統計学2及び演習

不偏検定，相似検定とその例

創域理工学部
Faculty of Science and Technology

東京理科大学
創域理工学部情報計算科学科
安藤宗司

2023年5月17日

Contents

- 不偏検定
  - 一様最強力不偏検定
  - 具体例　正規母集団の両側仮説検定

- 相似検定
  - 具体例　正規母集団の両側仮説検定

不偏検定

帰無仮説 $H_0: \theta \in \Theta_0$　　対立仮説 $H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta \cup \Theta_0^c$

$\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_0^c$ かつ $\Theta_0 \cap \Theta_0^c = \phi$

すべての$\theta_0 \in \Theta_0$に対して，

(i) $\beta_W(\theta_0) = P_{\theta_0}\left((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W\right) \leq \alpha$

を満たし，かつ，すべての$\theta_1 \in \Theta_1$に対して，

(ii) $\beta_W(\theta_1) \geq \alpha$

を満たす棄却域Wを用いた検定を不偏検定 (unbiased test) という

一様最強力不偏検定

不偏検定の定義を満たす棄却域の集合をU_αとする

　すべての$\theta_0 \in \Theta_0$に対して，(i) $\beta_W(\theta_0) = P_{\theta_0}\big((X_1, X_2, \dots, X_n) \in W\big) \leq \alpha$

　を満たし，かつ，すべての$\theta_1 \in \Theta_1$に対して，(ii) $\beta_W(\theta_1) \geq \alpha$

　を満たす棄却域Wの集合をU_αとする

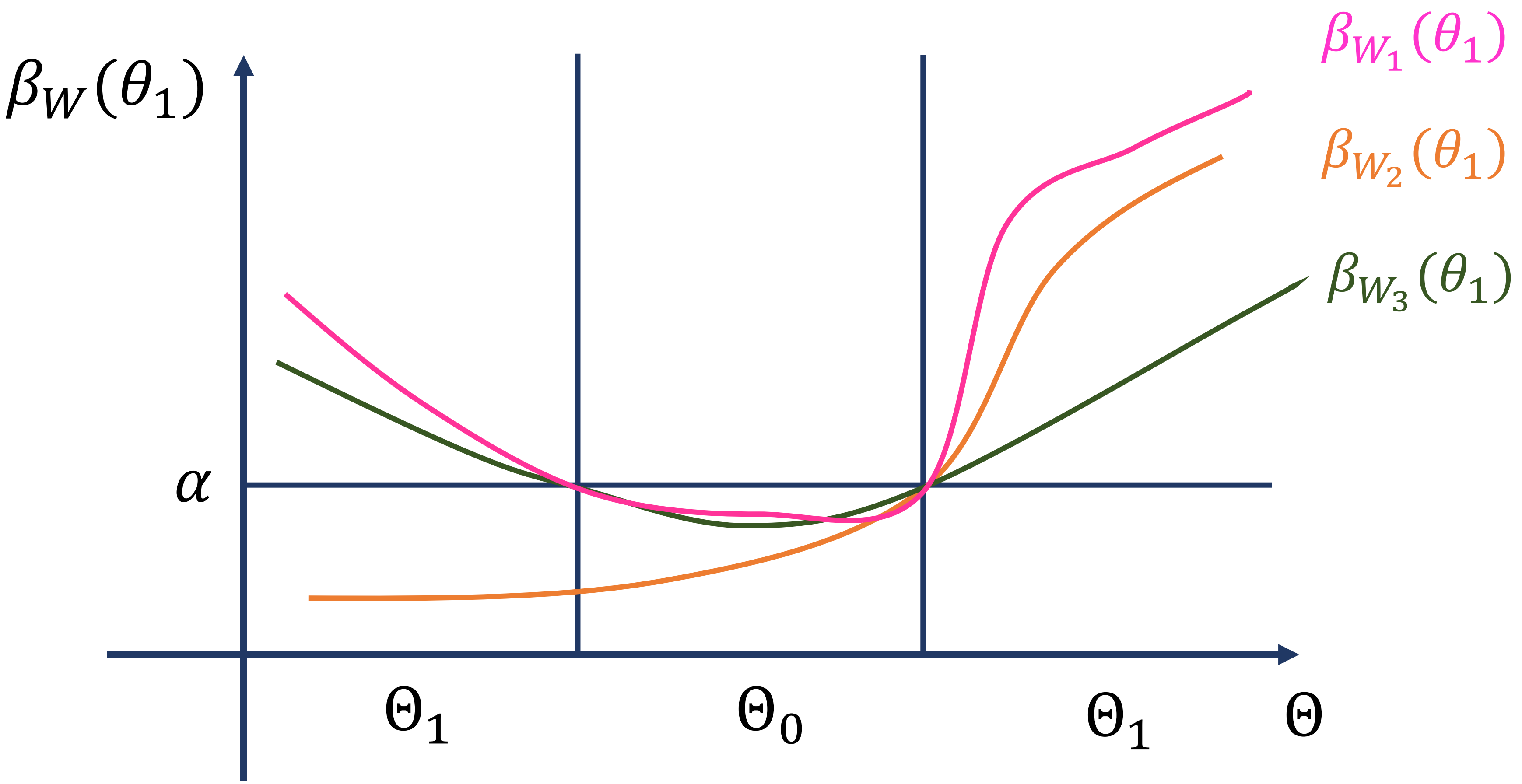
すべての$W \in U_\alpha$，すべての$\theta_1 \in \Theta_1$に対して，

$$\beta_{W^*}(\theta_1) \geq \beta_W(\theta_1)$$

を満たす棄却域W^*を用いた検定を一様最強力不偏検定

(uniformly most powerful unbiased test) という

概念図


$\beta_W(\theta_1)$
$\beta_{W_1}(\theta_1)$
$\beta_{W_2}(\theta_1)$
$\beta_{W_3}(\theta_1)$
α
Θ_1
Θ_0
Θ_1
Θ

正規母集団の両側検定

- 母集団
  - 平均μ（未知），分散σ^2（既知）の正規母集団
- 無作為標本$X_1, X_2, \ldots, X_n$
- 仮説
  - $H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu \neq \mu_0$

この統計的仮説検定に対する一様最強力不偏検定を構成する

両側検定の一様最強力不偏検定の構成 (1)

帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$　　対立仮説 $H_1: \mu > \mu_0$

この右片側検定の一様最強力棄却域W^*

$$W_r^* = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \,\middle|\, \bar{x} > \mu_0 + z(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$　　対立仮説 $H_1: \mu < \mu_0$

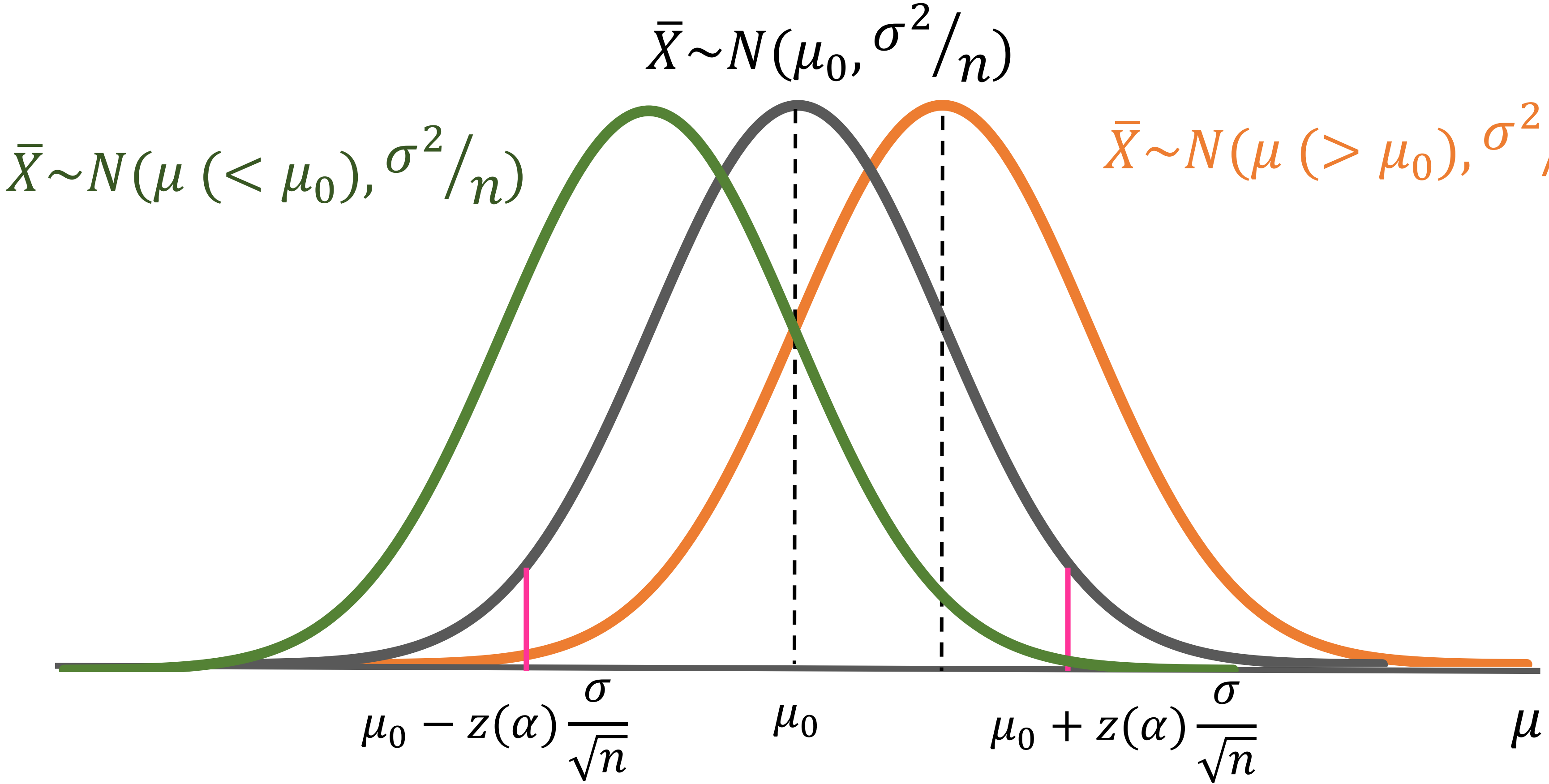
この左片側検定の一様最強力棄却域W^*

$$W_l^* = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \,\middle|\, \bar{x} < \mu_0 - z(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

両側検定の一様最強力不偏検定の構成 (2)

$W_r^* = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \;\middle|\; \bar{x} > \mu_0 + z(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$ $W_l^* = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \;\middle|\; \bar{x} < \mu_0 - z(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$

W_r^*とW_l^*を同時に満たすことは不可能　$W_r^* \cap W_l^* = \phi$（空集合）

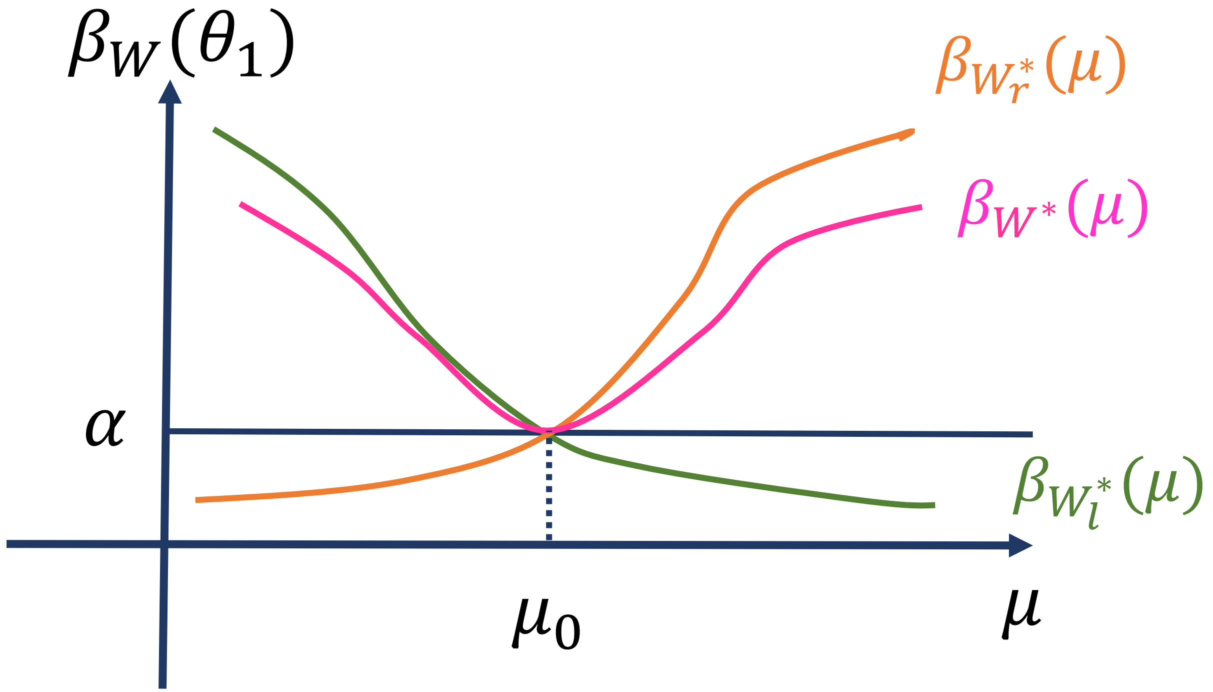


両側検定の一様最強力不偏検定の構成 (3)

不偏検定に制限すれば，一様最強力不偏検定の棄却域W^*は

$$W^* = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \bar{x} < c_1 \text{ or } \bar{x} > c_2 \} \qquad (c_1 < c_2)$$

の形で与えられる。（証明は省略）



両側検定の一様最強力不偏検定の構成 (4)

c_1, c_2は

(i) $\beta_{W^*}(\mu_0) = \alpha$ (ii) $\left.\dfrac{d\beta_{W^*}(\mu)}{d\mu}\right|_{\mu=\mu_0} = 0$

を満たすことを利用して求める。

$\beta_{W^*}(\mu_0) = \alpha$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{c_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \exp\left(-\frac{1}{2\frac{\sigma^2}{n}}(\bar{x}-\mu_0)^2\right) d\bar{x} + \int_{c_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \exp\left(-\frac{1}{2\frac{\sigma^2}{n}}(\bar{x}-\mu_0)^2\right) d\bar{x} = \alpha$$

$$\left.\frac{d\beta_{W^*}(\mu)}{d\mu}\right|_{\mu=\mu_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{c_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \exp\left(-\frac{1}{2\frac{\sigma^2}{n}}(\bar{x}-\mu_0)^2\right) \frac{1}{\frac{\sigma^2}{n}}(\bar{x}-\mu_0) d\bar{x} + \int_{c_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \exp\left(-\frac{1}{2\frac{\sigma^2}{n}}(\bar{x}-\mu_0)^2\right) \frac{1}{\frac{\sigma^2}{n}}(\bar{x}-\mu_0) d\bar{x} = 0$$

両側検定の一様最強力不偏検定の構成 (5)

$$\left.\frac{d\beta_{W^*}(\mu)}{d\mu}\right|_{\mu=\mu_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{c_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \exp\left(-\frac{1}{2\frac{\sigma^2}{n}}(\bar{x}-\mu_0)^2\right)\frac{1}{\frac{\sigma^2}{n}}(\bar{x}-\mu_0)\,d\bar{x} + \int_{c_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \exp\left(-\frac{1}{2\frac{\sigma^2}{n}}(\bar{x}-\mu_0)^2\right)\frac{1}{\frac{\sigma^2}{n}}(\bar{x}-\mu_0)\,d\bar{x} = 0$$

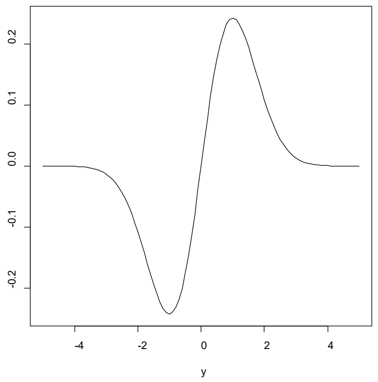
$$y = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$f(y) = y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$ は奇関数

$$f(-y) = -f(y)$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\frac{c_1-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy + \int_{\frac{c_2-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}^{\infty} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\frac{c_1-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy - \int_{-\infty}^{-\frac{c_2-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy = 0$$



両側検定の一様最強力不偏検定の構成 (6)

$$\left.\frac{d\beta_{W^*}(\mu)}{d\mu}\right|_{\mu=\mu_0} = 0 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\frac{c_1-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy - \int_{-\infty}^{-\frac{c_2-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{c_1-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = -\frac{c_2-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\Leftrightarrow c_1-\mu_0 = -(c_2-\mu_0)$$

$$\Leftrightarrow c_1+c_2 = 2\mu_0$$

両側検定の一様最強力不偏検定の構成 (7)

$$\beta_{W^*}(\mu_0)=\alpha \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{c_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\exp\left(-\frac{1}{2\frac{\sigma^2}{n}}(\bar{x}-\mu_0)^2\right)d\bar{x}+\int_{c_2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\exp\left(-\frac{1}{2\frac{\sigma^2}{n}}(\bar{x}-\mu_0)^2\right)d\bar{x}=\alpha$$

$$y=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\frac{c_1-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy+\int_{\frac{c_2-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy=\alpha$$

$f(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{y^2}{2}\right)$は遇関数

$$f(-y)=f(y)$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{-\frac{c_2-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy+\int_{\frac{c_2-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy=\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2\int_{\frac{c_2-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy=\alpha \Leftrightarrow \frac{c_2-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Leftrightarrow c_2=\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$c_1+c_2=2\mu_0$より　$c_1=\mu_0-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z\left(\dfrac{\alpha}{2}\right),\quad c_2=\mu_0+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

両側検定の一様最強力不偏検定の構成 (8)

したがって，一様最強力不偏検定の棄却域W^*は

$$W^* = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \,\middle|\, \bar{x} < \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ or } \bar{x} > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right\}$$

相似検定

複合仮説 複合仮説

帰無仮説 $H_0: \theta \in \Theta_0$ 対立仮説 $H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta \cup \Theta_0^{\mathrm{c}}$

$\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_0^{\mathrm{c}}$ かつ $\Theta_0 \cap \Theta_0^{\mathrm{c}} = \phi$

すべての$\theta_0 \in \Theta_0$に対して,

$$\beta_W(\theta_0) = P_{\theta_0}\big((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W\big) = \alpha$$

を満たす棄却域Wを用いた検定を相似検定 (similar test) という

相似検定の例

- 母集団1
  - 平均μ_1（未知），分散σ^2（既知）の正規母集団
  - 無作為標本$X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$
- 母集団2
  - 平均μ_2（未知），分散σ^2（既知）の正規母集団
  - 無作為標本$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$
- 仮説
  - $H_0: \mu_1 = \mu_2 \text{ vs } H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

この統計的仮説検定に対する相似検定を構成する

両側検定の相似検定の構成 (1)

i.i.d

$$X_i \underset{\text{i.i.d}}{\sim} N(\mu_1, \sigma^2) \ \ (i = 1, \dots, n_1)$$

分散σ^2（既知）

$$Y_i \underset{\text{i.i.d}}{\sim} N(\mu_2, \sigma^2) \ \ (i = 1, \dots, n_2)$$

分散σ^2（既知）

$$\bar{X} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n_1}\right)$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma^2}{n_2}\right)$$

$\bar{X} \perp \bar{Y}$であることから

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right)$$

両側検定の相似検定の構成 (2)

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$のもとで

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(0, \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right), \qquad Z \equiv \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$のもとで

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right), \qquad Z \equiv \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, 1\right)$$

両側検定の相似検定の構成 (3)

棄却域Wを次のようにする。

$$W = \left\{ \left(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{n_2} \right) \,\middle|\, |Z| > z\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right\}$$

$H_0: \mu_1 = \mu_2$のもとで

$$\beta_W(\mu_1, \mu_2) = P_{\theta_0}\left(\left(X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}; Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2} \right) \in W \right) = \alpha$$

第1種の過誤確率

$$\Leftrightarrow \int_{|Z| > z\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{Z^2}{2} \right) dZ = \alpha$$

この棄却域Wに基づく検定は相似検定である

両側検定の相似検定の構成 (4)

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$のもとで

$$\beta_W(\mu_1, \mu_2) = P_{\theta_1}\left(\left(X_1, X_2, \dots, X_{n_1}; Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}\right) \in W\right)$$

検出力

$$\Leftrightarrow \int_{|Z|>z\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(Z - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}\right)^2\right) dZ$$