メディア情報処理 2023
第3回目 正弦波

大村英史

復習：Matlabで正弦波を作ってみた

- 440Hzの音を授業中に作りました
- 音の高さを変えてみてうまくいきましたか？

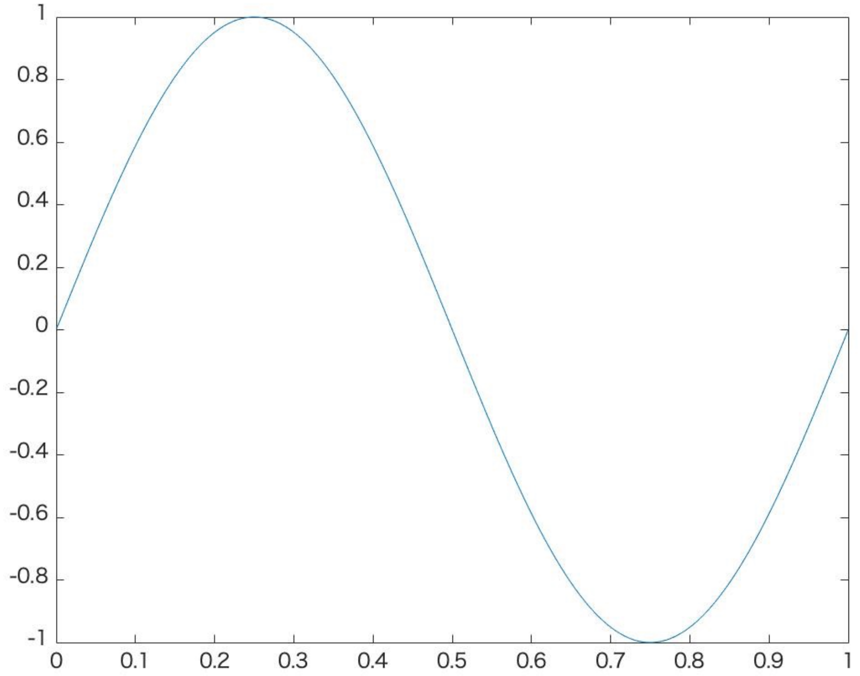
音の高さがおかしい？

- 低い音
  - 220Hz, 110Hz 問題なし，55Hz 聞こえる？ 27.5Hz だめかな？
    - スピーカーの性能だろう

- 高い音
  - 880Hz ?へんだぞ 倍にしていっても全部へん
    - なぜ？どこからおかしい？
    - 500Hzに近づくと音が聞こえなくなっていきます．なぜ？

サンプリング定理（標本化定理）

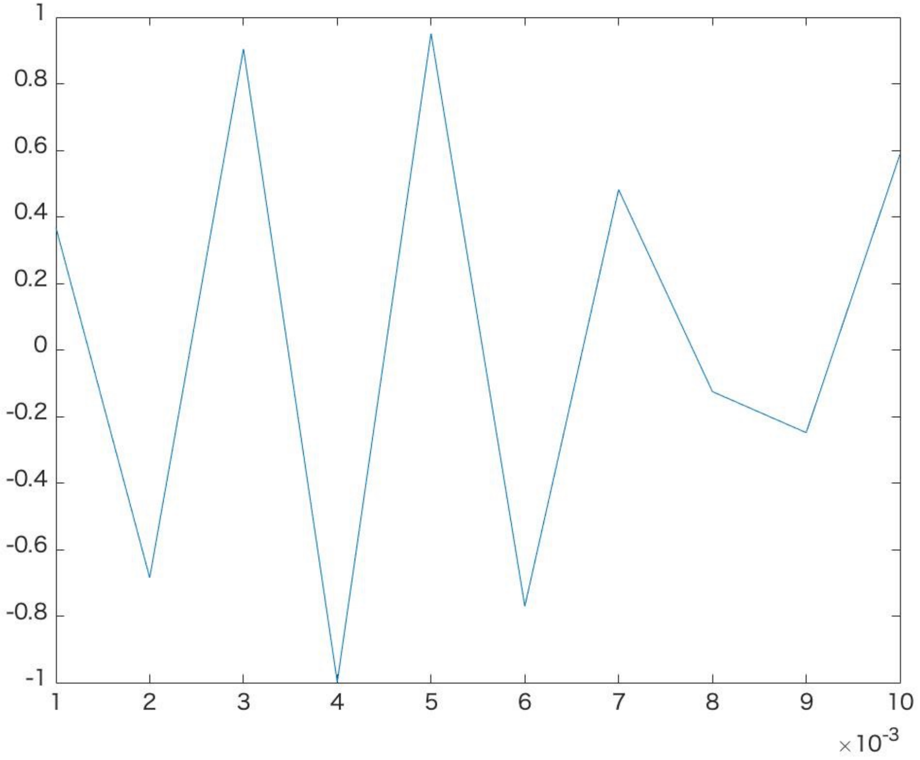
- 現在の状態（音が消えるとき）
  - サンプリング周波数: 1000Hz
  - 波の周波数：500Hz
- 2倍のあたりに何がおきているのか？
- 1Hzを2Hzでサンプリングするには？



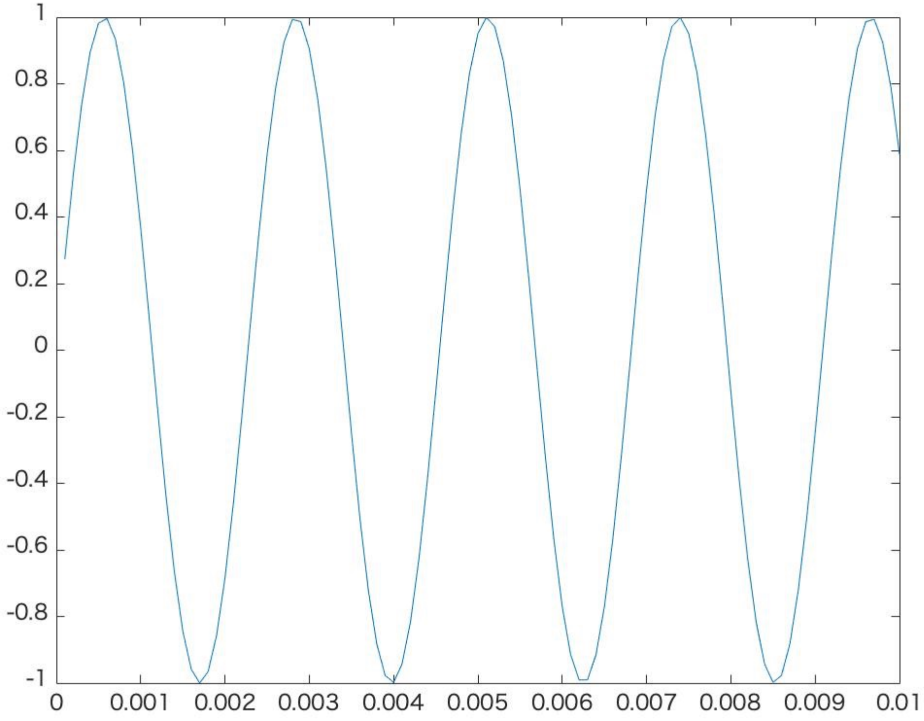
どこの二点をとる？

- 2倍以上の周波数でサンプリングしなくてはならない
  - 数学的証明は，後日

440Hz 0sから0.01s



Fs = 1000Hz

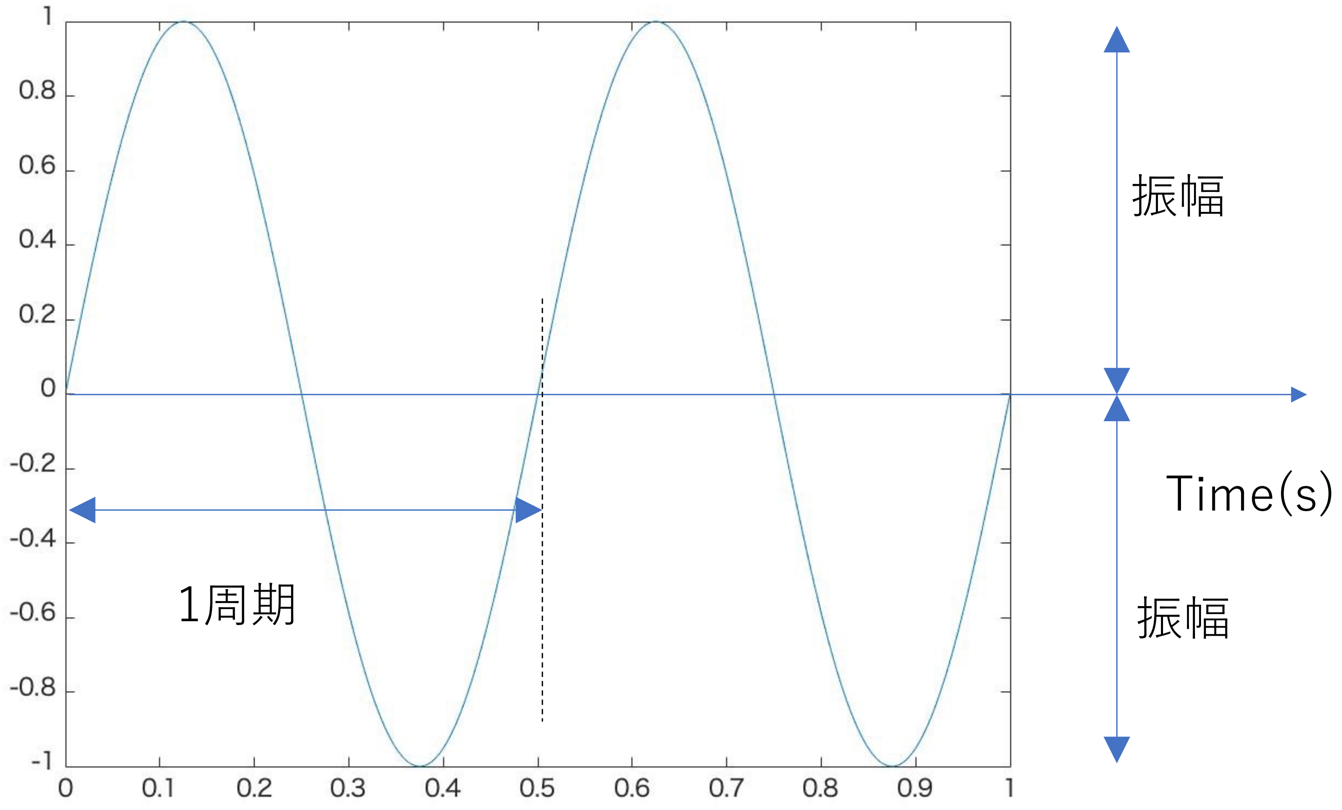


Fs = 10000Hz

今日の予定

- 正弦波
- 角度，三角関数
- 複素平面，オイラーの定理
- 関数の直行
- 位相

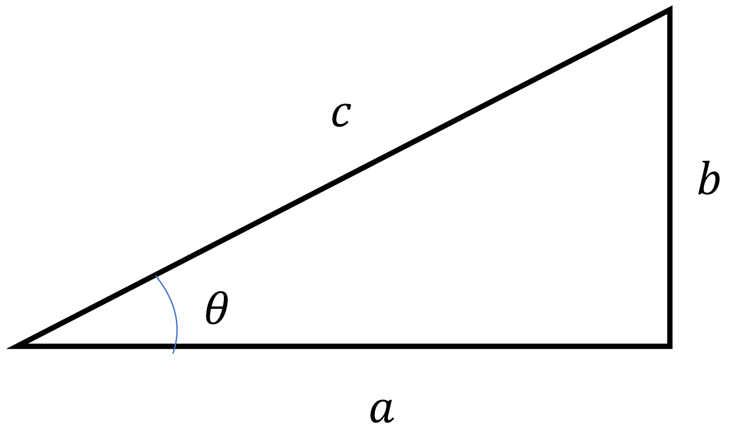
正弦波



音の三要素
- 高さ：周期
- 大きさ：振幅
- 音色：波形

角度：三角関数

- $\sin\theta$　　=> シータ：角度
  - 角度は無次元
    - なぜ無次元？：相対的に決定される
    - 直角三角形の辺のながさから角度が決定
  - ピタゴラスの定理
    - $c^2 = a^2 + b^2$



    - $\sin\theta = \frac{b}{c}$
    - $\cos\theta = \frac{a}{c}$
    - $\tan\theta = \frac{b}{a}$

辺の長さから角度が決定される

$c^2 = a^2 + b^2$

三角形が基になっているので三角関数

時間の関数へ

- 波は時間の関数
- $\sin\theta$
  - θ ：角度
- $\sin\omega t$
  - ω ：角速度（各周波数）[rad/s]
  - t：時間

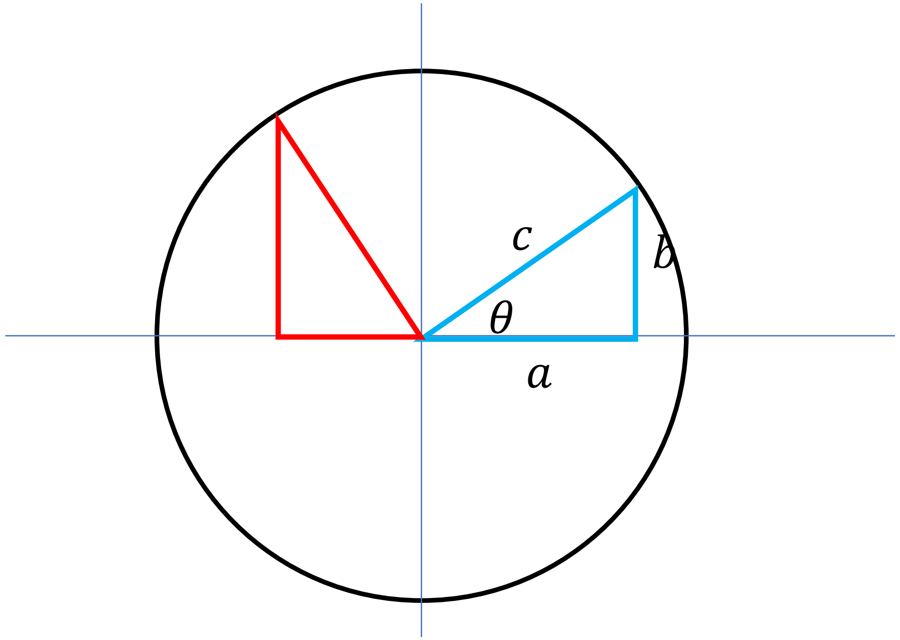
$$\sin\omega t$$

オメガ：周波数領域
t：時間領域

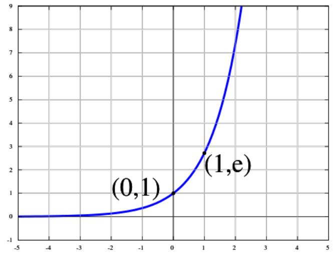
2つに分けて考える
=> フーリエ変換

円

- 直角三角形の辺の長さを変化させる
- $c^2 = a^2 + b^2$
- $1 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$
- $1 = (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2$

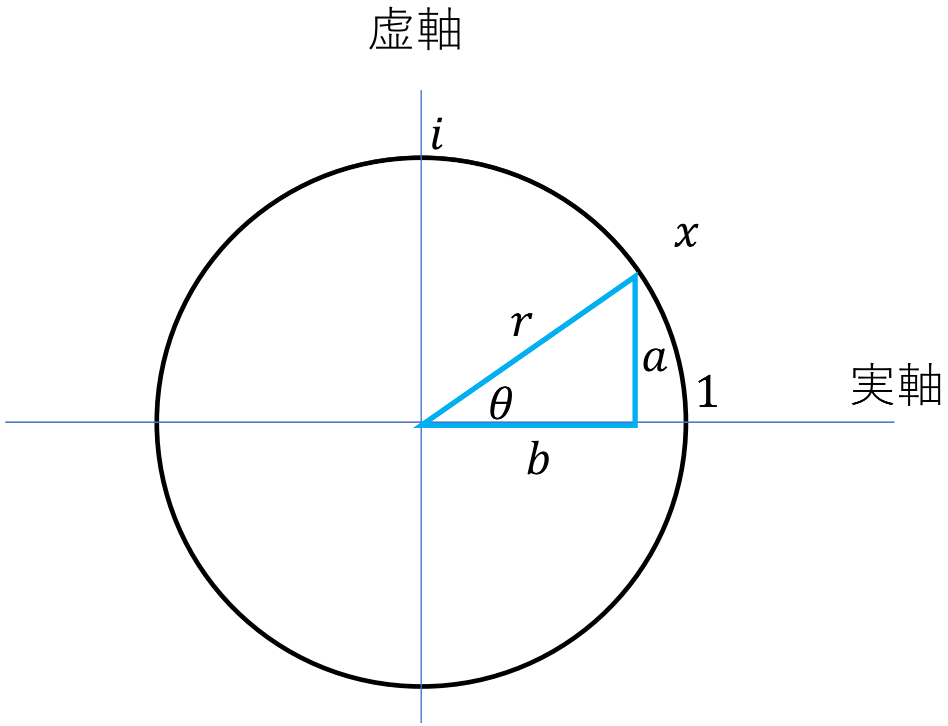


複素空間の円



- $x(t) = e^{at}$
- aが虚数だと
- $x(\theta) = e^{i\theta}$

θが0だとxは1
θが$\pi/2$だとi
θがπだと-1
θが$3\pi/2$だと-i
…



- オイラーの公式（虚数の指数関数）
- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- $x = a + ib$
- 単位円

世界一美しい数式？ オイラーの公式

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

- なぜ美しいか？
  - π ：円周率
  - e ：ネイピア数，オイラー数（海外ではこちらがメジャー）
  - i：虚数
  - 1
  - 0
- さっきと式の形が違うけど．．．

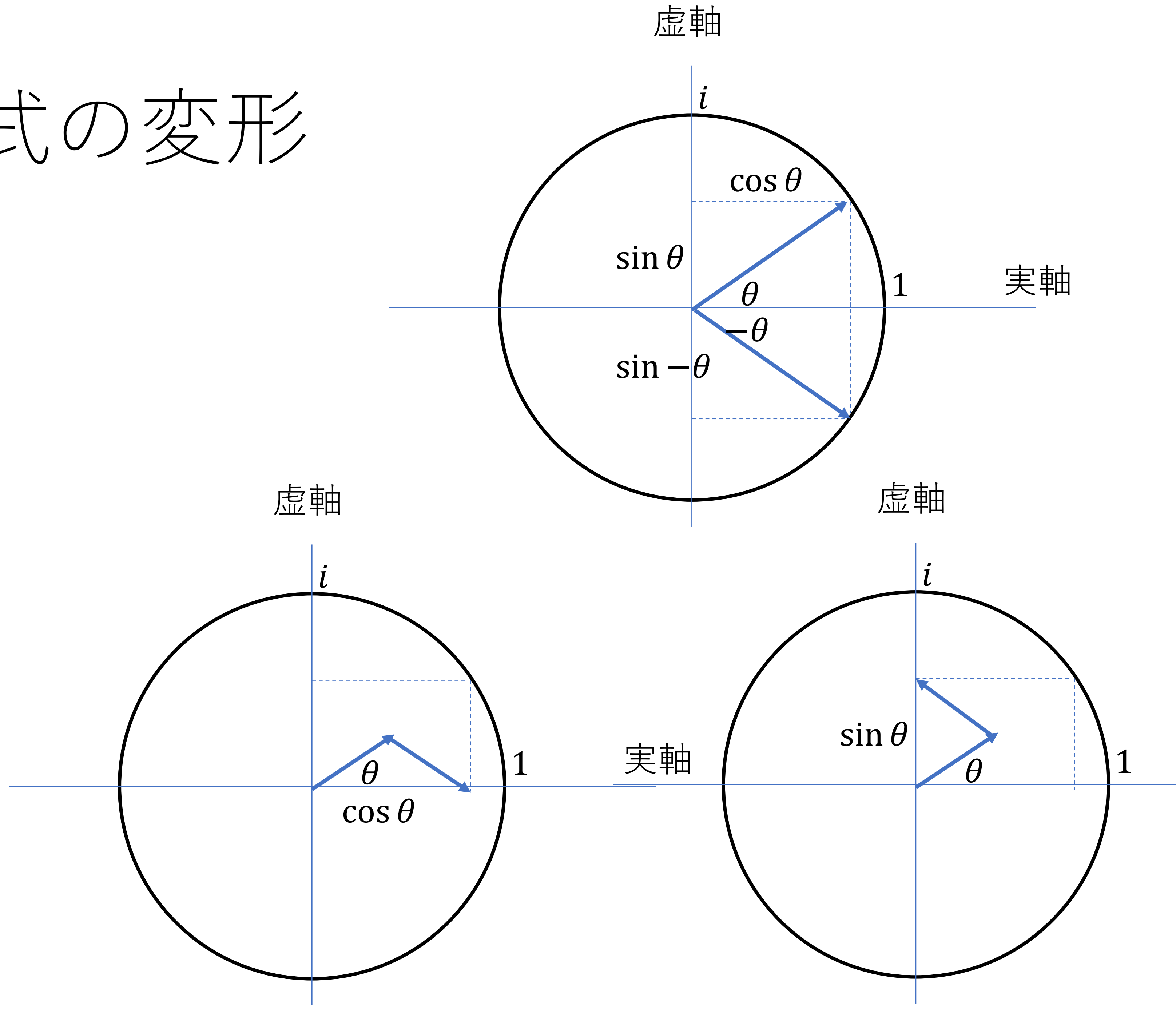
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

- $\theta = \pi$のときに美しくなる

オイラーの公式の変形

- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

- $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$



オイラーの公式の証明

- テイラー展開

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \cdots$$

- 一般化

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$e^{ix} = 1 + \frac{(ix)^1}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{ix^1}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{ix^7}{7!} + \cdots\right)$$

- 三角関数を展開

$$\sin x = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

- オイラーの公式

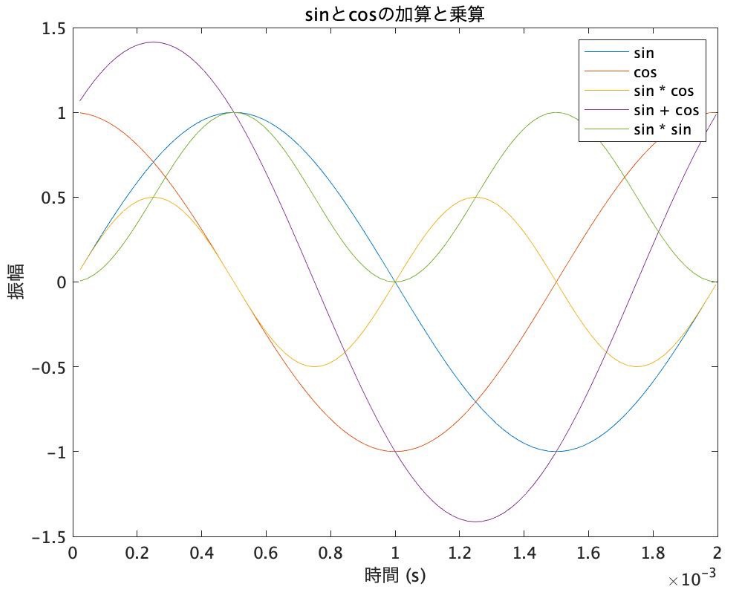
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

三角関数を復習しておいて下さい

- 三角関数の公式はよく暗記しました
- 導出するようにともよく言われたと思います

- 作図するとなぜそうなるのかよく分かります

- 例えば
  - $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ <= 周期が二倍
  - $\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1-\cos x}{2}$ <= 周期が二倍，直流成分？

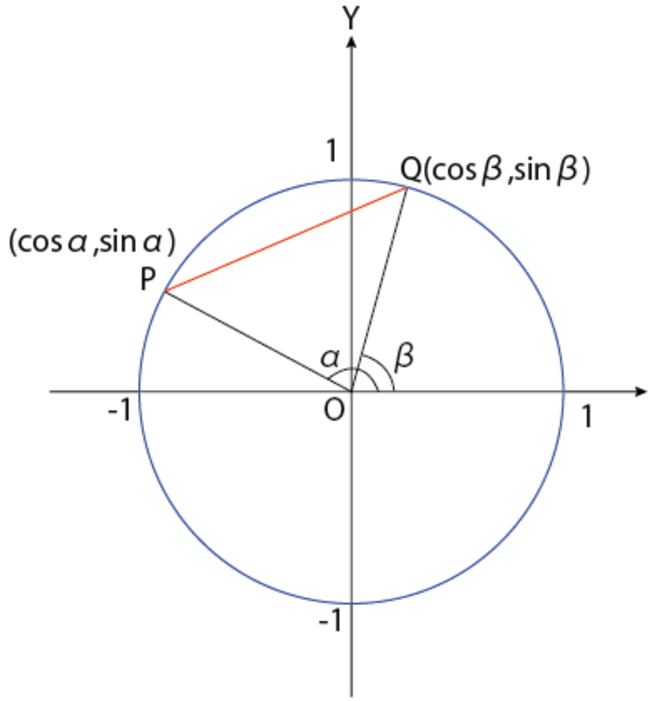


三角関数の基本：加法定理

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

以下の連立方程式を解くと得られる

- $\mathrm{PQ}^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$
- $\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{OP}^2 + \mathrm{OQ}^2 - 2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cos(\alpha - \beta)$



直行性

- ベクトルの直行
  - 垂直になる（角が$\pi/2$, 90°）
  - 内積が0
  - $A = (1, 0), B = (0, 1)$
  - $A \cdot B = 1\times 0 + 0\times 1 = 0$
- 関数の直行性
  - 積の和（積分）が0
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = 0$
  - $\sin x$と$\cos x$は直交
  - $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$
    - 角が$\pi/2$, 90° ずれている
  - $\sin x$と$\sin 2x$ も直交

直行 => 線形独立
- 直行するベクトルであらゆるベクトルが作れる
- 直行する関数であらゆる関数が作れる

直交性 => 微分値が0

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = 0$
- 周期関数は区間を1周期でOK

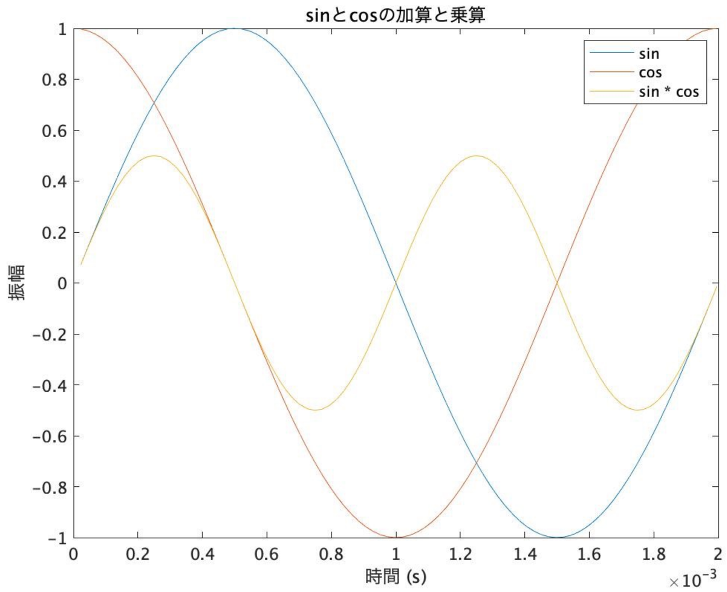
$\sin x$と$\cos x$の直交性

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, dx$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$= 0$ <=直行する

$$\sin\alpha\cos\mathrm{\beta} = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$



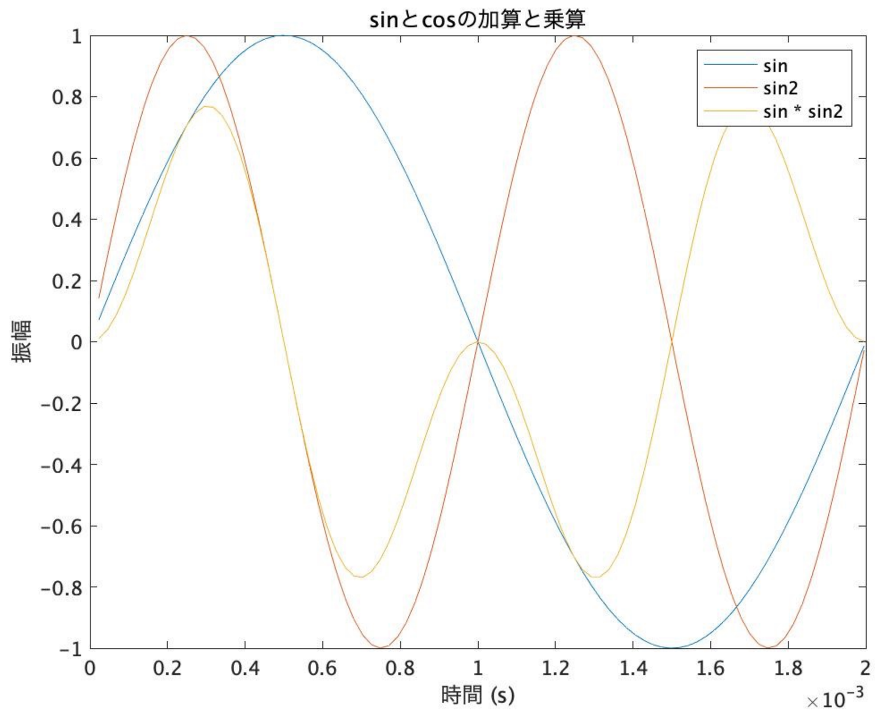
$\sin x$ と $\sin 2x$ の直交性

$$\int_0^{2\pi} \sin x \sin 2x \, dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\cos(3x) - \cos(-x)\} \, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\cos(x) - \cos(3x)\} \, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos x \, dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(3x) \, dx$$
$$= \frac{1}{2}[\sin x]_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sin(3x)\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2}(0-0) - \frac{1}{2}(0-0)$$
$$=0$$

<= 直行する

$$\sin\alpha \sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$$

- を入れる



$\sin x$と$\sin x$の直交性

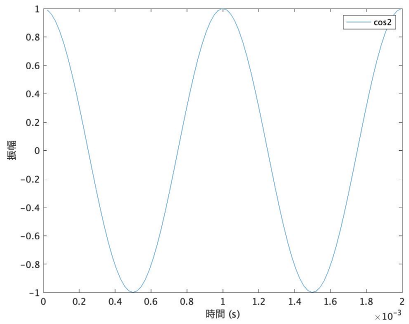
$$\int_0^{2\pi} \sin x \sin x \, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\cos(0) - \cos(2x)\} \, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{1 - \cos(2x)\} \, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 \, dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(2x) \, dx$$
$$= \frac{1}{2}[x]_0^{2\pi} - 0$$
$$= \frac{1}{2}(2\pi - 0)$$
$$= \pi$$

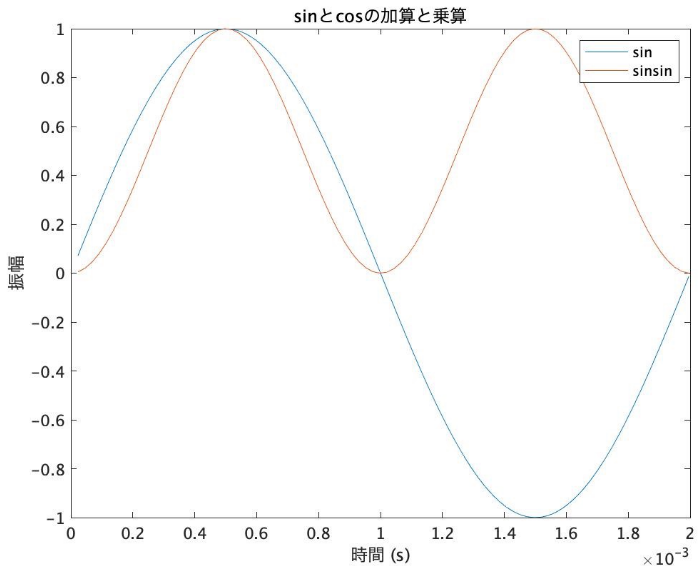
<= 直行しない（周期の半分）

$$\sin\alpha \sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$$

- を入れる

$\cos 2x$はこの周期で
2周分なので積分したら0





位相

- 位相とは
  - 周期的な運動をするものが一周期の内のどのタイミングにいるかを示す量
- θずれた正弦波

$$\sin(x+\theta)$$

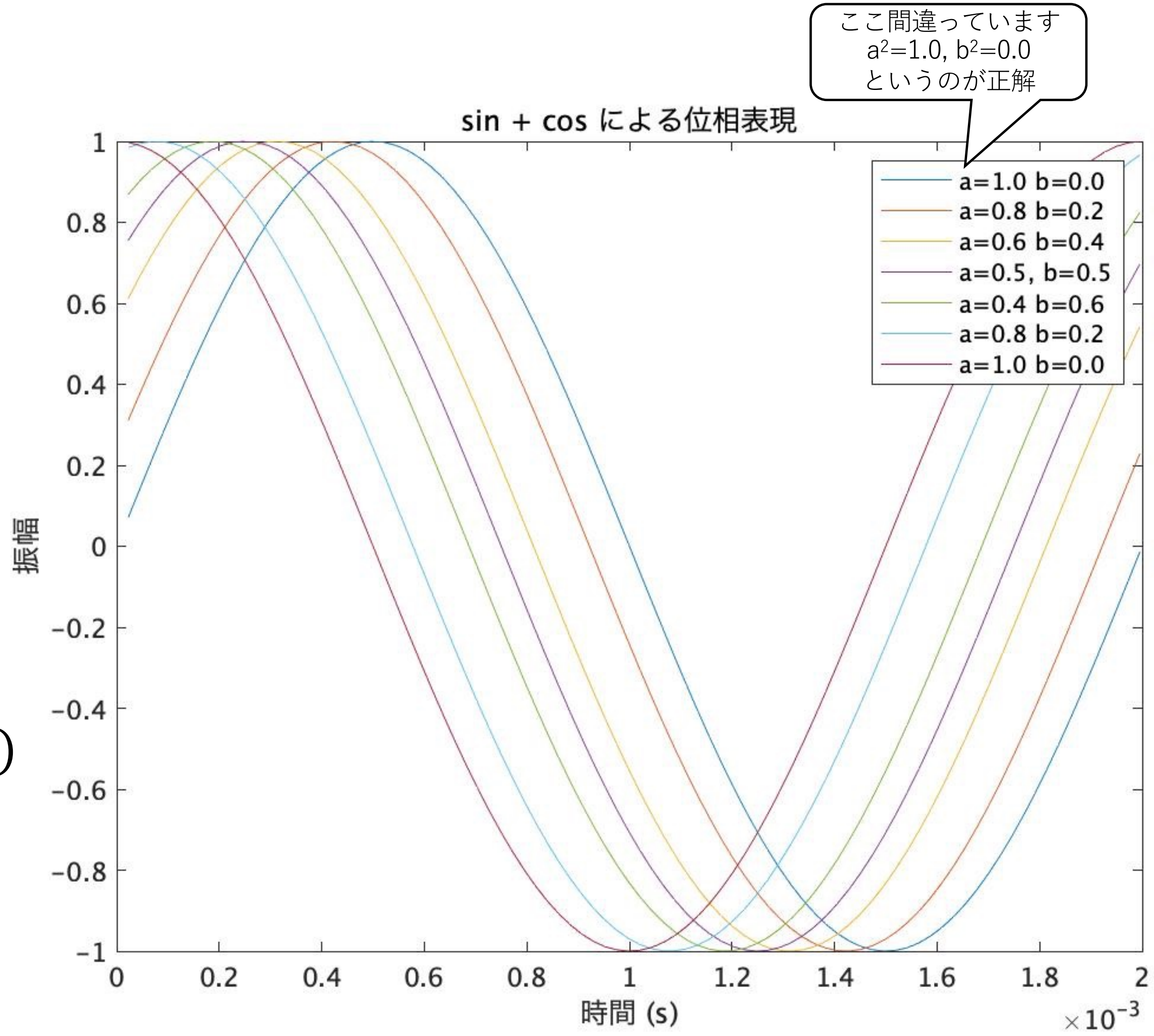
  - 数学的には「θずれた」は使いにくい

- 三角関数の合成で表せないか

$$a\sin x + b\cos x$$

$$\sin(x+\theta) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a\sin x + b\cos x)$$

- aとbの組み合わせで，位相変化を表すことができる



まとめ

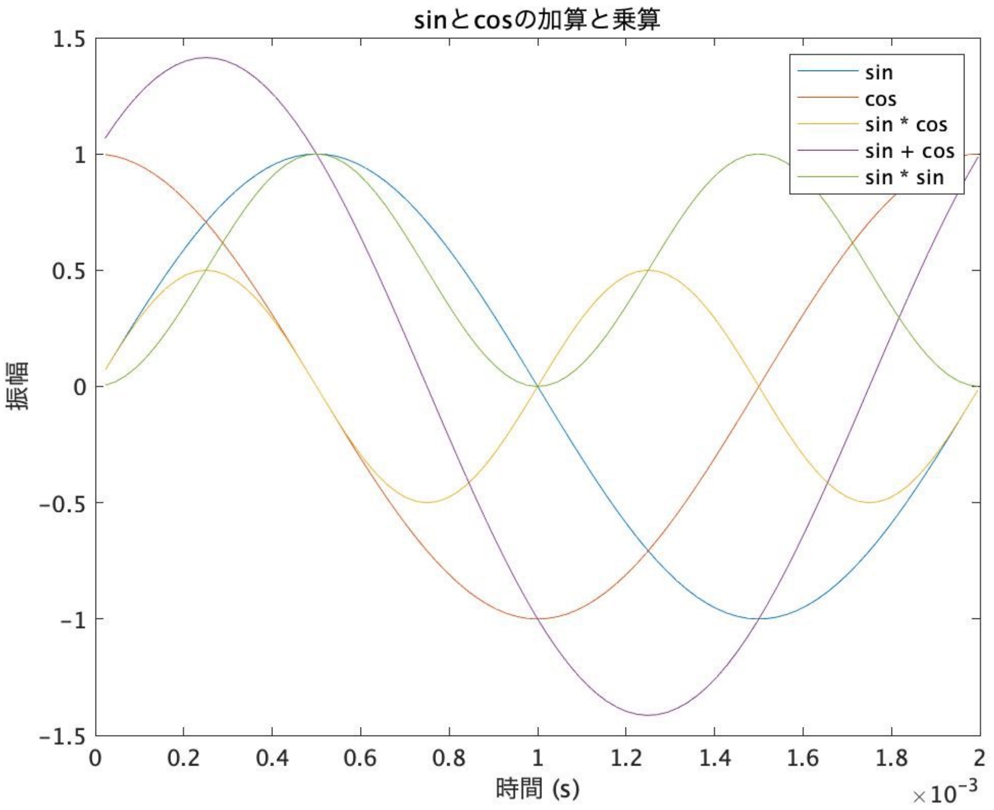
- 正弦波
- 角度，三角関数
- 複素平面，オイラーの定理
- 関数の直行
- 位相

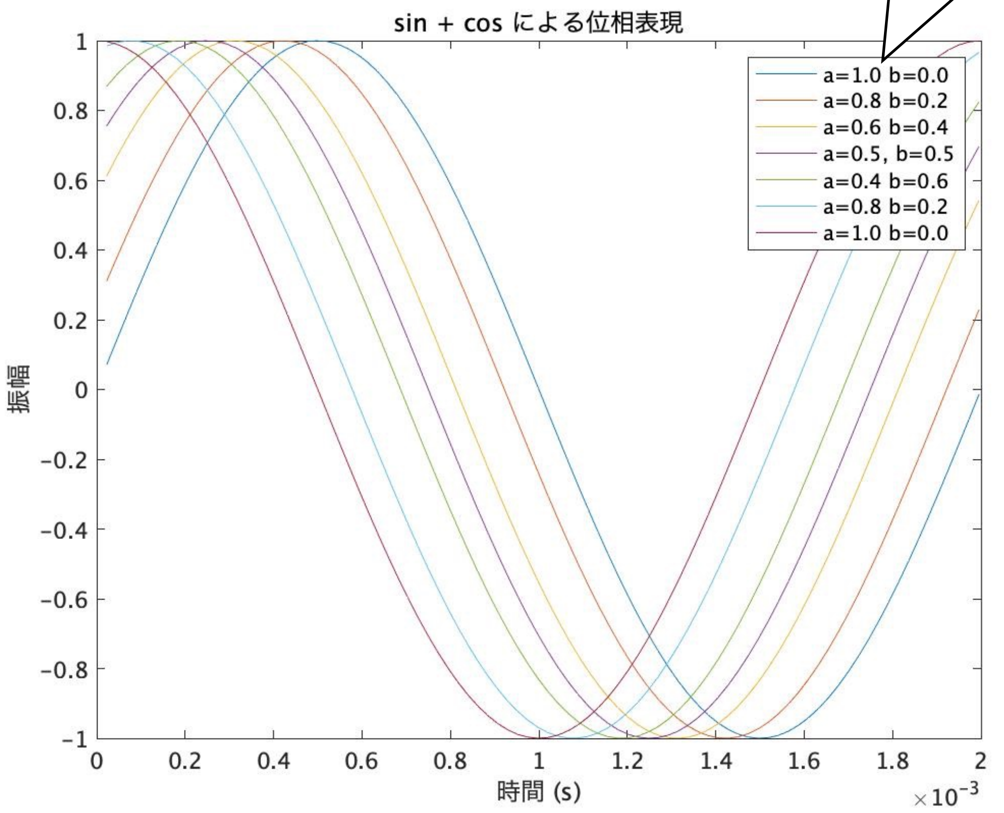
宿題1：三角関数のグラフ

余裕があったら
ほかにも描いてみよう

1. グラフ
   - 以下の二つのグラフをMatlabで描いてみる

ここ間違っています
$a^2=1.0$, $b^2=0.0$
というのが正解





宿題2：直交性の確認

- 以下の三つの中から一つ選び，直行性を確かめなさい．
  - $\sin(nx)$ と $\sin(mx)$
  - $\sin(nx)$ と $\cos(mx)$
  - $\cos(nx)$と $\cos(mx)$

nもmも非負整数

- ヒント：積和の公式を使って場合分けをする

提出

- 宿題1は，描くためのスクリプトを提出（mファイル）
- 宿題2は，手書きで書いたレポートを写真に撮って提出

- 提出先：LETUS

- 締め切り：2023/10/9 23:59