論理数学I（11回目）

創域理工学部　情報計算科学科
桂田　浩一

1

前回の復習

2

- 最小積和標準形
- カルノー図を用いた最小積和標準形の求め方

3

今日の内容

- クワイン・マクラスキー法を用いた最小積和標準形の求め方

4

5変数以上のカルノー図

隣同士

$\overline{x_2}x_3\overline{x_5}x_6$

$x_1x_2x_3$ \ $x_4x_5x_6$	000	001	011	010	110	111	101	100
000								
001		1					1	
011								
010								
110								
111								
101		1					1	
100								

隣同士

ループを見つけるのが難しい！！

5

キューブを利用した主項の導出

- n 変数論理関数の積項が

$$x_1^{c_1}x_2^{c_2}\cdots x_n^{c_n} \qquad \text{但し}\ x_i^{c_i} = \begin{cases} x_i & \text{if} \quad c_i = 1 \\ \overline{x_i} & \text{if} \quad c_i = 0 \\ 1 & \text{if} \quad c_i = - \end{cases}$$

であるとき，$c_1c_2\cdots c_n$ を$x_1^{c_1}x_2^{c_2}\cdots x_n^{c_n}$のキューブという

カルノー図のループ

例）4変数論理関数のキューブ

$x_1\overline{x_2}x_3x_4$： 1011　　$x_2\overline{x_4}$： -1-0

$\overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4$： 0-01　　x_2： -1--

5/9/2023

6

キューブの併合

- キューブの併合＝カルノー図でのループの併合

$$\left.\begin{matrix} c_1\cdots c_{i-1}\ 0\ c_{i+1}\cdots c_n \\ c_1\cdots c_{i-1}\ 1\ c_{i+1}\cdots c_n \end{matrix}\right\} \Rightarrow c_1\cdots c_{i-1} - c_{i+1}\cdots c_n$$

例）$x_1x_2\overline{x_4}$ と $x_1\overline{x_2}\,\overline{x_4}$ の併合

$$\left.\begin{matrix} 11-0 \\ 10-0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1--0 \ \ (= x_1\overline{x_4})$$

5/9/2023

7

クワイン・マクラスキー法

1. 論理関数を主積和標準形で表す.

与えられた式

$\varphi = x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \vee x_2x_3\overline{x_4}$

主積和標準形

$$\varphi = \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \vee x_1x_2\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} \vee x_1x_2x_3\overline{x_4}$$

5/9/2023

8

クワイン・マクラスキー法

2. 最小項に対応するキューブを求め，名前を付ける

主積和標準形

$$\varphi = \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \vee x_1x_2\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} \vee x_1x_2x_3\overline{x_4}$$

$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$:	0100	{④}
$x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$:	1100	{⑫}
$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$:	1001	{⑨}
$x_1x_2\overline{x_3}x_4$:	1101	{⑬}
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$:	0001	{①}
$\overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$:	0110	{⑥}
$x_1x_2x_3\overline{x_4}$:	1110	{⑭}

青字：名前

5/9/2023

9

クワイン・マクラスキー法

3. キューブ内の1の少ない順にキューブを並べ，
1の個数が変わる所にラインを引く

$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	:	0100	{④}
$x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	:	1100	{⑫}
$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$	:	1001	{⑨}
$x_1x_2\overline{x_3}x_4$	:	1101	{⑬}
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$	:	0001	{①}
$\overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$	:	0110	{⑥}
$x_1x_2x_3\overline{x_4}$	:	1110	{⑭}

→

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$	:	0001	{①}
$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	:	0100	{④}
$\overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$	:	0110	{⑥}
$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$	:	1001	{⑨}
$x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	:	1100	{⑫}
$x_1x_2\overline{x_3}x_4$	:	1101	{⑬}
$x_1x_2x_3\overline{x_4}$	:	1110	{⑭}

5/9/2023

10

クワイン・マクラスキー法

4. ハミング距離が1のものを併合し，別の表を作る．
併合したキューブにチェックを入れる．

✓	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$	:	0001	{①}	-001	{①, ⑨}
✓	$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	:	0100	{④}	01-0	{④, ⑥}
✓	$\overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$	:	0110	{⑥}	-100	{④, ⑫}
✓	$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$	:	1001	{⑨}	-110	{⑥, ⑭}
✓	$x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	:	1100	{⑫}	1-01	{⑨, ⑬}
✓	$x_1x_2\overline{x_3}x_4$	:	1101	{⑬}	110-	{⑫, ⑬}
✓	$x_1x_2x_3\overline{x_4}$	:	1110	{⑭}	11-0	{⑫, ⑭}

5/9/2023

11

クワイン・マクラスキー法

4. ハミング距離が1のものを併合し，別の表を作る．
   併合したキューブにチェックを入れる．

	-001	{①, ⑨}
✓	01-0	{④, ⑥}
✓	-100	{④, ⑫}
✓	-110	{⑥, ⑭}
	1-01	{⑨, ⑬}
	110-	{⑫, ⑬}
✓	11-0	{⑫, ⑭}

→ -1-0　{④, ⑥, ⑫, ⑭}

5/9/2023

12

クワイン・マクラスキー法

5. 併合するものがなくなった時点でチェックのついていないものが主項

主項	-001	{①, ⑨}	$\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$
✓	01-0	{④, ⑥}	
✓	-100	{④, ⑫}	
✓	-110	{⑥, ⑭}	
主項	1-01	{⑨, ⑬}	$x_1\overline{x_3}x_4$
主項	110-	{⑫, ⑬}	$x_1x_2\overline{x_3}$
✓	11-0	{⑫, ⑭}	

主項

→ -1-0　{④, ⑥, ⑫, ⑭}

$x_2\overline{x_4}$

5/9/2023

13

最小被覆問題と被覆表

- 最小積和標準形：　名前を付けた最小項を全て含む最小限度の主項の組み合わせ

主項

$\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$　{①，⑨}　$x_1\overline{x_3}x_4$　{⑨，⑬}

$x_1x_2\overline{x_3}$　{⑫，⑬}　$x_2\overline{x_4}$　{④，⑥，⑫，⑭}

被覆表

	①	④	⑥	⑨	⑫	⑬	⑭
$x_2\overline{x_4}$		×	×		×		×
$\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$	×			×			
$x_1\overline{x_3}x_4$				×		×	
$x_1x_2\overline{x_3}$					×	×	

①～⑭を全て×にする組合せを求める

14

被覆表

被覆表の一般的な例

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8
p_1		×						×
p_2	×			×			×	
p_3	×				×			
p_4				×		×	×	
p_5			×				×	×
p_6		×	×			×		

m_1～m_8に×を付けるには，次式を解けばよい

$(p_2 \vee p_3)(p_1 \vee p_6)(p_5 \vee p_6)(p_2 \vee p_4)p_3(p_4 \vee p_6)(p_2 \vee p_4 \vee p_5)(p_1 \vee p_5)$
$= 1$ ペトリックの方程式　複雑すぎる！！

15

被覆表の簡単化

1. (1)×が一つだけの列を削除，(2)その×を含む p_i を削除（p_iは必須項）し，(3) p_i に被覆される列を削除

(3) (1) (2)

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8
p_1		×						×
p_2	×			×			×	
p_3	×				×			
p_4				×		×	×	
p_5			×				×	×
p_6		×	×			×		

p_3は必須項

5/9/2023

16

被覆表の簡単化

2. 行 p_l が×を持つ列に行 p_k も×を持つとき，p_k のリテラルが p_l より少なければ p_l を削除

	m_2	m_3	m_4	m_6	m_7	m_8
p_1	×					×
p_l → p_2			×		×	
p_k → p_4			×	×	×	
p_5		×			×	×
p_6	×	×		×		

p_3は必須項

p_k のリテラルが p_l より少ないとする

5/9/2023

17

被覆表の簡単化

3. 列 m_l が×を持つ行に列 m_k も×を持つとき，m_k を削除（列 m_l の×を被覆する主項で m_k も被覆できる）

m_l m_k m_k

	m_2	m_3	m_4	m_6	m_7	m_8
p_1	×					×
p_4			×	×	×	
p_5		×			×	×
p_6	×	×		×		

p_3は必須項

5/9/2023

18

被覆表の簡単化

4. (1)×が一つだけの列を削除，(2)その×を含む p_i を削除（p_iは第2次必須項）し，(3) p_i に被覆される列を削除

(1)

	m_2	m_3	m_4	m_8
p_1	×			×
p_4			×	
p_5		×		×
p_6	×	×		

(2)

p_3は必須項

p_4は第2次必須項

5/9/2023

19

被覆表の簡単化

5. 2.～4.を可能な限り繰り返し，最後にペトリックの方程式を立てて解く

	m_2	m_3	m_8
p_1	×		×
p_5		×	×
p_6	×	×	

p_3は必須項

p_4は第2次必須項

ペトリックの方程式　$(p_1 \vee p_6)(p_5 \vee p_6)(p_1 \vee p_5) = 1$

$p_1p_5 \vee p_1p_6 \vee p_5p_6 = 1$

よって最小被覆解は$\{p_3, p_4, p_1, p_5\}$，$\{p_3, p_4, p_1, p_6\}$，$\{p_3, p_4, p_5, p_6\}$

20

出題予定の演習課題

- クワイン・マクラスキー法，およびカルノー図を使って最小積和標準形を求める．