統計学2及び演習

一様最強力検定とその例

創域理工学部
Faculty of Science and Technology

東京理科大学
創域理工学部情報計算科学科
安藤宗司

2023年5月10日

Contents

- 一様最強力検定
- 一様最強力検定の具体例
  - 正規母集団の仮説検定
- 単調尤度比

最強力検定

すべての$\theta_0 \in \Theta_0$に対して,

$$\beta_W(\theta_0) = P_{\theta_0}\left((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W\right) \leq \alpha$$

を満たす棄却域Wのうち，ある特定の$\theta_1 \in \Theta_1$に対して,

$$\beta_{W^*}(\theta_1) \geq \beta_W(\theta_1)$$

を満たす棄却域W^*を$\theta = \theta_1$に対する最強力棄却域という

また，最強力棄却域W^*を用いた検定を

最強力検定 (most powerful test) という

最強力検定の構成方法

□ 単純仮説 vs 単純仮説の場合

帰無仮説 $H_0 : \theta = \theta_0$　　　対立仮説 $H_1 : \theta = \theta_1$

- 最強力検定を構成するためには
ネイマン・ピアソンの補題
を用いればいいことが知られている

ネイマン・ピアソンの補題

$\Theta_0 = \{\theta_0\}, \Theta_1 = \{\theta_1\}$とし，母集団分布$P$からの無作為標本を$X_1, X_2, \ldots, X_n$とする。

$$H_0: \theta = \theta_0 \text{ vs } H_1: \theta = \theta_1$$

に対する最強力棄却域W^*は

$$W^* = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\middle|\, \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_0)} > k \right\}$$

によって与えられる。ここに有意水準をαとするとき，

$$P_{\theta_0}\big((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W^*\big) = \alpha$$

を満たすようにkを定める。

正規母集団の仮説検定

- 母集団
  - 平均μ（未知），分散σ^2（既知）の正規母集団
- 無作為標本$X_1, X_2, \dots, X_n$
- 仮説
  - $H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu = \mu_1\ (> \mu_0)$

この統計的仮説検定に対する最強力棄却域W^*を導出する

最強力棄却域W^*の導出 (1)

前回講義資料再掲

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}(x_i-\mu)^2\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}[(\bar{x}-\mu)+(x_i-\bar{x})]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[(\bar{x}-\mu)^2+(x_i-\bar{x})^2]$$

$$= n(\bar{x}-\mu)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-\mu)(x_i-\bar{x})$$

$$= (\bar{x}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})$$

$$= (\bar{x}-\mu)(n\bar{x}-n\bar{x})$$

$$= 0$$

最強力棄却域W^*の導出 (2)

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu_0)} = \frac{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_1)^2+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)\right)}{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_0)^2+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)\right)}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_1)^2 - n(\bar{x}-\mu_0)^2\right)\right)$$

したがって，最強力棄却域W^*は次のようになる。

$$W^* = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\middle|\; \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_1)^2 - n(\bar{x}-\mu_0)^2\right)\right) > k \right\}$$

$$= \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \bar{x} > k' \}$$

$$k' = \frac{(2\sigma^2/n)\log k - \mu_0^2 + \mu_1^2}{2(\mu_1-\mu_0)}$$

最強力棄却域W^*の導出 (2)

$$\exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_1)^2-n(\bar{x}-\mu_0)^2\right)\right)>k$$

$$k'=\frac{(2\sigma^2/n)\log k-\mu_0^2+\mu_1^2}{2(\mu_1-\mu_0)}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_1)^2-n(\bar{x}-\mu_0)^2\right)\ >\log k$$

$$\Leftrightarrow -n(\bar{x}-\mu_1)^2+n(\bar{x}-\mu_0)^2>2\,\sigma^2\log k$$

$$\Leftrightarrow -(n\bar{x}^2-2n\mu_1\bar{x}+n\mu_1^2)+n\bar{x}^2-2n\mu_0\bar{x}+n\mu_0^2>2\,\sigma^2\log k$$

$$\Leftrightarrow 2n(\mu_1-\mu_0)\bar{x}>2\,\sigma^2\log k-n\mu_0^2+n\mu_1^2$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}>\frac{(2\sigma^2/n)\log k-\mu_0^2+\mu_1^2}{2(\mu_1-\mu_0)}$$

($\because$ $\mu_0<\mu_1$より$(\mu_1-\mu_0)>0$)

最強力棄却域W^*の導出 (3)

帰無仮説H_0: $\mu = \mu_0$が真のとき
$$Z = \frac{(\bar{X} - \mu_0)}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$$

$$\alpha = P_{\mu_0}\left((X_1, X_2, \dots, X_n) \in W^*\right)$$
$$= P_{\mu_0}(\bar{X} > k')$$
$$= P_{\mu_0}\left(\frac{(\bar{X} - \mu_0)}{\sqrt{\sigma^2/n}} > \frac{k' - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right)$$
$$= P_{\mu_0}(Z > z(\alpha))$$

$z(\alpha)$: 標準正規分布の上側100α%点

したがって，$z(\alpha) = \frac{k' - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}$

を満たすとき，W^*を用いた検定の

第1種の誤り確率がαとなることから，
$$k' = \mu_0 + z(\alpha)\sqrt{\sigma^2/n}$$

となるように，kを定めればよい

最強力棄却域W^*の導出 (4)

最強力棄却域W^*

$$W^* = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\middle|\, \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)} > k \right\}$$

$$= \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \bar{x} > k' \}$$

$$= \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\middle|\, \bar{x} > \mu_0 + z(\alpha)\sqrt{\sigma^2/_n} \right\}$$

したがって，次の検定方式が考えられる。

$$\bar{X} \in \left(\mu_0 + z(\alpha)\sqrt{\sigma^2/_n}, \infty \right)$$

のとき，帰無仮説H_0: $\mu = \mu_0$を棄却する。

単純仮説と複合仮説

- 仮説　帰無仮説 $H_0: \theta \in \Theta_0$　対立仮説 $H_1: \theta \in \Theta_1$
- 単純仮説
  - Θ_0が1点のとき，単純仮説 (simple hypothesis)
  - Θ_1に関しても同様

帰無仮説 $H_0: \mu = 165$　対立仮説 $H_1: \mu = 170$

- 複合仮説
  - Θ_0が2点以上のとき，複合仮説 (composite hypothesis)
  - Θ_1に関しても同様

帰無仮説 $H_0: \mu = 165$

対立仮説 $H_1: \mu > 165$（右片側）

対立仮説 $H_1: \mu < 165$（左片側）

対立仮説 $H_1: \mu \neq 165$（両側）

複合仮説に対する棄却域Wの設定

- 棄却域Wは無数に作ることができる

$$\sup_{\theta_0 \in \Theta_0} P_{\theta_0}\left((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W\right) \leq \alpha$$

この式を満たすようにWを定める

- 検出力が高い（第2種の過誤確率が低い）棄却域Wを設定したい
  - 複合仮説では，どうすれば最良な検定方式を構築できるか
  - 良い棄却域とは何か
  - 良い棄却域を導く方法とは

一様最強力検定

すべての$\theta_0 \in \Theta_0$に対して,

$$\beta_W(\theta_0) = P_{\theta_0}\big((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W\big) \leq \alpha$$

を満たす棄却域Wのうち，すべての$\theta_1 \in \Theta_1$に対して,

$$\beta_{W^*}(\theta_1) \geq \beta_W(\theta_1)$$

を満たす棄却域W^*を$\theta = \theta_1$に対する一様最強力棄却域という

また，一様最強力棄却域W^*を用いた検定を

一様最強力検定 (uniformly most powerful test) という

一様最強力検定

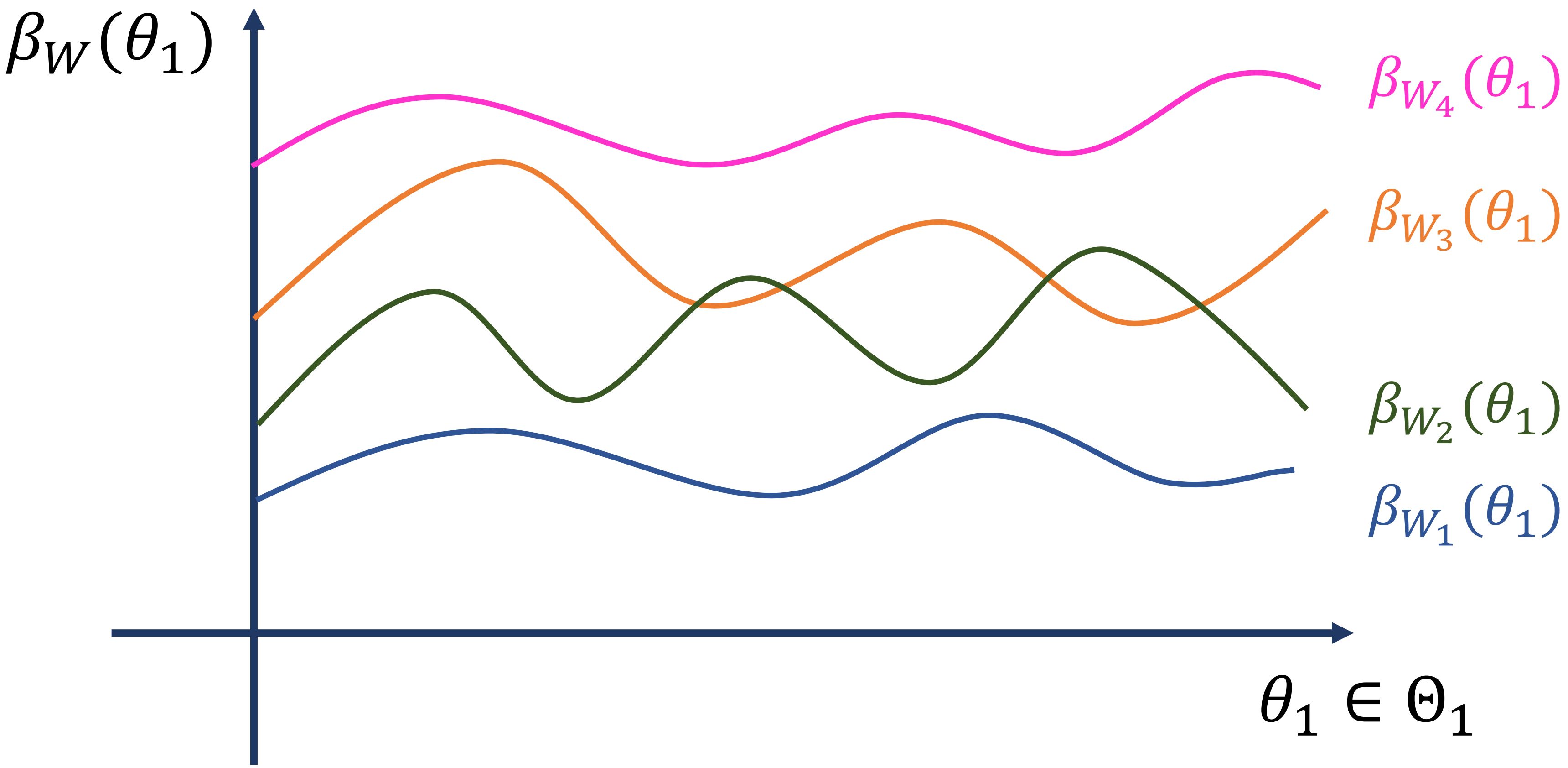
- 第1種の過誤確率を有意水準α以下におさえたうえで，検出力が高い（第2種の過誤確率が低い）棄却域を用いた検定

$$\beta_{W^*}(\theta_1) \geq \beta_W(\theta_1)$$

$$\Leftrightarrow P_{\theta_1}\left((X_1, X_2, \ldots, X_n) \notin W^*\right) \leq P_{\theta_1}\left((X_1, X_2, \ldots, X_n) \notin W\right)$$

- 一様最強力棄却域W^*のとき，$\theta = \theta_1$に対する第2種の過誤確率は，任意のWに対する第2種の過誤確率以下になっている

概念図



$\beta_W(\theta_1)$
$\beta_{W_4}(\theta_1)$
$\beta_{W_3}(\theta_1)$
$\beta_{W_2}(\theta_1)$
$\beta_{W_1}(\theta_1)$
$\theta_1 \in \Theta_1$

正規母集団の右片側検定

- 母集団
  - 平均μ（未知），分散σ^2（既知）の正規母集団
- 無作為標本$X_1, X_2, \ldots, X_n$
- 仮説
  - $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$

この統計的仮説検定に対する一様最強力棄却域W^*を導出する

右片側検定の一様最強力棄却域W^*の導出 (1)

$\mu = \mu_1 > \mu_0$ を任意にとり固定する。

この場合，最強力検定に帰着する。

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}(x_i-\mu)^2\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}[(\bar{x}-\mu)+(x_i-\bar{x})]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[(\bar{x}-\mu)^2+(x_i-\bar{x})^2]$$

$$= n(\bar{x}-\mu)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-\mu)(x_i-\bar{x})$$

$$= (\bar{x}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})$$

$$= (\bar{x}-\mu)(n\bar{x}-n\bar{x})$$

$$= 0$$

右片側検定の一様最強力棄却域$\boldsymbol{W}^*$の導出 (2)

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu_0)} = \frac{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_1)^2+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)\right)}{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_0)^2+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)\right)}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_1)^2-n(\bar{x}-\mu_0)^2\right)\right)$$

したがって，最強力棄却域W^*は次のようになる。

$$W^* = \left\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\,\middle|\,\exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_1)^2-n(\bar{x}-\mu_0)^2\right)\right)>k\right\}$$

$$= \{\,(x_1,x_2,\dots,x_n)\mid \bar{x}>k'\,\}$$

$$k' = \frac{(2\sigma^2/n)\log k-\mu_0^2+\mu_1^2}{2(\mu_1-\mu_0)}$$

右片側検定の一様最強力棄却域W^*の導出 (2)

$$\exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_1)^2-n(\bar{x}-\mu_0)^2\right)\right)>k$$

$$k'=\frac{(2\sigma^2/n)\log k-\mu_0^2+\mu_1^2}{2(\mu_1-\mu_0)}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_1)^2-n(\bar{x}-\mu_0)^2\right)\ >\log k$$

$$\Leftrightarrow -n(\bar{x}-\mu_1)^2+n(\bar{x}-\mu_0)^2>2\,\sigma^2\log k$$

$$\Leftrightarrow -(n\bar{x}^2-2n\mu_1\bar{x}+n\mu_1^2)+n\bar{x}^2-2n\mu_0\bar{x}+n\mu_0^2>2\,\sigma^2\log k$$

$$\Leftrightarrow 2n(\mu_1-\mu_0)\bar{x}>2\,\sigma^2\log k-n\mu_0^2+n\mu_1^2$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}>\frac{(2\sigma^2/n)\log k-\mu_0^2+\mu_1^2}{2(\mu_1-\mu_0)}$$

$(\because \mu_1>\mu_0$より$(\mu_1-\mu_0)>0)$

不等号が間違っていました

右片側検定の一様最強力棄却域W^*の導出 (3)

帰無仮説$H_0: \mu = \mu_0$が真のとき

$$Z = \frac{(\bar{X} - \mu_0)}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$$

$$\begin{aligned}\alpha &= P_{\mu_0}\left((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W^*\right) \\ &= P_{\mu_0}(\bar{X} > k') \\ &= P_{\mu_0}\left(\frac{(\bar{X} - \mu_0)}{\sqrt{\sigma^2/n}} > \frac{k' - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right) \\ &= P_{\mu_0}(Z > z(\alpha))\end{aligned}$$

$z(\alpha)$: 標準正規分布の上側100α%点

したがって，$z(\alpha) = \frac{k' - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}$

を満たすとき，W^*を用いた検定の

第1種の誤り確率がαとなることから，

$$k' = \mu_0 + z(\alpha)\sqrt{\sigma^2/n}$$

となるように，kを定めればよい

右片側検定の一様最強力棄却域$\boldsymbol{W}^*$の導出 (4)

最強力棄却域W^*

$$W^* = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \,\middle|\, \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i; \theta_1)}{\prod_{i=1}^n f(x_i; \theta_0)} > k \right\}$$

$$= \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \bar{x} > k' \}$$

$$= \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \,\middle|\, \bar{x} > \mu_0 + z(\alpha)\sqrt{\sigma^2/n} \right\}$$

したがって，次の検定方式が考えられる

$$\bar{X} \in \left(\mu_0 + z(\alpha)\sqrt{\sigma^2/n}, \infty \right)$$

のとき，帰無仮説$H_0\colon \mu = \mu_0$を棄却する

固定したμ_1に依存していない

すべての$\theta_1 \in \Theta_1$に対して，

$$\beta_{W^*}(\theta_1) \geq \beta_W(\theta_1)$$

正規母集団の左片側検定

- 母集団
  - 平均μ（未知），分散σ^2（既知）の正規母集団
- 無作為標本$X_1, X_2, \ldots, X_n$
- 仮説
  - $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$

この統計的仮説検定に対する一様最強力棄却域W^*を導出する

左片側検定の一様最強力棄却域W^*の導出 (1)

$\mu = \mu_1 < \mu_0$ を任意にとり固定する。

この場合，最強力検定に帰着する。

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}(x_i-\mu)^2\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}[(\bar{x}-\mu)+(x_i-\bar{x})]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[(\bar{x}-\mu)^2+(x_i-\bar{x})^2]$$

$$= n(\bar{x}-\mu)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-\mu)(x_i-\bar{x})$$

$$= (\bar{x}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})$$

$$= (\bar{x}-\mu)(n\bar{x}-n\bar{x})$$

$$= 0$$

左片側検定の一様最強力棄却域W^*の導出 (2)

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu_0)} = \frac{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_1)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)\right)}{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_0)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)\right)}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_1)^2 - n(\bar{x}-\mu_0)^2\right)\right)$$

したがって，最強力棄却域W^*は次のようになる。

$$W^* = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \,\middle|\, \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_1)^2 - n(\bar{x}-\mu_0)^2\right)\right) > k \right\}$$

$$= \{\, (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \bar{x} > k' \,\}$$

$$k' = \frac{(2\sigma^2/n)\log k - \mu_0^2 + \mu_1^2}{2(\mu_1 - \mu_0)}$$

左片側検定の一様最強力棄却域W^*の導出 (2)

$$\exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_1)^2 - n(\bar{x}-\mu_0)^2\right)\right) > k$$

$$k' = \frac{(2\sigma^2/n)\log k - \mu_0^2 + \mu_1^2}{2(\mu_1 - \mu_0)}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_1)^2 - n(\bar{x}-\mu_0)^2\right) > \log k$$

$$\Leftrightarrow -n(\bar{x}-\mu_1)^2 + n(\bar{x}-\mu_0)^2 > 2\,\sigma^2 \log k$$

$$\Leftrightarrow -(n\bar{x}^2 - 2n\mu_1\bar{x} + n\mu_1^2) + n\bar{x}^2 - 2n\mu_0\bar{x} + n\mu_0^2 > 2\,\sigma^2 \log k$$

$$\Leftrightarrow 2n(\mu_1 - \mu_0)\bar{x} > 2\,\sigma^2 \log k - n\mu_0^2 + n\mu_1^2$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} < \frac{(2\sigma^2/n)\log k - \mu_0^2 + \mu_1^2}{2(\mu_1 - \mu_0)}$$

($\because$ $\mu_0 > \mu_1$より$(\mu_1 - \mu_0) < 0$)

不等号が間違っていました

左片側検定の一様最強力棄却域W^*の導出 (3)

帰無仮説$H_0: \mu = \mu_0$が真のとき　$Z = \dfrac{(\bar{X} - \mu_0)}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$

$$\alpha = P_{\mu_0}\big((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W^*\big)$$

$$= P_{\mu_0}(\bar{X} < k')$$

$$= P_{\mu_0}\left(\frac{(\bar{X} - \mu_0)}{\sqrt{\sigma^2/n}} < \frac{k' - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right)$$

$$= P_{\mu_0}(Z < -z(\alpha))$$

$z(\alpha)$: 標準正規分布の上側100α%点

したがって，　$-z(\alpha) = \frac{k' - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}$

を満たすとき，　W^*を用いた検定の

第1種の誤り確率がαとなることから，

$$k' = \mu_0 - z(\alpha)\sqrt{\sigma^2/n}$$

となるように，kを定めればよい

左片側検定の一様最強力棄却域W^*の導出 (4)

最強力棄却域W^*

$$W^* = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \,\middle|\, \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta_1)}{\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta_0)} > k \right\}$$

$$= \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \bar{x} < k' \}$$

$$= \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \,\middle|\, \bar{x} < \mu_0 - z(\alpha)\sqrt{\sigma^2/n} \right\}$$

したがって，次の検定方式が考えられる

$$\bar{X} \in \left(-\infty, \mu_0 - z(\alpha)\sqrt{\sigma^2/n} \right)$$

のとき，帰無仮説$H_0 : \mu = \mu_0$を棄却する

固定したμ_1に依存していない

すべての$\theta_1 \in \Theta_1$に対して，

$$\beta_{W^*}(\theta_1) \geq \beta_W(\theta_1)$$

単調尤度比

仮説

帰無仮説 $H_0: \theta \leq \theta_0$（既知）　対立仮説 $H_1: \theta > \theta_0$

分布族

$\{f(x;\theta); \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$

単調尤度比の定義

任意の$\theta_1 < \theta_2 \in \Theta$に対して，$\frac{f(x;\theta_2)}{f(x;\theta_1)}$が$T(x)$の単調増加関数

であるとき，この分布族は$T(x)$に関して単調尤度比をもつという

定理

- 母集団分布Pからの無作為標本$X_1, X_2, \dots, X_n$
- $X_i \underset{\text{i.i.d}}{\sim} f(x;\theta)\ (i = 1, \dots, n)$
  - $f(x;\theta)$は$T(x)$に関して単調尤度比をもつと仮定

- 仮説　　帰無仮説 $H_0 : \theta \le \theta_0$（既知）　対立仮説 $H_1 : \theta > \theta_0$
  - この仮説に対する有意水準αの一様最強力棄却域W^*は

$$W^* = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid T(x_1, x_2, \dots, x_n) > c \}$$

となる。ただし，次式を満たすようにW^*を定める

$$\beta_{W^*}(\theta_0) = P_{\theta_0}\left((X_1, X_2, \dots, X_n) \in W^* \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha$$

正規母集団の複合仮説検定

- 母集団
  - 平均μ（未知），分散σ^2（既知）の正規母集団

- 無作為標本$X_1, X_2, \dots, X_n$

- 仮説
  - H_0: $H_0: \mu \leq \mu_0$（既知）vs $H_1: \mu > \mu_0$

この統計的仮説検定に対する一様最強力棄却域W^*を導出する

複合仮説検定の一様最強力棄却域W^*の導出 (1)

任意の$\mu_1 < \mu_2$に対して

$$\frac{\prod_{i=1}^n f(x_i;\mu_2)}{\prod_{i=1}^n f(x_i;\mu_1)} = \frac{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_2)^2+\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2\right)\right)}{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_1)^2+\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2\right)\right)}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\bar{x}-\mu_2)^2-n(\bar{x}-\mu_1)^2\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\left(n(\mu_1^2-\mu_2^2)+2n(\mu_1-\mu_2)\bar{x}\right)\right)$$

$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{x}$に関して$\frac{\prod_{i=1}^n f(x_i;\mu_2)}{\prod_{i=1}^n f(x_i;\mu_1)}$は単調増加関数であることから,

分布族$\{f(x;\theta);\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}\}$は$\bar{x}$に関して単調尤度比をもつ

複合仮説検定の一様最強力棄却域W^*の導出 (2)

$\mu = \mu_0$のもとで　$Z = \dfrac{(\bar{X} - \mu_0)}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$

$$\alpha = P_{\mu_0}\left((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W^*\right)$$

$$= P_{\mu_0}(\bar{X} > c)$$

$$= P_{\mu_0}\left(\frac{(\bar{X} - \mu_0)}{\sqrt{\sigma^2/n}} > \frac{c - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right)$$

$$= P_{\mu_0}(Z > z(\alpha))$$

$z(\alpha)$: 標準正規分布の上側100α%点

したがって，　$z(\alpha) = \dfrac{c - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}$

を満たすとき，　W^*を用いた検定の

第1種の誤り確率がαとなることから，

$$c = \mu_0 + z(\alpha)\sqrt{\sigma^2/n}$$

となるように，cを定めればよい

複合仮説検定の一様最強力棄却域W^*の導出 (3)

最強力棄却域W^*

$$W^* = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid T(x_1, x_2, \dots, x_n) > c \}$$

$$= \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \bar{x} > c \}$$

$$= \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \,\middle|\, \bar{x} > \mu_0 + z(\alpha)\sqrt{\sigma^2/n} \right\}$$

したがって，次の検定方式が考えられる

$$\bar{X} \in \left(\mu_0 + z(\alpha)\sqrt{\sigma^2/n}, \infty \right)$$

のとき，帰無仮説$H_0: \mu \leq \mu_0$（既知）を棄却する