メディア情報処理 2023
第5回目 フーリエ級数（指数）

大村英史

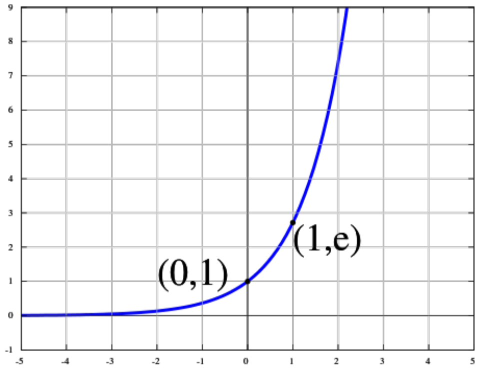
出席登録

今日の予定

- 復習など
  - オイラーの定理
- フーリエ級数（指数）
  - フーリエ係数の求め方
  - 具体例
- 演習・宿題

復習：指数関数

- $f(x) = e^{ax}$



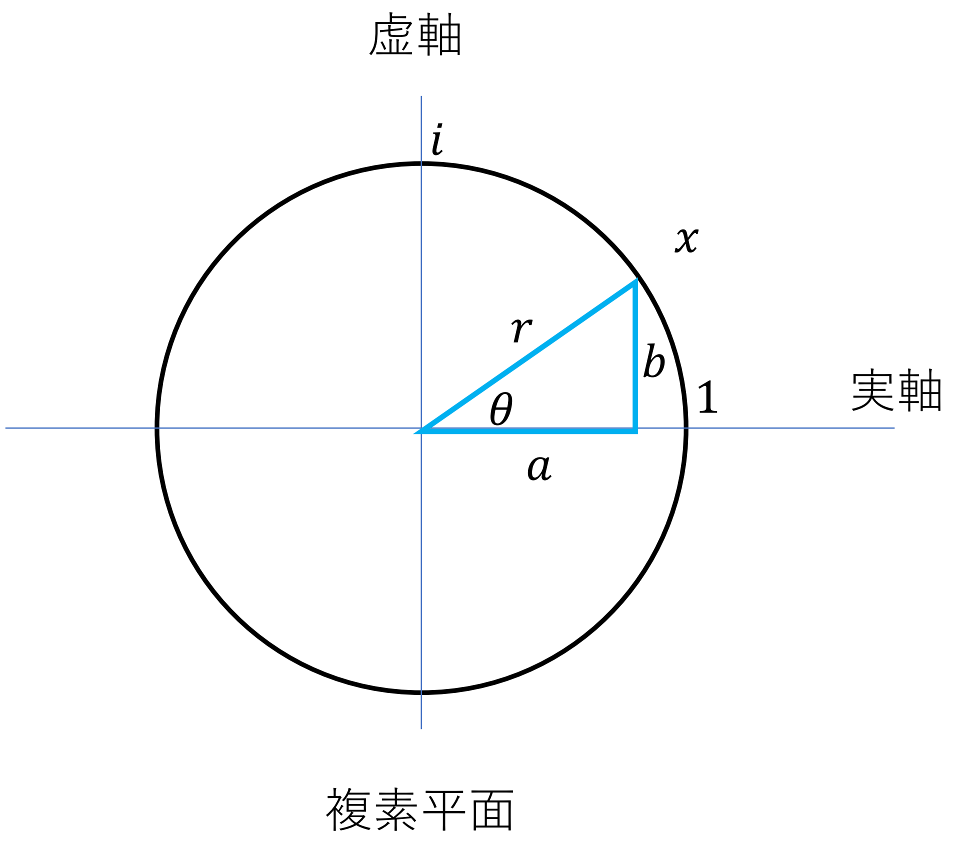
指数関数 $a = 1$

- 指数関数の微分
  - $(e^x)' = e^x$
  - $(e^{ax})' = a \cdot e^{ax}$
  - $\left(\frac{1}{a} e^{ax}\right)' = e^{ax}$
  - $(a^x)' = \left(e^{x \log a}\right)' = a^x \log a$

復習：複素空間の円

- $x(t) = e^{at}$
- aが虚数
- $x(t) = e^{i\theta}$

- オイラーの公式（虚数の指数関数）
- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- $x = a + ib$
- 単位円



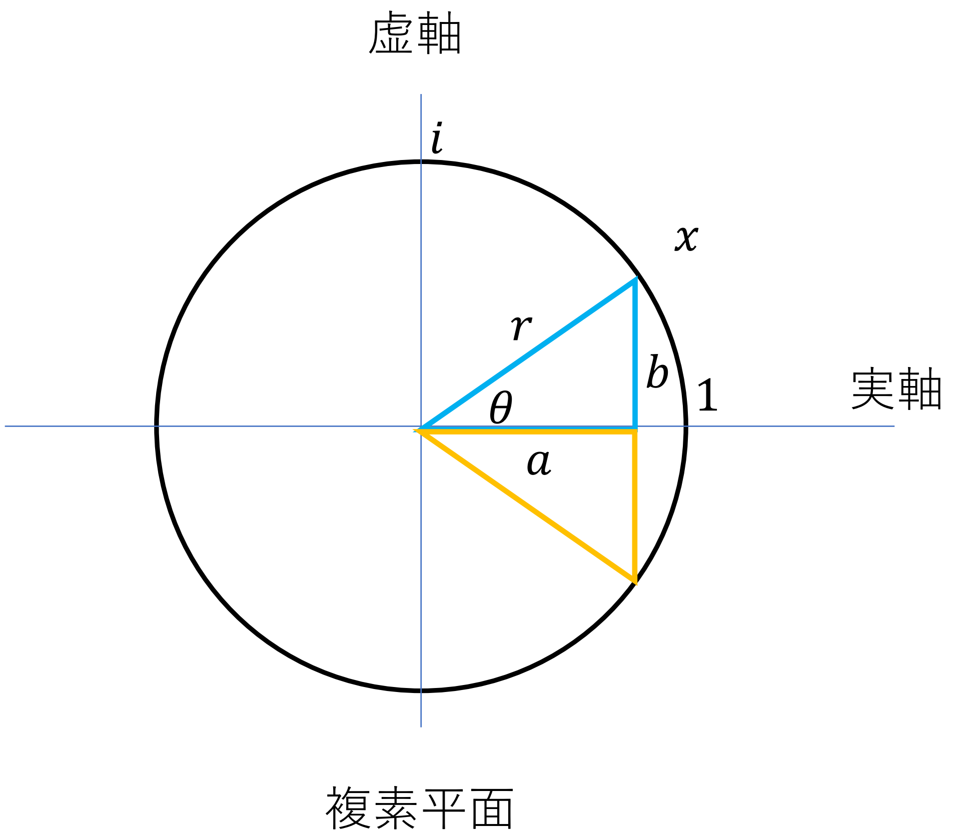
共役複素数

- 実軸に関して対称

$$a + bi$$

に対して

$$a - bi$$



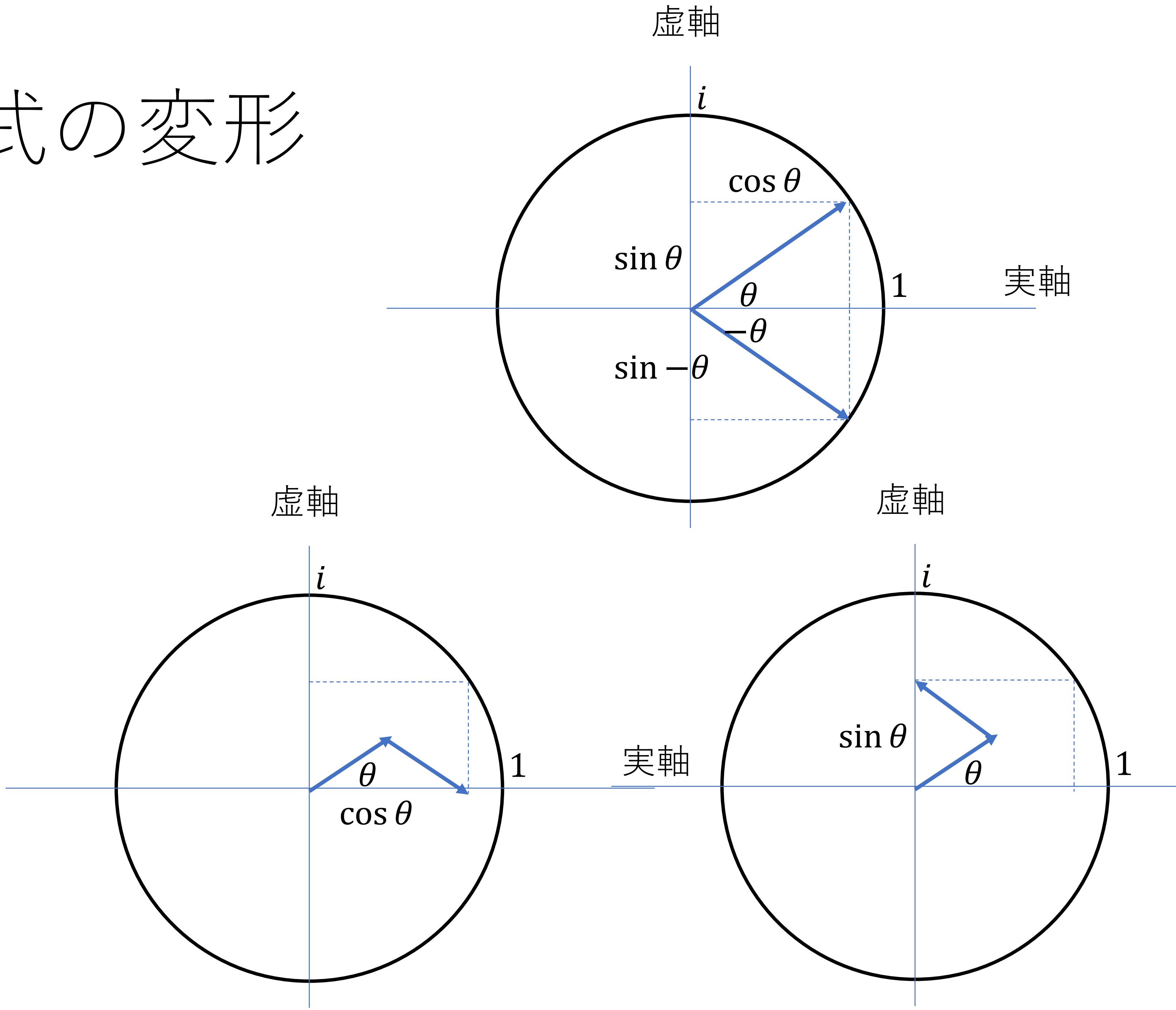
オイラーの公式

- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- $\theta = \pi$のとき
- $e^{i\pi} = -1$

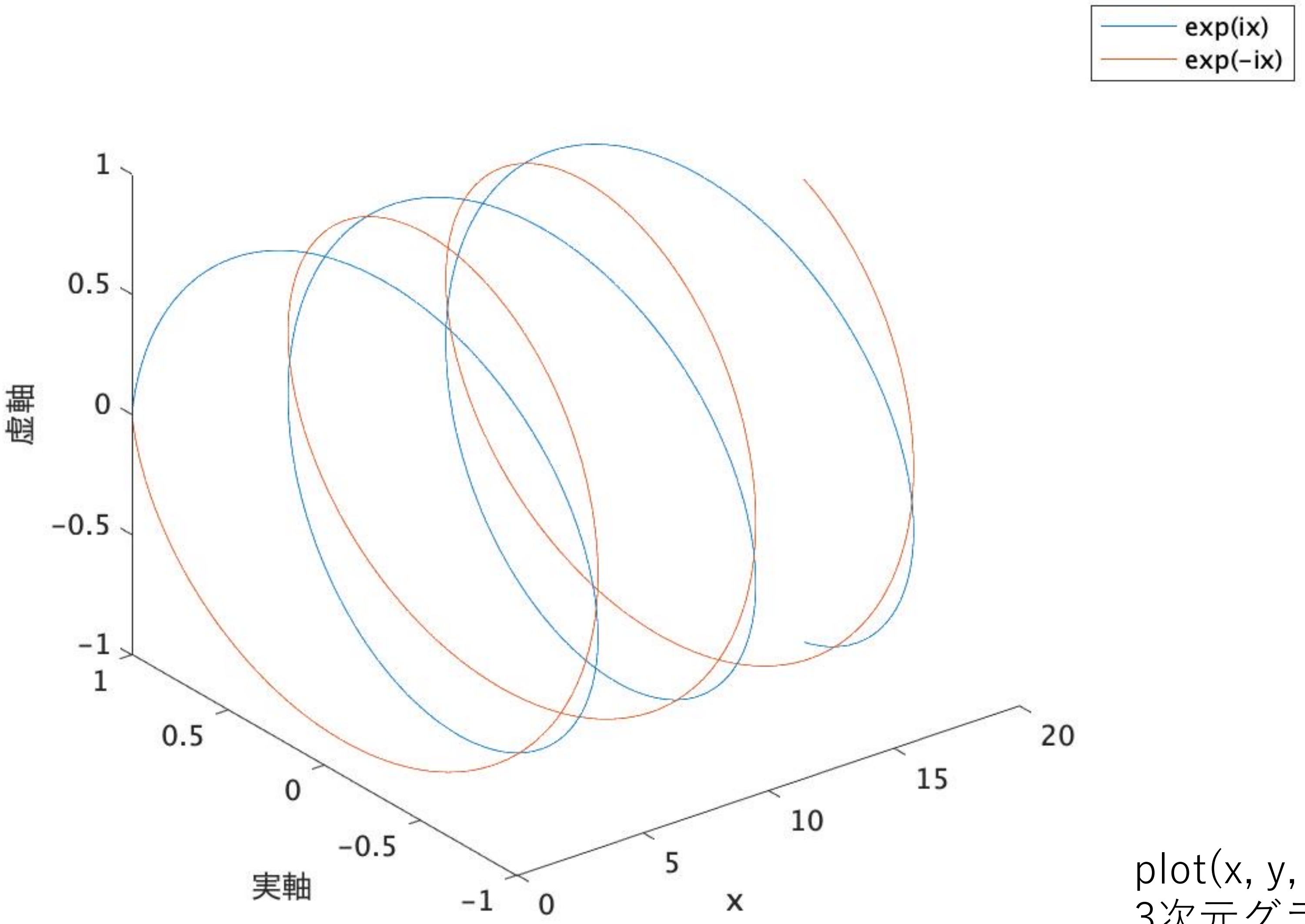
オイラーの公式の変形

- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

- $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$



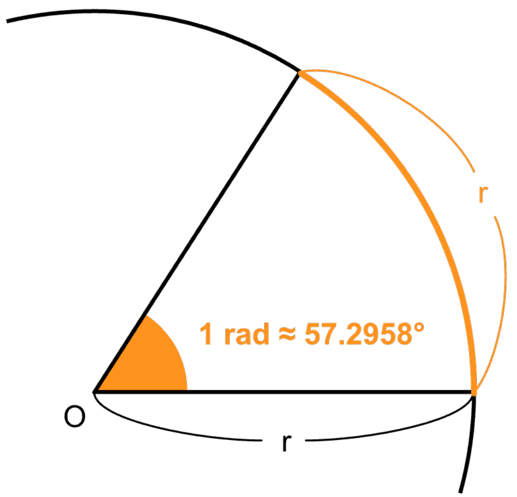
$e^{i\theta}$ と $e^{-i\theta}$ のイメージ：逆回転



plot(x, y, z)
3次元グラフ

雑談：1周は $\mathbf{2\pi}$ または**360°** なぜ？

- 円周C，直径dとしたとき，円周率πは
  - $\pi = \frac{C}{d}$
- 半径rとしたとき弧の長さがrの時の角度
  - 1rad



- 1年
  - 太陽を1周，1日1° 進む：1年=360日で1周
- 1ヶ月（12進数）
  - 1ヶ月 = 30日：月の満ち欠け => 1年 = 12ヶ月
- 1日（24時間）
  - 1日を昼と夜に分割：それぞれ12進数で考える
    - 12進数にする意味は特にない

図引用: https://sci-pursuit.com/math/radian.html

指数を用いたフーリエ級数

フーリエ級数にオイラーの公式変形を代入

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right\}$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_k \cos(\omega_0 k t) + b_k \sin(\omega_0 k t) \}$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \frac{e^{i\omega_0 k t} + e^{-i\omega_0 k t}}{2} + b_k \frac{e^{i\omega_0 k t} - e^{-i\omega_0 k t}}{2i} \right\}$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_k - i b_k}{2} e^{i\omega_0 k t} + \frac{a_k + i b_k}{2} e^{-i\omega_0 k t} \right\}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{a_k - ib_k}{2} e^{i\omega_0 kt} + \underbrace{\frac{a_k + ib_k}{2} e^{-i\omega_0 kt}}_{}\right\}$$

kが$-\infty$から-1とすると

$$= \underbrace{a_0}_{} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{a_k - ib_k}{2} e^{i\omega_0 kt}\right\} + \sum_{k=-\infty}^{-1}\left\{\frac{a_k + ib_k}{2} e^{i\omega_0 kt}\right\}$$

$a_0 \cdot e^{i\omega_0 0t}$と考えると$k = 0$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\underbrace{c_k}_{} \cdot e^{i\omega_0 kt}\right\}$$

これがフーリエ級数

フーリエ級数を$\boldsymbol{c_k}$求める まえに

- 複素共役の直行性

$$\int_0^{T_0} e^{i\omega_0 mt} \cdot e^{-i\omega_0 nt}\, dt = \begin{cases} T_0 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

$$\int_0^{T_0} e^{i\omega_0 (m-n)t}\, dt$$

$m = n$のとき

$$\int_0^{T_0} e^0\, dt = \int_0^{T_0} 1\, dt = [t]_0^{T_0} = T_0$$

<= 直行しない

$m \neq n$のとき

$$\int_0^{T_0} e^{i\omega_0(m-n)t}\,dt = \frac{1}{i\omega_0(m-n)}\left[e^{i\omega_0(m-n)t}\right]_0^{T_0}$$

$$= \frac{1}{i\omega_0(m-n)}\left(e^{i\omega_0(m-n)T_0} - e^0\right)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$= \frac{1}{i\omega_0(m-n)}\left(e^{i\cdot 2\pi(m-n)} - 1\right)$$

$m-n$は整数だから「何周回るか」の意味になり
どんなときも 1 になる

$$= \frac{1}{i\omega_0(m-n)}(1-1)$$

$$= 0$$

<= 直行する

例えばフーリエ係数c_3を求める

マイナスをかける

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\cdot e^{i\omega_0 kt}$$

両辺に$e^{-i\omega_0 3t}$をかけて積分すると

$$\int_0^{T_0} f(t)\cdot e^{-i\omega_0 3t}dt=\int_0^{T_0}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\cdot e^{i\omega_0 kt}\right)\cdot e^{-i\omega_0 3t}dt$$

積分と総和のいれかえ

$$\int_0^{T_0} f(t)\cdot e^{-i\omega_0 3t}dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^{T_0} c_k\cdot e^{i\omega_0 kt}\cdot e^{-i\omega_0 3t}dt\right\}$$

$$\int_0^{T_0} f(t)\cdot e^{-i\omega_0 3t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^{T_0} c_k\cdot e^{i\omega_0 kt}\cdot e^{-i\omega_0 3t}dt\right\}$$

同じ係数以外（$k \neq 3$）は直行するので消える

$$= \int_0^{T_0} c_3\cdot e^{i\omega_0 3t}\cdot e^{-i\omega_0 3t}dt$$

$$= c_3\int_0^{T_0} e^{i\omega_0 3t - i\omega_0 3t}dt$$

$$= c_3\int_0^{T_0} 1dt = c_3[t]_0^{T_0} = c_3 T_0$$

$$c_3 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cdot e^{-i\omega_0 3t}dt$$

一般化すると

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cdot e^{-i\omega_0 kt}dt$$

フーリエ係数が求まった

フーリエ係数$\boldsymbol{c_0}$を求める

$$\int_0^{T_0} f(t)\cdot e^{-i\omega_0 0t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^{T_0} c_k\cdot e^{i\omega_0 kt}\cdot e^{-i\omega_0 0t}dt\right\}$$

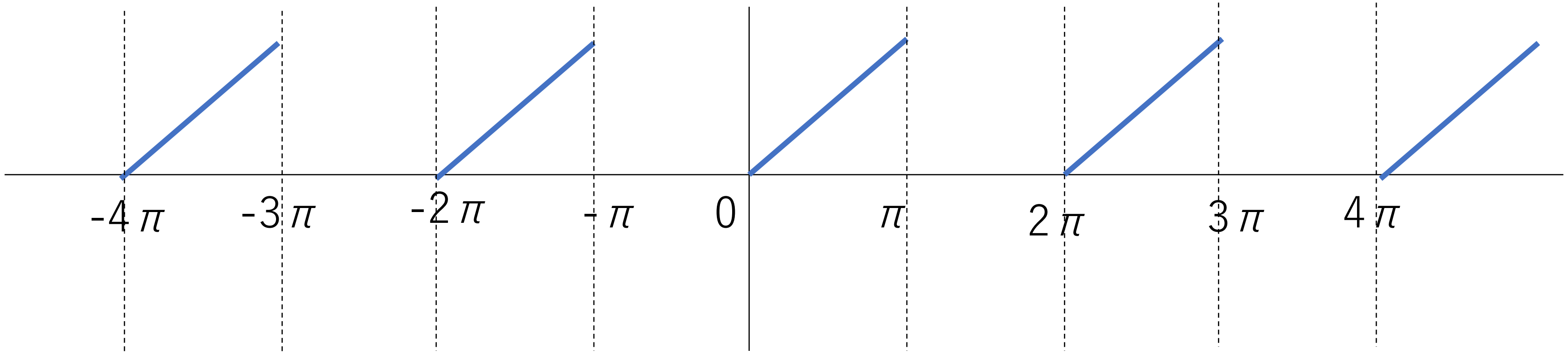
同じ係数以外（$k \neq 0$）は直行するので消える

$$\int_0^{T_0} f(t)dt = \int_0^{T_0} c_0\cdot e^{i\omega_0 0t}\cdot e^{-i\omega_0 0t}dt$$

$$= c_0\int_0^{T_0} 1dt = c_0[t]_0^{T_0} = c_0 T_0$$

$$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)dt$$

実際にフーリエ係数を求めてみる



$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \pi \\ 0 & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

周期 $T_0 = 2\pi$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1$$

$\boldsymbol{c_k}$を求める

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cdot e^{-i\omega_0 kt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} t\cdot e^{-ikt}dt + \int_{\pi}^{2\pi} 0\cdot e^{-ikt}dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\left[t\cdot\left(\frac{1}{-ik}e^{-ikt}\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{-ik}e^{-ikt}\,dt\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\left(\pi\cdot\frac{1}{-ik}e^{-ik\pi} - 0\right) - \left[\frac{1}{-k^2}e^{-ikt}\right]_0^{\pi}\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\left(\pi\cdot\frac{1}{-ik}e^{-ik\pi}\right) - \left(\frac{1}{-k^2}\cdot e^{-ik\pi} - \frac{1}{-k^2}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

…きれいにまとめずに，このままMatlabに入れてしまいました

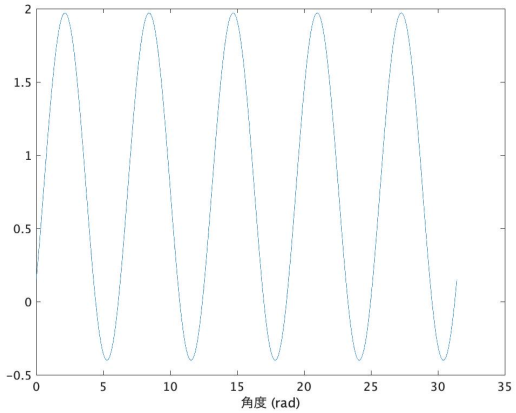
$\boldsymbol{c_0}$を求める（$\boldsymbol{c_k}$だと分母が0になるので）

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} t\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} 0dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

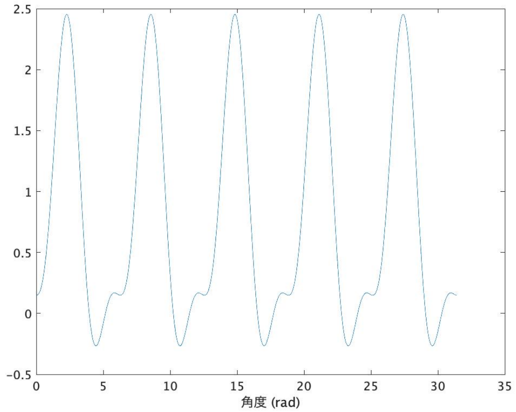
$\omega_0 = 1$

$$
f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{c_k \cdot e^{i\omega_0 kt}\right\} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{c_{-k} \cdot e^{-i\omega_0 kt}\right\}
$$

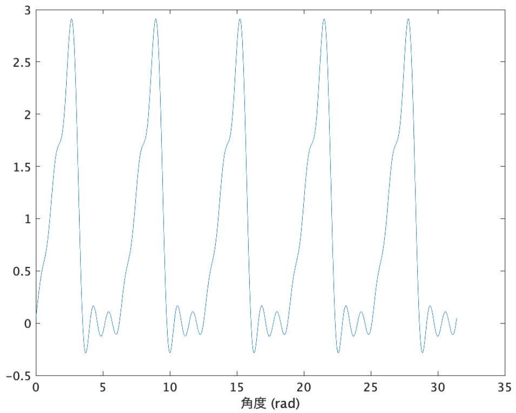
$k = 1$



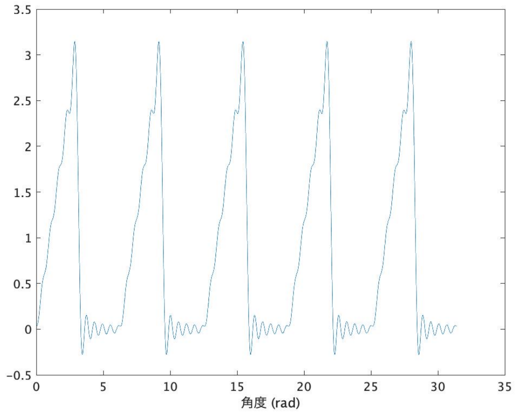
$k = 2$



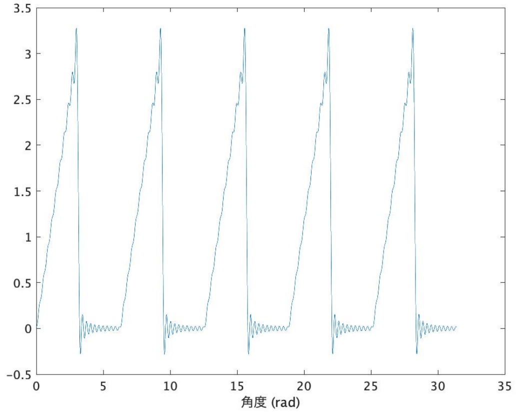
$k = 5$



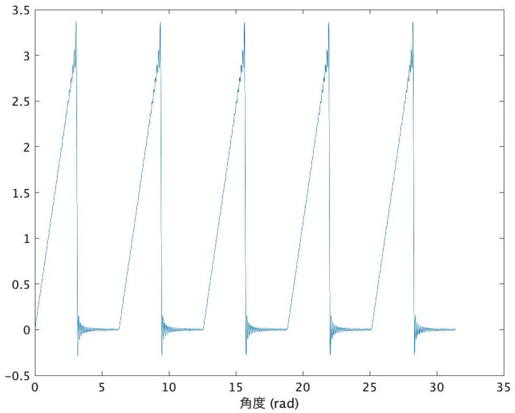
$k = 10$



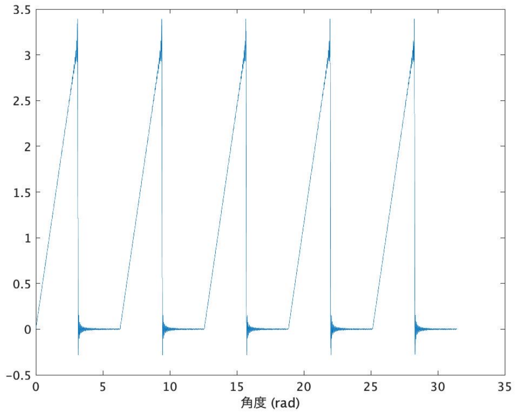
$k = 20$



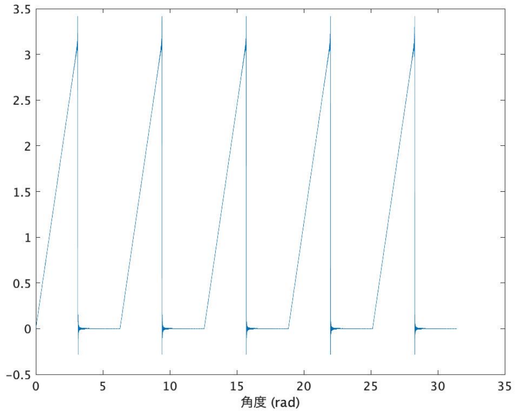
$k = 50$



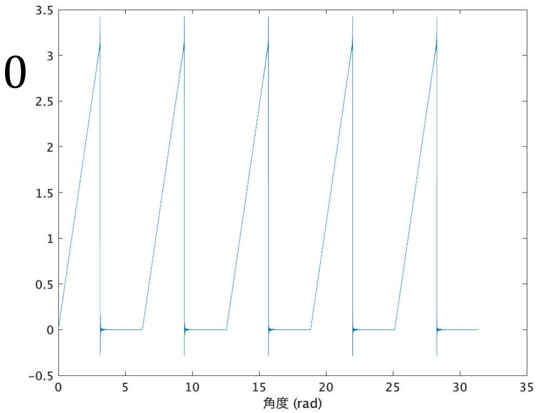
$k = 100$



$k = 500$



$k = 1000$



まとめ

- フーリエ級数（指数関数）
- フーリエ係数c_kを求めた
- フーリエ級数の具体例

演習・宿題

- 授業で紹介した周期関数のフーリエ係数c_0 c_kを使って，Matlabでグラフを書きなさい．
  - 授業で見せたように，いくつかのkの値を使って近似されていくことを確認しなさい
  - 【ヒント】右回りと左回りを加算することで，複素数を消すとうまく描けます

$$f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{c_k \cdot e^{i\omega_0 kt}\right\} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{c_{-k} \cdot e^{-i\omega_0 kt}\right\}$$

- 任意の周期関数のフーリエ係数を計算で求め，Matlabをつかって周期関数のグラフを書きなさい．
- 関数の例
  - 矩形波
  - 三角波

宿題の提出

- 必ずどれか1つは提出して下さい
- できるひとは全部やってください
  - 提出することが大切
- 提出物
  - レポート形式 + mファイル
- 提出方法と締切
  - LETUS
  - 10/23 23:59