ゼミ資料6　p18 2.3 ～ p19 L5

11/27 B3 横溝尚也

Residual(残差) BIBD と Derived(派生) BIBD

定理 2.1 では symmetric な BIBD の任意の二つのブロックには λ 個の共通する点を持つことを学習した。これを踏まえて新たな BIBD を構成する。

派生デザイン (Derived design) ⋯ 点集合をあるブロック A_0、A_0 とその他のブロックの共通集合を新たなブロックとしたデザイン。$(X, \mathcal{A})$ が (v, k, λ)-BIBD とすると以下のように表せる。

$$\mathbf{Der}(X, \mathcal{A}, A_0) = (A_0, \{A \cap A_0 : A \in \mathcal{A}, A \neq A_0\})$$

残差デザイン (Residual design) ⋯ 点集合を X とあるブロック A_0 の差集合、A_0 とその他のブロックの差集合を新たなブロックとしたデザイン。$(X, \mathcal{A})$ が (v, k, λ)-BIBD とすると以下のように表せる。

$$\mathbf{Res}(X, \mathcal{A}, A_0) = (X \setminus A_0, \{A \setminus A_0 : A \in \mathcal{A}, A \neq A_0\})$$

定理 2.8

$(X, \mathcal{A})$ が *symmetric* な (v, k, λ)-BIBD,$A_0 \in \mathcal{A}$ に対して、$\mathbf{Der}(X, \mathcal{A}, A_0)$ は $(k, \lambda, \lambda-1)$-BIBD、$\mathbf{Res}(X, \mathcal{A}, A_0)$ は $(v-k, k-\lambda, \lambda)$-BIBD である。

例.1)　$(X, \mathcal{A})$ を以下の symmetric(7,4,2)-BIBD[1]とする。

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

$\mathcal{A} = \{1234, 1257, 1367, 1456, 2356, 2467, 3457\}$

このとき、$\mathbf{Der}(X, \mathcal{A}, A_0 = 1234)$ を考える。$\{A \cap A_0 : A \in \mathcal{A}, A \neq A_0\} = \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}$ より、$X' = A_0, \mathcal{A}' = \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}$ とすると、$\mathbf{Der}(X, \mathcal{A}, A_0) = (X', \mathcal{A}')$ であり、これは (4,2,1)-BIBD であることがわかる。

次に $\mathbf{Res}(X, \mathcal{A}, A_0 = 1234)$ を考える。 $X \setminus A_0 = \{567\}, \{A \setminus A_0 : A \in \mathcal{A}, A \neq A_0\} = \{57, 67, 56, 56, 67, 57\}$ より、$X' = \{5, 6, 7\}, \mathcal{A}' = \{57, 67, 56, 56, 67, 57\}$ とすると、$\mathbf{Res}(X, \mathcal{A}, A_0) = (X', \mathcal{A}')$ であり、これは (4,2,2)-BIBD であることがわかる。

例.2)　$(X, \mathcal{A})$ を以下の symmetric(7,3,1)-BIBD とする。

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

$\mathcal{A} = \{123, 145, 167, 246, 257, 347, 356\}$

このとき、$\mathbf{Der}(X, \mathcal{A}, A_0 = 145)$ を考える。$\{A \cap A_0 : A \in \mathcal{A}, A \neq A_0\} = \{1, 1, 4, 5, 4, 5\}$ より、$X' = A_0, \mathcal{A}' = \{1, 1, 4, 5, 4, 5\}$ とすると、$\mathbf{Der}(X, \mathcal{A}, A_0) = (X', \mathcal{A}')$ であり、これは (3,1,0)-BIBD であることがわかる。

次に $\mathbf{Res}(X, \mathcal{A}, A_0 = 145)$ を考える。 $X \setminus A_0 = \{2, 3, 6, 7\}, \{A \setminus A_0 : A \in \mathcal{A}, A \neq A_0\} = \{23, 67, 26, 27, 37, 36\}$ より、$X' = \{2, 3, 6, 7\}, \mathcal{A}' = \{23, 67, 26, 27, 37, 36\}$ とすると、$\mathbf{Res}(X, \mathcal{A}, A_0) = (X', \mathcal{A}')$ であり、これは (4,2,1)-BIBD であることがわかる。

[1] $\lambda(v-1) = k(k-1)$ が成立するため、*symmetric* であることがわかる

定理 2.8 の説明

$\mathbf{Der}(X, \mathcal{A}, A_0)$ が $(k, \lambda, \lambda - 1)$-BIBD であることについて

- 点集合の濃度 $|A_0|$ は元のBIBDのブロックサイズであり、k
- 定理 2.1 より、symmetric な BIBDのブロックにはλ 個の共通要素を持つため、$|A \cap A_0| = \lambda$ よりブロックサイズはλ
- 点集合 A_0内の任意の点 x, y の会合数は、ブロックから A_0は除くため、$\lambda - 1$

$\mathbf{Res}(X, \mathcal{A}, A_0)$ が $(v - k, k - \lambda, \lambda)$-BIBD であることについて

- 点集合の濃度 $|X \setminus A_0|$ は、(元の点集合の濃度 v) - (ブロックサイズ k) = v - k
- $|A \cap A_0| =\lambda$ より、ブロック $A \setminus A_0$ はブロックサイズ $k - \lambda$
- 点集合の要素は減るが、会合数は変化せずλ