統計学2及び演習

尤度比検定とその例

創域理工学部
Faculty of Science and Technology

東京理科大学
創域理工学部情報計算科学科
安藤宗司

2023年5月31日

Contents

- 同時確率（密度）関数と尤度関数
- 尤度比検定
- 尤度比検定の例

同時確率（密度）関数と尤度関数

同時確率（密度）関数

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$$

- θが与えられたとき，どのような$x_1, x_2, \dots, x_n$が得られやすいかを示す関数

尤度関数

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- $x_1, x_2, \dots, x_n$が得られたとき，それが出現しやすいθの値を示す関数

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)$$

尤度比

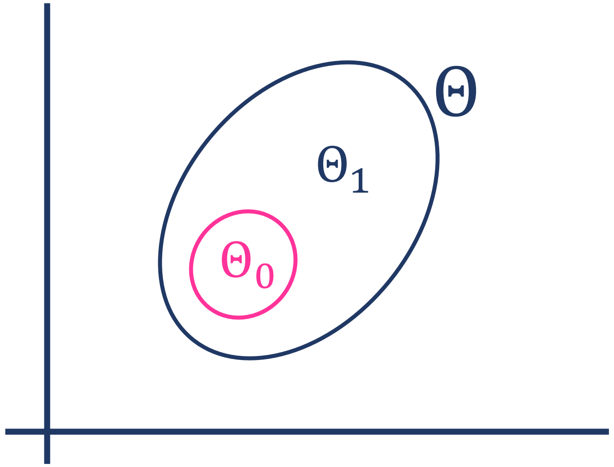
仮説

帰無仮説 $H_0: \theta \in \Theta_0$　　対立仮説 $H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta \cup \Theta_0^c$

$\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_0^c$ かつ $\Theta_0 \cap \Theta_0^c = \phi$

尤度比

$$\lambda \equiv \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)}$$



尤度比検定

- 棄却域W

$$W = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \lambda < c \}$$

ただし，

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} P\big((X_1, X_2, \dots, X_n) \in W\big) \le \alpha$$

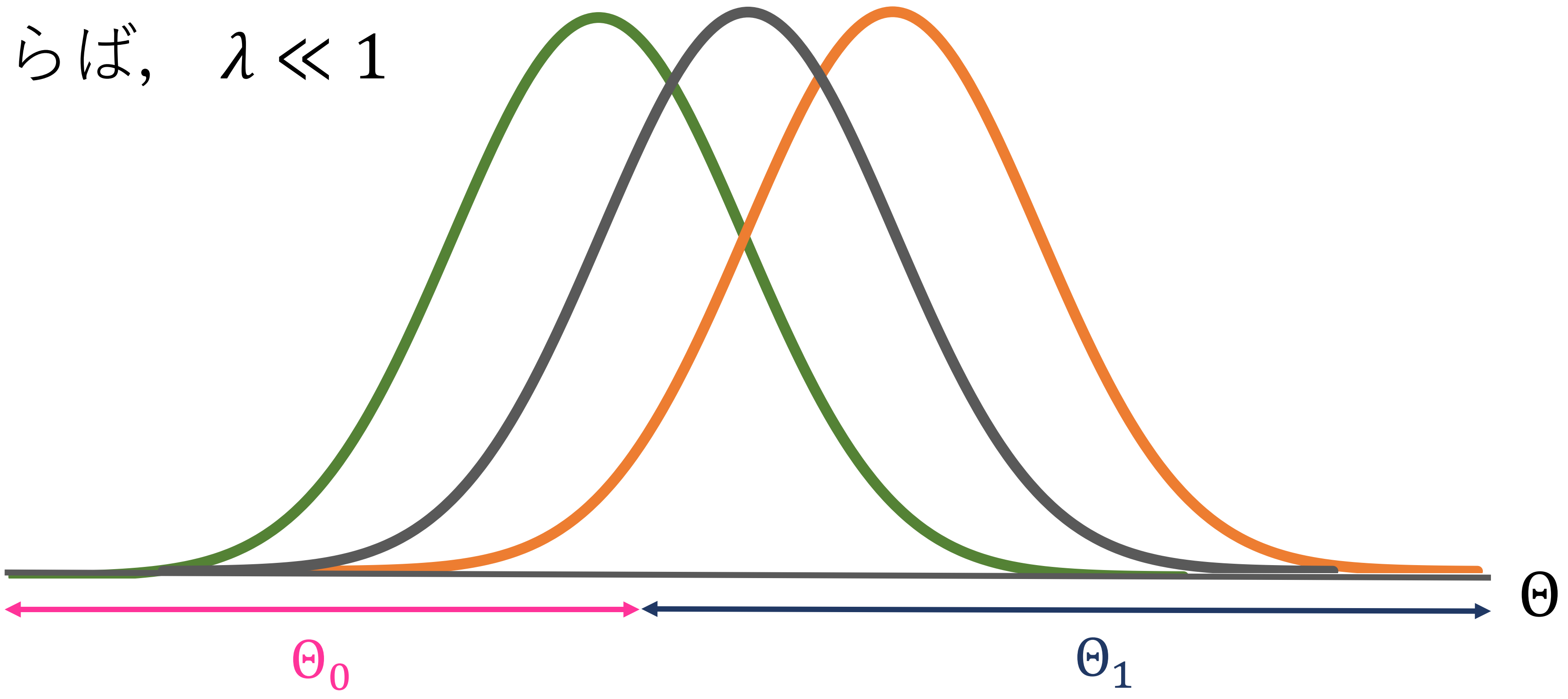
で与えられる検定を尤度比検定 (likelihood ratio test) という

概念図

$0 < \lambda \leq 1$

H_0が真ならば，　$\lambda \approx 1$

H_1が真ならば，　$\lambda \ll 1$



ネイマン・ピアソンの補題

$\Theta_0 = \{\theta_0\}, \Theta_1 = \{\theta_1\}$とし，母集団分布$P$からの無作為標本を$X_1, X_2, \ldots, X_n$とする。

$$H_0: \theta = \theta_0 \text{ vs } H_1: \theta = \theta_1$$

に対する最強力棄却域W^*は

$$W^* = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\middle|\, \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_0)} > k \right\}$$

によって与えられる。ここに有意水準をαとするとき，

$$P_{\theta_0}\big((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W^*\big) = \alpha$$

を満たすようにkを定める。

尤度比検定とネイマン・ピアソンの補題

尤度比の逆数

$$\frac{1}{\lambda} \equiv \frac{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

棄却域W^*

$$W^* = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\middle|\, \frac{1}{\lambda} > c \right\}$$

ただし,

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} P\big((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W^*\big) \leq \alpha$$

尤度比検定の例

- 母集団
  - 平均μ（未知），分散σ^2（未知）の正規母集団
- 無作為標本$X_1, X_2, \dots, X_n$
- 仮説
  - $\underbrace{H_0: \mu = \mu_0}_{\text{複合仮説}}$ vs $\underbrace{H_1: \mu \neq \mu_0}_{\text{複合仮説}}$

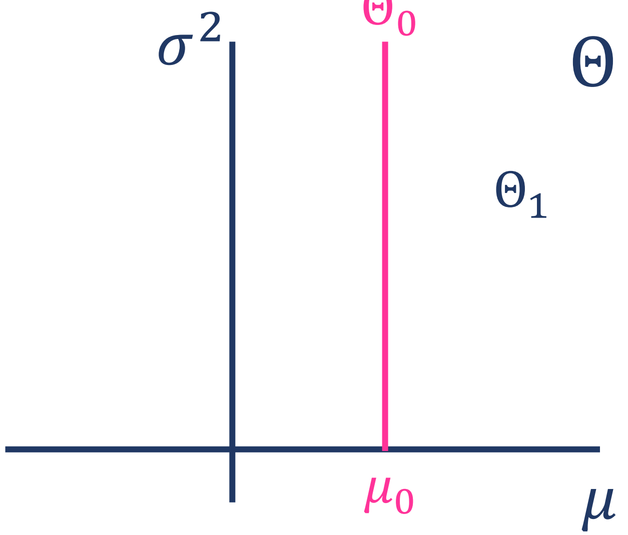
この統計的仮説検定に対する尤度比検定を構成する

尤度比検定の構成 (1)

- パラメータ空間

$$\Theta = \{ (\mu, \sigma^2) \mid -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0 \}$$

$$\Theta_0 = \{ (\mu, \sigma^2) \mid \mu = \mu_0, \sigma^2 > 0 \}$$



- パラメータ空間Θの尤度関数

$$L(\mu, \sigma^2; x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \mu, \sigma^2)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

尤度比検定の構成 (2)

□ パラメータ空間Θの尤度関数の最大化

$$\log L(\mu,\sigma^2;x_1,x_2,\ldots,x_n) = l(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial l(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu} = \dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) \quad (\equiv 0) \\[2ex] \dfrac{\partial l(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2} = -\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{1}{\sigma^2} + \dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \ (\equiv 0) \end{array}\right.$$

これらを解くと

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \bar{x} \qquad \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \ (\equiv S^2)$$

尤度比検定の構成 (3)

- パラメータ空間Θの尤度関数の上限

$$\sup_{(\mu,\sigma^2)\in\Theta} L(\mu,\sigma^2;x_1,x_2,\dots,x_n)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi S^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}{2S^2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi S^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{nS^2}{2S^2}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi S^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{n}{2}\right)$$

尤度比検定の構成 (4)

- パラメータ空間Θ_0の尤度関数

$$L(\mu_0,\sigma^2;x_1,x_2,\dots,x_n)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- パラメータ空間Θ_0の尤度関数の最大化

$$\log L(\mu_0,\sigma^2;x_1,x_2,\dots,x_n)=l(\mu_0,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\log(2\pi)-\frac{n}{2}\log\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2$$

$$\frac{\partial l(\mu_0,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2\ (\equiv 0)$$

これを解くと

$$\widetilde{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2\ \ (\equiv S_0^2)$$

尤度比検定の構成 (5)

- パラメータ空間Θ_0の尤度関数の上限

$$\sup_{(\mu_0,\sigma^2)\in\Theta_0} L(\mu_0,\sigma^2;x_1,x_2,\dots,x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi S_0^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2}{2S_0^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi S_0^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{nS_0^2}{2S_0^2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi S_0^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{n}{2}\right)$$

- 尤度比

$$\lambda = \frac{\sup_{(\mu_0,\sigma^2)\in\Theta_0} L(\mu_0,\sigma^2;x_1,x_2,\dots,x_n)}{\sup_{(\mu,\sigma^2)\in\Theta} L(\mu,\sigma^2;x_1,x_2,\dots,x_n)} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi S_0^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{n}{2}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi S^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{n}{2}\right)}$$

尤度比検定の構成 (6)

$$\lambda = \frac{\sup_{(\mu_0,\sigma^2)\in\Theta_0} L(\mu_0,\sigma^2;x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\sup_{(\mu,\sigma^2)\in\Theta} L(\mu,\sigma^2;x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi S_0^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{n}{2}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi S^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{n}{2}\right)}$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$$S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$$

$$= \left(\frac{S^2}{S_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{S^2}{S^2-(\bar{x}-\mu_0)^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{1-\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{S}\right)^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 &= \sum_{i=1}^{n}[(\bar{x}-\mu_0)+(x_i-\bar{x})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}[(\bar{x}-\mu_0)^2+(x_i-\bar{x})^2] \\ &= n(\bar{x}-\mu_0)^2+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-\mu_0)(x_i-\bar{x}) \\ &= (\bar{x}-\mu_0)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}) \\ &= (\bar{x}-\mu_0)(n\bar{x}-n\bar{x}) \\ &= 0\end{aligned}$$

尤度比検定の構成 (7)

$$(0 <)\ \lambda < c\ (\leq 1) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{S}\right)^2} \right)^{\frac{n}{2}} < c \Leftrightarrow \frac{1}{1 - \left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{S}\right)^2} < c^{\frac{2}{n}}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{S}\right)^2 < c^{-\frac{n}{2}} \Leftrightarrow \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{S}\right| > \left(1 - c^{-\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} (= c')$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{n-1} \cdot \frac{\bar{x} - \mu_0}{S}\right| > \sqrt{n-1} \cdot c' (= c'')$$

小林・田畑．確率と統計（共立出版）
定理5.1, 5.2

$$T = \sqrt{n-1} \cdot \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} = \frac{\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}}{\sqrt{\dfrac{1}{n-1} \cdot \dfrac{n}{\sigma^2} S^2}} \sim t_{n-1}$$

H_0の下で

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$$

$$\bar{X} \perp S^2$$

$$\frac{n}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

尤度比検定の構成 (8)

$c'' = t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$とおいて，棄却域$W$を次のように設定する。

$$W = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \,\middle|\, |T| > t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right\}$$

$t_{n-1}\,(\alpha)$: 自由度$n-1$のt分布の上側$100\alpha\%$点

H_0のもとで，$\beta_W(\mu, \sigma^2) = \alpha$であるため，相似検定でもある