メディア情報処理 2023
第13回目
サンプリング定理

大村英史

出席登録

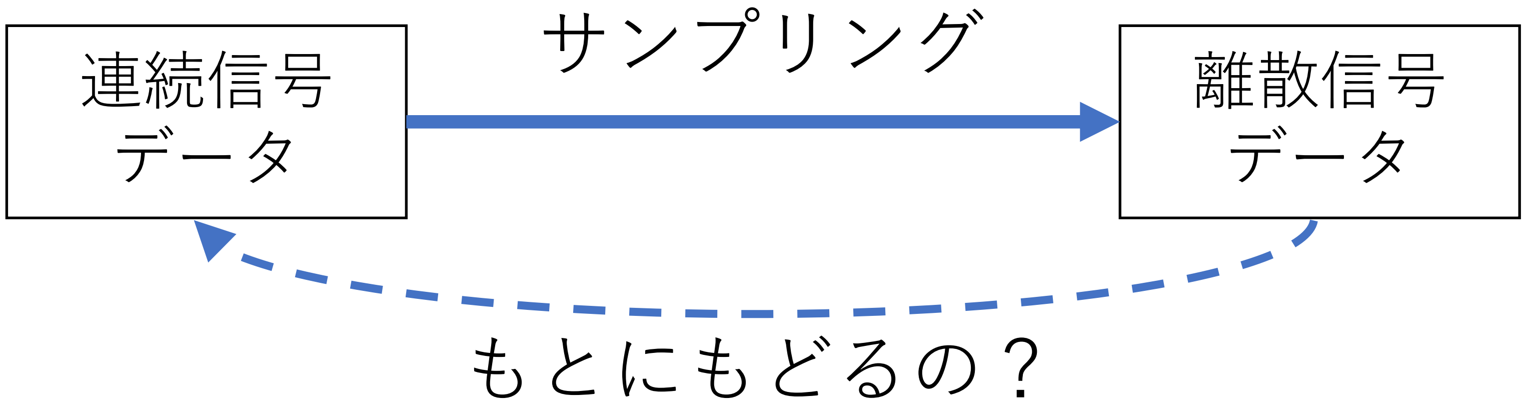
今日の予定

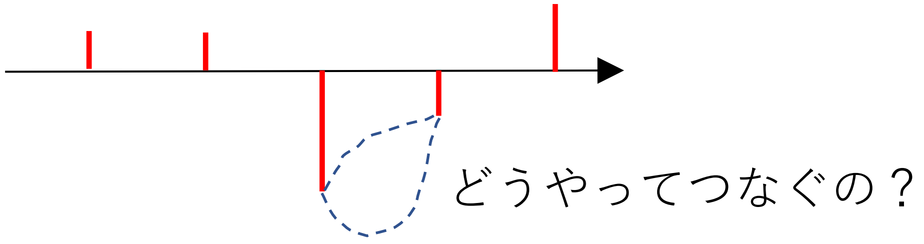
- サンプリング定理
  - 信号のサンプリングからオリジナル信号の復元
  - くし型関数のフーリエ変換
  - くし型関数をたたみこみ
  - 連続時間の信号の復元
  - エイリアシング

サンプリング定理

サンプリング定理

- シャノンのサンプリング定理
- 標本化定理





捨てられてしまった部分を
復元することができる？？？

戻すためには．．．
もとの連続信号の帯域に制限をかける

- 連続信号の$x(t)$の帯域をω_cに制限

$$\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega)$$
$$X(\omega) = 0 \quad \text{for} \quad |\omega| \geq \omega_c$$

- このとき，サンプリング周波数$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$が

$$\omega_s > 2\omega_c$$

を満たせば離散信号$x[n] = x_d(t)|_{t=nT_s}$から元の信号を完全に復元できる

元の信号の帯域の 2 倍を超える周波数でサンプリングしておけば
完全復元が可能

CDのサンプリング周波数
- 44100Hz

つまり
- 22050Hz

まで復元できる

人間の可聴域
- 20Hz – 20000Hz

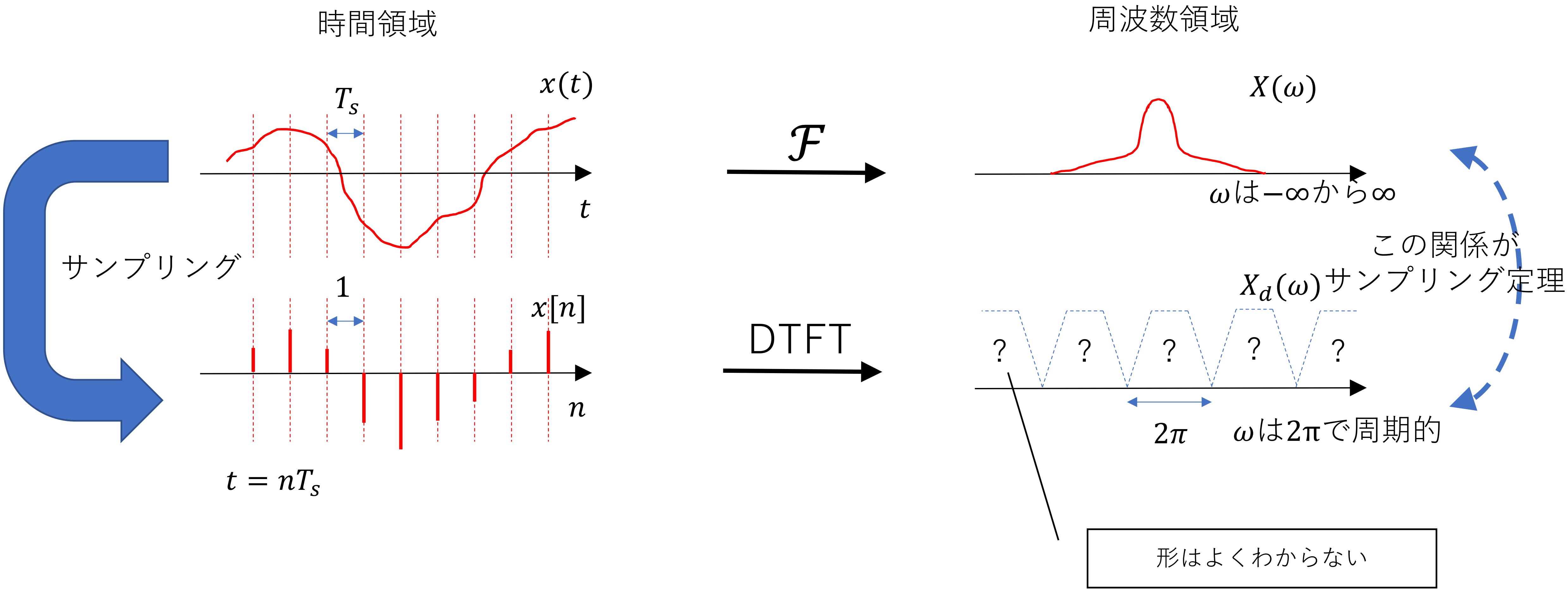
楽音（ピアノの音域）
- 27.5Hz – 4186Hz
- でも倍音が乗ってくる

CDは音楽の生音を再現できていないけど，可聴域はカバーしている

T_s: サンプリング周期

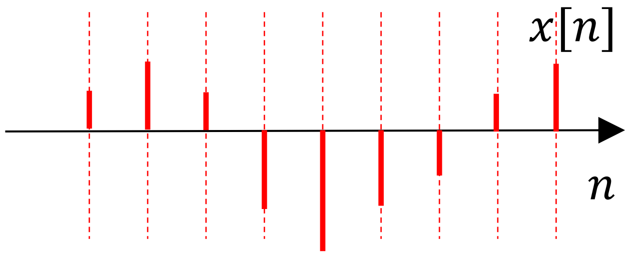
いままでは直感的にしか説明してこなかった => 今日は数式で説明します

サンプリングとは何をやっているのか？



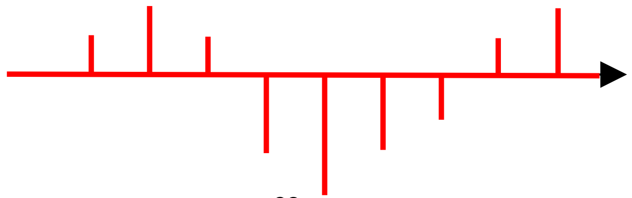
数式で考えるため
離散化風連続関数で考える

- 離散
  - 連続の世界では扱えない



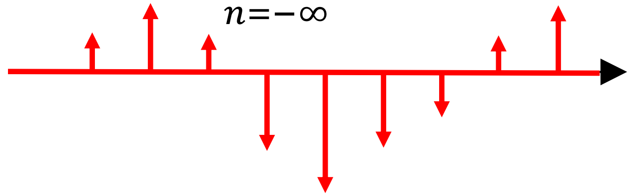
- 離散風連続
  - 瞬時値
  - 積分すると0になってしまう

$$x_d(t) = \begin{cases} x[n] & t = nT_s\text{のとき} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



- 離散風連続2
  - デルタ関数に瞬時値をかける
  - 積分もOK

$$x_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)x(t)$$



離散風連続関数をフーリエ変換する

$$x_d(t) = \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)\right\} x(t)$$

$$X_d(\omega) = \mathcal{F}\left[\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)\right\} x(t)\right]$$

- たたみこみと積の関係を使う

$$h(t)x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)X(\omega - \varpi)d\varpi \equiv H(\omega) * X(\omega)$$

*: たたみこみ

$$X_d(\omega) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)\right] * X(\omega)$$

← 二つの関係

サンプリングの意味

- 時間領域では

$$x_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) x(t)$$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$をかけること

- 周波数領域では

$$X_d(\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)\right] * X(\omega)$$

$\mathcal{F}[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)]$をたたみ込むこと

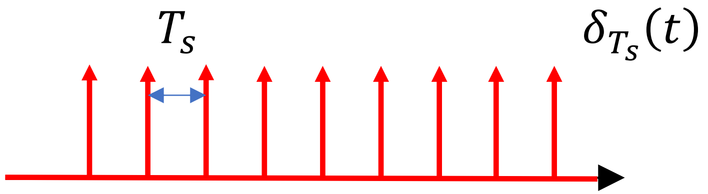
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$ ← くし型関数とよぶことにする

くし型関数（デルタ列とかとも言われる）

このように
定義しよう

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

T_sがくしの歯の間隔



くし型関数のフーリエ変換

- くし形関数は，周期関数（周期: T_s）
  → 周波数領域は，$\omega_s = \dfrac{2\pi}{T_s}$の離散的なスペクトル
- くし形関数は，離散的（T_s おき）
  → 周波数領域は，周期ω_sで周期的
- パーセバルの等式が成り立つ必要があるので
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$
  - 時間領域の積分はデルタ関数なので0ではない
  - 周波数領域も0にならないようにするには，デルタ関数，くし型

- くし型のフーリエ変換はくし型

どんなくし型になるのか

- くし型関数をフーリエ級数展開

フーリエ係数

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cdot e^{-i\omega_0 kt}dt$$

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T_s}\int_{\frac{-T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}}\delta(t)e^{-i\omega_s kt}dt\right]e^{i\omega_s kt}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T_s}e^{0}\right]e^{i\omega_s kt}$$

$$= \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i\omega_s kt}$$

デルタ関数は瞬時値を取り出す

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)x(t)dt = x(0)$$

どんなくし型になるのか（つづき）

- フーリエ展開の結果をフーリエ変換する

$$\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_s kt} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_s)$$

周波数領域における
デルタ関数のシフト
$\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega-\omega_1)]=e^{i\omega_1 t}$

$$=\frac{2\pi}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s)$$

くし型関数

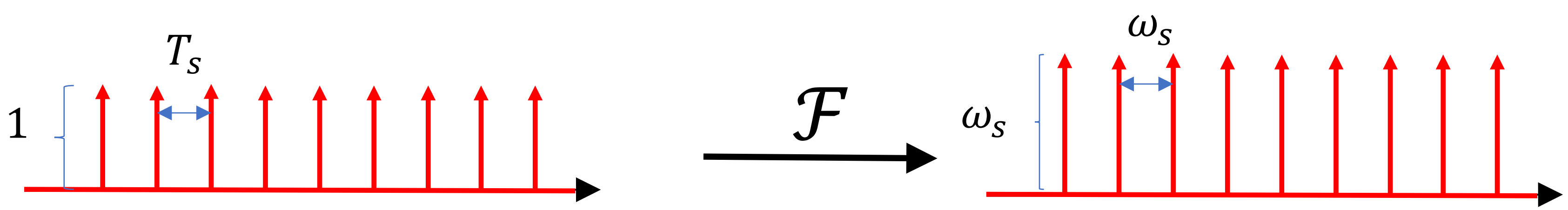
$$\delta_{T_s}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

$$\omega_s=\frac{2\pi}{T_s}$$

$$=\omega_s\delta_{\omega_s}(\omega)$$

どんなくし型になるのか（つづき）

$$\delta_{T_s}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \omega_s \delta_{\omega_s}(\omega)$$



$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_n \delta(t - nT_s)$$

$$\omega_s \delta_{\omega_s}(\omega) = \omega_s \sum_k \delta(\omega - k\omega_s)$$

時間領域で間隔T_sのくし形関数は，周波数領域では間隔ω_sで高さがω_s倍されたくし型関数

くし型関数のたたみこみ

そもそもの話は， $X_d(\omega)$と$X(\omega)$の関係

$$X_d(\omega) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\right]*X(\omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\omega_s\delta_{\omega_s}(\omega)*X(\omega)$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$= \frac{1}{T_s}\delta_{\omega_s}(\omega)*X(\omega)$$

$X_d(\omega)$は

- 元信号のスペクトル$X(\omega)$に
- くし型関数$\delta_{\omega_s}(\omega)$をたたみ込んだもの

くし型関数のたたみこみ（つづき）

計算していくと．．．

$$\frac{1}{T_s}\delta_{\omega_s}(\omega) * X(\omega) = \frac{1}{T_s}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_s)\right] * X(\omega)$$

くし型関数をもどす

たたみこみ

$h(t)x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)X(\omega - \varpi)d\varpi \equiv H(\omega) * X(\omega)$

$$= \frac{1}{T_s}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\varpi - k\omega_s)\right]X(\omega - \varpi)d\varpi$$

積分と総和の入れ替え

$$= \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\varpi - k\omega_s)X(\omega - \varpi)d\varpi$$

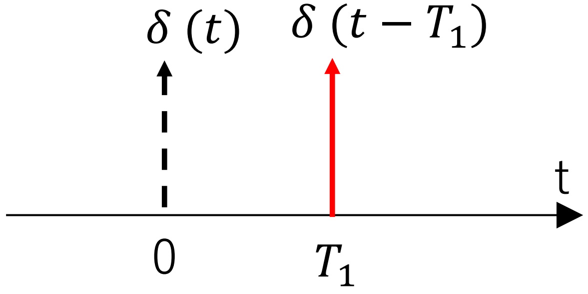
デルタ関数の積分：
瞬時値の抜き出し

$$= \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\omega - k\omega_s)$$

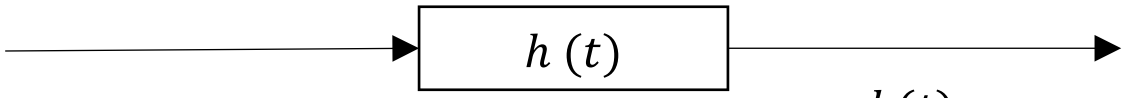
この式の意味は？

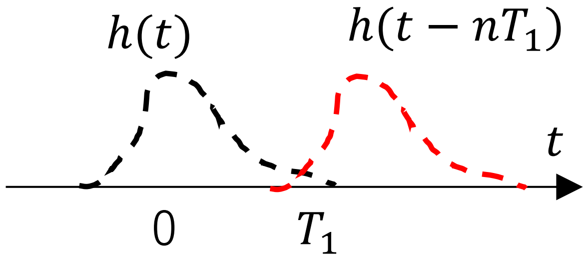
意味を考える

$$\frac{1}{T_s}\delta_{\omega_s}(\omega) * X(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)$$



まず，線形時不変システムを復習





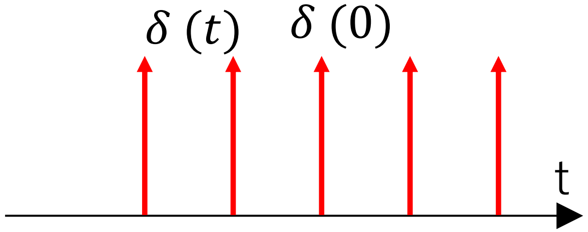
$\delta\ (t)$ $h(t)$

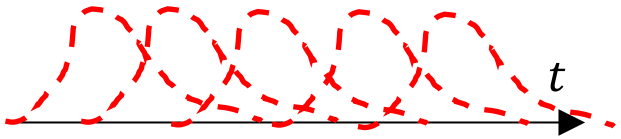
$\delta\ (t-T_1)$ $h(t-T_1)$

$$h(t) * \delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t-nT_1)$$

$\sum_n \delta\ (t-nT_1)$

$\sum_n h\ (t-nT_1)$





インパルス応答を1ずつずらした

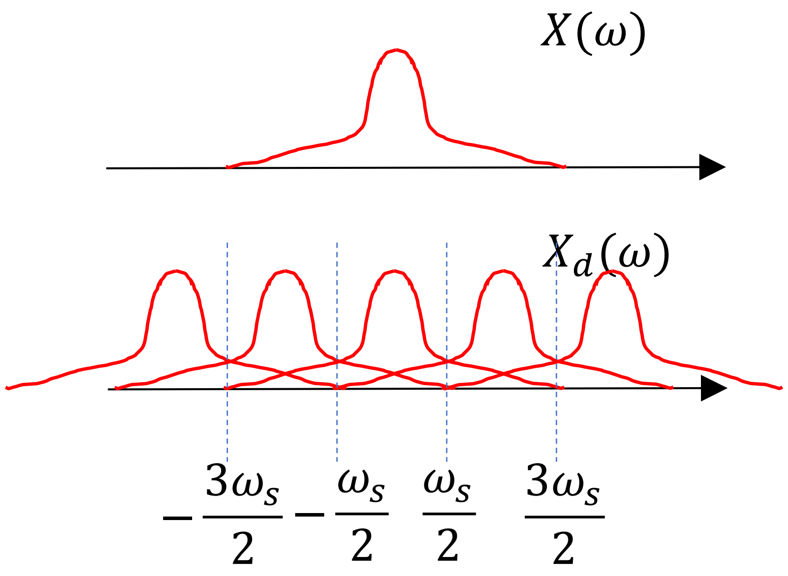
くし型を重ね合わせている

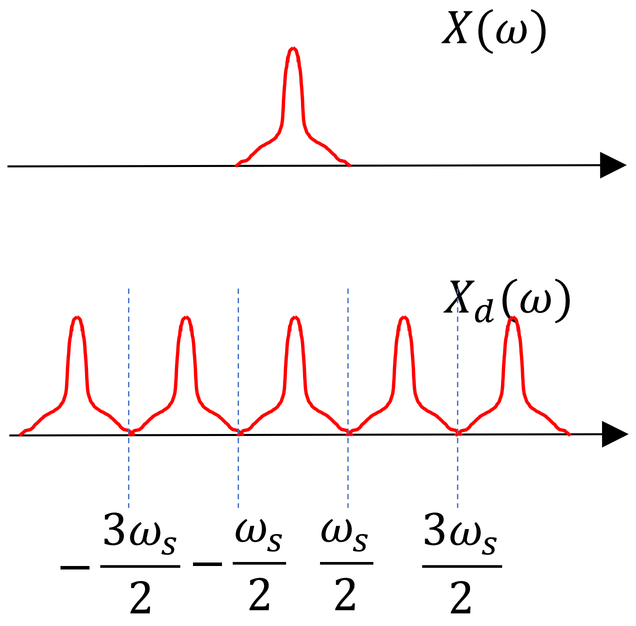
連続時間の復元

$$X_d(\omega) = \frac{1}{T_s}\delta_{\omega_s(\omega)} * X(\omega)$$
$$= \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)$$

- 意味：元信号のスペクトルをずらして並べて足し合わせたもの
- 帯域制限した場合　←サンプリング定理の条件
  - $X(\omega)$が$\omega_s/2$以下
  - 重ならずにならぶ

    =>元のスペクトルを抜き出せる



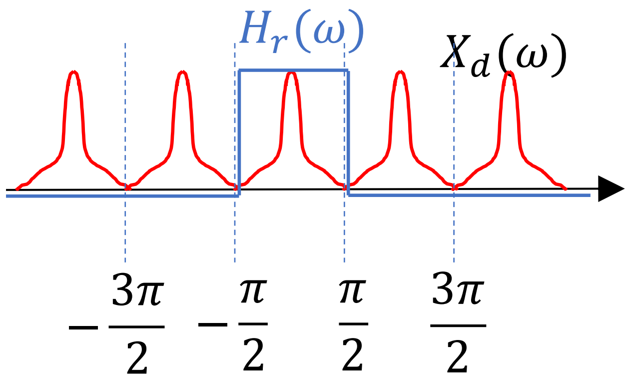


抜き出す：矩形信号をかける

$$X(\omega) = H_r(\omega) X_d(\omega)$$
$$H_r(\omega) = T_s G_{-\omega_s/2, \omega_s/2}(\omega)$$
$$G_{-\omega_{s/2}, \omega_{s/2}}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_s/2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

サンプリングから，元の信号を得るまで

1. 連続信号データ$x(\omega)$
2. $x[n]$をサンプリング
3. 離散時間フーリエ変換
4. $\omega_s/2$より高い成分をカット
5. 残った成分をT_s倍する
6. フーリエ逆変換
7. 元の信号$x(\omega)$を得る



H_rをかける（時間領域）
帯域制限を掛ける
$\omega_s/2$より高い成分をカット
ローパスフィルタとも言う

抜き出す：矩形信号をかける

- 時間領域ではどうなっているか
  - $H_r(\omega)$をかける これは $h_r(t)$を$\mathcal{F}^{-1}[X_d(\omega)]$にたたみこむこと
  - 時間領域のサンプル間を結びつける

$$x(t) = h_r(t) * \mathcal{F}^{-1}[X_d(\omega)]$$
$$= h_r(t) * \left(\sum_n x_d[n] \underbrace{\delta(t - nT_s)} \right)$$

$x_d[n]$と$h_r(t)$の離散たたみこみをしている

なんでデルタ関数？
連続にしたいので，フーリエ逆変換のため
デルタ関数をかけた物になる

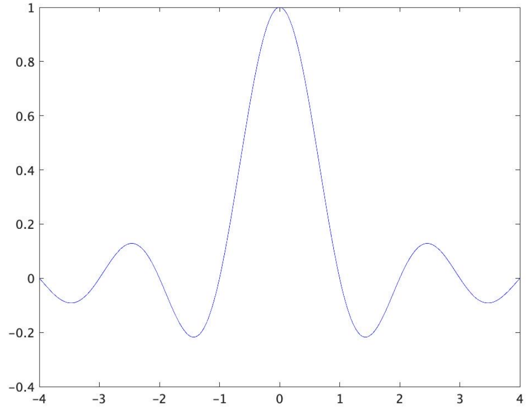
矩形波で具体的に考えると

- 矩形関数Gのフーリエ逆変換はsinc関数

$$\mathcal{F}^{-1}[H_r(\omega)] = T_s\mathcal{F}^{-1}\left[G_{-\frac{\omega_s}{2},\frac{\omega_s}{2}}(\omega)\right]$$

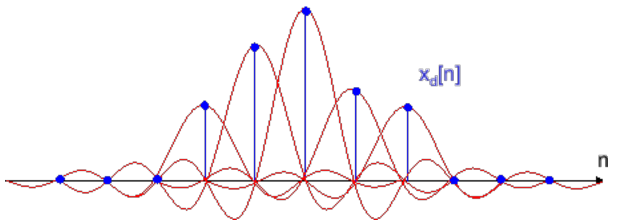
$$= T_s\frac{1}{\pi t}\sin\frac{\omega_s t}{2}$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi t}{T_s}}{\frac{\pi t}{T_s}} = \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi t}{T_s}\right)$$



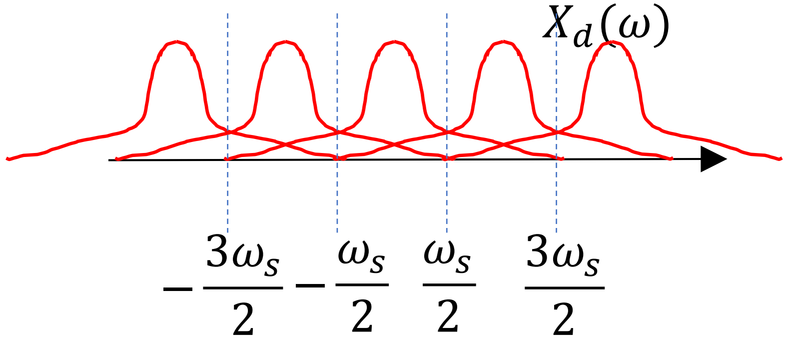
$\frac{\sin \pi t}{\pi t}$はt=±1, 2, 3…で0

各サンプル点を頂点とするsinc関数を並べてたし合わせている



エイリアシング：もし2倍にしないと

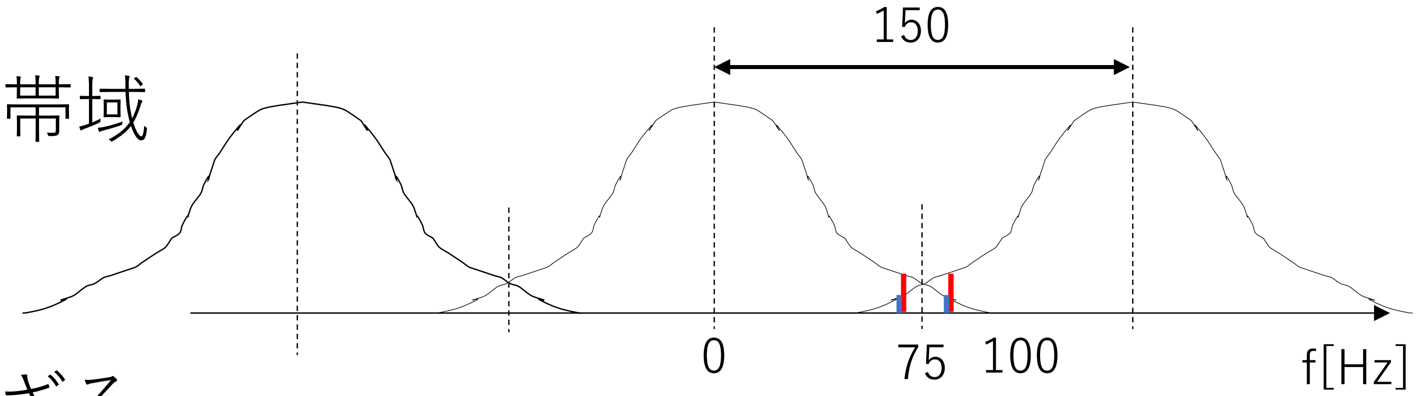
- サンプリング定理の条件
- 帯域の2倍のサンプリング周波数ではないと
- $X(\omega)$が重なり合ってしまう



- つまり，元信号の異なる周波数がまざる

具体例

- 連続信号データは100Hzの帯域
- 150でサンプリングする
  - 200Hz以下だから混ざる
- 150/2=75Hzをさかいに交ざる



- 混ざってしまうと本来とは違う周波数が現れる
  - エイリアシング
  - 折り返し雑音
- という

サンプリング定理における紛らわしい用語

- ナイキストレート（Nyquist rate）
  - 信号の帯域ω_cが与えられたとき，その信号の情報を失うことサンプリングできるサンプリング周波数（サンプリングレート）の下限$2\omega_c$

- ナイキスト周波数（Nyquist frequency）
  - サンプリング周波数ω_sが与えられたとき，情報を失わずにサンプリングできるような信号が含む周波数成分の上限$\omega_s/2$

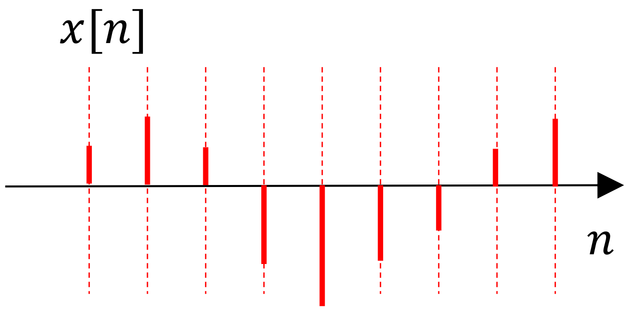
【再度】連続信号のサンプリング

- 離散
  - コンピュータで扱える
  - 連続の世界では扱えない

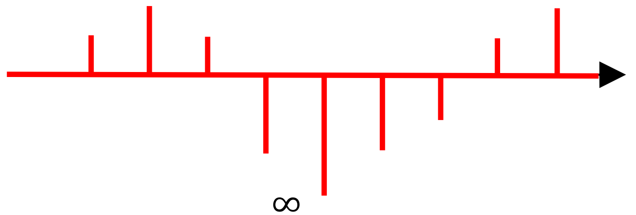
- 離散風連続1
  - 瞬時値の値が正しい
  - 積分すると0になってしまう

- 離散風連続2
  - デルタ関数に瞬時値をかける
  - 積分できる
  - 無限を使う必要がある
  - くし型関数をかける！！

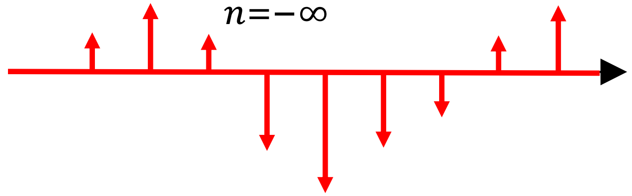
離散と連続は別の世界　別の世界の対応づけ



$$x_d(t) = \begin{cases} x[n] & t = nT_s\text{のとき} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



$$x_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)x(t)$$



くし型関数で
周期性と離散性は表裏の関係

まとめ

- サンプリング定理
- 信号のサンプリングからオリジナル信号の復元
- くし形関数のフーリエ変換
- くし形関数をたたみこみ
- 連続時間の信号の復元
- エイリアシング