1

論理数学I（7回目）

創域理工学部　情報計算科学科
桂田　浩一

5/9/2023

2

前回の復習

- ANDとOR以外の演算子
  - XOR: $x \oplus y$
  - NAND: $x \mid y$
  - NOR: $x \downarrow y$
  - 含意： $x \rightarrow y$
  - 同値： $x \leftrightarrow y$
- XORの標準形：リードマラー標準形

講義や演習問題に関して質問がある場合には
下記までメールを送ってください．

5/9/2023

katsurada@rs.tus.ac.jp

3

今日の内容

- NAND／NOR／含意／同値の性質
- 双対関数
- 単調関数

4

NAND，NORの性質

- NAND： $x \mid y = \overline{xy}$
- NOR： $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$

1. $\bar{x} = x \mid x = x \downarrow x$
2. $xy = \overline{\overline{xy}} = \overline{x \mid y} = (x \mid y) \mid (x \mid y)$
   $= \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = \bar{x} \downarrow \bar{y} = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$
3. $x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\bar{x}\bar{y}} = \bar{x} \mid \bar{y} = (x \mid x) \mid (y \mid y)$
   $= \overline{x \downarrow y} = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$

※任意の論理式はNANDもしくはNORのみで表せる

5

含意の性質

1. $x \to 0 = \bar{x}, \quad 0 \to x = 1$
2. $x \to 1 = 1, \quad 1 \to x = x$
3. $x \vee y = \bar{x} \to y$

x	y	$x \to y\ (= \bar{x} \vee y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

5/9/2023

6

同値の性質

1. $x \leftrightarrow 0 = \bar{x}, \quad x \leftrightarrow 1 = x$
2. $x \leftrightarrow x = 1$
3. $x \leftrightarrow y = \overline{x \oplus y}$
4. $x \leftrightarrow y = (x \to y)(y \to x)$

x	y	$x \leftrightarrow y\ (= xy \vee \bar{x}\,\bar{y})$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

5/9/2023

7

双対関数

- ある関数 φ の 0 と 1，論理和と論理積を入れ替えて得られる関数（φ^*と表記）

（例）$\varphi(x,y,z) = (xy \vee z) \cdot 1$ のとき

$\varphi^*(x,y,z) = (x \vee y) \cdot z \vee 0$

双対定理： $\varphi^*(x_1, \cdots, x_n) = \overline{\varphi(\overline{x_1}, \cdots, \overline{x_n})}$

ド・モルガンの法則の拡張

5/9/2023

8

自己双対関数

- $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \varphi^*(x_1, \cdots, x_n)$ $(= \overline{\varphi(\overline{x_1}, \cdots, \overline{x_n})})$ を満たす関数を自己双対関数と呼ぶ.

（例）$\varphi(x,y,z) = xy \vee yz \vee zx$ を考える

$$
\begin{aligned}
\varphi^*(x,y,z) &= (x \vee y)(y \vee z)(z \vee x) \\
&= (xy \vee y \vee xz \vee yz)(z \vee x) \\
&= (y \vee xz)(z \vee x) \\
&= yz \vee xz \vee xy \vee xz \\
&= xy \vee yz \vee zx
\end{aligned}
$$

よって$\varphi(x,y,z)$は自己双対関数

5/9/2023

9

自己双対関数の直観的意味

x y z	$\varphi(x,y,z)$	$\varphi^*(x,y,z)=\overline{\varphi(\overline{x},\overline{y},\overline{z})}$	例
0 0 0	$\varphi(0,0,0)$	$\overline{\varphi(1,1,1)}$	0
0 0 1	$\varphi(0,0,1)$	$\overline{\varphi(1,1,0)}$	1
0 1 0	$\varphi(0,1,0)$	$\overline{\varphi(1,0,1)}$	0
0 1 1	$\varphi(0,1,1)$	$\overline{\varphi(1,0,0)}$	0
1 0 0	$\varphi(1,0,0)$	$\overline{\varphi(0,1,1)}$	1
1 0 1	$\varphi(1,0,1)$	$\overline{\varphi(0,1,0)}$	1
1 1 0	$\varphi(1,1,0)$	$\overline{\varphi(0,0,1)}$	0
1 1 1	$\varphi(1,1,1)$	$\overline{\varphi(0,0,0)}$	1

※ 0と1が同じ数だけ現れる

5/9/2023

※ 主積和標準形で表すと$x_1^{\varepsilon_1}\cdots x_n^{\varepsilon_n}$か$x_1^{\overline{\varepsilon_1}}\cdots x_n^{\overline{\varepsilon_n}}$のいずれかが現れる

10

自己双対関数の代入定理

- 自己双対関数に自己双対関数を代入して得られる関数も自己双対関数

（証明）自己双対関数$\varphi(x_1,\cdots,x_n)$のx_iに自己双対関数$\psi(y_1,\cdots,y_m)$を代入して得られる関数を$\chi=\varphi(x_1,\cdots,x_{i-1},\psi(y_1,\cdots,y_m),x_{i+1},\cdots,x_n)$とする

$$\begin{aligned}\chi^* &= \overline{\varphi(\overline{x_1},\cdots,\overline{x_{i-1}},\psi(\overline{y_1},\cdots,\overline{y_m}),\overline{x_{i+1}},\cdots,\overline{x_n})} \\ &= \overline{\varphi(\overline{x_1},\cdots,\overline{x_{i-1}},\overline{\psi(y_1,\cdots,y_m)},\overline{x_{i+1}},\cdots,\overline{x_n})} \\ &= \overline{\overline{\varphi(x_1,\cdots,x_{i-1},\psi(y_1,\cdots,y_m),x_{i+1},\cdots,x_n)}} \\ &= \varphi(x_1,\cdots,x_{i-1},\psi(y_1,\cdots,y_m),x_{i+1},\cdots,x_n)=\chi\end{aligned}$$

5/9/2023

11

単調関数（1）

- 真理値 0 と 1 の順序を 1 > 0 と定める

全てのε_iについて$\varepsilon_i \geq \varepsilon_i'$

単調増大関数：$(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \geq (\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_n')$ならば$\varphi(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \geq \varphi(\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_n')$であるとき，$\varphi$を単調増大関数と呼ぶ.

単調増大関数の例：$\varphi = x$，$\varphi = xy$，$\varphi = x \vee y$，$\varphi = 0$

x y	x	xy	$x \vee y$	0	1
0 0	0	0	0	0	1
0 1	0	0	1	0	1
1 0	1	0	1	0	1
1 1	1	1	1	0	1

12

単調関数（2）

- 真理値 0 と 1 の順序を 1 > 0 と定める

全てのε_iについて$\varepsilon_i \geq \varepsilon_i'$

単調減少関数：$(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \geq (\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_n')$ならば$\varphi(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \leq \varphi(\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_n')$であるとき，$\varphi$を単調減少関数と呼ぶ.

単調減少関数の例：$\varphi = \bar{x}$，$\varphi = \bar{x}\bar{y}$，$\varphi = \bar{x} \vee \bar{y}$，$\varphi = 0$

x y	$\bar{x}$	$\bar{x}\,\bar{y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$	0	1
0 0	1	1	1	0	1
0 1	1	0	1	0	1
1 0	0	0	1	0	1
1 1	0	0	0	0	1

13

単調増大（減少）関数の性質

- （定理2.5）　単調増大（減少）関数φは負（正）リテラルが現れない積和標準形，または定数関数で表せる．逆も成り立つ．

- （定理2.6）　単調増大（減少）関数の変数に単調増大（減少）関数を代入して得られる関数も単調増大（減少）関数

5/9/2023

出題予定の演習課題

- NAND，NORの計算
- 自己双対関数について