1

# 論理数学I（10回目）

創域理工学部　情報計算科学科
桂田　浩一

6/19/2023

2

## 前回の復習

- 完全論理関数族
  - 任意の論理関数が閉包に含まれる
- 極小完全

6/19/2023

3

# 今日の内容

- 最小積和標準形
- カルノー図



4

# 最小積和標準形

ある論理関数 $\varphi$ を積和標準形で表す

（例） $\varphi = \boxed{x_1 x_2 \overline{x_4}} \vee \boxed{x_1 x_3} \vee \boxed{\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}}$ 積項の数：3

$m_1 = 3$ $m_2 = 2$ $m_3 = 3$ 積項内のリテラルの数

このとき

（１） 積項の数 $n$ が最小

（２） （１）の中で $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ が最小

の積和標準形を最小積和標準形という

これを求める

5

# 包含

- 包含：$\varphi=1 \Rightarrow \psi=1$ のとき $\psi$ は $\varphi$ を包含するという

例）

| $x$ | $y$ | $\varphi=x\cdot y$ | $\psi=x\vee y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$x\vee y$ は $x\cdot y$ を包含する

6/19/2023

6

# 部分積項

- 部分積項：積項 $t_1$ のリテラルが全て積項 $t_2$ に現れるとき $t_1$ は $t_2$ の部分積項という．
特に $t_1\neq t_2$ のとき $t_1$ は $t_2$ の真部分積項という．

例） $x$ は $x\cdot y$ の（真）部分積項

6/19/2023

7

# 主項（1）

- 論理関数 $\varphi$ が積項 $t$ を包含し， $t$ の真部分積項を包含しないとき，$t$ を $\varphi$ の主項という．

例）　$\varphi = xy \vee \bar{x}z$ について， $xy$， $\bar{x}z$， $yz$ は主項

| $x$ | $y$ | $z$ | $xy \vee \bar{x}z$ | $xy$ | $\bar{x}z$ | $yz$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |



8

# 主項（2）

- 定理：最小積和標準形は主項の論理和で表せる．（逆は成り立たない）

（証明）　略

（ざっくり言うと，最小積和標準形の積項が主項でない場合，その積項が主項になるように変数を減らしていける（より変数の数の少ない積和形に持って行ける）ので，最小積和標準形になり得ない，という感じ）

逆が成り立たない例：$\varphi = xy \vee \bar{x}z \vee yz$ $(= xy \vee \bar{x}z)$

9

## カルノー図

$\varphi = \overline{x_1}x_2 \vee x_2x_3$

| $x_1x_2$ \ $x_3$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 0 | | |
| 0 1 | 1 | 1 |
| 1 1 | | 1 |
| 1 0 | | |

順番に注意

$\varphi = \overline{x_1}x_2 \vee x_2x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4$

| $x_1x_2$ \ $x_3x_4$ | 0 0 | 0 1 | 1 1 | 1 0 |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 | | 1 | | |
| 0 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 | | | 1 | 1 |
| 1 0 | | | | |

6/19/2023

10

## カルノー図と積項，ループ（1）

$\overline{x_1}\,\overline{x_3}$

| $x_1x_2$ \ $x_3x_4$ | 0 0 | 0 1 | 1 1 | 1 0 |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 | 1 | 1 | | |
| 0 1 | 1 | 1 | | |
| 1 1 | 1 | 1 | | |
| 1 0 | 1 | 1 | | |

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$

$\overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4$

$\overline{x_3}$

$2^n \times 2^m$の長方形が積項に対応
（ループと呼ぶ）

6/19/2023

11

# カルノー図と積項，ループ（2）

$\overline{x_2}\,\overline{x_4}$

| $x_1x_2$ \ $x_3x_4$ | 0 0 | 0 1 | 1 1 | 1 0 |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 | 1 | 1 | | 1 |
| 0 1 | | | | |
| 1 1 | | | | |
| 1 0 | 1 | 1 | | 1 |

$\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$

$2^n \times 2^m$の長方形が積項に対応
（ループと呼ぶ）

6/19/2023

12

# カルノー図での主項

$$\varphi = \overline{x_1}x_2 \vee x_2x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4$$

| $x_1x_2$ \ $x_3x_4$ | 0 0 | 0 1 | 1 1 | 1 0 |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 | | 1 | | |
| 0 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 | | | 1 | 1 |
| 1 0 | | | | |

$\overline{x_1}\,x_2x_3$

$x_2x_3$ 主項

$x_3$

$\varphi$ の占める領域（1の場所）内のループ $L$ のうち
$L$ を真に含む $\varphi$ 内のループが存在しないとき， $L$ は主項

6/19/2023

13

## カルノー図での主項の例（１）

$$\varphi = \overline{x_1}x_2 \vee x_2x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4$$

| $x_1x_2$ \ $x_3x_4$ | 0 0 | 0 1 | 1 1 | 1 0 |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 | | 1 | | |
| 0 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 | | | 1 | 1 |
| 1 0 | | | | |

$\overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4$

$\overline{x_1}\,x_2$

$x_2x_3$

6/19/2023

14

## カルノー図での主項の例（2）

$$\varphi = x_2x_3x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4$$

| $x_1x_2$ \ $x_3x_4$ | 0 0 | 0 1 | 1 1 | 1 0 |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 | | 1 | | |
| 0 1 | | 1 | 1 | |
| 1 1 | | | 1 | |
| 1 0 | | | | |

$\overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4$　必須項

$\overline{x_1}\,x_2x_4$

$x_2x_3x_4$　必須項

6/19/2023

15

## カルノー図を用いた最小積和標準形の求め方

$\varphi = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee$
$x_1 x_3 x_4 \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$

| $x_1x_2$ \ $x_3x_4$ | 0 0 | 0 1 | 1 1 | 1 0 |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 | 1 | | | 1 |
| 1 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 0 | 1 | 1 | 1 | |

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$ $\overline{x_3}\,\overline{x_4}$ $x_1\overline{x_3}$ $\boxed{x_1x_4}$ 必須項

$\boxed{\overline{x_1}\,\overline{x_4}}$ 必須項 $\overline{x_2}\,\overline{x_3}$ $\overline{x_2}x_4$

1. カルノー図を作る
2. カルノー図で主項を求める
3. 必須項に対応するループを求める
4. 3.でカバーできない'1'の部分を求める
5. できるだけ少ない主項で'1'の部分をカバーできるよう，ループを選ぶ.

6/19/2023

16

## カルノー図を用いた最小積和標準形の求め方

$\varphi = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee$
$x_1 x_3 x_4 \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$

| $x_1x_2$ \ $x_3x_4$ | 0 0 | 0 1 | 1 1 | 1 0 |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 | | 1 | 1 | |
| 0 1 | | | | |
| 1 1 | 1 | | | |
| 1 0 | 1 | | | |

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$ $\overline{x_3}\,\overline{x_4}$ $x_1\overline{x_3}$ $\boxed{x_1x_4}$ 必須項

$\boxed{\overline{x_1}\,\overline{x_4}}$ 必須項 $\overline{x_2}\,\overline{x_3}$ $\overline{x_2}x_4$

1. カルノー図を作る
2. カルノー図で主項を求める
3. 必須項に対応するループを求める
4. 3.でカバーできない'1'の部分を求める
5. できるだけ少ない主項で'1'の部分をカバーできるよう，ループを選ぶ.

6/19/2023

17

## カルノー図を用いた最小積和標準形の求め方

$\varphi = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 x_3 x_4 \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$

| $x_1x_2$ \ $x_3x_4$ | 0 0 | 0 1 | 1 1 | 1 0 |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 | | 1 | 1 | |
| 0 1 | | | | |
| 1 1 | 1 | | | |
| 1 0 | 1 | | | |

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$ $\overline{x_3}\,\overline{x_4}$ $x_1\overline{x_3}$ $\boxed{x_1x_4}$ 必須項

$\boxed{\overline{x_1}\,\overline{x_4}}$ 必須項 $\overline{x_2}\,\overline{x_3}$ $\overline{x_2}x_4$

1. カルノー図を作る
2. カルノー図で主項を求める
3. 必須項に対応するループを求める
4. 3.でカバーできない'1'の部分を求める
5. できるだけ少ない主項で'1'の部分をカバーできるよう，ループを選ぶ.

6/19/2023

18

## カルノー図を用いた最小積和標準形の求め方

$\varphi = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 x_3 x_4 \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$

| $x_1x_2$ \ $x_3x_4$ | 0 0 | 0 1 | 1 1 | 1 0 |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 | | 1 | 1 | |
| 0 1 | | | | |
| 1 1 | 1 | | | |
| 1 0 | 1 | | | |

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$ $\overline{x_3}\,\overline{x_4}$ $x_1\overline{x_3}$ $\boxed{x_1x_4}$ 必須項

$\boxed{\overline{x_1}\,\overline{x_4}}$ 必須項 $\overline{x_2}\,\overline{x_3}$ $\overline{x_2}x_4$

1. カルノー図を作る
2. カルノー図で主項を求める
3. 必須項に対応するループを求める
4. 3.でカバーできない'1'の部分を求める
5. できるだけ少ない主項で'1'の部分をカバーできるよう，ループを選ぶ.

6/19/2023

19

## カルノー図を用いた最小積和標準形の求め方

$\varphi = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee$
$x_1 x_3 x_4 \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$

| $x_1x_2$ \ $x_3x_4$ | 0 0 | 0 1 | 1 1 | 1 0 |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 | 1 | | | 1 |
| 1 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 0 | 1 | 1 | 1 | |

$\varphi = \overline{x_1}\,\overline{x_4} \vee x_1 x_4 \vee \begin{Bmatrix} \overline{x_1}\,\overline{x_2} \\ \overline{x_2} x_4 \end{Bmatrix} \vee \begin{Bmatrix} \overline{x_3}\,\overline{x_4} \\ x_1 \overline{x_3} \end{Bmatrix}$

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$　$\overline{x_3}\,\overline{x_4}$　$x_1\overline{x_3}$　$\boxed{x_1 x_4}$ 必須項

$\boxed{\overline{x_1}\,\overline{x_4}}$ 必須項　$\overline{x_2}\,\overline{x_3}$　$\overline{x_2} x_4$

6/19/2023

20

## 出題予定の演習課題

- カルノー図を使って最小積和標準形を求める.

6/19/2023