統計学2及び演習

第1種の誤り，第2種の誤り，検出力

創域理工学部
Faculty of Science and Technology

東京理科大学
創域理工学部情報計算科学科
安藤宗司

2023年4月19日

Contents

- 仮説検定の誤り
  - 第1種の誤り
  - 第2種の誤り
- 検定の大きさ
  - 有意水準
- 検出力関数
  - 検出力

仮説検定には誤りが存在する

- 帰無仮説のもとで5%未満の確率でしか起きない事象は偶然ではないと考えて有意水準を設定
- 裏を返せば，帰無仮説のもとでも，5%未満の確率で生じる事象ということになる
- 第1種の過誤
  - 帰無仮説が正しいときに，誤って帰無仮説を棄却する誤り
  - 第1種の誤りを起こす確率を第1種の過誤確率という

		検定結果	
		帰無仮説が正しいと判断	対立仮説が正しいと判断
真実	帰無仮説が正しい	正しい	第1種の誤り
	対立仮説が正しい	第2種の誤り	正しい

2種類の誤り確率

- 仮説検定では，第1種の誤りと第2種の誤りが存在

- 有意水準を設定することで第1種の過誤確率を制御している

- 第2種の過誤確率はどのように制御するのか？

いかさまコインであると仮定

- これまでは，帰無仮説（いかさまコインではない）が成り立つと仮定して議論してきた
- いかさまコインであると仮定して，表が出る回数の確率を求める

- 検出力
  - 対立仮説が正しいとき，対立仮説が正しいと判断する確率
  - $1-$ 第2種の過誤確率

表が出る確率が70%のいかさまコイン

いかさまコインではない場合

表の回数	確率
0	0.1%
1	0.98%
2	4.39%
3	11.72%
4	20.51%
5	24.51%
6	20.51%
7	11.72%
8	4.39%
9	0.98%
10	0.1%

第1種の過誤確率（0〜1回）

第1種の過誤確率（9〜10回）

いかさまコインの場合

表の回数	確率
0	0.0006%
1	0.01%
2	0.15%
3	0.90%
4	3.68%
5	10.29%
6	20.01%
7	26.68%
8	23.35%
9	12.11%
10	2.82%

検出力（無視可能）

第2種の過誤確率

検出力

表が出る確率が80%のいかさまコイン

いかさまコインではない場合

表の回数	確率
0	0.1%
1	0.98%
2	4.39%
3	11.72%
4	20.51%
5	24.51%
6	20.51%
7	11.72%
8	4.39%
9	0.98%
10	0.1%

いかさまコインの場合

表の回数	確率
0	1.024e-05%
1	0.0004%
2	0.007%
3	0.08%
4	0.55%
5	2.64%
6	8.81%
7	20.13%
8	30.20%
9	26.84%
10	10.74%

表が出る確率が90%のいかさまコイン

いかさまコインではない場合

表の回数	確率
0	0.1%
1	0.98%
2	4.39%
3	11.72%
4	20.51%
5	24.51%
6	20.51%
7	11.72%
8	4.39%
9	0.98%
10	0.1%

いかさまコインの場合

表の回数	確率
0	1.024e-05%
1	9e-07%
2	3.645e-05%
3	0.0009%
4	0.01%
5	0.15%
6	1.12%
7	5.74%
8	19.37%
9	38.74%
10	34.87%

12回コインを投げた結果

いかさまコインではない場合

表の回数	確率
0	0.02%
1	0.29%
2	1.61%
3	5.37%
4	12.08%
5	19.34%
6	22.56%
7	19.34%
8	12.08%
9	5.37%
10	1.61%
11	0.29%
12	0.02%

表が出る確率が**80%**のいかさまコインの場合

表の回数	確率
0	4.096e-07%
1	1.96608e-05%
2	0.0004%
3	0.006%
4	0.05%
5	0.33%
6	1.55%
7	5.32%
8	13.29%
9	23.62%
10	28.34%
11	20.62%
12	6.87%

検出力の特徴

- 帰無仮説からの乖離の程度に依存する
  - コインのいかさまの程度（表の出る確率）に依存する

表の出る確率	検出力
70%	14.93%
80%	37.58%
90%	73.61%

- サンプルサイズ N に依存する

コイン投げの回数	表の出る確率	検出力
10	80%	37.58%
12	80%	55.83%

検定結果の解釈

- 10回コインを投げた結果
  - 表の回数が1以下，または9回以上の場合
    - 統計学的に有意と判定
    - 帰無仮説を棄却して，対立仮説を採択する
    - 「表が出る確率 π は1/2 ではない」と判断する
  - 表の回数が2以上，または8回以下の場合
    - 統計学的に有意でないと判定
    - 帰無仮説を採択する
    - 「表が出る確率 π は1/2 ではない」とはいえないと判断する

「表が出る確率 π は1/2 である」とは判断できないことに注意！

統計的仮説検定の一般論

- 仮説の選択
  - 標本の実現値$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$が棄却域Wに属するか否か

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W \text{ならば帰無仮説を棄却する}$$

- 棄却域Wをどのように構成するかが重要

- 第1種の誤り確率
  - 棄却域Wが与えられたもとで，標本を用いることにより，$\theta_0 \in \Theta_0$に対して，次のように計算できる

$$P_{\theta_0}\left((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W\right)$$

2種類の誤り確率

- 第1種の誤り確率
  - 棄却域Wが与えられたもとで，標本を用いることにより，$\theta_0 \in \Theta_0$に対して，次のように計算できる

$$P_{\theta_0}\left((X_1, X_2, \dots, X_n) \in W\right)$$

- 第2種の誤り確率
  - 棄却域Wが与えられたもとで，標本を用いることにより，$\theta_1 \in \Theta_1$に対して，次のように計算できる

$$P_{\theta_1}\left((X_1, X_2, \dots, X_n) \notin W\right)$$

誤り確率の最小化問題

- 理想
  - 第1種と第2種の誤り確率がともに小さくなる
  - これは可能か？

- 現実
  - 第1種と第2種の誤り確率には
    片方の確率を小さくするともう片方が大きくなる
    という関係性がある
  - 両方を同時に小さくすることはできない

誤り確率の制御

- 第1種の過誤確率
  - 検定の大きさ $\sup_{\theta_0 \in \Theta_0} P_{\theta_0}\left((X_1, X_2, \dots, X_n) \in W\right)$
  - 検定の大きさがα $(0 \le \alpha \le 1)$より小さい検定を，有意水準(significance level) αの検定という

$$\sup_{\theta_0 \in \Theta_0} P_{\theta_0}\left((X_1, X_2, \dots, X_n) \in W\right) \le \alpha$$

この式を満たすようにWを定める

- 第2種の過誤確率
  - 検定の段階では制御していない
  - どのように制御するのか？
  - 興味がある方は，3年後期の「データ解析」を受講

正当性

- 医薬品開発の例
  - 開発中の候補物質（新薬）のプラセボに対する優越性を評価
  - 帰無仮説「新薬とプラセボの効果は同じ」
  - 対立仮説「新薬はプラセボより効果がある」
- 第1種の誤りを起こした場合
  - 新薬に効果がないにも関わらず，効果があると判断する
  - 効果がない薬を多くの患者に投与するため，影響大
- 第2種の誤りを起こした場合
  - 新薬に効果があるにも関わらず，効果がないと判断する
  - 効果がある薬を患者に投与できない
  - 開発した製薬企業，新薬を待っている患者に影響大

検出力関数

- 任意の$\theta \in \Theta$に対して，次式を検出力関数という

$$\beta_W(\theta) = P_\theta\left((X_1, X_2, \dots, X_n) \in W\right)$$

- 第1種の過誤確率
  - $\theta_0 \in \Theta_0$に対して

$$\beta_W(\theta_0) = P_{\theta_0}\left((X_1, X_2, \dots, X_n) \in W\right)$$

- 検出力
  - $\theta_1 \in \Theta_1$に対して，次式をθ_1に対する検出力という

$$\beta_W(\theta_1) = P_{\theta_1}\left((X_1, X_2, \dots, X_n) \in W\right) = 1 - \underbrace{P_{\theta_1}\left((X_1, X_2, \dots, X_n) \notin W\right)}_{\text{第2種の過誤確率}}$$

統計的仮説検定の手順

- Step1
  - 帰無仮説と対立仮説を設定し，有意水準を定める
  - 慣例的には， $\alpha = 0.05$を用いることが多い
- Step2
  - 検定統計量$T = t(X_1, X_2, \dots, X_n)$を定める
- Step3
  - 棄却域$W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid t(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R\}$を求める
- Step4
  - 検定統計量Tの実現値$t^* = t(x_1, x_2, \dots, x_n)$
  - $t^* \in R$ならば帰無仮説を棄却， $t^* \notin R$ならば帰無仮説を採択

検定結果の解釈

- 帰無仮説を棄却し，対立仮説を支持
  - この判断が間違っている確率はα以下であることを保証

- 帰無仮説を採択し，帰無仮説を支持
  - この判断が間違っている確率は制御されていない
  - 積極的に帰無仮説が正しいことを主張することは危険
  - 帰無仮説が正しいことを主張するには,
データ収集前にサンプルサイズ設計を行い
第2種の過誤確率を制御する必要がある