メディア情報処理 2023
第6回目 フーリエ変換

大村英史

出席登録

今日の予定

- 復習など
  - 複素数正弦波で正弦波
  - スペクトル
- フーリエ変換
  - フーリエ変換のイメージ
  - フーリエ変換とフーリエ逆変換を求める
  - フーリエ級数とフーリエ変換の違い
  - フーリエ変換の例
- 演習・宿題

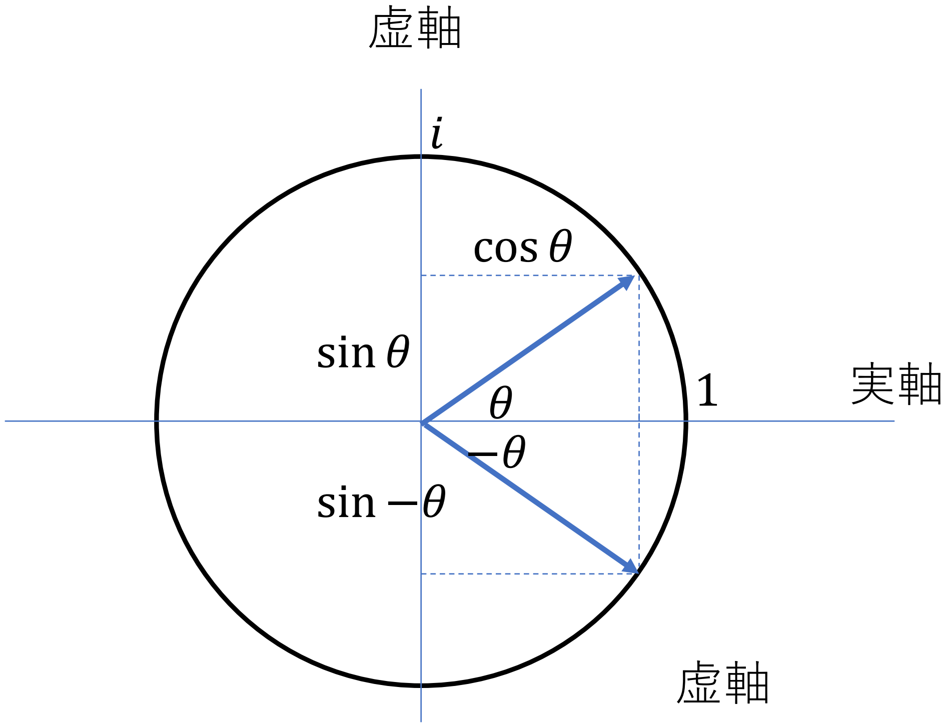
複素正弦波と正弦波

- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

=>実数と虚数

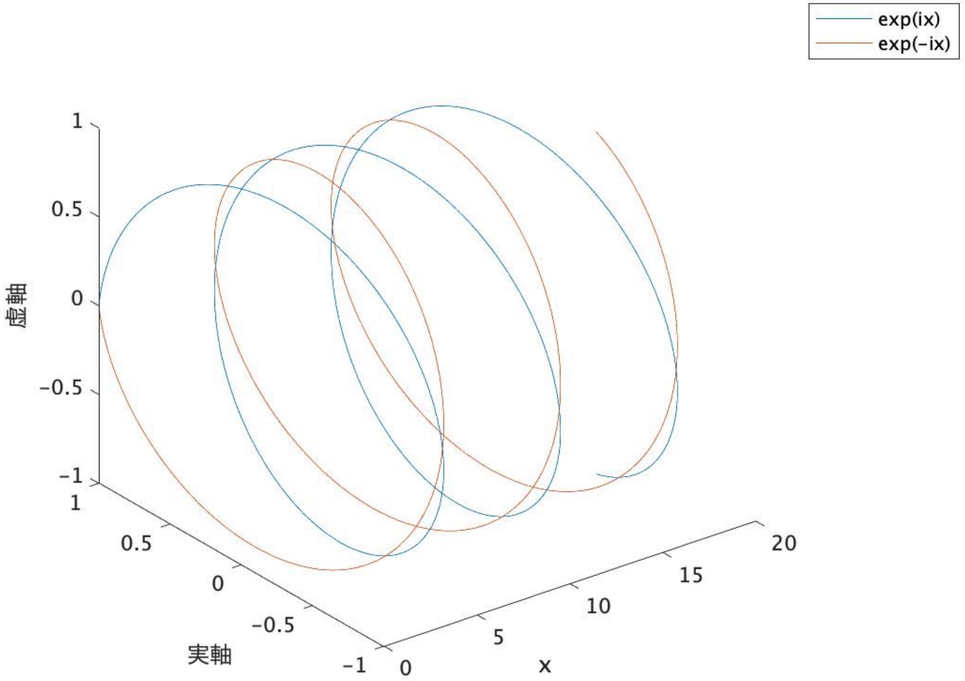
- $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

=> 実数（虚数部分は打ち消し合う）



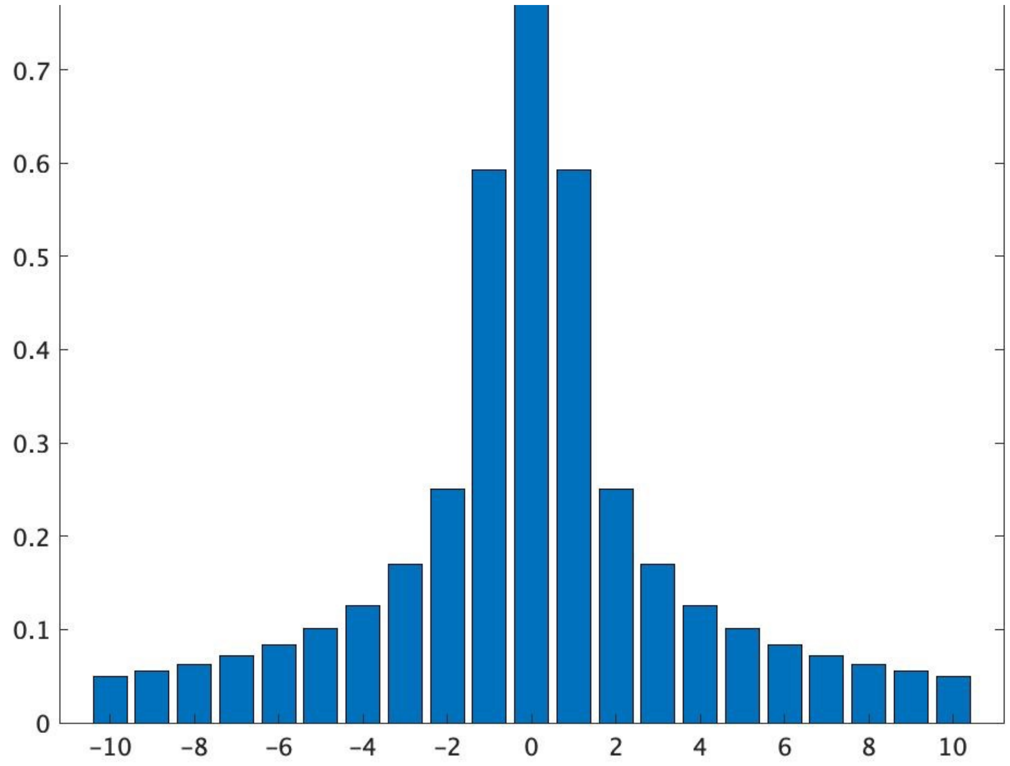
フーリエ級数でも打ち消し合う

- なぜ複素数の足し算なのに虚数部が出てこなかったのか？
- たし合わされて虚数部分を打ち消している
  - $f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{c_k e^{i\omega_0 kt} + c_{-k} e^{-i\omega_0 kt}\right\}$
  - 係数c_kとc_{-k}は虚数
- つまり
  - c_kとc_{-k}は
    - 同じ振幅（絶対値）
    - 逆回転（偏角が逆符号）
  - $|c_k| = |c_{-k}|$
  - $\angle c_k = -\angle c_{-k}$



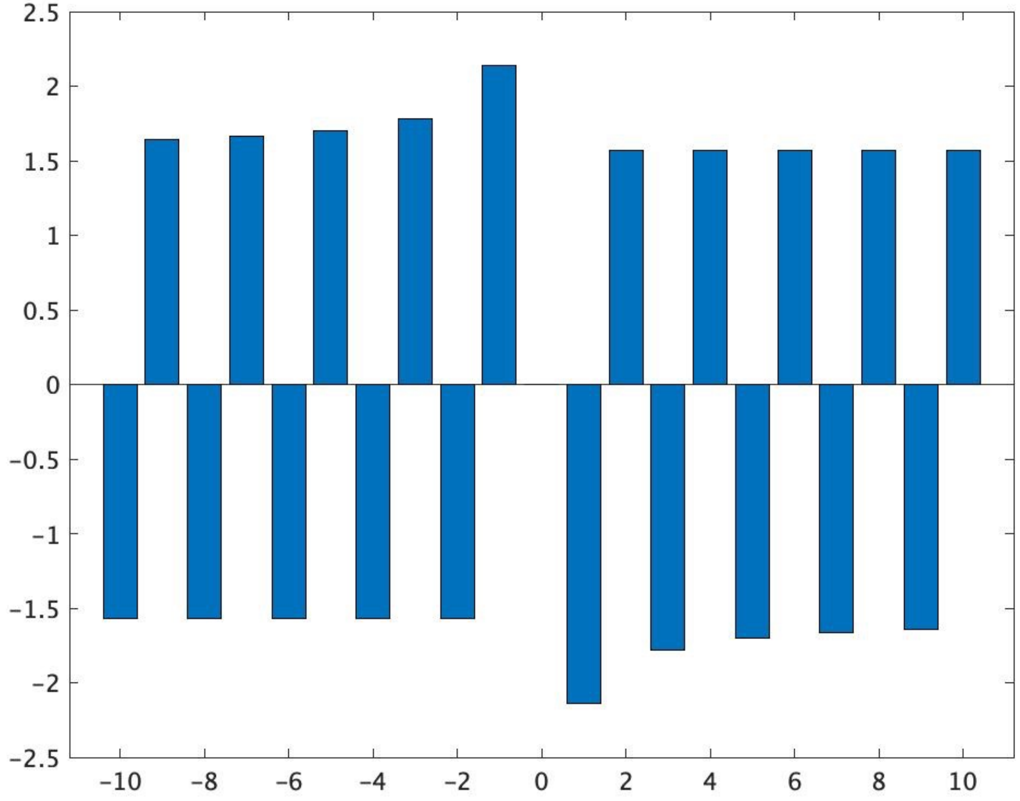
スペクトル

$|c_k|$



振幅スペクトル

$\angle c_k$



偏角スペクトル

さらに $|c_k|^2$ はパワースペクトルと呼ばれる
描いてみよう（bar(x, y);）

整数部分: real(x)
虚数部分：imag(x)
絶対値：abs(x)
偏角：angle(x)

フーリエ変換

いままでは周期関数

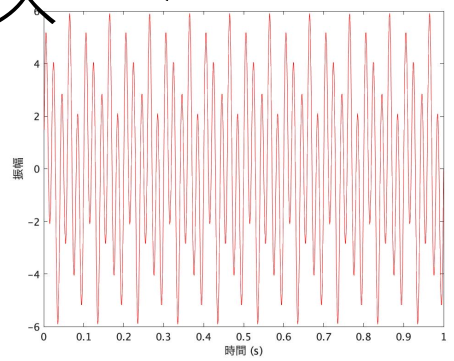
どうやって非周期関数をあつかうのか

フーリエ変換のイメージ

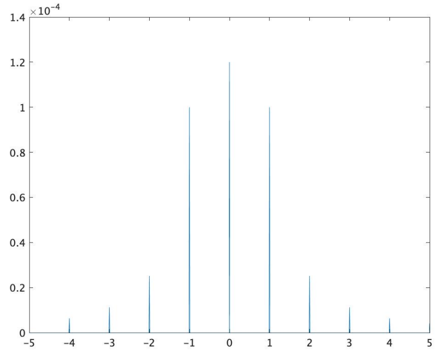
周期関数から非周期関数へ

フーリエ級数（**F**ourier **S**eries）

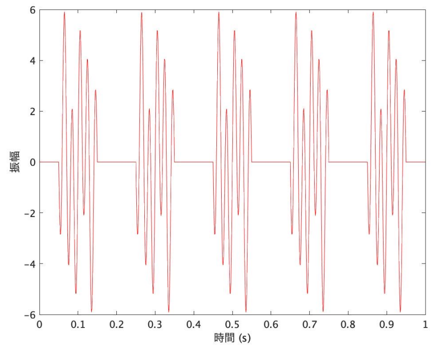
- 周期関数



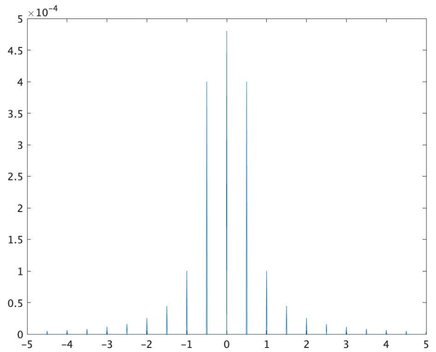
FS



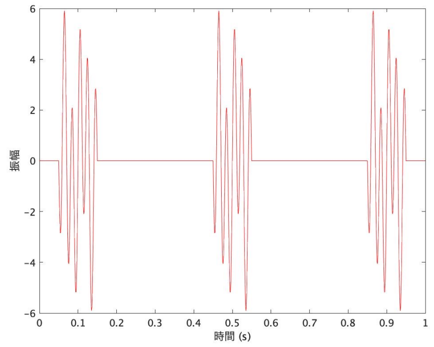
- 空白を追加して周期を2倍にする



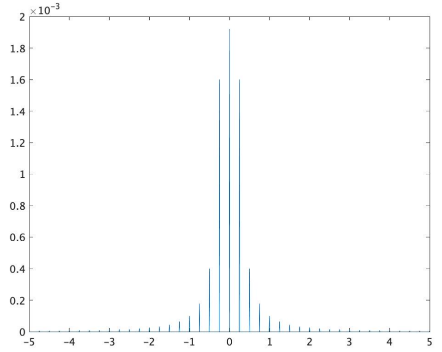
FS



- 4倍にする



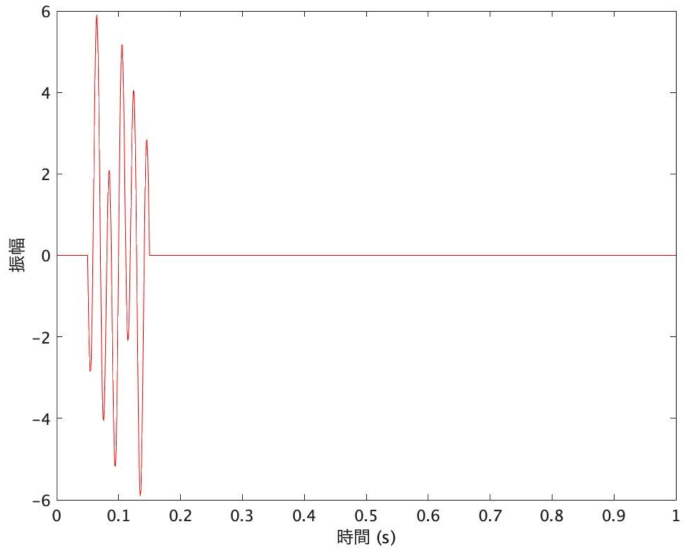
FS



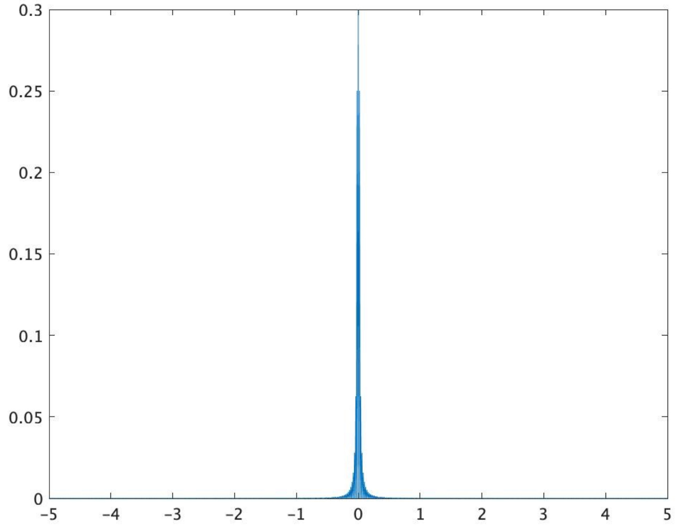
周波数領域の密度が高くなっていく

フーリエ変換のイメージ

無限にするとスペクトルが連続になる？



FS



- あくまでも無限の線ができるだけ
- 無限個は連続ではない．．．

積分の考えを利用する

複素フーリエ級数展開，フーリエ係数

後から見やすいように書き換え

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ c_k \cdot e^{i\omega_0 kt} \right\}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cdot e^{-i\omega_0 kt} dt$$

c_kをF_kに書き換え

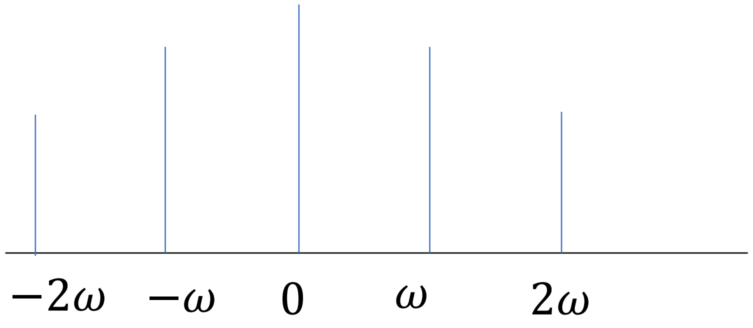
積分区間をずらす（周期T_0は同じ）

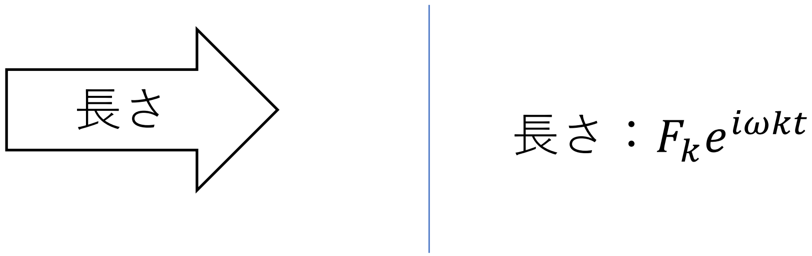
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ F_k \cdot e^{i\omega_0 kt} \right\}$$

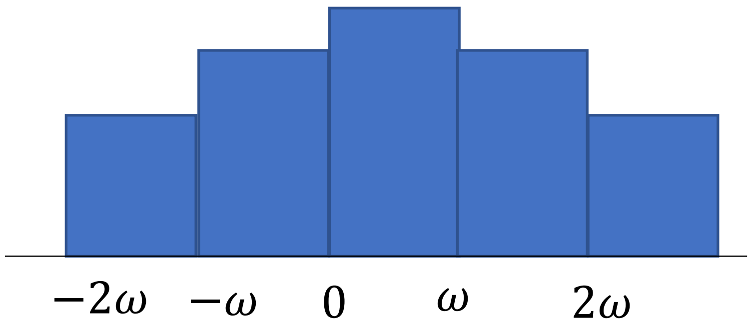
$$F_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cdot e^{-i\omega_0 kt} dt$$

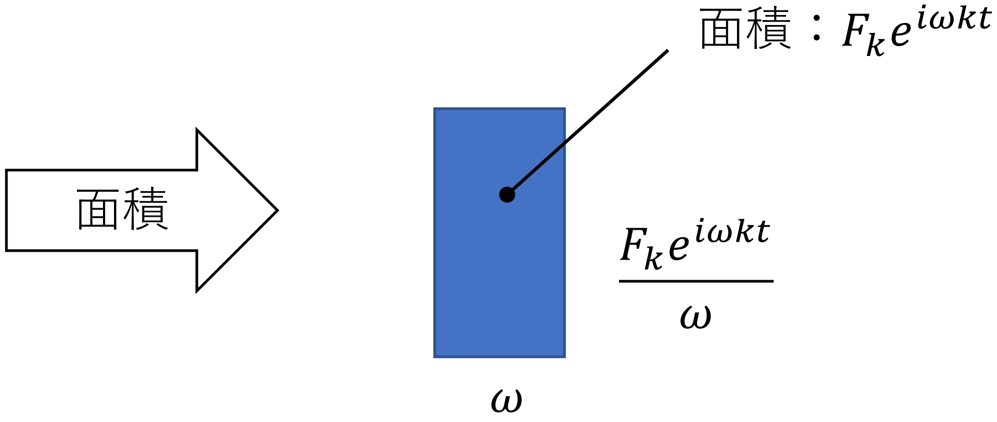
スペクトルを面積として考える

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ F_k \cdot e^{i\omega_0 kt} \right\}$$









$f(t)$に面積の概念を導入

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ F_k \cdot e^{i\omega_0 kt} \right\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 \frac{F_k \cdot e^{i\omega_0 kt}}{\omega_0}$$

面積として考える

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 \frac{2\pi \cdot F_k \cdot e^{i\omega_0 kt}}{\omega_0}$$

後のため$\frac{1}{2\pi}$にを出す

$\omega_0 k$はω_0の整数k倍

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 F(\omega_0 k) e^{i\omega_0 kt}$$

$\frac{2\pi F_k}{\omega_0} = F(\omega_0 k)$ とおく

※ あとで使います

$f(t)$において $T_0 \longrightarrow \infty$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 F(\omega_0 k) e^{i\omega_0 kt}$$

$T_0 \longrightarrow \infty$ なので，　ω_0は微小となるので $\Delta\omega$ と書く

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega_0 k) \cdot e^{i\omega_0 kt} \Delta\omega$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

ω_0は微小なので，$\omega_0 k$はωに連続化する

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

← こいつを「フーリエ逆変換」とよぶ

$F(\omega_0 k)$にF_k（フーリエ係数）を代入

$$F_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cdot e^{-i\omega_0 k t}dt$$

F_kはフーリエ係数c_k

F_kを$\frac{2\pi F_k}{\omega_0} = F(\omega_0 k)$に代入

※さっき
こういう風に置いた

$$F(\omega_0 k) = \frac{2\pi F_k}{\omega_0}$$

$$= \frac{2\pi}{T_0\omega_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cdot e^{-i\omega_0 k t}dt$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$= \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cdot e^{-i\omega_0 k t}dt$$

$F(\omega_0 k)$ においても$T_0 \longrightarrow \infty$

$$F(\omega_0 k) = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cdot e^{-i\omega_0 k t} dt$$

$T_0 \longrightarrow \infty$ なので，$\omega_0 k$はωに連続化する

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

← こいつを
「フーリエ変換」
とよぶ

次のスライドで
まとめます

フーリエ変換とフーリエ逆変換

- フーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

- フーリエ逆変換

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

$\frac{1}{2\pi}$ を出したのでフーリエ変換の係数が1

「級数展開」から「変換」に変わった？

- いつ変わったのか
- 無限に飛ばして連続化したときに変わった
- 周波数が連続になっただけで，基本的には同じ
- 違うのは,
  - 級数展開は，「整数の個数」の無限
  - 変換は，あらゆる実数が含まれる

無限個ある ≠ 連続である

フーリエ変換の他の式（いろいろあるので注意）

- 出さない場合

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

- 両方に負担させる場合

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

フーリエ変換の書き方

- フーリエ変換

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$$

- フーリエ逆変換

$$F(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t)$$

フーリエ変換とフーリエ級数

連続と離散

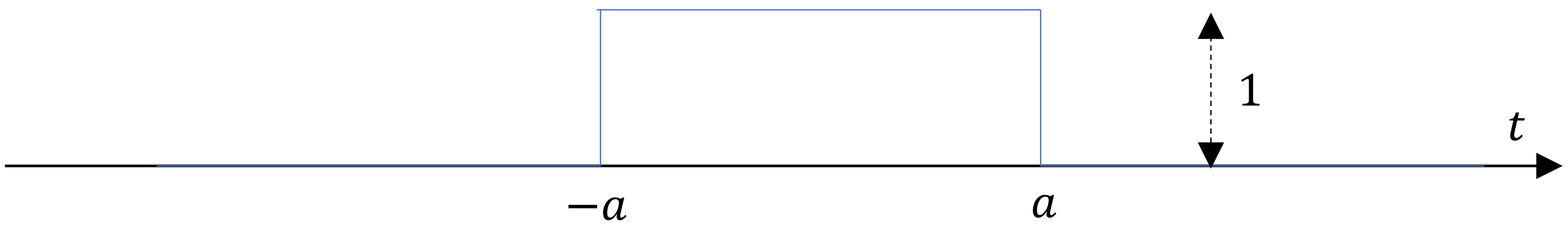
	連続周波数	離散周波数
周波数領域へ	フーリエ変換 周波数の関数に変換	フーリエ係数を求める 整数倍の周波数の係数を求める
時間領域へ	フーリエ逆変換 時間の関数に変換	フーリエ級数展開 整数倍の周波数の関数で表現

- フーリエ変換：連続時間 から 連続周波数 へ変換
- 総和=>積分：足し合わせ=>重ね合わせ
- やってることは変わらない

フーリエ変換の例

矩形関数のフーリエ変換

$$r(t) = \begin{cases} 1 & -a \le t \le a \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



矩形関数のフーリエ変換 ($\omega \neq 0$)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[r(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} r(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{-a} 0 dt + \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t} dt + \int_{a}^{\infty} 0 dt \\
&= \left[\frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} \right]_{-a}^{a} \qquad (\omega \neq 0) \\
&= \frac{1}{i\omega} \left(e^{ia\omega} - e^{-ia\omega} \right) \\
&= \frac{2}{\omega} \cdot \frac{e^{ia\omega} - e^{-ia\omega}}{2i} \\
&= \frac{2}{\omega} \sin a\omega
\end{aligned}
$$

分母が0になるので

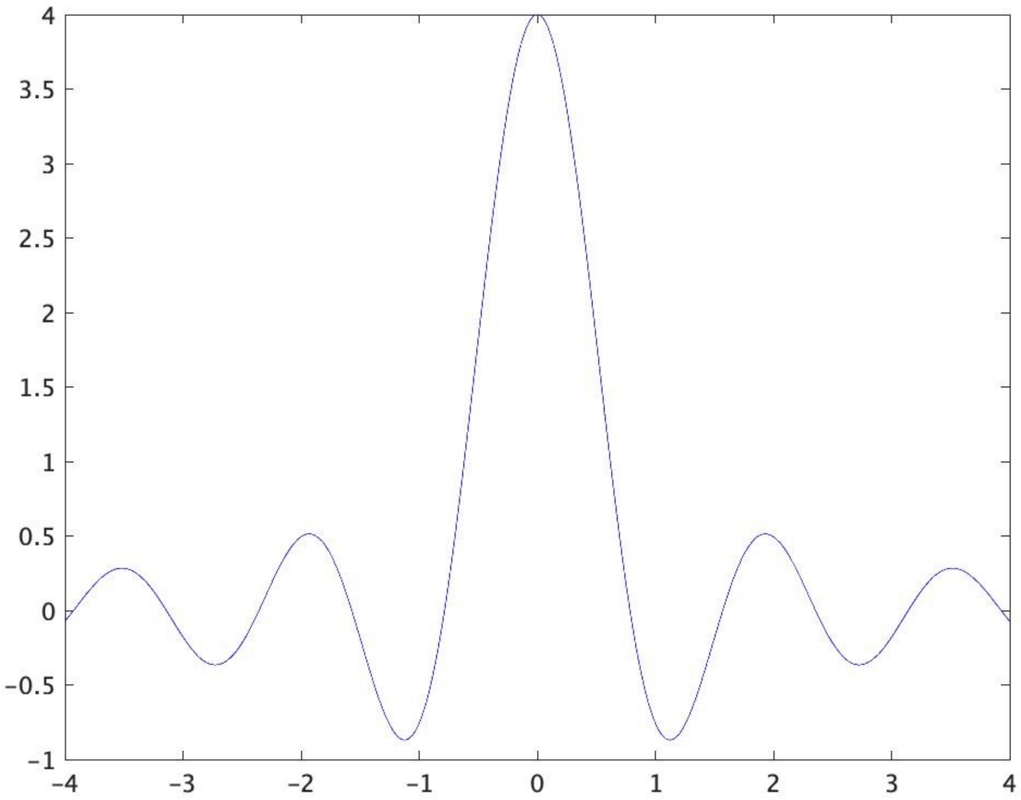
$$
\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}
$$

矩形関数のフーリエ変換 ($\omega = 0$)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[r(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} r(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{-a} 0 dt + \int_{-a}^{a} e^{-i0t} dt + \int_{a}^{\infty} 0 dt \\
&= \int_{-a}^{a} 1 dt \\
&= [t]_{-a}^{a} \\
&= 2a
\end{aligned}
$$

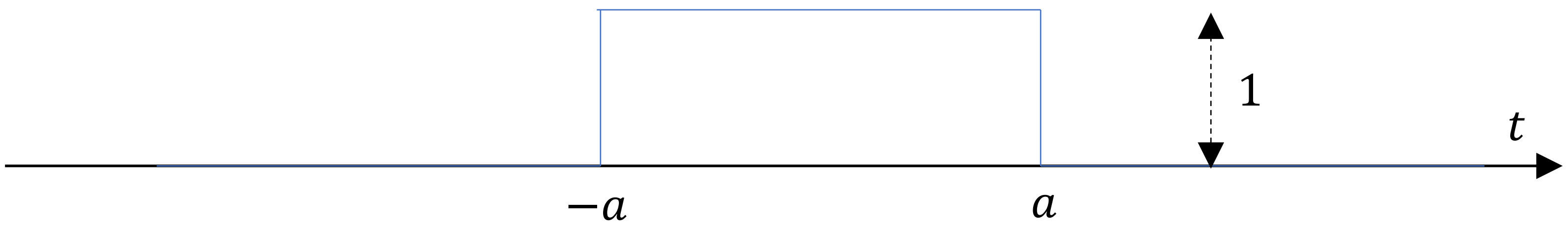
グラフ化 $(a = 2)$：連続している

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin a\omega$$



矩形関数のフーリエ逆変換

$$G(t) = \begin{cases} 1 & -a \leq t \leq a \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



矩形関数のフーリエ逆変換 $(t \neq 0)$

$$\mathcal{F}^{-1}[G(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(t)e^{i\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-a} 0d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{a}^{\infty} 0d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-it}e^{-i\omega t}\right]_{-a}^{a} \qquad (t \neq 0)$$

分母が0になるので

$$= \frac{1}{2\pi it}\left(e^{iat} - e^{-iat}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi t}\cdot\frac{e^{ia\omega} - e^{-ia\omega}}{2i}$$

$$= \frac{1}{\pi t}\sin at$$

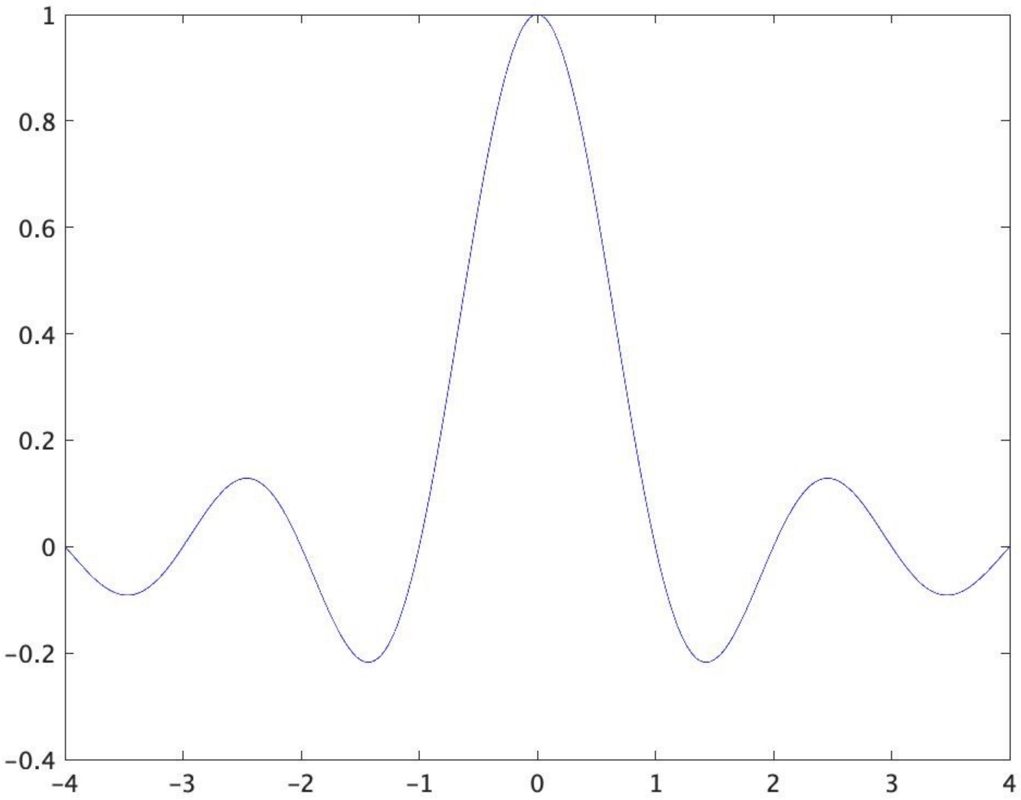
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

矩形関数のフーリエ逆変換 $(t = 0)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[G(t)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(t)e^{i\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-a} 0 d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{-i\omega 0}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{a}^{\infty} 0 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}[\omega]_{-a}^{a} \\
&= \frac{1}{2\pi}(a+a) \\
&= \frac{a}{\pi}
\end{aligned}
$$

グラフ化 ($\boldsymbol{a = \pi}$)：連続している

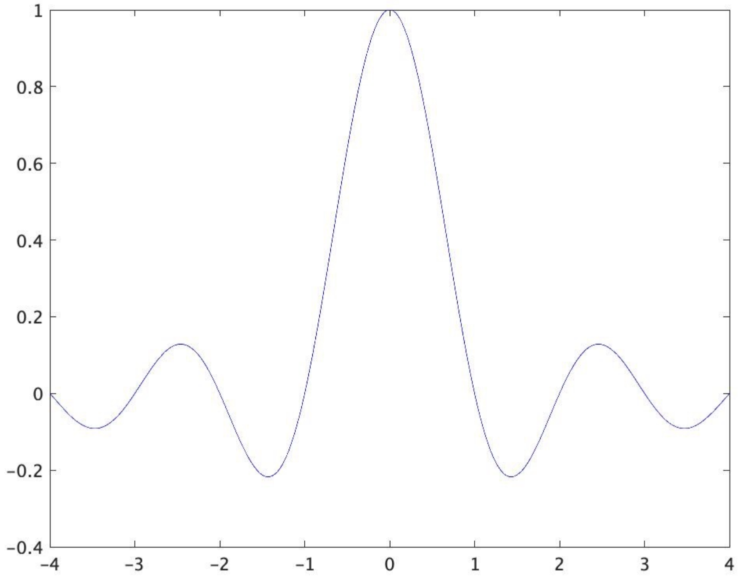
$$f(t) = \frac{1}{\pi t}\sin at$$



sinc関数

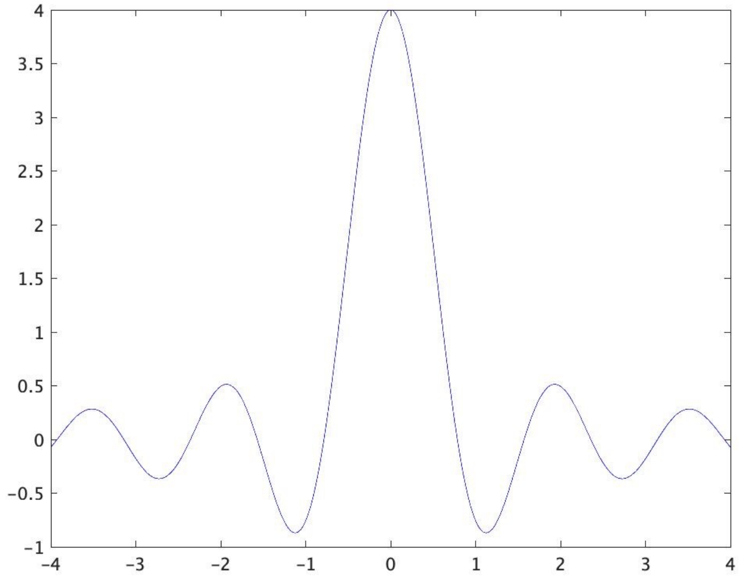
- 信号処理ではよく使います
- X軸が時間か角度か周波数の両方の形を覚えておくとよいでしょう.

$$f(t) = \frac{1}{\pi t} \sin \pi t$$



整数で0

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin 2\omega$$



π /4で 0

まとめ

- スペクトル
  - 振幅スペクトル
  - 偏角スペクトル

- フーリエ変換
  - フーリエ変換のイメージ
  - フーリエ変換とフーリエ逆変換を求める
  - フーリエ級数とフーリエ変換の違い
  - フーリエ変換の例

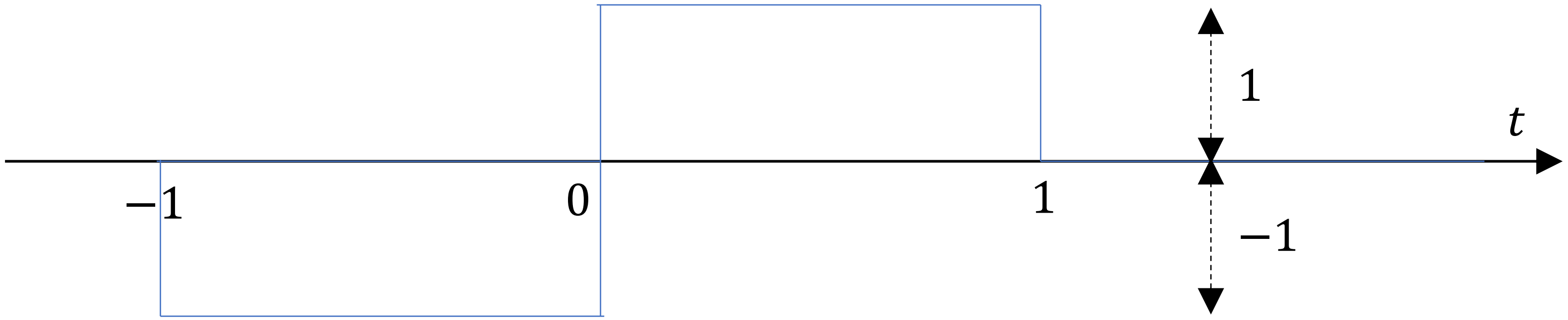
演習・宿題

- 授業で紹介した周期関数のスペクトルを棒グラフで描き，以下を確認しなさい
  - 振幅スペクトル
  - 偏角スペクトル
- 自分で設定した周期関数のスペクトルを棒グラフで描きなさい.

- 授業で紹介した2種類のSinc関数をmatlabで描きなさい
  - ただし組み込みのsinc関数は使わないこと

以下の関数をフーリエ変換しなさい

$$r(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & -1 \leq t < 0 \end{cases}$$



宿題の提出

- 提出物
  - レポート形式 + mファイル
- 提出方法と締切
  - LETUS
  - 10/30 23:59