1

論理数学I（9回目）

創域理工学部　情報計算科学科
桂田　浩一

5/9/2023

2

前回の復習

- 論理関数族 Φ の閉包 [Φ]
  - Φに代入を繰り返して得られる論理式の集合
- 完全論理関数族
  - 任意の論理関数が [Φ] に含まれる
- 5種類の論理関数族
  - $\mathcal{F}_0$： 0保存関数族
  - $\mathcal{F}_1$： 1保存関数族
  - $\mathcal{F}_2$： 自己双対関数族
  - $\mathcal{F}_3$： 単調増大関数族
  - $\mathcal{F}_4$： 線形関数族

5/9/2023

3

今日の内容

- 5種類の論理関数族の性質
- 完全論理関数族であるための必要十分条件
- 極小完全

5/9/2023

4

5種類の論理関数族の性質（１）

- （補題） $[\mathcal{F}_i] = \mathcal{F}_i \ (i = 0,1,2,3,4)$
  （証明） 各関数族の代入に関する定理から導かれる

5/9/2023

5

5種類の論理関数族の性質（2）

- 以下の性質が成り立つ

1. $\varphi \notin \mathcal{F}_0$ ならば $\bar{x} \in [\{\varphi\}]$ あるいは $1 \in [\{\varphi\}]$
2. $\varphi \notin \mathcal{F}_1$ ならば $\bar{x} \in [\{\varphi\}]$ あるいは $0 \in [\{\varphi\}]$
3. $\varphi \notin \mathcal{F}_2$ ならば $0, 1 \in [\{\varphi,\ \bar{x}\}]$
4. $\varphi \notin \mathcal{F}_3$ ならば $\bar{x} \in [\{\varphi,\ 0,\ 1\}]$
5. $\varphi \notin \mathcal{F}_4$ ならば $x \cdot y \in [\{\varphi,\ \bar{x},\ 0,\ 1\}]$ あるいは $x \vee y \in [\{\varphi,\ \bar{x},\ 0,\ 1\}]$

5/9/2023

6

5種類の論理関数族の性質（2）

1. $\varphi \notin \mathcal{F}_0$ ならば $\bar{x} \in [\{\varphi\}]$ あるいは $1 \in [\{\varphi\}]$

（証明）　φに現れる一つの変数を x とする．
このとき，閉包の定義より $x \in [\{\varphi\}]$ である．
また，φに現れる全ての変数に x を代入した
$\varphi'(x, x, \cdots, x)$ も $\varphi'(x, x, \cdots, x) \in [\{\varphi\}]$ である．

ここで，$\varphi \notin \mathcal{F}_0$ より $x = 0$ のとき $\varphi'(0, 0, \cdots, 0) = 1$
$x = 1$ のとき $\varphi'(1, 1, \cdots, 1) = 0$ ならば $\varphi' = \bar{x} \in [\{\varphi\}]$
$x = 1$ のとき $\varphi'(1, 1, \cdots, 1) = 1$ ならば $\varphi' = 1 \in [\{\varphi\}]$

5/9/2023

7

5種類の論理関数族の性質（2）

2. $\varphi \notin \mathcal{F}_1$ ならば $\bar{x} \in [\{\varphi\}]$ あるいは $0 \in [\{\varphi\}]$

（証明）　$\varphi \notin \mathcal{F}_0$ ならば $\bar{x} \in [\{\varphi\}]$ あるいは $1 \in [\{\varphi\}]$ と同様に証明できる.

5/9/2023

8

5種類の論理関数族の性質（2）

3. $\varphi \notin \mathcal{F}_2$ ならば $0, 1 \in [\{\varphi,\ \bar{x}\}]$

（証明）　$\varphi \notin \mathcal{F}_2$ なので $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = \varphi(\overline{\varepsilon_1}, \overline{\varepsilon_2}, \cdots, \overline{\varepsilon_n})$ を満たす $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ が存在する.

$\varepsilon_i = 1$であれば x_i に x を代入し，$\varepsilon_i = 0$であれば x_i に $\bar{x}$ を代入した関数を φ' とする．つまり，$\varphi'(x) = \varphi(x^{\varepsilon_1}, x^{\varepsilon_2}, \cdots, x^{\varepsilon_n})$.
（ただし $\varepsilon_i = 1$ のとき $x^{\varepsilon_i} = x$，$\varepsilon_i = 0$ のとき $x^{\varepsilon_i} = \bar{x}$）
このとき $\varphi'(1) = \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = \varphi(\overline{\varepsilon_1}, \overline{\varepsilon_2}, \cdots, \overline{\varepsilon_n}) = \varphi'(0)$

$\varphi'(x)$は1変数関数であり，$x = 1$ のときと $x = 0$ のときの値が同じなので，$\varphi'(x) = \varphi(x^{\varepsilon_1}, x^{\varepsilon_2}, \cdots, x^{\varepsilon_n}) = 0$ または 1 の定数関数となる.

5/9/2023

9

5種類の論理関数族の性質（2）

3. $\varphi \notin \mathcal{F}_2$ ならば $0, 1 \in [\{\varphi,\ \bar{x}\}]$

（証明）　x と $\bar{x}$ はともに $[\{\varphi,\ \bar{x}\}]$ に含まれるので，
$\varphi(x^{\varepsilon_1}, x^{\varepsilon_2}, \cdots, x^{\varepsilon_n}) \in [\{\varphi, \bar{x}\}]$

したがって 0または1 $\in [\{\varphi,\ \bar{x}\}]$

また，$\bar{x}$ に上の 0（または1）を代入すると，その否定である 1（または0）が得られ，1または0 $\in [\{\varphi,\ \bar{x}\}]$ となる．

5/9/2023

10

5種類の論理関数族の性質（2）

4. $\varphi \notin \mathcal{F}_3$ ならば $\bar{x} \in [\{\varphi,\ 0,\ 1\}]$

（証明）　$\varphi \notin \mathcal{F}_3$ なので，ある $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_i, \cdots, \varepsilon_n)$ について $\varphi(\varepsilon_1, \cdots, 0, \cdots, \varepsilon_n) = 1$，$\varphi(\varepsilon_1, \cdots, 1, \cdots, \varepsilon_n) = 0$

ここで x_i のみ変数を残した1変数関数
$\varphi(\varepsilon_1, \cdots, x_i, \cdots, \varepsilon_n)$ を考えると，
$x_i \in [\{\varphi,\ 0,\ 1\}]$，$0 \in [\{\varphi,\ 0,\ 1\}]$，$1 \in [\{\varphi,\ 0,\ 1\}]$より
$\varphi(\varepsilon_1, \cdots, x_i, \cdots, \varepsilon_n) \in [\{\varphi,\ 0,\ 1\}]$
この関数は $x_i = 0$ のとき $\varphi = 1$，$x_i = 1$ のとき $\varphi = 0$
なので $\varphi(\varepsilon_1, \cdots, x_i, \cdots, \varepsilon_n) = \bar{x} \in [\{\varphi,\ 0,\ 1\}]$

5/9/2023

11

5種類の論理関数族の性質（2）

5. $\varphi \notin \mathcal{F}_4$ ならば $x \cdot y \in [\{\varphi,\ \bar{x},\ 0,\ 1\}]$ あるいは
   $x \vee y \in [\{\varphi,\ \bar{x},\ 0,\ 1\}]$

（証明）　$\varphi \notin \mathcal{F}_4$ なので $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \cdots \oplus x_i x_j T \oplus \cdots$
とリードマラー標準形で表せる．但し $T = 1$ もしくは x_i，x_j 以外の変数の論理積（x_i，x_jを含む積項は複数考えられるが，そのうち最も変数が少ないものの一つに着目する）

ここで φ の変数のうち T に含まれるものに 1 を，T に含まれないものに 0 を代入すると，$\varphi' = \alpha_0 \oplus \alpha_i x_i \oplus \alpha_j x_j \oplus x_i x_j$ となる．
変数に 0，1 を代入したものなので $\varphi' \in [\{\varphi,\ 0,\ 1\}]$

5/9/2023

12

5種類の論理関数族の性質（2）

5. $\varphi \notin \mathcal{F}_4$ ならば $x \cdot y \in [\{\varphi,\ \bar{x},\ 0,\ 1\}]$ あるいは
   $x \vee y \in [\{\varphi,\ \bar{x},\ 0,\ 1\}]$

（証明つづき）　$\varphi' = \alpha_0 \oplus \alpha_i x_i \oplus \alpha_j x_j \oplus x_i x_j$ について，

α_0	α_i	α_j	φ'
0	0	0	$x_i x_j$
0	0	1	$\overline{x_i} x_j$
0	1	0	$x_i \overline{x_j}$
0	1	1	$x_i \vee x_j$
1	0	0	$\overline{x_i} \vee \overline{x_j}$
1	0	1	$x_i \vee \overline{x_j}$
1	1	0	$\overline{x_i} \vee x_j$
1	1	1	$\overline{x_i}\,\overline{x_j}$

例）$\alpha_0 = 1$，$\alpha_i = \alpha_j = 0$ のとき

$\varphi' = 1 \oplus x_i x_j = \overline{x_i x_j} = \overline{x_i} \vee \overline{x_j}$

例）$\alpha_0 = \alpha_i = 0$，$\alpha_j = 1$ のとき

$\varphi' = x_j \oplus x_i x_j = x_j(1 \oplus x_i) = \overline{x_i} x_j$

5/9/2023

13

5種類の論理関数族の性質（2）

5. $\varphi \notin \mathcal{F}_4$ ならば $x \cdot y \in [\{\varphi,\ \bar{x},\ 0,\ 1\}]$ あるいは $x \vee y \in [\{\varphi,\ \bar{x},\ 0,\ 1\}]$

（証明）　いずれの場合にも x_i と x_j についての正リテラルもしくは負リテラルの論理和もしくは論理積となるので，

$x_i \cdot x_j \in \left[\{\varphi, \overline{x_i}, \overline{x_j}, 0, 1\}\right]$ あるいは $x_i \vee x_j \in \left[\{\varphi, \overline{x_i}, \overline{x_j}, 0, 1\}\right]$

5/9/2023

14

完全論理関数族である必要十分条件

- （定理2.19）　論理関数族 Φ が完全であるための必要十分条件は $\Phi \not\subseteq \mathcal{F}_i\ (i = 0,1,2,3,4)$

（証明）（$\Longleftarrow$）　$\Phi \not\subseteq \mathcal{F}_0$，$\Phi \not\subseteq \mathcal{F}_1$ より次のいずれかが成り立つ．

(1) $\bar{x} \in [\Phi]$，(2) $\bar{x}, 0 \in [\Phi]$，(3) $\bar{x}, 1 \in [\Phi]$，(4) $0,1 \in [\Phi]$

(1)～(3)のとき $\Phi \not\subseteq \mathcal{F}_2$ より $0,1 \in [\Phi]$

(4)のとき $\Phi \not\subseteq \mathcal{F}_3$ より $\bar{x} \in [\Phi]$

$\Phi \not\subseteq \mathcal{F}_4$ より $x \cdot y \in [\Phi]$ または $x \vee y \in [\Phi]$

以上より $\bar{x},\ x \cdot y \in [\Phi]$ または $\bar{x},\ x \vee y \in [\Phi]$ となるので

Φ は完全

5/9/2023

15

完全論理関数族である必要十分条件

- （定理2.19）　論理関数族 Φ が完全であるための必要十分条件は $\Phi \not\subseteq \mathcal{F}_i$ $(i = 0,1,2,3,4)$

（証明）（$\Longrightarrow$）　「Φ が完全ならば $\Phi \not\subseteq \mathcal{F}_i$」の対偶

「ある $\mathcal{F}_i$ について $\Phi \subseteq \mathcal{F}_i$ ならば Φ は完全でない」を示す．

$\Phi \subseteq \mathcal{F}_i$ なので $[\Phi] \subseteq [\mathcal{F}_i] = \mathcal{F}_i$

ここで $\overline{xy}$ を考えると，$\overline{xy}$ はどの $\mathcal{F}_i$ にも含まれないので

$\overline{xy} \notin [\Phi]$

よって Φ は完全ではない

5/9/2023

16

極小完全

- 論理関数族 Φ が完全であり，Φ からいかなる元を除いても完全でなくなるとき，Φ は極小完全であるという．

2変数以下の論理関数	$\mathcal{F}_0$	$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$
$\varphi_0 = 0$	○	×	×	○	○
$\varphi_1 = 1$	×	○	×	○	○
$\varphi_2 = \bar{x}$	×	×	○	×	○
$\varphi_3 = xy$	○	○	×	○	×
$\varphi_4 = x \vee y$	○	○	×	○	×
$\varphi_5 = x \to y$	×	○	×	×	×
$\varphi_6 = x \mid y$	×	×	×	×	×
$\varphi_7 = x \downarrow y$	×	×	×	×	×
$\varphi_8 = x \oplus y$	○	×	×	×	○
$\varphi_9 = x \leftrightarrow y$	×	○	×	×	○

5/9/2023

17

極小完全

- 論理関数族 Φ が完全であり，Φ からいかなる元を除いても完全でなくなるとき，Φ は極小完全であるという．

一元の二変数極小完全論理関数族：

$\{x \mid y\}$，$\{x \downarrow y\}$

二元の二変数極小完全論理関数族：

$\{0, x \rightarrow y\}$，$\{\bar{x}, xy\}$，$\{\bar{x}, x \vee y\}$，$\{\bar{x}, x \rightarrow y\}$，$\{x \rightarrow y, x \oplus y\}$

三元の二変数極小完全論理関数族：

$\{0, xy, x \leftrightarrow y\}$，$\{0, x \vee y, x \leftrightarrow y\}$，$\{1, xy, x \oplus y\}$，
$\{1, x \vee y, x \oplus y\}$，$\{xy, x \oplus y, x \leftrightarrow y\}$，$\{x \vee y, x \oplus y, x \leftrightarrow y\}$

5/9/2023

論理関数族が完全でないことの証明（例）

- $\Phi = \{x \vee y, x \oplus y\}$ が完全でないことを示せ

$\varphi(x, y) = x \vee y$，$\psi(x, y) = x \oplus y$ とおくと，
$x = y = 0$ のとき $\varphi(x, y) = 0$，$\psi(x, y) = 0$ となるので
$\Phi \subseteq \mathcal{F}_0$
したがって Φ は完全ではない

出題予定の演習課題

- ある論理関数族が完全かどうか？