計算機方式論

第5章データ形式
－固定小数点表現

データ形式

◆計算機が直接処理するデータのレベル
①ビット(bit)
②ディジット(digit)
③文字(character)
④語(word)

①ビット(bit)

◆0か1かの情報量しかもたない最小のデータ単位。
Binary Digit の略

②ディジット(digit)

◆0～9の10進数1桁を表わすデータ。
◆1桁を表わすためには、最低4ビット必要。

コードの種類		2進化10進符号	2.4.2.1符号	5.4.2.1符号	3余り符号	5者択2符号		2-5進符号
重み		8421	2421	5421	非重み付き符号			5043210
10進数	0	0000	0000	0000	0011	00110	11000	0100001
	1	0001	0001	0001	0100	00011	00011	0100010
	2	0010	0010	0010	0101	00101	00101	0100100
	3	0011	0011	0011	0110	01001	00110	0101000
	4	0100	0100	0100	0111	01010	01001	0110000
	5	0101	1011	1000	1000	01100	01010	1000001
	6	0110	1100	1001	1001	10001	01100	1000010
	7	0111	1101	1010	1010	10010	10001	1000100
	8	1000	1110	1011	1011	10100	10010	1001000
	9	1001	1111	1100	1100	11000	10100	1010000

BCD　自己補数化性

③文字(character)

- アルファベット、カナ文字など**1文字**を表現するデータ
  - 通常6～8ビット
  - 漢字などでは2文字分で漢字1文字を表現
  - 8ビットで1文字を表現する計算機では、**バイト**(byte)とよぶ。

5

④語(word)

- 複数の文字を含み、1命令で処理されるデータの単位。
- 語の長さは、計算機によって様々であるが、8、16、18、24、32、36、48、60、64 ビットが多い。

6

データの種類

- **数値**
  - 固定小数点　1語
    - 整数
    - 小数
  - 浮動小数点（実数）　1～2語
- **文字**　1バイト, 4文字/語（32ビット）

7

数値の表現

- 符号無しr進数表現（r進数表現）
  - 整数部n桁、小数部m桁のr進数

X	x_{n-1}	・・・・・	x_1	x_0	x_{-1}	x_{-2}	・・・・・	x_{-m}

・← 小数点

r進数1桁: 2進数なら1ビット、10進数なら1ディジット

簡単に、X = $x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0.x_{-1}\cdots x_{-m}$ と書く。

この表現Xの値N

$$N = x_{n-1}r^{n-1} + \cdots + x_1r^1 + x_0r^0 + x_{-1}r^{-1} + x_{-2}r^{-2} + \cdots + x_{-m}r^{-m}$$

ただし、$0 \leqq x_k < r$

$(X)_r$

値Nを$(X)_r$と書くことにする。

rを**基数**(radix)よび、r=2ならば、2進数表現、

r=10ならば、10進数表現とよぶ。Nは通常、10進数値である。

8

数値の表現例

◆ 整数部4桁、小数部3桁の**2進数表示**とその値。

(a) 0110.101　$0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0+1\times2^{-1}+0\times2^{-2}+1\times2^{-3}$
$= 4+2+0.5+0.125 = 6.625$
簡単に、$(0110.101)_2 = 6.625$

(b) 1001.010　$1\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+1\times2^0+0\times2^{-1}+1\times2^{-2}+0\times2^{-3}$
$= 8+1+0.25 = 9.25$
$(1001.010)_2 = 9.25$

◆ 整数部3桁、小数部2桁の**10進数表示**とその値。

480.56　$4\times10^2+8\times10^1+0\times10^0+5\times10^{-1}+6\times10^{-2}$
$= 400+80+0+0.5+0.06 = 480.56$
従って、$(480.56)_{10} = 480.56$ である。

9

補数

◆n+m桁の**r進数**Xの値 $N(=(X)_r)$に対して、

Nの(r−1)**の補数** $\bar{\bar{N}} = (r^n - r^{-m}) - N$ この値の**r進数**表現を$\bar{\bar{X}}$と書く
すなわち、$\bar{\bar{N}} = (\bar{\bar{X}})_r$

Nのr**の補数** $N = r^n - N$ この値の**r進数**表現をXと書く
すなわち、$N = (X)_r$

このとき、次の関係が成立。

$N = \bar{\bar{N}} + r^{-m}$　**rの補数**は(r−1)**の補数**の**末桁に1**を加えたもの
$(X)_r = (\bar{\bar{X}})_r + r^{-m}$

$\overline{(N)} = N$　**rの補数**の**rの補数**は元の数

$\overline{(\bar{\bar{N}})} = N$　(r−1)**の補数**の(r−1)**の補数**は元の数

10

補数の補数

◆ $\overline{(N)} = N$を証明。ここで、$\bar{N} = (r^n - N)$

$\overline{(N)} = r^n - \bar{N} = r^n - (r^n - N) = N$

◆ $\overline{(\bar{\bar{N}})} = N$を証明。ここで、$\bar{\bar{N}} = (r^n - r^{-m}) - N$

$$\overline{(\bar{\bar{N}})} = (r^n - r^{-m}) - \bar{\bar{N}} = (r^n - r^{-m}) - \left((r^n - r^{-m}) - N\right) = N$$

11

Nとその(r−1)の補数との関係

◆ n+m桁の**r進数**Xの値 Nに対して、 $N + \bar{\bar{N}} = (r^n - r^{-m})$

	値N	X		x_{n-1}	…	x_0	x_{-1}	…	x_{-m+1}	x_{-m}
+	$\bar{\bar{N}}$	$\bar{\bar{X}}$		$r-1-x_{n-1}$	…	$r-1-x_0$	$r-1-x_{-1}$	…	$r-1-x_{-m+1}$	$r-1-x_{-m}$
	$r^n - r^{-m}$			$r-1$	…	$r-1$	$r-1$	…	$r-1$	$r-1$
−	r^{-m}			0	…	0	0	…	0	1
	r^n		1	0	…	0	0	…	0	0

◆ **基数**2のとき、Nの**1の補数**の各桁は、1-(N**の桁**)なので**1-0反転**

12

Nとそのrの補数との関係

◆ n+m桁のr進数Xの値 Nに対して、 $N = \bar{\bar{N}} + r^{-m}$

値N	X		x_{n-1}	…	x_0	x_{-1}	…	x_{-m+1}	x_{-m}
$\bar{\bar{N}}$	$\bar{\bar{X}}$		$r-1-x_{n-1}$	…	$r-1-x_0$	$r-1-x_{-1}$	…	$r-1-x_{-m+1}$	$r-1-x_{-m}$
+ r^{-m}			0	…	0	0	…	0	1
$\bar{N}$	$\bar{X}$	?	?	…	?	?	…	?	$r-x_{-m}$

x_{-m}=0のとき、rとなり、桁上

◆ 2の補数は、1の補数の末桁に1を加えたもの！

2進数とその補数の例

〔例〕整数部4桁、小数部3桁の2進数

0110.101　　値6.625

1の補数$=2^4-2^{-3}-6.625=9.25$

0110.101を1−0反転すると、1001.010で値は9.25。

2の補数$=2^4-6.625=9.375$

1の補数の2進数表現の末桁に1を加えると、

1001.010+0.001より、1001.011で、値は9.375。

1001.010　　値9.25

1の補数$=2^4-2^{-3}-9.25=6.625$

1001.010を1−0反転すると、0110.101で値は6.625。

2の補数$=2^4-9.25=6.75$

1の補数の2進数表現の末桁に1を加えると、

0110.101+0.001より、0110.110で、値は6.75。

10進数とその補数の例

〔例〕整数部3桁、小数部2桁の10進数480.56（値480.56）

9の補数 $= (10^3-10^{-2})-480.56$

$= 999.99-480.56$

$= 519.43$　⇔　480.56

各桁は、9−(元の10進数の桁)

10の補数$= 10^3-480.56$

$= 1000.00-480.56$

$= 519.44$　⇔　519.43+0.01

(Nの9の補数の末桁)に1を加える

基数2の整数型コンピュータの補数

★2進数表現が主流のため、基数は2とする。
小数点は一番右に置くことが多い、すなわち、m=0
(⇒整数形コンピュータ)

n桁の2進数表現Xの値$(X)_2$=Nに対して、

2^{-m} (m=0)

Nの1の補数　$\bar{\bar{N}} = (2^n - 1) - N$

$(X)_2$の1の補数$(\bar{\bar{X}})_2 = (2^n - 1) - (X)_2$

$N+\bar{\bar{N}} = 2^n-1$

$(X)_2+(\bar{\bar{X}})_2 = (\underbrace{11\cdots1}_{n個})_2$

Nの2の補数　$\bar{N} = 2^n - N$

$(X)_2$の2の補数　$(\bar{X})_2 = 2^n - (X)_2$

$\bar{N} = \bar{\bar{N}}+1$

$(\bar{X})_2 = (\bar{\bar{X}})_2 + (0\cdots01)_2$

基数2の補数の例1

〔例〕整数部4桁、小数部0桁の2進数0101(値5)

1の補数= $(2^4-2^0)-5$

$= (16-1)-5$

$=(1111)_2-(0101)_2$

$=(1010)_2$ ⇔ 各桁1−0反転

$= 10$ 値は10、2進数は1010

2の補数= 2^4-5

$= 16-5$

$=(10000)_2-(0101)_2$

$=(1111)_2-(0101)_2+1$

$=(1011)_2$ ⇔ 1の補数+1

$= 11$ 値は11、2進数は1011

17

基数2の補数の例2

〔例〕整数部4桁、小数部0桁の2進数1011(値11)

1の補数= $(2^4-1)-11$

$= (16-1)-11$

$=(1111)_2-(1011)_2$

$=(0100)_2$

$= 4$ 値は4、2進数は0100

2の補数= 2^4-11

$=16-11$

$=(10000)_2-(1011)_2$

$=(1111)_2-(1011_2)+1$

$=(0101)_2$

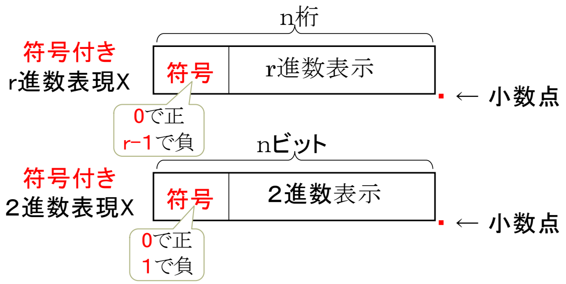
$= 5$ 値は5、2進数は0101

18

負の整数の表現

◆ 数の正負を表わすため、先頭を符号のための1桁とした符号付きr進数表現Xの表す正数・負数を考える。

◆ 2進数表現が主流のため、基数は2とする。
小数点は一番右に置く整数型コンピュータを扱う。



19

正の整数は符号ビット0

◆ 正の整数は、符号ビットが0。
2進数表現 $X = 0x_{n-2}\cdots x_i\cdots x_0.$ の値 $\sum_{i=0}^{n-2} x_i 2^i$ が符号を考慮した2進数の値。

正の符号付き2進数表現 $X = 0\ x_{n-2}\cdots x_0.$

X	000…00	000…01	….	011…10	011…11
符号無し 2進数X の値$(X)_2$	0	1	….	$2^{n-1}-2$	$2^{n-1}-1$
符号を考慮したXの値	0	1	….	$2^{n-1}-2$	$2^{n-1}-1$

20

負の整数は符号ビット1

- 負の整数は、**符号ビット**が1。
  2進数表現 X = $1x_{n-2}\cdots x_0$ がどのような**負の整数**を表すかは、**3通り**の表現法、**符号と絶対値**、**1の補数**、**2の補数**があり、**それらの表す符号を考慮した値**を$(X)_{SM}$、$(X)_{1C}$、$(X)_{2C}$と表記、**正の整数**を表す場合も同じ表記を用いる)。
  負の符号付き2進数表現 X = $1\ x_{n-2}\cdots x_0$.

X	100・・・00	100・・・01	・・・・	111・・・10	111・・・11
符号無し2進数Xの値$(X)_2$	2^{n-1}	$2^{n-1}+1$	・・・・	2^n-2	2^n-1
符号を考慮したXの値 $(X)_{SM}$,$(X)_{1C}$,$(X)_{2C}$	−?	−?	・・・・	−?	−?

どのような負の整数に対応？

21

負の整数の表現-符号と絶対値表現

- **符号ビット**が0なら正、1なら負の整数を表し、
  大きさは下位n−1ビットの2進数$x_{n-2}\cdots x_0$**の値**。
  符号と絶対値による符号を考慮したXの表す値を$(X)_{SM}$と表記。
  正の場合、**2進数**X=$0x_{n-2}\cdots x_0$の値、即ち、$(X)_{SM}=(X)_2$
  負の場合、**2進数**X=$1x_{n-2}\cdots x_0$に対し、$(X)_{SM}=-(x_{n-2}\cdots x_0)_2$
  符号と絶対値による
  負の符号付き2進数Xの値$(X)_{SM}=-\sum_{i=0}^{n-2} x_i 2^i$

X	100・・・00	100・・・01	・・・・	111・・・10	111・・・11
符号無し2進数Xの値$(X)_2$	2^{n-1}	$2^{n-1}+1$	・・・・	2^n-2	2^n-1
符号を考慮したXの値$(X)_{SM}$	−0	−1	・・・・	$-(2^{n-1}-2)$	$-(2^{n-1}-1)$

+0と−0の**2つのゼロ**がある

22

負の整数の表現-符号と絶対値表現の例

〔例〕4桁の**符号付き**2進数 X=1101

下位3ビット101の値が5なので、
−5を表す

4ビット

X | 1 | 1 0 1 |

23

負の整数の表現-1の補数表現

- **符号付き2進数表現Xの符号ビット**が0なら正、
  1なら負の整数を表し、**1の補数による符号を考慮したXの表す値**を$(X)_{1C}$と表記。
  正の場合、**2進数**X=$0x_{n-2}\cdots x_0$ の値、即ち、$(X)_{1C}=(X)_2$
  負の場合、**2進数**X=$1x_{n-2}\cdots x_0$ の**1の補数の値**を**負**としたもの。 $(X)_{1C}=-(\overline{\overline{X}})_2=-(0x_{n-2}\cdots x_0)_2$ ここで,$x_i=1-x_i$
  1の補数による負の符号付き
  2進数Xの値 $(X)_{1C}=-\sum_{i=0}^{n-2} x_i 2^i=-2^{n-1}+1+\sum_{i=0}^{n-2} x_i 2^i$

X	100・・・00	100・・・01	・・・・	111・・・10	111・・・11
$(X)_2$	2^{n-1}	$2^{n-1}+1$	・・・・	2^n-2	2^n-1
$(X)_{1C}$	$-(2^{n-1}-1)$	$-(2^{n-1}-2)$	・・・・	−1	−0

+0と−0の**2つのゼロ**がある

24

負数の表現-1の補数表現の例

〔例〕4桁の符号付き2進数 X=1101

Xの値が13なので、その1の補数$2^4-1-13=2$

または、$(\overline{1101})_2=(0010)_2=2$

従って、−2を表す。

$$X\ \overbrace{\boxed{1 \mid 1\ 0\ 1}}^{\text{4ビット}}$$

負の整数の表現-2の補数表現

◆ 符号付き2進数表現Xの符号ビットが0なら正、
1なら負の整数を表し、2の補数による符号を考慮したXの表す値を$(X)_{2C}$と表記。
正の場合、2進数$X=0x_{n-2}\cdots x_0$ の値、即ち、$(X)_{2C}=(X)_2$
負の場合、2進数$X=1x_{n-2}\cdots x_0$ の2の補数の値を負としたもの。$(X)_{2C}=-(X)_2=-(0x_{n-2}\cdots x_0+1)_2$ ここで,$x_i=1-x_i$

2の補数による負の符号付き
2進数Xの値 $(X)_{2C}=-\left(\sum_{i=0}^{n-2}\bar{x}_i 2^i+1\right)=-2^{n-1}+\sum_{i=0}^{n-2}x_i 2^i$

X	100・・・00	100・・・01	・・・・	111・・・10	111・・・11
$(X)_2$	2^{n-1}	$2^{n-1}+1$	・・・・	2^n-2	2^n-1
$(X)_{2C}$	-2^{n-1}	$-(2^{n-1}-1)$	・・・・	-2	-1

負数の表現-2の補数表現の例

〔例〕4桁の符号付き2進数 X=1101

Xの値が13なので、その2の補数$2^4-13=3$

または、$(\overline{1101})_2=(0011)_2=3$

従って、−3を表す。

$$X\ \overbrace{\boxed{1 \mid 1\ 0\ 1}}^{\text{4ビット}}$$

負数の表現-まとめ

◆nビットの2進数表現で負の整数を表す場合、

①符号と絶対値表現では、
表す値の範囲は、$-(2^{n-1}-1)$〜$(2^{n-1}-1)$。
$+0=(00\cdots0)_2$と$-0=(10\cdots0)_2$の2つのゼロがある。

②1の補数表現では、
表す値の範囲は、$-(2^{n-1}-1)$〜$(2^{n-1}-1)$。
$+0=(00\cdots0)_2$と$-0=(11\cdots1)_2$の2つのゼロがある。

③2の補数表現では、
表す値の範囲は、$\underset{=(10\cdots0)_2}{-2^{n-1}}$〜$\underset{=(01\cdots1)_2}{(2^{n-1}-1)}$。
ゼロの表現は1個$(00\cdots0)_2$。

２進数4ビット（n=4,m=0）の表す整数値

10進数	符号と絶対値	1の補数	2の補数
7	0 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1
6	0 1 1 0	0 1 1 0	0 1 1 0
5	0 1 0 1	0 1 0 1	0 1 0 1
4	0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 0
3	0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1
2	0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0
1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 0
+0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
−0	1 0 0 0	1 1 1 1	− − − −
−1	1 0 0 1	1 1 1 0	1 1 1 1
−2	1 0 1 0	1 1 0 1	1 1 1 0
−3	1 0 1 1	1 1 0 0	1 1 0 1
−4	1 1 0 0	1 0 1 1	1 1 0 0
−5	1 1 0 1	1 0 1 0	1 0 1 1
−6	1 1 1 0	1 0 0 1	1 0 1 0
−7	1 1 1 1	1 0 0 0	1 0 0 1
−8	− − − −	− − − −	1 0 0 0

29