論理数学I（12回目）

創域理工学部　情報計算科学科
桂田　浩一

1

5/9/2023

前回の復習

2

- 最小積和標準形
- クワイン・マクラスキー法を用いた最小積和標準形の求め方

5/9/2023

3

今日の内容

- タイソン法を用いた最小積和標準形の求め方
  - 積和標準形から主項を求める
  - 主積和標準形にする必要がない

4

共有項

x と $\bar{x}$

- 共有項：積項 t_1 と t_2 において相補的な命題変数が一つだけ存在するとき，その命題変数を x として

$$t_1 = x t_1'$$
$$t_2 = \bar{x} t_2'$$

であるとき，積項 $t_1' t_2'$ を t_1 と t_2 の共有項といい，$\mathrm{cons}(t_1, t_2)$ と表す．

例）　$\mathrm{cons}(\overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4, x_1\overline{x_3}x_4) = \overline{x_3}x_4$

$\mathrm{cons}(\overline{x_2}x_3, x_1x_2x_4) = x_1x_3x_4$

$\mathrm{cons}(x_1x_2, \overline{x_1}\,\overline{x_2})$　存在しない

$\mathrm{cons}(\overline{x_2}x_3, x_1\overline{x_2}x_4)$　存在しない

5

共有項の直観的意味

二つの隣接する積項から，それぞれに包含されない別の積項を導く

x_1x_2 \ x_3x_4	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0				
0 1				
1 1				
1 0				

$x_1x_2x_4$

$x_1\overline{x_2}x_3$

$$\mathrm{cons}(x_1x_2x_4,\ x_1\overline{x_2}x_3)$$
$$= x_1x_2x_4x_3 \vee x_1\overline{x_2}x_3x_4$$
$$= x_1x_3x_4$$

x_1x_2 \ x_3x_4	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0				
0 1				
1 1				
1 0				

$\overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4$

$x_1\overline{x_3}x_4$

$$\mathrm{cons}(\overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4,\ x_1\overline{x_3}x_4)$$
$$= \overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4 \vee x_1\overline{x_3}x_4$$
$$= \overline{x_3}x_4$$

5/9/2023

6

共有項の直観的意味

x_1x_2 \ x_3x_4	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0				
0 1				
1 1				
1 0				

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$

x_1x_2

$\mathrm{cons}(x_1x_2, \overline{x_1}\,\overline{x_2})$

（隣接しない）

存在しない

x_1x_2 \ x_3x_4	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0				
0 1				
1 1				
1 0				

$\overline{x_2}x_3$

$x_1\overline{x_2}x_4$

$\mathrm{cons}(\overline{x_2}x_3,\ x_1\overline{x_2}x_4)$

（重複している）

存在しない

5/9/2023

7

共有項の性質

- 定理3.4： t_i と t_j を相補的な命題変数が一つだけ存在する積項とする．このとき

$$t_i \lor t_j = t_i \lor t_j \lor \mathrm{cons}(t_i, t_j)$$

したがって t_i と t_j が関数 φ に包含されるとき

$$\varphi = \varphi \lor \mathrm{cons}(t_i, t_j)$$

5/9/2023

8

タイソン法（コンセンサス法）～共有項を求めながら主項を求める方法～

1. 論理関数を積和標準形で表し，その積項の集合を Π とする.

例） $\varphi = x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \lor x_1\overline{x_2}x_4 \lor \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_4 \lor x_1x_3\overline{x_4}$
$\lor\, x_2\overline{x_3}x_4 \lor x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$

$$\Pi = \left\{\begin{matrix} x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3},\ x_1\overline{x_2}x_4,\ \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_4,\ x_1x_3\overline{x_4}, \\ x_2\overline{x_3}x_4,\ x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \end{matrix}\right\}$$

5/9/2023

9

タイソン法（コンセンサス法）
～共有項を求めながら主項を求める方法～

2. Π に含まれる相補的な命題変数を$x_1 \cdots x_m$とする．

例）$\Pi = \left\{ \begin{array}{c} x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3},\ x_1\overline{x_2}x_4,\ \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_4,\ x_1x_3\overline{x_4}, \\ x_2\overline{x_3}x_4,\ x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \end{array} \right\}$

相補的な命題変数：x_1，x_2，x_3，x_4

5/9/2023

10

タイソン法（コンセンサス法）
～共有項を求めながら主項を求める方法～

3. $k = 1 \cdots m$ の各ステップで以下の操作を行う．
   ① 全ての積項 $t_i, t_j \in \Pi$ について x_k に関する共有項 $\mathrm{cons}(t_i, t_j)$ を求め，Π に加える．
   ② Π に含まれる積項のうち，その部分積項が Π 内に存在するならその積項を Π から除去する．

例）$\Pi = \left\{ \begin{array}{c} x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3},\ x_1\overline{x_2}x_4,\ \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_4,\ x_1x_3\overline{x_4}, \\ x_2\overline{x_3}x_4,\ x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \end{array} \right\}$

x_1について：$\mathrm{cons}(x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3},\ \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_4) = \overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$

$\mathrm{cons}(x_1\overline{x_2}x_4,\ \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_4) = \overline{x_2}x_4$

$\Pi = \left\{ \begin{array}{c} x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3},\ \cancel{x_1\overline{x_2}x_4,}\ \cancel{\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_4,}\ x_1x_3\overline{x_4}, \\ x_2\overline{x_3}x_4,\ x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4},\ \cancel{\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,}\ \overline{x_2}x_4 \end{array} \right\}$

5/9/2023

11

タイソン法（コンセンサス法）
～共有項を求めながら主項を求める方法～

3. $k = 1 \cdots m$ の各ステップで以下の操作を行う．
   ① 全ての積項 $t_i, t_j \in \Pi$ について x_k に関する共有項 $\mathrm{cons}(t_i, t_j)$ を求め，Π に加える．
   ② Π に含まれる積項のうち，その部分積項が Π 内に存在するならその積項を Π から除去する．

例）$\Pi = \left\{ \begin{matrix} x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3},\ x_1x_3\overline{x_4}, \\ x_2\overline{x_3}x_4,\ x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4},\ \overline{x_2}x_4 \end{matrix} \right\}$

x_2について：$\mathrm{cons}(x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3},\ x_2\overline{x_3}x_4) = x_1\overline{x_3}x_4$

$\mathrm{cons}(x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3},\ x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}) = x_1\overline{x_3}\,\overline{x_4}$

$\mathrm{cons}(x_2\overline{x_3}x_4,\ \overline{x_2}x_4) = \overline{x_3}x_4$

$\Pi = \left\{ \begin{matrix} x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3},\ x_1x_3\overline{x_4},\ \cancel{x_2\overline{x_3}x_4},\ \cancel{x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}}, \\ \overline{x_2}x_4,\ \cancel{x_1\overline{x_3}x_4},\ x_1\overline{x_3}\,\overline{x_4},\ \overline{x_3}x_4 \end{matrix} \right\}$

5/9/2023

12

タイソン法（コンセンサス法）
～共有項を求めながら主項を求める方法～

3. $k = 1 \cdots m$ の各ステップで以下の操作を行う．
   ① 全ての積項 $t_i, t_j \in \Pi$ について x_k に関する共有項 $\mathrm{cons}(t_i, t_j)$ を求め，Π に加える．
   ② Π に含まれる積項のうち，その部分積項が Π 内に存在するならその積項を Π から除去する．

例）$\Pi = \left\{ \begin{matrix} x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3},\ x_1x_3\overline{x_4}, \\ \overline{x_2}x_4,\ x_1\overline{x_3}\,\overline{x_4},\ \overline{x_3}x_4 \end{matrix} \right\}$

x_3について：$\mathrm{cons}(x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3},\ x_1x_3\overline{x_4}) = x_1\overline{x_2}\,\overline{x_4}$

$\mathrm{cons}(x_1x_3\overline{x_4},\ x_1\overline{x_3}\,\overline{x_4}) = x_1\overline{x_4}$

$\Pi = \left\{ \begin{matrix} x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3},\ \cancel{x_1x_3\overline{x_4}},\ \overline{x_2}x_4, \\ \cancel{x_1\overline{x_3}\,\overline{x_4}},\ \overline{x_3}x_4,\ \cancel{x_1\overline{x_2}\,\overline{x_4}},\ x_1\overline{x_4} \end{matrix} \right\}$

5/9/2023

13

タイソン法（コンセンサス法）
～共有項を求めながら主項を求める方法～

3. $k = 1 \cdots m$ の各ステップで以下の操作を行う．
   - ① 全ての積項 $t_i, t_j \in \Pi$ について x_k に関する共有項 $\mathrm{cons}(t_i, t_j)$ を求め，Π に加える．
   - ② Π に含まれる積項のうち，その部分積項が Π 内に存在するならその積項を Π から除去する．

例）$\Pi = \left\{ \begin{matrix} x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}, & \overline{x_2}x_4, \\ \overline{x_3}x_4, & x_1\overline{x_4} \end{matrix} \right\}$

x_4について： $\mathrm{cons}(\overline{x_2}x_4,\ x_1\overline{x_4}) = x_1\overline{x_2}$

$\mathrm{cons}(\overline{x_3}x_4,\ x_1\overline{x_4}) = x_1\overline{x_3}$

$\Pi = \left\{ \begin{matrix} \cancel{x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}}, & \boxed{\overline{x_2}x_4}, & \boxed{\overline{x_3}x_4}, \\ \boxed{x_1\overline{x_4}}, & \boxed{x_1\overline{x_2}}, & \boxed{x_1\overline{x_3}} \end{matrix} \right\}$ 主項

5/9/2023

14

主項間の包含関係

- $\mathrm{cons}(\overline{x_2}x_4,\ x_1\overline{x_4}) = x_1\overline{x_2}$

主項　主項　主項

$x_1\overline{x_2}$ は $\overline{x_2}x_4 \vee x_1\overline{x_4}$ に包含される．

※主項間の包含関係を cons で調べることができる．

5/9/2023

15

主項間の包含関係

- $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ の主項が $p_1 = \overline{x_2}x_4$, $p_2 = \overline{x_3}x_4$, $p_3 = x_1\overline{x_4}$, $p_4 = x_1\overline{x_2}$, $p_5 = x_1\overline{x_3}$ であるとき,

主項間の被覆表

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	×				
p_2		×			
p_3			×		
p_4				×	
p_5					×
p_1p_3				×	
p_2p_3					×

$\mathrm{cons}(p_1, p_3) = p_4$
$\mathrm{cons}(p_2, p_3) = p_5$

共有項が全て主項になるときのみ最小積和形が求まる

ペトリックの方程式

$$p_1p_2p_3(p_4 \vee p_1p_3)(p_5 \vee p_2p_3) = 1$$

$$p_1p_2p_3 = 1$$

φの最小積和標準形は

$$\varphi = \overline{x_2}x_4 \vee \overline{x_3}x_4 \vee x_1\overline{x_4}$$

5/9/2023

16

出題予定の演習課題

- タイソン法を使って最小積和標準形を求める.

5/9/2023