多変量解析 第6回:条件付き分布 定理 3. *X* が平均ベク する. *V* 、 する. X から選ばれた成分に対する周辺分布は、対応する平均、共分散 行列の多変量正規分布である.

証明. $oldsymbol{X}=((oldsymbol{X}^{(1)})'(oldsymbol{X}^{(2)})')'$ に対して,以下の正則変換を考える.

$$oldsymbol{Y} = \left(egin{array}{c} oldsymbol{Y}^{(1)} \ oldsymbol{Y}^{(2)} \end{array}
ight) = \left(egin{array}{c} oldsymbol{I}_q & oldsymbol{B} \ oldsymbol{O} & oldsymbol{I}_{p-q} \end{array}
ight) \left(egin{array}{c} oldsymbol{X}^{(1)} \ oldsymbol{X}^{(2)} \end{array}
ight) = \left(egin{array}{c} oldsymbol{X}^{(1)} + oldsymbol{B}oldsymbol{X}^{(2)} \ oldsymbol{X}^{(2)} \end{array}
ight)$$

ここで、 $Y^{(1)}$ と $Y^{(2)}$ が無相関となるBを求める.

証明.
$$X=((X^{(1)})'(X^{(2)})')'$$
 に対して、以下の正則変換を考える。
$$Y=\begin{pmatrix}Y^{(1)}\\Y^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_q&B\\O&I_{p-q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X^{(1)}\\X^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X^{(1)}+BX^{(2)}\\X^{(2)}\end{pmatrix}$$
 ここで、 $Y^{(1)}$ と $Y^{(2)}$ が無相関となる B を求める。
$$O=E\left((Y^{(1)}-E(Y^{(1)}))(Y^{(2)}-E(Y^{(2)}))'\right)\\=E\left((X^{(1)}+BX^{(2)}-E(X^{(1)})-BE(X^{(2)}))(X^{(2)}-E(X^{(2)}))'\right)\\=E\left((X^{(1)}-E(X^{(1)})+B(X^{(2)}-E(X^{(2)})))(X^{(2)}-E(X^{(2)}))'\right)\\=E\left((X^{(1)}-E(X^{(1)}))(X^{(2)}-E(X^{(2)}))'\right)\\+E\left(B(X^{(2)}-E(X^{(2)}))(X^{(2)}-E(X^{(2)}))'\right)\\=\Sigma_{12}+B\Sigma_{22}$$
 したがって、
$$B=-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}$$
このとき、

$$oldsymbol{B} = - oldsymbol{\Sigma}_{12} oldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}$$

このとき,

$$\left(egin{array}{cc} oldsymbol{I}_q & -oldsymbol{\Sigma}_{12}oldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \ oldsymbol{O} & oldsymbol{I}_{p-q} \end{array}
ight)$$

 $\left(egin{array}{cccc} oldsymbol{I}_q & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \ oldsymbol{O} & oldsymbol{I}_{p-q} \end{array}
ight)$ では、 $\mathcal{Y}=\mathcal{U}$ は正則行列であるから、定理 1 より $Y = ((Y^{(1)})'(Y^{(2)})')'$ は p 変量正規

は正則行列であるから,定理
$$1$$
 より $Y=((Y^{(1)})'(Y^{(2)})')'$ は p 変量正規分布に従う.ここで,平均ベクトルは
$$E\left(\begin{array}{c} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{array}\right)=\begin{bmatrix} 読者の演習 \\ = \begin{pmatrix} \mu^{(1)}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\mu^{(2)} \\ \mu^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \nu^{(1)} \\ \nu^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$= \nu$$

多変量解析 第 6 回:条件付き分布
$$V(Y) = E((Y - \nu)(Y - \nu)')$$

$$= E\left(\frac{(Y^{(1)} - \nu^{(1)})(Y^{(1)} - \nu^{(1)})'}{(Y^{(2)} - \nu^{(2)})(Y^{(2)} - \nu^{(2)})'}\right)$$
である. $Y^{(1)}$ と $Y^{(2)}$ が無相関となるように B をとったから,
$$E((Y^{(1)} - \nu^{(1)})(Y^{(2)} - \nu^{(2)})') = \mathbf{O}$$
であり,

である. $Y^{(1)}$ と $Y^{(2)}$ が無相関となるように B をとったから,

$$E((\mathbf{Y}^{(1)} - \boldsymbol{\nu}^{(1)})(\mathbf{Y}^{(2)} - \boldsymbol{\nu}^{(2)})') = \mathbf{O}$$

であり、
$$E((\boldsymbol{Y}^{(2)}-\boldsymbol{\nu}^{(2)})(\boldsymbol{Y}^{(1)}-\boldsymbol{\nu}^{(1)})')=E((\boldsymbol{Y}^{(1)}-\boldsymbol{\nu}^{(1)})(\boldsymbol{Y}^{(2)}-\boldsymbol{\nu}^{(2)})')'$$
$$=\boldsymbol{O}$$
である。また、
$$E((\boldsymbol{Y}^{(2)}-\boldsymbol{\nu}^{(2)})(\boldsymbol{Y}^{(2)}-\boldsymbol{\nu}^{(2)})')=E((\boldsymbol{Y}^{(2)}-\boldsymbol{\nu}^{(2)})(\boldsymbol{Y}^{(2)}-\boldsymbol{\nu}^{(2)})')$$

である.また,
$$E((\boldsymbol{Y}^{(2)}-\boldsymbol{\nu}^{(2)})(\boldsymbol{Y}^{(2)}-\boldsymbol{\nu}^{(2)})')=E((\boldsymbol{X}^{(2)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)})(\boldsymbol{X}^{(2)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)})')=\Sigma_{22}$$
であり,
$$E((\boldsymbol{Y}^{(1)}-\boldsymbol{\nu}^{(1)})(\boldsymbol{Y}^{(1)}-\boldsymbol{\nu}^{(1)})')\\= [読者の演習]$$

,
$$E((oldsymbol{Y}^{(1)}-oldsymbol{
u}^{(1)})(oldsymbol{Y}^{(1)}-oldsymbol{
u}^{(1)})')$$
 $=$ 読者の演習 $=$ $\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}+\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{22}\Sigma_{22}\Sigma_{21}$ $=$ $\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$ $=$ $\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$ $=$. 以上から,

である. 以上から,

$$V(oldsymbol{Y}) = \left(egin{array}{cc} oldsymbol{\Sigma}_{11} - oldsymbol{\Sigma}_{12} oldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} oldsymbol{\Sigma}_{21} & oldsymbol{O} \ oldsymbol{O} & oldsymbol{\Sigma}_{22} \end{array}
ight)$$

 $V(m{Y})=\left(egin{array}{ccc}m{\Sigma}_{11}-m{\Sigma}_{12}m{\Sigma}_{22}^{-1}m{\Sigma}_{21}&m{O}\ m{O}&m{\Sigma}_{22}\end{array}
ight)$, $m{Y}^{(2)}$ の周辺分布は,平坪 布である 1 . この、 の多変量正規分布である 1 から,定理は証明された. このYに対して、 $Y^{(2)}$ の周辺分布は、平均ベクトル $u^{(2)}$ 、共分散行列 Σ_{22} 6321120@ed.tus.ac.jp-Jun の多変量正規分布である 1 . このとき, $oldsymbol{Y}^{(2)}=oldsymbol{X}^{(2)},\;oldsymbol{
u}^{(2)}=oldsymbol{\mu}^{(2)}$ である

¹この主張は、3.4 演習問題 問 3 による

多変量解析 第 6 回: 条件付き分布 3.5 条件付き分布 この節では、Xがp変量正規分布に従うとき、条件付き分布もまた正 規分布であることを確認しよう.

エル・、 Γ につってクトル μ と共分散行列 Σ も同 このとき、X が平均ベクトル μ 、共分散行列 Σ の p 変量 正規分布に従うなら、 $X^{(2)}=x^{(2)}$ が与えられたときの $X^{(1)}$ の条件付き分布は、 平均ベクトル: $m{\mu}^{(1)} + m{\Sigma}_{12}m{\Sigma}_{22}^{-1}(m{x}^{(2)} - m{\mu}^{(2)})$ 共分散行列: $m{\Sigma}_{11} - m{\Sigma}_{12}m{\Sigma}^{-1}m{\Sigma}$

平均ベクトル:
$$oldsymbol{\mu}^{(1)} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(oldsymbol{x}^{(2)} - oldsymbol{\mu}^{(2)})$$

の *q* 変量正規分布である.

証明. 平均ベクトル μ , 共分散行列 Σ の p 変量正規分布に従う X につ

$$oldsymbol{X} = \left(egin{array}{c} oldsymbol{X}^{(1)} \ oldsymbol{X}^{(2)} \end{array}
ight)$$

$$oldsymbol{X} = \left(egin{array}{c} oldsymbol{X}^{(1)} \\ oldsymbol{X}^{(2)} \end{array}
ight)$$
 とする。 $\left(egin{array}{c} oldsymbol{Y}^{(1)} \\ oldsymbol{Y}^{(2)} \end{array}
ight) = \left(egin{array}{c} oldsymbol{I}_q & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ oldsymbol{O} & oldsymbol{I}_{p-q} \end{array}
ight) \left(egin{array}{c} oldsymbol{X}^{(1)} \\ oldsymbol{X}^{(2)} \end{array}
ight) = \left(egin{array}{c} oldsymbol{X}^{(1)} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} oldsymbol{X}^{(2)} \\ oldsymbol{X}^{(2)} & oldsymbol{Y}^{(2)} & ol$

$$f(\boldsymbol{y}^{(1)}; \boldsymbol{\mu}^{(1)} - \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \boldsymbol{\mu}^{(2)}, \boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}) \cdot f(\boldsymbol{y}^{(2)}; \boldsymbol{\mu}^{(2)}, \boldsymbol{\Sigma}_{22})$$

である². ただし、 $f(x; \mu, \Sigma)$ は平均ベクトル μ , 共分散行列 Σ の多変量 正規分布のpdfを表し、

$$oldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2} = oldsymbol{\Sigma}_{11} - oldsymbol{\Sigma}_{12}oldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}oldsymbol{\Sigma}_{21}$$

このな。この結果を利用して, $m{X}=((m{X}^{(1)})'\,(m{X}^{(2)})')'$ の pdf の<u>別表現</u>を求める.定理3の証明とは逆に, $m{X}$ を $m{Y}$ で表すことを考えると正則行列 $\left(m{I}_q - m{\Sigma}_{12}m{\Sigma}_{22}^{-1}
ight)$ 6321120@ed.tus.ac.jp-Jun

$$\left(egin{array}{cc} oldsymbol{I}_q & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \ oldsymbol{O} & oldsymbol{I}_{p-q} \end{array}
ight)$$

²定理3の証明より明らか

多変量解析 第
$$6$$
 回:条件付き分布 4 の逆行列が $\begin{pmatrix} I_q & \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ O & I_{p-q} \end{pmatrix}$ であるから

$$\left(egin{array}{c} oldsymbol{X}^{(1)} \ oldsymbol{X}^{(2)} \end{array}
ight) = \left(egin{array}{cc} oldsymbol{I}_q & oldsymbol{\Sigma}_{12}oldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \ oldsymbol{O} & oldsymbol{I}_{p-q} \end{array}
ight) \left(egin{array}{c} oldsymbol{Y}^{(1)} \ oldsymbol{Y}^{(2)} \end{array}
ight)$$

$$J(x_1,\ldots,x_p) = \mod \left| egin{array}{cc} oldsymbol{I}_q & -oldsymbol{\Sigma}_{12}oldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \ oldsymbol{O} & oldsymbol{I}_{p-q} \end{array}
ight| = 1$$

であるから
$$\begin{pmatrix} I_q & \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ O & I_{p-q} \end{pmatrix}$$
 であるから
$$\begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q & \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ O & I_{p-q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{pmatrix}$$
 より,この変換のヤコピアンは
$$J(x_1,\dots,x_p) = \mod \left| \begin{array}{c} I_q & \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ O & I_{p-q} \end{array} \right| = 1$$
 であるから, X の pdf は
$$f(x^{(1)},x^{(2)}) = 1 \cdot \frac{1}{(2\pi)^{q/2}|\Sigma_{112}|^{1/2}}$$

$$\times \exp \left[-\frac{1}{2}(x^{(1)} - \mu^{(1)} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x^{(2)} - \mu^{(2)}))' \right]$$

$$\times \Sigma_{112}^{-1}(x^{(1)} - \mu^{(1)} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x^{(2)} - \mu^{(2)})) \right]$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^{(p-q)/2}|\Sigma_{22}|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2}(x^{(2)} - \mu^{(2)})'\Sigma_{22}^{-1}(x^{(2)} - \mu^{(2)}) \right]$$
 (8)
$$\mathcal{L}$$
 このことから, $X^{(2)} = x^{(2)}$ が与えられた条件の下での $X^{(1)}$ の条件付き pdf は,式(8)を $f(x^{(2)};\mu^{(2)},\Sigma_{22})$ で割ったものであるから

このことから, $oldsymbol{X}^{(2)}=oldsymbol{x}^{(2)}$ が与えられた条件の下での $oldsymbol{X}^{(1)}$ の条件付き pdf は,式 (8) を $f(\boldsymbol{x}^{(2)}; \boldsymbol{\mu}^{(2)}, \boldsymbol{\Sigma}_{22})$ で割ったものであるから

このことから、
$$X^{(2)}=x^{(2)}$$
 が与えられた条件の下での $X^{(1)}$ の条件付き pdf は、式 (8) を $f(x^{(2)};\mu^{(2)},\Sigma_{22})$ で割ったものであるから
$$f(x^{(1)}|x^{(2)})=\frac{f(x^{(1)},x^{(2)})}{f(x^{(2)};\mu^{(2)},\Sigma_{22})}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{q/2}|\Sigma_{11\cdot2}|^{1/2}}$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}(x^{(1)}-\mu(x^{(2)}))'\Sigma_{11\cdot2}^{-1}(x^{(1)}-\mu(x^{(2)}))\right]$$
 ただし、 $\mu(x^{(2)})=\mu^{(1)}+\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x^{(2)}-\mu^{(2)})$ である。以上から、条件付き pdf である $f(x^{(1)}|x^{(2)})$ が、 q 変量正規分布であることが確認できた. \square

6321120@

2.27 AM GMT+9

6321120@ed.tus.ac.jp-Jun

:31 AM GMT+9

多変量解析 第 6 回: 条件付き分布 3.6 **演習問題** 問1 $m{X}$ が平均ベクトル $m{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)',$ 共分散行列

$$oldsymbol{\Sigma} = \left(egin{array}{cccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{array}
ight)$$

- $\begin{pmatrix} \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$ の 3 変量正規分布に従うとするとき, $(X_1, X_3)'$ は平均(ア),共分散行列(イ)の正規分布に従う.

 1. 文中の(ア)に当てはまるものとして,次の① ~ ④ のうちから適切なものを一つ選べ. $\boxed{1}$ ① $(\mu_1, \mu_2)'$ ② $(\mu_1, \mu_3)'$ ③ $(\mu_2, \mu_3)'$ ④ μ 2. 文中の(イ)に当ています。

 - から適切なものを一つ選べ.「
 - 20@ed.tus.ac.jp-Jun 9, 2023, 8
 - **④** Σ
- **問2** 定理 4 より条件付き分布の平均ベクトルは $oldsymbol{x}^{(2)}$ の $oldsymbol{(a)}$ であり, 共分散行列は $x^{(2)}$ に(b) に当てはまる組み合わせ として,次の \bigcirc \bigcirc \bigcirc のうちから適切なものを一つ選べ. \bigcirc
- つっから道 (a) 線形関数 (b) 依存する (a) 線形関数 (b) 依存しない (a) 非線形関数 (b) 佐存しない