

多変量解析 演習問題

1. 正方行列 Σ を

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とする. このとき, $\Sigma = CC'$ を満たす正則行列 C を求めよ. ただし, ' は転置を表す.

2. $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ が平均ベクトル $(0, 1)'$, 共分散行列

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

の2変量正規分布に従うとする. このとき, \mathbf{X} の確率密度関数を行列・ベクトルを用いずに示せ.

3. 1で求めた C を用いて,

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = C^{-1} \left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

とする. \mathbf{Z} の確率密度関数を求めよ.

4. 正則行列 D を

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$$

とし, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)'$ を実ベクトルとする. このとき, 3で定めた \mathbf{Z} を用いて

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = D\mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}$$

と定義した \mathbf{Y} の従う分布を求めよ.

5. 3で定めた \mathbf{Z} について, Z_1 と Z_2 は独立といえるか (必ず解答に至った理由を記述すること).