

# 複雑さの理論5

創域理工学部 情報計算科学科 入山聖史

# 差分方程式

- 微分方程式：時間に対して連続な力学系→解析的に解けない
- 時間を離散化( $t = 0, 1, 2, \dots$ )し，不連続な力学系を得る
- Newton法
- Verlet法
- Runge-Kutta法, etc...
- 差分方程式

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$$x_n = f^n(x_0)$$

$x_0$  :時刻 $t = 0$ での解

- (例)バクテリアの個体数

$x$  :ある時刻の実験室培地での個体数

$f(x)$  :1時間後の個体数

$$f(x) = 2x$$

$x_0 = 10000$  とすると,

$$f(10000) = 20000$$

$$f(f(10000)) = 40000$$

...

→初期値が正ならば, 限りなく増える(指数的成長)

- 実際には有限の資源
- 成長には限界がある (Malthus, 1798)
- モデルの改良

$$g(x) = 2x(1 - x)$$

- 個体数が0に近いとき

$$1 - x \simeq 1$$

$$g(x) \simeq f(x)$$

- 0から離れる → 個体数に比例しない
- → ロジスティック成長モデル

# ロジスティックモデル

n	$f^n(x)$	$g^n(x)$
0	0.01	0.01
1	0.02	0.0198
2	0.04	0.0388...
⋮	⋮	⋮
5	0.32	0.2381
⋮	⋮	⋮
10	10.24	0.49998...
11	20.48	0.499999...
12	40.96	0.5
⋮	⋮	0.5

$g(x)$ は個体数が定常状態( $x=0.5$ )に落ち着く

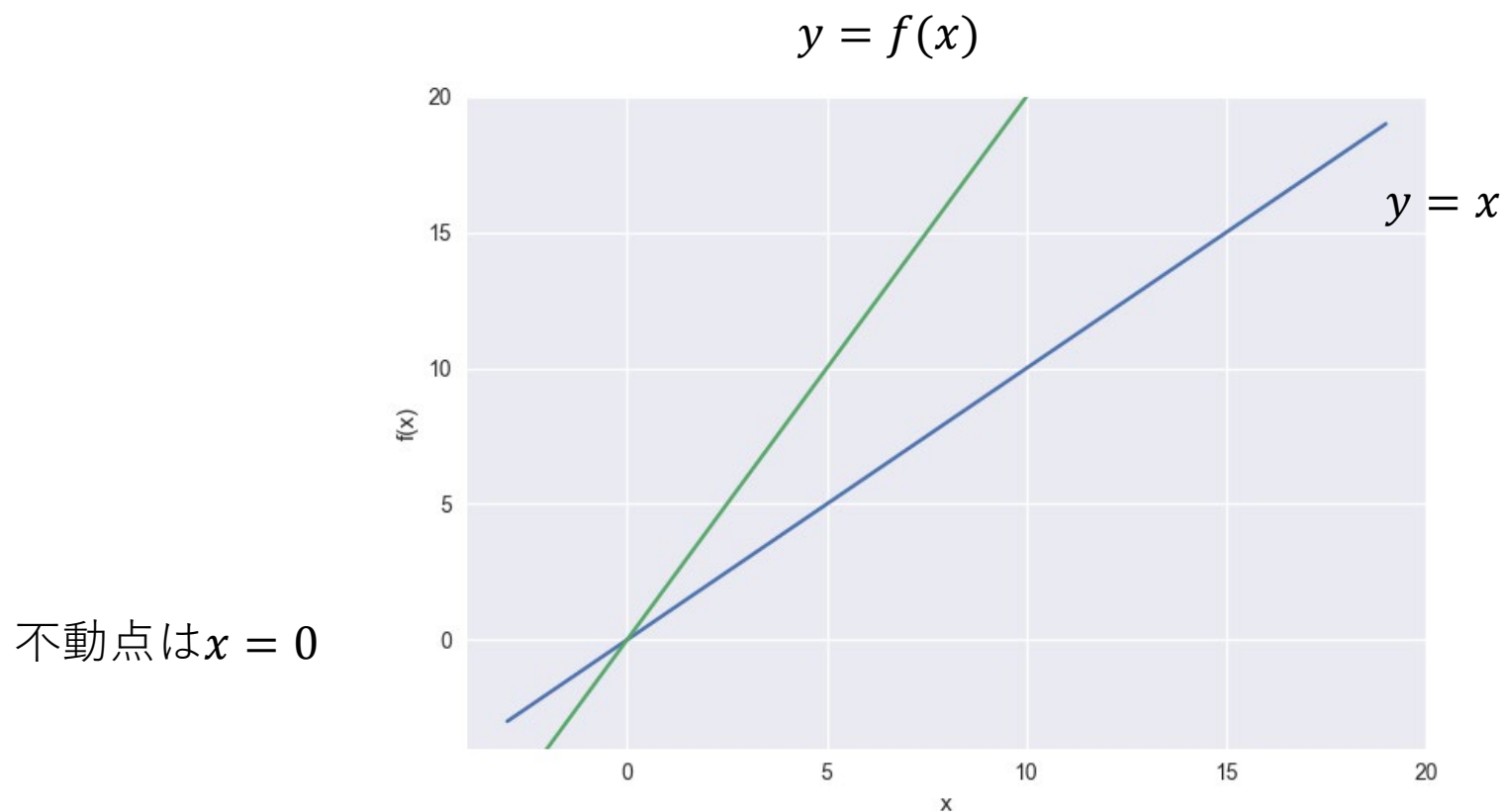
- 定義：  $f$  を写像とし  $f$  の定義域を  $D$  とする． 初期値  $x \in D$  に対し

$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= \{x, f(x), f^2(x), \dots\} \\ &= \{f^n(x) | n = 0, 1, 2, \dots\}\end{aligned}$$

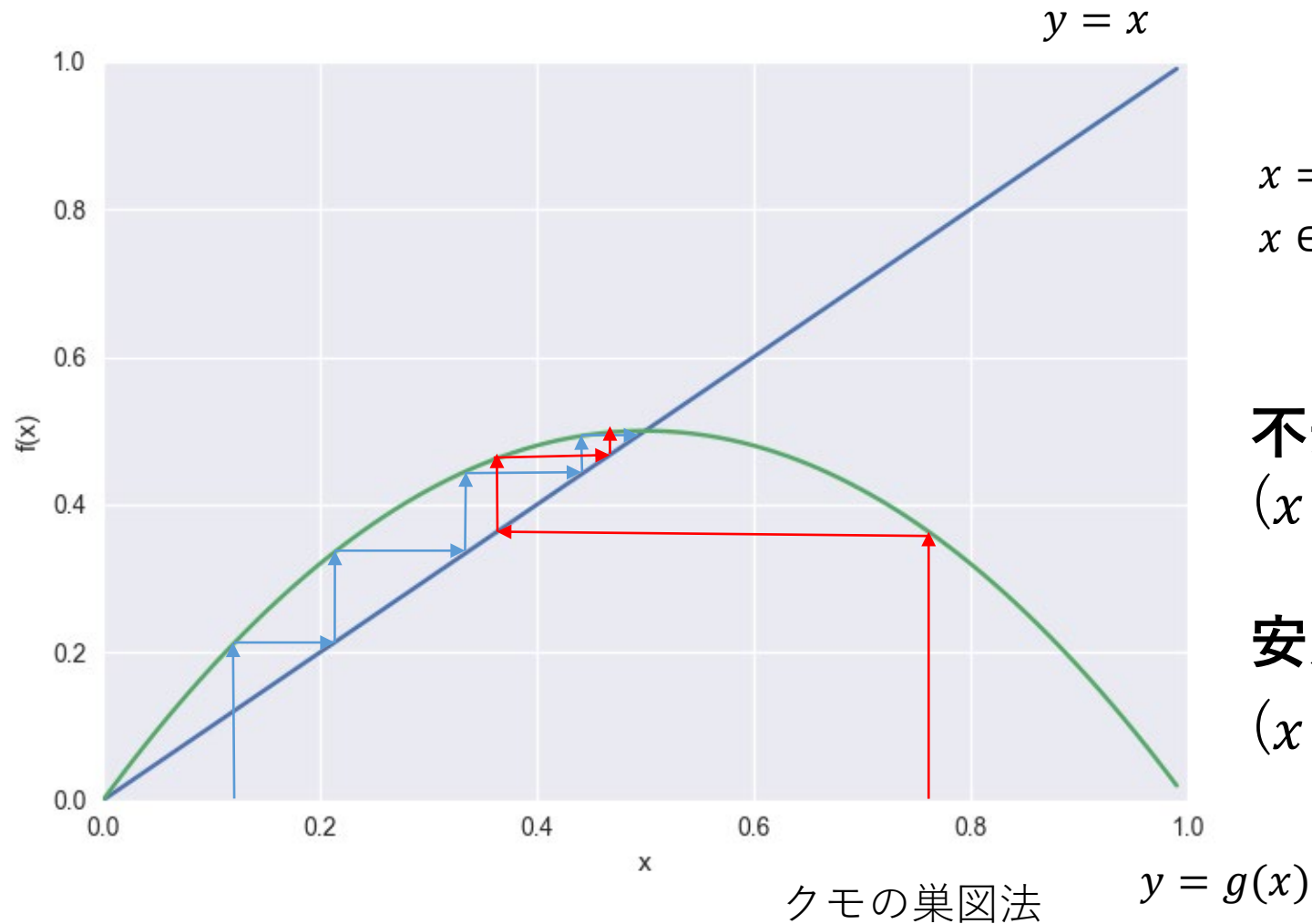
を軌道という．  $f(p) = p$  ならば点  $p$  は  $f$  の**不動点**であるという．

- 例：  $g(x)$  の不動点は  $x = 0, \frac{1}{2}$  である．

- グラフによる軌道の表現
- クモの巣図法, 関数 $f$ のグラフを対角線 $y = x$ と共に描く  
→  $f$ の不動点の位置がわかる
- 例,  $f(x) = 2x$



- 例,  $g(x) = 2x(1 - x)$
- $x = 2x(1 - x)$ を解いて,  $x = 0, \frac{1}{2}$ を得る.  $\rightarrow$ 2つの不動点



$x = 0, 1$ の軌道は $x = 0$ に収束  
 $x \in (0, 1)$ の軌道は $x = \frac{1}{2}$ に収束

**不安定な不動点：**付近の点は離れる  
 $(x = 0)$

**安定な不動点：**付近の点は近づく  
 $(x = \frac{1}{2})$



- $f$ を写像,  $p$ を不動点とする

$$|f'(p)| < 1 \quad \Rightarrow p \text{は吸引的不動点}$$

$$|f'(p)| > 1 \quad \Rightarrow p \text{は反発的不動点}$$

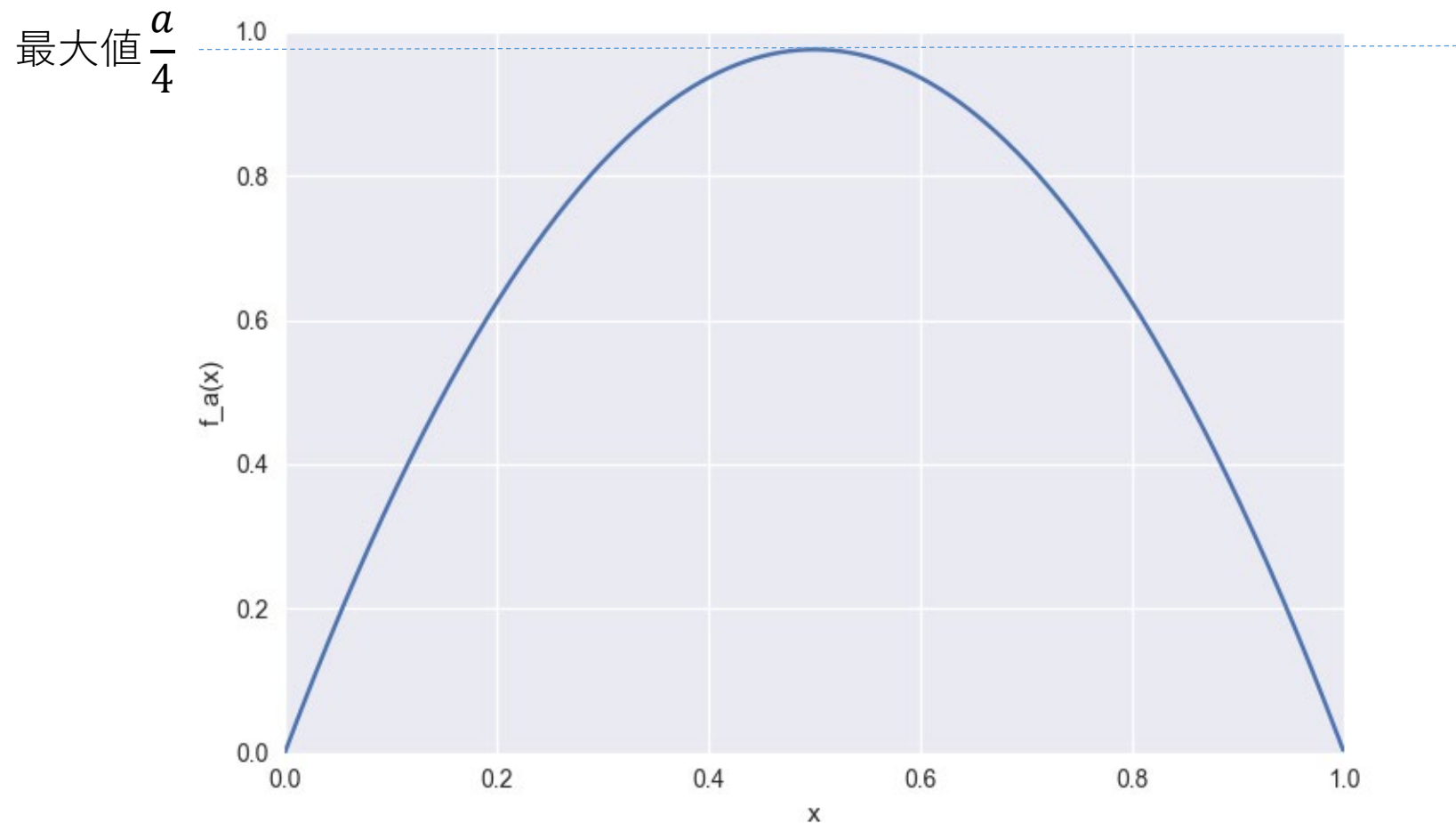
$$\begin{aligned} g'(x) &= 2(1 - x) - 2x \\ &= 2 - 4x \end{aligned}$$

$$g'(0) = 2 > 1 \quad \Rightarrow x = 0 \text{は反発的不動点}$$

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 < 1 \quad \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{は吸引的不動点}$$

- ロジスティック写像 (パラメータ  $a \in [0, 4]$ )

$$f_a(x) = ax(1 - x) \quad x \in [0, 1]$$



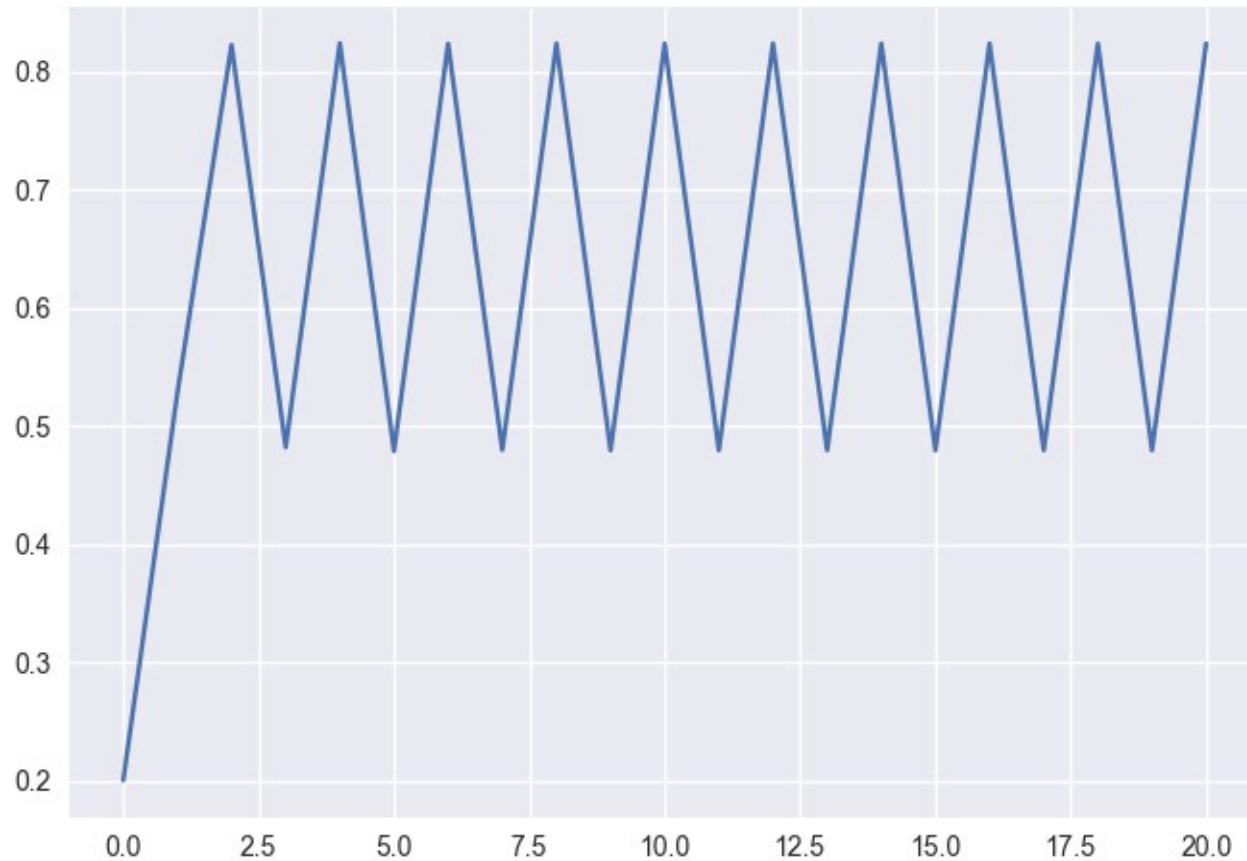
- $a = 3.3$ としたとき，不動点は

$$x = 0, \frac{23}{33} = 0.696969 \dots$$

- 両方とも反発的不動点
- → 吸引的不動点なし． 軌道はどこへ向かうか？

n	$f^n(x)$		
0	0.2	0.5	0.95
⋮	⋮	⋮	⋮
8	0.8236	0.4795	0.4803
9	0.4796	0.8236	0.8237
10	0.8236	0.4796	0.4792
11	0.4796	0.8236	0.8236
12	0.8236	0.4796	0.4796

- 軌道は  $p_1 = 0.4794, p_2 = 0.8236$  が交互に出現



$$f_{3.3}(p_1) = p_2$$

$$f_{3.3}(p_2) = p_1$$

したがって,  $p_1, p_2$  は

$$(f_{3.3})^2(x)$$

の不動点である.

- 定義：  $f$  を  $\mathbb{R}$  上の写像とする．  $p$  が周期  $k$  の周期点であるとは，

$$f^k(p) = p$$

であり，  $k$  がこれをみたす最小の正の整数であることをいう

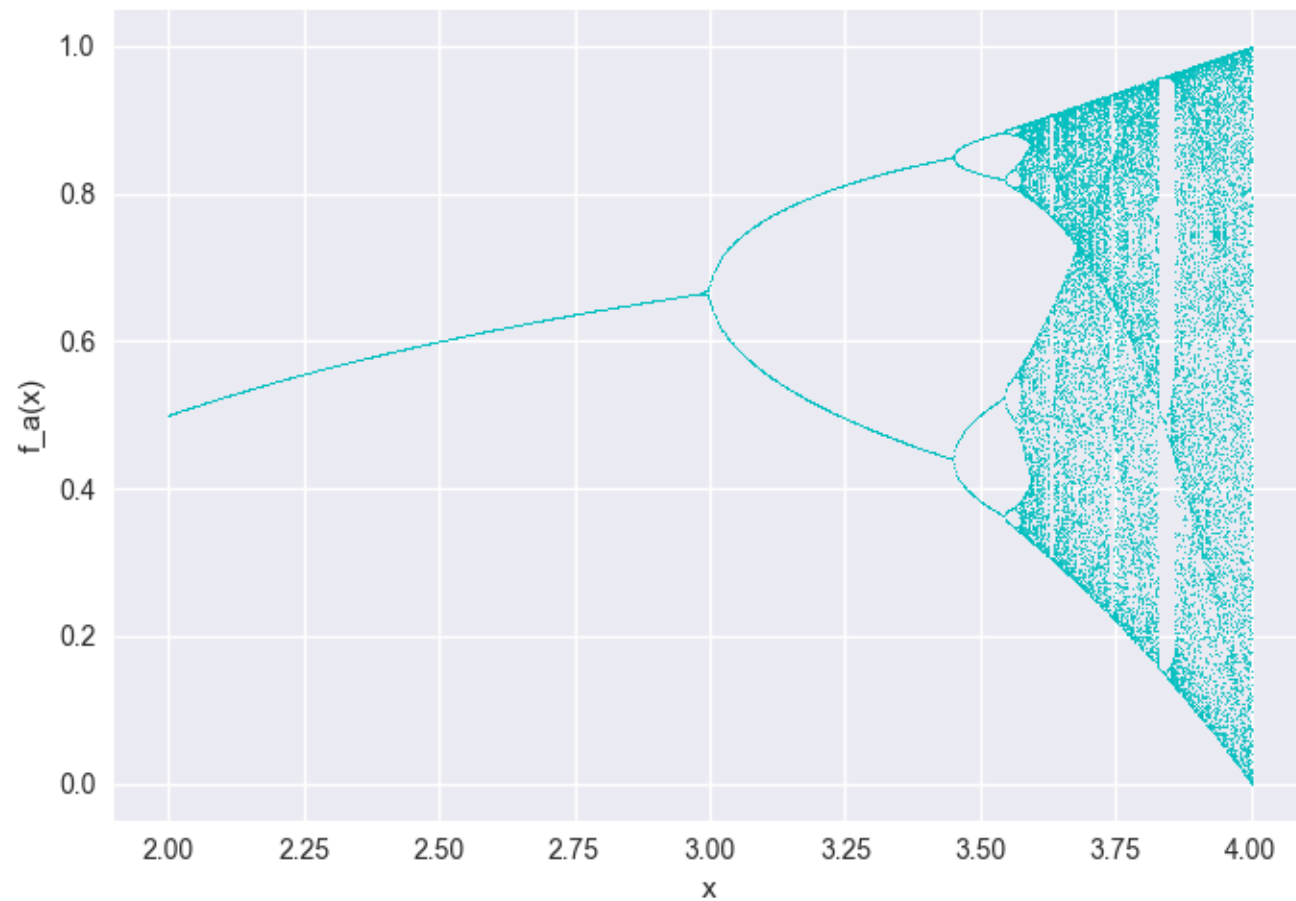
- この初期値  $p$  の軌道を  **$k$  周期軌道** という
- $f_{3.3}$  は 2 周期軌道をもつ
- すべてのパラメータ  $a$  で， 同じ周期をもつか？

# 分岐図

$$f_a(x) = ax(1 - x)$$

について，計算機を用いて次の手順で作図

- Step1 パラメータ $a$ を選ぶ
- Step2 初期値 $x \in (0,1)$ を適当に選ぶ
- Step3  $f_a(x)$ を計算し，ある程度長い軌道を得る
- Step4 初めの軌道（100くらい）を無視し，軌道をプロット
- Step5  $a$ を変えてくり返す



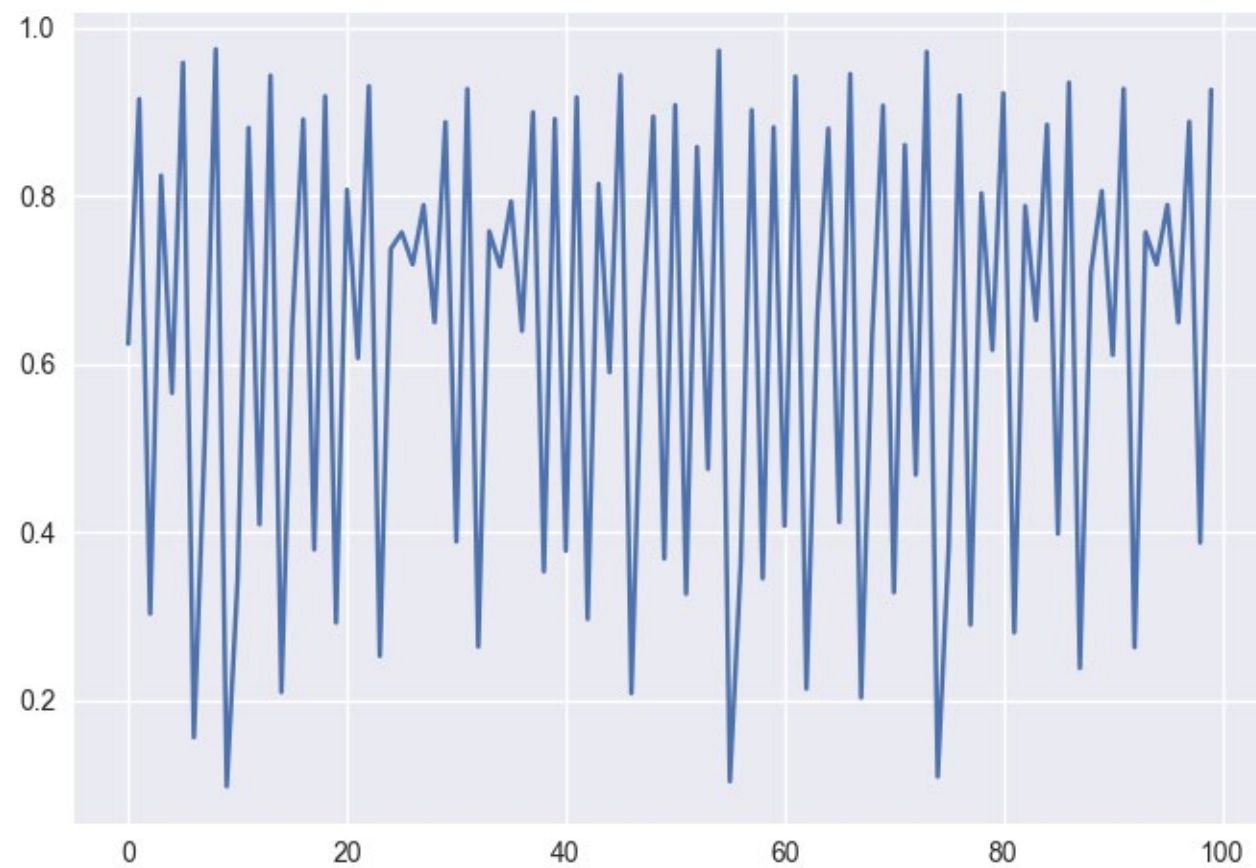
$a = 3.3$ , 2周期

$a = 3.5$ , 4周期

$a = 3.7$ , 無数の周期点

$a = 3.85$ , カオスの窓

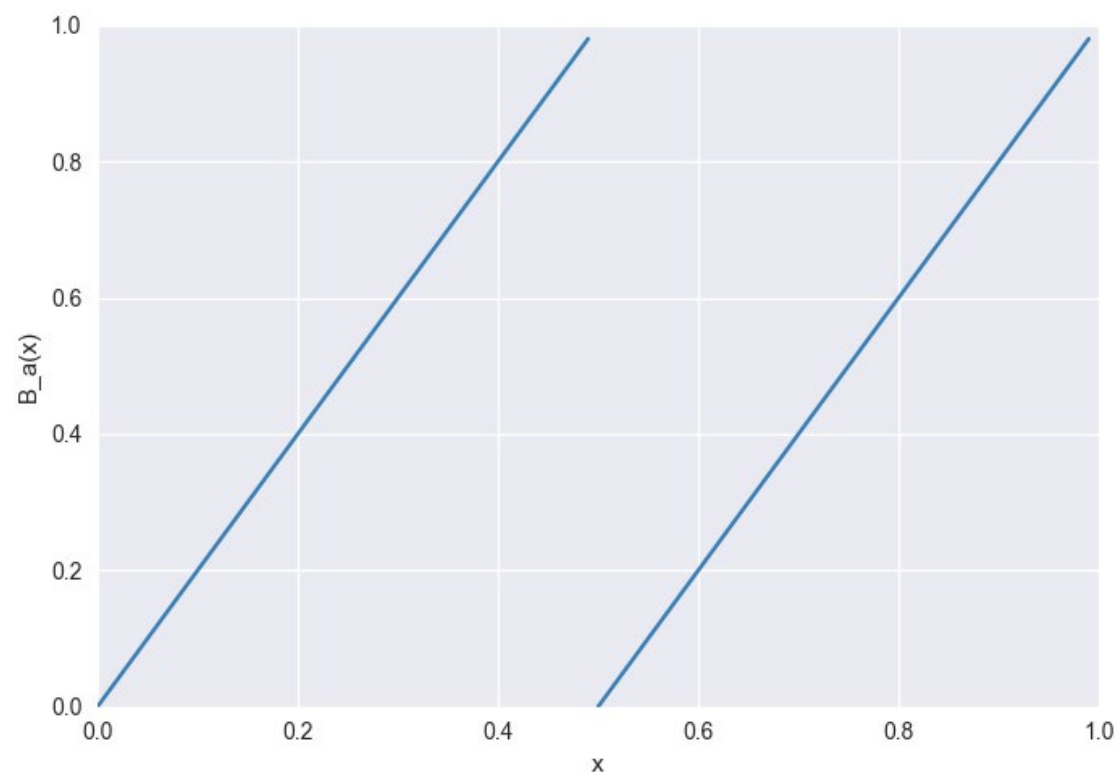
- $a = 3.9 \rightarrow$  カオス的な軌道

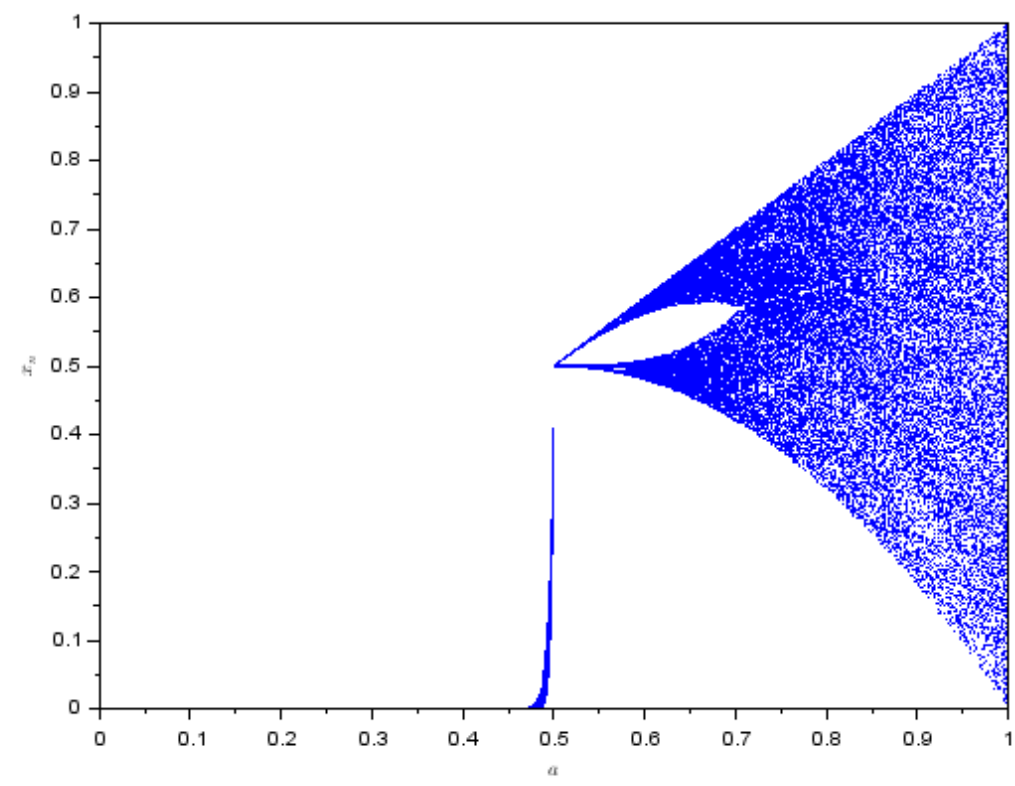




- 2進変換 (Bernoulli shift)

- $0 \leq a \leq 1, x_{n+1} = B_a(x_n) = \begin{cases} 2ax_n, & 0 \leq x_n < \frac{1}{2} \\ a(2x_n - 1), & \frac{1}{2} \leq x_n \leq 1 \end{cases}$





# まとめ

- ロジスティックモデル
- 不動点と，不動点の2つの性質
- $k$ 周期軌道