論理数学I（2回目）

創域理工学部　情報計算科学科
桂田　浩一

【復習】　基本的な恒等式（１）

1. 0と1に関する演算律
   - $0 \vee x = x$,　$0 \cdot x = 0$,　$1 \vee x = 1$,　$1 \cdot x = x$
2. 補元律
   - $x \vee \bar{x} = 1$,　$x \cdot \bar{x} = 0$
3. 二重否定の法則
   - $\bar{\bar{x}} = x$
4. べき等律
   - $x \vee x = x$,　$x \cdot x = x$

3

【復習】　基本的な恒等式（2）

5. 交換律
   - $x \vee y = y \vee x$,　$x \cdot y = y \cdot x$
6. 結合律
   - $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$,　$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
7. 分配律
   - $x \cdot (y \vee z) = x \cdot y \vee x \cdot z$,　$x \vee y \cdot z = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$

4/17/2023

4

【復習】　基本的な恒等式（3）

8. 第1吸収律
   - $x \cdot (x \vee y) = x$,　$x \vee x \cdot y = x$
9. 第2吸収律
   - $x \cdot (\bar{x} \vee y) = x \cdot y$,　$x \vee \bar{x} \cdot y = x \vee y$
10. 第3吸収律
   - $x \cdot y \vee \bar{x} \cdot z \vee y \cdot z = x \cdot y \vee \bar{x} \cdot z$,
   - $(x \vee y) \cdot (\bar{x} \vee z) \cdot (y \vee z) = (x \vee y) \cdot (\bar{x} \vee z)$
11. ドモルガンの法則
   - $\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$,　$\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$

4/17/2023

5

本日の目標

- 代入法則、置換法則を学んで式変形ができるようになる

4/17/2023

6

代入法則

- φ，ψ，χ を論理関数とする．φ と ψ に現れる命題変数 x すべてに χ を代入して得られる論理関数をそれぞれ φ'，ψ' とするとき，$\varphi = \psi$ ならば $\varphi' = \psi'$ である．
ただし逆は必ずしも成立しない．

例1)　$\varphi = x \cdot (x \vee y)$
$\psi = x$　　　$\varphi = \psi$（第1吸収律）
$\chi = a \vee b$
$\varphi' = (a \vee b) \cdot (a \vee b \vee y)$
$\psi' = a \vee b$
よって $(a \vee b) \cdot (a \vee b \vee y) = a \vee b$

4/17/2023

7

代入法則

- φ，ψ，χ を論理関数とする．φ と ψ に現れる命題変数 x すべてに χ を代入して得られる論理関数をそれぞれ φ'，ψ' とするとき，$\varphi = \psi$ ならば $\varphi' = \psi'$ である．ただし逆は必ずしも成立しない．

例2)
$$\varphi = x \cdot \bar{x}$$
$$\psi = x$$
$$\chi = 0$$
$$\varphi' = 0 \cdot \bar{0} = 0$$
$$\psi' = 0$$
となり $\varphi' = \psi'$ であるが $\varphi = \psi$ は成り立たない

4/17/2023

8

置換法則

- φ，ψ，χ をブール形式とし，ψ は φ の部分ブール形式とする．φ の中の ψ を χ で置き換えて得られるブール形式を φ' とするとき，$\psi = \chi$ ならば $\varphi = \varphi'$ である．

例)
$$\varphi = x \cdot (x \vee y)$$
$$\psi = x \vee y$$
$$\chi = x \vee \bar{x} \cdot y \qquad \psi = \chi \text{（第2吸収律）}$$
$$\varphi' = x \cdot (x \vee \bar{x} \cdot y)$$
$$x \cdot (x \vee y) = x \cdot (x \vee \bar{x} \cdot y)$$

4/17/2023

9

置換法則と代入法則を用いた第1吸収律の証明

- 第1吸収律の二つ目 $x \vee x \cdot y = x$ を示す.

まず，恒等式5より $1 \cdot x = x \cdot 1$ ・・・ (1)
恒等式1より $1 \cdot x = x$ なので，(1)より $x = x \cdot 1$ ・・・ (2)

$$
\begin{aligned}
x \vee x \cdot y &= x \cdot 1 \vee x \cdot y && \text{((2)より)} \\
&= x \cdot (1 \vee y) && \text{(恒等式7より)} \\
&= x \cdot 1 && \text{(恒等式1より)} \\
&= x && \text{((2)より)}
\end{aligned}
$$

4/17/2023

10

置換法則と代入法則を用いた第1吸収律の証明

- 第1吸収律の一つ目 $x \cdot (x \vee y) = x$ を示す.

まず，恒等式5より $0 \vee x = x \vee 0$ ・・・ (1)
恒等式1より $0 \vee x = x$ なので，(1)より $x = x \vee 0$ ・・・ (2)

$$
\begin{aligned}
x \cdot (x \vee y) &= (x \vee 0) \cdot (x \vee y) && \text{((2)より)} \\
&= x \vee 0 \cdot y && \text{(恒等式7より)} \\
&= x \vee 0 && \text{(恒等式1より)} \\
&= x && \text{((2)より)}
\end{aligned}
$$

4/17/2023

11

重要な性質（1）

1. $x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$　（恒等式3，恒等式11）
   論理和は否定と論理積で表すことができる.

2. $x \cdot y = \overline{\overline{x \cdot y}} = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$　（恒等式3，恒等式11）
   論理積は否定と論理和で表すことができる.

↓

否定+（論理和もしくは論理積）で
任意の論理関数を表すことができる.

4/17/2023

12

重要な性質（2）

- 否定の対象を命題変数のみに限定するよう式変形できる. （ドモルガンの法則を何度も適用する）

例）$\overline{(x \vee \bar{y}) \cdot z} = \overline{(x \vee \bar{y})} \vee \bar{z}$

$= \bar{x} \cdot \bar{\bar{y}} \vee \bar{z}$

$= \bar{x} \cdot y \vee \bar{z}$

リテラルと呼ぶ. $\begin{cases} \bar{x},\ \bar{z}: & \text{負リテラル} \\ y: & \text{正リテラル} \end{cases}$

4/17/2023

出題予定の演習課題

- 置換法則と代入法則を用いた恒等式の証明
- 置換法則と代入法則を用いた式変形（式の簡略化）

9枚目，10枚目のスライド等を見て予習しておいてください