メディア情報処理 2023
第7回目 離散時間フーリエ変換

K504
大村英史

出席登録

-

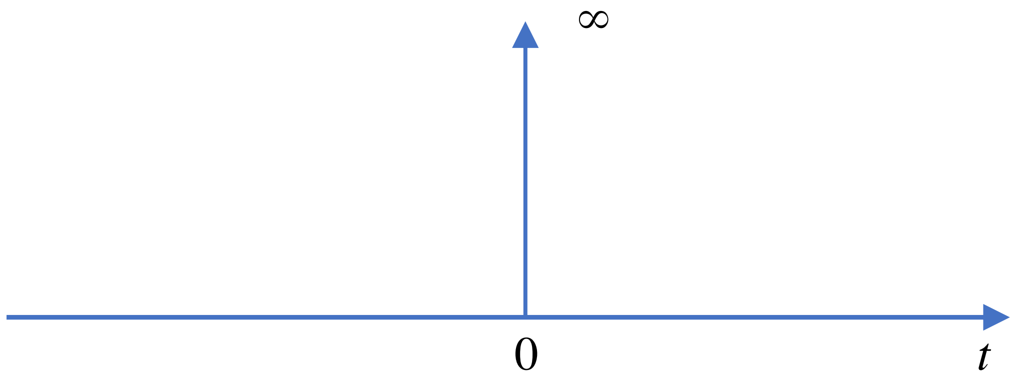
今日の予定

- デルタ関数のフーリエ変換
  - デルタ関数
  - フーリエ変換
  - フーリエ逆変換
  - コサインのフーリエ変換
- 離散時間フーリエ変換
  - 離散時間フーリエ変換
  - 離散時間の特性
- 演習・宿題

ディラックのデルタ関数

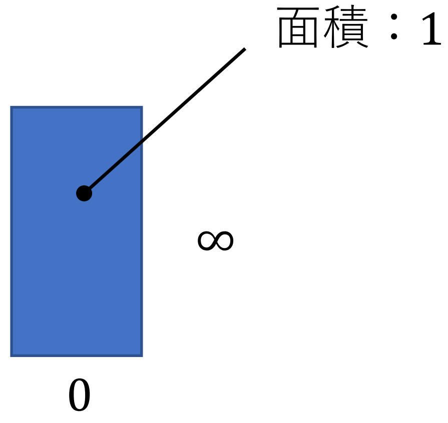
- インパルス関数とも言う
- $t = 0$で無限大 それ以外は0

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$



- どんな無限大？

$\Rightarrow$ 面積が1



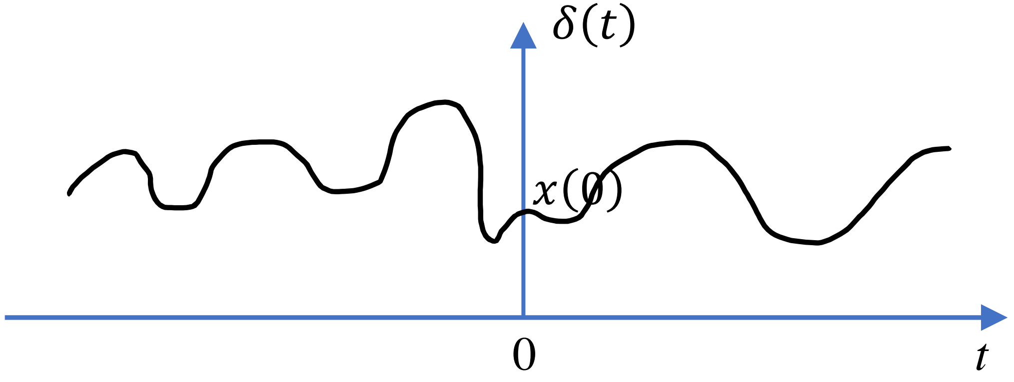
$\Rightarrow$ 大きさを考えられる無限大

$\Rightarrow$ $2\delta(t)$や$3\delta(t)$に意味がある

デルタ関数による瞬時値の取り出し

- デルタ関数と他の関数の掛け合わせ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, x(t) dt = x(0)$$

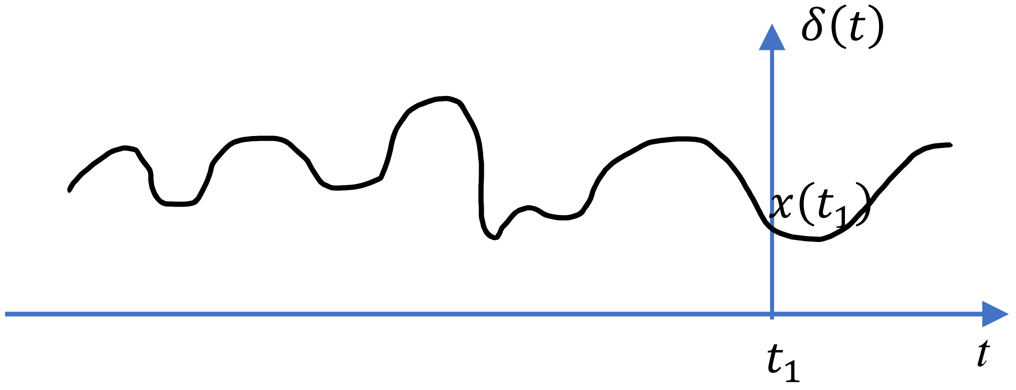


$t \neq 0$のとき0

$t = 0$のときだけ$\delta(t)x(t)$

- 任意のt_1: $\delta(t - t_1)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_1)\, x(t) dt = x(t_1)$$



↑ 瞬時値を取り出している

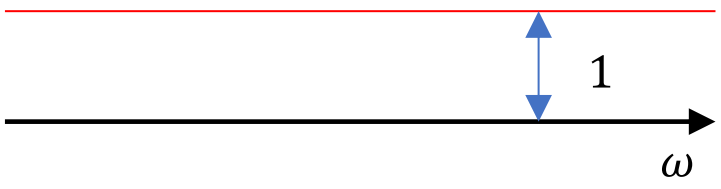
デルタ関数のフーリエ変換

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

$e^{-i\omega t}$の$t = 0$の瞬時値を抜き出すというのと等価

$$= e^{-i\omega 0}$$

$$= 1$$



意味：　どんな周波数も1

すべての周波数が等しい

あらゆる周波数を重ね合わせるとデルタ関数が作れる

？不思議？

$\delta(t-t_1)$のフーリエ変換

$$\mathcal{F}[\delta(t-t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_1) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

$$= e^{-i\omega t_1}$$

これはωの関数なので

振幅：$\left| e^{-i\omega t_1} \right| = 1$

位相：$\angle e^{-i\omega t_1} = -\omega t_1$

時間領域でt_1シフトする：周波数領域でωt_1遅れる

$e^{-i\omega t_1}$のフーリエ逆変換（元に戻せる？）

$$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-i\omega t_1}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t_1}\cdot e^{i\omega t}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_1)}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{i(t-t_1)}\underbrace{\left[e^{i\omega(t-t_1)}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{\text{値が定まらない = もどせない}}$$

でも，
デルタ関数は超関数なので，気にしないで $\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-i\omega t_1}\right] = \delta(t)$ が成り立つとする

$\delta(\omega - \omega_1)$のフーリエ逆変換

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega - \omega_1)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_1) \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{i\omega_1 t}$$

$$\delta(\omega - \omega_1) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{1}{2\pi} e^{i\omega_1 t}$$

$\omega_1 = 0$のとき

$$e^{i\omega_1 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega - \omega_1)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi}$$

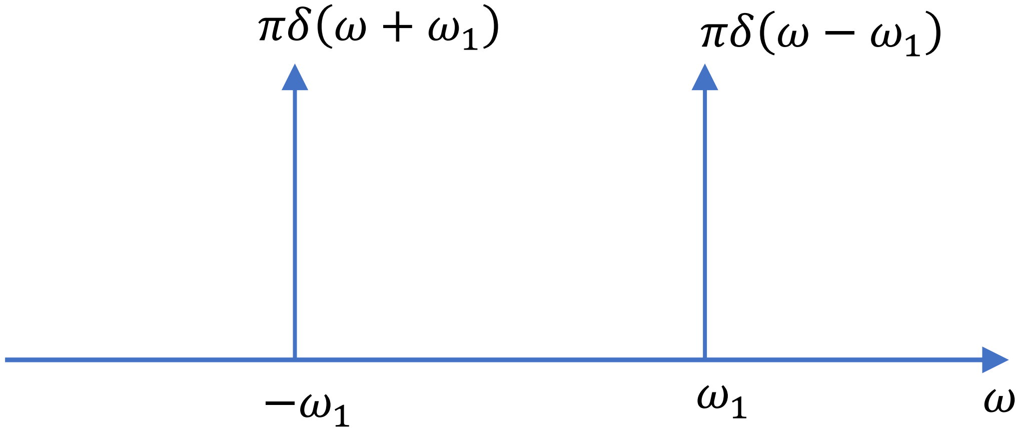
$\cos\omega_1 t$のフーリエ変換

$$f(t) = \cos\omega_1 t$$

$$= \frac{e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}e^{i\omega_1 t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega_1 t}$$

$$\mathcal{F}[f(t)] = \pi\delta(\omega - \omega_1) + \pi\delta(\omega + \omega_1)$$



$$\boxed{\begin{gathered} \delta(\omega - \omega_1) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{1}{2\pi}e^{i\omega_1 t} \\ e^{i\omega_1 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega - \omega_1) \end{gathered}}$$

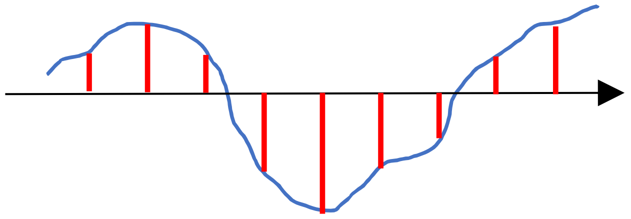
三角関数のフーリエ変換ができるようになった！

離散時間フーリエ変換

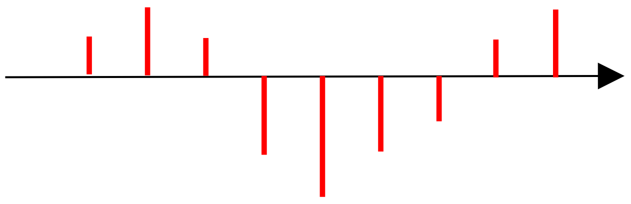
フーリエ変換：時間領域も周波数領域も連続

離散時間フーリエ変換：時間領域を離散化

離散データを連続関数表現

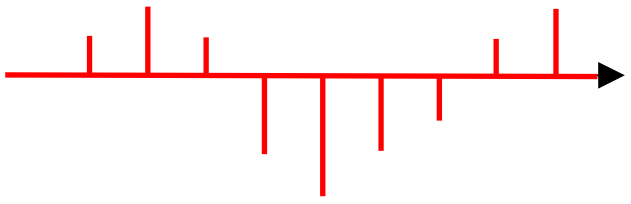


- 離散信号を$f[n]$とする



- 連続関数化する

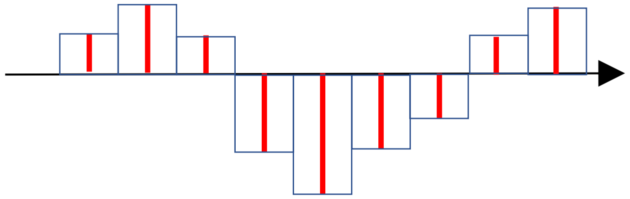
$$f(n) = \begin{cases} f[n] & t = n \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

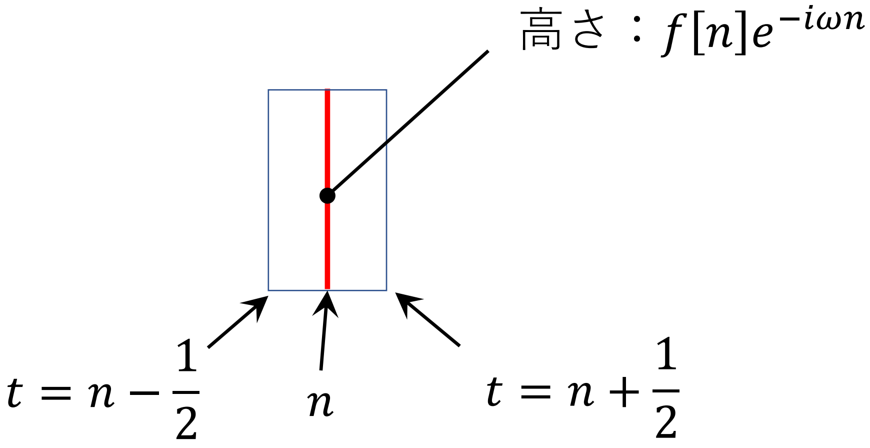


$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

← うまく積分できない

長方形で考える 方法1（面積 = 高さ × 幅）





幅：1

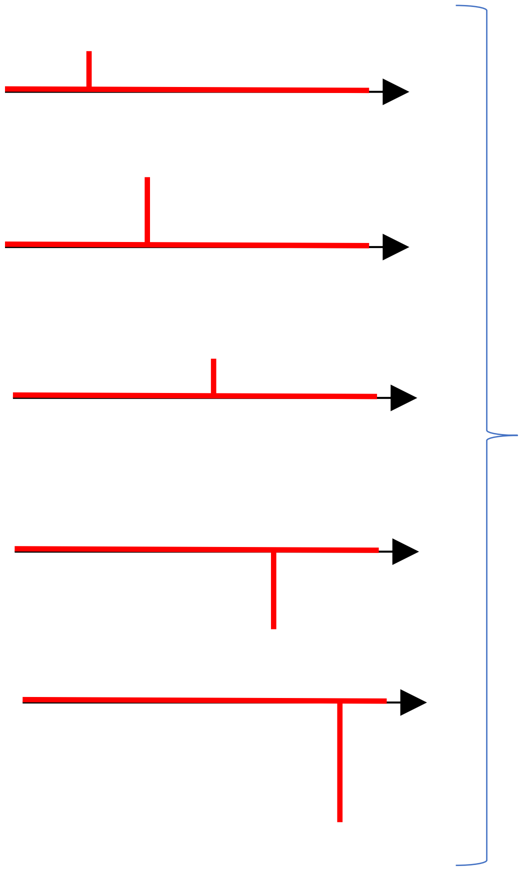
- 面積の総和を考える：Σ計算

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-i\omega n}$$

離散時間フーリエ変換
Discreate Time Fourier Transform
DTFT

長方形で考える 方法2 （デルタ関数）

- デルタ関数は面積が1



足す

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\delta(t-n)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\delta(t-n) \right\} \cdot e^{-i\omega t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-i\omega n} \quad \Longleftarrow$$

離散時間フーリエ変換
Discreate Time Fourier Transform
DTFT

周期的な周波数領域

フーリエ級数

周期的な時間の関数 ← 離散的な周波数スペクトル

離散時間フーリエ逆変換

周期的な周波数の関数？ ← ?????? 離散的な時間

実は 周期性あり 周期：2π　← これはあとでやるとして

離散時間フーリエ逆変換

- フーリエ級数とフーリエ変換の関係
  - 積分範囲を1周期にした
  - 今回も1周期（0から2π）で行う　←周期が2πである確認はあとで

$$f[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\omega)e^{i\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]e^{-i\omega m}\right\}e^{i\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]\int_0^{2\pi} e^{i\omega(n-m)}d\omega$$

フーリエ逆変換の式に
離散時間フーリエ変換の式を代入
（nをmとして代入）

積分と総和の入れ替え

$$f[n]=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}f[m]\int_0^{2\pi}e^{i\omega(n-m)}d\omega$$

$n=m$の項だけ残る

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}f[m]\,2\pi$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f[m]$$

$$=f[n]$$

もとにもどった！

$n=m$のとき

$$\int_0^{2\pi}e^{i\omega(n-m)}d\omega=\int_0^{2\pi}1d\omega$$
$$=2\pi$$

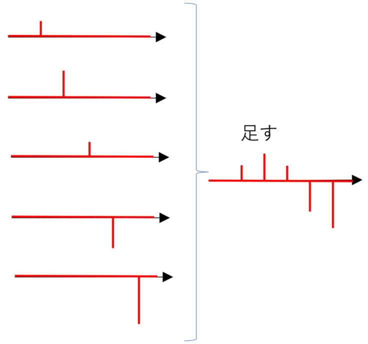
$n\neq m$のとき

$n-m$は整数なので何回転まわるか

よって$e^{i\omega(n-m)2\pi}=1$

$$\int_0^{2\pi}e^{i\omega(n-m)}d\omega=\frac{1}{i(n-m)}\left[e^{i(n-m)\cdot\omega}\right]_0^{2\pi}$$
$$=\frac{1}{i(n-m)}\left(e^{i(n-m)2\pi}-1\right)$$
$$=\frac{1}{i(n-m)}(1-1)$$
$$=0$$

指数関数のフーリエ係数を求めたときと同じ



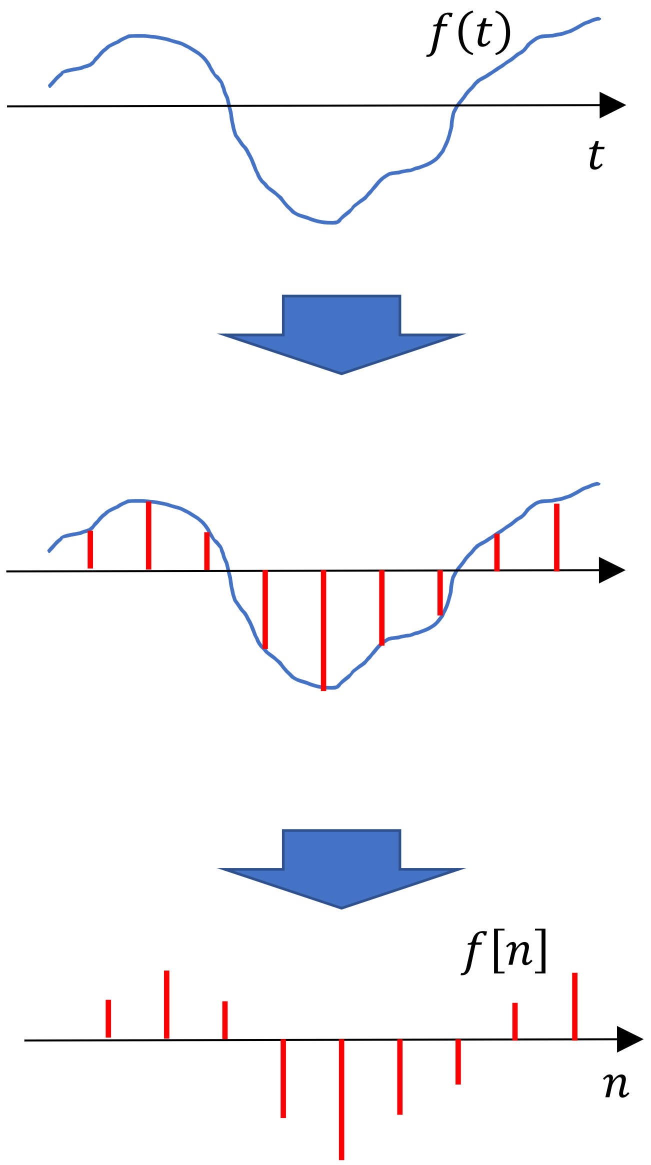
離散時間信号データ

離散時間のデータとは

- 連続時間のデータから一定時間で値を取り出す
  - サンプリング，標本化という

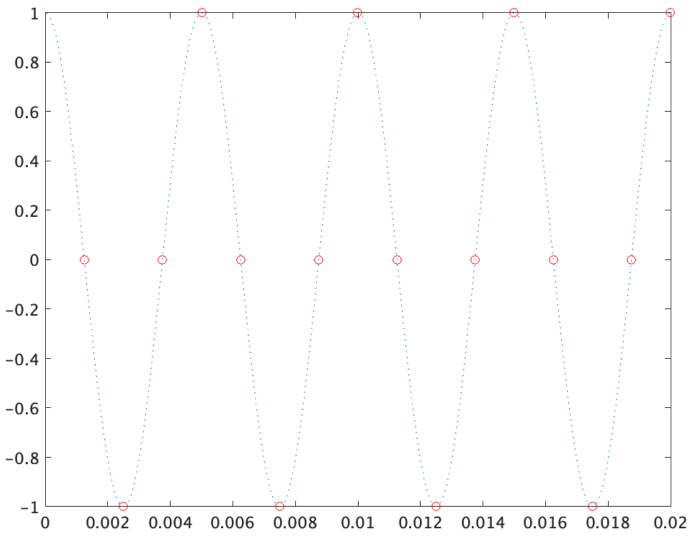
  - サンプリング周期：T_s
  - サンプリング周波数：F_s

- 連続データ
  - $f(-2T_s), f(-T_s), f(0), fT_s, f(2T_s)$
- 離散データ
  - $f[-2], f[-1], f[0], f[1], f[2]$



離散時間データの性質

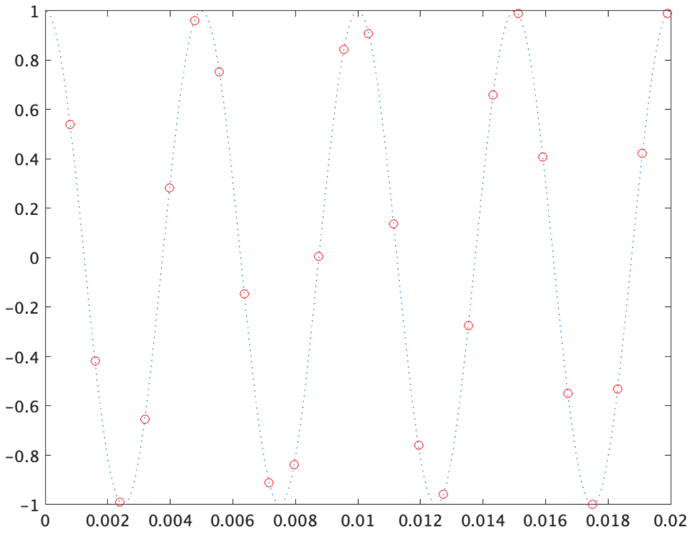
- 周期的なデータでも，離散化するとほとんどが周期的でなくなる
  - $\cos \omega n$
    - $\omega = \frac{\pi}{4}$: 周期的
    - $\omega = 2$: 非周期的

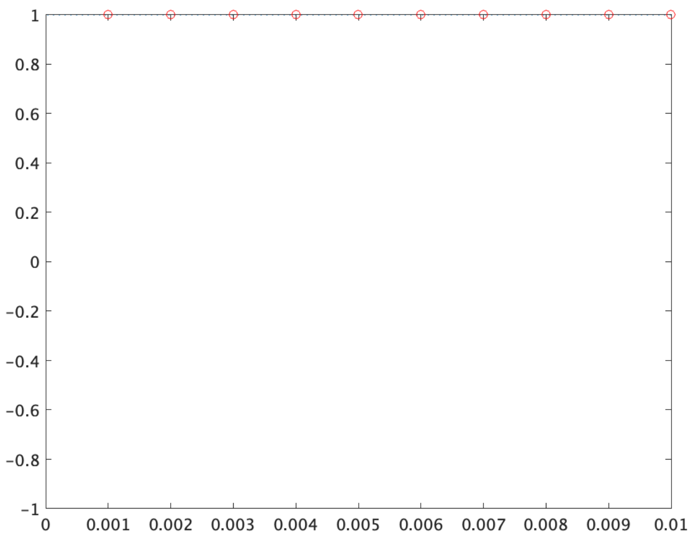


- 角周波数を2πふやすと元の関数にもどる

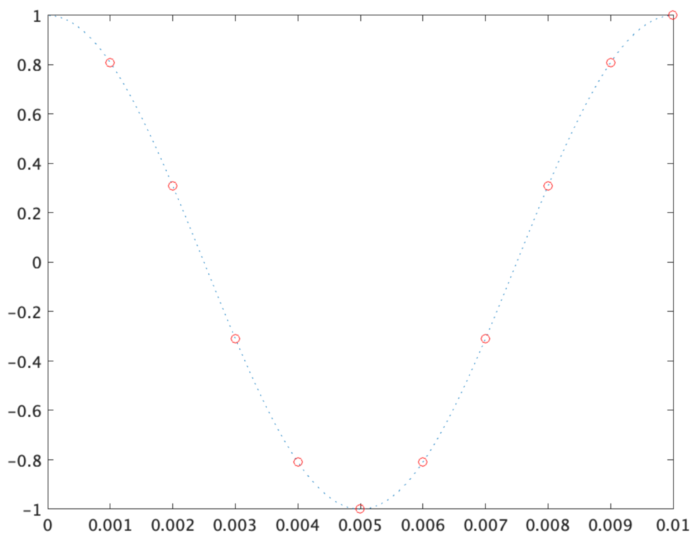
$$
\begin{aligned}
x[n] &= \cos \omega n \\
&= \cos \omega n + 0 \\
&= \cos \omega n + \cos 2\pi \cdot n \\
&= \cos(\omega + 2\pi) n
\end{aligned}
$$

2πごとに周期的！！！

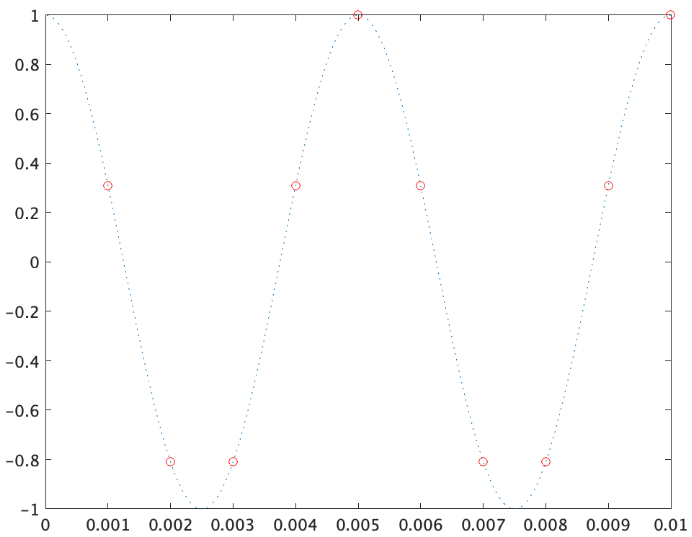




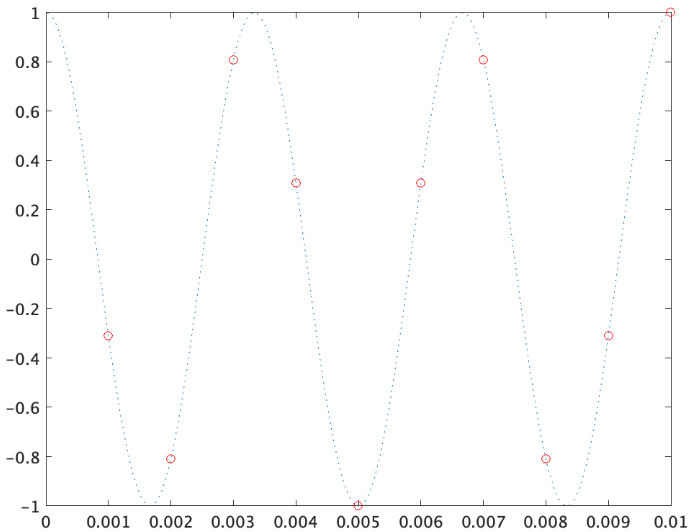
$\omega = 0.0\pi$



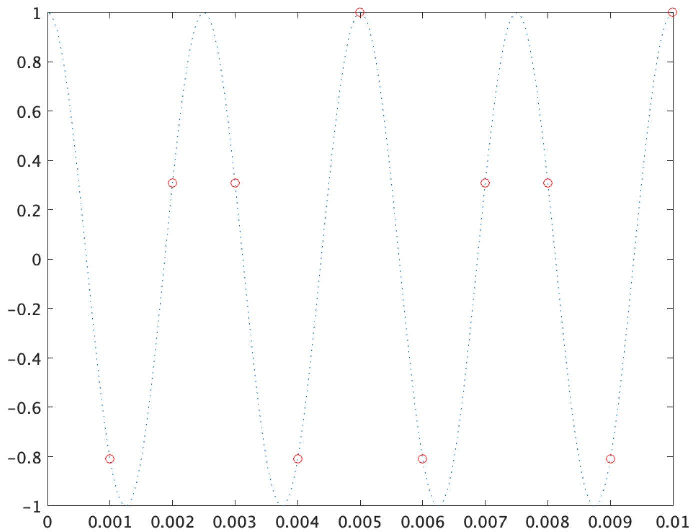
$\omega = 0.2\pi$



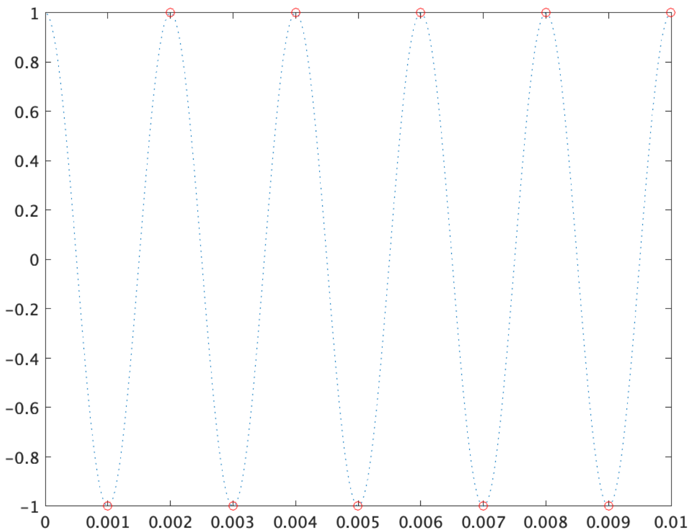
$\omega = 0.4\pi$



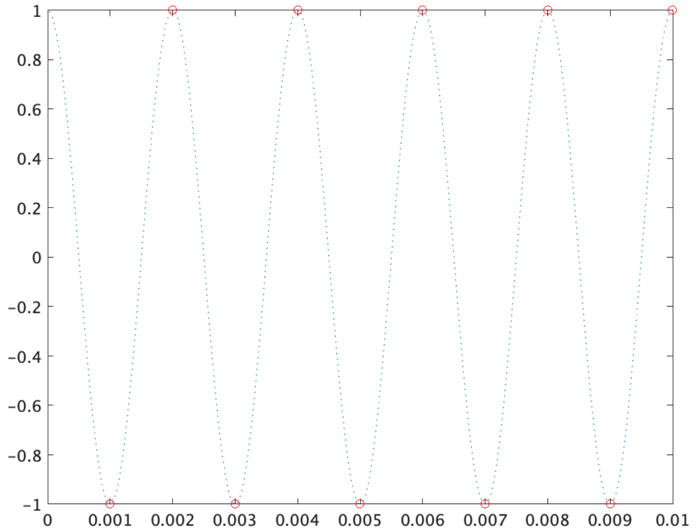
$\omega = 0.6\pi$



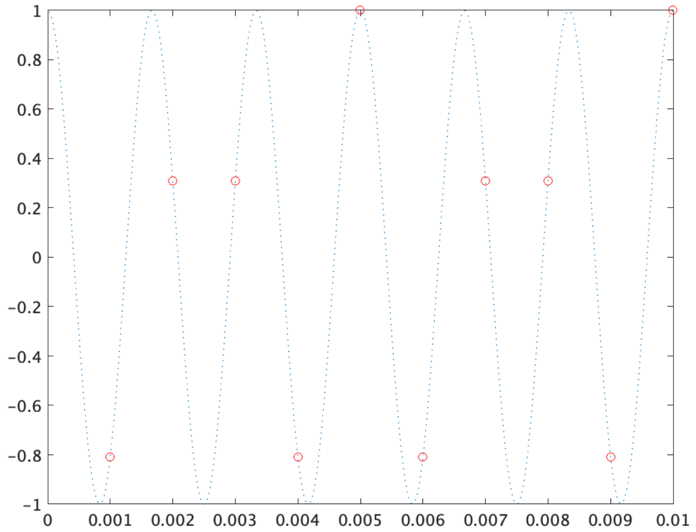
$\omega = 0.8\pi$



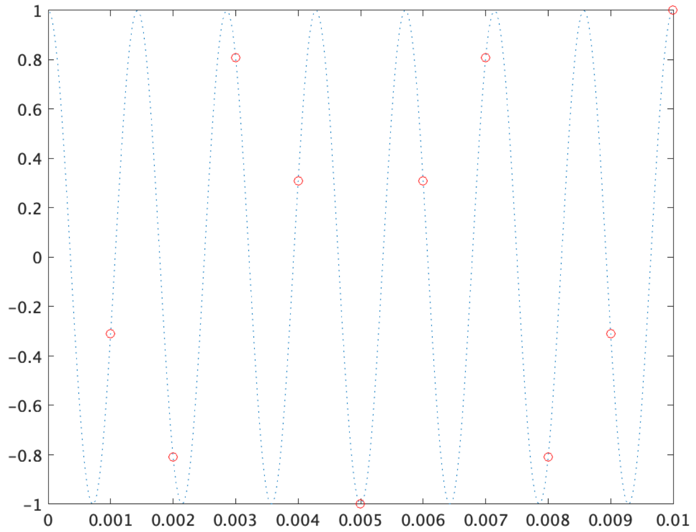
$\omega = 1.0\pi$



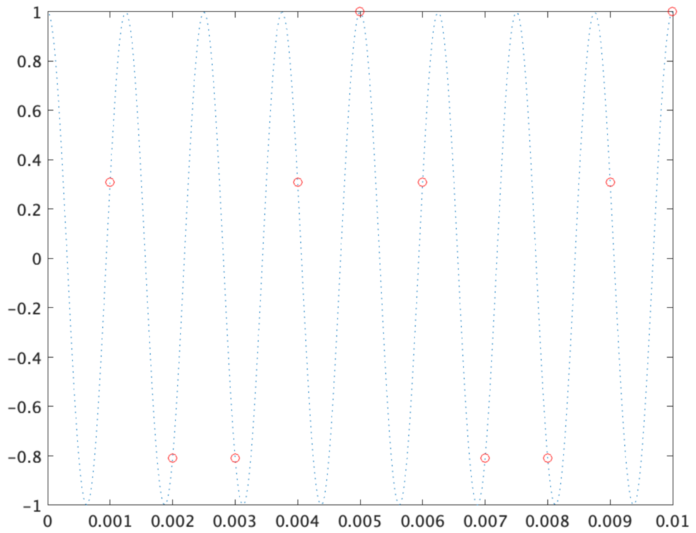
$\omega = 1.0\pi$



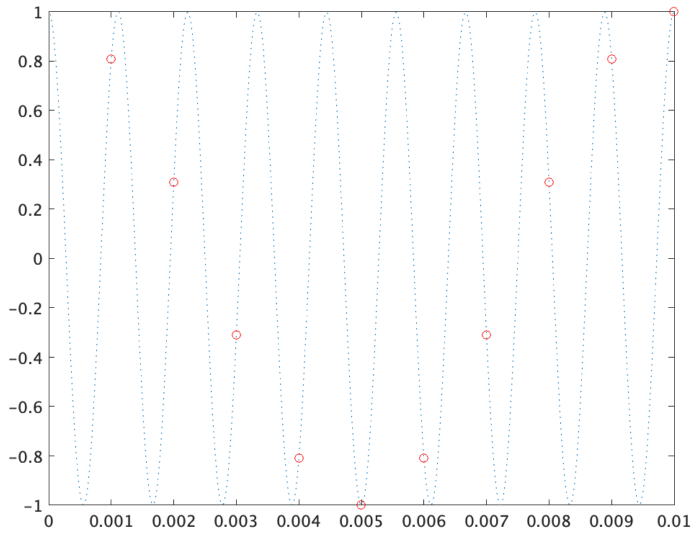
$\omega = 1.2\pi$



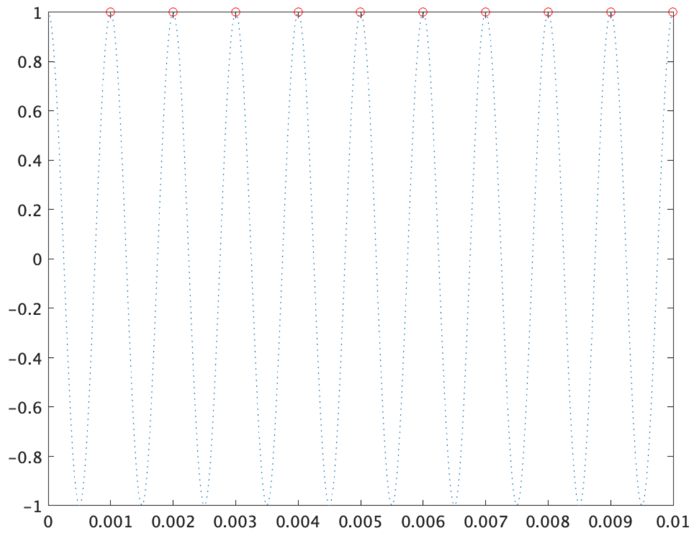
$\omega = 1.4\pi$



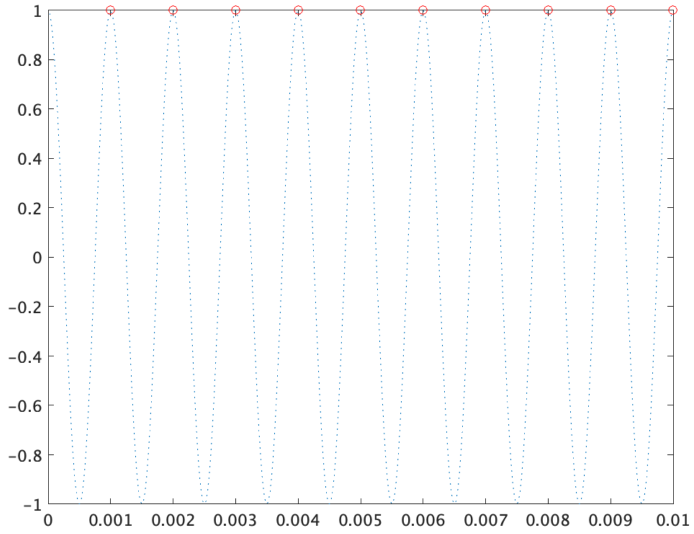
$\omega = 1.6\pi$



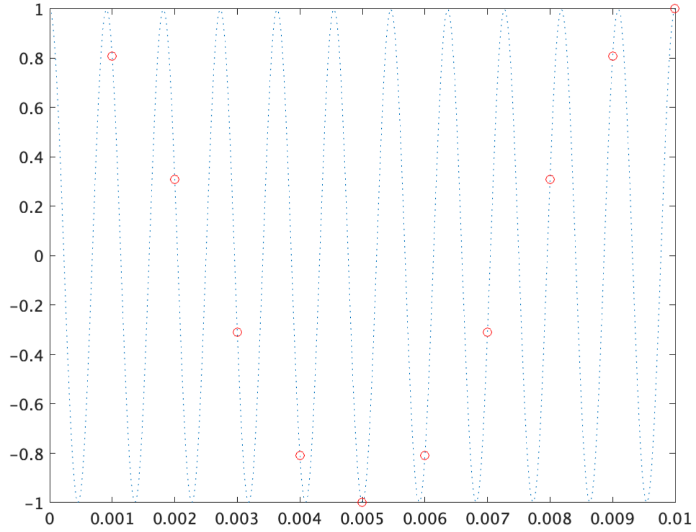
$\omega = 1.8\pi$



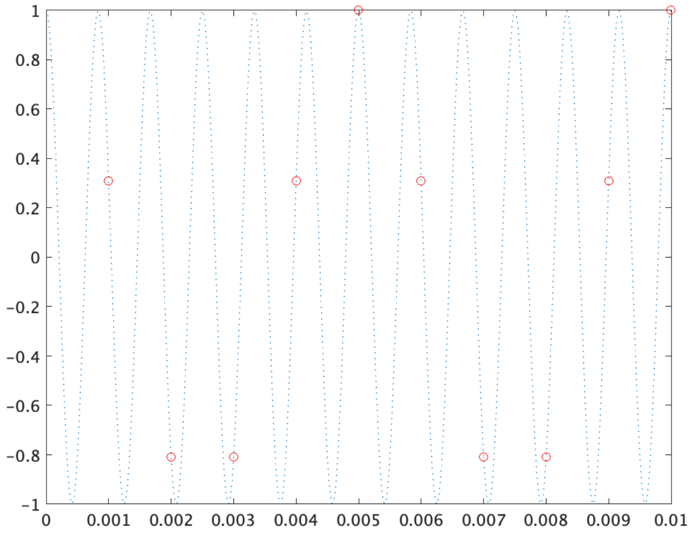
$\omega = 2.0\pi$



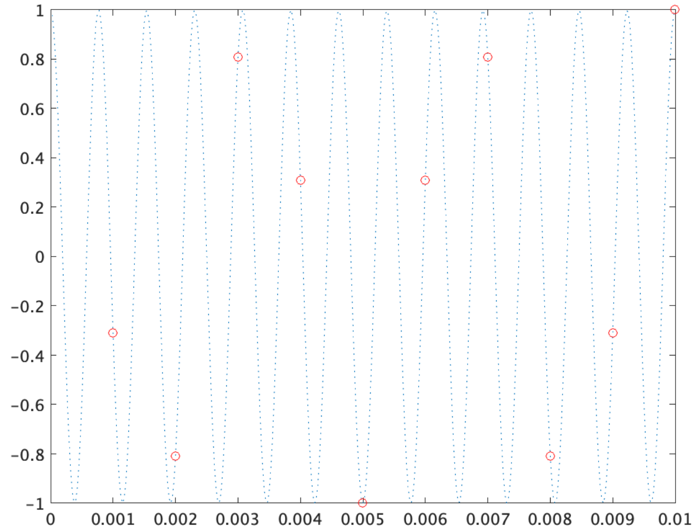
$\omega = 2.0\pi$



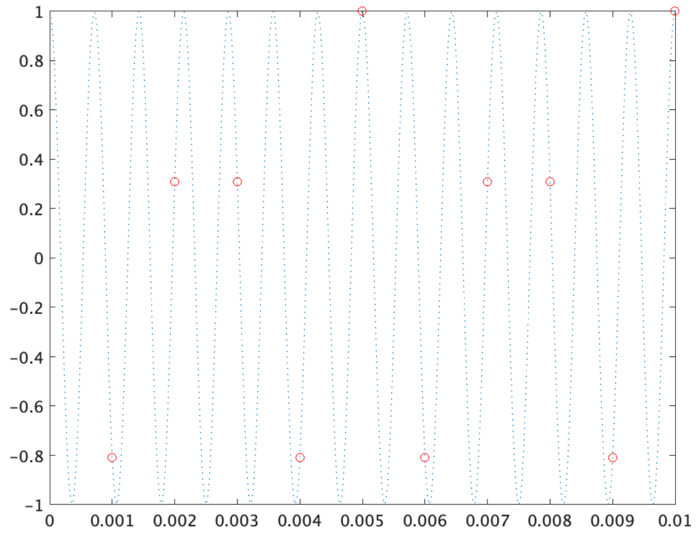
$\omega = 2.2\pi$



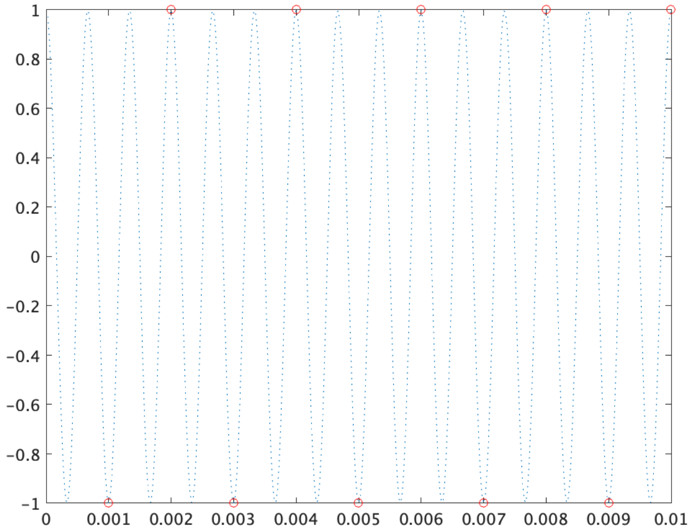
$\omega = 2.4\pi$



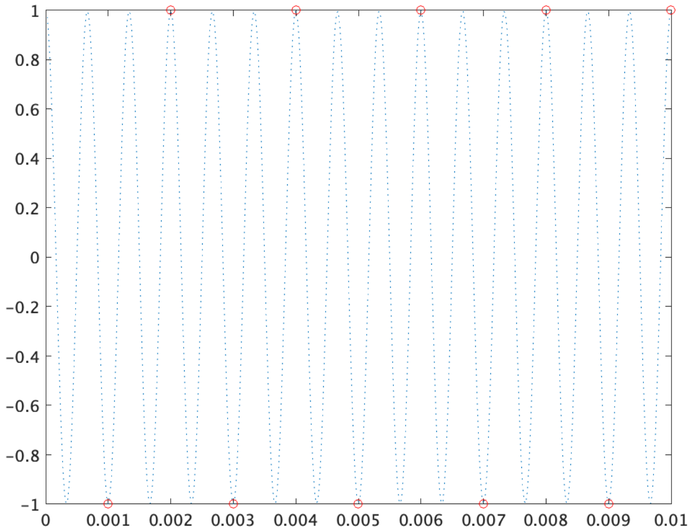
$\omega = 2.6\pi$



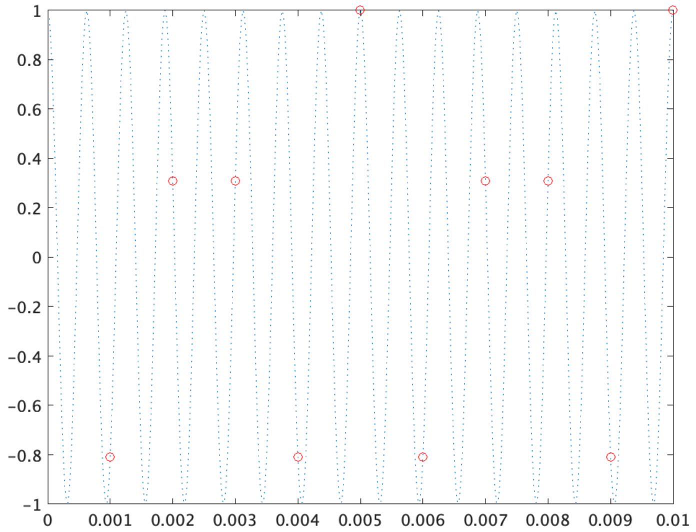
$\omega = 2.8\pi$



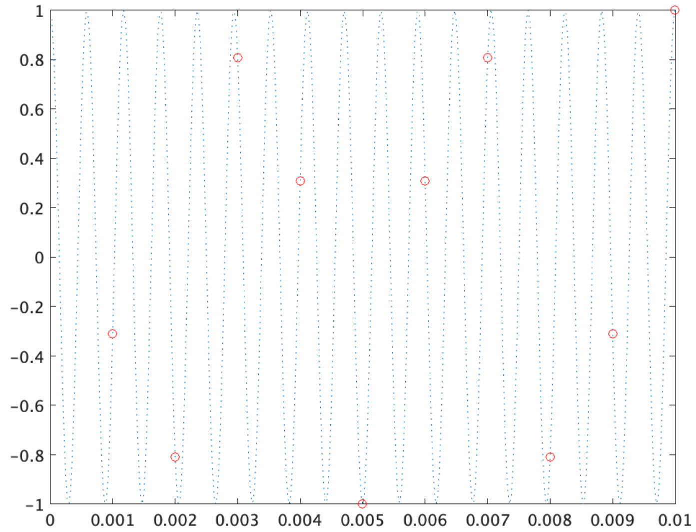
$\omega = 3.0\pi$



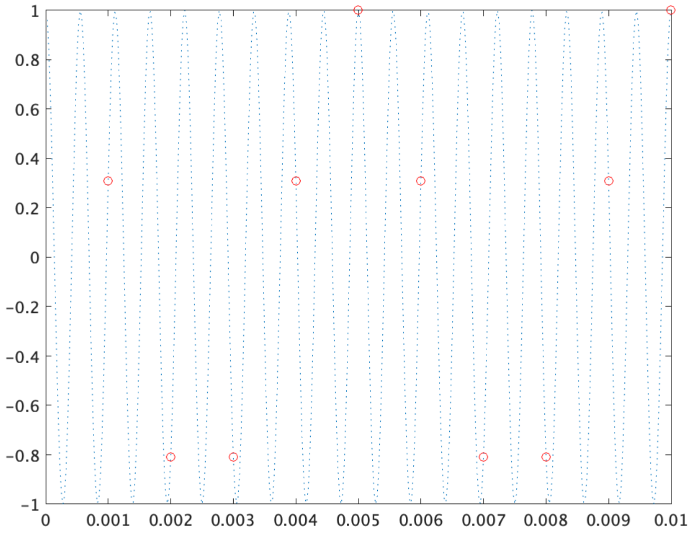
$\omega = 3.0\pi$



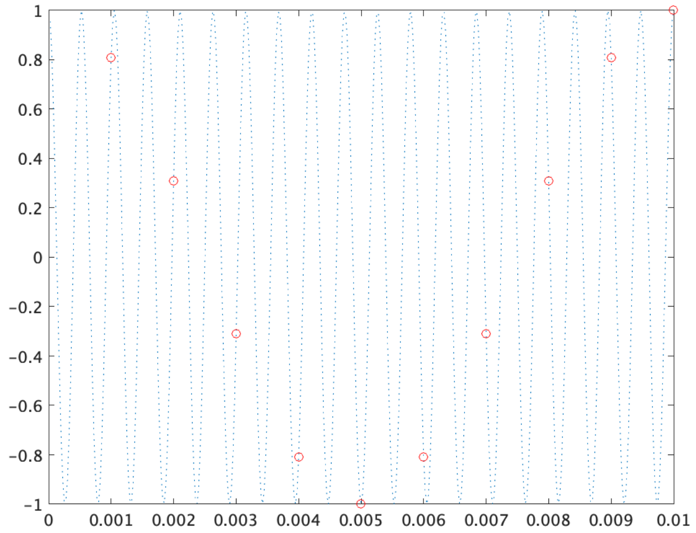
$\omega = 3.2\pi$



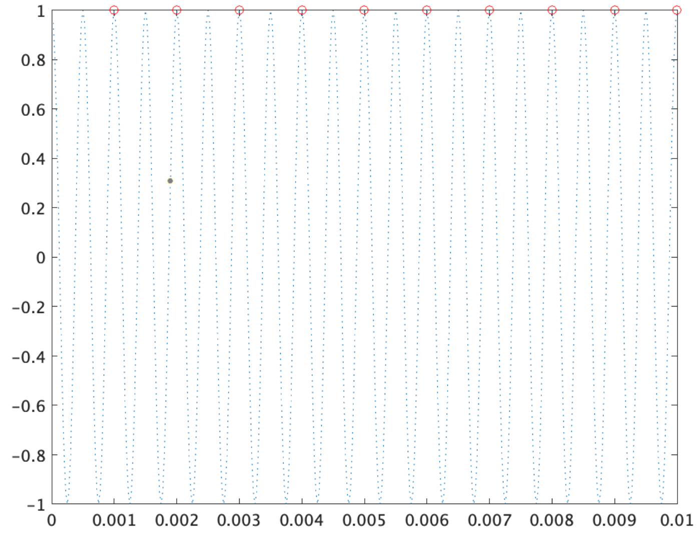
$\omega = 3.4\pi$



$\omega = 3.6\pi$



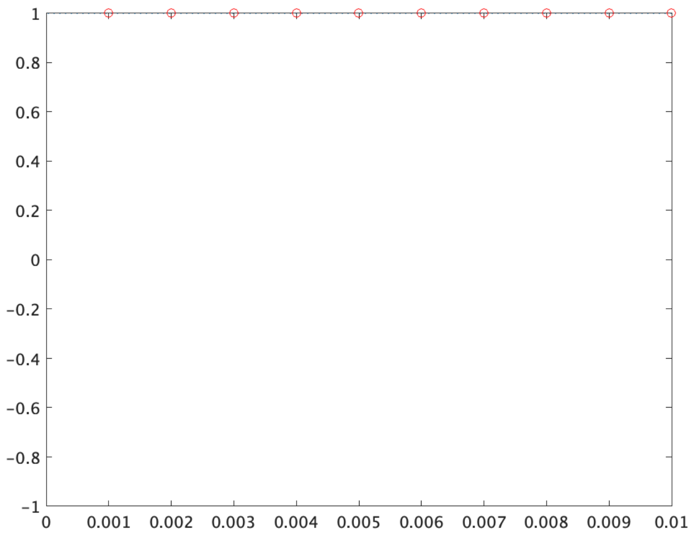
$\omega = 3.8\pi$



$\omega = 4.0\pi$

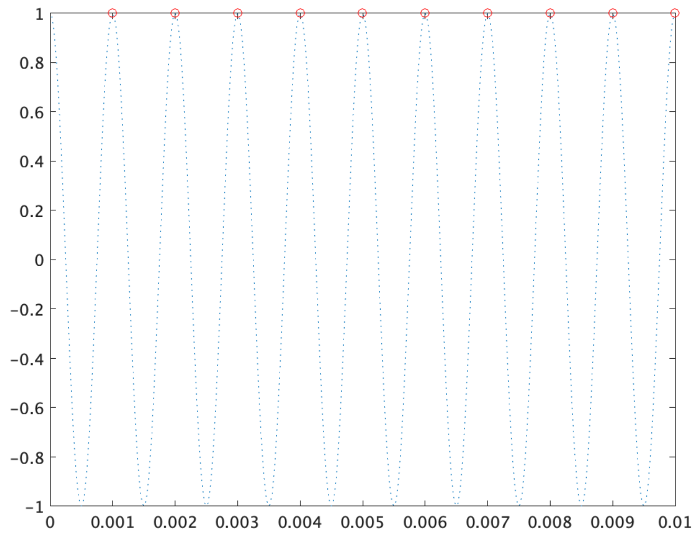
同じ例 1 (2πで同じ 赤い点だけではどちらかわからない)

$\omega = 2\pi f$



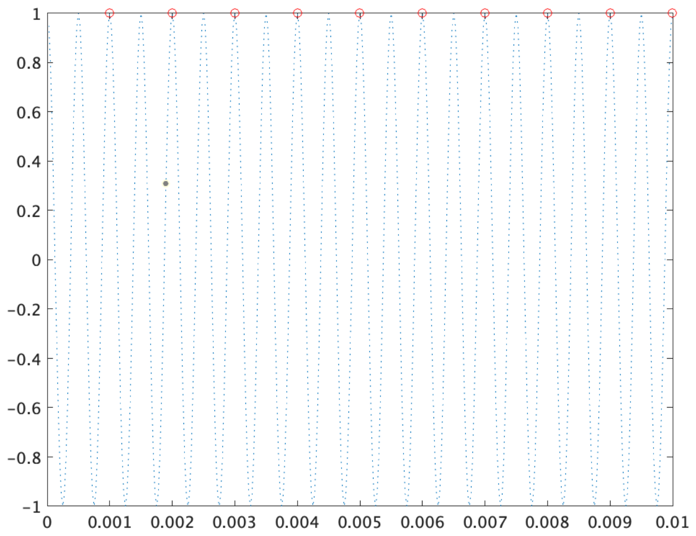
$\omega = 0.0\pi$

$f = 0$



$\omega = 2.0\pi$

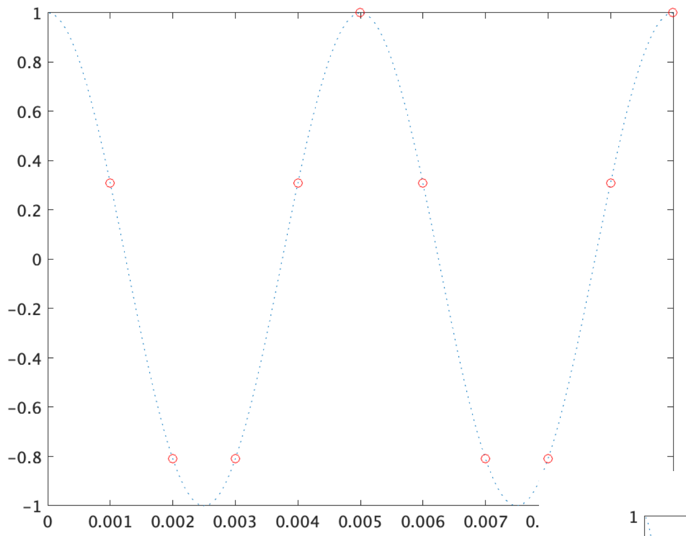
$f = 1$



$\omega = 4.0\pi$

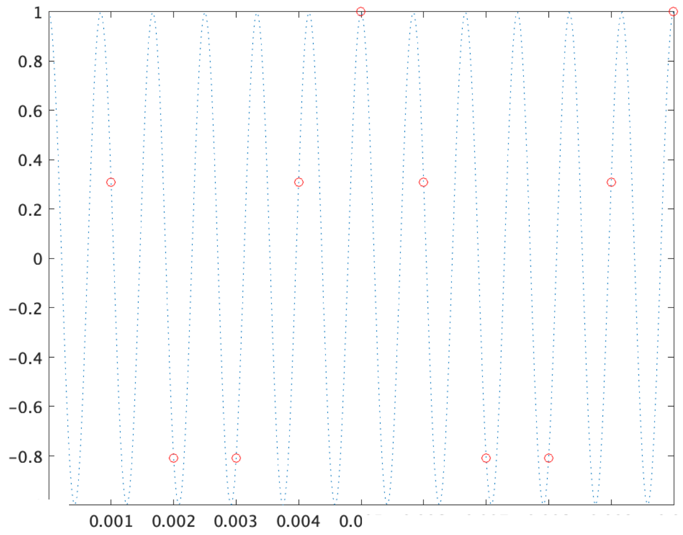
$f = 2$

同じ例 2 （2πで同じ 赤い点だけではどちらかわからない） $\omega = 2\pi f$



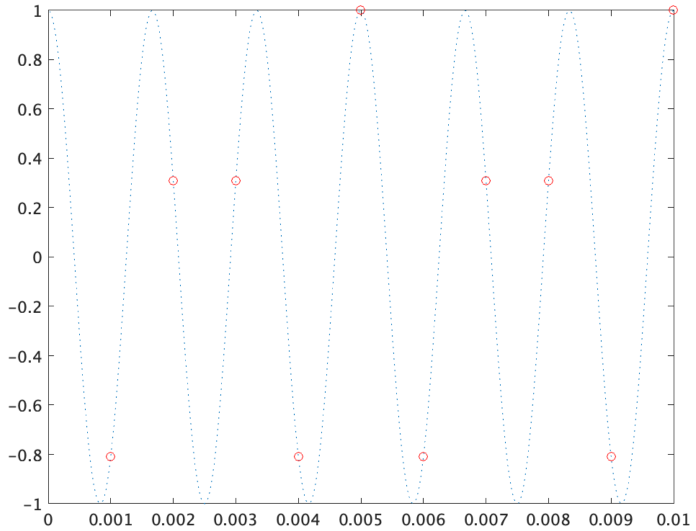
$\omega = 0.4\pi$

$f = 0.2$

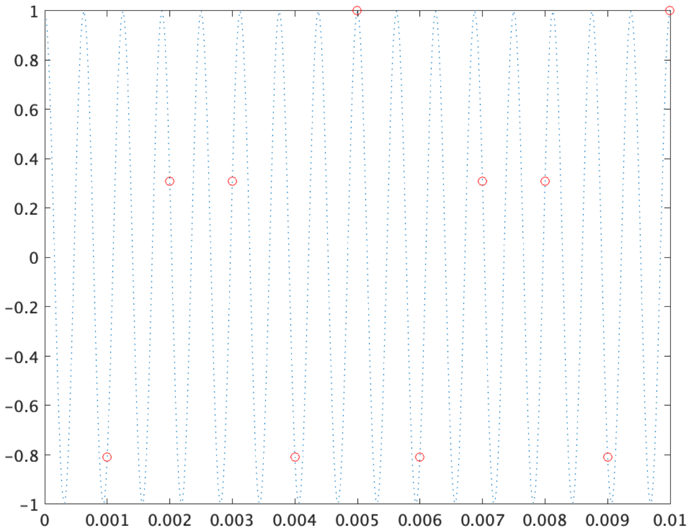


$\omega = 2.4\pi$

$f = 1.2$



$\omega = 1.2\pi \quad f = 0.6$



$\omega = 3.2\pi \quad f = 1.6$

まとめ

- デルタ関数のフーリエ変換
  - デルタ関数
  - フーリエ変換
  - フーリエ逆変換
  - コサインのフーリエ変換

- 離散時間フーリエ変換
  - 離散時間フーリエ変換
  - 離散時間の特性

演習・宿題

- 離散信号の周期性をMatlabを用いて確認しなさい
  - 「角周波数を2πふやすと元の関数にもどる」ことを確認
  - この資料のグラフでは，サンプリング周波数1000Hzで0Hzから2000Hzまで200Hzおきの図を掲載している
  - 破線のグラフは連続関数のように見えるが，サンプリング周波数20000Hzの値である（仮想的に連続という図）
  - 軸の範囲はxlim(最小値,最大値)やylim(最小値,最大値)で設定ができる
  - 音を再生すると，音の高さが戻ることや，オリジナルの高さとの違いを確認できる
- 【おまけ】授業で紹介した周期関数と自分で設定した周期関数の1周期の関数をフーリエ変換しなさい（手計算）
  - 余裕があれば逆変換で戻ることを確認してみよう
  - 積分計算がしきれないものもありますのでうまく設定しましょう

宿題の提出

- 提出物
  - レポート形式 + mファイル

- 提出方法と締切
  - LETUS
  - 11/6 23:59