メディア情報処理 2023
第12回 フーリエ変換の特性
正規直交展開としてのフーリエ変換

大村英史

出席登録

今日の予定

- パーセバルの等式
- 内積，ベクトルと関数
- ベクトルと正規直交展開
- 関数の正規直交展開（フーリエ変換）
- パーセバルの等式の正規直交展開

パーセバルの等式

パーセバルの等式

$$\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}|x(t)|^2dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|X_k|^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2d\omega$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(\omega)|^2d\omega$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X[k]|^2$$

パーセバルの関係ともよばれる

一般化パーセバルの等式

$$\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} h(t)x^*(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_k X_k^*$$

*は複素共役

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)x^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)X^*(\omega)d\omega$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[t]x^*[t] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\omega)X^*(\omega)d\omega$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h[t]x^*[t] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H[\omega]X^*[\omega]$$

実は,
パーセバルの等式の
x に $h+x$ や $h-x$を代入すれば
一般化パーセバルの等式が
でてくる
つまり 等価（じつは一般化ではない）

パーセバルの等式の意味は？

- 時間領域と周波数領域で
- それぞれ
  - 積分したり
  - 総和したり
- したものが
- 一致してる

$$\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}|x(t)|^2dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|X_k|^2$$

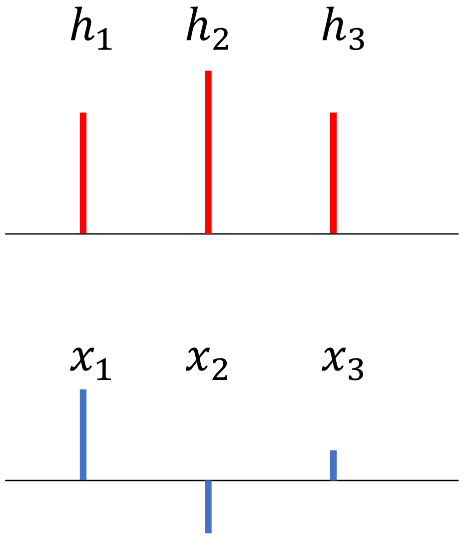
$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2d\omega$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(\omega)|^2d\omega$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X[k]|^2$$

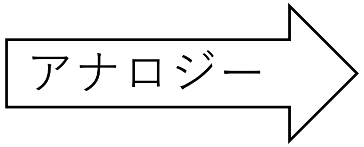
ベクトルと関数の内積計算

- 左辺も右辺も二つのベクトルや関数の内積を計算している

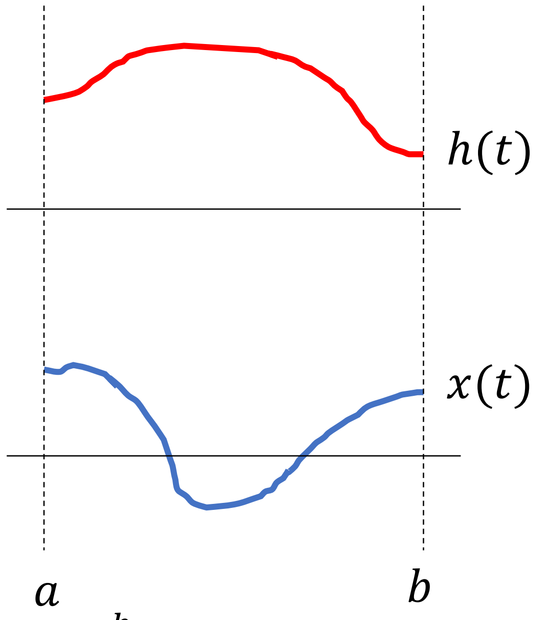


$$\sum_i h_i x_i^*$$

複素ベクトルの内積



無限個の要素



$$\int_a^b h(t)x^*(t)dt$$

複素指数関数の内積

パーセバルの等式の意味

- 2つの信号の内積は
  - 時間領域でも周波数領域でも等しい（定数倍になる）

つまり

  - フーリエ変換は（定数倍であるが）内積を保存する

- 関数の内積とは？？？

ベクトルと関数

ベクトルとは？

- 方向と大きさを持った量
  - => 素朴なベクトル

- 現代数学では？
- 素朴なベクトルが持つ性質が表れるように，最低限のルールを定める
- そのルールをスタート地点として考えると．．．

- ルール：ベクトルの公理
- ルールで定められた集合：ベクトル空間

関数もベクトル

- ベクトル：空間内で方向と大きさを持った量
  - もっと数学的には

抽象化
ベクトル空間
の公理

Wikipediaより

- ベクトル空間
  - ↓内積を追加
- 内積空間

公理	条件
加法の結合律	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
加法の可換律	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
加法単位元の存在	零ベクトル $\mathbf{0} \in V$ が存在して、全ての $\mathbf{v} \in V$ において $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ を満たす。
加法逆元の存在	各ベクトル $\mathbf{v} \in V$ に、その加法逆元 $-\mathbf{v} \in V$ が存在して、$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ とできる。
加法に対するスカラー乗法の分配律	$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
体の加法に対するスカラー乗法の分配律	$(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$
体の乗法とスカラー乗法の両立条件	$a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$ [nb 2]
スカラー乗法の単位元の存在	$1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ （左辺の 1 は F の乗法単位元）

ベクトル空間の公理に従うと

- ただの矢印で表していたものだけがベクトルではない
  - 関数もベクトル（公理を満たす）

- 関数をベクトルとして扱うメリット
  - 線形代数の応用範囲が広くなる
  - 関数をベクトルのように，つまり矢印のようにイメージできる
    - 幾何学的に扱える

ベクトルの正規直交展開

ベクトルの正規直交展開

- 関数を矢印として扱う前に，幾何学的なベクトルの確認

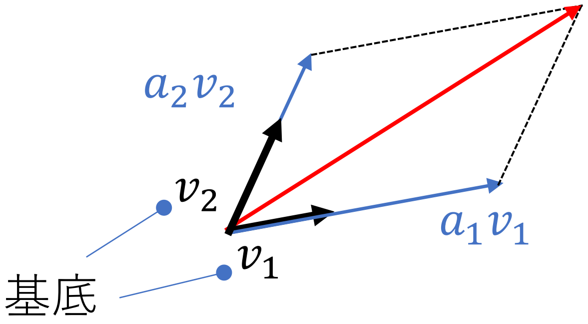
- N次元のベクトル空間では
  N本の線形独立なベクトルの線形結合で
  あらゆるベクトルを表現できる

$(v_1, v_2, \ldots v_N)$

これらを基底という

2次元の例

$x = a_1 v_1 + a_2 v_2$

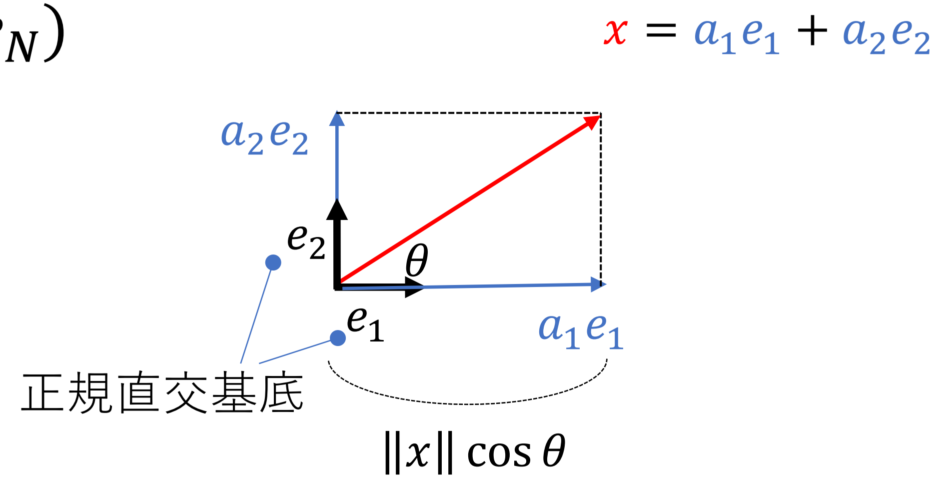


基底は自由にとれるが，
最もスマートなとり方が
正規直交基底

正規 直交 基底 $(e_1, e_2, \dots e_N)$

正規 → 正規化されている

直交 → すべて直交している



$\|e_i\| = 1$なので

$$
\begin{aligned}
a_i &= \|x\| \cos\theta \\
&= \|x\| \|e_i\| \cos\theta \\
&= (x, e_i)
\end{aligned}
$$

内積

任意のベクトルxを展開

$$
\begin{aligned}
x &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_N e_N \\
&= (x_1, e_1) e_1 + (x_2, e_2) e_2 + \cdots + (x_N, e_N) e_N \\
&= \sum_i^N (x, e_i) e_i
\end{aligned}
$$

この展開を正規直交展開という

関数の正規直交展開

正規直交展開を関数に適用

- 最終的にフーリエ級数について考えたいので
  - 区間 $-T_0/2$から$T_0/2$

- 任意の関数$x(t)$
- 正規直交基底をどうするか？
  - N次元　=>　　N本の基底
  - 無次元　=>　　無限本の基底

- 正規直交かつ無限本の基底が必要

=> 複素指数関数の直交性を思い出す

複素指数関数の直交性

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{i\omega_0 mt} \cdot e^{-i\omega_0 nt}\, dt = \begin{cases} T_0 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

- $m \neq n$のとき直交する
- 正規化されていないので，正規化する（2つをかけて1になるように）

$$e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} e^{i\omega_0 kt} \quad k\text{は}-\infty\text{から}\infty$$

- 基底が正規直交になった

ベクトルと同じように正規直交展開（内積）

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x(t), e_k(t))\, e_k(t)$$

*は複素共役

- 内積$(x(t), e_k(t))$を$\tilde{X}_k$とおくと

$$\begin{aligned}\tilde{X}_k &= \left(x(t), e_k(t)\right) \\ &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e_k^*(t) dt \\ &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \left\{\frac{1}{\sqrt{T_0}} e^{i\omega_0 kt}\right\}^* dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{T_0}} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-i\omega_0 kt} dt\end{aligned}$$

複素共役は
逆回り

ベクトルと同じように正規直交展開

- 一方，正規直交展開のつづきは

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \big(x(t), e_k(t)\big) e_k(t)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}_k e_k(t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{T_0}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}_k e^{i\omega_0 kt}$$

まとめると

- 内積

$$\tilde{X}_k = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-i\omega_0 kt} dt$$

- フーリエ係数の計算

$$F_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-i\omega_0 kt} dt$$

- 正規直交展開

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}_k e^{i\omega_0 kt}$$

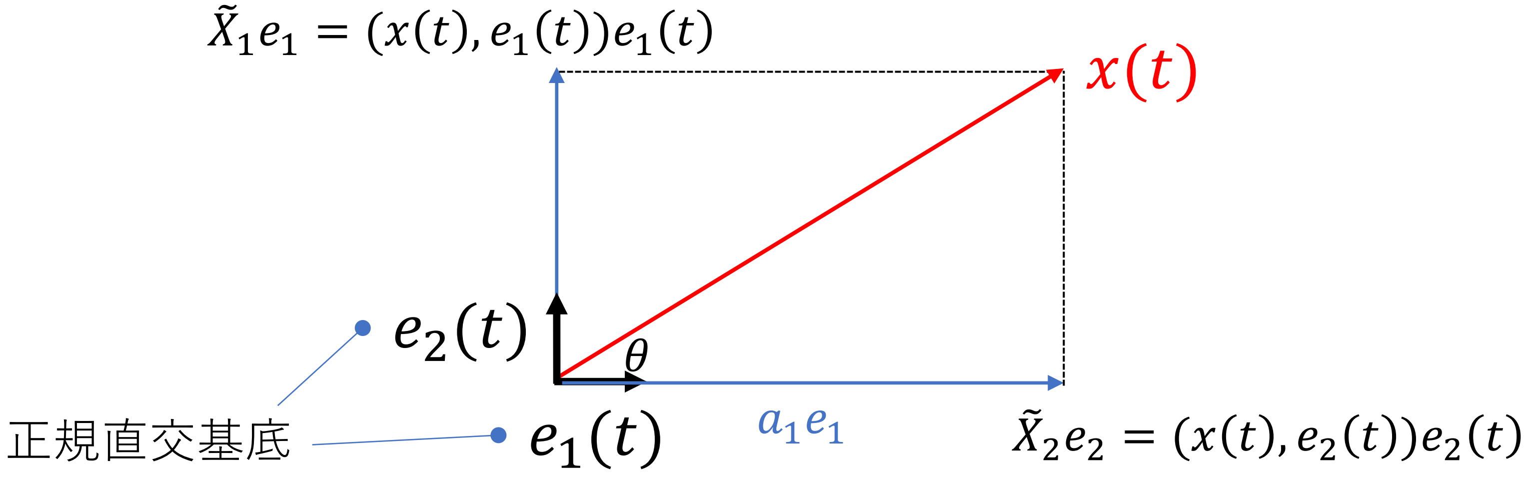
- フーリエ級数

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{i\omega_0 kt}$$

$X_k = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \tilde{X}_k$とおくとフーリエ級数展開と同じ

フーリエ級数展開は，複素指数関数系を基底とした正規直交展開

幾何学的表現



- 信号をベクトルと見なすと
  - 各周波数に対応した基底の方向に分解する
  - 分解の大きさは，元信号と各基底の内積（フーリエ級数）である

（正規ではないので，最後に係数のつじつまを合わせているが．．．）

正規直交展開とパーセバルの等式

正規直交展開とパーセバルの等式

- フーリエ級数の一般化パーセバルの等式

$$\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} h(t)x^*(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_k X_k^*$$

*は複素共役

$$e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} e^{i\omega_0 kt}$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}_k e^{i\omega_0 kt}$$

- 左辺の積分からみていく
- $h(t)$も$x(t)$もフーリエ級数展開する

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} h(t)x^*(t)dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widetilde{H}_k e_k(t)\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}_k e_k(t)\right)^* dt$$

つづき

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} h(t)x^*(t)dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widetilde{H}_k e_k(t)\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}_k e_k(t)\right)^* dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \widetilde{H}_k \tilde{X}_l^* \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e_k(t) e_l^*(t) dt$$

Σと∫のいれかえ

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widetilde{H}_k \tilde{X}_k^* \big(e_k(t), e_k(t)\big) + \sum_{k \neq l} \widetilde{H}_k \tilde{X}_l^* \big(e_k(t), e_l(t)\big)$$

kとlが同じ時と別の時

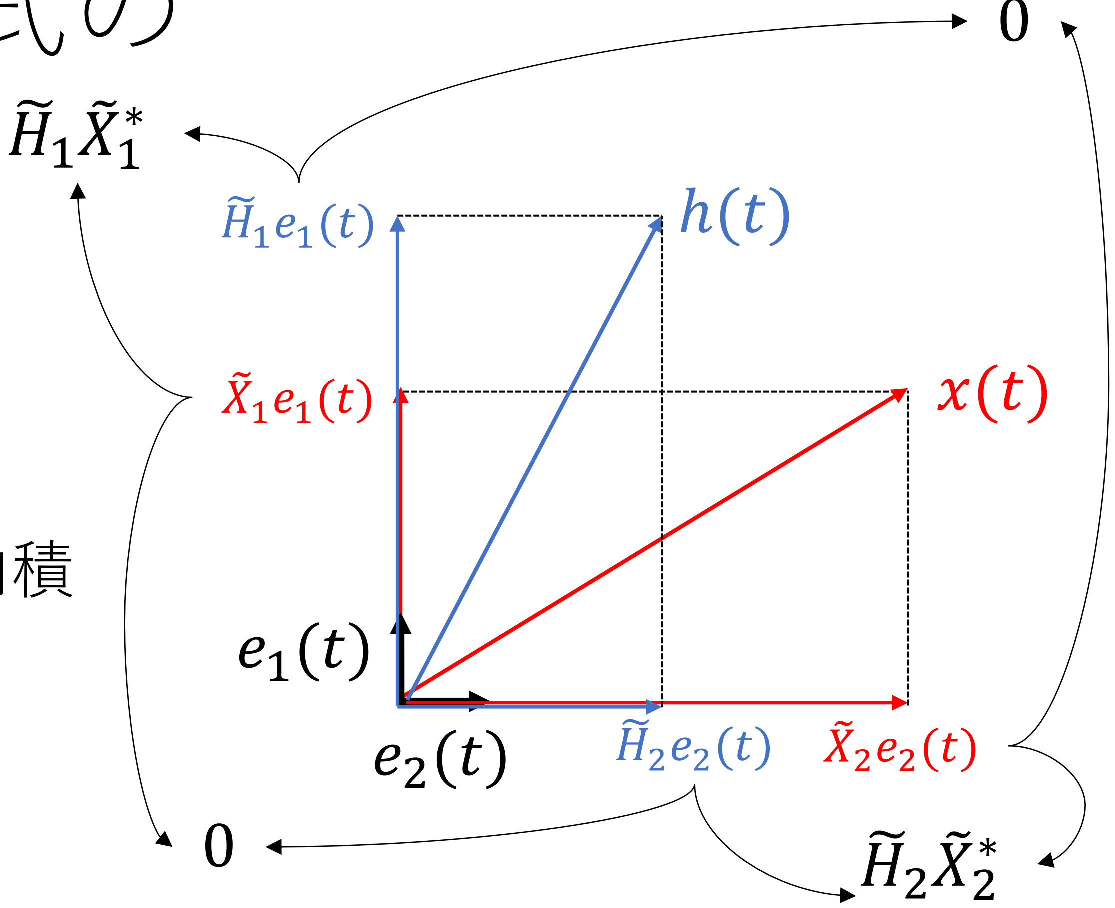
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widetilde{H}_k \tilde{X}_k^*$$

正規直交性
正規：同じところは内積1
直交：違うところは内積0

$H_k = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \widetilde{H}_k,\ X_k = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \tilde{X}_k$とおくとフーリエ級数の一般化パーセバルの等式と同じになる

一般化パーセバルの等式の幾何学的意味

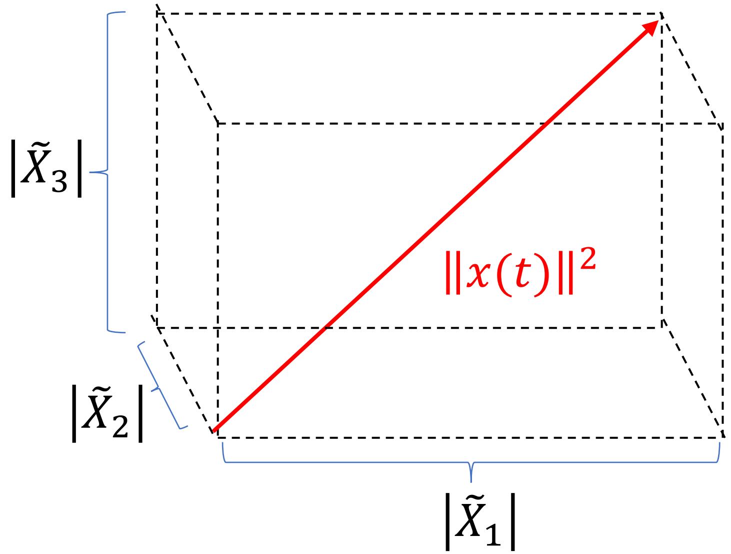
- 内積計算を行った
- 正規直交基底で展開してから計算
  - 各基底方向に分解された成分同士で内積
  - それらの足し合わせ
- 直交なので異なる成分は消える
- 正規化されているので$\tilde{H}_k \tilde{X}_k^*$が残る



パーセバルの等式の幾何学的意味

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\tilde{X}_k\right|^2$$

例えば3次元だと



- 左辺は，$x(t)$同士の内積なので$\|x(t)\|^2$
  - 「$x(t)$というベクトルの長さ」の2乗

- 右辺は，正規直交基底で表した長さの2乗の和

有限次元のユークリッド空間であれば，当たり前の事
=> 三平方の定理の多次元バージョン

他のフーリエ変換の場合

- 数学的な定義はむずかしい
  - アナロジーとして正規直交展開で同じようになっているイメージをもっておく

- 離散フーリエ変換は有限のベクトル空間（例えばN=4次元）

$$
\begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{pmatrix}
$$

$$
W = e^{-i\frac{2\pi}{N}}
$$

- 線形代数そのもの
  - N点からN点へ変換されることもここからな自明
  - 逆行列を使えば離散フーリエ逆変換

注意事項

- じつは，フーリエ級数の時にも述べているが
- 関数x(t)はフーリエ級数展開ができる（収束する）として使っている

まとめ

- パーセバルの等式
- 内積，ベクトルと関数
- ベクトルと正規直交展開
- 関数の正規直交展開（フーリエ変換）
- パーセバルの等式の正規直交展開

演習・宿題

問題　$f(x)$ を次で定義する周期 2π の周期関数とする.

$$f(x) = x^2 \quad (\,-\pi \leqq x < \pi\,)$$

1. $f(x)$ の複素フーリエ級数を求めよ.
2. $f(x)$ の実フーリエ級数を求めよ.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ の値を求めよ.
4. パーセバルの等式を用いて $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ の値を求めよ.

- 「実フーリエ変換」とは実数のフーリエ変換の事です

宿題の提出

- 手書きでOKです

- 提出物
  - 写真を撮って提出

- 提出方法と締切
  - LETUS
  - 12/11 23:59 （来週）

最終レポート課題の予告

- 授業に関連したテーマを各自作成し，取り組んでください
- 例えば
  - FFTのアルゴリズムを調べて，手計算をしてみるとか
  - 4つのフーリエ変換についてまとめなおすとか
  - MATLABでdftmtx関数を調べてみるとか（signal processing toolboxが必要）
    - 自分で作ってみる？
  - 一般化パーセバルの等式を導出するとか
  - フィルタについてしらべてみるとか
  - ．．．

※ サンプリング定理と，STFTをつかった解析は来週やるので演習のテーマとしては注意

レポート課題の提出について

- 自由課題なので，15回目（2024/1/15）までに提出してください
  - 授業は14回目の12月18日まで
- 提出物
  - レポート形式
  - 自分でテーマを決定するので，
- 提出方法と締切
  - LETUS
  - 2024/1/15 23:59（最終授業日 第15回）