1

論理数学I（3回目）

創域理工学部　情報計算科学科
桂田　浩一

4/25/2023

2

前回の復習

- 恒等式，置換法則，代入法則を使って式変形

例）
$$\begin{aligned} & xy \lor x\bar{y} \lor xz \\ &= x(y \lor \bar{y}) \lor xz \\ &= x \lor xz \\ &= x \end{aligned}$$

講義や演習問題に関して質問がある場合には
下記までメールを送ってください．

katsurada@rs.tus.ac.jp

4/25/2023

3

本日の目標

- 積和標準形，主積和標準形について理解する
- 主積和標準形⇔真理値表ができるようになる
- 任意の論理関数を主積和標準形に変形できるようになる

4/25/2023

4

論理関数の標準形

- 積項：　単一リテラルまたはリテラルの論理積
  例）　$\bar{x}$，　$x\bar{y}$　　$\cancel{\overline{xy}}$
- 積和標準形：　積項または積項の論理和
  例）　$x\bar{y} \vee xyz$　　$\cancel{x\overline{y \vee y}z}$
- 和項：　単一リテラルまたはリテラルの論理和
  例）　$\bar{x}$，　$x \vee \bar{y}$　　$\cancel{x\bar{y} \vee z}$
- 和積標準形：　和項または和項の論理積
  例）　$(x \vee \bar{y}) \cdot (y \vee z)$

4/25/2023

5

最小項

- n変数論理関数において，n種類の変数のn個のリテラルからなる積項

- 1変数のとき：　x_1，　$\overline{x_1}$
- 2変数のとき：　x_1x_2，　$x_1\overline{x_2}$，　$\overline{x_1}x_2$，　$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$

：

- n変数のとき：　$\{x_1^{\varepsilon_1}, x_2^{\varepsilon_2}, \cdots, x_n^{\varepsilon_n}\}$　但し$x_i^{\varepsilon_i} = \begin{cases} x_i \text{ if } \varepsilon_i = 1 \\ \overline{x_i} \text{ if } \varepsilon_i = 0 \end{cases}$

4/25/2023

6

真理値表と最小項

最小項の一つ

- 次の真理値表を考える．
0の所を負リテラル，1の所を正リテラルで表すと　$\bar{x}y\bar{z}$

x	y	z	φ
0	0	0	0
	：		：
0	1	0	1
	：		：
1	1	1	0

ここだけ1，他は0

最小項 $\bar{x}y\bar{z}$ は$(x, y, z) = (0,1,0)$
のときのみ1になるので，
論理関数 $\varphi = \bar{x}y\bar{z}$ と表せる．

4/25/2023

7

真理値表と最小項

最小項の一つ

- 別の真理値表を考える．
  0の所を負リテラル，1の所を正リテラルで表すと xyz

x	y	z	φ
0	0	0	0
	:		:
0	1	0	0
	:		:
1	1	1	1

最小項 xyz は$(x, y, z) = (1,1,1)$
のときのみ1になるので，
論理関数 $\varphi = xyz$ と表せる．

ここだけ1，他は0

4/25/2023

8

真理値表と最小項

- また別の真理値表を考える．

$(x, y, z) = (0,1,0)$のときのみ1になる関数は$\varphi = \bar{x}y\bar{z}$,
$(x, y, z) = (1,1,1)$のときのみ1になる関数は$\varphi = xyz$と表せるので，
$(x, y, z) = (0,1,0)$と$(x, y, z) = (1,1,1)$のときに1になる下の関数は
$\varphi = \bar{x}y\bar{z} \vee xyz$ と表せる．

x	y	z	φ
0	0	0	0
	:		:
0	1	0	1
	:		:
1	1	1	1

真理値表は
最小項の論理和
で表せる

2か所が1，他は0

4/25/2023

9

主積和標準形

- ある論理関数を最小項の論理和で表したものを主積和標準形という.

例）論理関数 $\varphi(x,y,z) = \bar{x}y \vee xz$ を主積和標準形で表せ.

x	y	z	$\bar{x}y$	xz	$\bar{x}y \vee xz$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

$$\varphi(x,y,z) = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xyz$$

4/25/2023

10

標準展開

- 真理値表を使わず，式変形で主積和標準形を求める.

1. ドモルガンの法則，二重否定の法則を用いてリテラルに論理和・論理積を施した形にする.
2. 分配律，交換律，べき等律などを用いて積和標準形にする.
3. 最小項でない積項 t について，足りない命題変数が x_i であれば $(x_i \vee \bar{x_i})t$ として補う.
4. 分配率を用いて積和標準形にし，同じ最小項があれば一つにまとめる.

4/25/2023

11

標準展開の例

- $\varphi(x,y,z) = xyz \vee \overline{xyz}$ を主積和標準形で表せ.

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,y,z) &= xyz \vee \overline{xy}\bar{z} \\
&= xyz \vee (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} && \text{（ドモルガンの法則）} \\
&= xyz \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} && \text{（分配律）} \\
&= xyz \vee \bar{x}(y \vee \bar{y})\bar{z} \vee (x \vee \bar{x})\bar{y}\bar{z} && \text{（ステップ3）} \\
&= xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} && \text{（分配律）} \\
&= xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}
\end{aligned}
$$

計算間違いがないかどうかは真理値表を書けば確かめられる

4/25/2023

12

例題１ー１

- 標準展開を用いて
  論理関数 $\varphi(x,y,z) = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{z})$
  の主積和標準形を求めよ.

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,y,z) &= (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{z}) \\
&= \underbrace{\bar{x}x}_{=0} \vee \bar{x}\bar{z} \vee xy \vee y\bar{z} \\
&= \bar{x}\bar{z} \vee xy \vee y\bar{z} \\
&= \bar{x}(y \vee \bar{y})\bar{z} \vee xy(z \vee \bar{z}) \vee (x \vee \bar{x})y\bar{z} \\
&= \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee xy\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \\
&= \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee xy\bar{z}
\end{aligned}
$$

4/25/2023

13

例題１－２

- 論理関数 $\varphi(x,y,z)=(\bar{x}\lor y)(x\lor\bar{z})$ を主積和標準形で表せ．

x	y	z	$\bar{x}\lor y$	$x\lor\bar{z}$	$(\bar{x}\lor y)(x\lor\bar{z})$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

$$\varphi(x,y,z)=\bar{x}\bar{y}\bar{z}\lor\bar{x}y\bar{z}\lor xy\bar{z}\lor xyz$$

4/25/2023

出題予定の演習課題

- 論理関数を主積和標準形で表す
  - 真理値表を書いて主積和標準形を求める
  - 標準展開で式変形を行い，主積和標準形を求める