# ゼミ資料6

11/6 B3 横溝尚也

## p7.L9 ∼ p8.Ex1.8

p5∼p7 では二つの BIBD が同型であることについて学習した。二つの BIBD が同型であるかどうか知りたいときに、簡単に判別できれば問題はないが、実際には困難なことが多い。濃度 $v$[1]の 2 つの集合が同型でないことを示すには、$v!$ 通りの写像がすべて同型写像でないことを実際に計算する方法がある。今まで具体例としてみてきた BIBD はパラメータの数値がごく少数のもののみ紹介されてきたが、$v$ がとても大きくなった際に、$v!$ は膨大な計算量になり、計算を行うのが非現実的である。しかし、実際に $v!$ 通り計算をするよりも優れたアルゴリズムが存在し、これを使うことで比較的大きなデザインに関しても同型であるかの判別が現実的となっている。

**自己同型 (automorphism)** ・・・ 自分自身への同型写像のこと。$(X, \mathcal{A})$ が $(v, k, \lambda) - BIBD$ とすると、全単射 $\alpha(x)$ を用いて次のように表せる。

$$\{\{\alpha(x) : x \in A\} : A \in \mathcal{A}\} = \mathcal{A}$$

集合 X に対する恒等写像は、必ず自己同型となる (自明な自己同型)。しかし、恒等写像以外にも BIBD は自己同型となるものを持つ (非自明な自己同型)。

### 例 1.7

$(X, \mathcal{A})$ が以下の (7,3,1)-BIBD とする。

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

$\mathcal{A} = \{123, 145, 167, 246, 257, 347, 356\}$

全単射 $\alpha(x)$ を

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 2 & x = 2 \\ 3 & x = 3 \\ 5 & x = 4 \\ 4 & x = 5 \\ 7 & x = 6 \\ 6 & x = 7 \end{cases}$$

とする。このとき $x \in X$ は、$\alpha(x)$ によって置換され、ブロック $\mathcal{A}$ は次のように置換される。

$$\begin{cases} \mathcal{A} \ \to \ \mathcal{A}' \\ 123 \to 123 \\ 145 \to 145 \\ 167 \to 167 \\ 246 \to 257 \\ 257 \to 246 \\ 347 \to 356 \\ 356 \to 347 \end{cases}$$

このとき $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ より$\alpha(x)$ は、BIBD の自己同型写像であることがわかる。

[1]濃度: 集合の元の個数

BIBD$(X,\mathcal{A})$ のすべての自己同型写像の集合は、合成写像によって作られる群で表される。この群のことを自己同型群といい、$Aut(X,\mathcal{A})$ と書く。

### 例 1.8

例 1.7 と同様に (X,$\mathcal{A}$) が以下の (7,3,1)-BIBD とする。

$X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$,

$\mathcal{A} = \{123,145,167,246,257,347,356\}$

また、自己同型写像 $\alpha$ の他に以下の自己同型写像 $\beta$ を持つとする。

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & x=1 \\ 2 & x=2 \\ 3 & x=3 \\ 5 & x=4 \\ 4 & x=5 \\ 7 & x=6 \\ 6 & x=7 \end{cases} \qquad \beta(x) = \begin{cases} 2 & x=1 \\ 4 & x=2 \\ 6 & x=3 \\ 3 & x=4 \\ 1 & x=5 \\ 7 & x=6 \\ 5 & x=7 \end{cases}$$

ここで合成写像 $\gamma = \alpha \circ \beta$ を $\gamma(x) = \beta(\alpha(x))$ とすると、$\gamma$ を以下のように表せる。

$$\gamma(x) = \begin{cases} 2 & x=1 \\ 4 & x=2 \\ 6 & x=3 \\ 1 & x=4 \\ 3 & x=5 \\ 5 & x=6 \\ 7 & x=7 \end{cases}$$

これより $\gamma$ も BIBD の自己同型であることがわかる。また、(7,3,1)-BIBD の自己同型群 $Aut(X,\mathcal{A})$ は位数[2]168 の群である。

[2]位数: 群に含まれる元の個数

## $(7,3,1)-BIBD$ の自己同型群 $Aut(X,\mathcal{A})$ が位数 168 であることについて

例 1.8 の具体例を用いて解説する。位数が 168 であることは、自己同型写像が 168 通り存在することを意味している。自己同型写像 $\gamma(x)$ は以下のように計算できる。

**1.** $\gamma(1),\gamma(2)$ の選び方を求める

$\gamma(1)$ の値を選ぶのに 7 通り、$\gamma(2)$ の値を選ぶのに 6 通りの組み合わせが考えられる。今回は例 1.8 の $\gamma(x)$ になるように $\gamma(1)=2,\gamma(2)=4$ とする。

**2.** 1. から必然的に決まる写像を求める

$\gamma(1)=2,\gamma(2)=4$ であること、また、会合数 $\lambda=1$ よりブロックの置換が $(123)\rightarrow\ (246)$ であることがわかり、$\gamma(3)=6$ となる。

**3.** $\gamma(4)$ の選び方を求める

$\gamma(1)=2,\gamma(2)=4,\gamma(3)=6$ より $\gamma(4)$ の値の候補は、1,3,5,7 の 4 通りである。今回は $\gamma(4)=1$ とする。

**4.** 1.∼3. から必然的に決まる写像を求める

$\gamma(5):(145)\rightarrow(123)$ より $\gamma(5)=3\ \ (\because\ \gamma(1)=2,\ \gamma(4)=1)$
$\gamma(6):(246)\rightarrow(145)$ より $\gamma(6)=5\ \ (\because\ \gamma(2)=4,\ \gamma(4)=1)$
$\gamma(7):(167)\rightarrow(257)$ より $\gamma(7)=7\ \ (\because\ \gamma(1)=2,\ \gamma(6)=5)$

以上より $\gamma(x)$ が構成される。よって自己同型写像は $7\times6\times4=168$ 通り存在することが確認できた。先述した通り、同型写像は全部で $v!$ とおり存在するため $(7,3,1)-BIBD$ では $5040(=7!)$ 通りの計算が必要である。一方で自己同型写像は 168 とおりであることから計算量の少ないといいう性質がある。