論理数学I（6回目）

創域理工学部　情報計算科学科
桂田　浩一

1

4/28/2023

前回の復習

2

- n元論理代数方程式の解を求める
  - $\begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_n) = g_1(x_1,\cdots,x_n) \\ f_2(x_1,\cdots,x_n) = g_2(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\cdots,x_n) = g_m(x_1,\cdots,x_n) \end{cases}$ を満たす$x_1,\cdots,x_n$を求めよ

講義や演習問題に関して質問がある場合には
下記までメールを送ってください．

katsurada@rs.tus.ac.jp

4/28/2023

3

今日の内容

- ANDとOR以外の演算子とその性質
  - ANDとOR以外の演算子
  - XORの性質

4/28/2023

4

ANDとOR以外の演算子

$x \quad y$	$x \cdot y$	$x \vee y$	$x \oplus y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$
0 0	0	0	0	1	1	1	1
0 1	0	1	1	1	0	1	0
1 0	0	1	1	1	0	0	0
1 1	1	1	0	0	0	1	1
	AND	OR	XOR	NAND	NOR		
読み方	アンド	オア	エクスクルーシブオア	ナンド	ノア		
日本語			排他的論理和（環和）			含意	同値

4/28/2023

5

XORの性質

- $\boxed{x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}}$ ➡ XOR ⇒ 積和標準形
- $x \oplus x = 0, \quad x \oplus \bar{x} = 1$
- $x \oplus 0 = x, \quad \boxed{x \oplus 1 = \bar{x}}$ ➡ 否定は⊕と1を使って表せる
- $x \oplus y = y \oplus x$
- $\boxed{(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)}$ ➡ $x \oplus y \oplus z$という表現が可能
- $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$
- $\boxed{x \vee y = x \oplus y \oplus xy}$ ➡ 論理和 ⇒ XOR

★任意の論理関数はXORと論理積と1を使って表せる

4/28/2023

6

$\boldsymbol{x \vee y = x \oplus y \oplus xy}$の証明

- $$\begin{aligned} x \vee y &= \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} \\ &= \overline{(x \oplus 1) \cdot (y \oplus 1)} \\ &= (x \oplus 1) \cdot (y \oplus 1) \oplus 1 \\ &= (xy \oplus x \oplus y \oplus 1) \oplus 1 \\ &= \overline{xy \oplus x \oplus y} \oplus 1 \\ &= xy \oplus x \oplus y \end{aligned}$$

4/28/2023

7

シャノンの展開定理

- $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \varphi(0, x_2, \cdots, x_n)\overline{x_1} \vee \varphi(1, x_2, \cdots, x_n)x_1$

（証明） $x_1 = 0$のとき

$$(\text{左辺}) = \varphi(0, x_2, \cdots, x_n)$$
$$(\text{右辺}) = \varphi(0, x_2, \cdots, x_n) \cdot 1 \vee \varphi(1, x_2, \cdots, x_n) \cdot 0$$
$$= \varphi(0, x_2, \cdots, x_n)$$

$x_1 = 1$のとき

$$(\text{左辺}) = \varphi(1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$(\text{右辺}) = \varphi(0, x_2, \cdots, x_n) \cdot 0 \vee \varphi(1, x_2, \cdots, x_n) \cdot 1$$
$$= \varphi(1, x_2, \cdots, x_n)$$

4/28/2023

8

XORの展開定理

1. シャノン展開
   $$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \varphi_0\overline{x_1} \oplus \varphi_1 x_1$$
   $$\varphi_0 = \varphi(0, x_2, \cdots, x_n),\ \ \varphi_1 = \varphi(1, x_2, \cdots, x_n)$$
2. 正極性ダビオ展開
   $$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \varphi_0 \oplus \varphi_2 x_1 (= \varphi_0 \oplus (\varphi_0 \oplus \varphi_1)x_1)$$
   $$\varphi_2 = \varphi_0 \oplus \varphi_1$$
3. 負極性ダビオ展開
   $$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \varphi_2\overline{x_1} \oplus \varphi_1 (= (\varphi_0 \oplus \varphi_1)\overline{x_1} \oplus \varphi_1)$$

4/28/2023

9

シャノン展開の証明

- シャノン展開：　$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \varphi_0 \overline{x_1} \oplus \varphi_1 x_1$

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \varphi_0 \overline{x_1} \vee \varphi_1 x_1 \\ &= \varphi_0 \overline{x_1} \oplus \varphi_1 x_1 \oplus \varphi_0 \overline{x_1} \varphi_1 x_1 \\ &= \varphi_0 \overline{x_1} \oplus \varphi_1 x_1 \oplus 0 \\ &= \varphi_0 \overline{x_1} \oplus \varphi_1 x_1\end{aligned}$$

⇐ シャノン展開

論理和 ⇒ XOR

4/28/2023

10

正極性ダビオ展開の証明

- 正極性ダビオ展開：　$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \varphi_0 \oplus \varphi_2 x_1$

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \varphi_0 \overline{x_1} \vee \varphi_1 x_1 \\ &= \varphi_0 (x_1 \oplus 1) \oplus \varphi_1 x_1 \\ &= \varphi_0 x_1 \oplus \varphi_0 \oplus \varphi_1 x_1 \\ &= (\varphi_0 \oplus \varphi_1) x_1 \oplus \varphi_0 \\ &= \varphi_2 x_1 \oplus \varphi_0\end{aligned}$$

⇐ シャノン展開

4/28/2023

11

リード・マラー標準形

- 全ての変数を正極性ダビオ展開で展開すると．．．

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=\varphi(0,x_2,\cdots,x_n)\oplus\boxed{\varphi(0,x_2,\cdots,x_n)x_1\oplus\varphi(1,x_2,\cdots,x_n)x_1}$$
$$=\varphi(0,0,x_3,\cdots,x_n)\oplus\varphi(0,0,x_3,\cdots,x_n)x_2\oplus\varphi(0,1,x_3,\cdots,x_n)x_2$$
$$\oplus\boxed{\varphi(0,0,x_3,\cdots,x_n)x_1}\oplus\boxed{\varphi(0,0,x_3,\cdots,x_n)x_1x_2\oplus\varphi(0,1,x_3,\cdots,x_n)x_1x_2}$$
$$\oplus\boxed{\varphi(1,0,x_3,\cdots,x_n)x_1}\oplus\boxed{\varphi(1,0,x_3,\cdots,x_n)x_1x_2\oplus\varphi(1,1,x_3,\cdots,x_n)x_1x_2}$$

4/28/2023

12

リード・マラー標準形

- 全ての変数を正極性ダビオ展開で展開すると．．．

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=\varphi(0,0,0,\cdots,0)$$
$$\oplus\big(\varphi(0,0,0,\cdots,0)\oplus\varphi(1,0,0,\cdots,0)\big)x_1$$
$$\oplus\big(\varphi(0,0,0,\cdots,0)\oplus\varphi(0,1,0,\cdots,0)\big)x_2$$
$$\vdots$$
$$\oplus\big(\varphi(0,0,0,\cdots,0)\oplus\varphi(0,0,0,\cdots,1)\big)x_n$$
$$\oplus\big(\varphi(0,0,0,\cdots,0)\oplus\varphi(0,1,0,\cdots,0)\oplus\varphi(1,0,0,\cdots,0)\oplus\varphi(1,1,0,\cdots,0)\big)x_1x_2$$
$$\vdots$$
$$\oplus\underbrace{\big(\varphi(0,0,0,\cdots,0)\oplus\cdots\oplus\varphi(1,1,1,\cdots,1)\big)}_{\text{定数：0 or 1}}x_1x_2\cdots x_n$$

リード・マラー標準形（環和標準形）

任意の論理関数は変数の組み合わせからなる論理積の
高々1回の出現と，1およびそれらのXORで表せる

4/28/2023

13

リード・マラー標準形への変換

- $\varphi(x,y,z) = \bar{x}y \vee \overline{\bar{x} \vee z}$ をリード・マラー標準形にせよ

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,y,z) &= \bar{x}y \vee \overline{\bar{x} \vee z} \\
&= \bar{x}y \vee x\bar{z} \\
&= (x \oplus 1)y \vee x(z \oplus 1) \\
&= (x \oplus 1)y \oplus x(z \oplus 1) \oplus (x \oplus 1)yx(z \oplus 1) \\
&= xy \oplus y \oplus xz \oplus x \oplus xyz \oplus xy \oplus xyz \oplus xy \\
&= x \oplus y \oplus xy \oplus xz
\end{aligned}
$$

ド・モルガンの法則

1. $\bar{x} = x \oplus 1$，$x \vee y = x \oplus y \oplus xy$ を何度も使う
2. 積項とXORのみになったら $x \oplus x = 0$を使って積項を消す

4/28/2023

出題予定の演習課題

- リードマラー標準形への変形
- 排他的論理和の計算