メディア情報処理 2023
第11回目 フーリエ変換の特性

大村英史

出席登録

今日の予定

- 時間軸と周波数軸のシフト
  - 時間軸のシフト
  - 周波数軸のシフト
  - 変調
- たたみこみと積
  - 時間領域のたたみこみ
  - たたみこみとは
  - インパルス応答
  - 周波数応答
- 演習・宿題

時間軸と周波数軸のシフト

ラジオ

なぜある周波数の電磁波で音楽が聞こえるのか？

時間軸のシフト

- 信号を t_1 またはn_1 だけシフトしてフーリエ変換

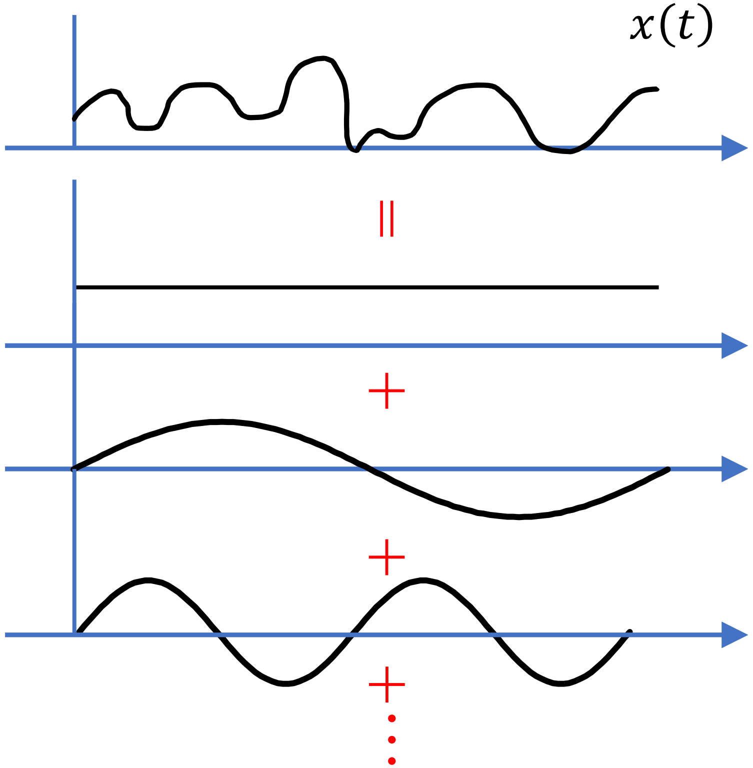
$$x(t-t_1) \xrightarrow{\text{FS}} e^{-i\omega_0 k t_1} X_k$$
$$x(t-t_1) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-i\omega t_1} X(\omega)$$
$$x[n-n_1] \xrightarrow{\text{DTFT}} e^{-i\omega n_1} X(\omega)$$
$$x[n-n_1] \xrightarrow{\text{DFT}} e^{-i\frac{2\pi}{N}k n_1} X[k]$$

- 時間をシフトすると，周波数領域ではシフト前のスペクトルに複素指数関数をかけたものになる
- $x = t - t_0$ とおいておのおののフーリエ変換すれば式は得られ
  - る

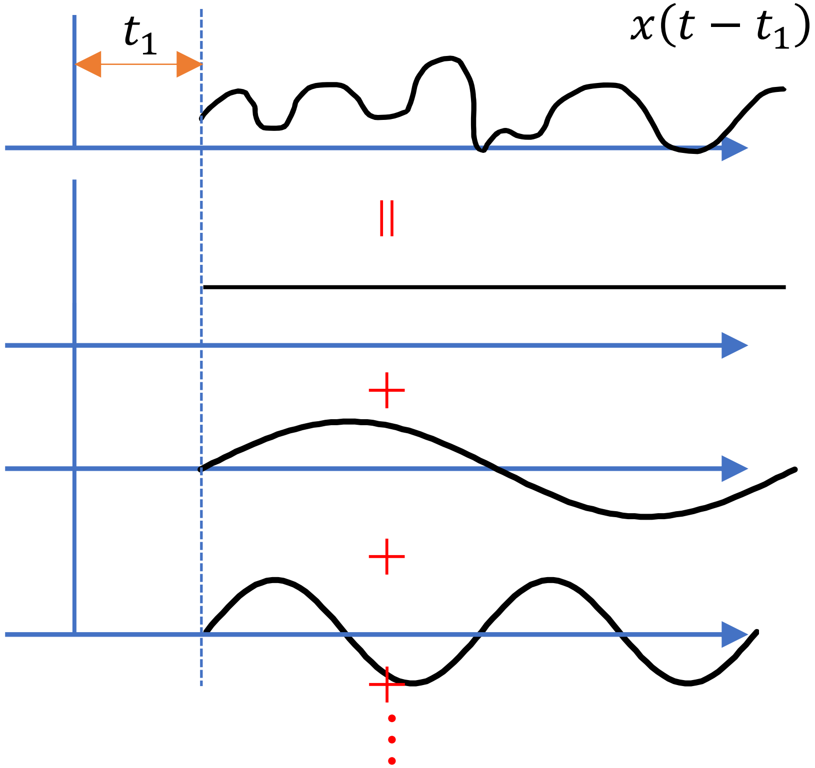
=> 意味を考えていく

フーリエ変換 $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$ で考える

- $x(t)$を無数の複素指数関数に分解



- $x(t-t_1)$ では



時間が t_1 シフトする

時間軸のシフトの意味を考える

- 時間が t_1 シフトする
- 位相では？
  - 周波数 ω のとき

周期：$\frac{2\pi}{\omega}$ [s]　　位相： 2π [rad]

なので

ωt_1おくらせる

つまり，　$X(\omega)$ に $e^{-i\omega t_1}$をかける

比で考えると

$\frac{2\pi}{\omega} : 2\pi = t_1 : ?$

$? = \frac{2\pi t_1}{\frac{2\pi}{\omega}} = \omega t_1$

$$x(t - t_1) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-i\omega t_1} X(\omega)$$

δ関数のシフトはこの考えと同じ

［復習］$\delta(t - t_1)$のフーリエ変換

$$\mathcal{F}[\delta(t - t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_1) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

$$= e^{-i\omega t_1}$$

これはωの関数なので

振幅：$\left|e^{-i\omega t_1}\right| = 1$

位相：$\angle e^{-i\omega t_1} = -\omega t_1$

時間領域でt_1シフトする：周波数領域でωt_1遅れる

周波数のシフト

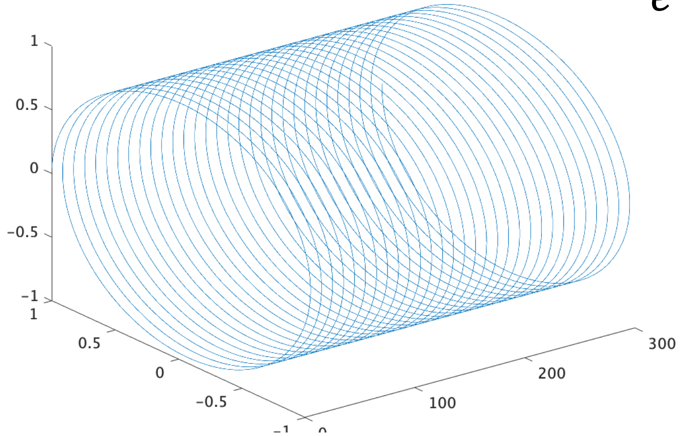
- 周波数のほうがシフト

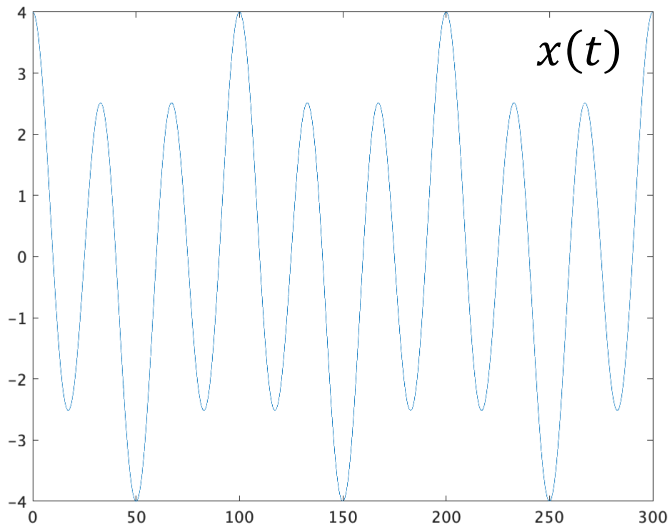
$$e^{i\omega_0 k_1 t}x(t) \xrightarrow{\mathrm{FS}} X_{k-k_1}$$
$$e^{i\omega_1 t}x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega-\omega_1)$$
$$e^{i\omega_1 n}x[n] \xrightarrow{\mathrm{DTFT}} X(\omega-\omega_1)$$
$$e^{i\frac{2\pi}{N}k_1 n}x[n] \xrightarrow{\mathrm{DFT}} X[k-k_1]$$

- 左辺は二つの関数のかけ算

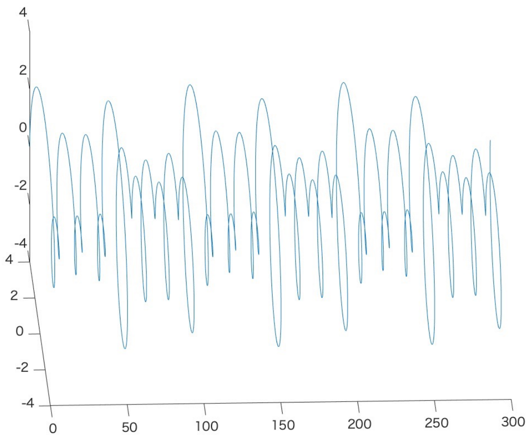
$e^{i\omega t}$ と $x(t)$ のかけ算

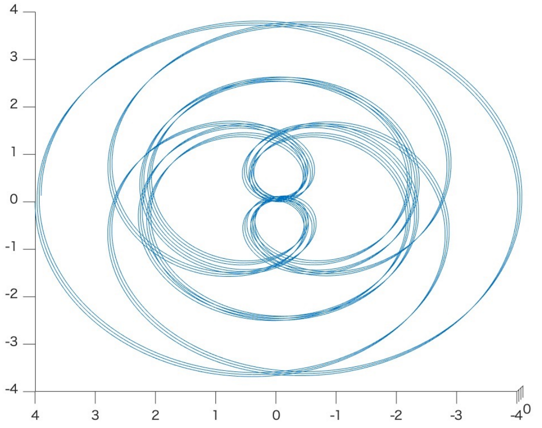
$e^{i\omega t}$



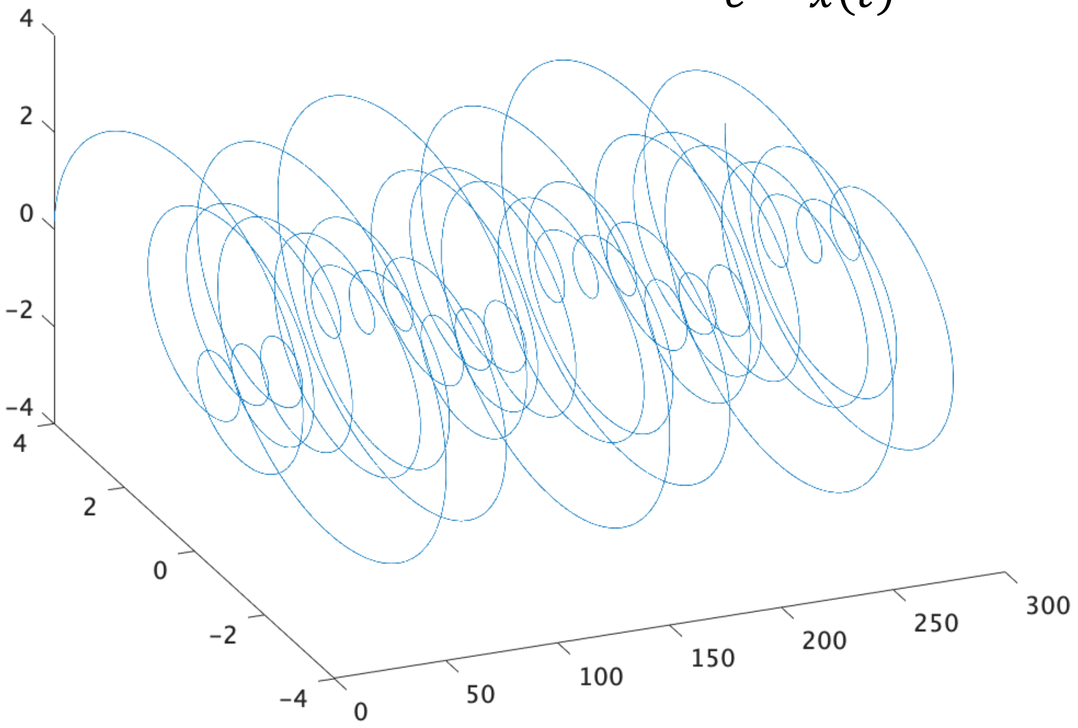


か
け
算





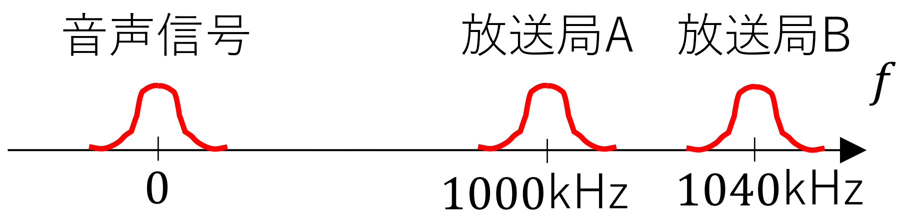
$e^{i\omega t}x(t)$



$e^{i\omega t}$ と $x(t)$ のかけ算

- $e^{i\omega t}$ という単一周波数の信号が
- $x(t)$ という信号によって振幅変調されている

- 変調される側（ $e^{i\omega t}$ ）を搬送波と言う



- ラジオでは？
  - $e^{i\omega t}$ ：放送局の電波
  - $x(t)$ ：声や音楽

可聴域：20Hz – 20kHz
$e^{i\omega t}$を電磁波にして発信すればよいが,
そのままだと混ざる
周波数シフトを使って異なる周波数の電磁波で放送
搬送波は光でもいける

変調について

- 今まで説明してきたもの「振幅の変化で伝達」は振幅変調
  - Amplitude modulation: AMラジオ
- 振幅ではなく「周波数の変化で伝達」させる場合は周波数変調
  - Frequency modulation => FMラジオ
- 他にも「位相の変化で伝達」は位相変調
  - Phase modulation => 携帯電話

たたみこみ

・たたみこみの定理
・たたみこみと積

ともよばれる重要なフーリエ変換の性質です！！

時間領域のたたみこみ

$$\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \xrightarrow{\mathrm{FS}} H_k X_k$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\omega)X(\omega)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[m]\,x[n-m] \xrightarrow{\mathrm{DTFT}} H(\omega)X(\omega)$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} h[m]\,x[n-m] \xrightarrow{\mathrm{DFT}} H[k]X[k]$$

- 積分と総和により
  - たたみこみ積分
  - たたみこみ和

ともいう

$$h(t) * x(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$h[t]\ * x[t] \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[m]\,x[n-m]$$

左辺の積分や総和の部分を「たたみこみ」という
1番目と4番目は周期信号なので，元の信号の一周期のみ

たたみこみの記号として * がよく使われることがおおい

h と x は等価　　$h(t) * x(t) = h(t) * x(t)$

- $\tau' = t - \tau$ とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{\infty}^{-\infty} h(t-\tau')x(\tau')(-d\tau')$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau')x(\tau')d\tau'$$

- $m' = n - m$ とすると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[m]\,x[n-m] = \sum_{m\prime=-\infty}^{\infty} h[m-m']\,x[m']$$

たたみこみ フーリエ変換すると

$$\frac{1}{T_0}h(t) * x(t) \xrightarrow{\text{FS}} H_k X_k$$

$$h(t) * x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\omega)X(\omega)$$

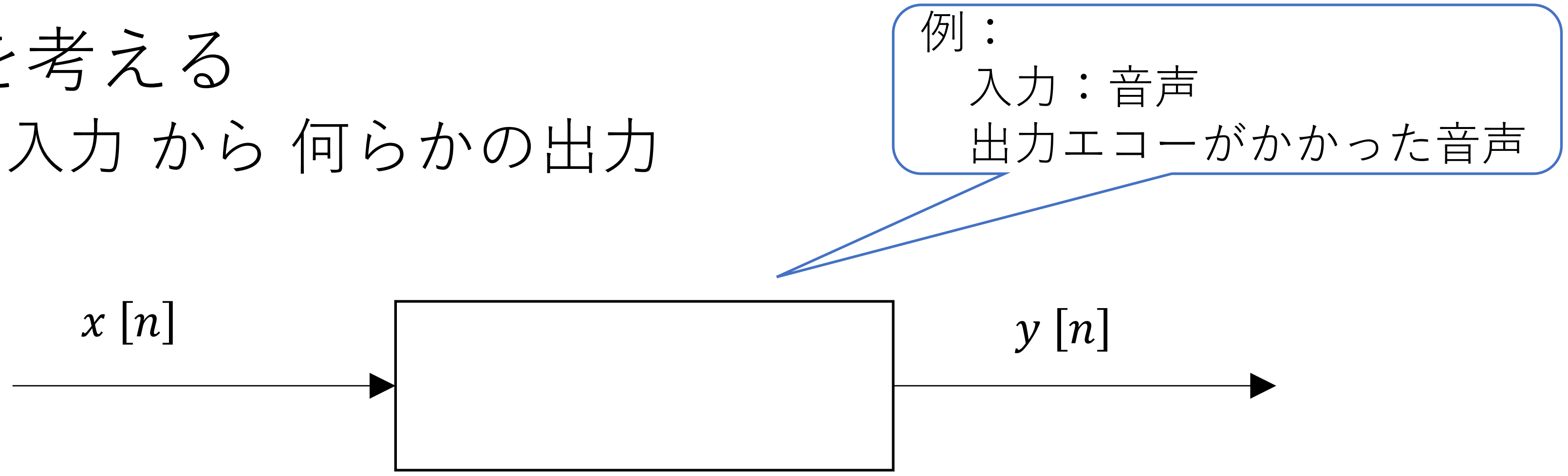
$$h[t] * x[t] \xrightarrow{\text{DTFT}} H(\omega)X(\omega)$$

$$h[t] \ * x[t] \xrightarrow{\text{DFT}} H[k]X[k]$$

周波数領域で見てみると
元の2信号のスペクトルの積を計算したものと一致

たたみこみの意味

- システムを考える
  - 何らかの入力 から 何らかの出力



ブロック線図（ここでは離散で考える）

- 数学的には システム = 写像：
  - 値 => 値：関数
  - 関数 => 関数：作用素

線形性と時不変性

- 関数から関数の写像は難しい

⇒「線形性」と「時不変性」の条件を使って簡単化する

- 線形性
  - 入力が定数倍されたり足し合わされたりしたら，出力も同じく定数倍されたり足し合わされたりする
- 時不変性
  - 時間をずらして入力信号を入れてやると，元の出力と同じ形の信号が同じ時間だけずれて出てくる

- つまり，入力信号を複数の要素に分解して考えられる
  - 要素：単位インパルス信号（デルタ関数）

単位インパルス，デルタ関数（離散バージョン）

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

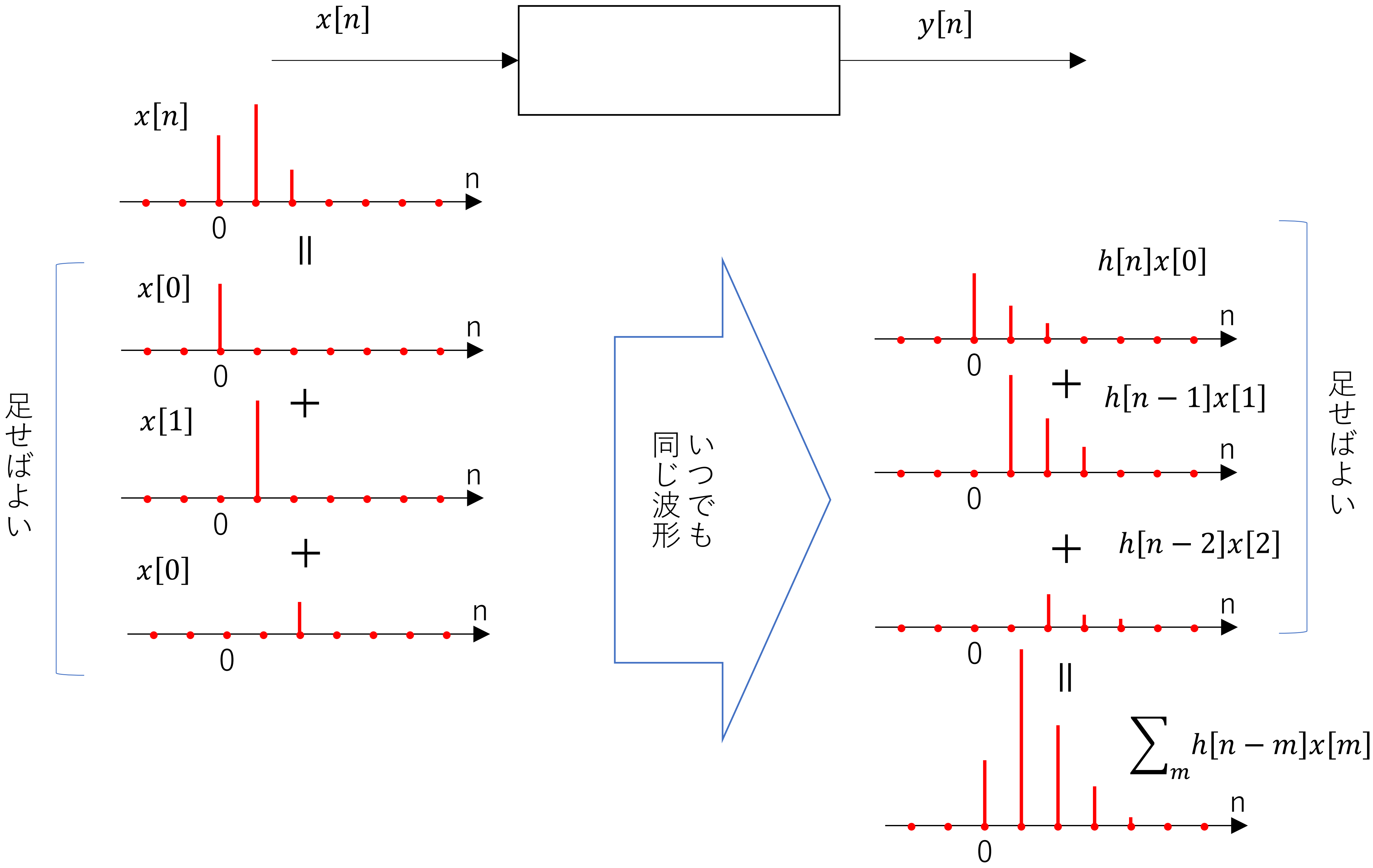
- 時刻0（n=0）のとき，面積1になる値がある

- 単位インパルス応答

システムの例：エコーシステム

- x[0]=2, x[1]=3, x[2]=1，それ以外は0の信号をシステムに入れるとどうなるか？

- 線形性：たせばよい
- 時不変性：いつでも同じ波形



$x[n]$
$y[n]$
$x[n]$
$x[0]$
$x[1]$
$x[0]$
足せばよい
いつでも同じ波形
$h[n]x[0]$
$h[n-1]x[1]$
$h[n-2]x[2]$
足せばよい
$\sum_m h[n-m]x[m]$

他の考え方

- ある時刻nの出力y[n]を考える
  - 時刻0の影響：　h[0]x[n]
  - 時刻n-1の影響：　h[1]x[n-1]
  - 時刻n-2の影響：　h[2]x[n-2]
  - …
- 重ね合わせると

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\, x[n-m]$$

- hとxの等価性

周波数応答 と 積 の関係

$$\sum_{m=0}^{N-1} h[m]\,x[n-m] \xrightarrow{\mathrm{DFT}} H[k]X[k]$$

- なぜ積になる？
- 入力信号$x[n]$を複素指数関数$e^{i\omega n}$にする

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]e^{i\omega(n-m)}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]e^{-i\omega m}e^{i\omega n}$$

$$= e^{i\omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]e^{-i\omega m}$$

$$= H(\omega)e^{i\omega n}$$

離散時間フーリエ変換

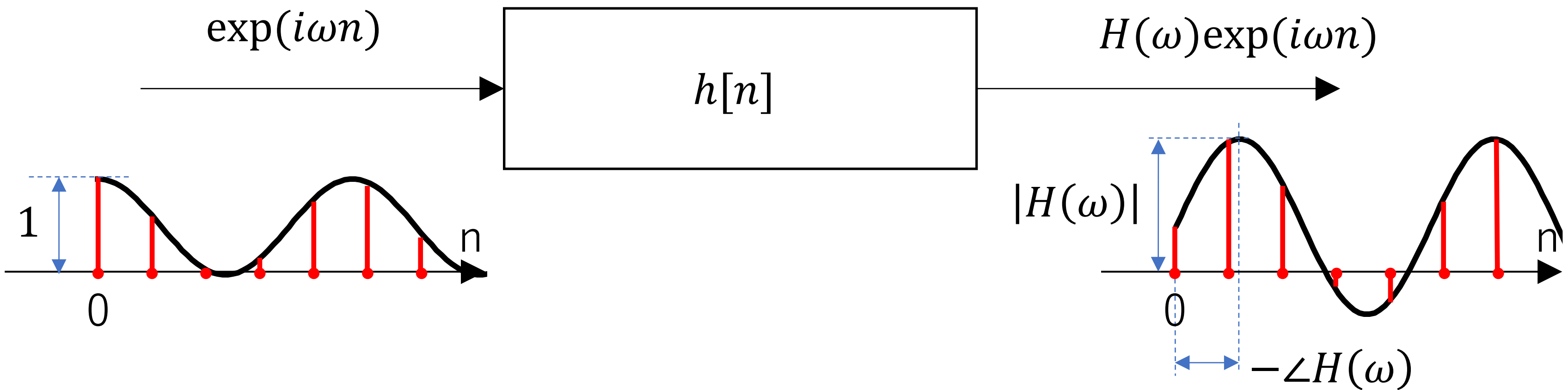
$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-i\omega n}$$

積の意味

$$x[n] = e^{i\omega n}$$
$$y[n] = H(\omega)e^{i\omega n}$$

- **<u>意味：システム$h[n]$に$e^{i\omega n}$を入れたら$H(\omega)e^{i\omega n}$が得られる</u>**
- $H(\omega)$倍 されて出てくる
  - $H(\omega)$は複素数（nの関数ではない）
    - $|H(\omega)|$倍される
    - $-\angle H(\omega)$だけ遅れる

あらゆるωで成立する
時間領域のたたみこみが周波数領域で積になる



周波数応答 $H(\omega)$

- インパルス応答 $h[n]$

  ↓　離散時間フーリエ変換

インパルス（デルタ関数）の
フーリエ変換は
すべての周波数をもっていた

- 周波数応答 $H(\omega)$

線形時不変システムの挙動を周波数領域で表したもの

- 各周波数成分がどのくらい増幅されて，どのくらい位相が遅らされるかを表す量
  - 信号の周波数成分を分析するツール
  - システムの応答を周波数領域で分析するツール
    - 線形時不変システムは，インパルス応答と同一視できるため

周波数領域のたたみこみ

$$h(t)x(t) \xrightarrow{\mathrm{FS}} \sum_{l=0}^{\infty} H_l X_{k-l}$$

$$h(t)x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\varpi) X(\omega - \varpi)\, d\varpi$$

$$h[n]x[n] \xrightarrow{\mathrm{DTFT}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\varpi) X(\omega - \varpi)\, d\varpi$$

$$h[n]x[n] \xrightarrow{\mathrm{DFT}} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} H[l]\, x[k-l]$$

フーリエ変換と逆変換の対称性から理解できる

まとめ

- 時間軸と周波数軸のシフト
  - 時間軸のシフト
  - 周波数軸のシフト
  - 変調
- たたみこみと積
  - 時間領域のたたみこみ
  - たたみこみとは
  - インパルス応答
  - 周波数応答

演習・宿題

- たたみこみをMatlabで体験して聞いてみる
- 音ファイルを自分で用意する
- IR（インパルス応答）ファイルを手に入れる
  - 以下はIRフィルタへのリンク例です．ほかも探してみよう
  - Rainbow Sound
  - https://rainbowsound.cafe/2018/11/21/reverb-ir-summary/
- オーディオファイルとIRファイルをそれぞれ読み込む
  - Audioread関数
  - ステレオの場合2列のデータ
- たたみこむ
  - Conv関数
- 聞く
  - Sound関数

宿題の提出は 無し

- 今回は特に何も提出をしなくてもよいです