# メディア情報処理 2023
# 第4回目 フーリエ級数

大村英史

# 今日の予定

- フーリエ級数
  - フーリエ級数展開
  - フーリエ係数の求め方
  - 具体例

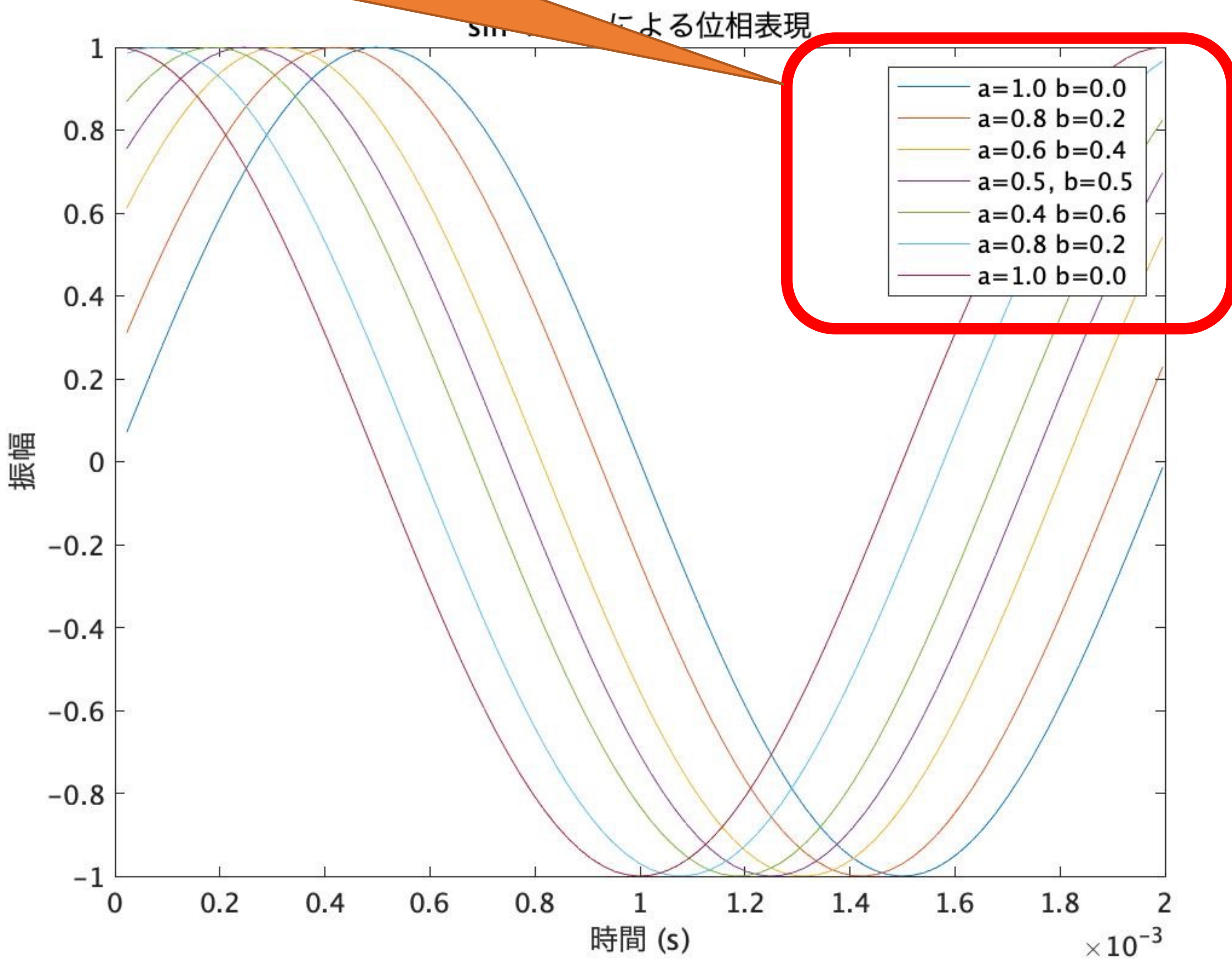
- 演習・宿題

値がおかしい！！
適宜修正してください

# 位相

- $\sin(x+\theta)$
- $\theta$ずれた正弦波
- $a\sin x + b\cos x$
  - 振幅を1に合わせるために
- $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a\sin x + b\cos x)$

- aとbの組み合わせで,
位相変化を表すことができる



# フーリエ級数

複雑な周期関数や周期信号を、単純な形の周期性をもつ関数の（無限の）和によって表したものである。（Wikipediaより）

# フーリエ級数でなぜ展開できる？

- 任意の正弦波（ $\sin(x+\theta)$ ）は$a\sin x + b\cos x$ で表すことができる.
- $\sin ax$， $\sin bx$は$a \neq b$ならば直行
- **直行している成分の線形和で任意の関数**（ただしT$_0$の周期を持つ）が表現できるとすると以下の式が成立する

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos \frac{2\pi k}{T_0} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T_0} t \right\}$$

# フーリエ級数

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos \frac{2\pi k}{T_0} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T_0} t \right\}$$

$T_0$：$f(t)$ の周期

| フーリエ係数 ($a_0$) | フーリエ係数 ($a_k$) | フーリエ係数 ($b_k$) | |
|---|---|---|---|
| 回転半径を<br>0に近づけた<br>三角関数？<br>直流成分と言う | $k=1$ | 角速度: $\frac{2\pi}{T_0}$ | $T_0$ で $2\pi$ すすむ |
| | $k=2$ | 角速度: $\frac{4\pi}{T_0}$ | $T_0$ で $4\pi$ すすむ |
| | $k=3$ | 角速度: $\frac{6\pi}{T_0}$ | $T_0$ で $6\pi$ すすむ |
| | $\vdots$ | | |

$k$は自然数だけ => 音で言うと倍音だけ

# 周波数に注目すると

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\}$$

$T_0$ : $f(t)$ の周期
$\omega_0$: $f(t)$の角速度

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$ : 角速度（角周波数）

$$\mathrm{f} = \frac{k\omega_0}{2\pi}$$ : 周波数

こんな風にも書けます
→いろいろな周波数（整数倍）の正弦波で関数を近似できる！

# フーリエ級数展開：関数近似

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos \frac{2\pi k}{T_0} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T_0} t \right\}$$

- 係数を求めていけば，　$f(t)$を分解ができる．
  - $a_0$
  - $a_k$
  - $b_k$

  - $k$をいくつまで求めるか ＝ どれくらい近似するか

# フーリエ級数を求める まず$a_0$

- 求めるフーリエ級数の係数以外をすべて消す必要がある
- 両辺を積分（区間は1周期）

$$\int_0^{T_0} f(t)\,dt = \int_0^{T_0} \left\{ a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos\frac{2\pi k}{T_0} t + b_k \sin\frac{2\pi k}{T_0} t \right\} \right\} dt$$

- まず，積分と総和を入れ替え可能とすると

$$\int_0^{T_0} f(t)\,dt = \int_0^{T_0} a_0\,dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{T_0} a_k \cos\frac{2\pi k}{T_0} t\,dt + \int_0^{T_0} b_k \sin\frac{2\pi k}{T_0} t\,dt \right\}$$

$$\int_0^{T_0} f(t)\,dt = \int_0^{T_0} a_0\,dt + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int_0^{T_0} a_k \cos\frac{2\pi k}{T_0}t\,dt + \int_0^{T_0} b_k \sin\frac{2\pi k}{T_0}t\,dt\right\}$$

- 右辺のsinとcosは周期$T_0$にk個収まるので，正負の面積が同じになり0になる

$$\int_0^{T_0} \cos\left(\frac{2\pi m}{T_0}t\right)dt = \int_0^{T_0} \sin\left(\frac{2\pi m}{T_0}t\right)dt = 0$$

$$\int_0^{T_0} f(t)\,dt = \int_0^{T_0} a_0\,dt = T_0 a_0$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\,dt$$

# フーリエ級数$a_k, b_k$を求める　例えば$a_3$

- $a_3$は$\cos\left(\frac{2\pi\cdot 3}{T_0}t\right)$の係数なので，これを両辺に掛けて積分する

$$\int_0^{T_0} f(t)\cos\left(\frac{2\pi\cdot 3}{T_0}t\right)dt$$

$$= \int_0^{T_0}\left\{a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k \cos\frac{2\pi k}{T_0}t + b_k \sin\frac{2\pi k}{T_0}t\right\}\right\}\cos\left(\frac{2\pi\cdot 3}{T_0}t\right)dt$$

- 積分と総和の入れ替え
  - 同じもの以外のかけ算は直行しているので消える
  - 同じものは周期の半分

$$\int_0^{T_0} f(t)\cos\left(\frac{2\pi\cdot 3}{T_0}t\right)dt = \int_0^{T_0} a_3\cos\left(\frac{2\pi\cdot 3}{T_0}t\right)\cos\left(\frac{2\pi\cdot 3}{T_0}t\right)dt = \frac{a_3 T_0}{2}$$

$$a_3 = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cos\left(\frac{2\pi\cdot 3}{T_0}t\right)dt$$

# フーリエ係数を一般化すると

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos \frac{2\pi k}{T_0} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T_0} t \right\}$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t)\, dt$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos\left( \frac{2\pi \cdot k}{T_0} t \right) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin\left( \frac{2\pi \cdot k}{T_0} t \right) dt$$

# フーリエ係数をまとめて書く場合もある

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos \frac{2\pi k}{T_0} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T_0} t \right\}$$

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t)\, dt$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos\left( \frac{2\pi \cdot k}{T_0} t \right) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin\left( \frac{2\pi \cdot k}{T_0} t \right) dt$$

t=0で
含められる

# まとめて記述したフーリエ係数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos \frac{2\pi k}{T_0} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T_0} t \right\}$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos\left( \frac{2\pi \cdot k}{T_0} t \right) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin\left( \frac{2\pi \cdot k}{T_0} t \right) dt$$

# 積分と総和の入れ替え

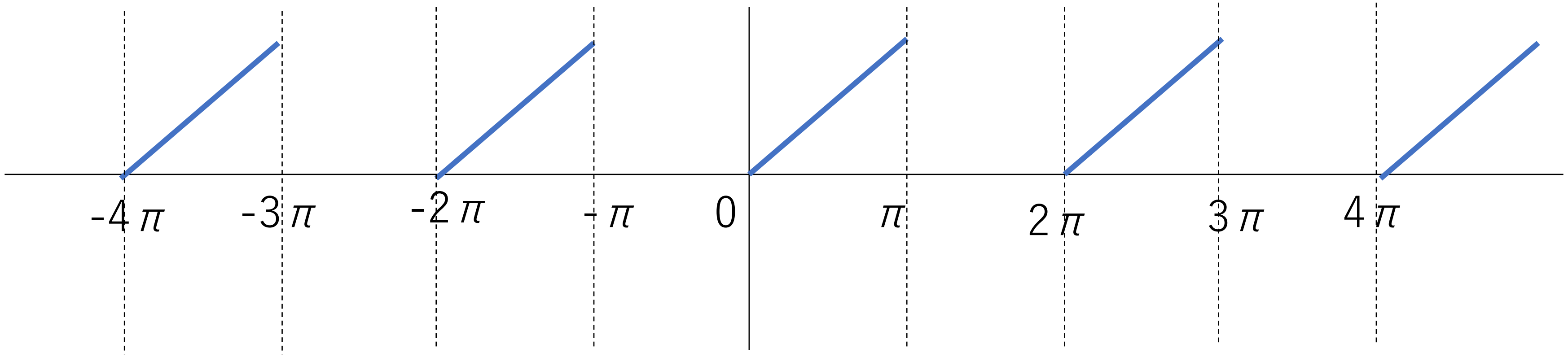
- 無限級数だから，いつでも成り立たない
- 成り立つ条件は，どんな項で構成されているか調べる
- しかし，フーリエ係数を求めようとしているためどんな項なのかわからない

つまり

- もしフーリエ級数展開の式のように記述できると仮定すると，積分と総和の入れ替えができる

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos \frac{2\pi k}{T_0} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T_0} t \right\}$$

# 実際にフーリエ係数を求めてみる




$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \pi \\ 0 & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

周期 $T_0 = 2\pi$

# $a_0$ を求める

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi} t\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} 0dt\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) \\
&= \frac{\pi^2}{4\pi} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

## $a_k$ を求める

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T_0}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\left(\frac{2\pi\cdot k}{T_0}t\right)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} t\cdot\cos(kt)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} 0\cdot\cos kt\,dt\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cdot\cos(kt)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\sin(kt)}{k}t\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{-\cos(kt)}{k}\cdot 1\,dt\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{(0-0) - \frac{1}{k}\left[\frac{-\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi}\right\} \\
&= \frac{-1}{\pi\cdot k^2}\left(-(-1)^k - (-1)\right) \\
&= -\frac{(-1)^{k-1}+1}{\pi\cdot k^2}
\end{aligned}
$$

部分積分

$\sin k\pi = 0$

$\cos k\pi = (-1)^k$

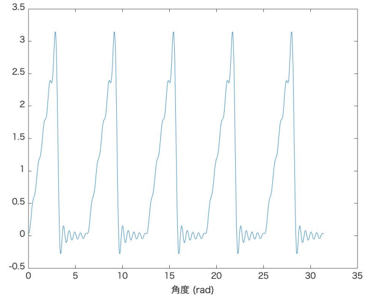
# $b_k$ を求める

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T_0}\int_0^{2\pi} f(t)\sin\left(\frac{2\pi k}{T_0}t\right)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} t\sin(kt)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} 0\cdot\sin(kt)\,dt\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{-\cos(kt)}{k}\cdot t\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{-\cos(kt)}{k}\cdot 1\,dt\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left(\frac{-\cos(k\pi)}{k}\pi - 0\right) + \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos(kt)\,dt\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{-\cos(k\pi)}{k}\pi + \frac{1}{k}\left[\frac{-\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi}\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{-\cos(k\pi)}{k}\pi + \frac{1}{k}\left(\frac{-\sin\pi t}{k} - 0\right)\right\} \\
&= \frac{-\cos(k\pi)}{k} \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{k}
\end{aligned}
$$

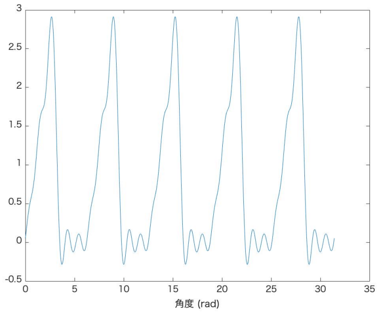
部分積分

$\sin k\pi = 0$

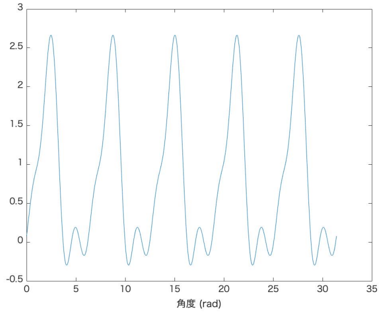
$\cos k\pi = (-1)^k$



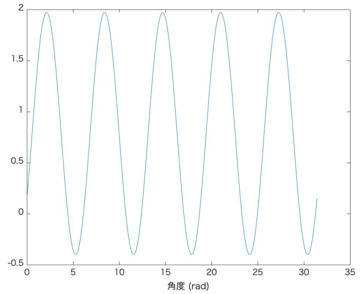

$k = 10$



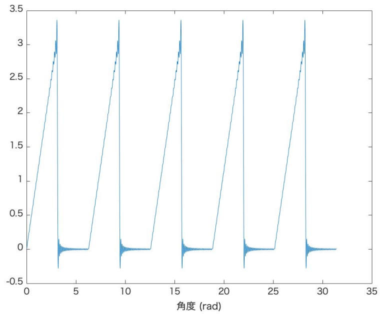

$k = 5$



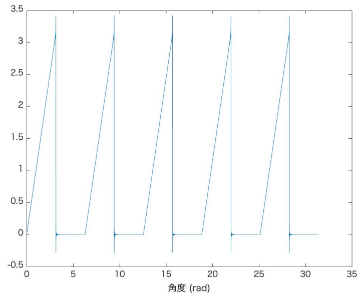

$k = 3$




$k = 1$




$k = 50$




$k = 1000$

# フーリエ級数

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{k} \left\{ -\frac{1 + (-1)^{n-1}}{n^2 \pi} \cos(nx) + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(nx) \right\}$$

# まとめ

- フーリエ級数
- フーリエ係数を求めた
- フーリエ級数の具体例

# 演習・宿題

- 以下の周期関数から一つえらび，フーリエ係数を計算で求めなさい．
  - 矩形波

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x\le\pi\\ -1 & \pi<x\le 2\pi\end{cases}$$

  - 三角波

$$f(x)=\begin{cases}2x & 0<x\le\frac{1}{2}\pi\\ -2(x-\pi) & \frac{1}{2}\pi<x\le\frac{3}{2}\pi\\ 2(x-2\pi) & \frac{3}{2}\pi<x\le 2\pi\end{cases}$$

  - 自分で考えた周期関数
- フーリエ係数を使って，Matlabでグラフを書きなさい．
  - いくつかのkの値を使って近似されていくことを確認しなさい

# 宿題の提出

- 必ずどれか1つは提出して下さい
- できるひとは全部やってください
  - 提出することが大切

- 提出物
  - 1: 紙とペンで計算したものを写真でとる or ドローイングソフトやtexでもOK
  - 2: グラフを比較したレポートをPDFで提出
  - 3: グラフ作成のためのmファイルも提出

- 提出方法と締切
  - LETUS
  - 10/16 23:59
    - 来週の夜まで