线性变换及其运

线性变换 — 定义：T 为 $V \to W$ 上映射

且 ① $T(\alpha+\beta) = T(\alpha) + T(\beta)$

② $T(k\alpha) = kT(\alpha)$.

（可以看出同构映射是特殊的线性变换）线性+双射

实际上，线性变换的性质决定了它直接作用的对象是基

定义 $V \to W$ 全体线性变换的集合 $L(V,W)$

$T \in L(V,W)$ 称 T 为 V 到 W 线性变换（映射）（算子）

（类比 $f \in C(a,b)$）.

若 W 为 V 时 记作 $L(V)$

性质 ① $T(0) = 0$

② $T(-\alpha) = -T(\alpha)$

③ $T(k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m)$
$= k_1T(\alpha_1) + k_2T(\alpha_2) + \cdots + k_mT(\alpha_m)$

算

核与值域 —— 定义：$T \in L(V, W)$

① V 叫作 T 的定义域

② $\{\alpha \mid \alpha \in V, T(\alpha) = 0\}$ 为 T 的核

记作 $\mathrm{Ker}(T)$ 或 $T^{-1}(0)$（也叫零空间）

③ W 叫作 T 的值域（像空间）.

记作 $R(T)$ 或 $T(V)$

性质 ① $\mathrm{ker}(T)$ 是 V 的子空间

② $R(T)$ 是 W 的子空间

秩加零度定理 —— 定义：$\mathrm{Ker}(T)$ 的维数叫作 T 的零度，记作 $\mathrm{nullity}(T)$.

$R(T)$ 的维数叫作 T 的秩，记作 $\mathrm{rank}(T)$

定理 $\dim(V) = n$.

则 $\text{nullity}(T) + \text{rank}(T) = n$.

定理 $\text{rank}(T) = \dim(V) = n \longleftrightarrow T$ 是单射.

T将V中无关组映射为W中无关组

$\ker(T) = \{0\}$.

推论：T为单射时 $e_1\ e_2\ e_3 \cdots e_n$ 为V的基

则 $T(e_1), T(e_2), \cdots, T(e_n)$ 为 $R(T)$ 的基

线性变换的运算

线性变换经乘积，和，数乘运算后仍为线性运算

—① 乘积运算：$T_1T_2(\alpha) = T_1(T_2(\alpha))$

可逆映射—定：$TS = I \quad ST = I$

恒等变换

定义 $S: T^{-1}$ 逆映射

判断：

单射 + 满射

T 可逆 $\Longleftrightarrow \ker(T) = 0$ 且 $R(T) = W$

特殊的，若 $\dim(V) = \dim(W) = n$.

单射 $\Longleftrightarrow$ 满射 $\Longleftrightarrow$ 可逆.

和与数乘：① 和 $(T_1+T_2)(\alpha) = T_1(\alpha)+T_2(\alpha)$

② 数乘：$(kT)(\alpha) = kT(\alpha)$

由此，$L(V,W)$ 本身就是一个线性空间

线性变

线性变换的矩阵与基选定有关

定义: $T[\alpha_1\ \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n] = [T(\alpha_1)\ \ T\alpha_2 \cdots T(\alpha_n)]$

$= [\beta_1\ \ \beta_2 \cdots\cdots \beta_m]\, A_{m\times n}$

$B=\{\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n\}$ 是 V 的一组基 $\dim(V)=n$

$B'=\{\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m\}$ 是 W 的一组基 $\dim(W)=m$

则定义 A 为在给定基 B, B' 下线性变换 T 的矩阵

线性变换

与坐标变换

$$
\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[r, leftrightarrow, "T(\alpha)"] \arrow[d, leftrightarrow] & T(\alpha) \arrow[d, leftrightarrow] \\
(\alpha\text{坐标})\ x \arrow[r, leftrightarrow, "A"] & y = Ax
\end{tikzcd}
$$

$\alpha = [\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_n]\,x$

$T(\alpha) = [T(\alpha_1) \cdots\cdots T(\alpha_n)]\,x$

$= [\beta_1 \cdots\cdots \beta_n]\,A\,x$

换矩阵素

线性变换运算与对应矩阵运算 —
① $T_1+T_2 \Longleftrightarrow A+B$
② $kT_1 \Longleftrightarrow kA$
③ $T_1 \cdot T_2 \Longleftrightarrow AB$,

(由①②及 $L(V,W)$ 的一一对应可得 $L(V,W)$ 与 $F^{m\times n}$ 同构).

定理. 由 $R(T)$ 与 N 的副空间同构. $\mathrm{rank}(T) = r$ 时

② $\ker(T)$ 为 $Ax=0$ 的解空间同构，

$\text{nullity}(T) = n - r(A)$.

③ $\dim(V) = \dim(W) = n$.

B 与 B' 分别为 V 与 W 的基

T 在基下矩阵为 A

则 T 可逆 $\Leftrightarrow$ A 可逆.

定理：线性算子T在不同基下矩阵是相似的