矩阵特征值与特征向量

定义：$Ax=\lambda x$ $\quad ((\lambda I-A)x=0)$.
$(x\neq 0)$.

则 λ 为 A 的一个特征值，x 为 A 的特征向量.

满 x 存在的条件为 $\det(\lambda I-A)=0$ ☆.

① $\det(\lambda I-A)$ 为关于 λ 的特征方程

称.

由多项式性质，n阶方阵在复数域上有n个特征值

② λ 为特征方程 k 重根，则称 λ 代数重数为 k

③ $(\lambda_i I-A)x=0$ 解空间维数称为 λ 的几何重数.

特征值与特征向量性质

① $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det(A)$

② $\sum \lambda_i = tr(A)$

③ λ为A的特征值，则$f(\lambda)$为$f(A)$的特征值，$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$

(注：$n-i$可以<0)

④ 属于不同特征值特征向量线性无关.

⑤ 几何重数 ≤ 代数重数.

相似矩阵

相似矩阵 — 定义：$\exists P$ s.t. $P^{-1}AP=B$.
则 $A \sim B$ A相似于B.

性质 — 自反，对称，传递.

① $\det(A)=\det(B)$
② $r(A)=r(B)$.
③ $A^{-1}\sim B^{-1}$ (若A^{-1}存在).
④ A的特征值 = B的特征值
$\lambda_A=\lambda_B$.
⑤ $f(A)\sim f(B)$

矩阵可对角化条件 — 定理.

A可对角化.

特殊的，若A没有重根，则其一定可相似对角化.

可相似对角化

A的每个λ代数重数 = 几何重数 $\Longleftrightarrow$ A有n个线性无关特征向量

若 $P^{-1}AP = D$,

① $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

② $P = (x_1 \ x_2 \ \cdots \cdots \ x_n)$,

x_i 为 λ_i 的特征向量

实对称矩阵的对角化

一类一定能相似对角化的矩阵

定义：全实数并且对称

实对称矩阵性质

① 特征值全为实数

② 不同特征值对应的特征向量正交.

③ 实对称矩阵一定可对角化

实对称矩阵对角化：

① 定理：一定存在正交矩阵 P

s.t. $P^{-1}AP = D$

② 如何得到 D 和 正交矩阵 P

D：把特征值摆在对角

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

这一过程叫正交相似对角化

正交的 P：把 λ_i 的所有向量用施密特正交单位化，然后按列摆放。

（单特征值直接单位化即可）