論理数学I（8回目）

創域理工学部　情報計算科学科
桂田　浩一

1

前回の復習

2

- NAND／NOR／含意／同値の性質
  - NAND（NOR）演算子のみで任意の論理関数を表現できる
- 双対関数
  - 0 と 1，論理和と論理積を入れ替えて得られる関数
  - 自己双対関数：$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \varphi^*(x_1, \cdots, x_n) = \overline{\varphi(\overline{x_1}, \cdots, \overline{x_n})}$
- 単調関数
  - 引数が増大（減少）すると関数の値も増大（減少）する関数
  - 単調増大関数，単調減少関数

3

今回の内容

- 線形関数
- 0保存関数／1保存関数
- 完全論理関数族

4

線形関数

- ある論理関数$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$が
$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \cdots \oplus a_n x_n$$
と表現できるとき，φを線形関数という．

⇒ リード・マラー標準形の特殊な形
（変数同士の論理積がない）

5

線形関数の性質

- （定理2.16）　線形関数の変数に線形関数を代入して得られる関数も線形関数

6

0保存関数と1保存関数

- 0保存関数：$\varphi(0, 0, \cdots, 0) = 0$
  （例）　$\varphi = x$，$\varphi = xy$，$\varphi = x \vee y$

- 1保存関数：$\varphi(1, 1, \cdots, 1) = 1$
  （例）　$\varphi = x$，$\varphi = xy$，$\varphi = x \vee y$

- （定理）　0保存関数（1保存関数）の変数に0保存関数（1保存関数）を代入して得られる関数も0保存関数（1保存関数）

7

論理関数の閉包

- 論理関数族 Φ の閉包 $[\Phi]$

1. x が命題変数であれば $x \in [\Phi]$
2. $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Phi$ ならば $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in [\Phi]$
3. $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in [\Phi]$ かつ $\psi_i \in [\Phi]$ ならば $\varphi(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n) \in [\Phi]$
4. 以上のもののみが $[\Phi]$ に含まれる

閉包の例） $\Phi = \{x \cdot y\}$ の閉包 $[\{x \cdot y\}]$
$\{x, y, xy, xx, yy, xyy, xxyy, \cdots\}$

命題変数＋Φに代入を繰り返して得られる論理式の集合

5/9/2023

8

完全論理関数族

- 任意の論理関数が $[\Phi]$ に含まれるとき，Φ は完全であるという

- （補題2.14） $\{\bar{x},\ x \cdot y\} \subseteq [\Phi]$ ならば Φ は完全
  $\{\bar{x},\ x \vee y\} \subseteq [\Phi]$ ならば Φ は完全

完全な論理関数の集合の例

$\{\bar{x},\ xy\}$ $\{\bar{x},\ x \vee y\}$ $\{\bar{x},\ xy,\ x \vee y\}$ $\{x \mid y\}$

※どのような場合に「完全」になるか？

5/9/2023

5種類の論理関数族

- $\mathcal{F}_0$： 0保存関数族
  - （「0保存関数」全てからなる関数の集合）
- $\mathcal{F}_1$： 1保存関数族
  - （「1保存関数」全てからなる関数の集合）
- $\mathcal{F}_2$： 自己双対関数族
  - （「自己双対関数」全てからなる関数の集合）
- $\mathcal{F}_3$： 単調増大関数族
  - （「単調増大関数」全てからなる関数の集合）
- $\mathcal{F}_4$： 線形関数族
  - （「線形関数」全てからなる関数の集合）

5種類の論理関数族の性質（１）

- （補題） $[\mathcal{F}_i] = \mathcal{F}_i \ (i = 0,1,2,3,4)$
  （証明） 各関数族の代入に関する定理から導かれる

11

5種類の論理関数族の性質（2）

- 以下の性質が成り立つ

1. $\varphi \notin \mathcal{F}_0$ ならば $\bar{x} \in [\{\varphi\}]$ あるいは $1 \in [\{\varphi\}]$
2. $\varphi \notin \mathcal{F}_1$ ならば $\bar{x} \in [\{\varphi\}]$ あるいは $0 \in [\{\varphi\}]$
3. $\varphi \notin \mathcal{F}_2$ ならば $0, 1 \in [\{\varphi,\ \bar{x}\}]$
4. $\varphi \notin \mathcal{F}_3$ ならば $\bar{x} \in [\{\varphi,\ 0,\ 1\}]$
5. $\varphi \notin \mathcal{F}_4$ ならば $x \cdot y \in [\{\varphi,\ \bar{x},\ 0,\ 1\}]$ あるいは $x \vee y \in [\{\varphi,\ \bar{x},\ 0,\ 1\}]$

※証明は来週

5/9/2023

出題予定の演習課題

- 自己双対関数，単調増大関数，線形関数，0保存関数，1保存関数かどうかを調べる