

(d)
中等
水平

较高
水平

定义: $(2+8)$ (太多), 情情师).

常见的线性空间:

F 由一个集合
元素 R (实数).

R^n (向量).

1. F^n (n维向量).
2. $F^{m \times n}$ ($m \times n$ 维矩阵)

3. $F[x]_n$ (次数 $\leq n$ 多项式)

4. $C[a, b]$ ($[a, b]$ 上连续函数 f)

性质:

1. 零元性 -
2. 负元性 -

3. $0\alpha = 0$

$k0 = 0$

4. $k\alpha = 0$ $\Leftrightarrow k=0$ 或 $\alpha=0$

线性子
空间

$\text{① } W$ 的 1 维子空间 V 的 子空间

子集 + 封闭

实际上

W 只要满足 2 条即可.

由单个非零向量构成的子空间叫 基空间

$\alpha_1, \alpha_2 \in V$

$W = \text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2\} = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2\}$ 的 1 维子空间

由 ... 行成的 线空间

基、维数 → 基: (线性无关元组).

向量坐标 → 基的个数称为 n 的维数, 记为

$$\dim(V) = n. \text{ (维数).}$$

$$\beta = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n$$

例: β 在 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 的坐标为
 (x_1, \dots, x_n) .

从 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$V = \text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}.$$

基支換
坐標換

基度量：过渡矩阵

两组基之间过渡。

$$[\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_n] = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n] A$$

$$\text{即 } A \text{ 的 } \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ 与 } \beta_1, \dots, \beta_n$$

坐标变换

$$\alpha = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n] x \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_n & \xrightarrow{A} \\ & \beta_1 \dots \beta_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha = [\beta_1 \ \dots \ \beta_n] y$$

$$\Rightarrow y = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n] A x$$

$$\therefore y = Ax$$

线性空间同构 - 定义：① f 是 V_1 到 V_2 上的映射
② $\forall \alpha, \beta \in V_1$, 有 $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$

同构有 (通常而然的):

① 可加性

② 对称性

③ 传递性

上任意两个线性空间 F 同构

$$f(0_1) = f(0_2)$$

小结： V_1 中 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 成线性相关

$\exists k_1, \dots, k_n$ 使 $k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n = 0$

(反之亦然).

定理：上两个线性空间 \Leftrightarrow 它们同构

扩充定理： $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 是 n 维空间 V 的一个子集.

$r < n$ 则一定存在 $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$
 使 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$ 为 V 的基
 (即从 n 元组空间扩充中 V 的基)

子空间交并
 定义: $V_1 \cap V_2 = \{\alpha \mid \alpha \in V_1 \text{ 且 } \alpha \in V_2\}$
 $V_1 + V_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2\}$
 $V_1 \cup V_2 = \text{span} \{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s\}$.

定理 ① 子空间的交是子空间.
 ② 子空间的和是子空间.

维数公式

$$\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2).$$

(平行四边形法)

子空间的直和一定义：若 $V_1 \oplus V_2$

任意 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ 都有 $\alpha_1 \in$

且 $\alpha_2 \in V_2$ 的直和

\checkmark $V_1 \oplus V_2$

即 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$

定义 — 内积：4条（见书）。

定义} 内积的四条性质

常见的欧式空间
及标量内积。

一般这些

空间不特殊说明
内积仅指标量内积

柯西不等式

$$|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq$$

成立 ($\Rightarrow \alpha, \beta$ 性相关)

① R^n 中 $\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha^T \beta$
 \langle 每相同位置元素乘积 \rangle

② $R^{n \times n}$ 中 $\langle \alpha, \beta \rangle = \text{tr}(\alpha^T \beta)$

$$= \sum_{i,j} \alpha_{ij} \beta_{ij}$$

③ $C(a, b)$ 中 $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$

$$\leq \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} \sqrt{\langle \beta, \beta \rangle}$$

范数与夹角

范数 (度量向量)

$$\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

范数的物理向量平行类似.

$\langle \alpha, \beta \rangle > 0$ 则 α, β 共同, $\varphi = 90^\circ$

$$\text{夹角 } \psi = \arccos$$

$$\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \|\beta\|}$$

$$d(\alpha, \beta) := \|\alpha - \beta\|$$

标准正交化

正交向量组: 而且已知

范数由

标准正交向量组

↑ 个数的假数
标准正交基

性质：① 正交向量组线性无关

标准化向量表示 $\alpha_1 \dots \alpha_n$
的正交标准正交基。
 $\alpha = x_1\alpha_1 \dots x_n\alpha_n$

$\beta = y_1\alpha_1 \dots y_n\alpha_n$

则 $\alpha(\beta)$ 在 \mathbb{R}^n 中有着唯一向量

$$d \sim (x_1 \dots x_n)^T$$

将复杂的向量
转化为坐标向量

有性质 ① $x_i = \langle \alpha, x_i \rangle$

$$\text{② } \|\alpha\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$\text{③ } \langle \alpha, \beta \rangle = (x_1 \dots x_n) (y_1 \dots y_n)^T$$

$$\text{④ } d(\alpha, \beta) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

格兰斯基-施密斯

已亥氏

任意

(把 α 固定化为标准正交基)

① 先正交化

② 再单位化

正交化: $\beta_i = \alpha_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle \alpha_i, \beta_k \rangle}{\|\beta_k\|^2} \beta_k$.

相似

$$e_i = \frac{\beta_i}{\|\beta_i\|}$$

正交矩阵 \Rightarrow 定义: $A^T \beta_i = \beta_i A^T = 0$
 $(A^{-1} = A^T)$.

结论: $\Rightarrow \det A = \pm 1$.

② A^T, A^{-1}, A^* 均正交

③ α, β 正交 $\Leftrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = 0$

判斷定理 α 的正交範例 \Leftrightarrow α 和 β (n) 視

的是否平行

(N)

正交子集 $\rightarrow P$ 的 n 項分類.

$T(x) = P_x$ 的 正交子集

(實 P. 上是一種子集)

子集 $\langle P_{X_1}, P_{X_2} \rangle = \langle X_1, X_2 \rangle$

$$\|P_{X_1}\| = \|X_1\|$$