メディア情報処理 2023
第8回目 離散フーリエ変換

K504
大村英史

出席登録

休講のおしらせ

- 来週 11/13 は，国際会議を開催するため授業は休講にします

今日の予定

- 離散フーリエ変換
  - 離散フーリエ変換のイメージ
  - 離散フーリエ逆変換
  - 離散フーリエ変換
  - 高速フーリエ変換のイメージ

- 4つのフーリエ変換

- 演習・宿題

離散フーリエ変換のイメージ

離散フーリエ変換

- 「離散時間・離散周波数フーリエ変換」と言ってもよい
  - 名前がややこしいのはフーリエ級数も同じなので我慢する
  - 時間領域，周波数領域の両方を離散化

- 何がうれしいか
  - 計算機でフーリエ変換ができる（半分嘘）
  - フーリエ変換の手計算（特に微積）はやばかったでしょ？
  - 微積は本来計算機で厳密に計算できない

離散フーリエ変換のイメージ

- フーリエ変換 => 離散時間フーリエ変換
  - 時間領域を離散化 => 周波数が周期的になった

- これと同じことをする
  - 周波数領域を離散化 => 時間が周期的になるはず

- 実はフーリエ級数で同じことをしていた（級数展開なのでわかりにくい？）
  - 時間は周期的な関数と仮定した
  - とびとびの周波数の足し合わせた => 周期的な時間の関数になった

少し具体化

- 時間信号

離散化

- 離散時間信号（間隔:1） => 周期2πの連続スペクトル

周期的にする

- 周期的離散時間信号 => 離散的かつ周期2πの連続スペクトル

（周期:N） （間隔: $\frac{2\pi}{N}$）

時間領域

周波数領域

1周期にN個の点
どちらもN個で1周期

離散時間フーリエ変換から離散フーリエ変換へ

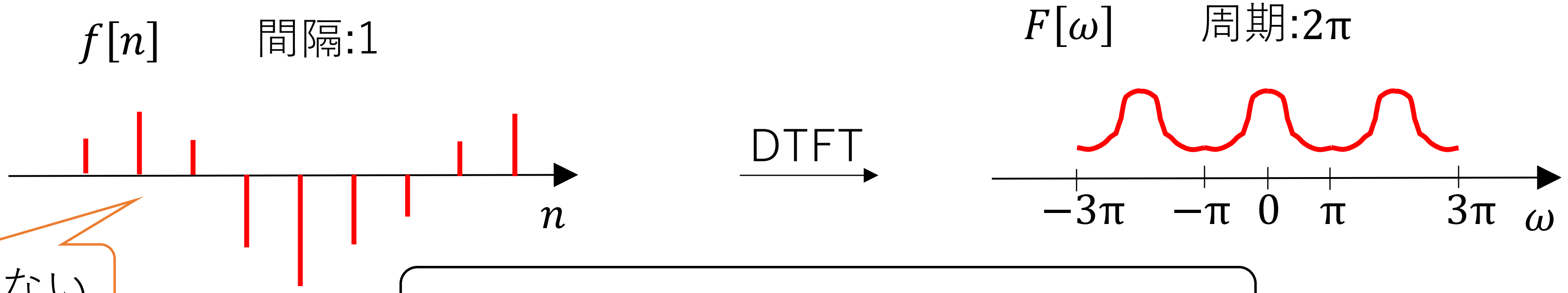
まず離散時間フーリエ変換

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-i\omega n}$$

$$f[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)e^{i\omega n}d\omega$$

離散時間フーリエ変換は

- 周期的ではない離散時間信号　=>　周期的連続スペクトル



周期的でない

$f[n]$を周期的にしていくと　どうなる？

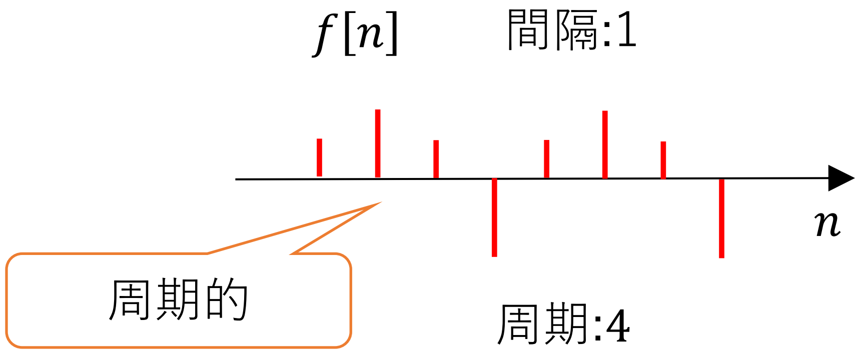
$f[n]$を周期的にすると．．．

- 周波数領域は離散化されるがどのようになるか？

$$F(\omega) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-i\omega n}}$$

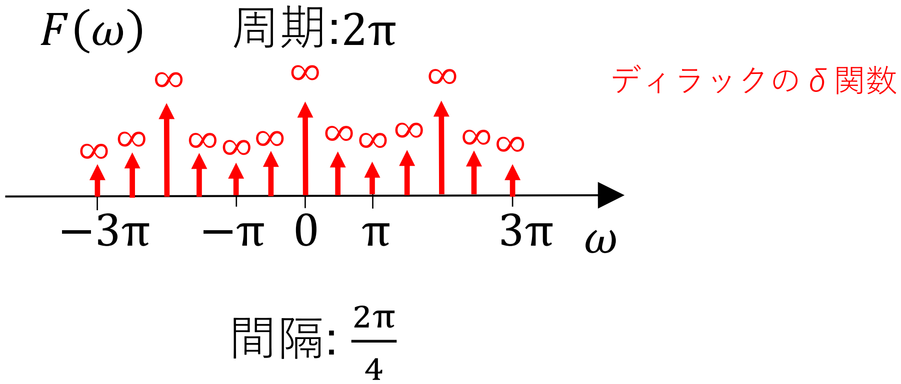
$f[n]$に周期があるとすると
[1周期分] + [1周期分] + [1周期分] + ⋯
無限個の加算，だけど周期に応じた無限（面積は有限）

例えば．．．



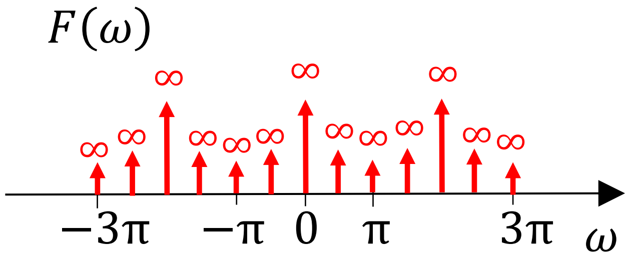
DTFT

4つの足し合わせ



ディラックの$\boldsymbol{\delta}$関数を使って$\boldsymbol{F(\omega)}$を表せる

$$F(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$



Nは周期

d_kは$\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$のところの面積

d_kは周期N つまり

$d_0, d_1, \cdots, d_{N-1}$ <= 1からNでもよい

のくりかえし

この式を離散フーリエ逆変換に代入する

$F(\omega)$を離散フーリエ逆変換に代入する

$$f[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)e^{i\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)e^{i\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{i\frac{2\pi kn}{N}}$$

$\delta(0)$ 以外は0
つまりは$\omega = \frac{2\pi k}{N}$のみ考えれよい

積分区間が2πなので1周期
つまりN本のδ関数がある
積分すると0からN − 1の総和
（Nから2N-1とか1周期ならどこでもよいのだが．．．）

あとはd_kの処理をする

離散フーリエ逆変換を得る

d_kはインパルスの面積なので，

$$d_k = F[k] \cdot \frac{2\pi}{N}$$

係数は，定数（N）でよいのだが
後できれいに見えるように

となる$F[k]$を導入する．

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{i\frac{2\pi kn}{N}} \qquad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

これが，離散フーリエ逆変換！

離散フーリエ変換を得る

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-i\omega n}$$

$F(\omega)$は$\omega = \frac{2\pi k}{N}$にインパルスが立っている関数なので,
$\omega = \frac{2\pi k}{N}$の時しか意味はない（つまり$F\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$のみ）
これを1周期だけで考えてあげると

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-i\frac{2\pi k}{N}n} \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1)$$

これが，離散フーリエ変換！！

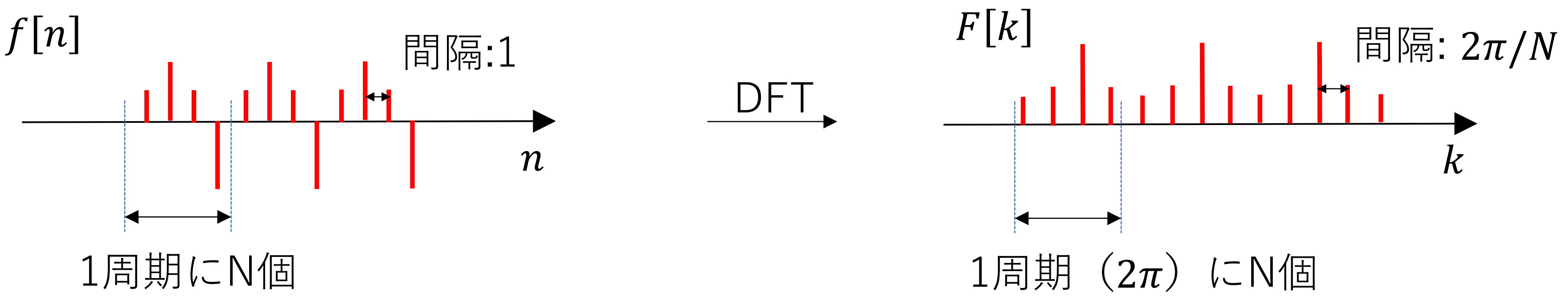
離散フーリエ変換と逆変換

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-i\frac{2\pi k}{N}n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, N-1)$$

$$f[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{i\frac{2\pi k}{N}n} \qquad (n = 0, 1, \ldots, N-1)$$

- フーリエ変換をきれいにするために$d_k = F[k] \cdot \frac{2\pi}{N}$とした
- 総和の区間は1周期（1からNでもOK）
- どちらもN個の配列

離散フーリエ変換の考察



- kが$\omega = \frac{2\pi k}{N}$に対応
- kが大きくなっても周波数は高くならない($k = N$のとき$k = 0$)

$k = 0, 1, \dots, N$
$\quad\quad\quad\ \parallel$
$\quad\quad\quad 0, 1, \dots, N$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \parallel$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0, 1, \dots, N$

$\omega = 0, \dots \pi, \dots 2\pi$
$\quad\quad\quad\ \parallel$
$\quad\quad\quad 0, \dots \pi, \dots 2\pi$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \parallel$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0, \dots \pi, \dots 2\pi$

ビデオカメラは離散的
人間の目も離散的？

https://www.youtube.com/watch?v=8k9wmaBnZ24&t=10s

- 0の周波数0から始まり，半分まで増えていく，
- 半分で最大，半分以降は周波数小さくなっていき，Nで0
- 音の高さは先週演習課題でやった？ 扇風機を撮影すると，止まって，逆回転する？

ワゴンホイール効果・ストロボ効果

- いろいろな現象
  - https://gigazine.net/news/20170511-wheel-effect/

- レーザー光線の移動
  - https://www.youtube.com/watch?v=opWKcE8Z31A

FFTについて

- FFT: Fast Fourier Transform
- 高速フーリエ変換
  - × フーリエ変換を高速にする
  - ○ 離散フーリエ変換を高速にする
- FFTの入出力はDFTと同じ
- どうやって高速化するか
  - 「良いアルゴリズム」をつかう
  - 計算量を下げる

なんでFDFTじゃないのかな？
わかりにくい．．．

FFTはフーリエ変換ではない
FFTは離散フーリエ変換と同じ

DFTとFFTの計算オーダー

- いろいろなアルゴリズムがある
  - クーリーとテューキーのアルゴリズム
  - 因数分解法
- DFT: $F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-i\frac{2\pi k}{N}n} \qquad (k = 0, 1, \dots, N-1)$
  - N個のkそれぞれに，Σ計算をする
  - N^2のオーダー
- FFT: $\boldsymbol{k}$を偶数奇数にわけて．．．計算が分岐される
  - 詳しいアルゴリズムは省略（これは，最後の自由課題にします）
  - $N\log_2 N$のオーダー　<=　はやい！

コンピュータでフーリエ変換したいとき

- DFT（離散フーリエ変換）は使わない
  - 計算が遅い（遅すぎて実用的ではない）
- FFT（高速フーリエ変換）の実装は避ける
  - 複雑なので間違えて実装する可能性が高い
  - 世の中にいろいろライブラリがある

- MATLABのFFT
  - 自分で調べて使ってみよう <= 演習

4種類のフーリエ変換

比べてみる

4種類のフーリエ変換

フーリエ係数の計算

$$F_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cdot e^{-i\omega_0 kt}dt$$

フーリエ級数

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{F_k \cdot e^{i\omega_0 kt}\right\}$$

離散時間フーリエ変換

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-i\omega n}$$

離散時間フーリエ逆変換

$$f[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\omega)e^{i\omega n}d\omega$$

フーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}dt$$

フーリエ逆変換

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot e^{i\omega t}d\omega$$

離散フーリエ変換

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{-i\frac{2\pi k}{N}n}$$

離散フーリエ逆変換

$$f[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k]e^{i\frac{2\pi k}{N}n}$$

離散性と周期性

時間領域			**周波数領域**	
離散性	**周期性**		**離散性**	**周期性**
連続	周期的	フーリエ級数展開 ↔	離散的	非周期的
連続	非周期的	フーリエ変換 ↔	連続	非周期的
離散的	非周期的	離散時間フーリエ変換 ↔	連続	周期的
離散的	周期的	離散フーリエ変換 ↔	離散的	周期的

離散性と周期性

- 各変換は
  - 片方の領域で離散的 => もう片方が周期的
  - 片方の領域で周期的 => もう片方で離散的
- となる
- 各式の演算において
  - 連続変数については積分
  - 離散変数については総和
- 各式の範囲は
  - 非周期的な場合は全域
  - 周期的な場合は1周期

全体的に意味と名前が合致していない

名称	意味	英語	略称
フーリエ級数展開	離散周波数フーリエ変換	Fourier Series	FS
フーリエ変換	フーリエ変換	Fourier Transform	FT
離散時間フーリエ変換	離散時間フーリエ変換	Discrete-Time Fourier Transform	DTFT
離散フーリエ変換	離散周波数・離散時間フーリエ変換	Discrete Fourier Transform	DFT
高速フーリエ変換	高速離散フーリエ変換	Fast Fourier Transform	FFT

共通点は，すべてにフーリエの名前を冠している．．．

まとめ

- 離散フーリエ変換
    - 離散フーリエ変換のイメージ
    - 離散フーリエ逆変換
    - 離散フーリエ変換
    - 高速フーリエ変換のイメージ
- 4つのフーリエ変換

演習・宿題

- MATLABの関数FFTについて調べて，自分で使えるようにしなさい
- 適当な信号をもちいてFFTを実行しなさい
- 実行結果をグラフで表示しなさい

- 例えば
  - 適当に周期関数を合成してみる？
  - 非周期だったらFFTできる？

宿題の提出

- 「自分でMATLABのFFTを使ってみたぞ」ということがわかる内容であればよいです
- 入出力について，自分なりの解釈を説明してください

- 提出物
  - mファイルでもmlxファイルでもOK
  - 入出力の解釈についてはpdfで提出

- 提出方法と締切
  - LETUS
  - 11/20 23:59 （再来週）