次に，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_p;\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})dx_p\cdots dx_1 = 1$$

を示そう．$\boldsymbol{\Sigma}$ は正定値であるから，同値条件 (iii) から $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'$ となる正則行列 $\boldsymbol{C}$ が存在する．この $\boldsymbol{C}$ を用いて

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$$

と変数変換する．ただし，$\boldsymbol{y} = (y_1,\ldots,y_p)'$ である．このとき，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) &= (\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}\\ &= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{C}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}\\ &= \boxed{\text{読者の演習}}\\ &= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

であり，この変数変換のヤコビアンは，

$$J(y_1,\ldots,y_p) = \quad \operatorname{mod}|\boldsymbol{C}| \tag{3}$$

であるから，

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_p;\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})dx_p\cdots dx_1\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right]dx_p\cdots dx_1\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\quad \operatorname{mod}|\boldsymbol{C}|\frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}\right]dy_p\cdots dy_1\end{aligned}$$

ここで，

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}\right] = \prod_{i=1}^{p}\exp\left[-\frac{1}{2}y_i^2\right]$$

であること，および

$$|\boldsymbol{\Sigma}| = |\boldsymbol{C}|^2 \tag{4}$$

であることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \mod |\boldsymbol{C}| \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}\right] dy_p\cdots dy_1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \mod |\boldsymbol{C}| \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \mod |\boldsymbol{C}|} \prod_{i=1}^{p} \exp\left[-\frac{1}{2}y_i^2\right] dy_p\cdots dy_1 \\
&= \prod_{i=1}^{p}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}y_i^2\right] dy_i\right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

以上から，$f(x_1,\ldots,x_p;\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$ が pdf の条件を満たすことが確認できた．

式 (3) の解説

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\mu}$ を成分を用いて表記すると

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}y_1 + \cdots + c_{1p}y_p + \mu_1 \\ \vdots \\ c_{p1}y_1 + \cdots + c_{pp}y_p + \mu_p \end{pmatrix}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
J(y_1,\ldots,y_p) &= \mod \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_p}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_p}{\partial y_p} \end{vmatrix} \\
&= \mod \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pp} \end{vmatrix} \\
&= \mod |\boldsymbol{C}|
\end{aligned}
$$

を得る．

定義 1. 確率行列 $\boldsymbol{Z}$ は，確率変数 $Z_{11},\ldots,Z_{mn}$ を要素に持つ行列である．

$$
\boldsymbol{Z} = (Z_{gh}) \quad g = 1,\ldots,m; h = 1,\ldots,n
$$

行列の表現

$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{U}$ の (i,j) 成分を u_{ij} とする（$i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n$）．このとき，次のように表現することがある．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{U} &= \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mn} \end{pmatrix} \\
&= (u_{ij})_{m\times n} \\
&= (u_{ij}) \quad i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n
\end{aligned}$$

定義 2. 確率行列 $\boldsymbol{Z}$ の期待値は，

$$E(\boldsymbol{Z}) = (E(Z_{gh})) \quad g=1,\ldots,m; h=1,\ldots,n$$

で与えられる．

特に，$\boldsymbol{Z}$ が確率ベクトル $\boldsymbol{X}$ の場合，

$$E(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{pmatrix}$$

である．また，$\boldsymbol{Z}$ が確率行列 $(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})'$ の場合は，

$$\begin{aligned}
&E((\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})') \\
&= \begin{pmatrix} E((X_1-\mu_1)^2) & \cdots & E((X_1-\mu_1)(X_p-\mu_p)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E((X_p-\mu_p)(X_1-\mu_1)) & \cdots & E((X_p-\mu_p)^2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} V(X_1) & \cdots & Cov(X_1,X_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_p,X_1) & \cdots & V(X_p) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

この行列を一般に共分散行列と呼び $V(\boldsymbol{X})$ と書く．

補題 1. $\boldsymbol{Z}$ が $m \times n$ の確率行列，$\boldsymbol{D}$ が $\ell \times m$ の実行列，$\boldsymbol{E}$ が $n \times q$ の実行列，$\boldsymbol{F}$ が $\ell \times q$ の実行列とすると，

$$E(\boldsymbol{DZE}+\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{D}E(\boldsymbol{Z})\boldsymbol{E}+\boldsymbol{F}$$

が成り立つ．

特に，$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{DX} + \boldsymbol{f}$ の場合，

$$
\begin{aligned}
E(\boldsymbol{Y}) &= \boldsymbol{D}E(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{f} \\
V(\boldsymbol{Y}) &= \boldsymbol{D}V(\boldsymbol{X})\boldsymbol{D}'
\end{aligned}
$$

が成り立つ．証明は読者の演習とする．

確率ベクトル $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_p)'$ が平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}$，共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の多変量正規分布に従うとき，

$$E(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\mu}, \quad V(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\Sigma}$$

を示す．

$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{CC}'$ となる正則行列 $\boldsymbol{C}$ を用いて $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{Cy}$ と変数変換すると $\boldsymbol{Y}$ の pdf は，

$$g(\boldsymbol{y}) = \prod_{i=1}^{p} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} y_i^2 \right] \right)$$

である（$g(y_1, \ldots, y_p)$ を $g(\boldsymbol{y})$ と略記することもある）．確率ベクトル $\boldsymbol{Y}$ の第 i 成分 Y_i（$i = 1, \ldots, p$）の期待値は，

$$
\begin{aligned}
E(Y_i) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} y_i \prod_{i=1}^{p} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} y_i^2 \right] \right) dy_p \ldots dy_1 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} y_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} y_i^2 \right] dy_i \right) \\
&\quad \times \prod_{j \neq i} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} y_j^2 \right] dy_j \right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

したがって，$E(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{0}$．以上から，

$$E(\boldsymbol{X}) = E(\boldsymbol{CY} + \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{C}E(\boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}$$

次に，$E(\boldsymbol{YY}')$ について考える．$E(\boldsymbol{YY}')$ の (i, j) 成分は，$i \neq j$ に対して，

$$
\begin{aligned}
E(Y_iY_j) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} y_i y_j \prod_{i=1}^{p} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} y_i^2 \right] \right) dy_p \ldots dy_1 \\
&= \boxed{\text{読者の演習}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

であり，$i = j$ に対して，

$$\begin{aligned} E(Y_i^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} y_i^2 \prod_{i=1}^{p} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} y_i^2 \right] \right) dy_p \ldots dy_1 \\ &= \boxed{\text{読者の演習}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

より $E(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}') = \boldsymbol{I}_p$ である．$\boldsymbol{I}_p$ は $p \times p$ の単位行列である．以上から，

$$V(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{C}V(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{C}E(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}')\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{\Sigma}$$

正定値の補足

行列 $\boldsymbol{A}$ が正定値ならば，$\boldsymbol{A}^{-1}$ も正定値である．
証明：行列 $\boldsymbol{A}$ が正定値ならば，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{5}$$

が成り立つ．ただし，$\lambda > 0$ である．式 (5) の両辺に左から $\boldsymbol{A}^{-1}$ をかけることにより，

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}$$

を得る．このとき $1/\lambda > 0$ であるから，$\boldsymbol{A}^{-1}$ は正定値である．

3.2 演習問題

問 1 式 (4) が成り立つことを証明する．$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'$ より

$$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{C}')^{-1} = \boldsymbol{I}_p$$

である．このことから，$|\boldsymbol{C}^{-1}| = 1/|\boldsymbol{C}|$，$|(\boldsymbol{C}')^{-1}| =$（ア），$|\boldsymbol{I}_p| = 1$ より $|\boldsymbol{\Sigma}| = |\boldsymbol{C}|^2$ を得る．

文中の（ア）に当てはまるものとして，次の ① 〜 ④ のうちから適切なものを一つ選べ． $\boxed{\textbf{1}}$

① $|\boldsymbol{I}_p|$ ② $|\boldsymbol{C}|$ ③ $1/|\boldsymbol{C}|$ ④ $1/|\boldsymbol{C}|^2$

問2 補題1を証明する．$E(\boldsymbol{DZE}+\boldsymbol{F})=\boldsymbol{D}E(\boldsymbol{Z})\boldsymbol{E}+\boldsymbol{F}$ の左辺の (i,j) 成分は，

$$E\left(\sum_g\sum_h d_{ih}Z_{hg}e_{gj}+f_{ij}\right)=\sum_g\sum_h（イ）$$

であり，これは右辺の (i,j) 成分に等しい．

文中の（イ）に当てはまるものとして，次の ① 〜 ④ のうちから適切なものを一つ選べ． $\boxed{\textbf{2}}$

① $E(d_{ih})Z_{hg}e_{gj}+f_{ij}$　② $d_{ih}E(Z_{hg})e_{gj}+f_{ij}$

③ $d_{ih}Z_{hg}E(e_{gj})+f_{ij}$　④ $d_{ih}Z_{hg}e_{gj}+E(f_{ij})$

問 3 確率ベクトル $\boldsymbol{X}$ の平均が $E(\boldsymbol{X})=(1,2,3)'$，共分散行列が $V(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{I}_3$ であるとする．また，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&1\\3&2&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

とし，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{b}$ とする．

1. $E(\boldsymbol{Y})$ はいくらか．次の ① 〜 ④ のうちから適切なものを一つ選べ． $\boxed{\textbf{3}}$

   ① $(17,6,11)'$　② $(14,4,10)'$　③ $(3,2,1)'$　④ $(9,2,3)'$

2. $V(\boldsymbol{Y})$ はいくらか．次の ① 〜 ④ のうちから適切なものを一つ選べ． $\boxed{\textbf{4}}$

   ① $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix}12&8&8\\8&4&4\\8&4&12\end{pmatrix}$

   ③ $\begin{pmatrix}14&10&4\\10&2&4\\4&4&14\end{pmatrix}$　④ $\begin{pmatrix}14&4&10\\4&2&4\\10&4&14\end{pmatrix}$