

线性空间

定义: (2+8) (太多), 详情见书.

常见的线性空间:

- 1. F^n (n 维向量).

F 为一个集合
比如 R (实数)
 R^n (实向量).

- 2. $F^{m \times n}$ ($m \times n$ 维矩阵)

- 3. $F[x]_n$ (次数 $\leq n$ 多项式)

- 4. $C[a, b]$ ($[a, b]$ 上连续函数)

性质:

- 1. 零元唯一
- 2. 负元唯一

- 3. $0\alpha = 0$

$k0 = 0$

- 4. $k\alpha = 0$ 则 $k=0$ 或 $\alpha=0$

线性子
空间

- ① W 为线性空间 V 的非空子集
- ② W 为一个线性空间

子集 + 封闭

空间上

W 只需满足 2 封闭即可.

由若干个零向量构成的子空间叫零空间

$$\alpha_1, \alpha_2 \in V$$

$$W = \text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2\} = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2\} \text{ 为线性空间}$$

由...向量生成的线性空间

基、维数 — 基: (线性无关组).

向量坐标 — 基的个数记为 n 的维数, 记作

$$\dim(V) = n. \text{ (基的秩).}$$

$$\beta = x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n$$

则 β 在 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 下的坐标为

$$(x_1 \dots x_n)^T$$

V 由 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$V = \text{span} \{ \alpha_1, \dots, \alpha_n \}.$$

基变换与
坐标变换

基变换：过渡矩阵

两组基之间满足

$$[\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n] = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n] A$$

即 A 由 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$ 到 β_1, \dots, β_n
的过渡矩阵

坐标变换

$$\alpha = [\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n] x \quad \left(\alpha_1, \dots, \alpha_n \xrightarrow{A} \beta_1, \dots, \beta_n \right)$$

$$\alpha = [\beta_1 \ \cdots \ \beta_n] y$$

$$\hookrightarrow = [\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n] A x$$

$$\therefore y = Ax$$

线性空间同构 — 定义: ① f 是 V_1 到 V_2 上双射
② $\forall \alpha, \beta \in V_1$, 有 $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$

同构有 (线性性质):

① 自反性

② 对称性

③ 传递性

$$③ f(k\alpha) = k f(\alpha)$$

F 上任意 n 维线性空间 F^n 同构

$$f(0_1) = f(0_2)$$

性质: V_1 中 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性相关

则 $f\alpha_1, \dots, f\alpha_n$ 线性相关

(反过事也成立).

定理: F 上两线性空间同构 \iff 它们维数相同

扩充定理: $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 是 n 维空间 V 的一个无差组.

$r < n$ 则一定存在 $\alpha_{r+1} \dots \alpha_n$

使 $\alpha_1 \dots \alpha_r \alpha_{r+1} \dots \alpha_n$ 为 V 的基

(即从一无关组一定能扩充为 V 的基)

子空间交与和 ✓ 定义: $V_1 \cap V_2 = \{\alpha \mid \alpha \in V_1 \text{ 且 } \alpha \in V_2\}$
 $V_1 + V_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2\}$

$V_1 + V_2 = \text{span}\{\alpha_1 \dots \alpha_r \beta_1 \dots \beta_s\}$

定理 ① 子空间的交是子空间.

② 子空间的和是子空间.

维数公式

$$\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

(容斥原理这一块)

子空间的直和 — 定义: 若 $V_1 + V_2$ 中

任意 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ 表示式唯一

则称 V_1 与 V_2 有直和

记作 $V_1 \oplus V_2$.

例: $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

欧氏空间

定义 — 内积: 4条 (见书).

定义: 内积的空间叫欧氏空间

常见的欧氏空间
及标准内积:

① R^n 中 $\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha^T \beta$.
(每个相同位置元素相乘)

— 可度这些

② $R^{n \times n}$ 中 $\langle \alpha, \beta \rangle = \text{tr}(\alpha^T \beta)$

空间不特殊说明
内积代替标准内积

$$= \sum_i \sum_j \alpha_{ij} \beta_{ij}$$

③ $C(a, b)$ 中 $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$

柯西不等式

$$|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} \sqrt{\langle \beta, \beta \rangle}$$

等号成立 $\iff \alpha, \beta$ 线性相关

范数与夹角

范数

(模长)

$$\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$$

范数的性质与向量性质类似.

$\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ 则 α, β 正交, 90°

夹角 $\varphi = \arccos$

$$\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \|\beta\|}$$

距离

$$d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|$$

标准正交

正交向量组

两两正交

范数由1

标准正交向量组

标准正交基 \downarrow 个数由维数

性质: ① 正交向量组线性无关

反之: 线性表示 $\alpha_1 \dots \alpha_n$
为两个标准正交基.

$$\alpha = x_1 \alpha_1 \dots x_n \alpha_n$$

$$\beta = y_1 \alpha_1 \dots y_n \alpha_n.$$

则 $\alpha(\beta)$ 在 \mathbb{R}^n 中存在着唯一向量

$$\alpha \sim (x_1 \dots x_n)^T$$

将复数的向量
转化为实数运算

有性质 ① $x_i = \langle \alpha, x_i \rangle$

② $\|\alpha\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

③ $\langle \alpha, \beta \rangle = (x_1 \dots x_n) (y_1 \dots y_n)^T$

④ $d(\alpha, \beta) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$

格三特-施密斯
正交法.



① 先正交化

② 再单位化

任意

(把任意一组基化为标准正交基)

正交化: $\beta_i = \alpha_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle \alpha_i, \beta_k \rangle}{\langle \beta_k, \beta_k \rangle} \beta_k.$

标准化

$$e_i = \frac{\beta_i}{\|\beta_i\|}.$$

正交矩阵 — 定义: $A^T A = A A^T = I$
 $(A^{-1} = A^T).$

性质: $\det A = \pm 1.$

② $A^T, A^{-1}, A^{\#}$ 均正交

判断定理 ③ A, B 正交, 则 AB 也正交
 A 为正交矩阵 $\Leftrightarrow A$ 的列(行)向量
 两两正交且模为 1

正交变换 $\leftarrow P$ 为 n 阶正交矩阵.

$T(x) = Px$ 为正交变换

(实内积上是一种正交变换).

性质 $\langle Px_1, Px_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle$

$$\|Px_1\| = \|x_1\|$$