6321120@ed.tus.ac.jp-Jul 14, 2023, 8:40:10 mm

6321120@ed.tus.ac.jp - Jul 14, 2023, 8:40:16 AM 理科大学

東京理科大学 創域理工学研究科 情報計算科学専攻 田畑研

2023年6月30日@ed.tus.ac.ip - Jul 14, 2023, 8 6321122

2023, 8:40:16 AM GMT+9

:16 AM GMT+9

6321120@ed.tus.ac.jp-Jul 1

M GMT+9

目次 6 6321120@ed.tus.ac.jp-Jul 14, 2023, 8:40:16 AM :16 AM GMT+9 6321120@ed.tus.ac.jp-Jul 14, 2023, 8 2023, 8:40:16 AM GMT+9 6321120@ed.tus.ac.jp-Jul 1 CTE AM GMT+9

解答例 1

1. 正方行列 ∑ を

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

しまる。このとき, $oldsymbol{\Sigma}=CC'$ を満たす正則行列 C を 1 つ挙げよ。ただし,' は転置を表す。 $=\left(\frac{2}{1}\frac{1}{2}\right)$ を直ななで

解) $oldsymbol{\Sigma} = \left(egin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}
ight)$ を直交行列 $oldsymbol{P}$ で対角化する. $oldsymbol{\Sigma}$ の固有方程式は,

$$0 = \det(\mathbf{\Sigma} - \lambda \mathbf{I}_2) = \det\begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1\\ 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = (1 - \lambda)(3 - \lambda)$$

であるから、 Σ の固有値は 1,3 となる. そして固有値 1,3 に対応する固有ベクトルはそれぞれ、

であるから,
$$\Sigma$$
 の固有値は $1,3$ となる.そ $sigg(1\\-1igg) \ (s
eq 0), \quad tigg(1\\1igg) \ (t
eq 0)$ である.従って, $\left\{ig(1\\-1ig), \ ig(1\\1ig)
ight\}$ から正規値 $\left(\begin{array}{cc} 1\\-1\end{array}\right)$

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$s\begin{pmatrix} 1\\ -1 \end{pmatrix} (s \neq 0), \quad t\begin{pmatrix} 1\\ 1 \end{pmatrix} (t \neq 0)$$
である。従って、 $\left\{\begin{pmatrix} 1\\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ から正規直交基底を構成すると、 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ であるから、
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
とすれば、 P は直交行列 (i.e. $P^{-1} = P'$) であり、
$$P^{-1}\Sigma P = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 3 \end{pmatrix} \equiv \Lambda \tag{1.1}$$

である. よって, $\Lambda^{\frac{1}{2}}=\left(egin{smallmatrix} 1&0\\0&\sqrt{3}\end{smallmatrix}
ight)$ とすると, $\Lambda=(\Lambda^{\frac{1}{2}})^2$ より, (1.1) 式は,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{P}' = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}})'$$

よ $m{\Lambda}^2m{\Lambda}^2m{P}'=(m{P}m{\Lambda}^{rac{1}{2}})(m{P}m{\Lambda}^{rac{1}{2}})'$ と書き直せる。故に, $m{C}=m{P}m{\Lambda}^{rac{1}{2}}$ とすれば, $m{\Sigma}=m{C}m{C}'$ を満たす。ここに, $m{C}$ を成分表示すると次のようになる。 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$$oldsymbol{C} = oldsymbol{P}oldsymbol{\Lambda}^{rac{1}{2}} = egin{pmatrix} rac{1}{\sqrt{2}} & rac{1}{\sqrt{2}} \ -rac{1}{\sqrt{2}} & rac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} egin{pmatrix} 1 & 0 \ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = egin{pmatrix} rac{1}{\sqrt{2}} & rac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \ -rac{1}{\sqrt{2}} & rac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

C. TE AM GMT+9

2. $m{X}=(X_1,X_2)'$ が平均ベクトル (0,1)',分散共分散行列

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

の 2 変量正規分布に従うとする.このとき, $m{X}$ の確率密度関数を行列・ベクトルを用いずに示せ. $m{v}.^{1}m{X}=(\frac{X_1}{2})$ $\sim N^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x})$ 解答) r.v. $^{1)}m{X}=\left(\begin{smallmatrix} X_1 \\ X_2 \end{smallmatrix} \right) \sim N_2(m{\mu}_0, m{\Sigma})$ の p.d.f. $^{2)}$ を $f_{m{X}}(m{x}) \left(m{x}=\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{R}^2 \right)$ とする. こ

$$\mu_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である. このとき,

$$m{X} = inom{X_1}{X_2} \sim N_2(m{\mu}_0, m{\Sigma})$$
 の p.d.f. 2 を $f_{m{X}}(m{x})$ $(m{x} = inom{x_1}{x_2}) \in \mathbb{R}$ $m{\mu}_0 = inom{0}{1}, \quad m{\Sigma} = inom{2}{1} \quad 2$ る. このとき、 $\det m{\Sigma} = 3, \quad m{\Sigma}^{-1} = rac{1}{3} inom{2}{-1} \quad 2$ $f_{m{X}}(m{x})$ は次のように求まる.

はき
$$\Sigma = 3$$
, $\Sigma^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ より、 $f_X(x)$ は次のように求まる.
$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2/2} (\det \Sigma)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (x - \mu_0)' \Sigma^{-1} (x - \mu_0)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{3}} \exp\left[-\frac{1}{2} (x_1 \ x_2 - 1) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}\pi} \exp\left[-\frac{2x_1^2 - 2x_1(x_2 - 1) + 2(x_2 - 1)^2}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}\pi} \exp\left[-\frac{x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + x_1 - 2x_2 + 1}{3}\right]$$
 注意 1.1. 統計では、大文字の変数 "X" は確率変数 (関数³) を表し、小文字の変数 "x" は実現値(確率変数 X から観測された値)を表している。一方、p.d.f. (p.m.f.²) は、r.v. X がある値 x をとる確率密度(確率)を表している。つまり、確率変更問数などを記述するときは、以下のように大文字を使ってはならない

注意 1.1. 統計では、大文字の変数 "X" は確率変数 (関数 3))を表し、小文字の変数 "x" は実現値(確率変数 一方,p.d.f.(p.m.f.),確率密度関数などを記述するとき $\frac{1}{2\sqrt{3}\,\pi}\exp\biggl[-\frac{X_1^2-X_1X_2+X_2^2+X_1-2X_2+1}{3}\biggr]$ X から観測された値)を表している.一方,p.d.f. $(p.m.f.^{2})$ は,r.v.X がある値 x をとる確率密度(確率) を表している. つまり、確率密度関数などを記述するときは、以下のように大文字を使ってはならない.

$$\frac{1}{2\sqrt{3}\pi} \exp\left[-\frac{X_1^2 - X_1X_2 + X_2^2 + X_1 - 2X_2 + 1}{3}\right]$$

¹⁾ r.v.:確率変数 (確率ベクトル), random variable (random vector)

 $^{^{2)}}$ p.d.f.:確率密度関数,probability density function / p.m.f.:確率量関数,probability mass function

 $^{^{3)}}$ 単変量であれば,X は標本空間 Ω 上の可測空間 (Ω,\mathscr{F}) から実数空間 $\mathbb R$ 上の可測空間 $(\mathbb R,\mathscr{S}(\mathbb R))$ への関数(可測関数)である. $X:(\Omega,\mathscr{F})\to(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$

2023, 8:40:16 AM GMT+9

 $3.\ 1$ で求めた $oldsymbol{C}$ を用いて,

$$oldsymbol{Z} = egin{pmatrix} Z_1 \ Z_2 \end{pmatrix} = oldsymbol{C}^{-1}igg(egin{pmatrix} X_1 \ X_2 \end{pmatrix} - egin{pmatrix} 0 \ 1 \end{pmatrix} igg)$$

解) $Z=C^{-1}(X-\mu_0)$ なる変換を考えると,逆変換は $x=Cz+\mu_0$ $(z=(z_1,z_2)'\in\mathbb{R}^2)$ より,ヤコビアン J(x o z) は, $J(x o z)=\left|\det \frac{\partial x}{\partial z}\right|=\left|\det C'\right|=\left|\det C\right|=(\det \Sigma)^{\frac{1}{2}}$ となる $^{1)}$. よって,Z の p.d.f. $f_{Z}(z)$ はかっ. $f_{Z}(z)=f$ ・・・・

$$J(oldsymbol{x} o oldsymbol{z}) = \left| \det rac{\partial oldsymbol{x}}{\partial oldsymbol{z}}
ight| = \left| \det oldsymbol{C}'
ight| = \left| \det oldsymbol{C}
ight| = \left(\det oldsymbol{\Sigma}
ight)^{rac{1}{2}}$$

となる¹⁾. よって、
$$Z$$
 の p.d.f. $f_{Z}(z)$ は次のように求まる.
$$f_{Z}(z) = f_{X}(Cz + \mu_{0}) \cdot J(x \to z)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2/2}(\det \Sigma)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(Cz + \mu_{0} - \mu_{0})'\Sigma^{-1}(Cz + \mu_{0} - \mu_{0})\right] \cdot (\det \Sigma)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}z'C'(CC')^{-1}Cz\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}z'C'(C')^{-1}(C)^{-1}Cz\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}z'z\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{z_{1}^{2} + z_{2}^{2}}{2}\right]$$
(3.1)

 $\frac{1) ベクトル x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} をベクトル z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} で微分: \frac{\partial x}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z} & \frac{\partial x_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \frac{\partial x_2}{\partial z_1} \\ \frac{\partial z_1}{\partial z_2} & \frac{\partial z_2}{\partial z_2} \end{pmatrix}}{3}$

4. 正則行列
$$oldsymbol{D}$$
 を $oldsymbol{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$

$$oldsymbol{Y} = egin{pmatrix} Y_1 \ Y_2 \end{pmatrix} = oldsymbol{D} oldsymbol{Z} + oldsymbol{\mu}$$

$$J(\boldsymbol{z} \to \boldsymbol{y}) = \left| \det \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{y}} \right| = \left| \det(\boldsymbol{D}^{-1})' \right| = \left| \det \boldsymbol{D}^{-1} \right| = \frac{1}{\left| \det \boldsymbol{D} \right|}$$

と求まる. ここに, T=DD' である. 今, 任意の $x\in\mathbb{R}^2$ に対して, $\langle x,Tx\rangle=x'Tx=x'DD'x=$ $(D'x)'D'x = ||D'x||^2 \ge 0$ であり、等号成立は $x = \mathbf{0}_2 = (0,0)'$ のとき、かつそのときに限る $(\cdot \cdot \cdot D)$ が正則). このことから T は正定値行列である. よって, Y は平均ベクトル μ , 分散共分散行列 T の 重Ei 2023 · 8:40:16 Al 2 変量正規分布に従う (i.e. $Y \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{T})$). 6321120@ed.tus.ac.jp-Jul 1

5. 3で定めた ${m Z}$ について, Z_1 と Z_2 は独立といえるか (必ず解答に至った理由を記述すること).

解) Z_1, Z_2 の j.p.d.f.¹⁾は (3.1) 式より,

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z_1^2}{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z_2^2}{2}}\right)$$

解)
$$Z_1, Z_2$$
 の j.p.d.f.¹⁾は (3.1) 式より,
$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z_1^2}{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z_2^2}{2}}\right)$$
と表せる。今, Z_1, Z_2 の m.p.d.f.²⁾をそれぞれ $f_{Z_1}(z_1), f_{Z_2}(z_2)$ とすると,
$$f_{Z_1}(z_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) \, dz_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z_1^2}{2}} \quad (z_1 \in \mathbb{R})$$

$$f_{Z_2}(z_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) \, dz_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z_1^2}{2}} \quad (z_2 \in \mathbb{R})$$
であるから,
$$f_{\mathbf{Z}}(z) = f_{Z_1}(z_1) \cdot f_{Z_2}(z_2)$$
と書け, Z_1, Z_2 は独立であると言える.

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = f_{Z_1}(z_1) \cdot f_{Z_2}(z_2)$$

、 $z_1=f_{Z_1}(z_1)\cdot f_{Z_2}(z_2)$ と書け、 Z_1,Z_2 は独立であると言える。 注意 1.2注意 **1.2.** 「 $\operatorname{Cov}[Z_1,Z_2]=E[(Z_1-E[Z_1])(Z_2-E[Z_2])]=E[Z_1Z_2]=0$ より Z_1,Z_2 は独立である」は大きな間違いである。例えば, $\Pr(Z_1=i,Z_2=j)=\frac{1}{5} \quad ((i,j)\in\{(-1,-1),(-1,1),(0,0),(1,-1),(1,1)\})$ なる r.v. Z_1,Z_2 を考えると, $\operatorname{Cov}[Z_1,Z_2]=0$ (無相関) だが

$$\Pr(Z_1 = i, Z_2 = j) = \frac{1}{5} \quad ((i, j) \in \{(-1, -1), (-1, 1), (0, 0), (1, -1), (1, 1)\})$$

$$\operatorname{Pr}(Z_1=t,Z_2=J)=rac{1}{5}=rac{1}{5}=rac{1}{5}=rac{1}{5}=rac{1}{5}=rac{1}{5}=rac{1}{5}=rac{1}{25}=rac{1}{25}=rac{1}{25}=rac{1}{25}=\operatorname{Pr}(Z_1=1)\cdot\operatorname{Pr}(Z_2=1)$$
ではない)となる.しかし, $(Z_1,Z_2)'$ が正規分布に従っているとき,"無相

(独立ではない) となる. しかし、 $(Z_1,Z_2)'$ が正規分布に従っているとき、"無相関ならば独立"となる.

注意 1.3. r.v. Z_1, Z_2 がそれぞれ正規分布に従っていたとしても、 $(Z_1, Z_2)'$ が正規分布に従うとは限らない.

6321120@ed.tus.ac.jp - Jul 1 例 1.1. r.v. $\mathbf{Z}=(Z_1,Z_2)'$ と W を次のように与える.このとき, $Z_1,Z_2,W\sim N(0,1)$ であるが, $(Z_1,W)'$ は正規分布に従わない.

$$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \sim N_2 \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (0 < |\rho| < 1), \quad W = \begin{cases} Z_2 & \text{if. } |Z_2| \geq 1 \\ -Z_2 & \text{if. } |Z_2| < 1 \end{cases}$$

¹⁾ j.p.d.f.:同時 p.d.f., joint p.d.f.

²⁾ m.p.d.f.: 周辺 p.d.f., marginal p.d.f.