機械学習（7回目）

創域理工学部　情報計算科学科
桂田　浩一

1

11/2/2023

前回の復習

- 複雑な依存関係がある場合（誤差逆伝播法がそのまま適用できない場合）の偏微分の求め方

3

本日の内容

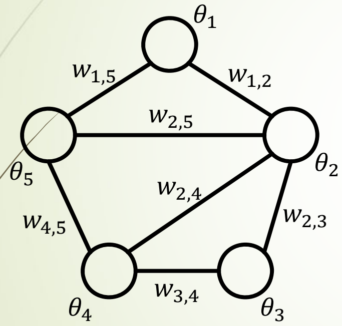
- 相互結合型ネットワーク
  - ホップフィールドモデル

11/2/2023

4

ホップフィールドモデル

入力：各ユニットへの0，1の割り当て
出力：各ユニットの値の更新を繰り返し，更新されなくなった時の値



$w_{j,i}$は変化せずx_iが変化する

ユニット i を選択し，次のように値を更新

$$x_i(t+1) = \begin{cases} 1 & (u_i(t) > 0) \\ x_i(t) & (u_i(t) = 0) \\ 0 & (u_i(t) < 0) \end{cases}$$

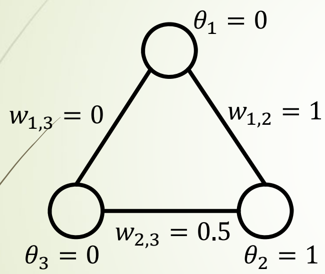
$$u_i(t) = \sum_{j=1}^{n} w_{j,i} x_j(t) - \theta_i$$

（i 以外のユニットは値を更新しない）

（$w_{j,i} = w_{i,j}$， $w_{i,i} = 0$）

11/2/2023

ホップフィールドモデルの実行例



入力：$x_1(0) = 0$，$x_2(0) = 1$，$x_3(0) = 0$

ユニット1，2，3の順で繰り返して値を更新

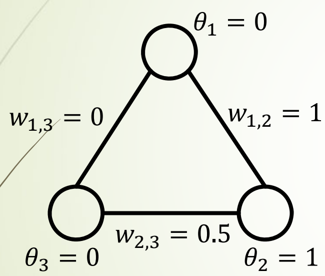
$$u_1(0) = \sum_{j=1}^{3} w_{j,1} x_j(0) - \theta_1$$
$$= w_{1,2} x_2(0) + w_{1,3} x_3(0) - \theta_1$$
$$= 1 * 1 + 0 * 0 - 0 = 1 > 0$$

$x_1(1) = 1$，$x_2(1) = 1$，$x_3(1) = 0$

$$u_2(1) = \sum_{j=1}^{3} w_{j,2} x_j(1) - \theta_2$$
$$= w_{1,2} x_1(1) + w_{2,3} x_3(1) - \theta_2$$
$$= 1 * 1 + 0.5 * 0 - 1 = 0$$

$x_1(2) = 1$，$x_2(2) = 1$，$x_3(2) = 0$

ホップフィールドモデルの実行例



入力：$x_1(0) = 0$，$x_2(0) = 1$，$x_3(0) = 0$

ユニット1，2，3の順で繰り返して値を更新

$$u_3(2) = \sum_{j=1}^{3} w_{j,3} x_j(2) - \theta_3$$
$$= w_{1,3} x_1(2) + w_{2,3} x_2(2) - \theta_3$$
$$= 0 * 1 + 0.5 * 1 - 0 = 0.5 > 0$$

$x_1(3) = 1$，$x_2(3) = 1$，$x_3(3) = 1$

$\vdots$

$x_1(6) = 1$，$x_2(6) = 1$，$x_3(6) = 1$

更新が無いのでこれで終了

平衡状態という

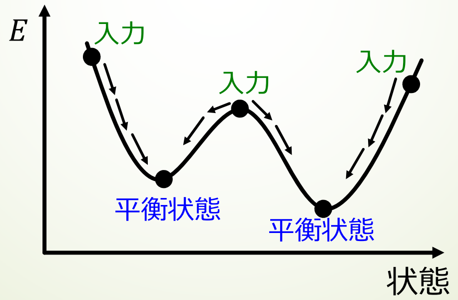
7

エネルギー関数

- ネットワークの平衡状態を定義付ける関数

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{j,i}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i$$

※ x_i を更新する毎に E の値が減少するという性質がある



11/2/2023

8

エネルギー関数が減少することの証明

- $E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{j,i}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i\neq k}\sum_{j\neq k} w_{j,i}x_i x_j + \sum_{i\neq k} \theta_i x_i$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j} w_{j,k}x_k x_j - \frac{1}{2}\sum_{i} w_{k,i}x_i x_k + \frac{1}{2}w_{k,k}x_k x_k + \theta_k x_k$$

- ある時刻 t に k 番目のユニットが $x_k(t) \longrightarrow x_k(t+1)$ と更新されたとする．（$\Delta x_k = x_k(t+1) - x_k(t)$ と表す）

11/2/2023

9

エネルギー関数が減少することの証明

- このときエネルギー関数の変化 ΔE_k は　$w_{k,k}=0$

$$\Delta E_k = -\frac{1}{2}\left\{\sum_j w_{j,k}x_j + \sum_i w_{k,i}x_i\right\}\Delta x_k + \frac{1}{2}w_{k,k}x_k x_k + \theta_k \Delta x_k$$
$$= -\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{w_{j,k}+w_{k,j}}{2}x_j\right\}\Delta x_k + \theta_k\Delta x_k$$
$$= -\left(\sum_{j=1}^{n} w_{j,k}\,x_j - \theta_k\right)\Delta x_k$$
$$= -u_k\Delta x_k$$

$\Delta x_k > 0$のとき $x_k(t+1)=1$，$x_k(t)=0$ なので $u_k(t)>0$
$\Delta x_k < 0$のとき $x_k(t+1)=0$，$x_k(t)=1$ なので $u_k(t)<0$

どちらの場合も $-u_k\Delta x_k < 0$ となるので $\Delta E_k \leq 0$

10

ホップフィールドモデルの使い方

- ホップフィールドモデルの特徴：

エネルギー関数を極小化する方向にユニットの値が更新される

⇒　特定の0，1のパターンの時にエネルギー関数が極小値となるよう重みを設定すれば，任意の入力に対してそれに近いパターンにユニットの値が修正される．

連想記憶に使える

11

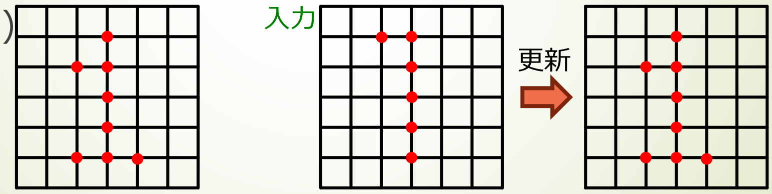
連想記憶

- 不完全なパターン（一部が欠けていたり，ノイズがあるなど）を入力とするとき，学習した完全なパターンを出力（想起）するネットワーク

※以下，連想記憶ではユニットの取る値を$(-1,1)$とする.

格子の交点がユニット，
辺がノード間のリンク

(例)　入力　更新



赤い点が1，他が-1のとき
Eが極小値になるよう$w_{j,i}$を設定

赤い点に1，他に-1を入力

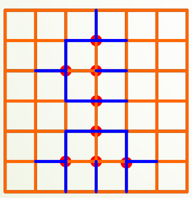
平衡状態

12

連想記憶を実現するための重み設定

- $E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{w_{j,i}x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n}\theta_i x_i$

記憶するパターンに対して，この部分が必ず正になる
よう $w_{j,i}$ を設定する ⇒ $w_{j,i} = x_i^s x_j^s$ と設定
（x_i^s，x_j^s は記憶パターン s のユニット値）



記憶するデータが複数の場合は
$w_{j,i} = \sum_{p=1}^{P} x_i^s x_j^s$ とする

記憶できるパターンの数はユニット数
n に対して $\frac{n}{2\log_2 n}$ 個程度が限界

$\left.\begin{array}{l} — \ w_{j,i} = 1 \\ — \ w_{j,i} = -1 \end{array}\right\}$ と設定

出題予定の演習課題

- ホップフィールドモデルについて