多変量解析 演習課題

東京理科大学 創域理工学研究科 情報計算科学専攻 田畑研

学籍番号 6323532

仲田 尚生

2023 年 6 月 30 日

目次

1　解答例

確率ベクトル $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ が平均ベクトル $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$，分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ の 2 変量正規分布に従うとする．また，b を定数とし，

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Cov}[Y_1, Y_2] = 0$ となるように b を定めよ．

(2) (1) で求めた b を用いて，$E[\boldsymbol{Y}]$ と $\mathrm{Var}[\boldsymbol{Y}]$ を求めよ．

(3) (1) で求めた b を用いて，$W_1 = X_1 - (\mu_1 + b\mu_2 - bX_2)$ とする．また，任意の実数 α と β を用いて $W_2 = X_1 - (\alpha + \beta X_2)$ とする．このとき，任意の実数 α と β について，$\mathrm{Var}[W_1] \leq \mathrm{Var}[W_2]$ が成り立つことを証明せよ．

解）$\boldsymbol{\Sigma}_{11} = \sigma_1^2$，$\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \boldsymbol{\Sigma}_{21}' = \rho\sigma_1\sigma_2$，$\boldsymbol{\Sigma}_{22} = \sigma_2^2$ とする．

(1) $Y_1 = X_1 + bX_2$，$Y_2 = X_2$ であるから，

$$E[\boldsymbol{Y}] = \begin{pmatrix} E[X_1 + bX_2] \\ E[X_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 + b\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

となる．また，

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}[Y_1, Y_2] &= E\big[(Y_1 - (\mu_1 + b\mu_2))(Y_2 - \mu_2)'\big] \\ &= E\big[(X_1 + bX_2 - (\mu_1 + b\mu_2))(X_2 - \mu_2)'\big] \\ &= E\big[((X_1 - \mu_1) + b(X_2 - \mu_2))(X_2 - \mu_2)'\big] \\ &= E\big[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)'\big] + b \cdot E\big[(X_2 - \mu_2)(X_2 - \mu_2)'\big] \\ &= \boldsymbol{\Sigma}_{12} + b \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{22} = \rho\sigma_1\sigma_2 + b\sigma_2^2 \end{aligned}$$

であるから，$\mathrm{Cov}[Y_1, Y_2] = 0$ なる b は，$b = -\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho$ である．

(2) (1) で求めた b を (1.1) 式に代入すると，

$$E[\boldsymbol{Y}] = \begin{pmatrix} \mu_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 - \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

となる．一方，

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[Y_1] &= E\big[(Y_1 - (\mu_1 + b\mu_2))(Y_1 - (\mu_1 + b\mu_2))'\big] \\ &= E\big[((X_1 - \mu_1) + b(X_2 - \mu_2))((X_1 - \mu_1) + b(X_2 - \mu_2))'\big] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= E\big[(X_1-\mu_1)(X_1-\mu_1)'\big] + E\big[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)'\big]\cdot b' \\
&\quad + b\cdot E\big[(X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1)'\big] + b\cdot E\big[(X_2-\mu_2)(X_2-\mu_2)'\big]\cdot b' \\
&= \boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\cdot\left(-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\right)' + \left(-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\right)\cdot\boldsymbol{\Sigma}_{21} \\
&\quad + \left(-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\right)\cdot\boldsymbol{\Sigma}_{22}\cdot\left(-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\right)' \\
&= \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} \\
&= \sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\cdot\frac{1}{\sigma_2^2}\cdot\rho\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1^2(1-\rho^2)
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{Var}[Y_2] = E\big[(Y_2-\mu_2)(Y_2-\mu_2)'\big] = E\big[(X_2-\mu_2)(X_2-\mu_2)'\big] = \boldsymbol{\Sigma}_{22} = \sigma_2^2
$$

$$
\mathrm{Cov}[Y_1,Y_2] = \mathrm{Cov}[Y_2,Y_1]' = 0
$$

よって,

$$
\mathrm{Var}[\boldsymbol{Y}] = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}[Y_1] & \mathrm{Cov}[Y_1,Y_2] \\ \mathrm{Cov}[Y_2,Y_1] & \mathrm{Var}[Y_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2(1-\rho^2) & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}
$$

(3) 任意の $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ に対して,

$$
\begin{aligned}
E[W_1] &= E[X_1 - (\mu_1 + b\mu_2 - bX_2)] = \mu_1 - \mu_1 + b\mu_2 - b\mu_2 = 0 \\
E[W_2] &= E[X_1 - (\alpha + \beta X_2)] = \mu_1 - \alpha - \beta\mu_2 \\
\mathrm{Var}[W_1] &= \mathrm{Var}[X_1 + bX_2] = \mathrm{Var}[Y_1] = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} \\
\mathrm{Var}[W_2] &= \mathrm{Var}[X_1 - \beta X_2] = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\beta' - \beta\boldsymbol{\Sigma}_{21} + \beta\boldsymbol{\Sigma}_{22}\beta'
\end{aligned}
$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[W_2] - \mathrm{Var}[W_1] &= \beta\boldsymbol{\Sigma}_{22}\beta' - \beta\boldsymbol{\Sigma}_{21} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\beta' + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} \\
&= \left(\beta\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{\frac{1}{2}} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\beta\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{\frac{1}{2}} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-\frac{1}{2}}\right)' \\
&= (\sigma_2\beta - \sigma_1\rho)^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

となる．ここに，$\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{\frac{1}{2}}$ は $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ の平方根である．よって，$\forall\alpha\in\mathbb{R}, \forall\beta\in\mathbb{R}, \mathrm{Var}[W_2]\geq\mathrm{Var}[W_1]$ は真である．