論理数学I（1回目）

創域理工学部　情報計算科学科
桂田　浩一

1

4/10/2023

論理数学Iで学ぶこと

2

- ブール代数の基礎
  - ブール代数：0と1の値のみからなる代数系
- 「論理回路」を設計するための基盤
  - ある入力（0と1からなるデータ列）を与えたときに、所望の出力を得る回路をどう作ればよいか？
  - CPUや演算回路の設計
    - 本講義の範囲ではCPUまでは設計できないが電卓くらいはできる

4/10/2023

3

教科書および講義の進め方

- 教科書
  - 近代科学社　論理数学　（太原育夫著）
    - 概ね1章～3章の範囲を説明する
- 講義の進め方
  - 毎回，事前にスライドをLETUSに掲示するので予習しておくこと
  - 30～40分程度の講義を行い、その後にレポート作成に取り組む
  - レポートは講義時間終了時（16:10）までに提出する
  - レポートの提出点（28%）＋到達度評価（72%）により評価する

4/10/2023

4

本日の内容

- 論理関数と真理値
- ブール形式について
- 等式、恒等式について

4/10/2023

5

論理関数と真理値

- 真理値 ・・・ 0や1の値のこと

- 命題変数 ・・・ {0, 1}の値を取る変数
  - 0: 偽（False）　　1: 真（True）
  - cf. C言語では0が偽，0以外が真

- n変数論理関数 ・・・ $\{0, 1\}^n$ から {0, 1}への写像
  - $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$のように表す．

4/10/2023

6

真理表（真理値表）

- $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ・・・ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の値が決まれば $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の値が決まる

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ はそれぞれ0か1の値と取るので
$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の取り方の総数は2^n

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の値ごとに関数の値 $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が定義される．

表にしてみる．

4/10/2023

7

真理表（真理値表）

- 次のような表を真理表もしくは真理値表と呼ぶ.

2^n 行:

x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n	$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
0	0	$\cdots$	0	0	$\varphi(0, 0, \ldots, 0, 0)$
0	0	$\cdots$	0	1	$\varphi(0, 0, \ldots, 0, 1)$
		:			:
1	1	$\cdots$	1	0	$\varphi(1, 1, \ldots, 1, 0)$
1	1	$\cdots$	1	1	$\varphi(1, 1\ \ \ldots, 1, 1)$

4/10/2023

8

論理関数で用いられる演算（論理演算）

- 否定（not x）：$\bar{x}$
- 論理和（x or y）：$x \vee y$　$(x + y)$
- 論理積（x and y）：$x \cdot y$　$(x \wedge y)$

否定の真理値表

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

論理和と論理積の真理値表

x	y	$x \vee y$	$x \cdot y$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

4/10/2023

9

演算の優先順位

1. 論理積 > 論理和
2. 基本的に左から順に計算する．
   例） $x \vee y \cdot z$ と $(x \vee y) \cdot z$ は異なる．

x	y	z	$x \vee y \cdot z$	$(x \vee y) \cdot z$	$y \cdot z$	$(x \vee y)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

4/10/2023

10

ブール形式

- ブール形式
  - 命題変数と論理演算を組み合わせて作った関数のこと
  - ブール形式の例：
    $\bar{x}$, $x \cdot 1$, $\bar{x} \vee y$, $x \cdot y \vee \bar{z}$, $\overline{\bar{x} \vee y} \vee \bar{z}$, $(xy \vee \bar{z})\bar{y}$

- ブール形式の定義
  1. 0と1はブール形式
  2. 命題変数はブール形式
  3. φ がブール形式なら $\bar{\varphi}$ もブール形式
  4. φ と ψ がブール形式なら $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \cdot \psi)$ もブール形式
  5. 以上のもののみがブール形式

括弧とドットはしばしば省略される

4/10/2023

11

部分ブール形式

- 部分ブール形式
  - ブール形式の構成要素のこと
  - 例）ブール形式 $\overline{xy} \vee z$ の部分ブール形式

    $\overline{xy}$，z，xy，x など

- 部分ブール形式の定義
  1. φ は φ の部分ブール形式
  2. $\bar{\psi}$ が φ の部分ブール形式なら ψ も φ の部分ブール形式
  3. $(\psi \vee \chi)$ あるいは $(\psi \cdot \chi)$ が φ の部分ブール形式なら ψ と χ も φ の部分ブール形式
  4. 以上のもののみが φ の部分ブール形式

4/10/2023

12

等式，恒等式

- 二つの論理関数 φ と ψ の真理値が同じであるとき，φ と ψ は同値である.
- このとき，等式 $\varphi = \psi$ は恒等式である.

例） $\left.\begin{aligned} \varphi(x,y) &= x \cdot \bar{x} \vee x \cdot y \\ \psi(x,y) &= x \cdot (\bar{x} \vee y) \end{aligned}\right\}$ について

x	y	$\varphi(x,y)$	$\psi(x,y)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

よって $\varphi(x,y) = \psi(x,y)$

4/10/2023

13

基本的な恒等式（１）

- 0と1に関する演算律
  - $0 \vee x = x,\quad 0 \cdot x = 0,\quad 1 \vee x = 1,\quad 1 \cdot x = x$
- 補元律
  - $x \vee \bar{x} = 1,\quad x \cdot \bar{x} = 0$
- 二重否定の法則
  - $\bar{\bar{x}} = x$
- べき等律
  - $x \vee x = x,\quad x \cdot x = x$

4/10/2023

14

基本的な恒等式（2）

- 交換律
  - $x \vee y = y \vee x,\quad x \cdot y = y \cdot x$
- 結合律
  - $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),\quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- 分配律
  - $x \cdot (y \vee z) = x \cdot y \vee x \cdot z,\quad x \vee y \cdot z = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$

4/10/2023

15

基本的な恒等式（3）

- 第1吸収律
  - $x \cdot (x \vee y) = x$, $x \vee x \cdot y = x$
- 第2吸収律
  - $x \cdot (\bar{x} \vee y) = x \cdot y$, $x \vee \bar{x} \cdot y = x \vee y$
- 第3吸収律
  - $x \cdot y \vee \bar{x} \cdot z \vee y \cdot z = x \cdot y \vee \bar{x} \cdot z$,
  - $(x \vee y) \cdot (\bar{x} \vee z) \cdot (y \vee z) = (x \vee y) \cdot (\bar{x} \vee z)$
- ドモルガンの法則
  - $\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$, $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$

4/10/2023

本日の演習課題

- 真理値表を書いてみる