統計学2及び演習

最強力検定,
ネイマン・ピアソンの補題とその例

創域理工学部
Faculty of Science and Technology

東京理科大学
創域理工学部情報計算科学科
安藤宗司

2023年4月26日

Contents

統計的仮説検定の手順

- Step1
  - 帰無仮説と対立仮説を設定し，有意水準を定める
  - 慣例的には， $\alpha = 0.05$を用いることが多い
- Step2
  - 検定統計量$T = t(X_1, X_2, \ldots, X_n)$を定める
- Step3
  - 棄却域$W = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid t(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R\}$を求める
- Step4
  - 検定統計量Tの実現値$t^* = t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
  - $t^* \in R$ならば帰無仮説を棄却， $t^* \notin R$ならば帰無仮説を採択

誤り確率の制御

- 第1種の過誤確率
  - 検定の大きさ $\sup_{\theta_0 \in \Theta_0} P_{\theta_0}\left((X_1, X_2, \dots, X_n) \in W\right)$
  - 検定の大きさがα $(0 \leq \alpha \leq 1)$より小さい検定を，有意水準(significance level) αの検定という

$$\sup_{\theta_0 \in \Theta_0} P_{\theta_0}\left((X_1, X_2, \dots, X_n) \in W\right) \leq \alpha$$

この式を満たすようにWを定める

- 第2種の過誤確率
  - 検定の段階では制御していない
  - どのように制御するのか？
  - 興味がある方は，3年後期の「データ解析」を受講

棄却域Wの設定

- 棄却域Wは無数に作ることができる

$$\sup_{\theta_0 \in \Theta_0} P_{\theta_0}\big((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W\big) \leq \alpha$$

この式を満たすようにWを定める

- 検出力が高い（第2種の過誤確率が低い）棄却域Wを設定したい

具体例. 日本人成人男性の身長

- 身長が平均μ，分散7^2の正規分布に従うと仮定
- Step1
  - 仮説の設定

単純仮説　　単純仮説

帰無仮説 $H_0: \mu = 165$　対立仮説 $H_1: \mu = 170$

  - 有意水準$\alpha = 0.05$
- Step2
  - 母集団からの無作為標本$X \sim N(\mu, 7^2)$
  - 棄却域W　$P_{\mu=165}(X \in W) \leq \alpha$　この式を満たすようにWを定めることが可能
  - 検定統計量$T = t(X)$　$T = X \sim N(\mu, 7^2)$　$T = \dfrac{X - \mu}{7} \sim N(0,1)$

具体例. 日本人成人男性の身長

Step3

- 棄却域$W = \{x \mid t(x) = \frac{x-\mu}{7} \in R\}$を求める
- 有意水準$\alpha = 0.05$の検定となるようにRを定めたい

$$R_1 = \{t \mid t < c\}, \quad R_2 = \{t \mid |t| > c\}, \quad R_3 = \{t \mid t > c\}$$

cは定数

- $P(T \in R_1) = P(T < c) = 0.05$を満たす$c$を標準正規分布表から求めると, $c = -1.64$

$$0.05 = P\left(\frac{X-165}{7} < -1.64\right) = P(X < 153.52)$$

棄却域$W_1 = \{x \mid x < 153.52\}$

検出力 $P(X < 153.52) = P\left(\frac{X-170}{7} < -2.35\right) = 0.009$

具体例. 日本人成人男性の身長

Step3

- $P(T \in R_2) = P(|T| > c) = 0.05$を満たす$c$を標準正規分布表から求めると， $c = 1.96$

$$0.05 = P\left(\left|\frac{X-165}{7}\right| > 1.96\right) = P(X < 151.28, 178.72 < X)$$

棄却域$W_2 = \{x \mid x < 151.28, 178.72 < x\}$

検出力 $P(X < 151.28, 178.72 < X) = P\left(\frac{X-170}{7} < -2.67, 1.25 < \frac{X-170}{7}\right) = 0.109$

具体例. 日本人成人男性の身長

Step3

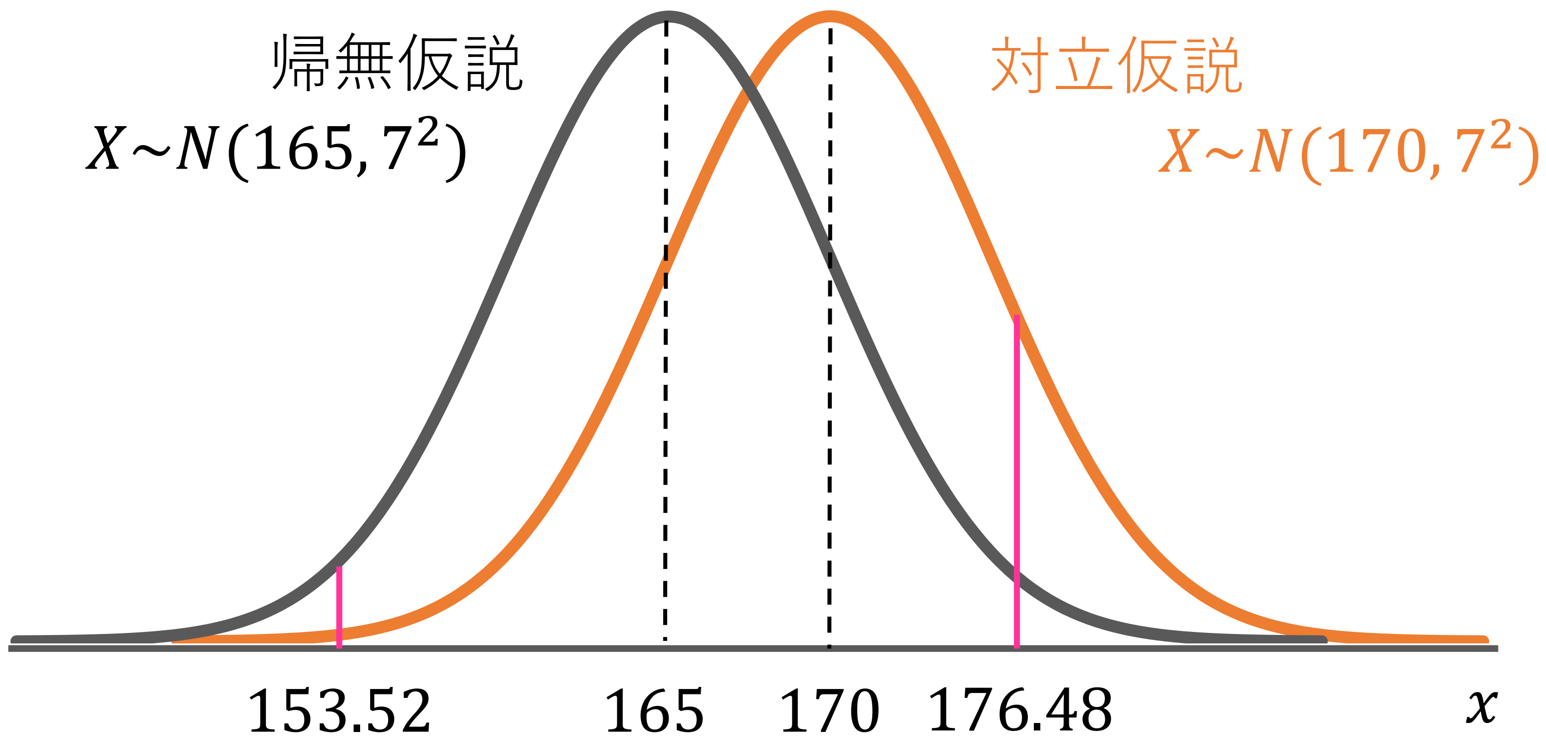
- $P(T \in R_3) = P(T > c) = 0.05$を満たす$c$を標準正規分布表から求めると，　$c = 1.64$

$$0.05 = P\left(\frac{X - 165}{7} > 1.64\right) = P(X > 176.48)$$

棄却域$W_3 = \{x \mid x > 176.48\}$

検出力$P(X > 176.48) = P\left(\frac{X-170}{7} > 0.93\right) = 0.176$

概念図



棄却域W_3を用いた検定は，他の棄却域を用いた検定よりも検出力が高くなる

具体例. 日本人成人男性の身長

- Step4
  - 母集団から無作為に選ばれた一人の身長が166.9cmであった
  - $t^* = \frac{166.9-165}{7} = 0.27 \notin R_3$
  - $t^* \notin R_3$より帰無仮説を採択

一般論

- 具体例では，1個の標本の場合について議論した
- ここからは，一般にn個の標本を用いた場合を議論する

- どうすれば最良な検定方式を構築できるか
  - 良い棄却域とは何か
  - 良い棄却域を導く方法とは

最強力検定

すべての$\theta_0 \in \Theta_0$に対して,

$$\beta_W(\theta_0) = P_{\theta_0}\big((X_1, X_2, \dots, X_n) \in W\big) \leq \alpha$$

を満たす棄却域Wのうち，ある特定の$\theta_1 \in \Theta_1$に対して,

$$\beta_{W^*}(\theta_1) \geq \beta_W(\theta_1)$$

を満たす棄却域W^*を$\theta = \theta_1$に対する最強力棄却域という

また，最強力棄却域W^*を用いた検定を

最強力検定 (most powerful test) という

最強力検定の構成方法

- 単純仮説 vs 単純仮説の場合

帰無仮説 $H_0: \theta = \theta_0$　　　対立仮説 $H_1: \theta = \theta_1$

- 最強力検定を構成するためには
  ネイマン・ピアソンの補題
  を用いればいいことが知られている

ネイマン・ピアソンの補題

$\Theta_0 = \{\theta_0\}, \Theta_1 = \{\theta_1\}$とし，母集団分布$P$からの無作為標本を$X_1, X_2, \ldots, X_n$とする。

$$H_0: \theta = \theta_0 \text{ vs } H_1: \theta = \theta_1$$

に対する最強力棄却域W^*は

$$W^* = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\middle|\, \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_0)} > k \right\}$$

によって与えられる。ここに有意水準をαとするとき，

$$P_{\theta_0}\big((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W^*\big) = \alpha$$

を満たすようにkを定める。

正規母集団の仮説検定

- 母集団
  - 平均μ（未知），分散σ^2（既知）の正規母集団
- 無作為標本$X_1, X_2, \dots, X_n$
- 仮説
  - $H_0: \mu = \mu_0 \text{ vs } H_1: \mu = \mu_1\ (> \mu_0)$

この統計的仮説検定に対する最強力棄却域W^*を導出する

最強力棄却域W^*の導出 (1)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}(x_i-\mu)^2\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}[(\bar{x}-\mu)+(x_i-\bar{x})]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[(\bar{x}-\mu)^2+(x_i-\bar{x})^2]$$

$$= n(\bar{x}-\mu)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-\mu)(x_i-\bar{x})$$

$$= (\bar{x}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})$$

$$= (\bar{x}-\mu)(n\bar{x}-n\bar{x})$$

$$= 0$$

最強力棄却域W^*の導出 (2)

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu_0)} = \frac{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_1)^2+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)\right)}{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_0)^2+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)\right)}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_1)^2-n(\bar{x}-\mu_0)^2\right)\right)$$

したがって，最強力棄却域W^*は次のようになる。

$$W^* = \left\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\,\middle|\,\exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_1)^2-n(\bar{x}-\mu_0)^2\right)\right)>k\right\}$$

$$= \{\,(x_1,x_2,\dots,x_n)\mid \bar{x} > k'\,\}$$

$$k' = \frac{(2\sigma^2/n)\log k - \mu_0^2 + \mu_1^2}{2(\mu_1-\mu_0)}$$

最強力棄却域W^*の導出 (2)

$$k' = \frac{(2\sigma^2/n)\log k - \mu_0^2 + \mu_1^2}{2(\mu_1 - \mu_0)}$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_1)^2 - n(\bar{x}-\mu_0)^2\right)\right) > k$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_1)^2 - n(\bar{x}-\mu_0)^2\right) > \log k$$

$$\Leftrightarrow -n(\bar{x}-\mu_1)^2 + n(\bar{x}-\mu_0)^2 > 2\,\sigma^2 \log k$$

$$\Leftrightarrow -(n\bar{x}^2 - 2n\mu_1\bar{x} + n\mu_1^2) + n\bar{x}^2 - 2n\mu_0\bar{x} + n\mu_0^2 > 2\,\sigma^2 \log k$$

$$\Leftrightarrow 2n(\mu_1 - \mu_0)\bar{x} > 2\,\sigma^2 \log k - n\mu_0^2 + n\mu_1^2$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} > \frac{(2\sigma^2/n)\log k - \mu_0^2 + \mu_1^2}{2(\mu_1 - \mu_0)} \qquad (\because \mu_0 < \mu_1 \text{より} (\mu_1 - \mu_0) > 0)$$

最強力棄却域W^*の導出 (3)

帰無仮説$H_0: \mu = \mu_0$が真のとき　$Z = \dfrac{(\bar{X} - \mu_0)}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$

$$\alpha = P_{\mu_0}\left((X_1, X_2, \dots, X_n) \in W^*\right)$$
$$= P_{\mu_0}(\bar{X} > k')$$
$$= P_{\mu_0}\left(\frac{(\bar{X} - \mu_0)}{\sqrt{\sigma^2/n}} > \frac{k' - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right)$$
$$= P_{\mu_0}(Z > z(\alpha))$$

$z(\alpha)$: 標準正規分布の上側100α%点

したがって，　$z(\alpha) = \dfrac{k' - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}$

を満たすとき，　W^*を用いた検定の

第1種の誤り確率がαとなることから，

$$k' = \mu_0 + z(\alpha)\sqrt{\sigma^2/n}$$

となるように，kを定めればよい

最強力棄却域W^*の導出 (4)

最強力棄却域W^*

$$W^* = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \,\middle|\, \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)} > k \right\}$$

$$= \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \bar{x} > k' \}$$

$$= \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \,\middle|\, \bar{x} > \mu_0 + z(\alpha)\sqrt{\sigma^2/_n} \right\}$$

したがって，次の検定方式が考えられる。

$$\bar{X} \in \left(\mu_0 + z(\alpha)\sqrt{\sigma^2/_n}, \infty \right)$$

のとき，帰無仮説H_0: $\mu = \mu_0$を棄却する。