulterende stelsel is hyperbolisch (zie [7]).

Wat betreft het karakter van de stroming zullen we ons uitsluitend bezighouden met subkritische stromingen; hiervoor geldt:

$$(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} < \sqrt{gh} \quad (2.5)$$

Op deze karakterisering van de stroming zullen we terugkomen in het hoofdstuk over de randvoorwaarden.

2.2 De symmetrische vorm

Bij het afleiden van zwak-reflekterende randvoorwaarden voor de ondiepwatervergelijkingen zullen we uitgaan van een symmetrisch stelsel; hoewel symmetrie geen vereiste is blijkt ze voor de afleiding een vereenvoudiging te zijn.

We voeren de volgende transformatie in (zie [2]):

$$\psi = 2\sqrt{g(h + \zeta)} \quad (2.6)$$

Het stelsel (2.1) - (2.3) - met $a=0$ en $K=0$ - gaat door middel van deze transformatie over in:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\psi}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \omega \cdot v + \lambda \cdot u - g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\psi}{2} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \omega \cdot u + \lambda \cdot v - g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\psi}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\psi}{2} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.9)$$

In vector-notatie kunnen we dit stelsel als volgt weergeven:

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \underline{u}}{\partial y} + C \underline{u} + \underline{d} = 0 \quad (2.10)$$

waarbij

$$A = \begin{pmatrix} u & 0 & \frac{\psi}{2} \\ 0 & u & 0 \\ \frac{\psi}{2} & 0 & u \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & \frac{\psi}{2} \\ 0 & \frac{\psi}{2} & v \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \lambda & -\omega & 0 \\ \omega & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{d} = \begin{pmatrix} -g \frac{\partial h}{\partial x} \\ -g \frac{\partial h}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \psi \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

In het vervolg zullen we steeds uitgaan van dit symmetrisch stelsel ondiepwatervergelijkingen.

Het is een quasilineair, hyperbolisch stelsel partiële differentiaalvergelijkingen van de eerste orde.

2.3 De karakteristieke vorm

Onder verwijzing naar [2] vermelden we de karakteristieke formulering van het stelsel (2.7) - (2.9):

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + (u + \frac{1}{2} \psi \cos \theta) \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{2} \psi \sin \theta \frac{\partial u_2}{\partial x} + (v + \frac{1}{2} \psi \sin \theta) \frac{\partial u_1}{\partial y}$$

$$+ \frac{1}{2} \psi \cos \theta \frac{\partial u_2}{\partial y} - \omega u_t + \lambda u_r - g \frac{\partial h}{\partial x} \cos \theta - g \frac{\partial h}{\partial y} \sin \theta = 0 \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{1}{4} \phi \sin \theta \frac{\partial u_1}{\partial x} + u \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{1}{4} \phi \sin \theta \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{1}{4} \phi \cos \theta \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ + v \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{1}{4} \phi \cos \theta \frac{\partial u_3}{\partial y} + \omega u_r + \lambda u_t + g \frac{\partial h}{\partial x} \sin \theta \\ - g \frac{\partial h}{\partial y} \cos \theta = 0 \quad (2.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{1}{2} \phi \sin \theta \frac{\partial u_2}{\partial x} + (u - \frac{1}{2} \phi \cos \theta) \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{1}{2} \phi \sin \theta \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ + (v - \frac{1}{2} \phi \sin \theta) \frac{\partial u_3}{\partial y} + \omega u_t - \lambda u_r + g \frac{\partial h}{\partial x} \cos \theta \\ + g \frac{\partial h}{\partial y} \sin \theta = 0 \quad (2.14) \end{aligned}$$

waarbij:

$$u_1 = u_r + \phi$$

$$u_2 = u_t$$

$$u_3 = -u_r + \phi$$

$$u_r = \cos \theta \cdot u + \sin \theta \cdot v$$

$$u_t = -\sin \theta \cdot u + \cos \theta \cdot v$$

θ : de hoek tussen de positieve x-as en de op het xy-vlak geprojekteerde normaal van het bikarakteristieke vlak S; $\theta \in [0, 2\pi]$.

Voor een beschrijving van de bikarakteristieke vlakken wordt verwezen naar [2].

We zullen zien dat in hoofdstuk 3.2 bij de afleiding van zwak-reflekterende randvoorwaarden door middel van een eenvoudige transformatie een identiek stelsel wordt verkregen; hierbij worden de bikarakteristieke strips parallel aan de y-as gekozen i.e. $\theta=0$.

In het geval dat we te maken hebben met een één-dimensionale stroming in de x-richting ($\theta=0$) gaat (2.12) - (2.14) over in het volgende stelsel:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + (u + \frac{1}{2} \psi) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda u - g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + (u - \frac{1}{2} \psi) \frac{\partial u_3}{\partial x} - \lambda u + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.16)$$

De grootheden $u_1 = u + \psi$ en $u_3 = -u + \psi$ zijn de Riemann-invarianten van het karakteristieke stelsel (2.15), (2.16).

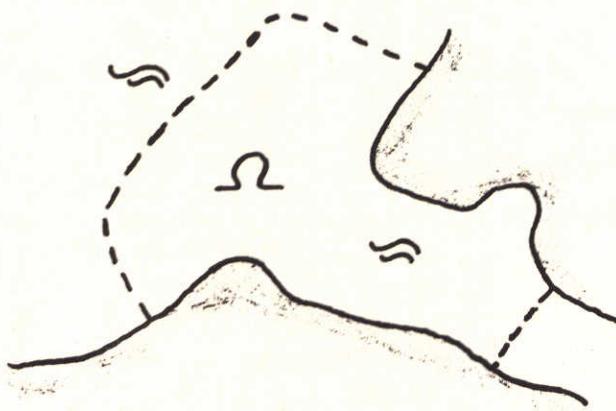
De grootheden $u_1 = u_r + \psi$, $u_2 = u_t$ en $u_3 = -u_r + \psi$ in het twee-dimensionale geval, zullen we aanduiden met "de equivalente vorm van de Riemann-invarianten" van het karakteristieke stelsel (2.12) - (2.14).

3 De randvoorwaarden in het twee-dimensionale geval

3.1 Inleiding

We kunnen de randen van het twee-dimensionale gebied Ω waarop we de ondiepwatervergelijkingen toepassen onderscheiden in:

- Natuurlijke of gesloten randen; deze worden gevormd door natuurlijke begrenzingen, zoals bijvoorbeeld een kust.
- Denkbeeldige of open randen; dit zijn kunstmatige afbakeningen van het gebied (zie figuur 1 en 3).



Figuur 3 Monding van een rivier

Ω : het te beschouwen gebied
---- : open rand van Ω

Door het invoeren van open randen is men in staat de berekeningen te beperken tot dat gebied, waarin men speciaal is geïnteresseerd, terwijl aangrenzende, van minder belang zijnde, gebieden buiten beschouwing kunnen blijven.

Het invoeren van open randen heeft echter ook nadelige kanten. De open rand is per definitie onfysisch en de behandeling ervan moet zodanig zijn dat het gedrag van de stroming in de buurt van die rand niet anders is dan in het geval de rand elders zou zijn aangebracht. Dit houdt in dat de in een open rand opgelegde randvoorwaarden zodanig moeten zijn dat de open rand niet als een barriëre wordt ervaren. We kunnen deze voorwaarde ook als volgt formuleren:

Naar buiten lopende golven mogen door de rand niet worden verstoord (of gereflecteerd); effekten van buiten, welke worden gerepresenteerd door een invloedsfunktie, die we op de open rand opleggen moeten vrij naar binnen kunnen lopen.

Randvoorwaarden die hieraan voldoen worden niet-reflekterende randvoorwaarden genoemd ($NR_{rvw}'n$). Op de inhoud van de invloedsfunktie zal in een later stadium nog nader worden ingegaan.

Het zal blijken dat de $NR_{rvw}'n$ in het algemeen numeriek moeilijk zijn te formuleren; daarom zullen we het probleem als volgt omschrijven:

Vind voor de open randen randvoorwaarden die eenvoudig numeriek zijn te implementeren en die het niet-reflekterend zijn van de rand zo goed mogelijk benaderen.

Dergelijke randvoorwaarden noemen we zwak-reflekterende randvoorwaarden ($ZR_{rvw}'n$); ze zijn namelijk verantwoordelijk voor enige mate van verstoring of reflektie ten gevolge van de rand.

Alvorens ons met de afleiding van $NR_{rvw}'n$ en $ZR_{rvw}'n$ bezig te houden, zullen we vaststellen hoeveel randvoorwaarden moeten worden opgelegd aan de gesloten en de open randen. Voor een uitvoerige theoretische beschouwing, zie [2].

We zullen de volgende gevallen onderscheiden, waarbij we uitgaan van een subkritische stroming (zie (2.5)):

- open rand met instroming : twee randvoorwaarden
- open rand met uitstroming : één randvoorwaarde
- gesloten rand : voor de normaalsnelheid geldt: $u_n = 0$;
verder zijn geen randvoorwaarden vereist.

We zullen ons vervolgens bepalen tot de afleiding van $NR_{rvw}'n$ en $ZR_{rvw}'n$. Allereerst voor een algemeen stelsel hyperbolische, lineaire partiële differentiaalvergelijkingen, vervolgens voor de gelineariseerde ondiepwatervergelijkingen. Dit impliceert dat de reflekties van de $ZR_{rvw}'n$ enerzijds een gevolg zijn van het feit dat we een benadering van $NR_{rvw}'n$ afleiden, anderzijds van het lineariseren van het stelsel.

Nulde en eerste orde benadering $ZR_{rvw}'n$ zullen numeriek worden getest. Hierbij kiezen we $\lambda = 0$ en $\omega = 0$.

Vooruitlopend op de resultaten in hoofdstuk 5 zullen we nu reeds opmerken dat in het kader van het gekozen numerieke experiment de reflekties sterk afhangen van de numerieke implementatie van de ZRrvw'n. Is men hierin onnauwkeurig dan ontstaan aanzienlijke numerieke reflekties; de eerste orde ZRrvw levert in dat geval geen signifikante verbetering op ten opzichte van de nulde orde. Gebruiken we een meer nauwkeuriger numerieke formulering van de ZRrvw'n dan vinden we een duidelijke verbetering van de resultaten indien we de eerste orde ZRrvw toepassen (in vergelijking met de nulde orde).

Voor numerieke berekeningen ten aanzien van het één-dimensionale model wordt verwezen naar Verboom (1982). Verboom toont hierin aan dat de reflekties ten gevolge van de open randen sterk afhankelijk zijn van het numerieke schema zelf.

3.2 Niet- en zwak-reflekterende randvoorwaarden voor een lineair stelsel

Voor de afleiding zullen we ons laten leiden door een artikel van Majda en Enquist (zie [3]).

De door hen beschreven methode zullen we beschrijven voor een eerste orde stelsel partiële differentiaalvergelijkingen.

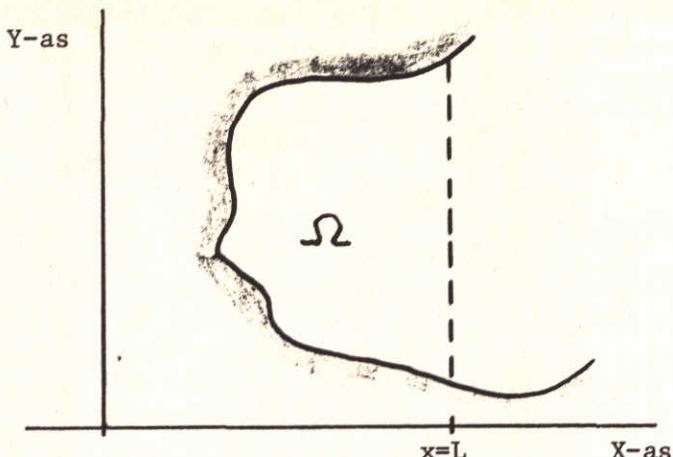
We gaan uit van het volgende symmetrische stelsel eerste orde, strikt hyperbolische, lineaire, partiële differentiaalvergelijkingen.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \frac{\partial u}{\partial y} + A_3 u \quad (3.1)$$

met $t \geq 0$ en $(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$;

$u \in \mathbb{R}^n$ en A_1, A_2 en A_3 zijn $n \times n$ matrices

Het gebied Ω heeft een open rand in $x=L$ (zie figuur 4).



Figuur 4

We zullen voor de open rand in $x=L$ een randvoorwaarde afleiden, die zomin mogelijk reflekterend. De open rand is niet-reflekterend als golven vanuit het binnengebied via de rand het gebied ongestoord verlaten. We zullen daarom trachten een randvoorwaarde af te leiden die deze golven ongemoeid laat.

Daarnaast kennen we golven die als gevolg van externe invloeden het gebied binnenkomen; externe effekten in $x=L$ zullen we in de randvoorwaarden moeten onderbrengen.

Golven die lopen in de richting van de positieve x -as zullen we positieve golven noemen; negatieve golven lopen in de negatieve x -richting. Ter plaatse van de open rand $x = L$ gaan de negatieve golven het gebied Ω in, de positieve golven het gebied uit.

We zullen trachten een ontkoppeling te bewerkstelligen tussen de positieve en negatieve golven, waarna we de negatieve golven in $x=L$ als functie van externe factoren zullen opleggen, en de positieve golven ongemoeid laten.

Veronderstel dat A_1 niet defekt is, waardoor we een niet-singuliere matrix V kunnen konstrueren zodanig dat VA_1V^{-1} diagonaal is. We veronderstellen bovendien dat de eigenwaarden van A_1 ongelijk nul zijn, zodat de diagonalmatrix VA_1V^{-1} (met eigenwaarden van A_1 op de diagonaal) inverteerbaar is. Voer nu een nieuwe variabele v in:

$$v = V u \quad (3.2)$$

Dit levert ons het volgende stelsel:

$$V^{-1} \frac{\partial v}{\partial t} = A_1 V^{-1} \frac{\partial v}{\partial x} + A_2 V^{-1} \frac{\partial v}{\partial y} + A_3 V^{-1} v,$$

ofwel:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = A \frac{\partial v}{\partial t} + E \frac{\partial v}{\partial y} + B v \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \text{met } A &= V A_1^{-1} V^{-1} \\ E &= -V A_1^{-1} A_2 V^{-1} \\ B &= -V A_1^{-1} A_3 V^{-1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Matrix A heeft, eventueel na het rangschikken van de vergelijkingen, de volgende vorm

$$A = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$\text{met } \Lambda_1 = \text{diag } (\lambda_1, \dots, \lambda_k); \lambda_1 < \dots < \lambda_k < 0 \text{ en} \quad (3.6)$$

$$\Lambda_2 = \text{diag } (\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n); 0 < \lambda_{k+1} < \dots < \lambda_n$$

Met (3.3) hebben we de looprichting van de golven in de x-richting bepaald; positieve golven corresponderen namelijk met negatieve eigenwaarden (diagonalelementen) van A, negatieve golven met positieve eigenwaarden.

Indien matrices E en B diagonaal zouden zijn, dan zouden we met (3.3) de negatieve golven van de positieve hebben ontkoppeld. Wil de open rand niet reflekterend zijn dan moeten lokaal in $x=L$ zodanige randvoorwaarden worden voorgeschreven dat de negatieve golven een functie van externe invloeden zijn, of verdwijnen als externe effekten nihil zijn. In het geval dat E en B diagonaal zijn kunnen we dus de volgende NRrvw'n afleiden:

$$\pi_{k+1,n} v \Big|_{x=L} = f(y, t) \quad (3.7)$$

waarbij we $\pi_{i,j}$ ($i < j$) als volgt definiëren:

$$\pi_{i,j} v = (v_i, \dots, v_j)^T \quad (3.8)$$

De functie f beschrijft externe invloeden ter plaatse van de open rand.

Daar echter de matrices E en B in het algemeen niet diagonaal zijn, zijn met (3.3) de negatieve golven nog steeds gerelateerd aan de positieve. Om een ontkoppeling te bewerkstelligen zullen we (3.3) Fouriertransformeren naar t en y met duale variabelen τ respectievelijk η .

De Fouriergetransformeerde \hat{v} van v luidt nu:

$$\hat{v}(x, \eta, \tau) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v(x, y, t) e^{-iy\eta} e^{-it\tau} dy dt \quad (3.9)$$

Stelsel (3.3) gaat nu over in:

$$\hat{\frac{\partial v}{\partial x}} = i\tau M \hat{v} \quad (3.10)$$

met

$$M \left(\frac{\eta}{\tau}, \frac{1}{\tau} \right) = A + \frac{\eta}{\tau} E + \frac{1}{i\tau} B \quad (3.11)$$

We veronderstellen nu dat er een niet-singuliere transformatie matrix

$$W \left(\frac{\eta}{\tau}, \frac{1}{\tau} \right)$$

bestaat zodat

$$W M W^{-1} \quad (3.12)$$

diagonaal is.

Deze veronderstelling is zeker juist indien we aannemen dat de $\frac{\eta}{\tau}$ - en $\frac{1}{\tau}$ -termen in (3.11) klein zijn ten opzichte van de elementen van A , de eigenwaarden van M zullen hiermee slechts fractioneel afwijken van die van A (en blijven dus onderling verschillend en ongelijk nul). Wat dit in het geval van de ondiepwatervergelijkingen inhoudt zal in die betreffende paragraaf worden behandeld.

We zullen nu de volgende transformatie van variabelen invoeren:

$$\hat{w} = W \hat{v}, \quad (3.13)$$

waarbij W voldoet aan (3.12). Hiermee gaat (3.10) over in:

$$\hat{\frac{\partial w}{\partial x}} = i\tau \Lambda \hat{w} \quad (3.14)$$

met

$$\Lambda \left(\frac{\eta}{\tau}, \frac{1}{\tau} \right) = W M W^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} \left(\frac{\eta}{\tau}, \frac{1}{\tau} \right) & 0 \\ 0 & \Lambda_{22} \left(\frac{\eta}{\tau}, \frac{1}{\tau} \right) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$\Lambda_{11} \left(\frac{\eta}{\tau}, \frac{1}{\tau} \right)$ en $\Lambda_{22} \left(\frac{\eta}{\tau}, \frac{1}{\tau} \right)$ bevatten respektievelijk de k negatieve en de $(n-k)$ positieve eigenwaarden van A (daarnaast uiteraard ook termen betreffende $\frac{\eta}{\tau} E$ en $\frac{1}{i\tau} B$). Er geldt uiteraard:

$$\Lambda_{11} (0,0) = \Lambda_1 \text{ en } \Lambda_{22} (0,0) = \Lambda_2 \text{ (zie (3.5)) .}$$

Met (3.14) hebben we nu een relatie verkregen tussen uitsluitend de positieve golven enerzijds en de negatieve golven anderzijds.

Volgen we de redenering welke ten grondslag ligt aan de NRrvw'n van (3.7), dan kunnen we nu met behulp van (3.14) de volgende NRrvw'n formuleren:

$$\pi_{k+1,n} \hat{w} \Big|_{x=L} = \hat{f} (\eta, \tau), \quad (3.16)$$

waarmee we de negatieve golven ter plaatse van $x=L$ laten verdwijnen in het geval van $\hat{f} = 0$, c.q. als functie van externe effekten opleggen als $f \neq 0$. De functie f is de Fouriergetransformeerde functie f van externe effekten.

Randvoorwaarde (3.16) is niet reflecterend. Het is echter een randvoorwaarde, die in de (x, η, τ) ruimte is geformuleerd, en daarom niet direct bruikbaar.

Het konstrueren van de transformatiematrix W en het terugtransformeren van (3.16) naar een hanteerbare numerieke uitdrukking (wanneer W mocht zijn bepaald), zijn echter in het algemeen zeer problematisch (zie bijlage 1).

Aan deze moeilijkheden kunnen we ontkomen door voor W de volgende reeksontwikkeling in te voeren:

$$W \left(\frac{\eta}{\tau}, \frac{1}{\tau} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\eta}{\tau} \right)^j \left(\frac{1}{i\tau} \right)^k w_{jk} \quad (3.17)$$

en vervolgens W te benaderen door de volgende eindige reeks:

$$W' = \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^q \left(\frac{\eta}{\tau}\right)^j \left(\frac{1}{i\tau}\right)^k W_{jk}$$

$$= W + O\left(\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^{p+1}, \left(\frac{1}{\tau}\right)^{q+1}\right) \quad (3.18)$$

De termen met $\frac{\eta}{\tau}$ hebben betrekking op de invalshoek van de stroming ten opzichte van loodrechte inval; de termen met $\frac{1}{\tau}$ zijn gerelateerd aan de komponenten van matrix B . De matrices W_{jk} bevatten constante koëfficiënten. Gaat men nu in (3.13) uit van W' in plaats van W dan gaan (3.14) en (3.15) over in:

$$\hat{\frac{\partial w}{\partial x}} = i\tau \Lambda' \hat{w}$$

en

$$\Lambda' \left(\frac{\eta}{\tau}, \frac{1}{\tau}\right) = W'M (W')^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda'_{11} \left(\frac{\eta}{\tau}, \frac{1}{\tau}\right) & O\left(\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^{p+1}, \left(\frac{1}{\tau}\right)^{q+1}\right) \\ O\left(\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^{p+1}, \left(\frac{1}{\tau}\right)^{q+1}\right) & \Lambda'_{22} \left(\frac{\eta}{\tau}, \frac{1}{\tau}\right) \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

De hiermee korresponderende randvoorwaarde luidt:

$$\pi_{k+1,n} \hat{w} \Big|_{x=L} = \pi_{k+1,n} W' \hat{v} \Big|_{x=L} = \pi_{k+1,n} W' V \hat{u} \Big|_{x=L} = \hat{f} \quad (3.21)$$

en is zwak-reflekterend van de orde $O\left(\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^{p+1}, \left(\frac{1}{\tau}\right)^{q+1}\right)$.

Uitdrukking (3.21) heeft de vorm van reeksontwikkeling in $\frac{\eta}{\tau}$ en $\frac{1}{i\tau}$ (vergelijk (3.18) met lineaire koëfficiënten, afhankelijk van 0).

In deze vorm is de terugtransformatie betrekkelijk eenvoudig.

Voor technische details met betrekking tot de afleiding wordt verwezen naar het originele artikel van Majda en Enquist [3].

Bij het afleiden van Λ in (3.14), (3.15) gaat het ons uitsluitend om een relatie tussen de negatieve golven onderling en derhalve is het gedeelte rechtsboven van Λ van ondergeschikt belang. Dit geldt eveneens voor Λ' in (3.19), (3.20). De transformatiematrix W (W') behoeft dus slechts het gedeelte

links-onder van Λ (Λ') te laten verdwijnen (tot op orde $O((\frac{n}{\tau})^{p+1}, (\frac{1}{\tau})^{q+1})$). Dit houdt een aanzienlijke vereenvoudiging in met betrekking tot W (W') en derhalve ook voor de matrices W_{jk} (zie (3.17) en (3.18)). Koëfficiënten van W_{jk} welke geen invloed hebben op het gedeelte links-onder van Λ (Λ') zullen we nu eenvoudigheidshalve nul kiezen.
Bij de afleiding van ZRrvw'n voor de ondiepwatervergelijkingen zullen we hiervan gebruik maken.

Opmerking 1:

Voor de nulde orde ZRrvw geldt: $W' = W_{oo}$. Volgens (3.20) bevat Λ' in het gedeelte links-onder hoogstens termen $O(\frac{n}{\tau}, \frac{1}{\tau})$. Dit betekent dat we, rekening houdend met (3.11), voor W_{oo} de eenheidsmatrix I kunnen kiezen. Hiermee gaat (3.20) over in:

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0(\frac{n}{\tau}, \frac{1}{\tau}) \\ 0(\frac{n}{\tau}, \frac{1}{\tau}) & \Lambda_2 \end{pmatrix}$$

In feite is iedere diagonaalmatrix met konstante, van nul verschillende, termen geschikt. In het geval van de ondiepwatervergelijkingen zullen we gemakshalve uitgaan van $W_{oo} = I$.

3.3 Zwak-reflekterende randvoorwaarden voor de ondiepwatervergelijkingen

We zullen vervolgens enige ZRrvw'n voor de ondiepwatervergelijkingen afleiden. Hierbij gaan we uit van het stelsel (2.10) en (2.11) voor $t > 0$ en toegepast op het gebied Ω , met een open rand in $x=L$ (zie figuur 4).

Het quasilineaire stelsel (2.10) zullen we lineariseren, door het zogenaamde bevriezen van de koëfficiënten. De koëfficiënten van de matrices A, B en C worden konstant beschouwd. In het vervolg zullen we de matrices in (2.10) als bevroren beschouwen.

In verband met de toe te passen Fouriertransformatie zullen de volgende variabelen invoeren

$$\begin{aligned} \underline{u}' &= \underline{u} - \underline{u}_0 \quad \text{als } t > 0 \\ &= 0 \quad \text{als } t < 0 \end{aligned} \tag{3.22}$$

waarbij \underline{u}_0 een van de tijd onafhankelijke oplossing van (2.10) is, en \underline{u}' een Fouriertransformeerbare variabele.

De vergelijkingen gaan met (3.22) over in:

$$\frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} + A_1 \frac{\partial \underline{u}'}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \underline{u}'}{\partial y} + A_3 \underline{u}' = 0 \quad (3.23)$$

met $A_1 = A_f$, $A_2 = B_f$ en $A_3 = C_f$ (zie (2.10), met bevroren koëfficiënten).

Passen we de in paragraaf 3.2 beschreven methode toe op (3.23) dan wordt tenslotte de volgende uitdrukking verkregen (zie (3.19)):

$$\frac{\hat{\partial} \underline{w}'}{\partial x} = i\tau \Lambda' \hat{\underline{w}'} \quad (3.24)$$

met $\hat{\underline{w}'} = \underline{W}' \hat{\underline{v}'} ,$

$$\hat{\underline{v}'} = V \hat{\underline{u}'}$$

$$\text{en } \hat{\underline{u}'} = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{u}'(x, y, t) e^{-iy\eta} e^{-it\tau} dy dt$$

Voor een uitvoerige beschrijving van de toegepaste transformaties, de matrices en de eigenwaarden, zie bijlage 2.

De met (3.24) korresponderende randvoorwaarde luidt (zie (3.21)):

$$\pi_{k+1,3} \left. \hat{\underline{w}'} \right|_{x=L} = \hat{f} . \quad (3.25)$$

We zullen voor de ZRrvw'n een aantal orde benaderingen beschouwen. We onderscheiden hierbij twee gevallen:

- Uitstroming: $U_f > 0$ (in 3.3.1),
- Instroming : $U_f < 0$ (in 3.3.2).

Tenslotte zal het geval $U_f = 0$ aan de orde komen:

- Tangentiële stroming: $U_f = 0$ (opmerking 9).

Invloeden van buiten Ω zullen steeds met de functie f worden weergegeven. We zullen nog terugkomen op de betekenis van f (opmerking 2).

3.3.1 Uitstroming

In dit geval bevat matrix A (zie bijlage 2) slechts één positieve eigenwaarde. Er zal dus één randvoorwaarde moeten worden afgeleid voor de open rand in $x=L$; dit is in overeenstemming met de opmerkingen over het aantal randvoorwaarden in paragraaf 3.1.

We zullen achtereenvolgens enkele benaderingen beschouwen (zie (3.18) en (3.21)); afleidingen vindt men in bijlage 3.

A. $p=0, q=0$:

$$(u' - \psi') \Big|_{x=L} = f \quad (3.26)$$

B. $p=1, q=0$:

$$-U_f \cdot \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} (u' - \psi') \Big|_{x=L} = f \quad (3.27)$$

C. $p=1, q=1$:

$$\frac{\lambda (U_f + \psi_f/2)}{2 \psi_f} (u' + \psi') - 2\omega \frac{U_f}{\psi_f} v' - U_f \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} (u' - \psi') \Big|_{x=L} = f \quad (3.28)$$

In dit stadium kunnen we voor wat betreft de $\frac{\lambda}{i\tau}$ -termen een hogere orde benadering bereiken, zonder in de reeksontwikkeling voor W' in (3.18) hogere orde termen ($\frac{1}{i\tau}$) voor de λ -termen in te voeren, dus zonder hogere orde afgeleiden in de ZRrvw te introduceren (de afleiding hiervan vindt men eveneens in bijlage 3).

D. $p=1, q=1$ (extra orde $\frac{\lambda}{i\tau}$ -term):

$$\frac{\lambda (U_f + \psi_f/2)}{2 \psi_f} (u' + \psi') - 2\omega \frac{U_f}{\psi_f} v' - U_f \frac{\partial v'}{\partial y} +$$

$$\frac{1}{2} \lambda (u' - \psi') + \frac{\partial}{\partial t} (u' - \psi') \Big|_{x=L} = f \quad (3.29)$$

Voor de $\frac{\eta}{\tau}$ en $\frac{\omega}{\tau}$ termen blijkt een dergelijke "truc" niet mogelijk te zijn.

De nulde orde ZRrvw (3.26) is niet-reflekterend in het geval van een één-dimensionale stroming, loodrecht op de open rand, (zie (2.15) en (2.16)), zonder advectieve termen en zonder bodemwrijving. Afwijkingen hiervan veroorzaken reflekties. Met de eerste orde ZRrvw (3.27) trachten we afwijkingen van loodrechte inval door middel van invoering van afgeleiden in de y-richting (langs de open rand) te benaderen, ofwel, de reflekties aan de open rand te verkleinen (vergeleken bij de nulde orde). Zie verder opmerking 4.

3.3.2 Instroming

Matrix A blijkt nu twee positieve eigenwaarden te hebben. Twee randvoorwaarden zijn dus nodig (zie ook opmerking over aantal randvoorwaarden in 3.1).

Evenals bij uitstroming zullen we enkele benaderingen beschouwen (afleidingen, zie bijlage 4):

A. $p=0, q=0$:

$$\begin{pmatrix} v' \\ u' - \psi' \end{pmatrix} \Big|_{x=L} = \underline{f} \quad (3.30)$$

B. $p=1, q=0$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} (U_f + \psi_f/2) \frac{\partial}{\partial y} (u' + \psi') + \frac{\partial v'}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} (u' - \psi') \end{pmatrix} \Big|_{x=L} = \underline{f} \quad (3.31)$$

C. $p=1, q=1$:

$$\begin{pmatrix} \frac{(U_f + \psi_f/2)}{\psi_f} \omega (u' + \psi') + \frac{1}{2} (U_f + \psi_f/2) \frac{\partial}{\partial y} (u' + \psi') + \frac{\partial v'}{\partial t} \\ \frac{(U_f + \psi_f/2)}{2 \psi_f} \lambda (u' + \psi') + \frac{\partial}{\partial t} (u' - \psi') \end{pmatrix} \Big|_{x=L} = \underline{f} \quad (3.32)$$

Evenals bij instroming is het mogelijk hogere orde benaderingen af te leiden zonder hogere orde afgeleiden in der ZRrvw'n in te voeren. Het blijkt echter

mogelijk om dit zowel voor de $\frac{\lambda}{i\tau}$ als $\frac{i\eta}{i\tau}$ -termen te doen (hoewel mogelijk, laten we dit voor $\frac{\omega}{i\tau}$ achterwege).

D. $p=1, q=1$ (extra orde $\frac{i\eta}{i\tau}$ - en $\frac{\lambda}{i\tau}$ - termen, coriolis buiten beschouwing):

$$\left(\begin{array}{l} \frac{1}{2} (U_f + \psi_f/2) \frac{\partial}{\partial y} (u' + \psi') + v_f \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial t} \\ \frac{(U_f + \psi_f/2)}{2 \psi_f} \lambda (u' + \psi') - \frac{1}{2} (U_f + \psi_f/2) \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} (u' - \psi') + \frac{1}{2} \lambda (u' - \psi') \end{array} \right) = f \quad (3.33)$$

In dit verslag zullen geen hogere orden, dan de tot nu toe bepaalde, worden afgeleid.

De $ZRrvw'$ 'n in (3.30) noemen we van de nulde orde en die in (3.31) van de eerste orde.

Verder wordt verwezen naar de opmerkingen aan het eind van 3.3.1 en opmerking 4.

Opmerking 2:

Ter bepaling van de functie f voor de externe invloeden gaan we als volgt te werk:

We schrijven de randvoorwaarden als volgt:

$$R(u', v', \phi') = f(u_{ext}, v_{ext}, \phi_{ext}) \quad (3.34)$$

We zullen hierbij de onbekenden u' , v' en ϕ' ter plaatse van de rand opgebouwd denken uit een interne en externe komponent: $u' = u_{int} + u_{ext}$

Allereerst beschouwen we het geval dat er geen sprake is van externe invloeden; er geldt dan:

$$R(u_{int}, v_{int}, \phi_{int}) = 0 \quad (3.35)$$

Vervolgens beschouwen we het geval dat er uitsluitend sprake is van externe invloeden; bij afwezigheid van interne golfbewegingen geldt dan:

$$\underline{R}(u_{ext}, v_{ext}, \phi_{ext}) = f(u_{ext}, v_{ext}, \phi_{ext}) \quad (3.36)$$

Randvoorwaarden (3.35) en (3.36) zijn lineair en derhalve kunnen we beide relaties samennemen, hetgeen leidt tot (3.34). De functie f is nu dus bepaald door (3.36).

Opmerking 3:

We hebben tot nu toe ZRrvw'n afgeleid voor een open rand, welke loodrecht staat op de x -as. Een generalisatie naar een willekeurige ligging van de open rand(en) is niet moeilijk te maken. Hierbij moeten we rekening houden met:

- de variabele ϕ is richtingloos en blijft, onafhankelijk van de ligging van de open rand, gelijk.
- de snelheidskomponenten u en v hebben hun richting loodrecht op, respectievelijk evenwijdig aan de rand. Voor u (en U_f) moeten we steeds de snelheidskomponent in de normaalrichting van de rand nemen; voor v (en v_f) de tangentiële snelheidskomponent.
- de afgeleide naar y gaat over in de afgeleide in tangentiële richting.

Houden we rekening met bovenstaande punten, dan is het vrij eenvoudig de afgeleide ZRrvw'n te herschrijven voor een willekeurige open rand.

Opmerking 4:

De $\frac{i\eta}{i\tau}$ -term hangt samen met de invalshoek van de golven. Veronderstellen we bijvoorbeeld dat $\frac{\eta}{\tau} = 0$, dan betekent dit dat we te maken hebben met loodrecht invallende golven (evenwijdig aan de x -as). Indien nu $\frac{\eta}{\tau}$ en η klein zijn, dan ontwikkelen we met (3.18) rond loodrecht invallende golven.

Bodemwrijving en Coriolis worden verondersteld klein te zijn, zodanig dat $\frac{\lambda}{\tau}$ en $\frac{\omega}{\tau}$ klein zijn en de ontwikkeling in (3.18) niet ongerechtvaardigd is. Gaan we uit van een golfperiode in de grootte-orde van enkele uren dan geldt: $\tau = 0 (10^{-4})$. Voor de bodemwrijving $\lambda(\underline{u})$ geldt $0 (10^{-5})$; we zijn hierbij uitgegaan van $Ch^2 \approx 4000$, $H \approx 40$, $g = 10$ en $u = 1$ (in het geval van het zuidelijk gedeelte van de Noordzee), gesubstitueerd in (2.4). Voor de corioliskoëfficiënt geldt $\omega = 0 (10^{-4})$. De aannname dat $\frac{\lambda}{i\tau} \ll 1$ lijkt niet ongerechtvaardigd; ten aanzien van $\frac{\omega}{i\tau}$ lijkt deze aanname aan diskussie

onderhevig te zijn.

Indien we de stroming opvatten als één-dimensionaal in de x -richting ($\eta=0$) en verder $\lambda=0$ en $f=0$ kiezen, dan zullen de uitgaande golven de open rand wrijvingsloos, zonder Coriolis-invloeden en onder loodrechte invalshoek passeren. De nulde orde ZRrvw'n (zie (3.26) en (3.30^b)) zijn nu niet-reflekterend.

Opmerking 5:

Het bevriezen van de koëfficiënten in (3.23) betreft uitsluitend de afleiding van de ZRrvw'n. Komen we in het stadium dat we numeriek gaan rekenen met de ondiepwatervergelijkingen in combinatie met een afgeleide ZRrvw dan laten we het bevriezen der koëfficiënten achterwege. Een en ander zal blijken uit hetgeen in hoofdstuk 4 (numerieke behandeling) wordt beschreven.

Opmerking 6:

Bij de afleiding van de ZRrvw'n hebben we een stationaire oplossing \underline{u}_0 ingevoerd (zie (3.22)). We kunnen deze oplossing $\underline{u}_0(x,y)$ beschouwen als een constante hoofdstroming, terwijl $\underline{u}'(x,y,t)$ een met de tijd (en plaats) fluktuerende stroming voorstelt. We kunnen \underline{u}_0 bepalen door de stroming over de tijd te middelen, i.e.

$$\underline{u}_0 = \int_0^T \frac{\underline{u}}{T} dt,$$

waarbij we voor T een tijdsperiode nemen in de grootte orde van de golfperiode (of getijdeperiode). Voor \underline{u}' geldt:

$$\int_0^T \frac{\underline{u}'}{T} dt = 0$$

(zie ook opmerking 7).

Opmerking 7:

Voor het bepalen van de grootheden $\underline{u}_{ext} = (u_{ext}, v_{ext}, \phi_{ext})$ (zie opm. 2) en \underline{u}_0 kunnen we gebruik maken van resultaten van metingen. Aangezien het aantal meetpunten vaak zeer beperkt is, zullen we in het algemeen voor het bepalen

van u_{ext} en u_0 onvoldoende gegevens te beschikking hebben. Een alternatief is de noodzakelijke informatie te halen uit een groter model, één dat Ω omvat.

Opmerking 8:

De ZRrvw'n voor het één-dimensionale model kunnen worden gevonden door tijdens de gegeven afleiding $\eta=0$ en $v=0$ te kiezen. We kunnen ze ook uit de gevonden ZRrvw'n afleiden door y -onafhankelijkheid in te voeren en $v=0$ te kiezen. De resulterende ZRrvw'n zijn identiek aan die in [4].

Opmerking 9:

In het geval van $U_f = 0$ kan de afleidingsmethode niet worden toegepast; de eigenwaarde λ_2 ($= -1/U_f$) bestaat niet. De vraag is wat te doen ingeval $U_f = 0$. In dit verslag kiezen we voor één randvoorwaarde in een punt van de open rand waar $U_f = 0$. Voor deze randvoorwaarde nemen we de ZRrvw ingeval van uitstro- ming (zie 3.3.1).

Deze keuze is gebaseerd op het feit dat het aantal randvoorwaarden korrespon- deert met het aantal bikarakteristieke relaties, dat voor een oplossing in een punt aan de rand nodig is, en waarvan de bikarakteristieke strip waarop zo'n relatie geldt van buiten het gebied komt.

In het geval van $U_f = 0$ komt één bikarakteristieke strip van buiten het ge- bied.

4 Numerieke behandeling

4.1 Numerieke formulering van de ondiepwatervergelijkingen

Het stelsel ondiepwatervergelijkingen wordt opgelost door toepassing van een eindige elementen methode (E.E.M.) volgens de Galerkin-methode, in combinatie met een tijdsintegratie volgens het schema van Sielecki.

Het Sielecki-schema is een gemodificeerde Euler-methode, waarbij gedurende de uitvoering gebruik wordt gemaakt van nieuwe waarden voor de onderhavige groot-heden, voorzover deze reeds beschikbaar zijn. In het verdere verloop van deze paragraaf zal deze methode nader worden toegelicht.

Voor de toepassing van de E.E.M. zal het stelsel zoals beschreven in (2.1) - (2.3) zodanig worden herschreven, dat de resulterende matrices tijdsafhankelijk zijn. Deze matrices behoeven nu slechts eenmaal, bij de aanvang van de berekeningen te worden bepaald, hetgeen een aanzienlijke besparing betekent vergeleken met stelsels vergelijkingen waarin tijdsafhankelijke matrices voorkomen.

Om dit te bereiken vermenigvuldigen we de vergelijkingen (2.1) en (2.2) met H en passen hierop (2.3) toe, waardoor het volgende stelsel vergelijkingen kan worden afgeleid (waarbij $a=0$ en $K=0$ is genomen):

$$\frac{\partial(Hu)}{\partial t} + \frac{\partial(Hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(Huv)}{\partial y} - \omega Hv + gH \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \lambda(Hu) = 0$$

$$\frac{\partial(Hv)}{\partial t} + \frac{\partial(Hvu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv^2)}{\partial y} + \omega Hu + gH \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \lambda(Hv) = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} = 0$$

Vervolgens worden de notities $U = Hu$ en $V = Hv$ ingevoerd.

De grootheid ζ wordt geschreven als $\zeta = H - h$.

Hiermee gaat het stelsel over in:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(Uu)}{\partial x} + \frac{\partial(Vu)}{\partial y} + \frac{1}{2} g \frac{\partial H^2}{\partial x} - gH \frac{\partial h}{\partial x} + \\ - \omega V + \lambda U = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(Uv)}{\partial x} + \frac{\partial(Vv)}{\partial y} + \frac{1}{2} g \frac{\partial H^2}{\partial y} - gH \frac{\partial h}{\partial y} + \\ + \omega U + \lambda V = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (4.3)$$

Allereerst geven we de zwakke formulering (ook wel variationele-) van het probleem (voor een beschrijving van deze methode, zie [5]):

Vind $U, V, H \in D(\Omega)$ zodat

$$(\frac{\partial U}{\partial t}, \delta U) + (\frac{\partial(Uu)}{\partial x}, \delta U) + (\frac{\partial(Vu)}{\partial y}, \delta U) + \\ (\frac{1}{2} g \frac{\partial H^2}{\partial x}, \delta U) - (gH \frac{\partial h}{\partial x}, \delta U) - (\omega V, \delta U) + \\ (\lambda U, \delta U) = 0 \quad (4.4)$$

$$(\frac{\partial V}{\partial t}, \delta V) + (\frac{\partial(Uv)}{\partial x}, \delta V) + (\frac{\partial(Vv)}{\partial y}, \delta V) + \\ (\frac{1}{2} g \frac{\partial H^2}{\partial y}, \delta V) - (gH \frac{\partial h}{\partial y}, \delta V) + (\omega U, \delta V) + \\ (\lambda V, \delta V) = 0 \quad (4.5)$$

$$(\frac{\partial H}{\partial t}, \delta H) + (\frac{\partial U}{\partial x}, \delta H) + (\frac{\partial V}{\partial y}, \delta H) = 0 \quad (4.6)$$

$\forall \delta U, \delta V, \delta H \in D(\Omega)$

, waarbij de volgende notatie geldt:

$$(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \phi \psi \, dx$$

De funktieruimte $D(\Omega)$ wordt zo gekozen dat (4.4) - (4.6) zinvol zijn. In plaats van een oneindig dimensionale funktieruimte $D(\Omega)$ zal, volgens de methode van Galerkin, gekozen worden voor een eindige dimensionale funktieruimte $D^h(\Omega)$ die wordt opgespannen door een eindig aantal basisfunkties $\{\phi_i\}_{i=1}^N$.

De Galerkin-formulering van het probleem luidt nu:

Vind $U^h, V^h, H^h \in D^h(\Omega)$ zodat

$$\begin{aligned} & (\frac{\partial U^h}{\partial t}, \phi_1) + (\frac{\partial(Uu)^h}{\partial x} + \frac{1}{2} g \frac{\partial(H^2)^h}{\partial x}, \phi_1) + \\ & - (g H^h \frac{\partial h^h}{\partial x}, \phi_1) - (\omega V^h, \phi_1) + (\lambda U^h, \phi_1) + \\ & = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & (\frac{\partial V^h}{\partial t}, \phi_1) + (\frac{\partial(Uv)^h}{\partial x} + \frac{\partial(Vv)^h}{\partial y} + \frac{1}{2} g \frac{\partial(H^2)^h}{\partial y}, \phi_1) + \\ & - (g H^h \frac{\partial h^h}{\partial y}, \phi_1) + (\omega U^h, \phi_1) + (\lambda V^h, \phi_1) + \\ & = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$(\frac{\partial H^h}{\partial t}, \phi_1) + (\frac{\partial U^h}{\partial x} + \frac{\partial V^h}{\partial y}, \phi_1) = 0 \quad (4.9)$$

$$V \phi_1 \in D^h(\Omega) \quad i = 1, \dots, N$$

Voor het oplossen van (4.7) - (4.9) zullen de onderhavige grootheden als volgt worden weergegeven:

$$U^h = \sum_{i=1}^N U_i(t) \cdot \phi_i(x, y),$$

$$v^h = \sum_{i=1}^N v_i(t) \cdot \phi_i(x, y),$$

$$h^h = \sum_{i=1}^N h_i(t) \cdot \phi_i(x, y),$$

etc.

Met behulp hiervan wordt het volgende stelsel gewone differentiaalvergelijkingen afgeleid:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{dU}{dt} \int_{\Omega} \phi_j \phi_i dS + \sum_{j=1}^N \{(Uu)_j + \frac{1}{2} g(H^2)_j\} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \phi_i dS + \\ \sum_{j=1}^N (Vu)_j \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \phi_i dS - \sum_{j=1}^N g H_j \int_{\Omega} \phi_j \sum_{k=1}^N h_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \phi_i dS + \\ - \sum_{j=1}^N (\omega V)_j \int_{\Omega} \phi_j \phi_i dS + \sum_{j=1}^N (\lambda U)_j \int_{\Omega} \phi_j \phi_i dS = 0 \quad (4.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{dV}{dt} \int_{\Omega} \phi_j \phi_i dS + \sum_{j=1}^N \{(Vv)_j + \frac{1}{2} g (H^2)_j\} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \phi_i dS + \\ \sum_{j=1}^N (Uv)_j \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \phi_i dS - \sum_{j=1}^N g H_j \int_{\Omega} \phi_j \sum_{k=1}^N h_k \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \phi_i dS + \\ \sum_{j=1}^N (\omega U)_j \int_{\Omega} \phi_j \phi_i dS + \sum_{j=1}^N (\lambda V)_j \int_{\Omega} \phi_j \phi_i dS = 0 \quad (4.11) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{dH}{dt} \int_{\Omega} \phi_j \phi_i dS + \sum_{j=1}^N U_j \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \phi_i dS + \sum_{j=1}^N V_j \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \phi_i dS = 0 \quad (4.12)$$

Het stelsel (4.10) - (4.12) kunnen we ook in matrix-notitie schrijven:

$$\begin{aligned} M \frac{dU}{dt} + S_x (\underline{Uu} + \frac{1}{2} g \underline{H^2}) + Sy (\underline{Vu}) - \underline{S_x H} + \\ - M (\underline{\omega V}) + M (\underline{\lambda U}) = 0 \quad (4.13) \end{aligned}$$

$$M \frac{d\bar{V}}{dt} + S_x (\underline{U}\underline{V}) + S_y (\underline{V}\underline{V} + \frac{1}{2} g \underline{H}^2) - \tilde{S}_y \underline{H} + M (\omega \underline{U}) + M (\lambda \underline{V}) = 0 \quad (4.14)$$

$$M \frac{d\bar{H}}{dt} + S_x \underline{U} + S_y \underline{V} = 0 \quad (4.15)$$

met

$$\underline{U} = (U_1, \dots, U_N), \\ \underline{V} = (V_1, \dots, V_N), \text{ etc.}$$

De matrices in (4.13) - (4.15) zijn als volgt bepaald:

$$m_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j dS \quad (4.16)$$

$$s_{x, ij} = \int_{\Omega} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dS \quad (4.17)$$

$$s_{y, ij} = \int_{\Omega} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial y} dS \quad (4.18)$$

$$\tilde{s}_{x, y} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \sum_{k=1}^N h_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x} dS \quad (4.19)$$

$$\tilde{s}_{y, ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \sum_{k=1}^N h_k \frac{\partial \phi_k}{\partial y} dS \quad (4.20)$$

Met diepte h konstant in de tijd hebben we nu een aantal matrices afgeleid die tijdsafhankelijk zijn.

We hebben echter nog steeds te maken met een drietal stelsels vergelijkingen (4.13) - (4.15) welke moeten worden opgelost, tenzij M diagonaal is; in dit geval komt vermenigvuldiging met M^{-1} overeen met een simpele deling door het betreffende diagonaal element van M . Het zal duidelijk zijn dat dit rekentijdbesparend is.

Om van M een diagonalmatrix te maken zullen we gebruik maken van een "lumping-proces". Hierbij wordt de integraal (4.16) berekend met behulp van een

Newton-Côtes regel (toegepast op lineaire elementen (zie opm. 10)). Deze integratie-regel passen we ook toe op de overige integralen (4.17) - (4.20). In het geval van (4.19) en (4.20) levert dit eveneens een diagonaal matrix op. De integratie-regel luidt als volgt:

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \sum_{i=1}^N f(x_i) \int_{\Omega} \phi_i(x) dx$$

Integralen (4.16), (4.17) en (4.19) - (4.18) en (4.20) overeenkomstig - gaan hiermee over in:

$$m_{ij} = \delta_{ij} \int_{\Omega} \phi_j ds \quad (4.21)$$

$$s_{x, ij} = \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x_i) \int_{\Omega} \phi_i ds \quad (4.22)$$

$$\tilde{s}_{x, ij} = \delta_{ij} \int_{\Omega} \phi_j \sum_{k=1}^N h_k \frac{\partial \phi_k}{\partial y} ds \quad (4.23)$$

We komen nu uit op het volgende stelsel gewone differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= -M^{-1} s_x \{ (\underline{U}u) + \frac{1}{2} g \underline{H}^2 \} - M^{-1} s_y (\underline{V}u) + M^{-1} \tilde{s}_x g \underline{H} + \\ &+ (\underline{\omega}V) - (\underline{\lambda}U) \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -M^{-1} s_x (\underline{U}v) - M^{-1} s_y \{ (\underline{V}v) + \frac{1}{2} g \underline{H}^2 \} + M^{-1} \tilde{s}_y g \underline{H} + \\ &- (\underline{\omega}U) - (\underline{\lambda}V) \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\frac{dH}{dt} = -M^{-1} s_x (\underline{U}) - M^{-1} s_y (\underline{V}) \quad (4.26)$$

Voor de tijdsintegratie passen we het Sielecki-schema toe.

Dit houdt in dat elk van de drie vergelijkingen met Euler-expliciet wordt opgelost, maar met de volgende modifikatie:

Allereerst wordt \underline{U}^{n+1} ($= \underline{U}(t_n + \Delta t)$) bepaald door (4.24) volgens Euler-expliciet op te lossen. Vervolgens wordt (4.25) eveneens volgens Euler-expliciet

opgelost waarbij echter voor iedere \underline{U} de berekende \underline{U}^{n+1} wordt genomen. Tenslotte lossen we (4.26) op met gebruikmaking van \underline{U}^{n+1} en \underline{V}^{n+1} .

We kunnen nu tot slot het volledig gediskretiseerde stelsel weergeven:

$$\begin{aligned}\underline{U}^{n+1} = \underline{U}^n - \Delta t & \left\{ M^{-1} S_x ([\underline{U}u] + \frac{1}{2} g \underline{H}^2)^n + M^{-1} S_y (\underline{V}u)^n + \right. \\ & \left. - M^{-1} \tilde{S}_x (g \underline{H})^n - (\underline{\omega}V)^n + (\underline{\lambda}U)^n \right\} \quad (4.27a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{V}^{n+1} = \underline{V}^n - \Delta t & \left\{ M^{-1} S_x (\underline{U}v)^n + M^{-1} S_y ([\underline{V}v] + \frac{1}{2} g \underline{H}^2)^n + \right. \\ & \left. - M^{-1} \tilde{S}_y (g \underline{H})^n + (\underline{\omega}U)^{n+1} + (\underline{\lambda}V)^n \right\} \quad (4.27b)\end{aligned}$$

$$\underline{H}^{n+1} = \underline{H}^n - \Delta t \left\{ M^{-1} S_x (\underline{U})^{n+1} + M^{-1} S_y (\underline{V})^{n+1} \right\} \quad (4.27c)$$

Na het berekenen van \underline{U}^{n+1} en \underline{V}^{n+1} , (4.27a) respektievelijk (4.27b), berekenen we \underline{u}^{n+1} en \underline{v}^{n+1} als volgt:

$$u_i^{n+1} = U_i^{n+1}/H_i^n \text{ en } v_i^{n+1} = V_i^{n+1}/H_i^n$$

Voor het geval we na (4.27a) respektievelijk (4.27b) randvoorwaarden met betrekking tot \underline{u}^{n+1} en \underline{v}^{n+1} willen opleggen dan verandert hiermee de waarde van \underline{U}^{n+1} respektievelijk \underline{V}^{n+1} als volgt:

$$U_i^{n+1} = u_i^{n+1} \cdot H_i^n \text{ en } V_i^{n+1} = v_i^{n+1} \cdot H_i^n$$

Na het oplossen van (4.27c) passen we U^{n+1} en V^{n+1} als volgt aan

$$U_i^{n+1} = u_i^{n+1} \cdot H_i^{n+1} \text{ respektievelijk } V_i^{n+1} = v_i^{n+1} \cdot H_i^{n+1},$$

welke waarden worden gebruikt voor de volgende tijdsintegratie.

Opmerking 10:

Bij het berekenen van de elementen matrices heeft men binnen het ontwikkelde programma keuze uit twee elementen:

- i. een driehoekig element met lineaire basisfunkties,
- ii. een vierhoekig element met bilineaire basisfunkties.

In beide gevallen is het lumping proces mogelijk (zie [5]). Beide elementen zijn geleverd door het AFEP-pakket; van de faciliteiten van dit pakket is gebruik gemaakt bij diverse onderdelen in de reken- en presentatiefase (zie [9]).

Wat het numerieke experiment betreft is uitsluitend het bilineaire element (ii) gebruikt.

4.1.1 Stabiliteit van het numerieke schema

Voor een stabiliteitsanalyse gaan we uit van een lineair stelsel; dit stelsel luidt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \lambda u - \omega v = 0 \quad (4.28a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial y} + \lambda v + \omega u = 0 \quad (4.28b)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} + H \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.28c)$$

Op bovengenoemd stelsel passen we de in paragraaf 4.1 beschreven E.E.M. toe, waarna de tijdsintegratie zal plaatsvinden met het beschreven Sielecki-schema.

Onder verwijzing naar [6] geven we voor het lineaire model met $\lambda = 0$ en een uniform vierkant rooster de volgende interne stabiliteitsvoorwaarde:

$$\Delta t < \sqrt{\frac{2}{gH + \omega^2 \Delta x^2}} \Delta x \approx \sqrt{\frac{2}{gH}} \Delta x \quad (4.29)$$

Bij dit criterium is voor wat betreft de diskretisatie van de afgeleiden naar x en y uitgegaan van centrale differentie.

De in hoofdstuk 4 beschreven ruimte-discretisatie (volgens een E.E.M.) leidt in het geval van een uniform vierkant rooster voor wat betreft de afgeleiden naar x en y eveneens tot centrale differentie. Het stabiliteitscriterium is derhalve overdraagbaar voor ons numerieke schema.

4.2 Numerieke implementaties van de nulde en eerste orde zwak-reflekterende randvoorwaarden

4.2.1 Numerieke implementatie I

Bij de numerieke experimenten zullen we de nulde en de eerste orde ZRrvw'n beschouwen (3.26), (3.30) respektievelijk (3.27), (3.31).

Er zij opgemerkt dat de randvoorwaarden achteraf, dat wil zeggen na iedere tijdstap worden opgelegd. Dit is mogelijk daar we werken met een expliciet schema (Sielecki).

In het volgende gebruiken we de volgende notaties:

- u^{-n+1} , v^{-n+1} en ϕ^{-n+1} ; de numerieke waarden voor u , v en ϕ op $t=t_{n+1}$, voordat de ZRrvw'n worden opgelegd
- u^{n+1} , v^{n+1} en ϕ^{n+1} ; de waarden voor u , v en ϕ na het opleggen van de ZRrvw'n; dus de beginwaarden voor de volgende tijdstap.

A. We zullen ons allereerst bezighouden met nulde orde ZRrvw'n (3.26) en (3.30). Gemakshalve kiezen we $f = 0$ (i.e. geen externe invloeden).

De randvoorwaarde (3.26), geldig bij uitstroming, wordt bij gebruik van (3.22):

$$u^{n+1} - \phi^{n+1} = u_0 - \phi_0 \quad (4.30)$$

In het geval van instroming vinden we naast (4.30) ook nog

$$v^{n+1} = v_0 \quad (4.31)$$

zoals uit (3.30) en (3.22) blijkt.

Relatie (4.30) geeft ons de vrijheid om u^{n+1} als functie van ϕ^{n+1} op te leggen, of andersom. Een tussenform is ook mogelijk, zoals we nog zullen zien.

We onderscheiden derhalve drie gevallen:

I. ϕ^{n+1} als functie van u^{-n+1} , hetgeen ons de volgende relatie oplevert:

$$\phi^{n+1} = u^{-n+1} - u_o + \phi_o,$$

daarnaast

$$u^{n+1} = u^{-n+1}, v^{n+1} = v^{-n+1} \text{ in geval van uitstroming,}$$

en

$$u^{n+1} = u^{-n+1}, v^{n+1} = v_o \text{ in geval van instroming.}$$

II. u^{n+1} als functie van ϕ^{-n+1} . Dit levert ons de volgende relatie:

$$u^{n+1} = \phi^{n+1} + u_o - \phi_o;$$

daarnaast nemen we

$$\phi^{n+1} = \phi^{-n+1}, v^{n+1} = v^{-n+1} \text{ in geval van uitstroming}$$

en

$$\phi^{n+1} = \phi^{-n+1}, v^{n+1} = v_o \text{ in geval van instroming.}$$

III. In het één-dimensionale model zijn de grootheden $u-\phi$ en $u+\phi$ bekend als de Riemann-invarianten, respektievelijk de inkomende en uitgaande. Deze grootheden volgen uit de karakteristieke formulering van het stelsel (zie (2.15) en (2.16)).

Nemen we in het twee-dimensionale model de bikarakteristieke strips parallel aan de open rand in $x = L$ (zie 2.12)-(2.14) met $\theta = 0$) dan verkrijgen we de volgende grootheden $u-\phi$, v en $u+\phi$.

De grootheid $u+\phi$ is, vergelijkbaar met de uitgaande Riemann-invariant in het één-dimensionale model, een uitgaande grootheid.

Aan de open rand in $x=L$ schrijven we de inkomende grootheden voor (in geval $U_f > 0$ is dat $u-\phi$ en in geval $U_f < 0$ zijn dat $u-\phi$ en v); hierdoor dienen de uitgaande grootheden ($u+\phi$ en v als $U_f > 0$ en $u+\phi$ als $U_f < 0$) niet te worden beïnvloed (zie [8]).

Door nu, uitgaande van (4.30) δf u^{n+1} δf ϕ^{n+1} voor te schrijven zou hiermee de waarde van $u^{n+1} + \phi^{n+1}$ veranderen. We zullen dit verhinderen door

$$u^{n+1} + \psi^{n+1} = \bar{u}^{n+1} + \bar{\psi}^{n+1}$$

te nemen.

In combinatie met (4.30) volgt nu:

$$u^{n+1} = \frac{1}{2}(u^{n+1} + \bar{\psi}^{n+1}) + \frac{1}{2}(u_0 - \bar{\psi}_0),$$

$$\psi^{n+1} = \frac{1}{2}(u^{n+1} + \bar{\psi}^{n+1}) - \frac{1}{2}(u_0 - \bar{\psi}_0).$$

Daarnaast nemen we

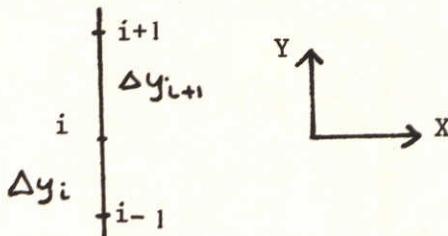
$$v^{n+1} = \bar{v}^{n+1} \text{ in het geval van uitstroming}$$

en

$$v^{n+1} = v_0 \text{ bij instroming.}$$

B. We beschouwen vervolgens ZRrvw'n (3.27) en (3.31). Ook nu laten we externe invloeden buiten beschouwing ($f = 0$).

De afgeleide naar y zullen we als volgt behandelen. Beschouw een rand als in figuur 5, met hierop een aantal randpunten (hun ligging hoeft niet equidistant te zijn).



Figuur 5 $\Delta y_i = (y_i - y_{i-1})$, $p_i = p(x_i, t)$

We gaan uit van de grootheid $p(x, y, t)$. De afgeleide van p in de y -richting in het i^e -punt kunnen we als volgt weergeven:

$$\frac{\partial p_i}{\partial y} = \frac{\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta y_{i+1}} p_{i+1} - \frac{\Delta y_{i+1}}{\Delta y_i} p_{i-1} \right)}{(\Delta y_{i+1} + \Delta y_i)} + \frac{(\Delta y_{i+1} - \Delta y_i)}{\Delta y_{i+1} \cdot \Delta y_i} p_i \quad (4.32)$$

Gaan we uit van een ekwidistant rooster dan gaat (4.32) over in:

Gaan we uit van een ekwidistant rooster dan gaat (4.32) over in:

$$\frac{\partial p_i}{\partial y} = \frac{(p_{i+1} - p_{i-1})}{2\Delta y} \quad (4.33)$$

In bijlage 5 zal worden aangegeven hoe we te werk gaan in het geval van een willekeurige open rand, waarvan de ligging niet evenwijdig is aan de y-as. Afgeleiden in de y-richting gaan over in afgeleiden in de tangentiële richting van de rand; u en v zijn de snelheidskomponenten in respectievelijk de normaal en de tangentiële richting.

In punten waar de open rand begrensd is aan een gesloten rand, bijvoorbeeld wanneer $i-1$ een punt van de gesloten rand is, i een overgangspunt en $i+1$ een punt van de open rand, nemen we voor (4.32) en (4.33):

$$\frac{\partial p_i}{\partial y} = \frac{(p_{i+1} - p_i)}{\Delta y_{i+1}} \quad (4.32a)$$

We zullen in het volgende uitgaan van (4.33). Voor U_f en ψ_f kiezen we de waarden van u en ϕ in het betreffende punt van de rand op $t=t_{n+1}$ (zie opmerking 11).

Relatie (3.27) gaat hiermee over in:

$$(u_i^{n+1} - \psi_i^{n+1}) = u_i^n - \psi_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta y} u_i^{n+1} (v_{i+1}^{-n+1} - v_{i-1}^{-n+1}) \quad (4.34)$$

De randvoorwaarde (3.31b) gaat over in:

$$u_i^{n+1} - \psi_i^{n+1} = u_i^n - \psi_i^n \quad (4.35)$$

en (3.31a) in:

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta t}{2\Delta y} (u_i^{n+1} + \psi_i^{n+1}/2) \cdot (u_{i+1}^{n+1} + \psi_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} - \psi_{i-1}^{n+1}) \quad (4.36)$$

Bij (4.34) en (4.35) hebben we dezelfde keuzemogelijkheden als onder A. Voor de implementatie gaan we echter uit van de resultaten van A. De implementatie, welke het gunstigst uit de numerieke berekeningen naar voren komt, zal als uitgangspunt dienen bij (4.34) en (4.35).

In het geval van uitstroming geldt bovendien:

$$v^{n+1} = \frac{-n+1}{v}$$

Bij instroming zal allereerst (4.35) worden opgelegd, daarna (4.36). Hierbij zullen we gebruik maken van de nieuwe waarden u^{n+1} en ϕ^{n+1} voor u en ϕ (en u_f en ϕ_f).

Vooruitlopend op de resultaten in hoofdstuk 5 merken we op dat de tot nu toe genoemde implementatie AI, II, III en BI verantwoordelijk zijn voor een vrij grote numerieke reflektie. Ten einde deze reflektie te verkleinen hebben we enige alternatieve implementaties onderzocht met betrekking tot een een-dimensionaal model. De resultaten hiervan zijn vermeld in de appendix.

Opmerking 11:

Voor de waarden u_f en ϕ_f kiezen we zodanige waarden voor u en ϕ dat we hiermee zoveel mogelijk aansluiten bij het karakter van het numerieke schema voor het inwendige gebied, met name voor wat de tijdsdiskretisatie betreft.

In geval we in (4.34) ϕ^{n+1} opleggen als functie van u^{-n+1} nemen we u^{n+1} voor u_f . Schrijven we u^{n+1} voor als functie van ϕ^{n+1} dan kiezen we u^n voor U_f , doen we dat niet en nemen we u^{n+1} dan zou (4.34) overgaan in een impliciete relatie, hetgeen niet aansluit bij het Sielecki-schema.

4.2.2 Numerieke implementatie II

In de appendix hebben we voor het één-dimensionale model van de ondiepwatervergelijkingen (zonder bodemwrijving, windkrachten en viskeuze termen) enige implementaties van de nulde orde zwak-reflekterende randvoorwaarden onderzocht en onderling vergeleken. Bij deze analyse is duidelijk geworden dat we bij toepassing van het Sielecki-schema voor de tijdsdiskretisatie rekening moeten houden met het feit dat de snelheid (u en v) numeriek een halve tijdstap achterloopt op de grootheid ϕ .

We zullen nu allereerst een extra implementatie beschouwen van de nulde-orde ZRrvw'n (3.26) en (3.30) voor het twee-dimensionale model (AIV); vervolgens bepalen we nog een extra implementatie voor de eerste orde ZRrvw'n (3.27) en

(3.31) (BII).

AIV. Hierbij nemen we de snelheidskomponenten u en v steeds een halve tijdstap achter op de grootheid ϕ .

Randvoorwaarde (3.26) gaat hiermee over in:

$$u^{n+\frac{1}{2}} - \phi^n = u_o - \phi_o \quad (4.37)$$

, waarbij we $u^{n+\frac{1}{2}}$ als volgt benaderen:

$$u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u^{n+1} + u^n}{2}$$

Deze randvoorwaarde schrijven we voor na het berekenen van de grootheid u^{n+1} in (4.27a), zowel bij in- als uitstroming.

In geval van uitstroming schrijven we na het berekenen van v^{n+1} in (4.27b) de grootheid v als volgt voor:

$$v^{n+1} = \bar{v}^{n+1};$$

in het geval van instroming is dat:

$$v^{n+1} = v_o.$$

Na (4.27c), waarin we H^{n+1} berekenen leggen we (3.26) in geval van uitstroming en (3.30b) in geval van instroming op.

We houden hierbij rekening met de halve tijdstap die u en v achterlopen op ϕ . Daarnaast houden we de grootheid $u+\phi$ per tijdstip konstant (zie appendix en hfdst. 4.2.1, AIII).

We kunnen nu de volgende relaties voorschrijven:

$$u^{n+1} - \phi^{n+\frac{1}{2}} = u_o - \phi_o \quad (4.38a)$$

en

$$u^{n+1} + \phi^{n+\frac{1}{2}} = \bar{u}^{n+1} + \bar{\phi}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.38b)$$

waarbij \bar{u}^{n+1} volgt uit (4.37) en:

$$\psi^{n+\frac{1}{2}} = \sqrt{g(H^{n+1} + H^n)/2}$$

Uit (4.38a) en (4.38b) kunnen we de volgende uitdrukkingen voor u^{n+1} en $\psi^{n+\frac{1}{2}}$ afleiden:

$$u^{n+1} = \frac{1}{2}(u^{-n+1} + \bar{\psi}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}(u_o - \psi_o)$$

$$\psi^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u^{-n+1} + \bar{\psi}^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}(u_o - \psi_o)$$

Deze voorschriften leggen we dus op na integratie van (4.27c).

We zullen vervolgens naast BI een extra implementatie van de eerste orde ZRrvw'n beschouwen.

BII. De snelheden lopen numeriek een halve tijdstap achter op ψ . Randvoorwaarde (3.27) voor uitstroming gaat hiermee over in:

$$- U_f^n \cdot \frac{\partial v^n}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} (u^n - \psi^{n-\frac{1}{2}}) = 0 ; \quad (4.39)$$

in geval van instroming hebben we de volgende relaties:

$$\frac{\partial}{\partial t} (u^n - \psi^{n-\frac{1}{2}}) = 0 \quad (4.40a)$$

en

$$\frac{\partial v^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} + \frac{1}{2}(u_f^{n+\frac{1}{2}} + \psi_f^n/2) \frac{\partial}{\partial y} (u^{n+\frac{1}{2}} + \psi^n) = 0 \quad (4.40b)$$

waarbij we de volgende benaderingen hanteren:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \approx \frac{\psi^n - \psi^{n-1}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial v^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} \approx \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t}$$

en

$$u^{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{u^{n+1} + u^n}{2}$$

De afgeleiden in de y -richting (in het algemene geval in de richting langs de rand) benaderen we op dezelfde wijze als we in BI hebben beschreven en gedaan.

De bevroren grootheden nemen we op dezelfde tijdstippen als overeenkomende grootheden in die relatie.

Uit (4.39) en (4.40a) leiden we een uitdrukking voor u^{n+1} af; deze relatie schrijven we na de berekening van U^{n+1} in (4.27a) voor.

Na (4.27b) leggen we in geval van uitstroming

$$v^{n+1} = v^n$$

op en in geval van instroming relatie (4.40b).

Na de integratie van (4.27c) voor de berekening van H^{n+1} leggen we (3.27) en (3.31b) op in geval van uitstroming resp. instroming. De numerieke implementatie leiden we achtereenvolgens af uit:

$$\frac{\partial}{\partial t} (u^{n+\frac{1}{2}} - \phi^n) - u^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial v^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y} = 0 \quad (4.41a)$$

respektievelijk

$$\frac{\partial}{\partial t} (u^{n+\frac{1}{2}} - \phi^n) = 0 \quad (4.41b)$$

waarbij we de termen als volgt benaderen:

$$\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial \phi^n}{\partial t} \approx \frac{\phi^{n+\frac{1}{2}} - \phi^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}$$

$$u^{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{u^{n+1} + u^n}{2}$$

$$\text{met } \phi^{n+\frac{1}{2}} = 2/g(H^{\frac{n+1}{2}} + H^{\frac{n}{2}})/2$$

Daarnaast nemen we:

$$u^{n+1} + \phi^{n+\frac{1}{2}} = \bar{u}^{n+1} + \bar{\phi}^{n+\frac{1}{2}} . \quad (4.42)$$

Uit (4.41a) respektievelijk (4.41b) in combinatie met (4.42) kunnen we een uitdrukking voor u^{n+1} en één voor $\phi^{n+\frac{1}{2}}$ afleiden. Deze relaties zijn:

$$\begin{aligned} \phi^{n+\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{2} u^n + \frac{1}{2} \phi^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \Delta t u^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial y} \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{u}^{n+1} + \frac{1}{2} \bar{\phi}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$u^{n+1} = \bar{u}^{n+1} + \bar{\phi}^{n+\frac{1}{2}} - \phi^{n+\frac{1}{2}}$$

respektievelijk

$$\begin{aligned} \phi^{n+\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{2} u^n + \frac{1}{2} \phi^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \bar{u}^{n+1} + \frac{1}{2} \bar{\phi}^{n+\frac{1}{2}} \\ u^{n+1} &= \bar{u}^{n+1} + \bar{\phi}^{n+\frac{1}{2}} - \phi^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Deze voorschriften leggen we op na in (4.27c) H^{n+1} te hebben berekend.

Hiermee sluiten we het hoofdstuk over de implementaties af. Er zijn uiteraard legio alternatieve implementaties denkbaar; we zullen ons echter beperken tot die welke we in het voorgaande hebben beschreven.

Opmerking 12:

Bij het implementeren van de eerste orde ZRrvw'n volgens BII is, evenals bij AIV, de equivalente vorm van de uitgaande Riemann-invariant $u' + \psi'$ in de numerieke behandeling meegenomen. Juister zou in dit geval zijn geweest in plaats van deze uitgaande grootheid, die van de nulde orde is, bij de numerieke implementatie de equivalente vorm van de uitgaande Riemann-invariant van de eerste orde in aanmerking te nemen.

In het geval van uitstroming zijn er twee uitgaande grootheden waarvan de eerste orde benaderingen zijn: $\frac{\partial}{\partial t}(u' + \psi')$ en $\frac{\partial}{\partial t}v' + \frac{1}{2}(U_f - \psi_f) \frac{\partial}{\partial y}(u' - \psi')$.

Hebben we te maken met instroming dan is er één uitgaande grootheid; deze luidt: $\frac{\partial}{\partial t}(u' + \psi') - U_f \frac{\partial}{\partial y}v'$.

(Voor de nulde orde zijn dit respectievelijk $u' + \psi'$, v' en $u' + \psi'$).

In dit verslag zullen we ons echter niet meer bezighouden met uitgaande grootheden van de eerste orde. Voor wat de ZRrvw'n van de eerste orde betreft beperken we ons derhalve tot de implementatie BI en BII. De resultaten van deze implementaties vormen dus slechts een indicatie voor de eerste orde ZRrvw'n.

5 Numerieke experimenten

5.1 Beschrijving van het testgeval

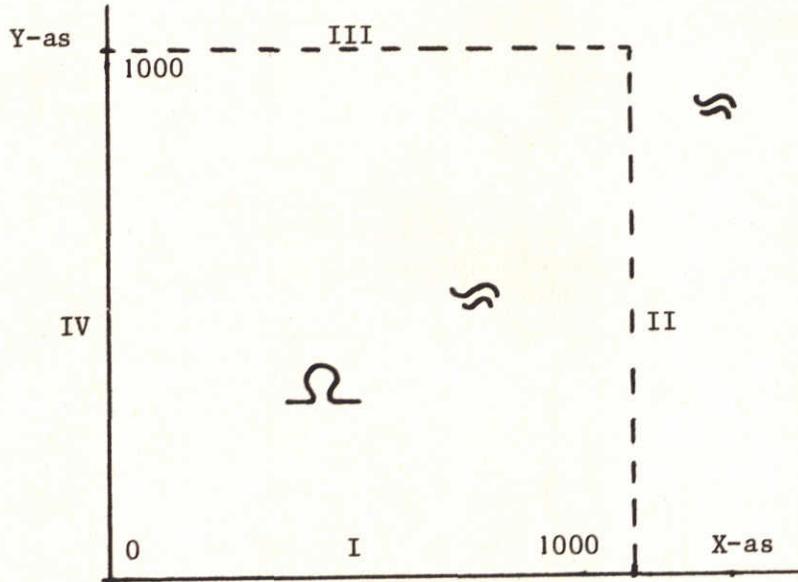
We zullen nu het effect van diverse implementaties van ZRrvw'n onderzoeken door middel van een numeriek experiment. We gaan hierbij uit van een vierkante geometrie waarbij we beginwaarden opleggen voor water niveau en snelheden:

$$\zeta(x, y, o) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{40000}\right)$$

$$u(x, y, o) = 0 \quad (5.1)$$

$$v(x, y, o) = 0$$

met $(x, y) \in \Omega = [0, 1000] \times [0, 1000]$ (zie figuur 6)



Figuur 6

Het gebied Ω kent twee aaneengesloten open randen, namelijk rand II (in $x = 1000$) en rand III (in $y = 1000$).

Op rand I en IV zijn de normaalsnelheden nul, $v = 0$ respektievelijk $u = 0$.

Verder gaan we uit van:

$$g = 10$$

$$h = 10$$

$\omega = 0$, geen coriolis-krachten

$\lambda = 0$, geen bodemwrijving.

Als gevolg van de beginvoorwaarden en de randvoorwaarden in rand I en IV zullen de snelheden radiaal gericht zijn ten opzichte van de oorsprong (0,0); het golfpatroon zal cirkelvormig rondom de oorsprong zijn. Het verloop van de golf is in figuur 7a - 7l voor opeenvolgende tijdstippen weergegeven.

In het onderhavige testmodel hebben we dus eenvoudigheidshalve voor één kwadrant gekozen waarop we de berekeningen maken. Door een juiste keuze van de randvoorwaarden in rand I en IV kunnen we dit doen zonder hierdoor ernstige afwijkingen te introduceren; de oplossing voor een kwadrant komt nagenoeg overeen met die voor hetzelfde kwadrant in geval we uitgaan van de vier kwadranten tezamen.

Voor de diskretisatie nemen we

$$\Delta x = 50,$$

$$\Delta y = 50.$$

Voor de tijdsdiskretisatie nemen we

$$\Delta t = 5$$

met $t \in [0, 210]$.

Met de keuze van deze tijdstap wordt ruim aan het stabiliteitscriterium voldaan (zie (4.29) met $g = 10$ en $H \approx 10$).

In de randen II en III leggen we een ZRrvw op, daarbij uitgaande van de in paragraaf 4.2 behandelde implementaties.

Voor de stationaire oplossing kiezen we:

$$u_0 = 0, v_0 = 0 \text{ en } \phi_0 = 2\sqrt{gh}.$$

Ten einde de reflekties te berekenen voeren we een berekening uit over een groter gebied Ω' dat Ω omvat (zie figuur 8).

De beginvoorwaarden zijn uiteraard voor deze extra berekening gelijk aan (5.1). Aan randen I' en II' geldt eveneens $v=0$ respektievelijk $u=0$.

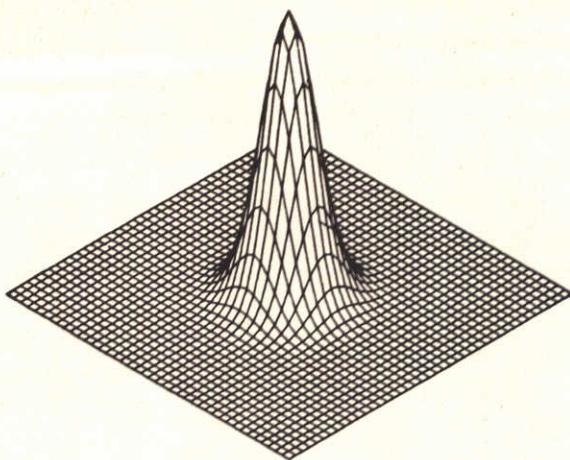


fig. 7a

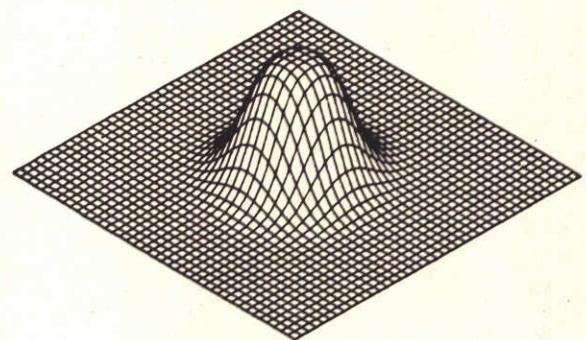


fig. 7b

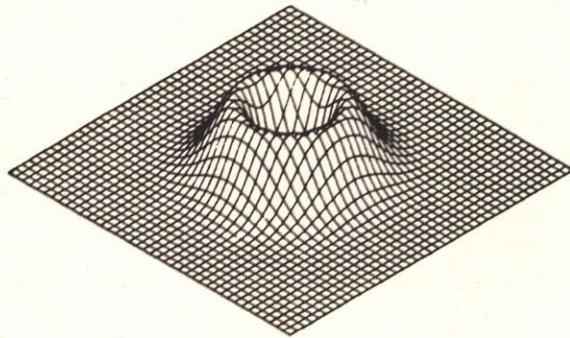


fig. 7c

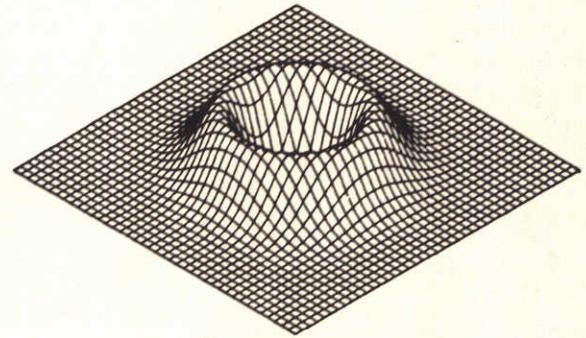


fig. 7d

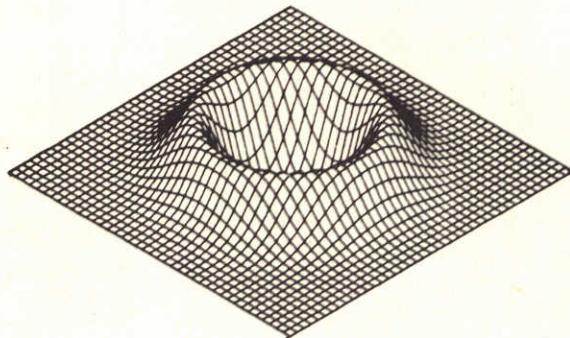


fig. 7e

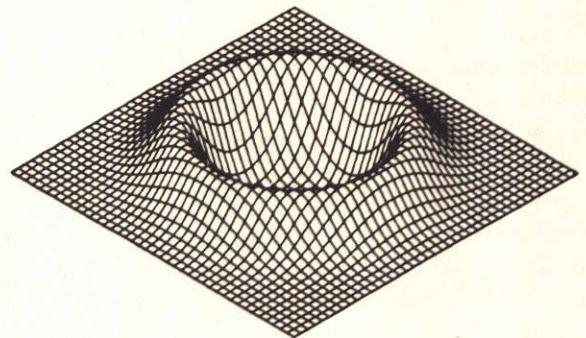


fig. 7f

Figuur 7a-7f.

Voortplanting van de golf.

Beginwaarden: $\zeta(0, x, y) = \exp(-(x^2 + y^2)/200^2)$ mtr
 $u(0, x, y) = v(0, x, y) = 0$ m/s

Constante diepte $h = 10$ mtr. Geen Corioliskrachten, geen bodemwrijving, geen windkrachten en geen viscositeit/diffusie.

$\Delta x = \Delta y = 50$ mtr; $\Delta t = 5$ sec

Plots na iedere 10 seconden (te beginnen met $t = 0$).

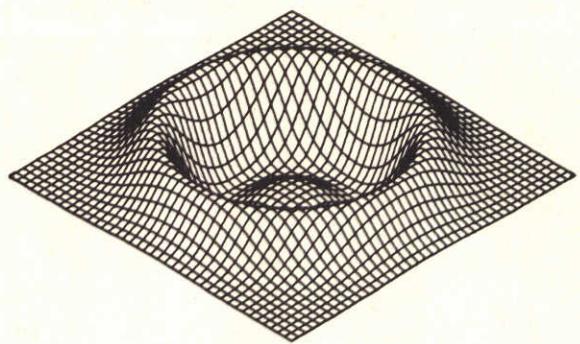


fig. 7g

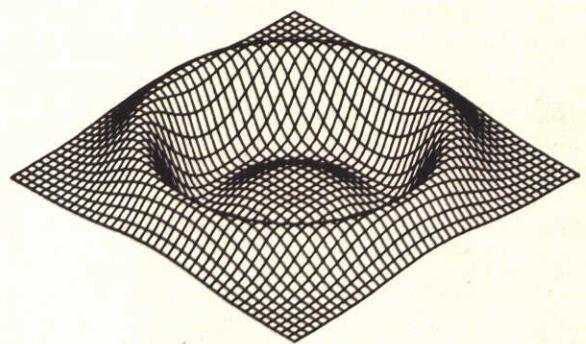


fig. 7h

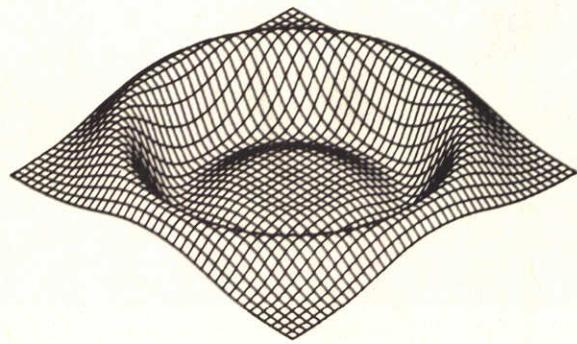


fig. 7i

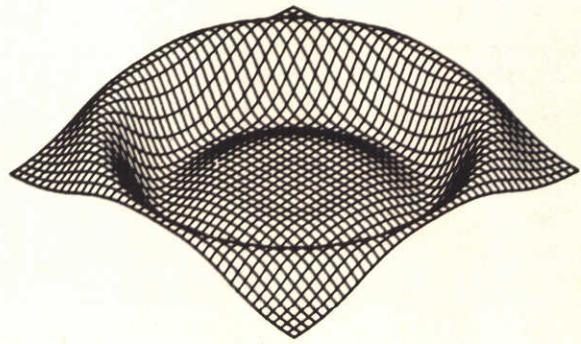


fig. 7j

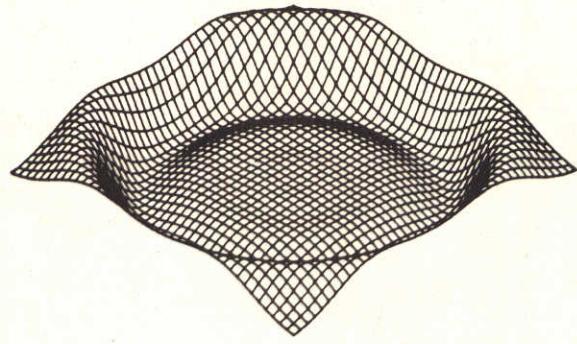


fig. 7k

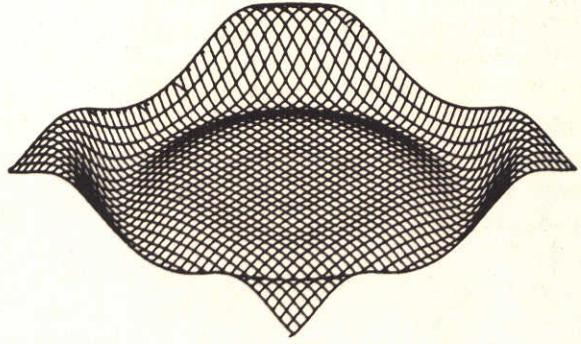
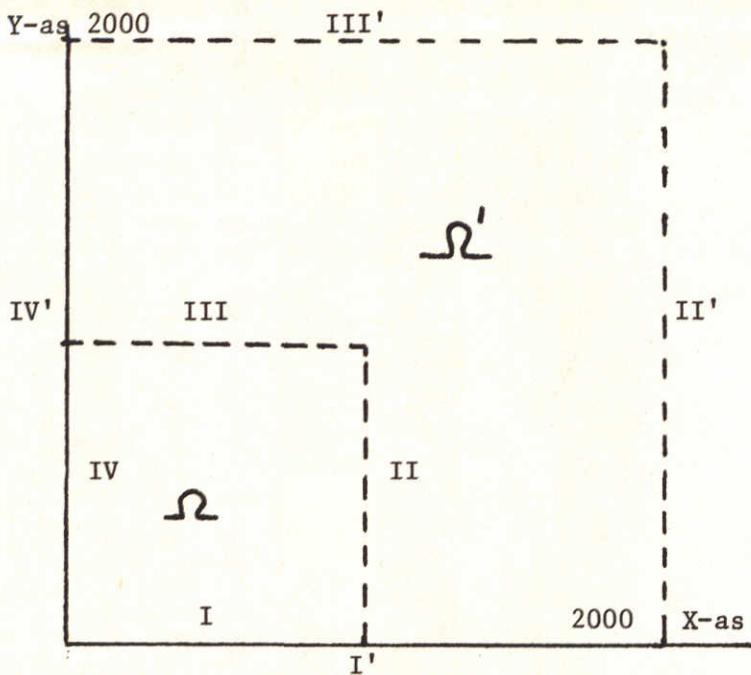


fig. 7l

vervolg op figuur 7a-7f.



Figuur 8

We zorgen ervoor dat Ω' zo groot wordt gekozen dat binnen de integratietijd de reflekties ten gevolge van rand II' en III' het gebied Ω niet hebben bereikt. De reflekties aan rand II en III volgen nu eenvoudig uit het verschil tussen beide oplossingen (voor Ω en Ω').

We zullen de reflektiekoëfficiënt als volgt definiëren:

$$Re(x_i) = \frac{\max_{t_n} |\Delta \zeta(x_i, t_n)|}{\max_{t_n} |\zeta(x_i, t_n)|} \quad (5.2)$$

waarbij

$$\Delta \zeta(x_i, t_n) = \zeta(x_i, t_n) - \zeta'(x_i, t_n),$$

$\zeta(x_i, t_n)$ = de amplitude van de golf in x_i op $t = t_n$, berekend voor Ω
met een ZRrvw,

$\zeta'(x_i, t_n)$ = de amplitude van de golf in x_i op $t = t_n$, berekend voor Ω' .

We hebben op bovenstaande manier de reflektiekoëfficiënten berekend in de roosterpunten van rand II (wgens de symmetrie ten opzichte van de diagonaal $x=y$ geeft rand III dezelfde resultaten).

5.2 Resultaten van de nulde en eerste orde zwak-reflekterende randvoorwaarden

5.2.1 Resultaten numerieke implementatie I

We zullen allereerst de implementaties AI, II en III voor de nulde orde en BI voor de eerste orde ZRrvw'n beschouwen.

De grootheden u , v en ϕ worden in AI, II en III steeds onderling op hetzelfde tijdsniveau genomen.

In figuur 9, 10 en 11 zijn de reflektiekoëfficiënten van AI, II en III als functie van de hoek van inval van de golf weergegeven. Implementatie I levert de beste resultaten, een reflektie van 15% bij loodrechte inval en van ca. 30% bij een invalshoek van 45° , bij implementatie II is dat 18,5% resp. 65% en bij III 16,5% resp. 40%.

We zullen nu voor de implementatie van de eerste orde ZRrvw'n (4.34)-(4.36), de resultaten van de nulde orde in aanmerking nemend, grootheid ϕ opleggen als functie van u . Dit komt neer op de volgende relaties.

$$\phi_L^{n+1} = u_L^{-n+1} - (u_L^n - \phi_L^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta y} u_i^{-n+1} (v_{L+1}^{-n+1} - v_{L-1}^{-n+1})$$

met

$$u^{n+1} = u^{-n+1}, \quad v^{n+1} = v^{-n+1} \quad \text{in geval van uitstroming}$$

en ingeval van instroming

$$\phi_i^{n+1} = u_i^{-n+1} - (u_i^n - \phi_i^n)$$

met

$$u_i^{n+1} = u_i^{-n+1}$$

en

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{2\Delta y} (u_i^{n+1} + \frac{\phi_i^{n+1}}{2}) (u_{i+1}^{n+1} + \phi_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1})$$

De reflektiekoëfficiënten van deze implementatie vinden we in figuur 12; een reflektie van 15% bij loodrechte inval en van ca. 30% bij invalshoek van 45° .

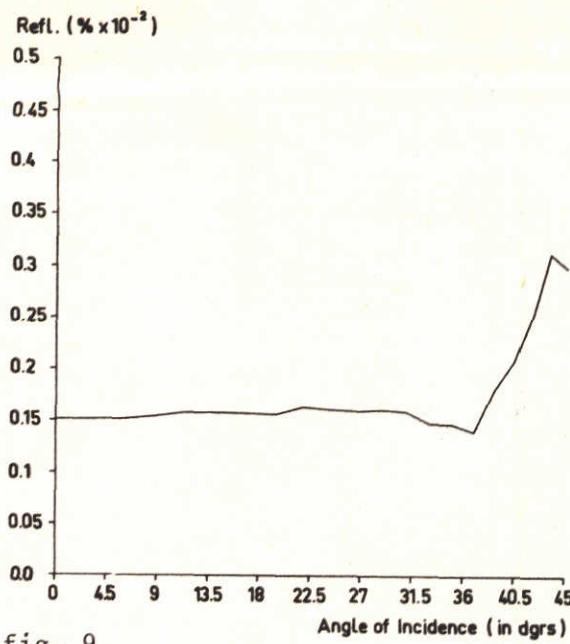


fig. 9

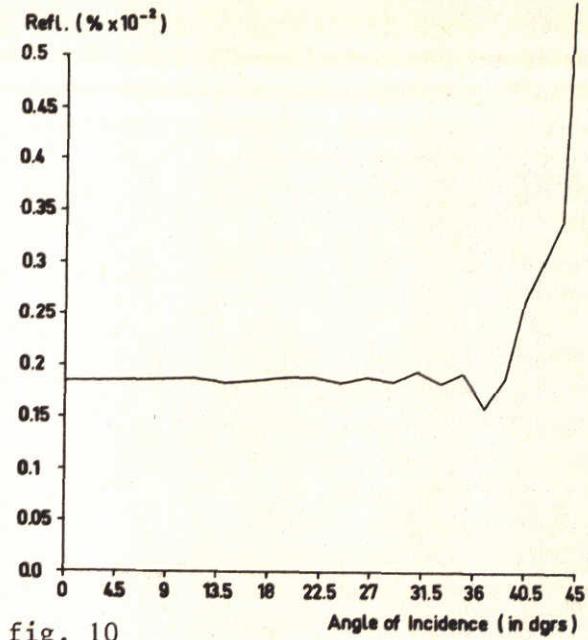


fig. 10

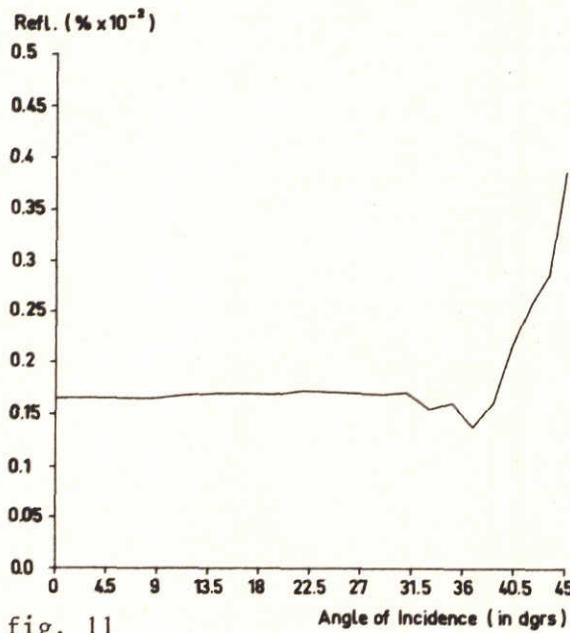


fig. 11

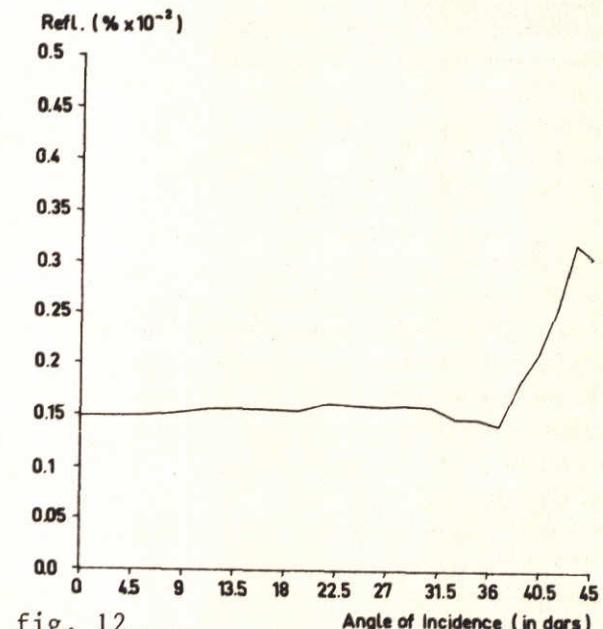


fig. 12

Figuur 9-12

Reflectie-coefficiënten als functie van de hoek van inval.

Numerieke implementaties AI, AII, AIII (nulde orde ZRrvw'n) en implementatie BI (eerste orde ZRrvw'n).

Vergelijking van resultaten van implementatie AI en BI laat ons zien dat de reflekties in beide gevallen nagenoeg hetzelfde zijn. Een mogelijke oorzaak van dit verschijnsel is gelegen in de wijze van implementatie van de ZRrvw'n, waardoor aanzienlijke, door het numerieke schema geïntroduceerde reflekties ontstaan. We zullen hierop later in dit hoofdstuk nog terugkomen.

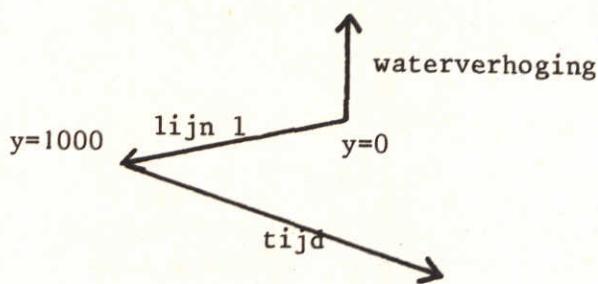
Voor wat betreft implementatie AI hebben we in figuur 13 t/m 15 het verloop van de golf in het gebied Ω weergegeven.

Figuur 13a-13f geeft een beeld van het snelheidsveld op verschillende opeenvolgende tijdstippen. Zoals was te verwachten, is de snelheid vrijwel radiaal gericht, na verloop van enige tijd zien we verstoringen optreden ten gevolge van reflekties aan de open randen (vooral duidelijk in 13f).

Figuur 13g-13l toont ons de reflekties van het snelheidsveld afzonderlijk, zijnde het verschil tussen de snelheden voor het probleem met open randen in $x = 1000$ en $y = 1000$ en het ongestoorde snelheidsveld.

In figuur 14a-14h zijn verschillende hoogteniveaus van de golfamplitude uitgezet. De lijnen van constante hoogte zijn in het begin bij benadering cirkelvormig. Verstoringen hierin zijn enerzijds het gevolg van het gebruikte numerieke schema (zie figuur 14a en 14b), anderzijds het gevolg van de ZRrvw'n aan de open randen (figuur 14e-14h).

In figuur 15a-15c zijn de waarden van ζ langs een lijn 1 evenwijdig aan de y -as als functie van de tijd uitgezet, dit is op de volgende manier gedaan:



In figuur 16a-16c zijn op dezelfde wijze de reflekties uitgezet.

In figuur 17a zijn voor een viertal punten van het gebied Ω de amplituden van de golf ($= \zeta$) uitgezet als functie van de tijd, in figuur 17b is dit gedaan in het geval van een ongestoorde oplossing, (dus voor Ω'). Na verloop van enige tijd treden de reflekties duidelijk naar voren.

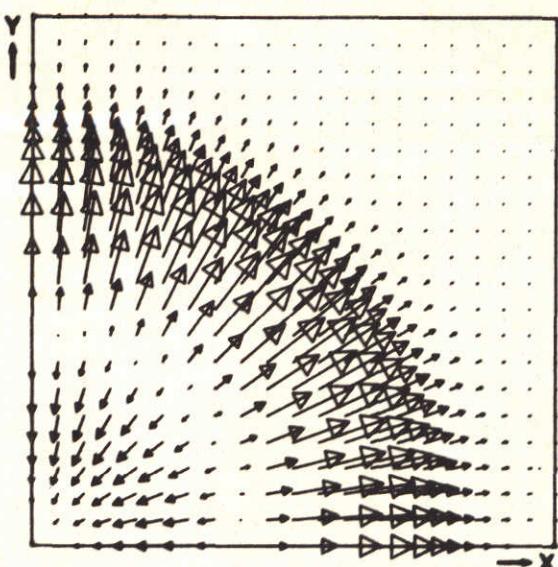


fig. 13a

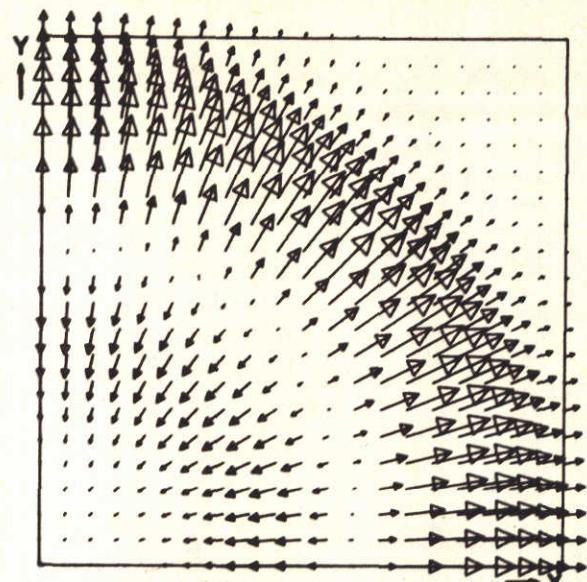


fig. 13b

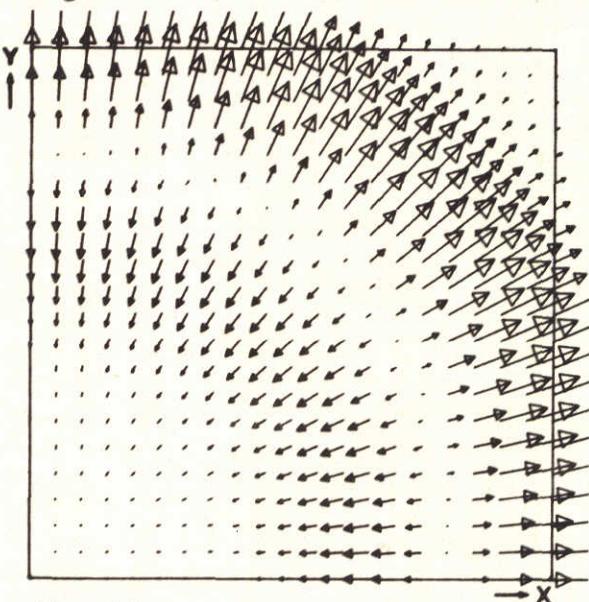


fig. 13c

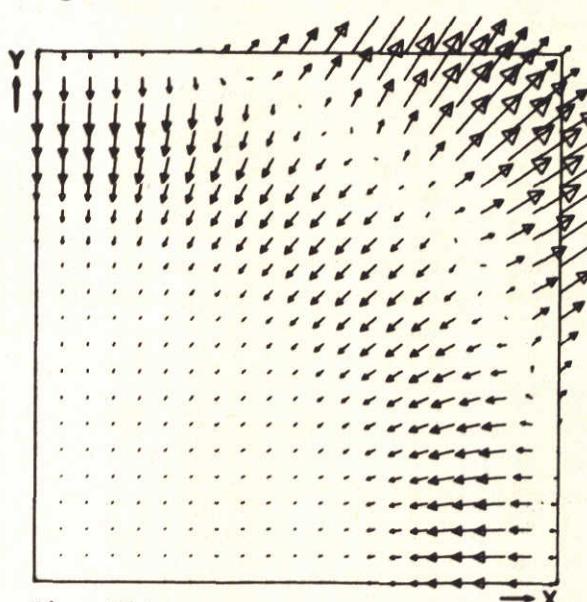


fig. 13d

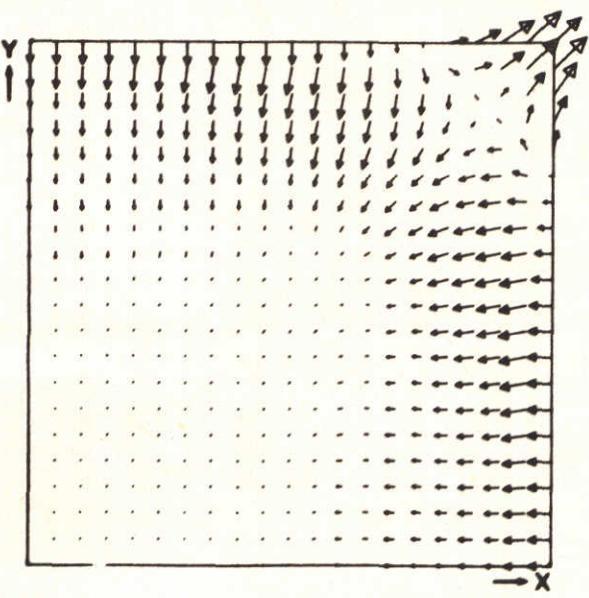


fig. 13e

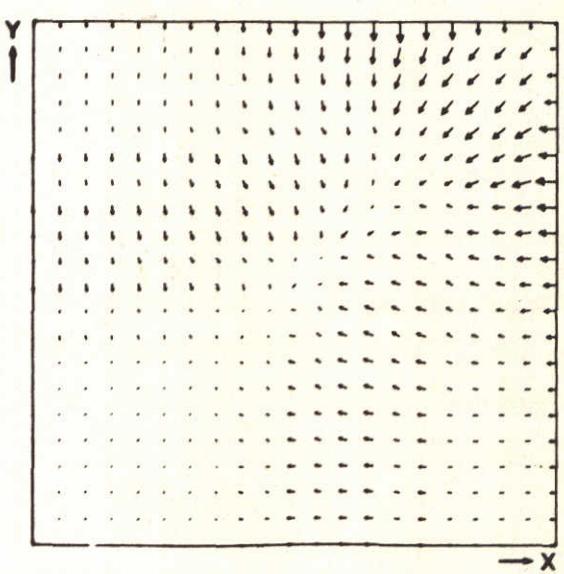


fig. 13f

Figuur 13a-f

Snelheidsveld in eerste kwadrant. Tijdstippen $t = 55$ (20) 155 sec

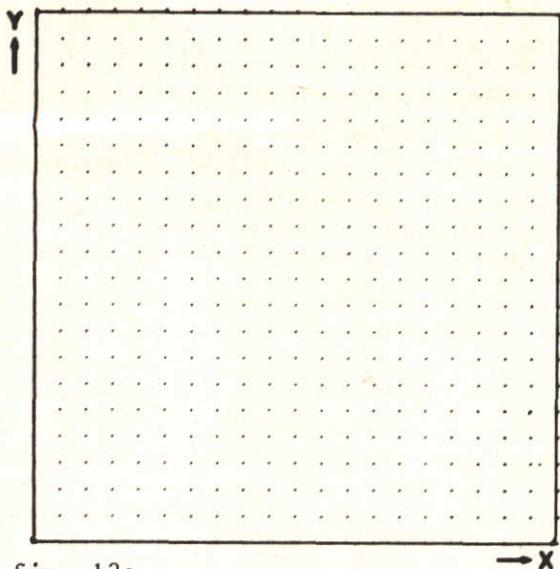


fig. 13g

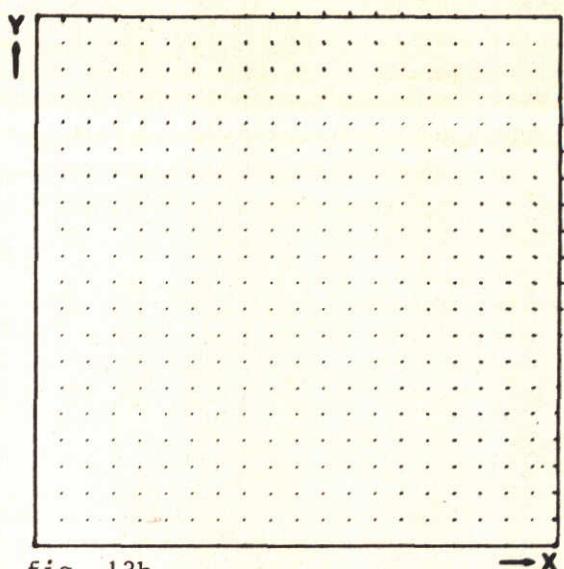


fig. 13h

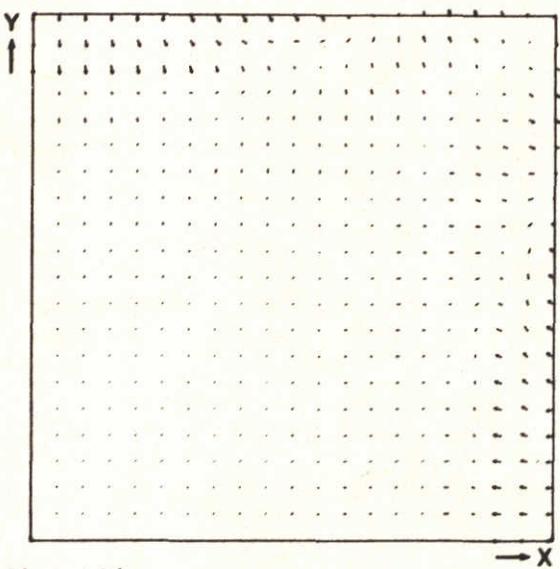


fig. 13i

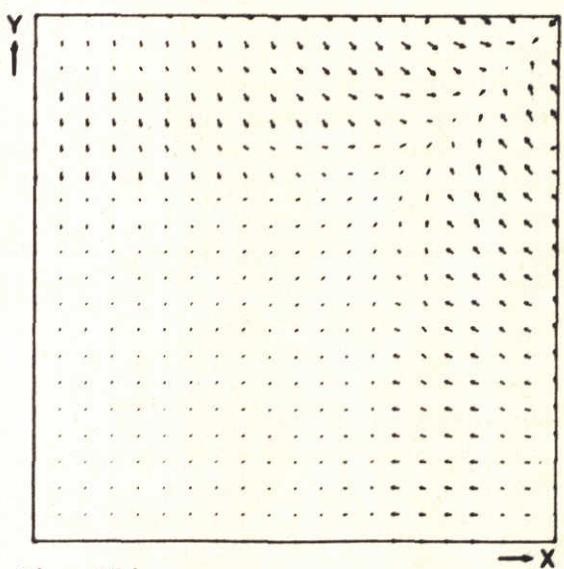


fig. 13j

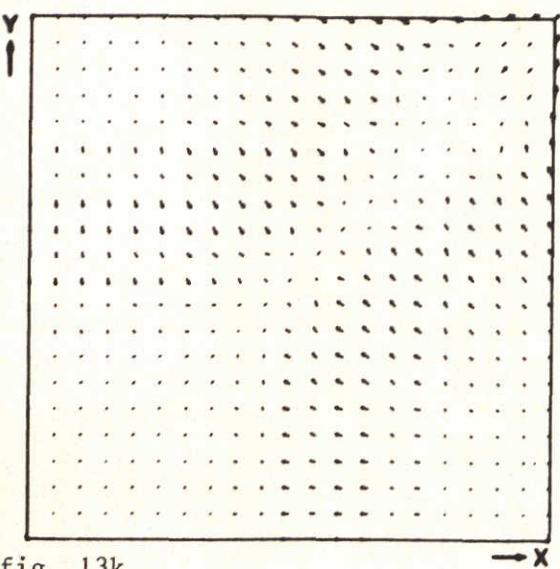


fig. 13k

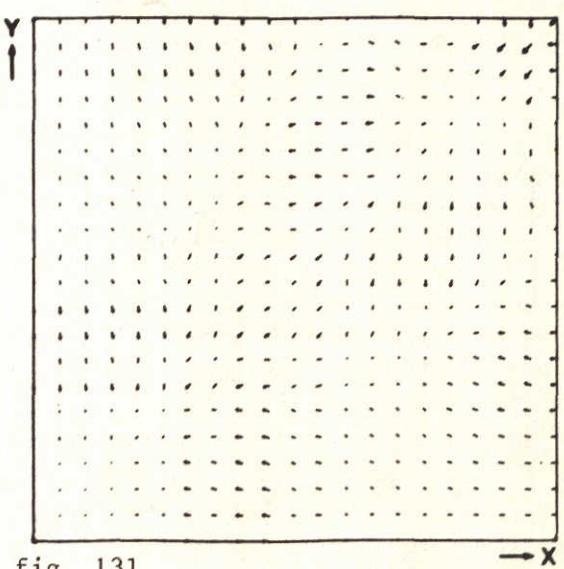


fig. 13l

Figuur 13 g-f

Réflexies in het snelheidsveld; implementatie AI. Tijdstippen $t = 75$ (20) 175.

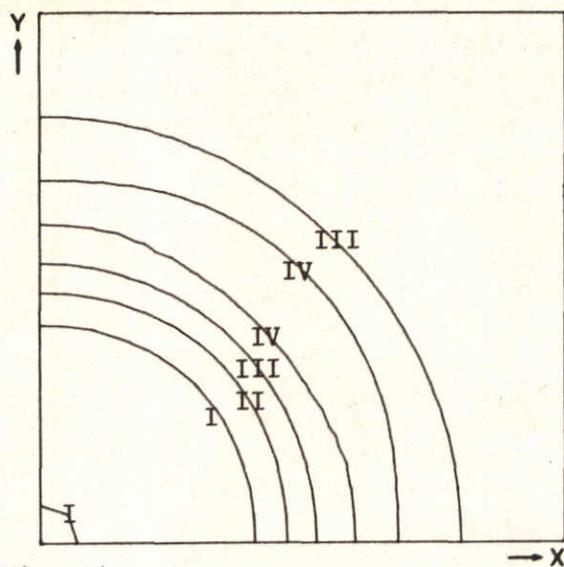


fig. 14a

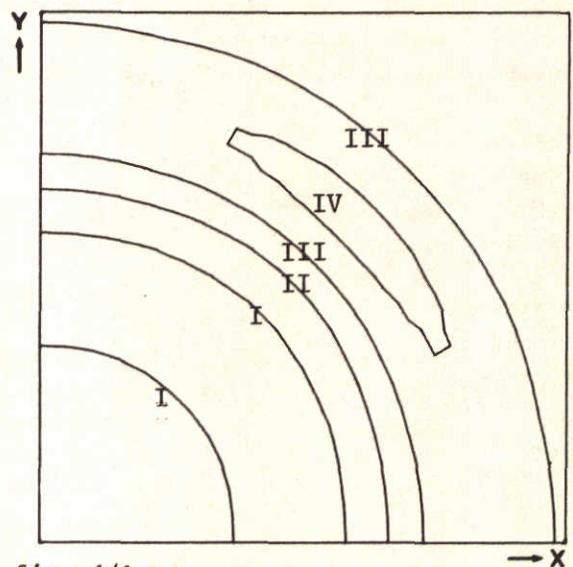


fig. 14b

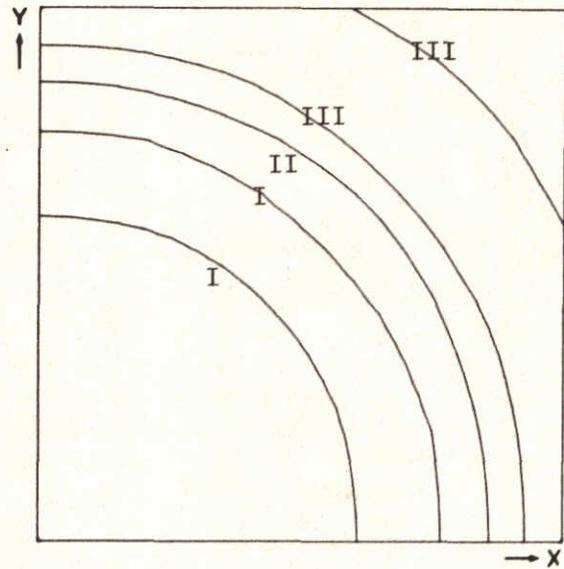


fig. 14c

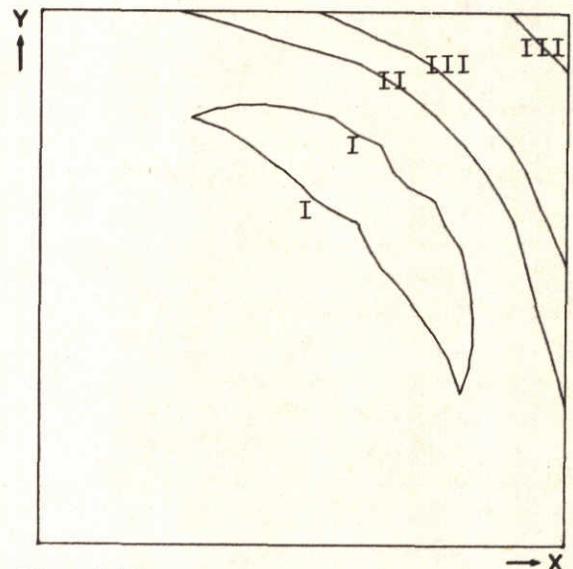


fig. 14d

Figuur 14a-d

Hoogtelijnen van ζ op tijdstippen $t = 55$ (20) 195.

I : -7.5 cm

III : 7.5 cm

II : 0 cm

IV : 15.0 cm

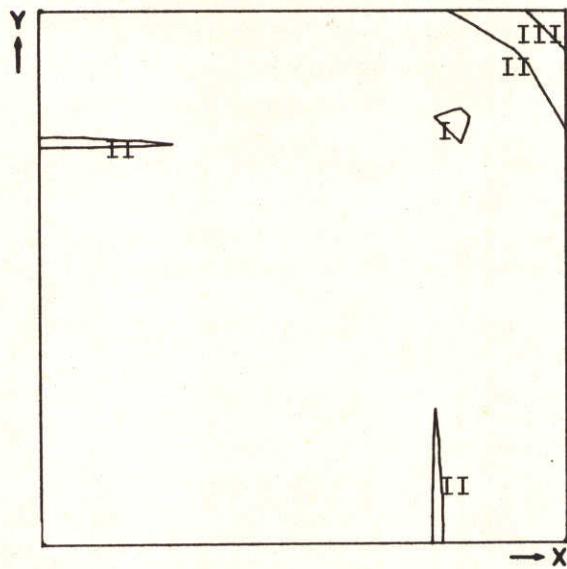


fig. 14e

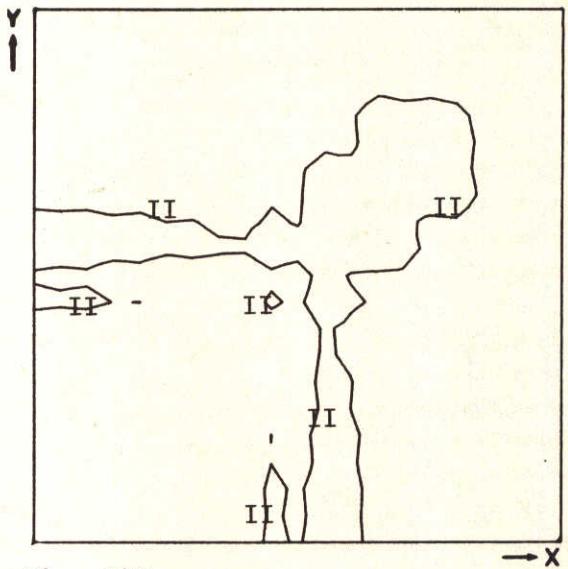


fig. 14f

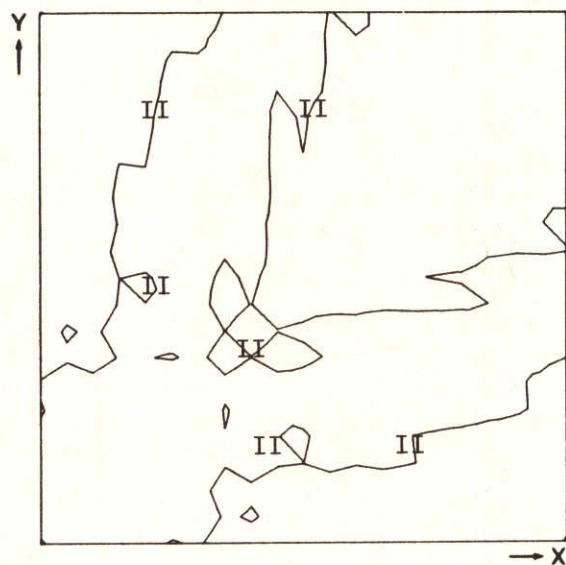


fig. 14g

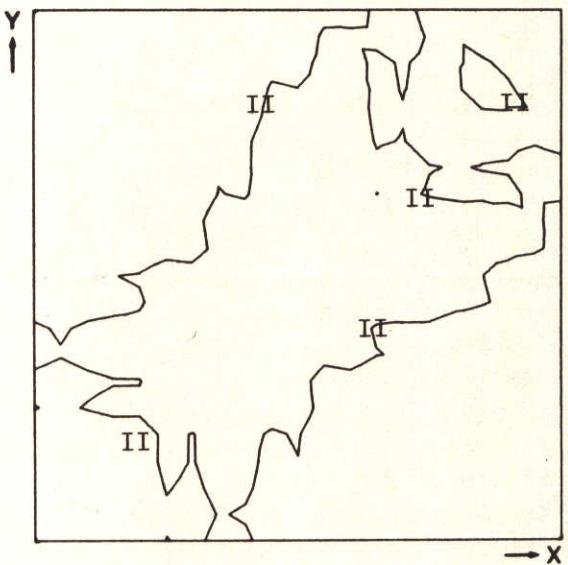


fig. 14h

vervolg van figuur 14a-d.

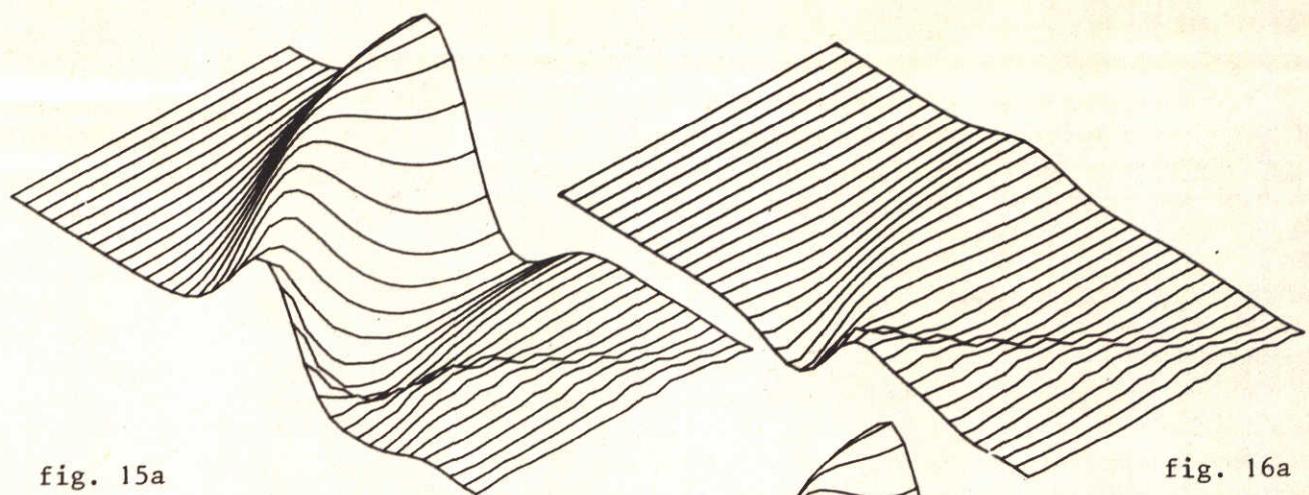


fig. 15a

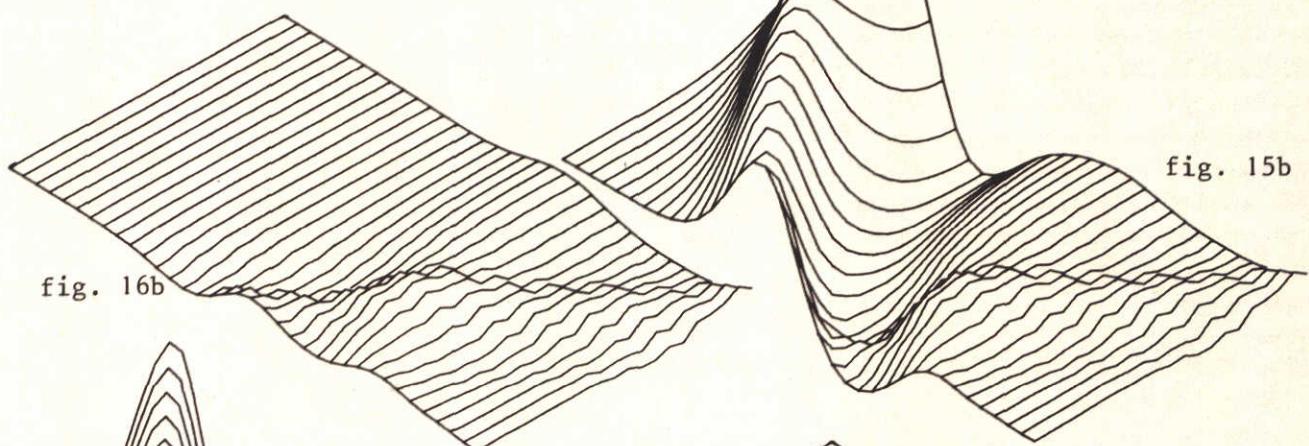


fig. 16a

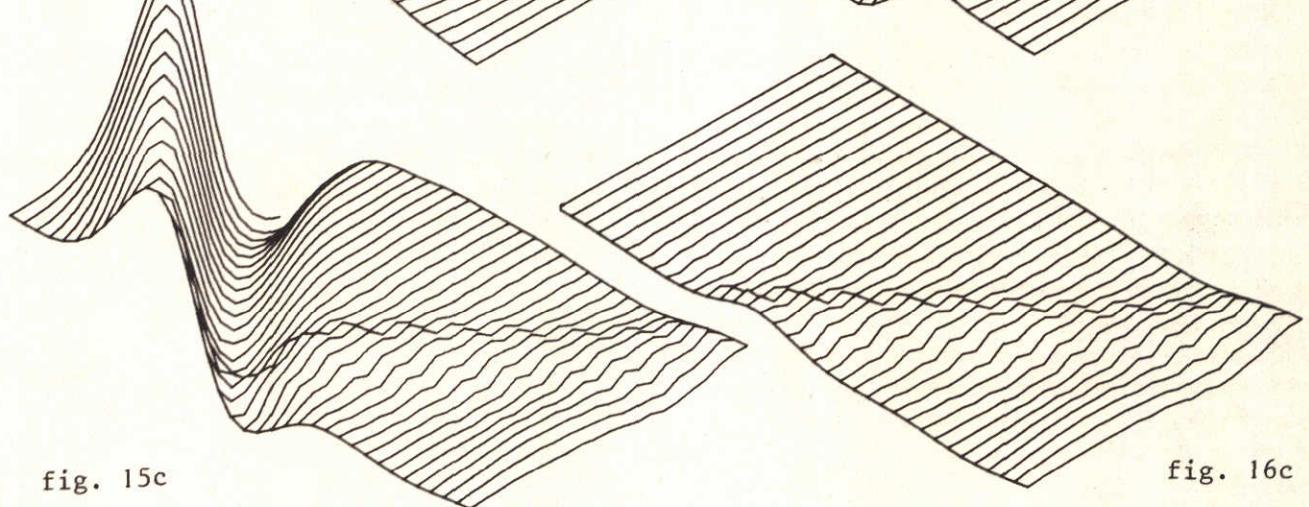


fig. 15b

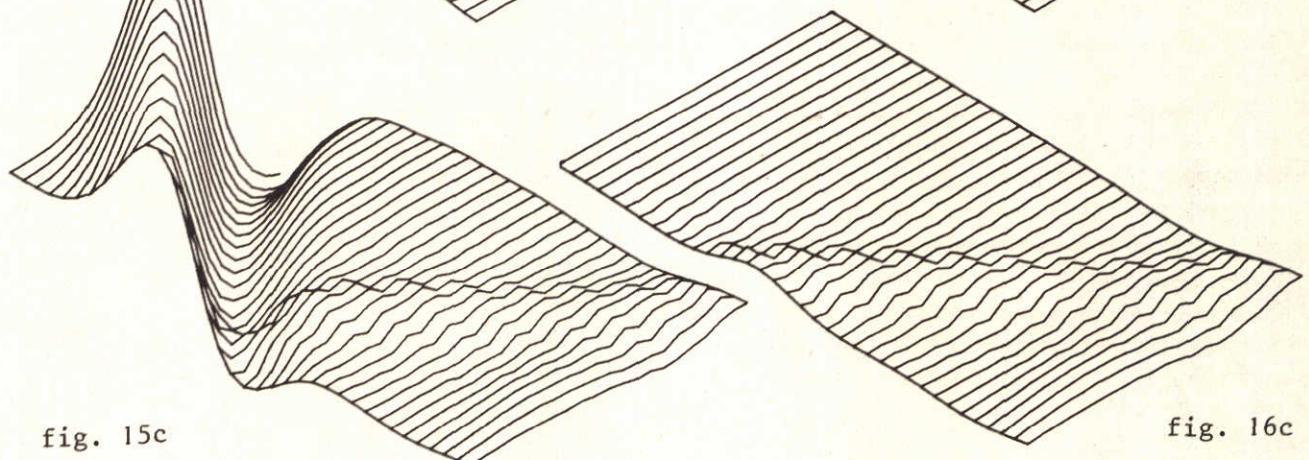


fig. 16b

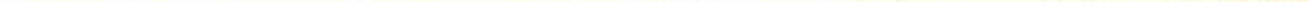


fig. 15c

fig. 16c

Figuur 15a

Waarden van ζ langs $x=1000$ voor opeenvolgende tijdstippen

Figuur 16b

Waarden van $\Delta\zeta$ langs $x=700$

Figuur 15c

Waarden van ζ langs $x=200$

Figuur 16a

Waarden van $\Delta\zeta$ langs $x=1000$

Figuur 15b

Waarden van ζ langs $x=700$

Figuur 16c

Waarden van $\Delta\zeta$ langs $x=200$

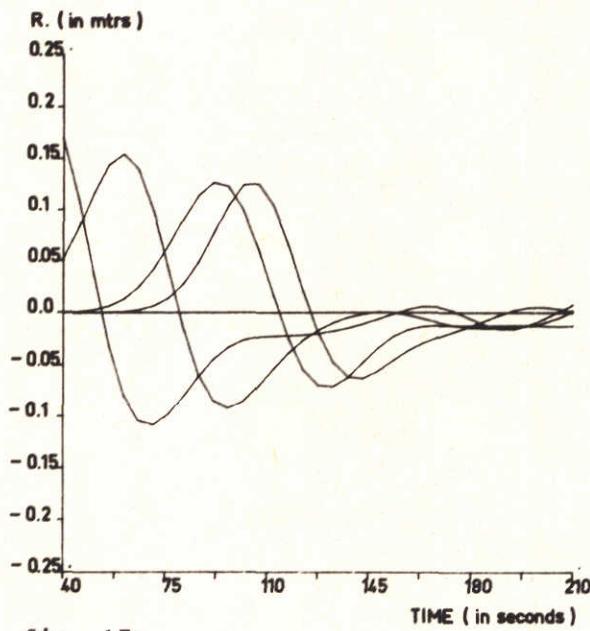


fig. 17a

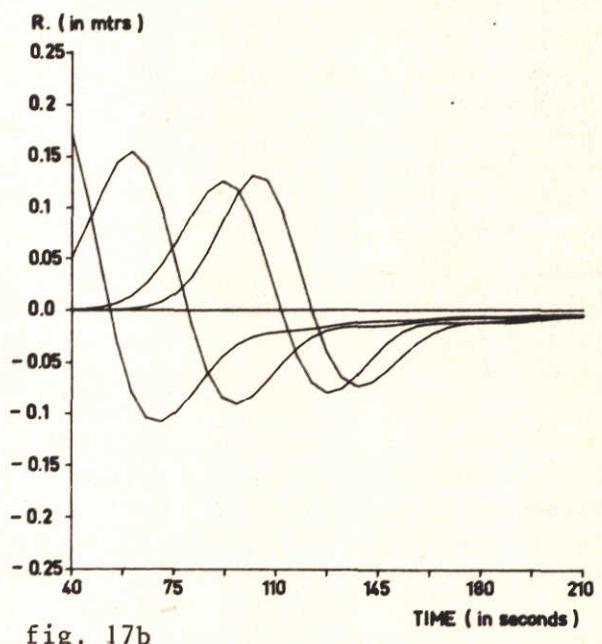


fig. 17b

Figuur 17a-b

Time-histories in punten:

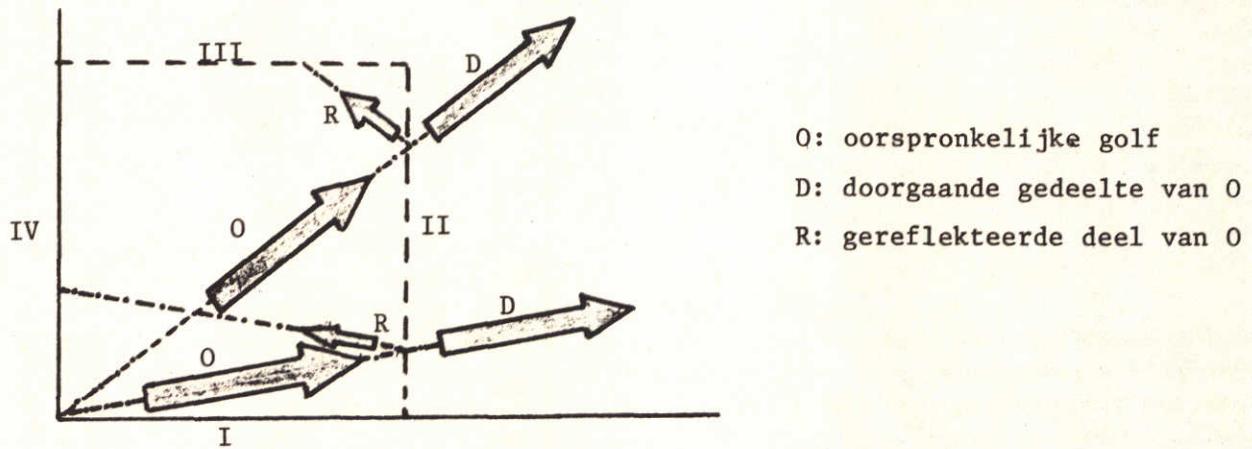
- I : (450,0)
- II : (700,0)
- III : (1000,0)
- IV : (1000,500)

In 17a: ZRrvw'n van nulde orde, implementatie AI.

In 17b: ongestoorde oplossing (zoals berekend voor gebied Ω')

Bij een beschouwing van de gevonden reflektiekoëfficiënten (figuur 9 t/m 12) moeten we rekening houden met het volgende.

Als gevolg van de keuze van het gebied Ω treedt het verschijnsel op, dat gereflekterde golven in rand II na verloop van enige tijd een andere rand bereiken (zie figuur 18).



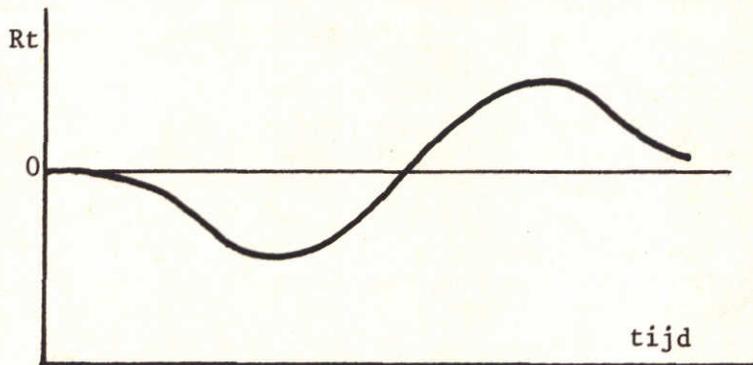
Figuur 18

Een konsekventie hiervan is dat de berekende reflektie aan de randen II of III niet noodzakelijkerwijs uitsluitend een gevolg is van de reflekties aan die betreffende rand, maar reflekties van een andere rand kan bevatten. In figuur 20 is dit verschijnsel grafisch weergegeven voor het punt $x_r = (1000, 800)$ als functie van de tijd.

De uitgezette grootheid is:

$$R_t = \frac{\Delta\zeta(x_r, t_n)}{\max_{t_n} \zeta(x_r, t_n)} \quad (5.3)$$

De reflekties van de oorspronkelijke golf aan een van de open randen, in de buurt van het punt $x = (1000, 1000)$, is allereerst negatief, daarna positief (zie figuur 19).

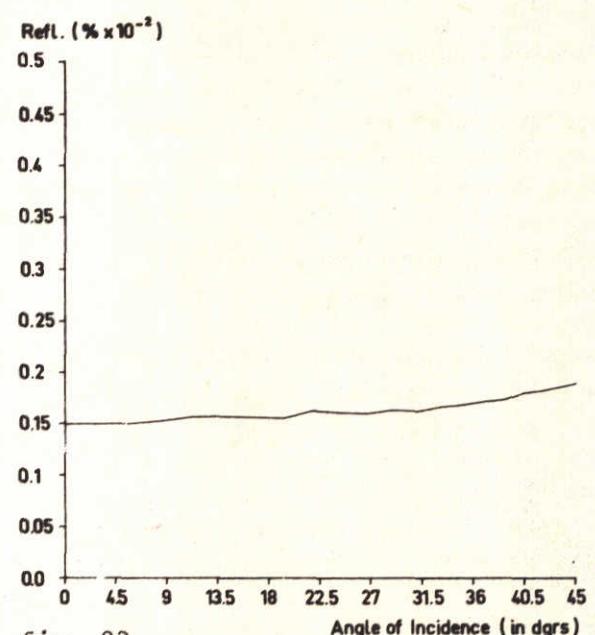
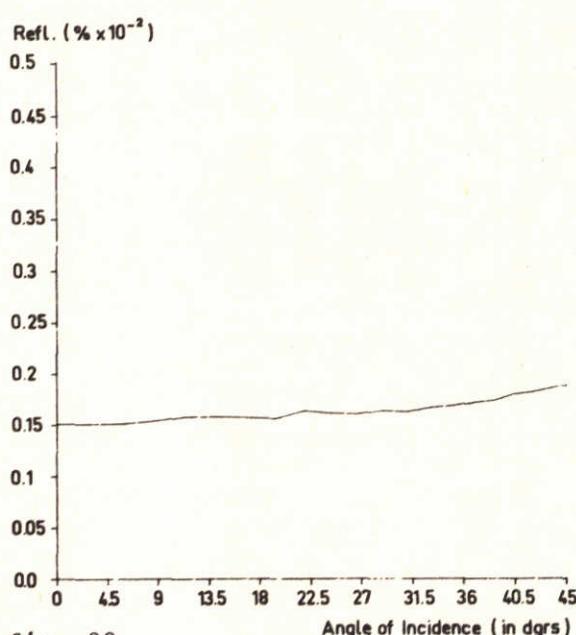
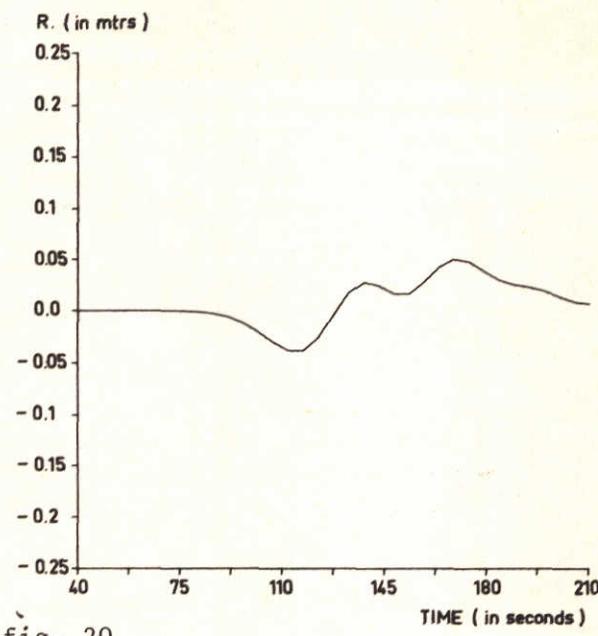


Figuur 19 Reflektie van de golf in x in de buurt van (1000, 1000)

In figuur 20 zien we twee reflekties. De eerste reflektie is het gevolg van reflektie aan rand II zelf; de tweede is afkomstig van rand III. Het verschil in tijd tussen de twee reflekties is gelijk aan de tijd die reflektie 2 nodig heeft om het punt x_r te bereiken (ongeveer 30 sekonden).

Om het effect van de tweede reflektie uit te schakelen hebben we berekeningen uitgevoerd met dezelfde begincondities over het rechthoekige gebied $[0, 1000] \times [0, 2000]$ (zie figuur 21). Aan rand I" en IV" leggen we randvoorwaarden $v=0$ resp. $u=0$ op. Aan rand II" en III" de $ZRrvw$ 'n AI, daarna nog eens voor BI. Reflekties ten gevolge van rand III" zullen voor $t < 210$ het gebied $\Omega (= [0, 1000] \times [0, 1000])$ nog niet hebben bereikt.

De berekende reflekties aan rand II (voor $0 < y < 100$) zijn nu dus uitsluitend het gevolg van $ZRrvw$ 'n aan die rand. De resultaten zijn weergegeven in figuur 22 en 23.



Figuur 20

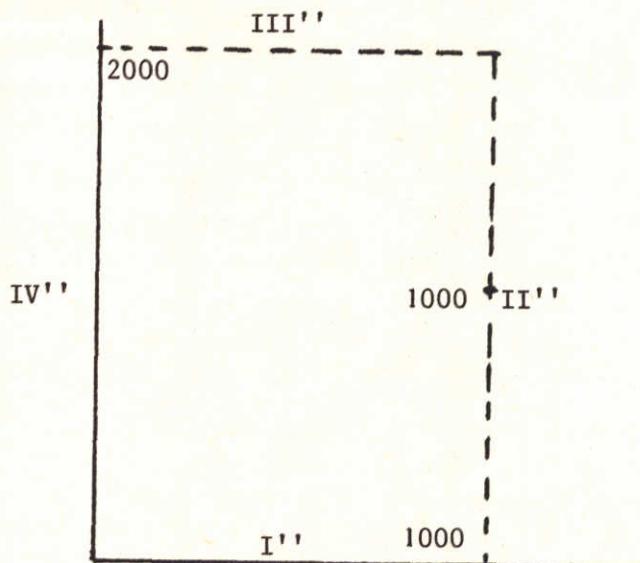
Reflecties in (1000,800) op rand II in de buurt van rand III.

Figuur 22

Selectie-coefficiënte als functie van de hoek van inval, implementatie AI.

Figuur 23

Selectie-coefficiënt als functie van de hoek van inval implementatie BI.



Figuur 21

De reflektiekoëfficiënten verlopen nu vrijwel lineair van ca. 15% tot ca. 19% van loodrechte inval tot inval onder 45° , voor zowel implementatie AI als BI.

In figuur 24a en 24b zijn de waarden van ζ en van $\Delta\zeta$ langs $x = 1000$ als functie van de tijd uitgezet, op identieke wijze als in figuur 15a en 16a. Een vergelijking van 24a en b met figuur 15a en 16a toont ons de effekten van de zogenaamde "tweede" reflektie (van rand III). In figuur 24a en b zijn deze uiteraard afwezig.

De resultaten in figuur 22 en 23 leren ons dat in het kader van het gekozen testgeval de reflekties voor de onderzochte implementaties AI en BI in betrekkelijk geringe mate afhangen van de invalshoek van de golf; een invalshoek van 45° geeft namelijk slechts 4% meer reflekties dan bij loodrechte inval.

We vonden een reflektie van 15% bij loodrechte inval; de oorzaak hiervan kan gevonden worden in:

- de wijze van implementatie van de ZRrvw'n
- het feit dat voor de afleiding van ZRrvw'n het stelsel ondiepwatervergelijkingen hebben moeten lineariseren; bij de numerieke berekeningen is daarentegen niet gelineariseerd, maar zijn we uitgegaan van de ongelineariseerde formulering van het stelsel.

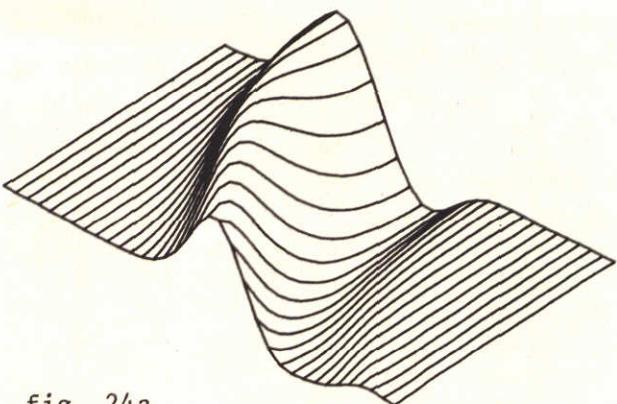


fig. 24a

Figuur 24 a

Waarden van ζ langs $x=1000$ voor opeenvolgende tijdstippen.

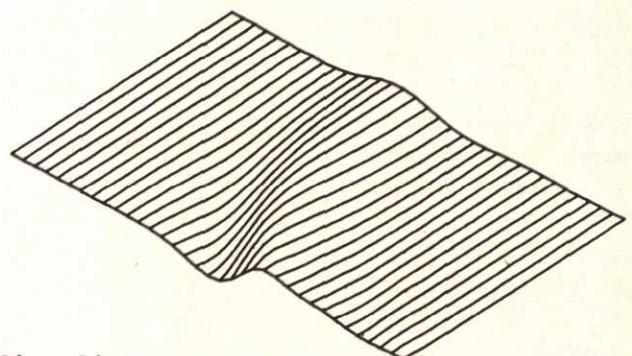
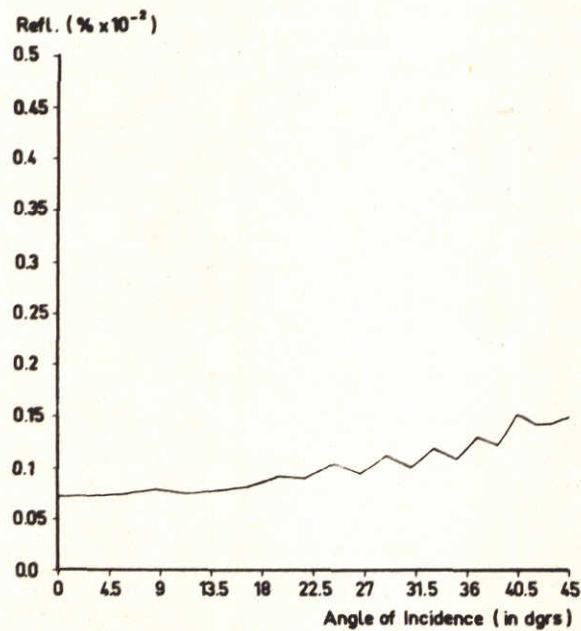


fig. 24b

Figuur 24b

Waarden van $\Delta\zeta$ langs $x=1000$ voor opeenvolgende tijdstippen.



Figuur 25

Reflectie-coefficient voor implementatie AIV en volgens het oude numerieke schema.

Deze numerieke reflekties die zijn ontstaan zijn zodanig overheersend dat zij de kwalitatieve verschillen tussen de nulde en de eerste orde ZRrvw'n wellicht geheel hebben verdoezeld.

In het volgende hoofdstuk zullen we trachten de numerieke reflekties te verkleinen. Daartoe is eerst een één-dimensionaal model onderzocht. De resultaten hiervan zijn vermeld in de appendix.

Tenslotte willen we nog wijzen op de invloed van het numerieke schema zelf. Uit figuur 14a en b is duidelijk geworden dat het gehanteerde schema een ongunstig effect heeft op het verloop van het golfpatroon. Niveaulijnen die cirkelvormig moeten zijn, blijken dit slechts bij benadering te zijn.

In het volgende hoofdstuk (5.3) zullen we een wijziging op de numerieke behandeling invoeren, die wat dit punt betreft een duidelijke verbetering inhoudt. Vooruitlopend hierop vermelden we dat het golfverloop zoals weergegeven in figuur 7 het resultaat is van deze wijziging.

5.2.2 Resultaten numerieke implementatie II

In dit hoofdstuk zullen we de resultaten van de implementaties AIV en BII beschouwen. De grootheden u en v lopen numeriek een halve tijdstap achter op ϕ . Hiermee is bij de behandeling van de ZRrvw'n rekening gehouden (zie hoofdstuk 4.3.2).

De berekeningen die zijn gemaakt betreffen het gebied zoals weergegeven in figuur 21. Reflekties ten gevolge van de tweede open rand (III) zijn dus niet merkbaar voor $0 \leq t \leq 210$.

De reflektiekoëfficiënten van implementatie AIV (van de nulde orde ZRrvw'n) zijn in figuur 25 als functie van de hoek van inval weergegeven. De reflekties lopen van 6,5% bij loodrecht invallende golven tot 17% bij een invalshoek van 45° . Vergelijken we dit met de resultaten in het vorige hoofdstuk dan zien we een duidelijke verbetering van 8,5% bij loodrechte inval (6,5% tegen 15%) teruglopend tot 2% bij inval onder 45° (17% tegen 19%).

We zien derhalve dat het rekening houden met de halve tijdstap die u en v in dit schema achterlopen op ϕ ten aanzien van de reflekties een aanzienlijke verbetering inhoudt.

Alvorens we implementatie BII numeriek te testen zullen we een wijziging in het numerieke schema invoeren waardoor de verstoringen, die het gevolg zijn van het tot nu toe gehanteerde schema, grotendeels verdwijnen. In het vorige hoofdstuk hebben we namelijk kunnen zien dat het golfpatroon verstoord wordt; niveaulijnen zijn slechts bij benadering cirkelvormig (zie figuur 14a en 14b), tevens blijken waarden van ζ langs de lijn $y=x$ (diagonaal in figuur 14a, etc.) hoger te zijn dan bijvoorbeeld langs $y=0$ of $x=0$ (zie figuur 14b) tot een bedrag van ca. 15%. Berekeningen uitgevoerd met het gewijzigde schema vertonen echter vrijwel geen verstoringen van deze aard.

In hoofdstuk 5.3 zullen we aangeven waaruit deze wijziging bestaat.

Nadat de wijziging in het schema is doorgevoerd hebben we nogmaals implementatie AIV en ter vergelijking implementatie BII getest.

Figuur 26 en 27 geeft ons een beeld van de reflektiekoëfficiënten van beide implementaties. Implementatie BII blijkt hierbij beter te zijn dan AIV: een reflektiekoëfficiënt van 6,7% (AIV: 7%) bij loodrechte inval, oplopend tot 18,6% (AIV: 23,1%) bij inval onder 45° .

Het verloop van het golfpatroon is weergegeven in figuur 28a-f. Verstoringen ten gevolge van het numerieke schema zijn verdwenen (vergelijk met figuur 14a en b).

Een neveneffekt van het toegepaste schema is dat de reflekties sterker hoekafhankelijk zijn geworden dan met het "oude" schema het geval was (vergelijk figuur 26 met 25). Een analyse van dit effekt valt buiten het bestek van dit verslag, we signaleren derhalve slechts dit verschijnsel.

5.2.3 Invloed van Δt en Δx op de reflekties

In dit hoofdstuk zullen we enkele resultaten vermelden met betrekking tot het halveren van de numerieke stapgrootten, voor zowel de tijd als de ruimte. Hierbij is uitgegaan van het in 5.1 beschreven testmodel voor het rechthoekig gebied volgens figuur 21. Als $ZRrvw'$ n passen we de eerste orde benadering toe, geïmplementeerd volgens BII (zie 5.2.2).

Allereerst gaan we na in hoeverre een halvering van de grootheid Δt invloed heeft op de reflektiekoëfficiënt; we nemen dus $\Delta t = 2,5$. De ruimtediskretisatie blijft ongewijzigd: $\Delta x = \Delta y = 50$.

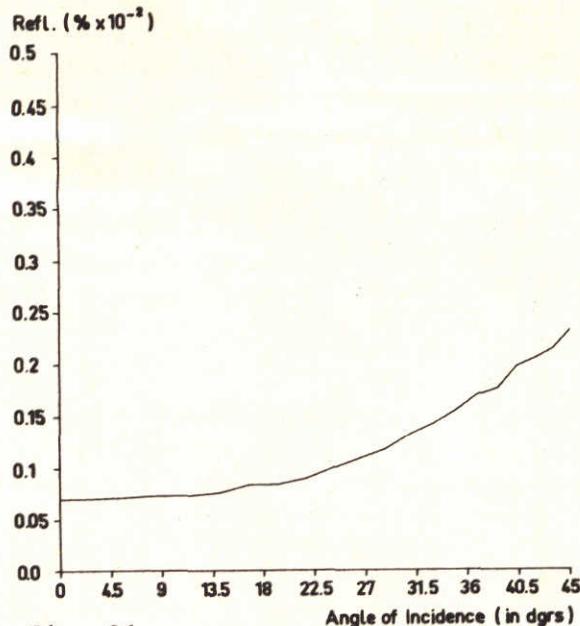


fig. 26

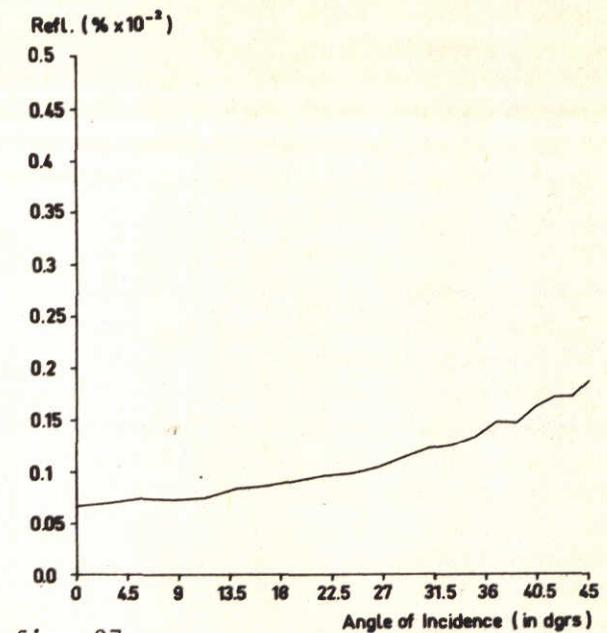


fig. 27

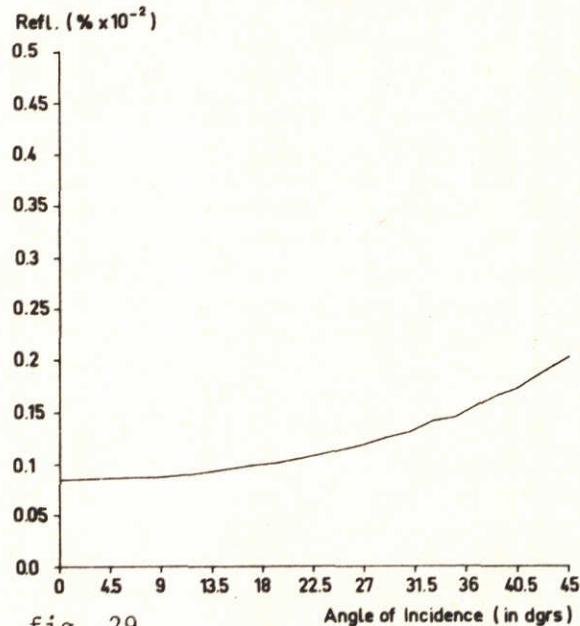


fig. 29

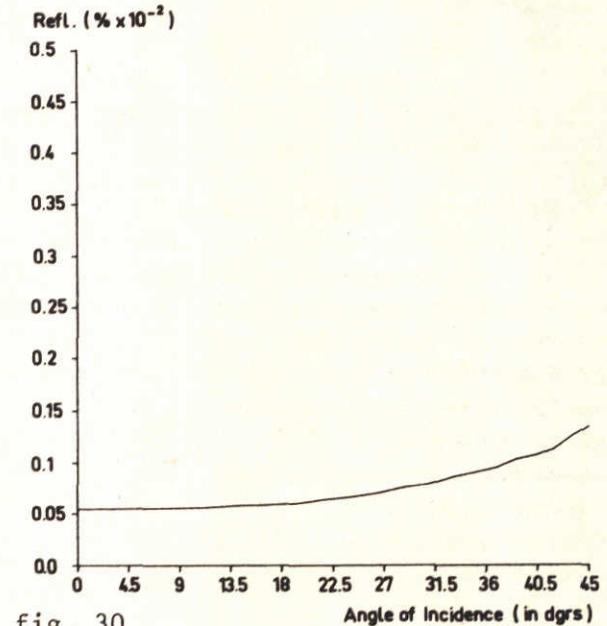


fig. 30

Figuur 26,27

Reflectie-coefficient voor implementatie AIV en BII en volgens het gewijzigde numerieke schema.

Figuur 29,30

Reflectie-coefficient als functie van de hoek van inval. ZRrvw'n van de eerste orde, implementatie BII.

fig. 29: $\Delta t = 2.5$ s, $\Delta x = \Delta y = 50$ mtr.

fig. 30: $\Delta t = 2.5$ s; $\Delta x = \Delta y = 25$ mtr.

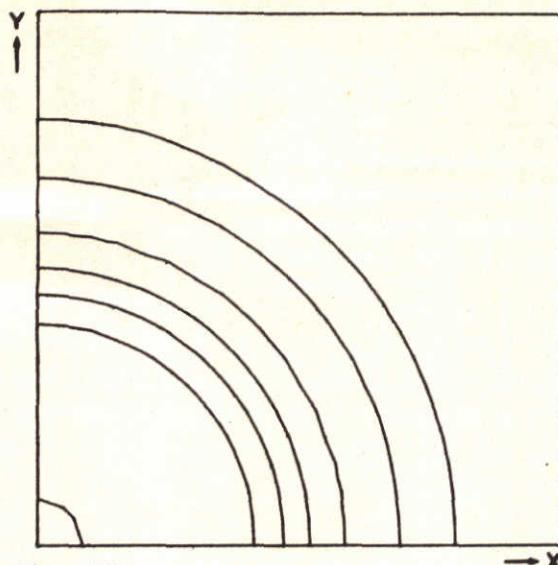


fig. 28a

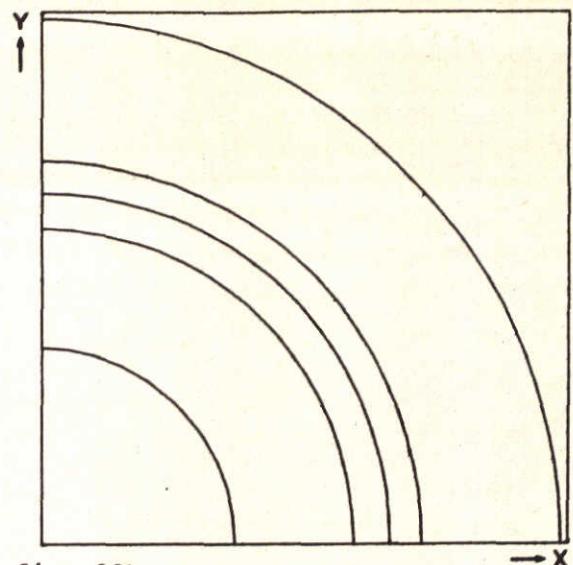


fig. 28b

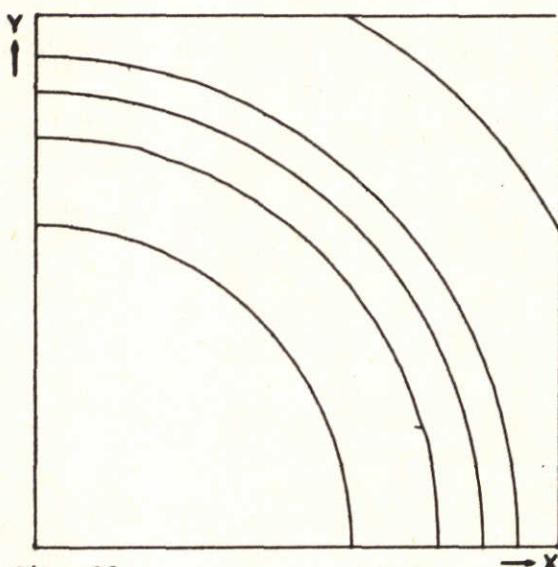


fig. 28c

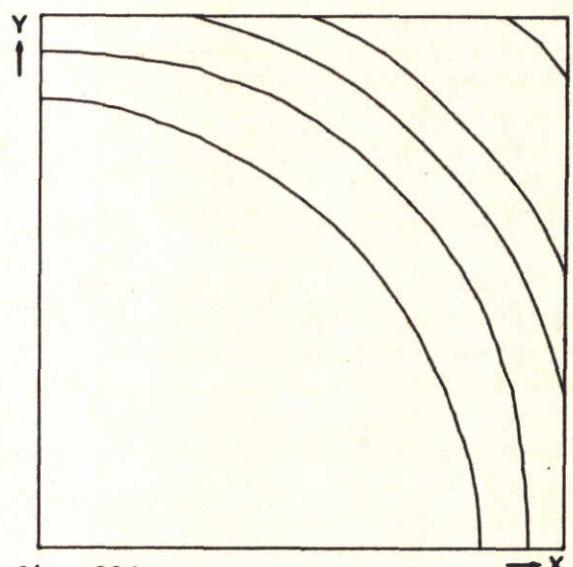


fig. 28d

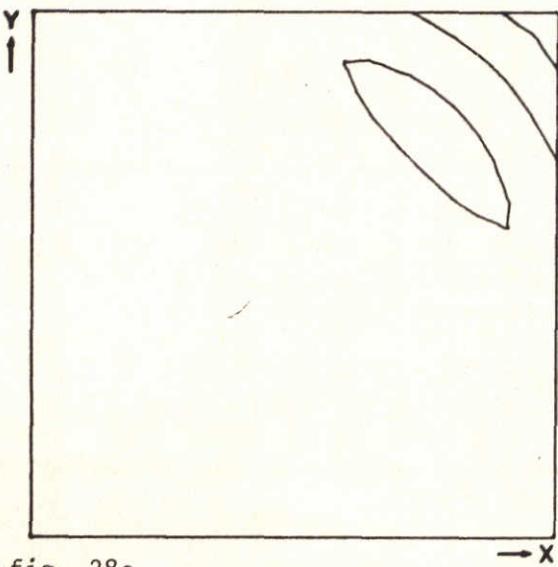


fig. 28e

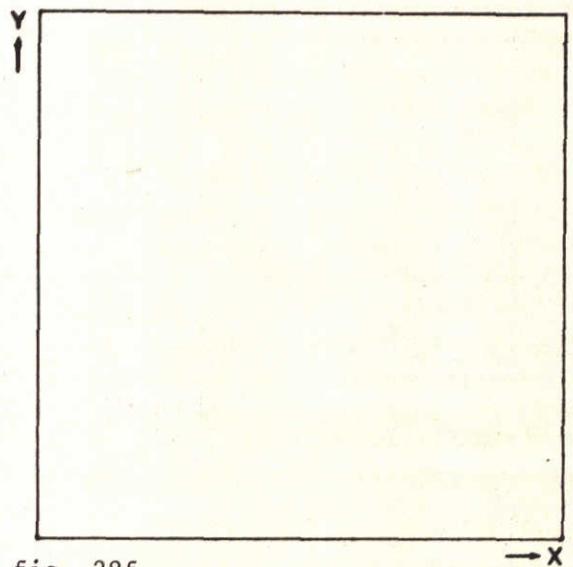


fig. 28f

Figuur 28a-f

Hoogtelijnen van op tijdstippen $t = 55$ (20) 155. ZRrvw'n van nulde orde, implementatie AIV.

I : -7.5 cm

III : 7.5 cm

II : 0.0 cm

IV : 15.0 cm

De resultaten zijn weergegeven in tabel 1, ter vergelijking worden de reflektiekoëfficiënten voor $\Delta t = 5$ en $\Delta x = \Delta y = 50$ eveneens vermeld. We zien dat halvering van de tijdstap, waarbij de ruimtediskretisatie ongewijzigd blijft, een ongunstige invloed heeft op de reflektiekoëfficiënt. De verhouding tussen Δt en Δx (Δy) is kennelijk een relevante factor voor de reflektiekoëfficiënt. Een onderzoek naar mogelijke oorzaken zal in dit verslag buiten beschouwing blijven (zie figuur 27 en 29).

hoek van inval (in graden)	<u>reflektiekoëfficiënten (in %)</u>	
	$\Delta t = 2,5$	$\Delta t = 5$
	$\Delta x=\Delta y=50$	$\Delta x=\Delta y=50$
0	8,5	6,7
15	9,6	8,4
30	12,8	11,8
45	20,2	18,6

Tabel 1

hoek van inval (in graden)	<u>reflektiekoëfficiënten (in %)</u>	
	$\Delta t = 5$	$\Delta t = 2,5$
	$\Delta x=\Delta y=50$	$\Delta x=\Delta y=25$
0	6,7	5,4
15	8,4	5,8
30	11,8	7,8
45	18,6	13,5

Tabel 2

Vervolgens berekenen we de reflekties in geval we zowel Δt als Δx en Δy halveren. De verhouding tussen Δt en Δx (of Δy) blijft derhalve konstant; de waarden van Δt , Δx en Δy zijn vermeld in tabel 2. We zien in tabel 2 dat de halvering van de stapgrootte een gunstig effect heeft op de reflektiekoëfficiënten. De resultaten in tabel 2 zijn grafisch weergegeven in figuur 27 en 30.

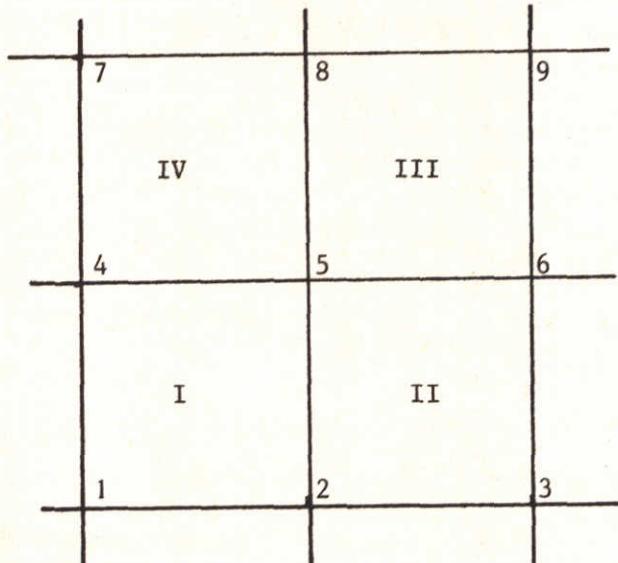
Een diepgaande analyse van bovenstaande resultaten valt buiten het bestek van dit verslag, we beperken ons derhalve tot het constateren van de volgende punten

- Bij constante ruimtediscretisatie Δx en Δy behoeft halvering van Δt geen positieve invloed te hebben op de resultaten voor wat betreft de reflektiekoëfficiënt
- wordt het halveren van de stapgrootte zowel op de tijd- als op de ruimtediskretisatie toegepast dan heeft dit een gunstige invloed, de kwantitatieve effekten behoeven nog een nadere analyse.

5.3 Wijziging in de numerieke formulering van het stelsel

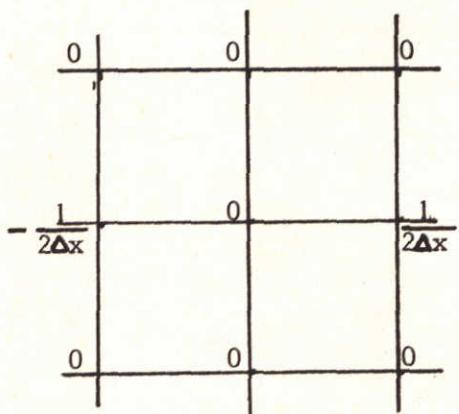
De wijziging van de numerieke formulering bestaat hierin dat we de integraal in (4.22), betreffende de afgeleide naar x , niet berekenen met behulp van de beschreven Newton-Côtes regel maar exact bepalen. Dit betekent dat we (4.17) en (4.18) exact uitrekenen voor ieder element van het gebied Ω .

We zullen aangeven wat de konsequenties voor het schema zijn, ingeval we te maken hebben met een uniform vierkant rooster. We beschouwen vier aan elkaar grenzende elementen (zie figuur 31).

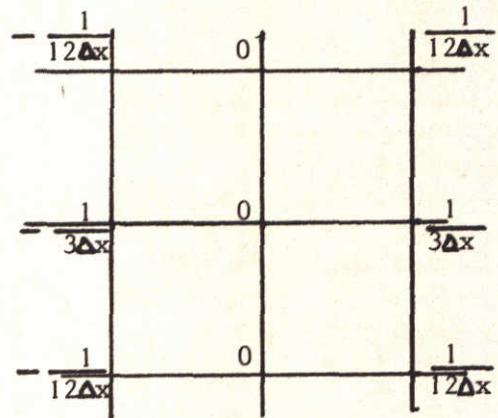


Figuur 31

Lossen we integraal (4.22) op zoals aangegeven in hoofdstuk 4.1 dan kunnen we de diskretisatie van $\frac{\partial}{\partial x}$ voor het punt 5 schematisch weergeven zoals in figuur 32a, we zien dat dit neerkomt op een zuivere centrale diskretisatie in de x -richting.



Figuur 32a: Discretisatie van $\frac{\partial}{\partial x}$ volgens (4.22)



Figuur 32b: Discretisatie van $\frac{\partial}{\partial x}$ volgens (4.17) exact

Berekenen we (4.17) exact dan kunnen we $\frac{\partial}{\partial x}$ numeriek weergeven als in figuur 32b.

De diskretisatie van $\frac{\partial}{\partial y}$ verloopt analoog aan die van $\frac{\partial}{\partial x}$

6 Konklusies

In dit verslag hebben we ons beziggehouden met ZRrvw'n voor de ondiepwatervergelijkingen. We hebben een aantal ZRrvw'n afgeleid; twee ervan, de nulde en de eerste orde benadering, zijn getest op hun reflekties.

Voor de oplossingsmethode kozen we een eindige elementenmethode voor de ruimtediskretisatie en het Sielecki-schema voor de tijdsintegratie.

De ZRrvw'n zijn uitsluitend getest op hun afhankelijkheid ten aanzien van de invalshoek van de stroming aan de open rand, dit wil zeggen dat we naast de viskeuze termen, de windkrachten ook de bodemwrijving en de Coriolis-effekten buiten beschouwing hebben gelaten.

Meerdere implementaties bleken voor een bepaalde ZRrvw mogelijk te zijn. Voor de nulde orde ZRrvw'n zijn een viertal implementaties onderzocht, bij de eerste orde onderzochten we een tweetal mogelijkheden.

Voor zowel de nulde als eerste orde ZRrvw'n bleken de resultaten aanzienlijk te verbeteren wanneer we de snelheidskomponenten u en v numeriek een halve tijdstap lieten achterlopen op ϕ . Het optreden van deze halve tijdstap faseverschil tussen u , v met ϕ kunnen we aanmerken als een eigenschap van het Sielecki-schema, hetgeen we voor een sterk vereenvoudigd één-dimensionaal model hebben aangetoond.

Houden we geen rekening met dit numerieke faseverschil dan blijken de reflekties grotendeels uit numerieke reflekties te bestaan en in mindere mate afhankelijk te zijn van de hoek van inval, in het gunstigste geval bedroeg de reflektie bij loodrechte inval 15% en bij inval onder 45° 19%.

Houden we daarentegen rekening met de genoemde halve tijdstap die de snelheid achterloopt op ϕ dan wordt de numerieke reflektie aanzienlijk kleiner terwijl de invalshoek-afhankelijkheid toeneemt: reflekties van 6,5% bij loodrechte inval en 17% bij inval onder 45° .

De numerieke reflekties kunnen het gevolg zijn van:

- a) het lineariseren van het stelsel ondiepwatervergelijkingen voor het afleiden van de ZRrvw'n; bij de numerieke berekeningen wordt echter uitgegaan van het ongelineariseerde stelsel
- b) de wijze van implementatie van de ZRrvw'n; verbeteringen hierin zijn uiteraard niet ondenkbaar.

Het verdient wellicht aandacht meerdere alternatieve implementaties van de nulde en eerste orde ZRrvw'n te onderzoeken, alvorens hogere orde benaderingen te beschouwen. Enige mate van reflektie zal echter altijd blijven bestaan ten gevolge van a). Daarnaast zal aandacht besteed kunnen worden aan andere vormen van ZRrvw'n, alternatieve benaderingswijzen van de NRrvw'n, wellicht een terrein van toekomstig onderzoek.

Verder is gebleken dat het oorspronkelijke schema een niet geringe verstoring introduceert in het golfpatroon.

We hebben daarom een kleine wijziging aangebracht in de diskretisatie van de afgeleiden naar x resp. y; deze wijziging bleek een zeer gunstige invloed te hebben; verstoringen bleken nagenoeg nihil. Een neveneffekt van het gewijzigde schema is echter dat de reflekties toenamen, met name de invalshoek-afhankelijkheid: 6,5% resp. 7% bij loodrechte inval en 15% resp. 23,1% bij inval onder 45° voor het "oude" resp. het gewijzigde schema.

Tenslotte is gekeken naar de invloed van Δt en Δx (Δy) op de reflekties. Hierbij hebben we het volgende gekonstateerd.

Halveren we de tijdstap Δt en houden we Δx (Δy) konstant dan geeft dit in het onderhavige geval slechtere resultaten voor de reflekties. Halveren we zowel Δt als Δx (Δy) dan worden de reflekties kleiner. Klaarblíjkelyk moeten we in de numerieke fase rekening houden met "ideale" verhouding tussen Δt en Δx (daarbij uiteraard het stabiliteitscriterium in acht nemend), waarbij de reflekties minimaal zijn. Het dient wellicht aanbeveling bij toekomstig onderzoek hiermee rekening te houden.

7 Literatuurverwijzingen

- [1] : Numerical solution of the shallow water equations by a finite element method - N. Praagman, proefschrift T.H. Delft, 1979.
- [2] : Accurate boundary treatment in shallow water flow computations - H. Gerritsen, proefschrift T.H. Twente, 1982.
- [3] : Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves - B. Enquist and A. Majda, Math. Comp. 31, 629-651, 1977.
- [4] : Zwak-reflekterende randvoorwaarden voor de ondiepwatervergelijkingen - afstudeerverslag van J. Pakvis, nr. S545-1, Waterloopkundig Laboratorium, mei 1983.
- [5] : Collegediktaat Numerieke Analyse CII/BIII - J. van Kan, A. Segal, N. Praagman, T.H. Delft.
- [6] : Berekening van waterstanden in zeeën en rivieren - P.J. van der Houwen, Mathematisch centrum, Amsterdam, 1977.
- [7] : Randvoorwaarden voor de twee-dimensionale over de hoogte geïntegreerde hyperbolische ondiepwatervergelijkingen - M.J. Officier, nr. R1289, Waterloopkundig Laboratorium, november 1981.
- [8] : Weakly-reflective boundary conditions for the shallow water equations - G.K. Verboom, publication no. 266, Waterloopkundig Laboratorium, mei 1982.
- [9] : A.F.E.P. User manual - A. Segal, NA-report T.H. Delft, 1977.

Bijlage I Formulering niet-reflekterende randvoorwaarden

We gaan uit van de ondiepwatervergelijkingen in één dimensie met vlakke bodem.
Het stelsel luidt:

$$\frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} + A_1 \frac{\partial \underline{u}'}{\partial x} + A_3 \underline{u}' = 0 \quad (\text{B.1.1})$$

met $A_1 = \begin{pmatrix} U_f & \psi_f/2 \\ \psi_f/2 & U_f \end{pmatrix}$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \lambda_f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en $\underline{u}' = (u', \psi')^t$

We zullen overgaan op een nieuwe grootheid v' :

$$\underline{v}' = (\frac{1}{\sqrt{2}} (u' + \psi'), \frac{1}{\sqrt{2}} (u' - \psi'))^t \quad (\text{B.1.2})$$

Toepassing van (B.1.2), Fouriertransformatie van het geheel naar t en enige matrixmanipulaties levert ons het volgende stelsel op:

$$\frac{\partial \underline{v}'}{\partial x} = i\tau M \hat{\underline{v}'} \quad (\text{B.1.3})$$

met

$$M(\frac{1}{\tau}) = \begin{pmatrix} a_1 + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{i\tau} a_1 & \frac{1}{2} \frac{\lambda}{i\tau} a_1 \\ \frac{1}{2} \frac{\lambda}{i\tau} a_2 & a_2 + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{i\tau} a_2 \end{pmatrix},$$

$$a_1 = - (U_f + \frac{\psi_f}{2})^{-1} \text{ en}$$

$$a_2 = - (U_f - \frac{\psi_f}{2})^{-1}$$

Om M te diagonaliseren passen we de volgende transformatie toe

$$\hat{\underline{w}'} = W \hat{\underline{v}'} \quad (\text{B.1.4})$$

De diagonaal matrix WMW^{-1} bevat de eigenwaarden van M ; we nemen voor W^{-1} de volgende matrix

$$W^{-1} = (\underline{m}_1, \underline{m}_2), \quad (B.1.5)$$

met \underline{m}_1 en \underline{m}_2 de respektievelijke eigenvectoren van M .

Deze eigenvectoren luiden:

$$\underline{m}_1 = \begin{pmatrix} m_{12} \\ \frac{-(m_{11} - m_{22})}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12} \cdot m_{21}} \end{pmatrix}$$

$$\underline{m}_2 = \begin{pmatrix} m_{12} \\ \frac{-(m_{11} - m_{22})}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12} \cdot m_{21}} \end{pmatrix}$$

$$\text{met } m_{11} = a_1 + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{i\tau} a_1,$$

$$m_{21} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{i\tau} a_1,$$

$$m_{12} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{i\tau} a_2 \text{ en}$$

$$m_{22} = a_2 + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{i\tau} a_2.$$

Na enig rekenwerk volgt voor W :

$$\frac{1}{\sqrt{(m_{11}-m_{22})^2+4m_{12}\cdot m_{21}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(m_{11}-m_{22})+\frac{1}{2}\sqrt{(m_{11}-m_{22})^2+4m_{12}\cdot m_{21}} & 1 \\ \frac{m_{12}}{\frac{1}{2}(m_{11}-m_{22})+\frac{1}{2}\sqrt{(m_{11}-m_{22})^2+4m_{12}\cdot m_{21}}} \\ \frac{m_{12}}{m_{12}} & -1 \end{pmatrix} \quad (B.1.6)$$

De eigenwaarden van M zijn:

$$e_1 = \frac{1}{2} (m_{11} + m_{22}) - \frac{1}{2} \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4 m_{12} \cdot m_{21}} \quad (B.1.7)$$

$$e_2 = \frac{1}{2} (m_{11} + m_{22}) + \frac{1}{2} \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4 m_{12} \cdot m_{21}}$$

Veronderstel dat $e_2 > 0$ en $e_1 < 0$. De NRrvw volgt nu uit:

$$\pi_2 \hat{w}' = \pi_2 W \hat{v}' = \pi_2 W \begin{pmatrix} (\hat{u}' + \hat{\phi}')/\sqrt{2} \\ (\hat{u}' - \hat{\phi}')/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \hat{g} \quad (B.1.8)$$

Het zal duidelijk zijn dat het terugtransformeren van (B.1.8) niet zonder meer kan worden uitgevoerd; de term die hierbij moeilijkheden oplevert is

$$\frac{1}{2} \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4 m_{12} \cdot m_{21}}$$

Toepassing van het bovenstaande op een twee-dimensionale stroming zal het een en ander uiteraard ingewikkelder maken; daarbij speelt niet alleen het terugtransformeren een rol maar ook het bepalen van de eigenwaarden, de eigenvectoren en de matrix W .

Een mogelijkheid om de niet-reflekterende randvoorwaarde (B.1.8) terug te transformeren is door deze numeriek te benaderen. Schrijven we (B.1.8) uit, dan levert dit:

$$\hat{w}_{21} \cdot (\hat{u}' + \hat{\phi}')/\sqrt{2} + \hat{w}_{22} \cdot (\hat{u}' - \hat{\phi}')/\sqrt{2} = \hat{g} \quad (B.1.9)$$

waarbij \hat{w}_{21} en \hat{w}_{22} koëfficiënten zijn van W , als volgt vastgelegd:

$$W = \begin{pmatrix} \hat{w}_{11} & \hat{w}_{12} \\ \hat{w}_{21} & \hat{w}_{22} \end{pmatrix}$$

Uit (B.1.6) volgen de waarden voor \hat{w}_{21} en \hat{w}_{22} .

Uitdrukking (B.1.9) moet nog worden teruggetransformeerd om een niet-reflekterende randvoorwaarde op t leveren, die in het numerieke proces gebruikt kan worden. Dit brengt ons op de volgende uitdrukking

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \{ \hat{w}_{21} \cdot (\hat{u}' + \hat{\phi}') + \hat{w}_{22} \cdot (\hat{u}' - \hat{\phi}') \} e^{i\tau} d\tau \quad (B.1.10)$$

Alle waarden van u' en ψ' voor $\tau < t$ zijn nodig om (B.1.10) exact te berekenen; (B.1.10) kan wellicht dicht worden benaderd door in plaats van alle tijdstippen voorafgaand aan t mee te nemen, vanaf een geschikt tijdstip $t > \infty$ de integraal uit te rekenen. De looptijd van een passerende golf kan hierbij wellicht worden aangehouden.

Het is een aanpak, die wellicht toepasbaar is voor het twee-dimensionale model; een nader onderzoek is vereist. Het is niet de weg die in dit verslag gekozen is.

Bijlage 2 Transformaties, matrices en eigenwaarden

Door middel van de transformatie (zie (3.2))

$$\underline{v}' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \underline{u}' \quad (= v \underline{u}') \quad (\text{B.2.1})$$

wordt matrix A_f op diagonaalvorm gebracht. Het stelsel (3.23) gaat hiermee over in:

$$v^{-1} \frac{\partial \underline{v}'}{\partial t} + A_1 v^{-1} \frac{\partial \underline{v}'}{\partial x} + A_2 v^{-1} \frac{\partial \underline{v}'}{\partial y} + A_3 v^{-1} \underline{v}' = \underline{0} \quad (\text{B.2.2})$$

waarbij

$$v^{-1} \quad (= v) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(B.2.2) herschrijven we tot

$$\frac{\partial \underline{v}'}{\partial x} = A \frac{\partial \underline{v}'}{\partial t} + E_1 \frac{\partial \underline{v}'}{\partial y} + E_2 \underline{v}' \quad (\text{B.2.3})$$

met

$$A = - (VA_1 V^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} -(U_f + \phi_f/2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -U_f^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -(U_f - \phi_f/2)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$E_1 = -(VA_1 V^{-1})^{-1} VA_2 V^{-1} = \begin{pmatrix} -v_f (U_f + \frac{\phi}{2})^{-1} & -\frac{\phi_f}{2\sqrt{2}} (U_f + \frac{\phi}{2})^{-1} & 0 \\ -\frac{\phi_f}{2\sqrt{2}} U_f^{-1} & -v_f U_f^{-1} & \frac{\phi_f}{2\sqrt{2}} U_f^{-1} \\ 0 & \frac{\phi_f}{2\sqrt{2}} (U_f - \frac{\phi}{2})^{-1} & -v_f (U_f - \frac{\phi}{2})^{-1} \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\lambda (U_f + \frac{\psi_f}{2})^{-1} & \frac{\omega}{\sqrt{2}} (U_f + \frac{\psi_f}{2})^{-1} & -\frac{1}{2}\lambda (U_f + \frac{\psi_f}{2})^{-1} \\ -\frac{\omega}{\sqrt{2}} U_f^{-1} & -\lambda U_f^{-1} & -\frac{\omega}{\sqrt{2}} U_f^{-1} \\ -\frac{1}{2}\lambda (U_f - \frac{\psi_f}{2})^{-1} & \frac{\omega}{\sqrt{2}} (U_f - \frac{\psi_f}{2})^{-1} & -\frac{1}{2}\lambda (U_f - \frac{\psi_f}{2})^{-1} \end{pmatrix}$$

en

$$\underline{v}' = (\frac{1}{\sqrt{2}} (u' + \psi') \quad v' \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (u' - \psi'))^t$$

Vergelijken we (B.2.3) met de karakteristieke vorm in paragraaf 2.3 dan bemerken we dat, met toepassing van (B.2.2) en met $\theta = 0$ beide stelsels overeenkomen.

De eigenwaarden van A zijn:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= - (U_f + \psi_f/2)^{-1} \\ \lambda_2 &= - U_f^{-1} \\ \lambda_3 &= - (U_f - \psi_f/2)^{-1} \end{aligned} \tag{B.2.4}$$

Problemen ontstaan als $U_f = 0$, in dat geval bestaat λ_2 niet. Eigenwaarden λ_1 en λ_3 leveren geen problemen, indien we uitgaan van een subkritische stroming (zie (2.5)). In het vervolg gaan we uit van $U_f \neq 0$. In paragraaf 3.3.3 komt $U_f = 0$ aan de orde.

Fouriertransformatie van (B.2.3) levert:

$$\frac{\partial \underline{v}'}{\partial x} = i\tau M \hat{\underline{v}'} \tag{B.2.5}$$

$$\text{met } M(\frac{n}{\tau}, \frac{1}{\tau}) = A + \frac{n}{\tau} E_1 + \frac{1}{i\tau} E_2$$

Door middel van (zie (3.13), (3.18))

$$\hat{\underline{w}'} = W' \hat{\underline{v}'}$$

gaat (B.2.5) over in

$$\frac{\partial \hat{w}'}{\partial x} = i\tau \Lambda' \hat{w} \quad (\text{B.2.6})$$

met $\Lambda' = W' M(W')^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11}' \left(\frac{n}{\tau}, \frac{1}{\tau}\right) & \Lambda_{12}' \left(\frac{n}{\tau}, \frac{1}{\tau}\right) \\ 0 \left((\frac{n}{\tau})^{p+1}, (\frac{1}{\tau})^{q+1}\right) & \Lambda_{22}' \left(\frac{n}{\tau}, \frac{1}{\tau}\right) \end{pmatrix}$

$\Lambda_{22}' \left(\frac{n}{\tau}, \frac{1}{\tau}\right)$ bevat onder meer de positieve eigenwaarden van A. Er geldt:

$$\Lambda_{22}' (0,0) = \lambda_3, \quad \text{ingeval van uitstroming } (U_f > 0)$$

en

$$\Lambda_{22}' (0,0) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \text{ingeval van instroming } (U_f < 0).$$

Voor w' nemen we de eindige reeksontwikkeling van (3.18).

De uit (B.2.6) volgende ZRrvw'n zijn van orde $0 \left((\frac{n}{\tau})^{p+1}, (\frac{1}{\tau})^{q+1}\right)$.

Bijlage 3 Afleiding van ZRrvw'n ingeval van uitstroming

A p=0 q=0

Uit (3.13) volgt

$$W' = W_{\infty \infty}$$

Het gedeelte links-onder van Λ' (B.2.6) mag hoogstens orde termen van $0 \left(\frac{n}{\tau}, \frac{1}{\tau} \right)$ bevatten. Hieraan voldoen we door voor $W_{\infty \infty}$ de eenheidsmatrix te kiezen; dus:

$$W_{\infty \infty} = I$$

Met (3.11) en (3.26) volgt de Fourier-getransformeerde vorm van de ZRrvw:

$$\pi_3 \hat{\underline{w}}' \Big|_{x=L} = \pi_3 I \hat{\underline{v}}' \Big|_{x=L} = \pi_3 V \hat{\underline{u}}' \Big|_{x=L} = \hat{\underline{f}}$$

waarbij V gegeven is door (B.2.1).

Terugtransformeren levert ons de volgende ZRrvw van orde $0 \left(\left(\frac{n}{\tau}, \frac{1}{\tau} \right) \right)$:

$$u - \psi \Big|_{x=L} = f \tag{B.3.1}$$

Funktie f vatten we voorlopig op als een generieke functie; in een later stadium zullen we aangeven hoe f de externe faktoren represeneert.

B p=1 q=0

Voor W' geldt nu volgens (3.13):

$$W' = I + \frac{n}{\tau} W_{10}$$

De inversie van W' wordt gegeven door:

$$(W')^{-1} = I - \frac{n}{\tau} W_{10} + o \left(\left(\frac{n}{\tau} \right)^2 \left(\frac{1}{\tau} \right) \right)$$

Het gedeelte linksonder van Λ' (B.2.6) mag hoogstens orde-termen van

$$0 \left(\left(\frac{n}{\tau}\right)^2, \left(\frac{1}{\tau}\right)\right)$$

bevatten. Het gedeelte linksonder van uitdrukking (zie (B.2.6), (B.2.5) en (B.2.3)):

$$\frac{n}{\tau} W_{10} A - \frac{n}{\tau} A W_{10} + \frac{n}{\tau} E_1$$

moet derhalve verdwijnen.

Om aan deze eis te voldoen kiezen we voor W_{10} :

$$W_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

(meer komponenten zijn niet nodig).

Voor a_{31} en a_{32} gelden de volgende relaties:

$$-a_{31} (U_f + \psi_{f/2})^{-1} + a_{31} (U_f - \psi_{f/2})^{-1} = 0$$

$$-a_{32} U_f^{-1} + a_{32} (U_f - \psi_{f/2})^{-1} + \frac{\psi_f}{2\sqrt{2}} (U_f - \psi_{f/2})^{-1} = 0$$

Hieruit berekenen we de volgende waarden voor a_{31} en a_{32} :

$$a_{31} = 0$$

$$a_{32} = -\frac{U_f}{\sqrt{2}}$$

Met deze waarden vinden we de volgende ZRrvw:

$$\pi_3 \hat{w}' \Big|_{x=L} = \pi_3 (I + \frac{n}{\tau} W_{10}) \hat{v}' \Big|_{x=L} =$$

$$-\frac{n}{\tau} \frac{U_f}{\sqrt{2}} \hat{v}' + \frac{\hat{u}' - \hat{\psi}'}{\sqrt{2}} \Big|_{x=L} = \hat{f}$$

Terugtransformeren levert ons:

$$- U_f \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} (u' - \psi') \Big|_{x=L} = f \quad (\text{B.3.2})$$

C p=1 q=1

W' luidt nu volgens (3.13):

$$W' = I + \frac{\eta}{\tau} W_{10} + \frac{1}{i\tau} W_{01}$$

Voor W_{10} nemen we de in B bepaalde matrix. Overeenkomstig de berekeningen in B bepalen we de koëfficiënten van W_{01} . Er geldt:

$$W_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

met

$$b_{31} = \frac{1}{2} \lambda \left(U_f + \frac{\psi_f}{2} \right) \psi_f^{-1}$$

$$b_{32} = - \omega \sqrt{2} U_f \psi_f^{-1}$$

We vinden hiermee tenslotte de volgende ZRrvw van orde 0 ($(\frac{\eta}{\tau})^2$, $(\frac{1}{i\tau})^2$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda \frac{(U_f + \psi_f/2)}{\psi_f} (u' + \psi') - 2 \omega \frac{U_f}{\psi_f} v' - U_f \frac{\partial v'}{\partial y} \\ + \frac{\partial}{\partial t} (u' - \psi') \Big|_{x=L} = f \end{aligned} \quad (\text{B.3.3})$$

Op identieke wijze kunnen we hogere orde benaderingen vinden. In een aantal gevallen is het echter mogelijk een hogere orde benadering af te leiden zonder hogere orde termen in de reeksontwikkeling voor W' in te voeren. Dit kan in sommige gevallen door bepaalde koëfficiënten van W_{jk} welke in een vroeger stadium eenvoudigheidshalve nul waren gekozen nu ongelijk aan nul te stellen. We zullen deze "truc" voor een konkreet geval uitwerken.

Ten aanzien van W_{01} brengen we nu de volgende wijziging aan

$$w_{01}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Beperken we ons slechts tot de $\frac{1}{i\tau}$ -termen (korresponderend met λ en ω) dan luidt W' :

$$W' = I + \frac{1}{i\tau} w_{01}^* ;$$

de inverse luidt:

$$(W')^{-1} = I - \frac{1}{i\tau} w_{01}^* + (\frac{1}{i\tau})^2 w_{01}^* w_{01}^* + O((\frac{1}{i\tau})^3).$$

Het gedeelte links-onder van Λ' (B.2.6) mag nu, afgezien van de $\frac{\eta}{\tau}$ -termen, hoogstens orde-termen van $O((\frac{1}{i\tau})^3)$ bevatten.

De uitdrukking

$$(\frac{1}{i\tau})^2 A w_{01}^* w_{01}^* - (\frac{1}{i\tau})^2 w_{01}^* A w_{01}^* + (\frac{1}{i\tau})^2 w_{01}^* E_2 - (\frac{1}{i\tau})^2 E_2 w_{01}^*$$

moet derhalve verdwijnen.

Bij het uitwerken van bovenstaande uitdrukking blijkt dat we slechts voor de termen die met λ korresponderen een hogere orde benadering kunnen vinden. Voor b_{33} volgt

$$b_{33} = \frac{1}{2} \lambda$$

Uitgaande van W_{10} en van w_{01}^* (met als extra koëfficiënt b_{33}) vinden we de volgende ZRrvw:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda \frac{(U_f + \phi_f/2)}{\phi_f} (u' + \phi') - 2 \omega \frac{U_f}{\phi_f} v' - U_f \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{1}{2} \lambda (u' - \phi') \\ + \frac{\partial}{\partial t} (u' - \phi') \Big|_{x=L} = f \end{aligned} \quad (B.3.4)$$

Voor de orde termen $\frac{\eta}{\tau}$ en $\frac{\omega}{i\tau}$ blijkt het niet mogelijk op bovenstaande wijze een hogere orde benadering af te leiden.

Voor wat het geval uitstroming betreft, gaan we niet verder dan de tot nu toe berekende ZRrvw'n.

Bijlage 4 Afleiding van ZRrvw'n ingeval van instroming

A p=0 q=0

Zie onderdeel A van bijlage 3.

We vinden de volgende ZRrvw'n.

$$\begin{pmatrix} v' \\ u' - \psi' \end{pmatrix}_{x=L} = f \quad (B.4.1)$$

B p=1 q=0

Zie onderdeel B van bijlage 3.

Voor matrix W_{10} nemen we:

$$W_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Om orde termen tot en met

$$O\left(\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^2, \left(\frac{1}{\tau}\right)\right)$$

in het gedeelte linksonder van Λ' (B.2.6) te laten verdwijnen moet het overeenkomstige gedeelte van

$$\frac{\eta}{\tau} W_{10} A - \frac{\eta}{\tau} A W_{10} + \frac{\eta}{\tau} E_1$$

nul zijn.

Hieruit leiden we de volgende relaties voor a_{21} en a_{31} af:

$$-a_{21} \left(U_f + \frac{\psi_f}{2}\right)^{-1} + a_{21} U_f^{-1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \psi_f U_f^{-1} = 0$$

en

$$-a_{31} \left(U_f + \frac{\psi_f}{2}\right)^{-1} + a_{31} \left(U_f - \frac{\psi_f}{2}\right)^{-1} = 0$$

waaruit de volgende waarden voor a_{21} en a_{31} zijn te bepalen:

$$\begin{aligned} a_{21} &= (U_f + \frac{\psi_f}{2})/\sqrt{2} \\ a_{31} &= 0 \end{aligned}$$

Hiermee leiden we de ZRrvw'n van orde 0 $((\frac{n}{\tau})^2, \frac{1}{\tau})$ af:

$$\left(\begin{array}{l} \frac{1}{2} (U_f + \frac{\psi_f}{2}) \frac{\partial}{\partial y} (u' + \psi') + \frac{\partial v'}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} (u' - \psi') \end{array} \right) = \underline{f} \quad (\text{B.4.2})$$

C p=1 q=1

Zie onderdeel C van bijlage 3.

Voor matrix X_{01} nemen we:

$$W_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

We kunnen de volgende waarden voor b_{21} en b_{31} berekenen:

$$b_{21} = \omega \sqrt{2} (U_f + \psi_f/2)/\psi_f$$

$$b_{31} = \frac{1}{2} \lambda (U_f + \psi_f/2)/\psi_f$$

De ZRrvw'n van orde 0 $((\frac{n}{\tau})^2, (\frac{1}{\tau})^2)$ luidt nu:

$$\left(\begin{array}{l} \omega \frac{(U_f + \psi_f/2)}{\psi_f} (u' + \psi') + \frac{1}{2} (U_f + \psi_f/2) \frac{\partial (u' + \psi')}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial t} \\ \lambda \frac{(U_f + \psi_f/2)}{2 \psi_f} (u' + \psi') + \frac{\partial}{\partial t} (u' - \psi') \end{array} \right) = \underline{f} \quad (\text{B.4.3})$$

Door W_{10} en W_{01} uit te breiden kan een hogere orde benadering worden afgeleid (overeenkomstig de "truc" in bijlage 3):

$$w_{10}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

met a_{21} en a_{31} als in B

en

$$w_{01}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

met b_{21} en b_{31} als in C.

Ook wat de $\frac{\eta}{\tau}$ en ω -termen blijkt de "truc" nu toepasbaar (dit in tegenstelling tot het geval van uitstroming).

Allereerst houden we ons bezig met de $\frac{\eta}{\tau}$ -termen.

Het gedeelte links-onder van

$$- (\frac{\eta}{\tau})^2 w_{10}^* A w_{10}^* + (\frac{\eta}{\tau})^2 A w_{10}^* w_{10}^* + (\frac{\eta}{\tau})^2 w_{10} E_1 - (\frac{\eta}{\tau})^2 E_1 w_{10}$$

moet verdwijnen. Hieruit leiden we de volgende relaties af:

$$\begin{aligned} - a_{21} v_f (U_f + \frac{\psi_f}{2})^{-1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} a_{22} \psi_f U_f^{-1} + a_{21} v_f U_f^{-1} &= 0 \\ - a_{32} a_{21} (U_f - \frac{\psi_f}{2})^{-1} + a_{32} a_{21} U_f^{-1} - a_{21} \frac{1}{2\sqrt{2}} \psi_f (U_f - \frac{\psi_f}{2})^{-1} \\ - a_{32} \frac{1}{2\sqrt{2}} \psi_f U_f^{-1} &= 0 \end{aligned}$$

Hieruit berekenen we a_{22} en a_{32} :

$$a_{22} = v_f,$$

$$a_{32} = - \frac{1}{2\sqrt{2}} (U_f + \frac{\psi_f}{2}).$$

Op overeenkomstige wijze bepalen we de koëfficiënten van w_{01}^* waarmee we de orde-termen tot en met orde 0 ($(\frac{1}{I\tau})^2$) laten verdwijnen. We zullen dit voor uitsluitend de λ -termen doen; in dit verband stellen we de coriolisparameter ω nul. We vinden nu de volgende waarden:

$$b_{23} = 0$$

en

$$b_{33} = \frac{1}{2} \lambda$$

De overige koëfficiënten blijven onbepaald; we zullen ze gelijkstellen aan nul.

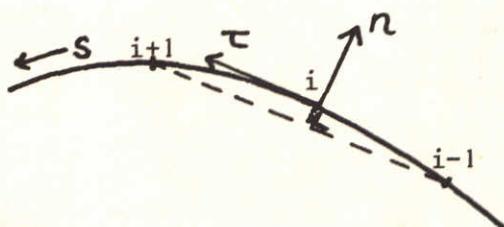
Na enig rekenwerk volgt de ZRrvw'n van orde 0 ($\frac{\eta}{\tau}$)³, ($\frac{1}{\tau}$)³) (afgezien van de $\frac{\omega}{i\tau}$ -termen):

$$\left(\begin{array}{l} \frac{1}{2} (U_f + \psi_f/2) \frac{\partial}{\partial y} (u' + \psi') + v_f \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial t} \\ \frac{\frac{1}{2}(U_f + \psi_f/2)}{\psi_f} \lambda(u' + \psi') - \frac{(U_f + \psi_f/2)}{2} \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{1}{2} \lambda(u' - \psi') + \frac{\partial}{\partial t} (u' - \psi') \end{array} \right) = \underline{f}$$

(B.4.4)

Bijlage 5 Diskretisatie van $\frac{\partial p_i}{\partial s}$

In het geval van een willekeurige open rand (zie figuur B1) dan moeten we de afgeleide in tangentiële richting bepalen. Uitgaande van ekwidistante roosterpunten (Δs = maaswijdte) komen we tot:



s is koordinaat langs de rand
n is de normaal op de rand
tau is de eenheidsvector in
tangentiële richting

Figuur B1

$$\frac{\partial p_i}{\partial s} = \frac{p_{L+1} - p_{L-1}}{L\Delta s} .$$

Is p_i de normaalkomponent van een vector $p = (p_1, p_2)$ in x_i dan geldt:

$$p_i = \sin\phi \cdot p_1 - \cos\phi \cdot p_2$$

Is p_i de tangentiële komponent van p dan geldt:

$$p_i = \cos\phi \cdot p_1 + \sin\phi \cdot p_2$$

waarbij ϕ de hoek is die de tangentiële richtingsvector τ maakt met de x-as.

APPENDIX

Implementatie-onderzoek van de ZRrvw'n in het één-dimensionale model

Uit de resultaten in hoofdstuk 5 blijkt dat de implementaties AI, II, III en BI voor een tamelijk grote reflektie verantwoordelijk zijn (onafhankelijk van de hoek van inval). In het gunstigste geval 15% bij loodrechte inval en 19% bij inval onder 45° . Een verbetering kan wellicht gevonden worden in een alternatieve wijze van implementatie van de ZRrvw'n. We zullen dit onderzoeken aan de hand van een vereenvoudigd één-dimensionaal model. Vinden we een alternatieve implementatie die in het één-dimensionale geval een verbetering inhoudt, dan zullen we nagaan in hoeverre deze implementatie in het twee-dimensionale model tot gunstige resultaten leidt.

We zullen allereerst het volgende lineaire stelsel beschouwen:

$$\begin{aligned} U_t + gH_f H_x &= 0 \\ H_t + U_x &= 0 \end{aligned} \tag{A1}$$

met $x \in \Omega = [0, L]$, $t \geq 0$ (vergelijk (4.1)-4.3)).

In het volgende zullen we nagaan in hoeverre de tijdsdiskretisatie volgens het schema van Sieliecki van invloed is op het ontstaan van reflekties ten gevolge van een of andere implementatievorm van de ZRrvw'n in de open rand ($x=L$). Diskretiseren we (A1) volgens het schema van Sielecki dan krijgen we de volgende relaties:

$$\begin{aligned} U^{n+1} &= U^n - \Delta t gH_f H_x^n \\ H^{n+1} &= H^n - \Delta t U_x^{n+1} \end{aligned} \tag{A2}$$

De nulde orde ZRrvw voor de open rand $x=L$ luidt:

$$U - \sqrt{gH_f} H = U_0 - \sqrt{gH_f} H_0 \tag{A3}$$

waarbij U_0 en H_0 stationaire oplossingen van (A1) zijn.

We zullen veronderstellen dat we U en H in de volgende reeksen kunnen ontwikkelen.

$$U = U_0 + \sum_{j=0}^{\infty} a_j \exp(i\omega_j t + ik_j x) \quad (A4)$$

$$H = H_0 + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \exp(i\omega_j t + ik_j x)$$

Subsitusie van (A4) in (A2) levert komponentsgewijs

$$a_j \exp(i\omega_j t) = a_j - \Delta t gH_f b_j ik \quad (A5)$$

$$b_j \exp(i\omega_j \Delta t) = b_j - \Delta t a_j ik \cdot \exp(i\omega_j \Delta t)$$

We kunnen (A5) ook in vectornotatie weergeven; deze luidt:

$$\begin{pmatrix} (\exp(i\omega_j \Delta t) - 1) & \Delta t gH_f ik \\ \Delta t ik \cdot \exp(i\omega_j \Delta t) & (\exp(i\omega_j \Delta t) - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A6)$$

Wil voor a_j en b_j een van nul verschillende oplossing bestaan dan moet de determinant van de matrix in (A6) nul zijn. Dit leidt tot de volgende relatie:

$$(\exp(i\omega_j \Delta t) - 1)^2 - \Delta t^2 gH_f^2 (ik)^2 \exp(i\omega_j \Delta t) = 0 \quad (A7)$$

ofwel

$$(\exp(i\omega_j \Delta t) - 1) = \pm \Delta t / gH_f ik_j \exp(\frac{1}{2}i\omega_j \Delta t) \quad (A8)$$

Uitgaande van relatie (A8) kunnen we a_j en b_j als volgt relateren:

$$a_j^+ = -\sqrt{gH_f} \exp(-\frac{1}{2}i\omega_j k \cdot \Delta t) b_j^+, \text{ ingeval "+" in (A8)} \quad (A9)$$

en

$$a_j^- = +\sqrt{gH_f} \exp(-\frac{1}{2}i\omega_j k \cdot \Delta t) b_j^-, \text{ ingeval "-" in (A8)}$$

We veronderstellen dat $i\omega \Delta t \ll 1$; vervolgens kunnen we nu relatie (A8) benaderen door de gelijkheid:

$$i\omega_j \Delta t = \pm ik_j \Delta t, \text{ ofwel}$$

$$i\omega_j = \pm ik_j \quad (A10)$$

In geval we nu te maken hebben met het "+" teken, dan is de looprichting van de golf in de richting van de negatieve x-as (negatieve golf). Voor het "-" teken geldt het tegenovergestelde (positieve golf). Dit is eenvoudig in te zien wanneer we (A10) substitueren in (A4).

De open rand in $x=L$ is niet-reflekterend indien de positieve golven ongestoord kunnen passeren. Negatieve golven mogen uitsluitend het gevolg zijn van in $x=L$ opgedrukte externe invloeden. Bij afwezigheid van deze invloeden van buiten Ω , dienen de negatieve golven in $x=L$ te verdwijnen; is dit niet het geval dan is sprake van reflektie.

Door middel van $ZRrvw$ 'n trachten we de reflekties beperkt te houden.

We zullen nu, om de mate van reflektie te bepalen, de volgende reflektiekoëf-
ficiënt definiëren:

$$R_f = \left| \frac{b_j^+}{b_j^-} \right| \quad \text{in } x=L \quad (A11)$$

In geval b_j^+ nul is, betekent dit dat de bijdrage van de negatieve golf in $x=L$ nihil is (hierbij laten we de externe faktoren dus buiten beschouwing); er is dan geen reflektie, ofwel $R_f = 0$.

We zullen de $ZRrvw$ (A3) als volgt numeriek implementeren:

$$U^{n+1} - \sqrt{gH_f} H^{n+1} = U_0 - \sqrt{gH_f} H_0 \quad (A12)$$

Substitueren we hierin uitdrukking (A4) met gebruikmaking van (A9) dan levert dit komponentsgewijs de volgende relatie:

$$\begin{aligned} & (-\sqrt{gH_f} \exp(i\omega_j^+ t_{n+1} - \frac{1}{2} i\omega_j^+ \Delta t + ik_j^+ x_N) - \sqrt{gH_f} \exp(i\omega_j^+ t_{n+1} + ik_j^+ x_N)) b_j^+ + \\ & (\sqrt{gH_f} \exp(i\omega_j^- t_{n+1} - \frac{1}{2} i\omega_j^- \Delta t + ik_j^- x_N) - \sqrt{gH_f} \exp(i\omega_j^- t_{n+1} + ik_j^- x_{N+1})) b_j^- = 0 \quad (A13) \end{aligned}$$

waarbij a_j^+ en k_j^+ respektievelijk ω_j^- en k_j^- gerelateerd zijn door (A9), het teken in aanmerking genomen.

Uitwerken van (A13) en substitutie in (A11) levert:

$$R_f = \left| \frac{b_j^+}{b_j^-} \right| = \left| \frac{\exp(-\frac{1}{2}i\omega_j^- \Delta t) - 1}{-\exp(-\frac{1}{2}i\omega_j^+ \Delta t) - 1} \right| = \frac{1}{4}\omega_j \Delta t + O(\omega \Delta t)^2 \quad (A14)$$

We zullen vervolgens een alternatieve implementatie beschouwen:

$$\frac{U^{n+1} + U^n}{2} - \sqrt{gH_f} H^n = U_0 - \sqrt{gH_f} H_0 \quad (A15)$$

Op overeenkomstige wijze als hierboven komen we nu op de volgende relatie tussen b_j^+ en b_j^- :

$$\begin{aligned} & (-\frac{1}{2}\sqrt{gH_f} \exp(i\omega_j^+ t_{n+1} - \frac{1}{2}i\omega_j^+ \Delta t + ik_j^+ x_N) - \frac{1}{2}\sqrt{gH_f} \exp(i\omega_j^+ t_n + \\ & - \frac{1}{2}i\omega_j^+ \Delta t + ik_j^+ x_N) - \sqrt{gH_f} \exp(i\omega_j^+ t_n + ik_j^+ x_N)) b_j^+ + \\ & (\frac{1}{2}\sqrt{gH_f} \exp(i\omega_j^- t_{n+1} - \frac{1}{2}i\omega_j^- \Delta t + ik_j^- x_N) - \frac{1}{2}\sqrt{gH_f} \exp(i\omega_j^- t_n + \\ & - \frac{1}{2}i\omega_j^- \Delta t + ik_j^- x_N) - \sqrt{gH_f} \exp(i\omega_j^- t_n + ik_j^- x_N)) b_j^- = 0 \end{aligned}$$

Hieruit leiden we de volgende reflektiekoëfficiënt af:

$$\begin{aligned} R_f &= \left| \frac{b_j^+}{b_j^-} \right| = \left| \frac{-\frac{1}{2} \exp(\frac{1}{2}i\omega_j^- \Delta t) - \frac{1}{2} \exp(-\frac{1}{2}i\omega_j^- \Delta t) + 1}{-\frac{1}{2} \exp(\frac{1}{2}i\omega_j^+ \Delta t) - \frac{1}{2} \exp(-\frac{1}{2}i\omega_j^+ \Delta t) - 1} \right| = \\ & \frac{1}{16} \omega_j^2 \Delta t^2 + O((\omega \Delta t)^4) \quad (A16) \end{aligned}$$

De reflektiekoëfficiënt is derhalve een orde geringer in geval we in plaats van implementatie (A12) de alternatieve implementatie (A15) hanteren.

Duidelijk is in te zien dat we met (A15) een randvoorwaarde introduceren, waarbij u en ϕ op verschillende tijdstippen worden genomen, bijvoorbeeld

snelheid u op $t + \frac{1}{2}\Delta t$ en ϕ op t . Grootteid u loopt dus een halve tijdstip achter op ϕ .

We kunnen in plaats van (A15) ook de volgende implementatie beschouwen:

$$U^{n+1} - \sqrt{gH_f} \frac{H^{n+1} + H^n}{2} = U_0 - \sqrt{gH_f} H_0 \quad (A17)$$

Hieruit kunnen we een zelfde reflektiekoëfficiënt als in (A16) afleiden.

In het voorgaande is getracht aan de hand van een eenvoudig één-dimensionaal model de invloeden van het Sielecki-schema op de oplossing nader te analyseren. Hierbij hebben we de oplossing geschreven als een simpele reeksontwikkeling (A4), complex gekonjugeerde oplossingen hebben we buiten beschouwing gelaten. Tevens is de diskretisatie naar de plaats achterwege gelaten. In deze appendix zullen we ons echter beperken tot de gegeven analyse, en derhalve voorbijgaan aan de problematiek die voortvloeit uit het meenemen van complex toegevoegde oplossingen en de plaatsdiskretisatie.

We zullen nu nagaan in hoeverre implementaties die met deze halve tijdstap rekening houden gunstige numerieke resultaten opleveren; we testen dit aan de hand van het volgende één-dimensionale model (inclusief adjektieve termen):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\psi}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\psi}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (A18)$$

met $x \in [0, 1000]$ en $0 < t < 210$.

Beginvoorwaarden: $u(x, 0) = 0$,

$$\psi(x, 0) = 2\sqrt{gH(x, 0)}, \text{ waarbij } H(x, 0) = \exp(-x^2/40000) + 10$$

Randvoorwaarden: $u(0, t) = 0$

en een ZRrvw in $x = 1000$

$$h = 10; g = 10$$

Diskretisatiegrootheden: $\Delta x = 50$ en $\Delta t = 5$

Stationaire oplossingen: $u_0 = 0$ en $\psi_0 = 20$.

Alvorens verscheidene implementaties van de nulde orde ZRrvw te beschouwen zullen we de volgende notaties invoeren:

- \bar{u} , $\bar{\psi}$: waarden van u en ψ op tijdstip t , voordat de ZRrvw wordt opgelegd
- u , ψ : waarden van u en ψ op tijdstip t , na toepassing van de ZRrvw.

De ZRrvw van de nulde orde voor het een-dimensionale model luidt voor (A18)

$$u - \psi = u_o - \psi_o \quad (A19)$$

(vergelijk (3.26) en (3.30) in het twee-dimensionale model).

Met (A19) schrijven we de inkomende Riemann-invariant in $x=L$ voor, zonder de uitgaande Riemann-invariant $u + \psi$ te beïnvloeden (zie [8]).

Wanneer we echter, uitgaande van (A19), een van de grootheden u of ψ voor-schrijven, zoals bijvoorbeeld

$$\psi = u - u_o + \psi_o$$

dan verandert hiermee ook de waarde van de uitgaande Riemann-invariant. We kunnen deze grootheid echter per tijdstap konstant houden, d.w.z. we schrijven voor de uitgaande Riemann-invariant het volgende:

$$u + \psi = \bar{u} + \bar{\psi} \quad (A20)$$

Hiermee houdt de uitgaande Riemann-invariant de waarde zoals deze uit het numerieke schema volgt; door het opleggen van randvoorwaarden verandert deze waarde dus niet.

De implementaties die we nu vervolgens onderzoeken zijn:

I grootheid ψ als functie van u , zoals gegeven is door (A19), waarbij we beide grootheden op hetzelfde tijdstip nemen:

$$\psi^{n+1} = u^{n+1} - u_o + \psi_o$$

II grootheid ψ als functie van u , met een halve tijdstap achterlopend op ψ

$$\psi^{n+\frac{1}{2}} = u^{n+1} - u_o + \psi_o$$

$$\text{met } \psi^{n+\frac{1}{2}} = \sqrt{g(H^{n+1} + H^n)/2}$$

III grootheid ϕ als functie van u , waarbij we naast (A19) rekening houden met (A20), én met het feit dat u een halve tijdstap achterloopt op ϕ , ofwel:

$$\phi^{n+\frac{1}{2}} - u^{n+1} = \phi_o - u_o$$

en

$$\phi^{n+\frac{1}{2}} + u^{n+1} = \phi^{-n+\frac{1}{2}} + u^{-n+1}$$

waaruit we $\phi^{n+\frac{1}{2}}$ kunnen oplossen:

$$\phi^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\phi^{-n+\frac{1}{2}} + u^{-n+1}) + \frac{1}{2}(\phi_o - u_o)$$

IV u als functie van ϕ , zoals voorgeschreven door (A19), met u een halve tijdstap achter op ϕ :

$$u^{n+\frac{1}{2}} = \phi^n + u_o - \phi_o$$

$$\text{waarbij } u^{n+\frac{1}{2}} = (u^{n+1} + u^n)/2$$

Deze voorwaarde schrijven we voor nadat we de eerste vergelijking van (A18) numeriek hebben opgelost.

Na het oplossen van de tweede vergelijking schrijven we ϕ^{n+1} voor op overeenkomstige wijze als in III.

V u als functie van ϕ , resulterend uit (A19) en (A20) én met u een halve tijdstip achter op ϕ , ofwel:

$$u^{n+\frac{1}{2}} - \phi^n = u_o - \phi_o$$

en

$$u^{n+\frac{1}{2}} + \phi^n = u^{-n+\frac{1}{2}} + \phi^{-n}$$

waaruit we voor $u^{n+\frac{1}{2}}$ de volgende relatie afleiden:

$$u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u^{-n+\frac{1}{2}} + \phi^{-n}) + \frac{1}{2}(u_o - \phi_o)$$

welke voorwaarde we voorschrijven na het oplossen van de eerste vergelijking van (A18).

Voor ϕ^{n+1} schrijven we hetzelfde voor als in III, opgelegd na het oplossen

van de tweede vergelijking.

De resultaten van de genoemde implementaties geven we hieronder in tabel A1.
Voor een definitie van de reflektiekoëfficiënt zie (5.2).

<u>Implementatie</u>	<u>Reflektiekoëfficiënt (%)</u>
I	7,8
II	instabiel
III	3,2
IV	1,3
V	2,2

Tabel A1

Uit deze resultaten kunnen we een aantal konklusies trekken:

- het rekening houden met het feit dat u een halve tijdstap achterloopt op ϕ betekent een aanzienlijke verbetering (vergelijk III, IV en V met I)
- houden we de uitgaande Riemann-invariant per tijdstap konstant dan winnen we aan stabiliteit (vergelijk II met III)
- het extra voorschrijven van de snelheid u heeft een gunstige invloed op de reflektiekoëfficiënt (vergelijk IV en V met III)
- we zien dat de reflektiekoëfficiënt met een factor 6 vermindert in geval we IV in plaats van I toepassen. Voor het lineaire geval hebben we gezien dat de reflektiekoëfficiënt met een factor $\frac{1}{2}\omega\Delta t$ verbetert in geval we rekening houden met het feit dat u een halve tijdstap achterloopt op ϕ . Hierbij zijn de hogere orde termen buiten beschouwing gelaten. In het onderhavige geval zou voor het lineaire model de verbetering ongeveer een factor 10 bedragen. Het niet lineair zijn van het stelsel in het testgeval kan wellicht de oorzaak vormen van het geringer zijn van de verbetering. Een diepgaande analyse van mogelijk andere oorzaken valt buiten het bestek van dit verslag en zeker van deze appendix.

Een voor de hand liggende uitbreiding is implementatie IV toe te passen in het twee-dimensionale model.

p.o. box 177 2600 mh delft the netherlands