矩陣性質之 $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ 證明

中華民國 112 年 7 月

作者： Moon Jam

一、 動機

高二下學期的最後一個單元——矩陣，發現許多同學在計算時會使用到 $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ 這個性質，讓運算時的速度加快或是能更快的在是非題中作答，若只要證明其在 2 階、3 階的正確性並不難，但若要將A、B拓展至 n 階方陣，想要證明此性質實在頗不容易，問了許多同學後發現幾乎所有人都知道這個公式，但沒有任何一個人知道如何證明，如此不求甚解的狀況實在非常令人痛心，後來詢問了老師，知道這其實並非在高中的課綱範圍之內，但老師仍鼓勵我進一步的研究，也有助於對矩陣的理解，以及進一步窺探未來大學線性代數的知識，因此就開始查詢相關資料並著手證明。

二、 證明過程

命題：試證$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$，其中 $A, B \in n$階方陣

(一) 若 $\boldsymbol{det(A) = 0}$ 或 $\boldsymbol{det(B) = 0}$

當$\det(A) = 0 \Rightarrow A^{-1}$ 不存在，試找$(AB)^{-1}$

$\because B \cdot (AB)^{-1} = A^{-1}$, 又$A^{-1}$不存在 $\therefore (AB)^{-1}$不存在

又一方陣之反方陣不存在，若且唯若其行列式值為 0

故$\det(AB) = 0 = \det(A) \cdot \det(B) = 0 \cdot \det(B)$

同理可證當 $\det(B) = 0$ 時，$\det(AB) = 0 = \det(A) \cdot \det(B) = \det(A) \cdot 0$ 亦成立

則當 $\det(A) = 0$ 或 $\det(B) = 0$ 時，$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$成立 ■

(二) $\boldsymbol{det(A) \neq 0, det(B) \neq 0}$

1. 定義基本矩陣（後文將以$\boldsymbol{E}$表示之）

令 u, v 兩n階行向量

$$\forall\, v^T u \neq -1,\ \exists\, I_n + uv^T \text{ 為一基本矩陣}$$

且必為非奇異矩陣，以下提供證明（為方便撰寫後文以I代替I_n，O代替O_n）

猜測$(I + uv^T)^{-1} = I + kuv^T$

$$(I + uv^T)(I + kuv^T) = I + uv^T + kuv^T + kuv^T uv^T = I$$

$$(1 + k)uv^T + ku(v^T u)v^T = O_n$$

$$1 + k + kv^T u = 0$$

$\Rightarrow k = -(1 + v^T u)^{-1}$ ，又 $v^T u \neq -1$

故 $(I + uv^T)^{-1}$ 存在，則基本矩陣為非奇異矩陣

2. $\boldsymbol{det(I+uv^T)=1+v^Tu}$

$$u=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{bmatrix}, v=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{bmatrix} \Rightarrow \det(I+uv^T)=\begin{bmatrix}1+u_1v_1 & u_1v_2 & \cdots & u_1v_n\\ u_2v_1 & 1+u_2v_2 & \cdots & u_2v_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ u_nv_1 & u_nv_2 & \cdots & 1+u_nv_n\end{bmatrix}$$

$$\det(I+uv^T)=\begin{bmatrix}1+u_1v_1 & u_1v_2 & \cdots & \cdots & u_1v_n\\ \frac{-u_2}{u_1} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{-u_3}{u_1} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{-u_n}{u_1} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix} \quad (\text{除第一列外，第}i\text{列}-\frac{u_i}{u_1})$$

$$=(1+u_1v_1)-u_1v_2\frac{-u_2}{u_1}+u_1v_3(-1)\frac{-u_3}{u_1}-\ \ldots\ldots+(-1)^{n-1}u_1v_n(-1)^{n-2}\frac{-u_n}{u_1}$$

（過程見下方註釋）

$$=1+u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3+\ \ldots\ldots+u_nv_n$$

$$=1+\sum_{i=1}^{n}u_iv_i=1+v^Tu \ \blacksquare$$

註：拆解行列式省略了一些詳細過程，過程大致如下圖。

$$\begin{vmatrix}1+u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & u_1v_4 & \cdots & u_1v_n\\ \frac{-u_2}{u_1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{-u_3}{u_1} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{-u_4}{u_1} & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{-u_n}{u_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

其中同顏色的代表其子行列式乘到單位矩陣的過程，為避免太過混亂沒有標註乘0的部分，以(1,4)之子行列式為例：

$$(-1)u_1v_4\left(\frac{-u_2}{u_1}\cdot 0+(-1)\left(\frac{-u_3}{u_1}\cdot 0+(-1)\left(\frac{-u_3}{u_1}\cdot|I|\right)\right)\right)$$

可觀察出過程中會乘$n-2$次(-1)，由此可得到$(1,i)$的子行列式為下

$$(-1)^{n-1}u_1v_i(-1)^{n-2}\frac{(-u_i)}{u_1}$$

3. 對A做矩陣列運算可以表示EA表示

矩陣列運算方式及其矩陣列舉如下：（會於後文給出證明）

（e_i、e_j表示第 i、j 元素為 0 其餘為 1 之單位行向量）

(1) 交換列 i、j：$E_1(i,j)=I+\left(e_i-e_j\right)\left(e_j-e_i\right)^T$

(2) 列 i 乘 c 倍：$E_2(c,i)=I+(c-1)e_ie_i^T$

(3) 列 i 加列 j 乘 c：$E_3(c,i,j)=I+ce_ie_j^T$

其中E_2可視為E_3的推廣，列 i 乘 c 倍即為列 i 加列 i 乘 c-1，即

$E_2(c,i)=E_3(c,i,i)=I+(c-1)e_ie_i^T$，因此若$E_3$為真，則$E_2$為真

E_1之證明如下：（以下證明為方便表示假設 i<j，對最後結果不會有任何影響。為方便呈現矩陣中元素位置，會以上標表示位置，x^{yz}即代表x這個元素在 y 列 z 行）

$$E_1(i,j)A=A+\left(e_i-e_j\right)\left(e_j-e_i\right)^TA$$

$$=A+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1^{i1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ -1^{j1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & -1^{1i} & 0 & \cdots & 0 & 1^{1j} & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}A$$

$$= A + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1^{i1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1^{j1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_{i1} + A_{j1} & -A_{i2} + A_{j2} & \cdots & -A_{in} + A_{jn} \end{bmatrix}$$

$$= A + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \left(-A_{i1} + A_{j1}\right)^{i1} & \left(-A_{i2} + A_{j2}\right)^{i2} & \cdots & \left(-A_{in} + A_{jn}\right)^{in} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \left(A_{i1} - A_{j1}\right)^{j1} & \left(A_{i2} - A_{j2}\right)^{j2} & \cdots & \left(A_{in} - A_{jn}\right)^{jn} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \cdots & \mathrm{A}_{1\mathrm{n}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{(i-1)1} & A_{(i-1)2} & \cdots & A_{(i-1)n} \\ A_{j1}^{i1} & A_{j2}^{i2} & \cdots & A_{\mathrm{jn}}^{in} \\ A_{(i+1)1} & A_{(i+1)2} & \cdots & A_{(i+1)n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{(j-1)j} & A_{(j-1)2} & \cdots & A_{(j-1)n} \\ A_{i1}^{j1} & A_{i2}^{j2} & \cdots & A_{\mathrm{in}}^{jn} \\ A_{(j+1)1} & A_{(j+1)2} & \cdots & A_{(j+1)n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{A}_{\mathrm{n}1} & \cdots & \cdots & \mathrm{A}_{\mathrm{nn}} \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

作者： Moon Jam

E_3之證明如下：

$E_3(c,i,j)A = A + ce_ie_j^TA$

$= A + ce_i[A_{j1} \quad A_{j2} \quad \cdots \quad A_{jn}]$

$$= A + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ (cA_{j1})^{i1} & (cA_{j2})^{i2} & \cdots & (cA_{jn})^{in} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{(i-1)1} & A_{(i-1)2} & \cdots & A_{(i-1)n} \\ A_{i1}+cA_{j1} & A_{i2}+cA_{j2} & \cdots & A_{in}+cA_{jn} \\ A_{(i+1)1} & A_{(i+1)2} & \cdots & A_{(i+1)n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad ■$$

4. A為非奇異矩陣若且唯若A為數個基本矩陣之積

高斯約當法可用矩陣列運算將A轉換成I（高斯約當法證明可見四、附錄一③—4之手寫證明），又矩陣列運算可使用基本矩陣與A相乘表示（見 3.），故

$E_kE_{k-1}\cdots E_3E_2E_1A = I$　其中E_i表示某種列運算矩陣$, k \ge i \ge 1$

$\Rightarrow A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}\cdots E_{k-1}^{-1}E_k^{-1}I$

又基本矩陣之反矩陣亦為基本矩陣（見 1.），則 A 為數個基本矩陣之積 ■

5. $det(EB) = det(E) \cdot det(B)$，其中$E$屬於三種列運算矩陣之一

（下文取得基本矩陣之行列式值方式見 2.）

(1) 交換列 i、j：$\det(E) = 1 + (e_j - e_i)^T(e_i - e_j) = 1 + ((-1) + (-1)) = -1$

$$\det(EB) = -\det(B) = -1 \cdot \det(B) = \det(E) \cdot \det(B)$$

(2) 列 i 乘 c 倍：$\det(E) = I + (c-1)e_i e_i^T = 1 + (c-1) \cdot 1 = c$

$$\det(EB) = -\det(B) = -1 \cdot \det(B) = \det(E) \cdot \det(B)$$

(3) 列 i 加列 j 乘 c 且$i \neq j$：$\det(E) = 1 + ce_j^T e_i = 1 + c \cdot 0 = 1$

$$\det(EB) = \det(B) = 1 \cdot \det(B) = \det(E) \cdot \det(B)$$

■

6. $\boldsymbol{det(AB) = det(A) \cdot det(B)}$

A為非奇異矩陣，則A為數個列運算矩陣之反矩陣相乘之積（見 4.），不難發現列運算之反矩陣亦為列運算（交換之反矩陣為自己本身，列 i 乘 c 反矩陣即列 i 乘$\frac{1}{c}$，列 i 加列 j 乘 c 反矩陣即列 i 加列 j 乘$(-c)$），故

$\det(AB) = \det(E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1}E_k^{-1}\, B)$　其中E_i表示某種列運算矩陣,$k \geq i \geq 1$

$= \det(F_1F_2F_3 \cdots F_{k-1}F_k\, B)$　　其中F_i表示$\mathrm{E_i}$之反矩陣且其中F_i為列運算矩陣

$= \det(F_1)\det(F_2F_3 \cdots F_{k-1}F_k\, B)$

$= \det(F_1)\det(F_2)\det(F_3 \cdots F_{k-1}F_k\, B)$

$= \det(F_1)\det(F_2)\det F_3 \cdots \det(F_{k-1})\det(F_k)\det(B)$

$= \det(F_1F_2)\det(F_3) \cdots \det(F_{k-1})\det(F_k)\det(B)$

$= \det(F_1F_2F_3 \cdots F_{k-1}F_k)\det(B)$

$= \det(A) \cdot \det(B)$　■

三、 參考文獻

[1] 周志成(2009 年 5 月 8 日)。利用分塊矩陣證明 Det(AB)=(Det A)(Det B)。線代啟示錄。
https://ccjou.wordpress.com/2009/05/08/利用分塊矩陣證明-detabdet-adet-b

[2] 周志成(2010 年 2 月)。特殊矩陣 (10)：基本矩陣。線代啟示錄。
https://ccjou.wordpress.com/2010/02/02/特殊矩陣-十：基本矩陣/

[3] 周志成 (2013 年 2 月)。高斯─約當法。線代啟示錄。
https://ccjou.wordpress.com/2013/02/22/高斯─約當法/

[4] Howard Anton(1990)。基本線性代數(第五版)(曾昭仁譯)。乾泰圖書有限公司。(原著出版於 1987 年)。

四、 附錄（手寫證明）

試證 $\det(AB)=\det A\cdot\det B$，A,B為n階方陣

① 若 $\det A=0 \Rightarrow A^{-1}$不存在，試找 $(AB)C=I_n \Rightarrow C=B^{-1}A^{-1}$ A不存在 $\Rightarrow C$不存在

② $\det B=0$ 同理

$\Rightarrow$ 若 $\det A=0$ 或 $\det B=0 \Rightarrow \det(AB)=0$

③ $\det A\neq 0,\ \det B\neq 0$

1、定義基本矩陣 E

令 u,v 兩行向量，若 $v^Tu\neq -1 \Rightarrow I_n+uv^T$ 即為一基本矩陣，為非奇異

又 $\because (I_n+uv^T)^T=I_n+vu^T\in E$

試求 $(I+uv^T)^{-1}$，先猜 $(I+uv^T)^{-1}=I+kuv^T$，(欲証明

$$(I+uv^T)(I+kuv^T)=I+uv^T+kuv^T+ku\underline{v^Tu}v^T$$
$$=I+(1+k+kv^Tu)uv^T=I$$

$\Rightarrow k(1+v^Tu)=-1 \Rightarrow k=-(1+v^Tu)^{-1}$

$\Rightarrow (I+uv^T)=I-(1+v^Tu)^{-1}uv^T$

故為何先前要求 $1+v^Tu\neq 0$ #

2、$\det(I+uv^T)=1+v^Tu$

$$u=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{bmatrix},\ v=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{bmatrix}\Rightarrow \det(I+uv^T)=\begin{vmatrix}1+u_1v_1 & u_1v_2 & \cdots & u_1v_n\\ u_2v_1 & 1+u_2v_2 & \cdots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \\ u_nv_1 & \cdots & & 1+u_nv_n\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(I+uv^T)=\begin{vmatrix}1+u_1v_1 & u_1v_2 & \cdots & & u_1v_n\\ -\frac{u_2}{u_1} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0\\ -\frac{u_n}{u_1} & \vdots & \vdots & \ddots 1 & 0\\ & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(1+u_1v_1)|I_n|-u_1v_2\begin{vmatrix}-\frac{u_2}{u_1} & 0 & \cdots & 0\\ & 1 & 0\cdots & 0\\ \vdots & 0 & 1 \cdots & 0\\ -\frac{u_n}{u_1} & 0 & 0\cdots 0 & 1\end{vmatrix}+u_1v_3\begin{vmatrix}-\frac{u_2}{u_1} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -\frac{u_3}{u_1} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & 1 & 0\cdots & 0\\ -\frac{u_n}{u_1} & 0 & 0 & 0\cdots & 1\end{vmatrix}\cdots\cdots$$

$$=1+u_1v_1+u_2v_2+u_1v_3\left(\frac{-u_2}{u_1}\cdot 0-\frac{-u_3}{u_1}\cdot 1\right)-u_1v_4\left(\frac{-u_2}{u_1}\cdot 0-\frac{-u_3}{u_1}\cdot 0+\frac{-u_4}{u_1}\cdot 1\right)\cdots$$

$$=1+u_1v_1+u_2v_2+\frac{u_1}{u_1}\sum_{i=3}^{n}\left((-1)^{i+1}v_i\left(\sum_{j=2}^{i-1}(-1)^j(-u_j)\cdot 0\right)+(-1)^i(-u_i)\right)$$

$$=1+u_1v_1+u_2v_2+\sum_{i=3}^{n}(v_iu_i)$$

$$=1+\sum_{i=1}^{n}(u_iv_i)$$

$$=1+v^Tu \ \#$$

3、方陣A是非奇異矩陣的充要條件是A為基本矩陣之積
高斯約當法中用矩陣列運算將A轉換成I

$\Rightarrow E_k \cdots E_3 E_2 E_1 A = I \Rightarrow A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} \cdots E_k^{-1}$

$\because E^{-1} \in E \Rightarrow A = F_1 F_2 F_3 \cdots F_k, \quad F_i \in E$

4、高斯約當消去法證明

$A = [a_{ij}]$ 為n階方陣，$b = [b_i]$ 為n列之行向量

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

若A可逆 $\Rightarrow Ax = b$ 有唯一解，存在c，使得　　$(x = A^{-1}b)$

$$[I \mid c] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_n \end{array}\right]$$

令X使得 $AX = I \Rightarrow X = A^{-1}$，將X跟I以下算式表示

$X = [x_1 \ldots x_n]$，$I = [e_1, \ldots, e_n]$，e_i 第i個為1的向量

$AX = I$ 可看成為n個方程式

$Ax_1 = e_1 \ \cdots \ Ax_n = e_n \Rightarrow$ 利用高斯消去法

$[A \mid e_1] \longrightarrow [I \mid x_1] \ \ldots\ldots \ [A \mid e_n] \rightarrow [I \mid x_n]$

$\Rightarrow$ 可合併為 $[A \mid I] \rightarrow [I \mid X]$

其中 $X = A^{-1}$

5、對A做矩陣列運算可以EA表示，證明

① 交換i,j　$E_1 = I_n + (e_i - e_j)(e_j - e_i)^T$　，其中 e_i、e_j 代表第i為1其餘為0的向量，$i \neq j$

② 列i乘c　$E_2(c) = I_n + (c-1)e_i e_i^T$

③ 將列j乘c倍加進i列　$E_3(c) = I_n + c e_i e_j^T$

$\det E_1 = 1 + (e_j - e_i)^T (e_i - e_j) = -1$

$\det E_2(c) = 1 + c - 1 = c$

$\det E_3(c) = 1 + 0 = 1$

6. $\det(EB) = \det E \cdot \det B$，E對B做矩陣列運算

① 交換 $\Rightarrow \det(EB) = -\det B \quad \det E = -1 \Rightarrow \det(EB) = \det E \det B$ 成立

② 列j乘c加進i列 $\Rightarrow \det(EB) = \det B \Rightarrow \det(EB) = \det E \det B$ 成立

③ 伸縮c $\Rightarrow \det(EB) = c\det B$　又 $\det E = c \Rightarrow \det(EB) = \det E \det B$ 成立

7 $\det(AB) = \det A \det B$, $\det A \neq 0$ $\det B \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \det(AB) &= \det(E_k \cdots E_2 E_1 B) \\
&= \det E_k \det(E_{k-1} \cdots E_2 E_1 B) \\
&= \cdots \\
&= \det E_k \det E_{k-1} \cdots \det E_2 \det E_1 \det B \\
&= \det(E_k E_{k-1}) \det E_{k-2} \cdots \det E_2 \det E_1 \det B \\
&= \cdots \\
&= \det(E_k E_{k-1} E_{k-2} \cdots E_2 E_1) \det B \\
&= \det A \det B \quad \#
\end{aligned}
$$

補5、證明對A做列運算交換，伸縮列i c倍，列j乘c加進列i，可分別使用 E_1A、$E_2(c)A$、$E_3(c)A$ 方式表示

$\boxed{E_3 \to E_2}$ 伸縮c倍等價於列i乘c-1倍加進i. 故若 $E_3(c)$ 成立則 $E_2(c)$ 成立

$\because E_3(c-1)_{ii} = I_n + (c-1)e_i e_i^T = E_2(c)_i$

① E_1A 代表A對i,j列交換，其中 $E_1 = I_n + (e_i - e_j)(e_j - e_i)^T$

$$
\begin{aligned}
E_1A &= A + (e_i - e_j)(e_j - e_i)^T A \\
&= A + \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \quad\quad i \quad\quad\quad j \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array} A \\
&= A + \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_{i1}+A_{j1}, & -A_{i2}+A_{j2}, & \cdots\cdots, & -A_{in}+A_{jn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} + \begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{j1}-A_{i1} & A_{j2}-A_{i2} & \cdots & A_{jn}-A_{in} \\ A_{i1}-A_{j1} & A_{i2}-A_{j2} & \cdots & A_{in}-A_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{j1} & A_{j2} & \cdots & A_{jn} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{in} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad \#
\end{aligned}
$$

② $E_3(c)A$ 代表將 A 的列 j 乘 c 倍加進 i 列，其中 $E_3(c) = I_n + c e_i e_j^T$

$$E_3(c)A = A + c e_i e_j^T A$$

$$= A + c e_i [A_{j1}, A_{j2} \cdots A_{jn}]$$

$$= A + \begin{array}{c} \\ \\ \text{第}i\text{列} \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ cA_{j1} & cA_{j2} \cdots & cA_{jn} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{n} \\ A_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ A_{(i-1)1} & \cdots & & A_{(i-1)n} \\ A_{i1} + cA_{j1} & A_{j2} + cA_{j2} & \cdots & A_{in} + cA_{jn} \\ A_{(i+1)1} & \cdots & & A_{(i+1)n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & & A_{rn} \end{bmatrix}$$