論理数学I（5回目）

創域理工学部　情報計算科学科
桂田　浩一

1

4/28/2023

2

前回の復習

- 一元論理代数方程式の解を求める

  $f(x) = g(x)$ を満たす x を求めよ

  1. $f(x)g(x) \vee \overline{f(x)}\,\overline{g(x)} = 1$を代わりに解く
     （$f(x)g(x) \vee \overline{f(x)}\,\overline{g(x)} = \varphi(x)$と置く）
  2. $\varphi(0)$，$\varphi(1)$を求める
  3. 解の存在条件$\varphi(0) \vee \varphi(1) = 1$になる条件を求める
  4. $x = \overline{\varphi(0)} \vee \alpha\varphi(1)$を計算する

講義や演習問題に関して質問がある場合には
下記までメールを送ってください．

katsurada@rs.tus.ac.jp

4/28/2023

3

今日の内容

- n元論理代数方程式を解く

$$\begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_n)=g_1(x_1,\cdots,x_n) \\ f_2(x_1,\cdots,x_n)=g_2(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\cdots,x_n)=g_m(x_1,\cdots,x_n) \end{cases}$$ を満たす$x_1,\cdots,x_n$を求めよ

4/28/2023

4

$\boldsymbol{n}$元論理代数方程式の変形

$$\begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_n)=g_1(x_1,\cdots,x_n) \\ f_2(x_1,\cdots,x_n)=g_2(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\cdots,x_n)=g_m(x_1,\cdots,x_n) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_n)g_1(x_1,\cdots,x_n)\vee\overline{f_1(x_1,\cdots,x_n)}\,\overline{g_1(x_1,\cdots,x_n)}=1 \\ f_2(x_1,\cdots,x_n)g_2(x_1,\cdots,x_n)\vee\overline{f_2(x_1,\cdots,x_n)}\,\overline{g_2(x_1,\cdots,x_n)}=1 \\ \vdots \\ f_m(x_1,\cdots,x_n)g_m(x_1,\cdots,x_n)\vee\overline{f_m(x_1,\cdots,x_n)}\,\overline{g_m(x_1,\cdots,x_n)}=1 \end{cases}$$

4/28/2023

5

$\boldsymbol{n}$元論理代数方程式の変形

$$\begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_n)g_1(x_1,\cdots,x_n) \vee \overline{f_1(x_1,\cdots,x_n)}\ \overline{g_1(x_1,\cdots,x_n)} = 1 \\ f_2(x_1,\cdots,x_n)g_2(x_1,\cdots,x_n) \vee \overline{f_2(x_1,\cdots,x_n)}\ \overline{g_2(x_1,\cdots,x_n)} = 1 \\ \vdots \\ f_m(x_1,\cdots,x_n)g_m(x_1,\cdots,x_n) \vee \overline{f_m(x_1,\cdots,x_n)}\ \overline{g_m(x_1,\cdots,x_n)} = 1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,\cdots,x_n) = 1 \\ \varphi_2(x_1,\cdots,x_n) = 1 \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1,\cdots,x_n) = 1 \end{cases}$$

4/28/2023

6

$\boldsymbol{n}$元論理代数方程式の変形

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,\cdots,x_n) = 1 \\ \varphi_2(x_1,\cdots,x_n) = 1 \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1,\cdots,x_n) = 1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi_1(x_1,\cdots,x_n)\cdot\varphi_2(x_1,\cdots,x_n)\cdot\cdots\cdot\varphi_m(x_1,\cdots,x_n) = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\varphi(x_1,\cdots,x_n) = 1}$$

これを解くことにする

4/28/2023

7

$\boldsymbol{n}$元論理代数方程式の解（１）

- $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = 1$ を x_1 について解くと．．．

  x_1 が $x_2, \cdots, x_n$ の式の形で求まる

  - x_1 の一般解： $x_1 = \boxed{\overline{\varphi(0, x_2, \cdots, x_n)} \vee \alpha_1 \varphi(1, x_2, \cdots, x_n)}$
  - x_1 の解の存在条件：$\boxed{\varphi(0, x_2, \cdots, x_n) \vee \varphi(1, x_2, \cdots, x_n) = 1}$

x_1 が解をもつために
$x_2, \cdots, x_n$ が満たさなければならない条件
=新たな方程式とみなせる

$\Rightarrow \psi(x_2, \cdots, x_n) = 1$と置く

8

$\boldsymbol{n}$元論理代数方程式の解（２）

- $\psi(x_2, \cdots, x_n) = 1$ を x_2 について解くと．．．

  x_2 が $x_3, \cdots, x_n$ の式の形で求まる

  - x_2 の一般解： $x_2 = \boxed{\overline{\psi(0, x_3, \cdots, x_n)} \vee \alpha_2 \psi(1, x_3, \cdots, x_n)}$
  - x_2 の解の存在条件：$\boxed{\psi(0, x_3, \cdots, x_n) \vee \psi(1, x_3, \cdots, x_n) = 1}$

$x_3, \cdots, x_n$についての新たな方程式

$\Rightarrow \chi(x_3, \cdots, x_n) = 1$と置く

：　（以下，x_3，x_4，…と繰り返す）

9

$\boldsymbol{n}$元論理代数方程式の解（３）

- x_n について解いたときの解の存在条件が
元の方程式の解の存在条件

- x_n について解いたら，x_n から逆順に
一般解に $x_n, \cdots, x_i$ を代入していき
一般解に含まれる変数を消去する

4/28/2023

10

例題

- 二元論理代数方程式 $\begin{cases} ax \vee by = 1 \\ xy = c \end{cases}$ を x，y について解け

$xy = c \Leftrightarrow xyc \vee \overline{xy}\bar{c} = 1$ より

$\varphi(x, y) = (ax \vee by)(xyc \vee \overline{xy}\bar{c}) = 1$ を代わりに解く．

$\varphi(0, y) = (a \cdot 0 \vee by) \cdot (0 \cdot yc \vee \overline{0 \cdot y}\bar{c}) = by\bar{c}$

$\varphi(1, y) = (a \cdot 1 \vee by) \cdot (1 \cdot yc \vee \overline{1 \cdot y}\bar{c}) = (a \vee by) \cdot (yc \vee \bar{y}\bar{c})$

よって

x の一般解は $x = \overline{\varphi(0, y)} \vee \alpha_1 \varphi(1, y)$

$= \overline{by\bar{c}} \vee \alpha_1 (a \vee by) \cdot (yc \vee \bar{y}\bar{c})$

$= \bar{b} \vee \bar{y} \vee c \vee \alpha_1 ayc \vee \alpha_1 a\bar{y}\bar{c} \vee \alpha_1 byyc \vee \alpha_1 by\bar{y}\bar{c}$

$= \bar{b} \vee \bar{y} \vee c$

4/28/2023

11

$$\varphi(0,y) = by\bar{c} \qquad \varphi(1,y) = (a \vee by)\cdot(yc \vee \bar{y}\bar{c})$$

x の解の存在条件は $\varphi(0,y) \vee \varphi(1,y) = 1$

したがって $\psi(y) = \varphi(0,y) \vee \varphi(1,y)$ と置くと

$$\psi(y) = by\bar{c} \vee (a \vee by)\cdot(yc \vee \bar{y}\bar{c}) = 1$$
$$\psi(0) = b\cdot 0\cdot \bar{c} \vee (a \vee b\cdot 0)\cdot(0\cdot c \vee \bar{0}\cdot\bar{c}) = a\bar{c}$$
$$\psi(1) = b\cdot 1\cdot \bar{c} \vee (a \vee b\cdot 1)\cdot(1\cdot c \vee \bar{1}\cdot\bar{c}) = b\bar{c} \vee (a \vee b)c$$
$$= b \vee ac$$

y の一般解は $y = \overline{\psi(0)} \vee \alpha_2\psi(1)$

$$= \overline{a\bar{c}} \vee \alpha_2 b \vee \alpha_2 ac$$
$$= \bar{a} \vee c \vee \alpha_2 b \vee \alpha_2 ac$$
$$= \bar{a} \vee c \vee \alpha_2 b$$

4/28/2023

12

$$\psi(0) = a\bar{c} \qquad \psi(1) = b \vee ac$$

y の解の存在条件は$\psi(0) \vee \psi(1) = 1$

したがって解の存在条件は $a\bar{c} \vee b \vee ac = a \vee b = 1$

$y = \bar{a} \vee c \vee \alpha_2 b$ より

x の一般解は $x = \bar{b} \vee \bar{y} \vee c$

$$= \bar{b} \vee \overline{\bar{a} \vee c \vee \alpha_2 b} \vee c$$
$$= \bar{b} \vee a\bar{c}\overline{\alpha_2 b} \vee c$$
$$= \bar{b} \vee a\bar{c}\left(\overline{\alpha_2} \vee \bar{b}\right) \vee c$$
$$= \bar{b} \vee a\bar{c}\overline{\alpha_2} \vee a\bar{c}\bar{b} \vee c$$
$$= \bar{b} \vee a\overline{\alpha_2} \vee c$$

4/28/2023

出題予定の演習課題

- 二元論理代数方程式を解く