幾何学課題　6321120　横溝尚也　No.1

1. AG(2,3)を用いたPG(2,3)の構成

AG(2,3)の点集合$\mathcal{P}$, 直線集合$\mathcal{L}$は以下。

$\mathcal{P} = \{(0,0),(0,1),(0,2),$
$(1,0),(1,1),(1,2)$
$(2,0),(2,1),(2,2)\}$.

$\mathcal{L} = \{$
$\{(0,0),(0,1),(0,2)\}$; $x=0$
$\{(1,0),(1,1),(1,2)\}$; $x=1$
$\{(2,0),(2,1),(2,2)\}$; $x=2$
$\{(0,0),(1,0),(2,0)\}$; $y=0$
$\{(0,1),(1,1),(2,1)\}$; $y=1$
$\{(0,2),(1,2),(2,2)\}$; $y=2$
$\{(0,0),(1,2),(2,1)\}$; $x+y=0$
$\{(0,1),(1,0),(2,2)\}$; $x+y=1$
$\{(0,2),(2,0),(1,1)\}$; $x+y=2$
$\{(0,0),(1,1),(2,2)\}$; $2x+y=0$
$\{(0,1),(1,2),(2,0)\}$; $2x+y=1$
$\{(0,2),(2,1),(1,0)\}$; $2x+y=2$ $\}$

ここで、有限体 $F_{3^2} = \{0,1,\alpha,\cdots,\alpha^7\}$,
αの最小多項式 x^2+2x+2 (∵ αは原始元)
とすると

∞	0	$(0,0)$
0	1	$(1,0)$
1	α	$(0,1)$
2	$\alpha^2=\alpha+1$	$(1,1)$
3	$\alpha^3=2\alpha+1$	$(1,2)$
4	$\alpha^4=2$	$(2,0)$
5	$\alpha^5=2\alpha$	$(0,2)$
6	$\alpha^6=2\alpha+2$	$(2,2)$
7	$\alpha^7=\alpha+2$	$(2,1)$

と表せる。

よって直線集合 $\{x=0,\ x=1,\ x=2\}$
$\{y=0,\ y=1,\ y=2\}$
$\{x+y=0,\ x+y=1,\ x+y=2\}$
$\{2x+y=0,\ 2x+y=1,\ 2x+y=2\}$

は平行類であり それぞれの無限遠点
（各平行類の直線が1点で交わる点）

を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ とする。

このとき PG(2,3) の
点集合 $\mathcal{P}^*$, $\mathcal{L}^*$ は以下。

$\mathcal{P}^* = \{\infty, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$

$\mathcal{L}^* = \{$
$\{\infty, 1, 5, \varepsilon_1\}$; $x=0$
$\{0, 2, 3, \varepsilon_1\}$; $x=1$
$\{4, 6, 7, \varepsilon_1\}$; $x=2$
$\{\infty, 0, 4, \varepsilon_2\}$; $y=0$
$\{1, 2, 7, \varepsilon_2\}$; $y=1$
$\{3, 5, 6, \varepsilon_2\}$; $y=2$
$\{\infty, 3, 7, \varepsilon_3\}$; $x+y=0$
$\{0, 1, 6, \varepsilon_3\}$; $x+y=1$
$\{2, 4, 5, \varepsilon_3\}$; $x+y=2$
$\{\infty, 2, 4, \varepsilon_4\}$; $2x+y=0$
$\{1, 3, 4, \varepsilon_4\}$; $2x+y=1$
$\{0, 5, 7, \varepsilon_4\}$; $2x+y=2$,
$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ $\}$

これは 各直線が4点通り
各点が4直線に属し
$|\mathcal{P}^*| = 13$, $|\mathcal{L}^*| = 13$ に一致。

↓

↓

2. $GF(3^3)$ を用いた $PG(2,3)$ の構成

有限体 $\mathbb{F}_{3^3}$ の原始元を α,

α の最小多項式を x^3+2x^2+x+1 とする。

このとき $\alpha^3+2\alpha^2+\alpha+1=0$

$\Leftrightarrow \alpha^3=\alpha^2+2\alpha+2$

$PG(2,3)$ は位数3の有限射影平面より

$3^2+3+1=13$ コの点を持つため

α^{12} までを指数表現，ベクトル表現する。

∞	0	(0,0,0)
0	1	(1,0,0)
1	α	(0,1,0)
2	α^2	(0,0,1)
3	$\alpha^3=2+2\alpha+\alpha^2$	(2,2,1)
4	$\alpha^4=2+\alpha$	(2,1,0)
5	$\alpha^5=2\alpha+\alpha^2$	(0,2,1)
6	$\alpha^6=2+2\alpha$	(2,2,0)
7	$\alpha^7=2\alpha+2\alpha^2$	(0,2,2)
8	$\alpha^8=1+\alpha+\alpha^2$	(1,1,1)
9	$\alpha^9=2+2\alpha^2$	(2,0,2)
10	$\alpha^{10}=1+2\alpha^2$	(1,0,2)
11	$\alpha^{11}=1+2\alpha+2\alpha^2$	(1,2,2)
12	$\alpha^{12}=1+2\alpha+\alpha^2$	(1,2,1)

このとき $P=\{0,1,2,\dots,12\}$ であり

直線集合（点集合） $\mathcal{L}$ は $\{y\}\cup\{x+\lambda y;\ \lambda\in\mathbb{F}_3,\ x,y\in P\}$

で表せるので直線は右の13本となる。

（記述はある程度省略）

○点0と1 ⇒ 0, 1, 4, 6

○点0と2 ⇒ 0, 2, 9, 10

○点0と3 ⇒ 0, 3, 5, 12

○点0と7 ⇒ 0, 7, 8, 11

↑点0は4直線にしか含まれていないはずなので0終了

○点1と2 ⇒ 1, 2, 5, 7

○点1と3 ⇒ 1, 3, 10, 11

○点1と8 ⇒ 0, 8, 9, 12

↑1と結んだ直線は0から7までは完了のため8。

○点2と3 ⇒ 2, 3, 6, 8

○点2と4 ⇒ 2, 4, 11, 12

○点3と4 ⇒ 3, 4, 7, 9

○点4と5 ⇒ 4, 5, 8, 10

○点5と6 ⇒ 5, 6, 9, 11

○点6と7 ⇒ 6, 7, 10, 12

$\therefore P=\{0,1,2,\dots,12\}$

$\mathcal{L}=\{\{0,1,4,6\},\{0,2,9,10\},\{0,3,5,12\},\{0,7,8,11\},\{1,2,5,7\},\{1,3,10,11\},\{0,8,9,12\},\{2,3,6,8\},\{2,4,11,12\},\{3,4,7,9\},\{4,5,8,10\},\{5,6,9,11\},\{6,7,10,12\}\}$ //