複雑さの理論 中間テスト練習問題

問 1

2 階微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

(ただし，$x \in \mathbb{C}, \omega$ は定数) について, 以下の問に答えよ.

(1)

$$x = C_0 \exp(\mathrm{i}\omega t) + C_1 \exp(-\mathrm{i}\omega t), \quad C_0, C_1 \in \mathbb{C} \text{ は任意定数}$$

としたとき，x が一般解となることを示せ.

(2) 次の初期条件

$$t = 0 \text{ のとき } x = a\cos\phi, \quad \frac{dx}{dt} = -a\omega\sin\phi$$

(ただし a, ϕ は定数) を与えたとき，任意定数を含まない解を求めよ.

問 2

微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = 0$$

の 2 つの解 x_1, x_2 と，そのロンスキー行列式 $W(x_1, x_2)$

$$W(x_1, x_2) \equiv x_1 x_2' - x_1' x_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}$$

について，次が成り立つことを示せ.

(1) $W' + pW = 0$

(2) x_1, x_2 が 1 次従属ならば $W(x_1, x_2) = 0$

ただし，x_1, x_2 が 1 次独立であるとは，C_1, C_2 を定数として $C_1 x_1 + C_2 x_2 \neq 0$ が恒等的に成り立つことであり，1 次従属はそうでないことである.

問 3

次の微分方程式を解け. ただし (6) は特解を一つ求めよ.

(1) $\dfrac{dx}{dt} = a - bx$　ただし，a, b は定数.

(2) $(t^2 + tx)\dfrac{dx}{dt} = x^2$　解答は x, t の満たす関係式でよい.

(3) $\dfrac{dx}{dt} = e^{x/t} + \dfrac{x}{t}$

(4) $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{t}x^2 + \dfrac{1}{t}x + t$　ヒント：特解は $x_0 = t$

(5) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} + 3x = e^{2t}$

(6) $\dfrac{d^3x}{dt^3} - \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} - x = t^2 - t + 1$