多変量解析 第 5 回:線形結合の分布 平方根の性質 平方却

1:12 AM GMT

平方根の性質 $\sqrt{a^2} = |a|$ より,

$$\sqrt{|\mathbf{\Sigma}|} = \sqrt{|C|^2} = \mod |C|$$

であることに注意しよう.

2変量正規分布の密度関数・

統計解析フリーソフトRを用いて2変量正規分布のpdfを描くことが できます(図3). 平均ベクトルと共分散行列の設定は、以下のソー スコードから読み取って下さい.

参考:http://www.f.waseda.jp/sakas/R/Rgraphics17.html#persp

```
norm2 = function(x1,x2,r=0.6) {
\exp(-(x1^2+x2^2-2*r*x1*x2)/2/(1-r^2)) / 2/pi/sqrt(1-r^2)
x1 = x2 = seq(-3, 3, length=50)
f = outer(x1, x2, norm2)
persp(x1, x2, f)
```

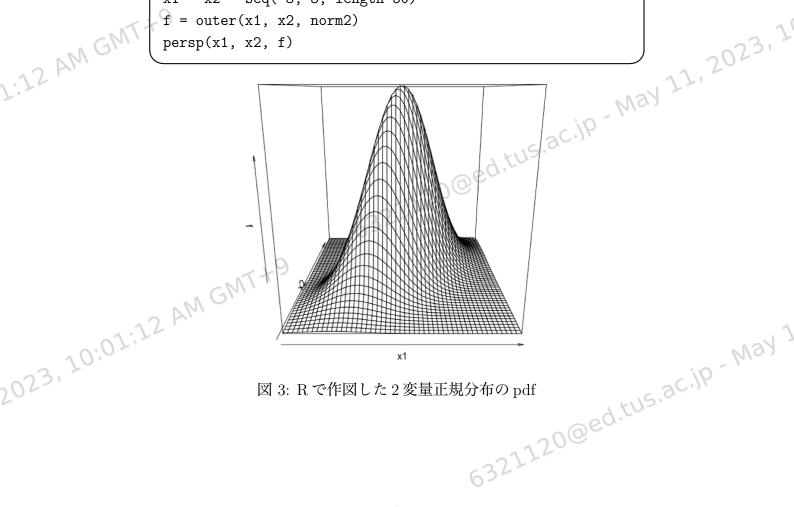


図 3: R で作図した2変量正規分布のpdf

この節では,p変量正規分布に従う確率ベクトルXの線形結合の分布 について考える.

 μ 変量正規分布に従うと μ 、 μ 変量正規分布に従うと μ 、 μ 変量正規分布に従う。 μ 変量正規分布に従う。 証明. μ な正則行列であるから、逆変換は μ 0 である。したがって、変数変換のヤコビアンは μ 1 である。

証明.
$$m{C}$$
 は正則行列であるから,逆変換は $m{x} = m{C}^{-1}m{y}$ である。したがって,変数変換のヤコビアンは $J(y_1,\dots,y_p) = \mod |m{C}^{-1}| = rac{1}{\mod |m{C}|} = \sqrt{rac{|m{\Sigma}|}{|m{C}|\Sigma|}} = \sqrt{rac{|m{\Sigma}|}{|m{C}|m{\Sigma}|m{C}'|}}$ より $J(y_1,\dots,y_p) = rac{|m{\Sigma}|^{1/2}}{|m{C}m{\Sigma}m{C}'|^{1/2}}$ また,指数部の二次形式は,

より

$$J(y_1,\ldots,y_p)=rac{|oldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}{|oldsymbol{C}oldsymbol{\Sigma}oldsymbol{C}'|^{1/2}}$$

$$J(y_1,\dots,y_p)=rac{|\Sigma|^{1/2}}{|C\Sigma C'|^{1/2}}$$

また、指数部の二次形式は、 $(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)=(C^{-1}y-\mu)'\Sigma^{-1}(C^{-1}y-\mu) = (C^{-1}y-C^{-1}C\mu)'\Sigma^{-1}(C^{-1}y-C^{-1}C\mu) = (y-C\mu)'(C^{-1})'\Sigma^{-1}C^{-1}(y-C\mu) = (y-C\mu)'(C\Sigma C')^{-1}(y-C\mu)$

したがって、
$$Y$$
の pdf は、
$$g(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}))J(y_1,\ldots,y_p)$$
$$= \frac{|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}{|\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{C}'|^{1/2}}\frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu})'(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{C}')^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu})\right]$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{C}'|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu})'(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{C}')^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu})\right]$$
これは、平均ベクトル $\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 、共分散行列 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{C}'$ の p 变量正規分布の p df である。

6321120@ed.tus.ac.jp-May 1 これは、平均ベクトルCy、共分散行列 $C\Sigma C'$ のp変量正規分布のpdfで

多変量解析 第5回:線形結合の分布 次に,確率ベクトップでいく つ へい、唯率ベクトル X を分割したときに導かていく。そこで、次の記法を用いることにする。

$$\mathbf{X}^{(1)} = (X_1, \dots, X_q)'$$

 $\mathbf{X}^{(2)} = (X_{q+1}, \dots, X_p)'$

だたし、q < pである。このとき、

$$X = ((X^{(1)})'(X^{(2)})')' = (X_1, \dots, X_p)'$$
 (6)

 $m{X} = ((m{X}^{(1)})' (m{X}^{(2)})')' = (X_1, \dots, X_p)'$ $m{Z}$ ベクトル $m{X}$ が結合分布を持つとすれば と表される。確率ベクトルXが結合分布を持つとすれば、期待値ベクト ルは.

Ex.
$$E(\mathbf{X}^{(1)}) = (\mu_1, \dots, \mu_q)' = \boldsymbol{\mu}^{(1)}, \quad E(\mathbf{X}^{(2)}) = (\mu_{q+1}, \dots, \mu_p)' = \boldsymbol{\mu}^{(2)}$$

と表され, 共分散行列は,

$$E\left((\boldsymbol{X}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)})(\boldsymbol{X}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)})'\right) = \Sigma_{11}$$

$$E\left((\boldsymbol{X}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)})(\boldsymbol{X}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})'\right) = \Sigma_{12}$$

$$E\left((\boldsymbol{X}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})(\boldsymbol{X}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)})'\right) = \Sigma_{21}$$

$$E\left((\boldsymbol{X}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})(\boldsymbol{X}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})'\right) = \Sigma_{22}$$

1:12 AM GMT+9 $\mathcal{L}_{((\mathbf{A}^{(2)}-oldsymbol{\mu}^{(2)})}(\mathbf{X}^{(2)}-oldsymbol{\mu}^{(2)})')=\Sigma_{22}$ と表される。ただし, $\Sigma'_{12}=\Sigma_{21}$ である。式(6)のように表される確率ベクトル \mathbf{X} に対して,

クトル
$$X$$
 に対して,
$$E(X) = \mu = \begin{pmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{pmatrix}, \quad V(X) = \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$
 と表されることに注意する.

定理 2. X が平均ベクトル μ ,共分散行列 Σ の p 変量正規分布に従うと する. $oldsymbol{X}^{(1)}$ と $oldsymbol{X}^{(2)}$ が独立であるための必要十分条件は $oldsymbol{\Sigma}_{12}=oldsymbol{\Sigma}_{21}'=oldsymbol{O}$ 正明. $oldsymbol{X}^{(1)}$ と $oldsymbol{X}^{(2)}$ が独立であることを仮定し, $oldsymbol{\Sigma}_{12}=oldsymbol{\Sigma}_{21}'=oldsymbol{O}$ を示す。

6321120@ed.tus.ac.jp-May 1

多変量解析 第 5 回:線形結合の分布 X(1) の第 *i* 成分 X(1)

$$\sigma_{ij} = E\left((X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) f(x_1, \dots, x_p; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) dx_1 \cdots dx_p$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)$$

$$\times f(x_1, \dots, x_q; \boldsymbol{\mu}^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma}_{11}) f(x_{q+1}, \dots, x_p; \boldsymbol{\mu}^{(2)}, \boldsymbol{\Sigma}_{22}) dx_1 \cdots dx_p$$

$$= \boxed{\ddot{\mathbf{k}} \boldsymbol{\delta} \mathcal{O} \ddot{\mathbf{g}} \mathbf{g}}$$

$$= 0$$
したがって、 $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \boldsymbol{\Sigma}'_{21} = \boldsymbol{O}$ を得る。
次に、 $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \boldsymbol{\Sigma}'_{21} = \boldsymbol{O}$ を仮定し、 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ と $\boldsymbol{X}^{(2)}$ が独立であることを示す。仮定より、

$$oldsymbol{\Sigma} = \left(egin{array}{cc} oldsymbol{\Sigma}_{11} & oldsymbol{O} \ oldsymbol{O} & oldsymbol{\Sigma}_{22} \end{array}
ight)$$

1:12 AM GM であり,その逆行列は,

$$oldsymbol{\Sigma}^{-1} = \left(egin{array}{cc} oldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} & oldsymbol{O} \ oldsymbol{O} & oldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \end{array}
ight)$$

である。このとき、指数部の二次形式は、

$$\Sigma = \left(\begin{array}{cc} O & \Sigma_{22} \end{array}\right)$$
 であり、その逆行列は、
$$\Sigma^{-1} = \left(\begin{array}{cc} \Sigma_{11}^{-1} & O \\ O & \Sigma_{22}^{-1} \end{array}\right)$$
 である。このとき、指数部の二次形式は、
$$(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu) \\ = \left((x^{(1)}-\mu^{(1)})'\left(x^{(2)}-\mu^{(2)}\right)'\right) \left(\begin{array}{cc} \Sigma_{11}^{-1} & O \\ O & \Sigma_{22}^{-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} x^{(1)}-\mu^{(1)} \\ x^{(2)}-\mu^{(2)} \end{array}\right) \\ = \left((x^{(1)}-\mu^{(1)})'\Sigma_{11}^{-1}\left(x^{(2)}-\mu^{(2)})'\Sigma_{22}^{-1}\right) \left(\begin{array}{cc} x^{(1)}-\mu^{(1)} \\ x^{(2)}-\mu^{(2)} \end{array}\right) \\ = \left(x^{(1)}-\mu^{(1)}\right)'\Sigma_{11}^{-1}(x^{(1)}-\mu^{(1)}) + (x^{(2)}-\mu^{(2)})'\Sigma_{22}^{-1}(x^{(2)}-\mu^{(2)}) \\$$
 である。また、
$$|\Sigma| = |\Sigma_{11}||\Sigma_{22}|$$
 (7)

$$|\mathbf{\Sigma}| = |\mathbf{\Sigma}_{11}||\mathbf{\Sigma}_{22}$$

多変量解析 第 5 回:線形結合の分布 であることから、∑

$$f(x_1, \dots, x_p; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$
= 読者の演習
$$= \frac{1}{(2\pi)^{q/2} |\boldsymbol{\Sigma}_{11}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)})' \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} (\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)})\right]$$
× $\frac{1}{(2\pi)^{(p-q)/2} |\boldsymbol{\Sigma}_{22}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})' \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} (\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})\right]$
 $\boldsymbol{\sigma}$ る。ここで、
$$\frac{1}{(2\pi)^{q/2} |\boldsymbol{\Sigma}_{11}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)})' \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} (\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)})\right]$$

$$= f(\boldsymbol{x}^{(1)}; \boldsymbol{\mu}^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{(p-q)/2} |\boldsymbol{\Sigma}_{22}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})' \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} (\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})\right]$$

である. ここで,

$$\frac{1}{(2\pi)^{q/2}|\boldsymbol{\Sigma}_{11}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)})'\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}(\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)})\right]
= f(\boldsymbol{x}^{(1)}; \boldsymbol{\mu}^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma}_{11})
\frac{1}{(2\pi)^{(p-q)/2}|\boldsymbol{\Sigma}_{22}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})'\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})\right]
= f(\boldsymbol{x}^{(2)}; \boldsymbol{\mu}^{(2)}, \boldsymbol{\Sigma}_{22})$$

$$(2\pi)^{(p-q)/2} | \mathbf{\Sigma}_{22}|^{1/2} \operatorname{Cap} \left[2^{\operatorname{cap}} \mathbf{\mu}^{-1} \right] \mathbf{\Sigma}_{22} (\mathbf{x}^{-1} \mathbf{\mu}^{-1}) \right]$$

$$= f(\mathbf{x}^{(2)}; \mathbf{\mu}^{(2)}, \mathbf{\Sigma}_{22})$$
とおく、このとき、 $\mathbf{X}^{(1)}$ の周辺 pdf は、
$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_p; \mathbf{\mu}, \mathbf{\Sigma}) dx_{q+1} \cdots dx_p$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}^{(1)}; \mathbf{\mu}^{(1)}, \mathbf{\Sigma}_{11}) f(\mathbf{x}^{(2)}; \mathbf{\mu}^{(2)}, \mathbf{\Sigma}_{22}) dx_{q+1} \cdots dx_p$$

$$= f(\mathbf{x}^{(1)}; \mathbf{\mu}^{(1)}, \mathbf{\Sigma}_{11}) \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}^{(2)}; \mathbf{\mu}^{(2)}, \mathbf{\Sigma}_{22}) dx_{q+1} \cdots dx_p$$

$$= f(\mathbf{x}^{(1)}; \mathbf{\mu}^{(1)}, \mathbf{\Sigma}_{11})$$
同様にして、 $\mathbf{X}^{(2)}$ の周辺 pdf は、
$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_p; \mathbf{\mu}, \mathbf{\Sigma}) dx_1 \cdots dx_q = \boxed{読者の演習}$$

$$f(x^{(1)}; \boldsymbol{\mu}^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$$
 同様にして、 $\boldsymbol{X}^{(2)}$ の周辺 pdf は、
$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_p; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) dx_1 \cdots dx_q = \begin{bmatrix} 読者の演習 \end{bmatrix}$$
 $= f(\boldsymbol{x}^{(2)}; \boldsymbol{\mu}^{(2)}, \boldsymbol{\Sigma}_{22})$ したがって、 $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \boldsymbol{\Sigma}_{21}' = \boldsymbol{O}$ のとき、確率ベクトル \boldsymbol{X} の pdf は \boldsymbol{X} 周辺 pdf と $\boldsymbol{X}^{(2)}$ の周辺 pdf との積で表せる。すなわち、 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ と \boldsymbol{X} 独立である。

6321120@ed.tus.ac.jp-May 1 したがって, $oldsymbol{\Sigma}_{12} = oldsymbol{\Sigma}_{21}' = oldsymbol{O}$ のとき,確率ベクトル $oldsymbol{X}$ の pdf は $oldsymbol{X}^{(1)}$ の 周辺 pdf と $oldsymbol{X}^{(2)}$ の周辺 pdf との積で表せる。すなわち、 $oldsymbol{X}^{(1)}$ と $oldsymbol{X}^{(2)}$ は

問1 式(7)が成り立つことを証明する.

である。このことから,

$$|\Sigma| = \left|egin{array}{ccc} \Sigma_{11} & O \ O & (m{ec{ riangle}}) \end{array}
ight| \left|egin{array}{ccc} I_q & O \ O & \Sigma_{22} \end{array}
ight|$$

であり、右辺に対して余因子展開を用いて を得る。 $|oldsymbol{\Sigma}| = |oldsymbol{\Sigma}_{11}||oldsymbol{\Sigma}_{22}|$

$$|\mathbf{\Sigma}| = |\mathbf{\Sigma}_{11}||\mathbf{\Sigma}_{22}|$$

文中の(ア)に当てはまるものとして,次の f 0 ~ f 0 のうちから適切なものを一つ選べ. f 1 f 0 $f I_p$ f 2 $f I_q$

問2 X が平均ベクトル μ , 共分散行列

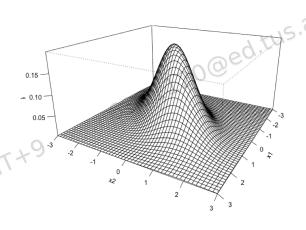
遅べ、
$$oxed{1}$$
 $oxed{I}_q$ $oxed{3}$ $oxed{I}_{p-q}$ $oxed{4}$ $oxed{I}_{q-p}$ $oxed{u}$, 共分散行列 $oxed{\Sigma} = egin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 & 0 \ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \ 0 & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$ に従うとするとき、 (A) である。

C1.12 AM GMT+9

6321120@ed.tus.ac.jp - May 1

1:12 AM GMT+9

- 多変量解析 第5回:線形結合の分布 **問3** 定理 2「X かっこ に従うとする。 $X^{(1)}$ と $X^{(2)}$ が独立であるための必要十分条件は $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}' = O$ である」の証明から導かれることとして、次の (1 ~ 4 のうちから適切なものを一つ選べ.
 - (1) X が平均ベクトル μ ,共分散行列 Σ の p 変量正規分布に従うと する. $X^{(1)}$ の従う分布は,平均ベクトル $\mu^{(2)}$,共分散行列 Σ_{22} の q 変量正規分布である.
 - ② X が平均ベクトル μ , 共分散行列 Σ の p 変量正規分布に従うと する. $oldsymbol{X}^{(1)}$ の従う分布は,平均ベクトル $oldsymbol{\mu}^{(1)}$,共分散行列 $oldsymbol{\Sigma}_{11}$ のp-q変量正規分布である。
 - $oxed{3}$ $oxed{X}$ が平均ベクトル $oldsymbol{\mu}$,共分散行列 $oxed{\Sigma}$ の $oldsymbol{p}$ 変量正規分布に従うと する、 $\Sigma_{12}=\Sigma_{21}'=O$ であるとき、 $oldsymbol{X}^{(1)}$ の従う分布は平均べ クトル $\mu^{(1)}$, 共分散行列 Σ_{11} のq変量正規分布である.
 - HS.ac.ip May 11, 2023, 1 $oldsymbol{4}$ $oldsymbol{X}$ が平均ベクトル $oldsymbol{\mu}$,共分散行列 $oldsymbol{\Sigma}$ の $oldsymbol{p}$ 変量正規分布に従うと する、 $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}' = O$ であるとき、 $X^{(1)}$ の従う分布は平均べ クトル $\mu^{(1)}$, 共分散行列 Σ_{11} の p-q 変量正規分布である.



2023, 10:01:12 AM GMT 6321120@ed.tus.ac.ip - May 1 ソースコードの最後の行を persp(x1, x2, f, theta=120, phi=20, expand=0.5, ticktype="detailed") とすると図3を回転さ せたものが描画できます。