线性方程组

表示：$Ax=b$ 解 $x=(c_1, c_2, c_3 \cdots)^T$

概念：① $[A:b]$：A 增广矩阵.

② 所有解的集合：解集.

③ 所有解的表达式：通解.

④ 两方程解相同：同解/等价.

消元法：先写出 $\bar{A}$，把 $\bar{A}$ 化为行最简形

解一眼就能看出来

(若化到最后有效方程数 < 未知数个数

例如 $\begin{bmatrix} 1 & & & -1 & -2 \\ & 1 & & -1 & -4 \\ & & 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$ 则 x_1 x_2 x_3 用 x_4 表示

x_4 称为自由未知量，如 x_3 称为约束未知量）.

线性方程组的解

有解判定. $r(A) = r(\bar{A})$.

有解时 ① $r(A) = n$（列满秩）.
有唯一解.

② $r(A) < n$（列降秩）.
有无穷解

(特别的，若行数 < 列数，一定是 $r(A) < n$ ✱).

特殊的

① $r(A) = r[A \vdots b] = r(\bar{A})$
$Ax = b$ 一定有解.

对于齐次的：$Ax = 0$

② $r(A) < n$ 有无穷解.

③ $r(A) = n$ 只有零解.

数域 = 对加减乘除封闭

n维向量：(一种特殊的矩阵).

$\alpha = (a_1 \ a_2 \ \cdots\cdots a_n)$ 行向量.

$\beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \beta_n]^T$ 列向量.

其运算与矩阵一样.

向量组

方程组可以用向量表示

$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n=\beta$

线性表示

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$

称为 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 的线性组合

若 β 可由 $\alpha_1\cdots\alpha_2$

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\cdots k_n\alpha_n=\beta$

则称 β 可由 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性表示

简称线表

方程组 $Ax=\beta$ 有解

β 可由 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线表

$r(A) = r(\overline{A})$

$r[\alpha_1 \cdots \alpha_n] = r[\alpha_1 \cdots \alpha_n \beta]$

向量组线表.

等价向量组

Ⅰ: $\alpha_1 \cdots \alpha_n$

Ⅱ: $\beta_1 \cdots \beta_m$

若Ⅰ中每一个向量都能被Ⅱ线表，则Ⅰ被Ⅱ线表

向量组等价

$\Updownarrow$

矩阵方程

$[\beta_1 \cdots \beta_m] = [\alpha_1 \cdots \alpha_m] A$

有解

若两个向量组能互相线表，则两个向量组等价.

$\Downarrow$

$r[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m] = r[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n]$

$= r[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n \mid \beta_1\beta_2\cdots\beta_m]$

线性相关

定义：若 $\exists$ 不全为 0 的数 $k_1\cdots k_n$

s.t. $k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$

则 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性相关

否则线性无关

线性相关 $\rightarrow r(A)<n$

A 列降秩

齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解

定理

1. $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性相关

$\Updownarrow$

$\exists\alpha_i$ 可由其他 α 线表

2. $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性无关，$\alpha_1\cdots\alpha_n\beta$ 线性相关

β 可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线表

定义：U 中一个向量组 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$

① $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 线性无关

② U 中任意向量可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 线表.

极大无关组

向量组的秩：$r(U)$.

U 只有零元一秩为 0

否则，U 极大无关组中向量个数为 U 的秩.

矩阵初等变换不改变行

向量组的秩

(列)向量的相关性

将向量构成矩阵 A

$r(\,) = r(A)$

三秩相等

$r(A)$ = A的列秩

(A列向量组的秩)

= A的行秩

(A的行向量组的秩)

定理①　向量组 Ⅰ $\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_s$ 可由 Ⅱ

$\beta_1 \cdots \beta_r$ 线表

(1) $s>r$，则 Ⅰ 线性相关

"多"可由"少"表示，则多相关

(逆否命题) (2) Ⅰ 线性无关 则 $s \le r$

推论

① 两个无关组，若等价，则所含向量个数相同.

② $r(U)=r$，则 U 的任意 r 个线性无关向量都可以作为 U 的极大无关组.

定理②：向量组(I)可由(II)线表，则 $r(I) \le r(II)$

推论：若(I)(II)等价，则 $r(I)=r(II)$

定理③：对于矩阵 A、B

$$\begin{cases} r(A+B) \le r(A) + r(B) \\ r(AB) \le \min(r(A), r(B)) \end{cases}$$

齐次方程组 $Ax=0$

基础解系 $\xi_1 \cdots \xi_t$

(1) $\xi_1 \cdots \xi_t$ 线性无关

(2) $Ax=0$ 的任意解都可由 $\xi_1 \cdots \xi_t$ 线表.

(解向量组的 极大无关组).

通解: $c_1\xi_1 + c_2\xi_2 \cdots c_n\xi_n$.

(与极大无关组基(组))

任意 $n-r$

(自由变量)

基础解系有 $n-r$ 个向量

线性方程组结构解

个线性无关的解即为基础解系

如何求基础解系

① 写出自由向量表示的通解

② 令 $n-r$ 个自由未知数

为 $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$

…… e_{n-r}，得出 $n-r$ 个解，构成基础解系

非齐次

$Ax=b$

特解　　通解

结构解：$x=\eta^* + \sum c_i \xi_i$