曲面与空

- 定义
  - 曲面 $f(x,y,z)=0$
  - 曲线：两曲面交线 $\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$
  - 曲面 参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$
  - $f(x,y,z)$ 图示法：平行截面法.
    (x=0，y=0，z=0 分别讨论讨论).
- 常见曲面
  - 柱面
    - 一条准线 Γ (曲线)
    - 一条母线 L (直线)
    - L // 直线 C，L 沿 Γ 移动形成面
    - 求法：见书 P264 (利用向量平行)

间曲线

柱面 — 一条准线Γ
一条母线L
母线L始终经过一定点M
L沿Γ移动形成柱面

求法：向量

旋转面 — 母曲线
绕旋转轴
轴、圆

求法 抓住距离不变.
(将曲面，若绕x(y,z)轴转，

则将该轴不变，另外变为 $\sqrt{y^2+z^2}$ 即可.

($\sqrt{x^2+z^2}$, $\sqrt{x^2+y^2}$).

5种常见的二次曲面

- 椭球面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
- 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. 一负
- 双叶双曲面 $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 两负
- 椭圆双曲面 $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$.
- (马鞍面)双曲抛物面 $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$.

曲线在坐标面上投影 —
- 下是曲线
- Π是平面
- 下上每一点向Π作垂线

垂足形成的线为投影

垂线形成投影柱面

投影求法

① 求出投影柱面 $G(x,y,z)=0$

② 联立求交线

$$\begin{cases} G(x,y,z)=0 \\ F(x,y,z)=0 \end{cases}$$

二次型

- 二次型及其矩阵 —— 定义：

$$f(x_1 \cdots x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$\cdots + a_{nn}x_n^2.$$

  - 二次型矩阵 —— $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & \cdots \\ a_{13} & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & a_{nn} \end{pmatrix} = A$
    - A的秩为二次型f的秩.
    - $f(x)$可以写成 $x^T A x$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- 二次型标准形 —— 定义：$f = y^T D y$. $D = diag(d_1 \cdots d_n)$.

$$= d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

如何将二次型化为标准形 —— 实际上即将实对称矩阵化为对角阵 D，$x = Cy$ 中 C 为正交矩阵即可。

法一 正交变换法.

$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. $x = Py$

P 为正交矩阵（求法见上一章）

法二 配方法.

有平方项： 见书 （一定要保证变换可逆）

无平方项： 不推荐该方法.

合同变换与惯性定理

合同变换 —— 定义 C可逆
$C^TAC=B$
则 $A\simeq B$（A与B合同）

性质
自反性
对称性
传递性
$r(A)=r(B)$

$A\simeq B$
推得 等价与 g叫

惯性定理 —— 二次型经可逆线性变换到标准型，正负平方项个数是唯一的，与变换无关

正（负）惯性指数：正惯性指数

- 负的个数：负惯性指数.
- 规范型：标准型省略系数，只保留正负号

  $f = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$

正定二次型

- 定义：$f(x) = x^T A x$，$\forall x \neq 0$ 时 $f(x) > 0$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为正定二次型，称 A 为正定矩阵.
- 定理
  - 判定法1：① 二次型经过可逆线性变换，正定性不变.
    (矩阵合同 $\Longleftrightarrow$ 正定性相同).
  - 判定法2：② 实对称矩阵 A 正定 $\Longleftrightarrow$ A 所有特征值 >0

判定定理.

定理 A正定 $\Longleftrightarrow$ $A = M^T M$. (M可逆)

↳ 推 ① $\det(A) > 0$
② 正惯性指数为n.

A与I合同

A正定 $\Longleftrightarrow$ A的各阶主子式 > 0.

负定，半正定，半负定：类比正定，把不等号替换即可.