論理数学I（4回目）

創域理工学部　情報計算科学科
桂田　浩一

1

4/28/2023

前回の復習（主積和標準形）

2

- ある論理関数を最小項の論理和で表したものを**主積和標準形**という．

例）論理関数 $\varphi(x,y,z)=\bar{x}y \vee xz$ を主積和標準形で表せ．

x	y	z	$\bar{x}y$	xz	$\bar{x}y \vee xz$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

$$\varphi(x,y,z) = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xyz$$

4/28/2023

3

前回の復習（標準展開）

- $\varphi(x, y, z) = xyz \vee \overline{xy}\bar{z}$ を主積和標準形で表せ.

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,y,z) &= xyz \vee \overline{xy}\bar{z} \\
&= xyz \vee (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} && \text{（ドモルガンの法則）} \\
&= xyz \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} && \text{（分配律）} \\
&= xyz \vee \bar{x}(y \vee \bar{y})\bar{z} \vee (x \vee \bar{x})\bar{y}\bar{z} && \text{（ステップ3）} \\
&= xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} && \text{（分配律）} \\
&= xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}
\end{aligned}
$$

計算間違いがないかどうかは真理値表を書けば確かめられる

4/28/2023

4

今日の内容

- 一元論理代数方程式を解く
  - $\varphi(x) = \psi(x)$ を満たす x を求めよ

cf. 一般的な算術演算の場合

$$
ax = bx + c
$$

$$
x = \frac{c}{a-b} \quad (a \neq b)
$$

論理演算には割り算も引き算も無い！　（どうする？）

4/28/2023

5

一元論理代数方程式の変形

- 補題：　論理関数 φ と ψ について，次が成り立つ.

$$\varphi = \psi \iff \varphi\psi \vee \bar{\varphi}\bar{\psi} = 1$$

$\Longrightarrow$）$\varphi \vee \bar{\varphi} = 1$

$\varphi\varphi \vee \bar{\varphi}\bar{\varphi} = 1$

$\varphi\psi \vee \bar{\varphi}\bar{\psi} = 1$

$\Longleftarrow$）$\varphi = \varphi \cdot 1 = \varphi(\varphi\psi \vee \bar{\varphi}\bar{\psi}) = \varphi\varphi\psi \vee \varphi\bar{\varphi}\bar{\psi} = \varphi\psi$

$\psi = \psi \cdot 1 = \psi(\varphi\psi \vee \bar{\varphi}\bar{\psi}) = \psi\varphi\psi \vee \psi\bar{\varphi}\bar{\psi} = \varphi\psi$

よって$\varphi = \psi$

＊$\varphi = \psi$ を解く代わりに $\underbrace{\varphi\psi \vee \bar{\varphi}\bar{\psi}}_{\text{新しく }\varphi(x)\text{ と置く}} = 1$ を解けばよい

6

一元論理代数方程式の解（１）

- $\varphi(x) = 1$ の解を $\varphi(x)$ の取り得る全てのパターンで考えてみる.

$\varphi(0)$	$\varphi(1)$	x
0	0	存在しない
0	1	1
1	0	0
1	1	$\{0,1\} = \alpha$

任意定数

xを$\varphi(0)$と$\varphi(1)$の式で表してみる

$x = \overline{\varphi(0)}\varphi(1) \vee \alpha\varphi(0)\varphi(1)$

（但し$\varphi(0) = 1$もしくは$\varphi(1) = 1$）

解の存在条件

（$\varphi(0) \vee \varphi(1) = 1$）

7

一元論理代数方程式の解（2）

- $\varphi(x)=1$ の解 $x=\overline{\varphi(0)}\varphi(1)\vee\alpha\varphi(0)\varphi(1)$ を簡単化する

解の存在条件より
$\varphi(0)\vee\varphi(1)=1$
両辺の否定を取ると
$\overline{\varphi(0)\vee\varphi(1)}=0$
ドモルガンの法則より
$\overline{\varphi(0)}\;\overline{\varphi(1)}=0$

$$
\begin{aligned}
x &= \overline{\varphi(0)}\varphi(1)\vee\alpha\varphi(0)\varphi(1)\\
&\boxed{0}\vee\overline{\varphi(0)}\varphi(1)\vee\alpha\varphi(0)\varphi(1)\\
&= \overline{\varphi(0)}\;\overline{\varphi(1)}\vee\overline{\varphi(0)}\varphi(1)\vee\alpha\varphi(0)\varphi(1)\\
&= \overline{\varphi(0)}\left(\overline{\varphi(1)}\vee\varphi(1)\right)\vee\alpha\varphi(0)\varphi(1)\\
&= \overline{\varphi(0)}\vee\alpha\varphi(0)\varphi(1)\\
&= \overline{\varphi(0)}\vee\alpha\varphi(1)
\end{aligned}
$$

xの一般解

4/28/2023

8

一元論理代数方程式の解き方

- $f(x)=g(x)$が与えられたとする

1. $f(x)g(x)\vee\overline{f(x)}\;\overline{g(x)}=1$を代わりに解く
   （$f(x)g(x)\vee\overline{f(x)}\;\overline{g(x)}=\varphi(x)$と置く）
2. $\varphi(0)$，$\varphi(1)$を求める
3. 解の存在条件$\varphi(0)\vee\varphi(1)=1$になる条件を求める
4. $x=\overline{\varphi(0)}\vee\alpha\varphi(1)$を計算する

4/28/2023

9

例題

- 一元論理代数方程式 $ax \lor b = cx$ を x について解け

$ax \lor b = cx$の代わりに次式を解く．

$(ax \lor b)cx \lor \overline{ax \lor b}\,\overline{cx} = 1$

$\varphi(x) = (ax \lor b)cx \lor \overline{ax \lor b}\,\overline{cx}$と置くと，

$\varphi(0) = (a \cdot 0 \lor b)c \cdot 0 \lor \overline{a \cdot 0 \lor b}\,\overline{c \cdot 0} = \bar{b}$

$\varphi(1) = (a \cdot 1 \lor b)c \cdot 1 \lor \overline{a \cdot 1 \lor b}\,\overline{c \cdot 1} = (a \lor b)c \lor \overline{a \lor b}\,\bar{c}$

$= ac \lor bc \lor \bar{a}\bar{b}\bar{c}$

4/28/2023

10

$\varphi(0) = \bar{b} \qquad \varphi(1) = ac \lor bc \lor \bar{a}\bar{b}\bar{c}$

解の存在条件は$\varphi(0) \lor \varphi(1) = 1$より

$\varphi(0) \lor \varphi(1) = \bar{b} \lor ac \lor bc \lor \bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b} \lor c = 1$が解の存在条件

xの一般解は$x = \overline{\varphi(0)} \lor \alpha\varphi(1)$

$$
\begin{aligned}
x &= b \lor \alpha\left(ac \lor bc \lor \bar{a}\bar{b}\bar{c}\right) \\
&= b \lor \alpha ac \lor \alpha bc \lor \alpha\bar{a}\bar{b}\bar{c} \\
&= b \lor \alpha ac \lor \alpha\bar{a}\bar{c}
\end{aligned}
$$

4/28/2023

出題予定の演習課題

- 一元論理代数方程式を解く