要点

基本信号处理、连续时间系统的时域分析、傅里叶变换、拉普拉斯变换

基本信号处理

1.信号的运算

> 移位、反皱、积分、微分、四则运算

2.阶跃信号

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

3.冲激信号

$$\begin{cases}\delta(t)=0 & t\neq 0\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t) & dt=1\end{cases}$$

抽样性质：

$$\delta(t-t_0)f(t)=\delta(t-t_0)f(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)=f(t_0)$$

求导一次即为冲激偶函数$\delta'(t)$,其抽样性质改变为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t-t_0)f(t)=-f'(t_0)$$

4.线性时不变系统

（1）叠加性与均匀性

$$C_1e_1(t)+C_2e_2(t)->C_1r_1(t)+C_2r_2(t)$$

（2）时不变特性

$$Ce(t-t_0)->Cr(t-t_0)$$

（3）微分特性

$$\frac{de(t)}{dt}->\frac{dr(t)}{dt}$$

（4）因果性：系统在t_0时刻的响应只与$t=0$和$t<t_0$时刻的输入有关。

连续时间系统的时域分析

1.用时域经典法求解微分方程

（1）求齐次解$r_h(t)$

将微分方程化为特征方程，求特征根，再代入齐次解

例：

$$\frac{d^3}{dt^3}r(t)+7\frac{d^2}{dt^2}r(t)+16\frac{d}{dr}r(t)+12r(t)=e(t)$$

解：

系统的特征方程为

$$\alpha^3+7\alpha^2+16\alpha+12=0$$

解得

$$\alpha_1=-2,\alpha_2=-3$$

因而系统对应的齐次解为

$$r_h(t)=(A_1t+A_2)e^{-2t}+A_3e^{-3t}$$

(2) 求特解$r_p(t)$

激励函数$e(t)$	响应函数$r(t)$的特解
E	B
t^p	$B_1t^p+B_2t^{p-1}+\ldots+B_pt+B_{p+1}$
e^{at}	Be^{qt}
$\cos(\omega t)$ 或 $\sin(\omega t)$	$B_1\cos(\omega t)+B_2\sin(\omega t)$

当特解与齐次解重复时，乘上t。

(3) 借助初始条件求待定系数A

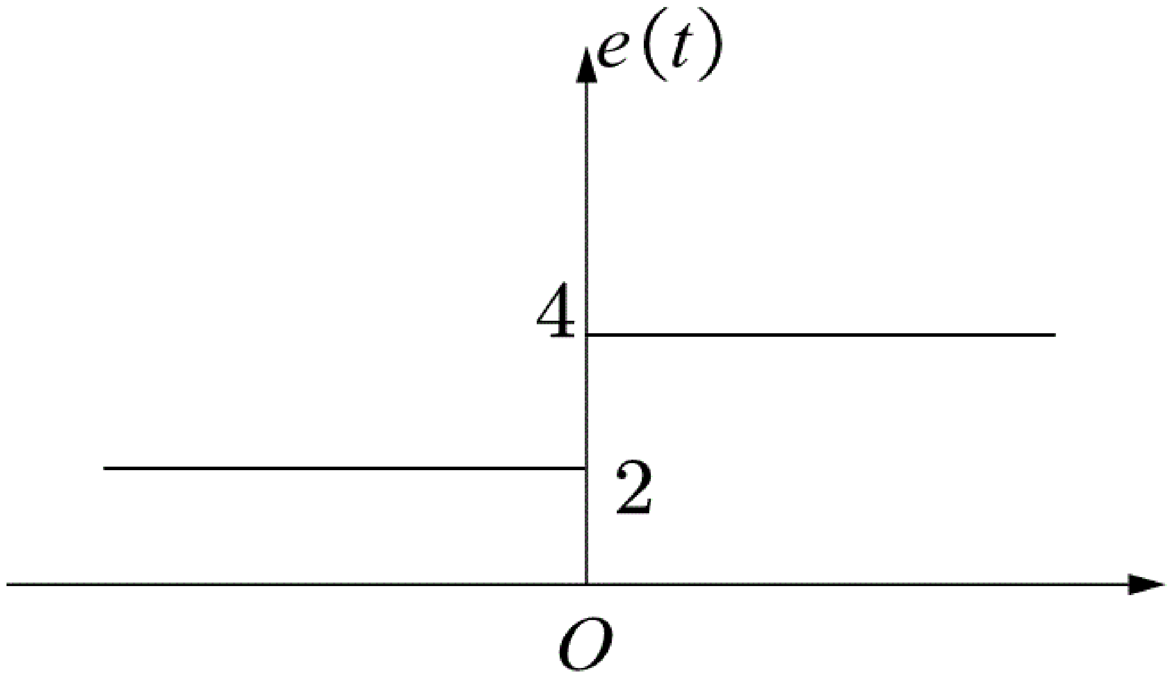
2. 起始点的跳变

当系统用微分方程表示时，系统从 0_- 到 0_+ 的状态有没有跳变取决于激励 $e(t)$ 代入微分方程后，右端函数式是否包含 $\delta(t)$ 及其各阶导数项。

例题：
描述 LTIS 的微分方程为：

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+7\frac{d}{dt}r(t)+10r(t)=\frac{d^2}{dt^2}e(t)+6\frac{d}{dt}e(t)+4e(t)$$

输入 $e(t)$ 如图：



已知初始条件:

$$r(0_-) = \frac{4}{5}, \quad \frac{dr(0_-)}{dt} = 0$$

使用**冲激函数匹配法**求:

- $r(0_+)$
- $\frac{dr(0_+)}{dt}$

解:

将 $e(t)$ 代入微分方程

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t) + 7\frac{d}{dt}r(t) + 10r(t) = 2\delta'(t) + 12\delta(t) + 8\Delta u(t) \qquad (0_- < t < 0_+)$$

方程右端的冲激函数项最高阶次是 $\delta'(t)$ 因而有

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}r(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + c\Delta u(t) \\ \frac{d}{dt}r(t) = a\delta(t) + b\Delta u(t) \\ r(t) = a\Delta u(t) \end{cases}$$

代入微分方程，得

$$[a\delta'(t) + b\delta(t) + c\Delta u(t)] + 7[a\delta(t) + b\Delta u(t)] + 10[a\Delta u(t)] = 2\delta'(t) + 12\delta(t) + 8\Delta u(t) \qquad (0_- < t < 0_+)$$

化简得

$$a\delta'(t) + (b+7a)\delta(t) + (c+7b+10)\Delta u(t) = 2\delta'(t) + 12\delta(t) + 8\Delta u(t) \qquad (0_- < t < 0_+)$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b + 7a = 12 \\ c + 7b + 10a = 8 \end{cases}$$

因而有

$$\begin{cases} r(0_+) - r(0_-) = a = 2 \\ \frac{d}{dt}r(0_+) - \frac{d}{dt}r(0_-) = b = -2 \\ \frac{d^2}{dt^2}r(0_+) - \frac{d^2}{dt^2}r(0_-) = c = 2 \end{cases}$$

3.零输入响应与零状态响应

零输入响应：没有外加激励信号的作用，只由起始状态所产生的响应。以$r_{zi}(t)$表示。

零状态响应：不考虑起始时刻系统储能的作用，由外加激励信号所产生的响应。以$r_{zs}(t)$表示。

自由响应：固有响应，有系统本身特性决定，于外加激励形式无关。对应于齐次解。

强迫响应：形式取决于外加激励。对应于特解。

完全响应：完全响应 $r(t)$ =零输入响应 $r_{zi}(t)$ + 零状态响应 $r_{zs}(t)$=自由响应+强迫响应

- 零输入响应是激励信号为0时，由系统初始状态引起的完全响应。
- 零状态响应是系统无初始储能时，由外加激励信号引起的完全响应。
- 自由响应是微分方程的齐次解，由系统本身的特性决定，与外加激励无关。
- 强迫响应是微分方程的特解，由外加激励信号决定。
- 在LIT系统中，零输入响应与零状态响应分别具有线性与时移特性，当激励按比例变化时，零状态响应等比例变化，起始状态与零输入响应同理。时移也同理

例题：

已知一线性时不变系统，在相同起始状态下，当激励为 $e(t)$ 时，其完全响应为 $r_1(t)=[2e^{-3t}+\sin(2t)]u(t)$ ；当激励为 $2e(t)$ 时，其全响应为 $r_2(t)=[e^{-3t}+2\sin(2t)]u(t)$ ，求

- 起始状态不变，当激励变为 $e(t-t_0)$ 时的全响应 $r_3(t)$ ，t_0 为大于0的实常数
- 起始状态增大1倍，当激励为 $0.5e(t)$ 时的全响应 $r_4(t)$

解：

在相同起始状态下，激励按比例变化，则零状态响应等比例变化，设零输入响应和零状态响应分别为 $r_{zi}(t)$ 和 $r_{zs}(t)$，则其满足

$$\begin{cases} r_{zi}(t)+r_{zs}(t) & =[2e^{-3t}+\sin(2t)]u(t) \\ r_{zi}(t)+2r_{zs}(t) & =[e^{-3t}+2\sin(2t)]u(t) \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} r_{zi}(t)=3e^{-3t}u(t) \\ r_{zi}(t)=[-e^{-3t}+\sin(2t)]u(t) \end{cases}$$

(1) 激励时移，则零状态响应等值时移，全响应为

$$r_3(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t-t_0)=3e^{-3t}u(t)+[-e^{-3(t-t_0)}-\sin(2(t-t_0))]u(t-t_0)$$

(2) 起始状态增大1倍，则零输入响应增大一倍，激励减小一半，则零状态响应减小一半，全响应为

$$r_3(t)=2r_{zi}(t)+0.5r_{zs}(t)=[5.5e^{-3t}+0.5\sin(2t)]u(t)$$

4.冲激响应与阶跃响应

冲激响应：系统在单位冲激信号 $\delta(t)$ 作用下产生的零状态响应，称为单位冲激响应，简称冲激响应，一般用 $h(t)$ 表示。

例题：若描述系统的微分方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+4\frac{d}{dt}r(t)+3r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+2e(t)$$

求其冲激响应 $h(t)$

解：

特征方程为

$$\alpha^2+4\alpha+3=0$$
$$(\alpha+3)(\alpha+1)=0$$

解得：$\alpha_1=-3$、$\alpha_2=-1$

设 $h(t)=(A_1e^{-3t}+A_2e^{-1t})u(t)$

对 $h(t)$ 逐次求导可得

$$\frac{d}{dt}h(t)=(A_1+A_2)\delta(t)+(-3A_1e^{-3t}-A_2e^{-t})u(t)$$
$$\frac{d^2}{dt^2}h(t)=(A_1+A_2)\delta'(t)+(-3A_1-A_2)\delta(t)+(9A_1e^{-3t}+A_2e^{-t})u(t)$$

将 $r(t)=h(t)$、$e(t)=\delta(t)$ 代入给定的微分方程，可得

$$(A_1+A_2)\delta'(t)+(A_1+3A_2)\delta(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$$

解得

$$\begin{cases}A_1=\frac{1}{2}\\A_2=\frac{1}{2}\end{cases}$$

即

$$h(t)=\frac{1}{2}(e^{-3t}+e^{-1t})u(t)$$

阶跃响应：系统在单位阶跃信号 $u(t)$ 作用下的零状态响应，称为单位阶跃项，简称阶跃响应，一般用 $g(t)$ 表示。

阶跃响应是冲激响应的积分

$$g(t)=\int_{-0}^{t}h(\tau)\,d\tau$$

5.卷积

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

则称，$f(t)$ 是 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积。记为 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$.

由卷积公式和零状态响应性质可推导出

$$r_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(t)h(t-\tau)d\tau=e(t)*h(t)$$

卷积的代数性质及其对应公式如下：

交换律：

$$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$$

结合律：

$$[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$$

分配律

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$$

任意函数与冲激函数的卷积等于该函数本身

$$f(t)*\delta(t)=f(t)$$

时间平移性质

如果 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 卷积，其中 $f_2(t)$ 平移了 t_0，则结果也会平移

$$f_1(t)*f_2(t-t_0)=[f_1(t)*f_2(t)](t-t_0)$$

微分性质

$$\frac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)]=\frac{df_1(t)}{dt}*f_2(t)=f_1(t)*\frac{df_2(t)}{dt}$$

积分性质

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f_1(t)*f_2(t)]dt=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)dt\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t)dt$$

傅里叶变换

周期信号的傅里叶级数

1.三角函数形式的傅里叶级数

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega_1 t)+b_n\sin(n\omega_1 t)] \tag{1}$$

其中，直流分量为

$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)dt$$

余弦分量的幅度

$$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\cos(n\omega_1 t)dt$$

正弦分量的幅度

$$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\sin(n\omega_1 t)dt$$

> 只有当函数满足绝对可积时，其才存在傅里叶级数

式（1）可进行变换，得到

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[c_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n)]$$

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[d_n\sin(n\omega_1 t+\theta_n)]$$

$$\begin{cases} a_0 = c_0 d_0 \\ c_n = d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ a_n = c_n \sin(\varphi_n) = d_n \cos(\theta_n) \\ b_n = -c_n \sin(\varphi_n) = d_n \cos(\theta_n) \\ \tan\varphi_n = -\frac{b_n}{a_n} \\ \tan\theta_n = \frac{a_n}{b_n} \end{cases}$$

2.指数形式的傅里叶级数

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

$$F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

幅频特性

$$c_n = |F(n\omega_1)| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

相频特性

$$\varphi_n = \arctan(-\frac{b_n}{a_n})$$

傅里叶变换

傅里叶变换的实质是，令周期趋于无穷大，则响应的傅里叶级数由离散谱转为连续谱，最终得到频谱密度函数，即傅里叶变换的目标函数

$$F(\omega) = \lim_{T_1 \to \infty} T_1 F(n\omega_1)$$

由此，求和符号转为积分符号，可得出频谱密度函数的表达式为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$$

频谱密度函数一般为复信号，因此也可表示为

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

其中，$|F(\omega)|$ 表示幅度频谱，$\varphi(\omega)$ 表示相位频谱。

由 $f(t)$ 到 $F(\omega)$ 的过程，即称为傅里叶变换，相应的，可导出傅里叶逆变换为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega$$

典型信号的傅里叶变换

信号	傅里叶变换
$\mathrm{G}_\tau(t)$	$\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\delta(t)$	1
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{j\omega+a}$
$e^{-\alpha\|\|t\|\|}$	$\frac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2}$

信号 $f(t)$	傅里叶变换 $F(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\operatorname{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$

傅里叶变换的性质

1. **线性**

$$\mathcal{F}[af_1(t)+bf_2(t)]=aF_1(\omega)+bF_2(\omega)$$

2. **时移**

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)]=F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

3. **频移**

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}f(t)]=F(\omega-\omega_0)$$

4. **缩放**

$$\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

5. **卷积**

$$\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)F_2(\omega)$$

6. **时域微分**

$$\frac{d}{dt}f(t)\leftrightarrow j\omega F(\omega)$$

7. **时域积分**

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{j\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$$

8. **频域微分**

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=j\omega F(\omega)$$

9. **对称**

$$\mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega)$$

例题：

求 $\mathrm{Sa}(\omega_0 t)$ 的傅里叶变换

解：

已知

$$\mathrm{G}_\tau(t)\leftrightarrow\tau\,\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$

由对称性可知

$$\mathrm{Sa}(\frac{t\tau}{2}) \leftrightarrow \frac{2\pi}{\tau}\mathrm{G}_\tau(-\omega)$$

则令 $\tau = 2\omega_0$，再代入偶函数性质，则可得

$$\mathrm{Sa}(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_0}\mathrm{G}_{2\omega_0}(\omega)$$

周期信号的傅里叶变换

前文提到过，非周期信号没有傅里叶级数，但若视周期T为无穷，则非周期信号也可视为周期信号，则其有对应的傅里叶级数，也即频谱密度函数，是连续谱，因为其包含各个频率的分量。

基于这点，周期信号显然不可能包含各个频率的分量，因此无论其傅里叶级数还是傅里叶变换，都属于离散谱，只有在对应的频率分量上有非零值。

在此给出周期信号的傅里叶变换

$$F[\omega] = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega - n\omega_1) \tag{2}$$

其中，F_n 为傅里叶级数的系数，其满足

$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{\frac{T_1}{2}}^{\frac{-T_1}{2}} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

比较有限域的傅里叶变换公式不难发现, F_n 也可写为

$$F_n = \frac{1}{T_1}F_0(\omega)|_{\omega=n\omega1} \tag{3}$$

据此可以得到一种很方便的求周期信号的傅里叶变换的方法

- **Step1**：截取周期信号的一小部分（包含一次完整的周期）使用傅里叶变换的性质求得 $F_0(\omega)$
- **Step2**：代入式（3），求得 F_n
- **Step3**：代入式（2），求得 $F(\omega)$

抽样信号的傅里叶变换

时域抽样

当使用抽样脉冲序列对连续信号进行周期性抽样后，即变为抽样信号，接下来探讨抽样信号的傅里叶变换。

- 连续信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$
- 抽样脉冲序列 $f_p(t)$ 的傅里叶变换为 $F_p(\omega)$
- 抽样信号 $f_s(t)$ 的傅里叶变换为 $F_s(\omega)$

则有

$$f_s(t) = f(t)f_p(t)$$

$$F_p(\omega) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\delta(\omega - n\omega_p)$$

根据频域卷积定理有

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi}F(\omega) * F_p(\omega)$$

即

$$F_s(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_nF(\omega-n\omega_s)$$

频域抽样

频域抽样是指对连续信号的傅里叶变换进行周期性抽样，得到离散谱。

这里省略证明过程，给出抽样后的时域信号为

$$f_s(t)=\frac{1}{\omega_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t-nT_1)$$

抽样定理：如果一个信号的最高频率为 ω_m ，则该信号可以通过抽样频率至少为 $2\omega_m$ 的抽样脉冲序列完全重建。换句话说，信号的采样频率必须至少是其最高频率的两倍，以确保采样后的信号能够无失真地还原原始信号。这一最低采样频率被称为奈奎斯特频率。

拉普拉斯变换

拉普拉斯讨论的系统一般均为因果系统，因此在本节积分下限都为0

拉普拉斯正变换

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

拉普拉斯逆变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty}F(s)e^{st}\mathrm{d}s$$

> 拉普拉斯变换的实质是对傅里叶变换的一种扩展，其使用 $s=\sigma+j\omega$ 代替傅里叶变换的 $j\omega$，使得更容易满足狄里赫利条件，增加了积分变换的泛用性。

尽管拉氏变换更容易满足狄里赫利条件，对于一部分特殊信号，其仍可能无法满足，在此给出拉氏变换的收敛域定义

$$\begin{aligned}F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{\ln f(t)}e^{-st}\mathrm{d}t\\=\int_0^{+\infty}e^{\ln f(t)-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{[(\ln f(t)-\sigma)-j\omega]t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

若存在最小的 $\sigma_0\geq 0$ 使得对任意 $t\geq 0$，都有

$$\ln f(t)-\sigma_0\leq 0$$

收敛，则称拉普拉斯变换在 (σ_0,∞) 内收敛

常用拉氏变换对

信号	拉氏变换
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$\delta(t)$	1
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
t	$\frac{1}{s^2}$

信号 $f(t)$	拉氏变换 $F(s)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

拉氏变换的性质

1. **线性性质**

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)]=aF(s)+bG(s)$$

2. **微分性质**

$$\mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)$$

3. **积分性质**

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{s}F(s)$$

4. **时移性质**

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)]=e^{-st_0}F(s)$$

5. **频移性质**

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)$$

6. **尺度变换**

$$\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

7. **初值**

$$\lim_{t\to 0_+}f(t)=f(0_+)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$$

8. **终值**

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$$

9. **卷积定理**

$$\mathcal{L}[f(t)*g(t)]=F(s)G(s)$$
$$\mathcal{L}[f(t)g(t)]=\frac{1}{2\pi j}F(s)*G(s)$$

例题：已知 $f(t)=tu(t-1)$，求其拉普拉斯变换

解：

$$f(t)=tu(t-1)=(t-1)u(t-1)+u(t-1)$$

则

$$F(s)=\mathcal{L}[(t-1)u(t-1)]+\mathcal{L}[u(t-1)]$$

由时移性质可得

$$
\begin{aligned}
F(s) &= e^{-s}\mathcal{L}[t] + e^{-s}\mathcal{L}[1] \\
&= e^{-s}\frac{1}{s^2} + e^{-s}\frac{1}{s} \\
&= e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)
\end{aligned}
$$

拉普拉斯逆变换

在此仅介绍部分分式分解的拉普拉斯逆变换方法，直接以例题进行介绍。

例题1：已知

$$F(s) = \frac{2s+3}{s^2+4s+5}$$

求其拉普拉斯逆变换

解：

容易观察到分母有一实根 $s_1 = 1$，则分离分母 $s-1$，可得

$$F(s) = \frac{2s+3}{(s-1)(s+5)} = \frac{K_1}{s-1} + \frac{K_2}{s+5}$$

接下来依次求解 K_1 和 K_2。

将 $F(s)$ 乘以 $s-1$，并令 $s=1$，可得

$$K_1 = \frac{2+3}{(1+5)} = \frac{5}{6}$$

将 $F(s)$ 乘以 $s+5$，并令 $s=-5$，可得

$$K_2 = \frac{2(-5)+3}{(-5-1)} = \frac{-7}{-6} = \frac{7}{6}$$

因此

$$F(s) = \frac{5/6}{s-1} + \frac{7/6}{s+5}$$

直接使用常用拉氏变换对和频移性质可得

$$f(t) = (\frac{5}{6}e^{t} + \frac{7}{6}e^{-5t})u(t)$$

若 $F(s)$ 不为纯有理分式结构，则可仅讨论有理分式，后续采用拉氏变换性质进行求解

例题2：已知

$$F(s) = F(s) = \frac{(2s+3)e^{-5s}}{s^2+4s+5}$$

求其拉普拉斯逆变换

解：

令 $F(s) = G(s)e^{-5s}$

则有

$$G(s)=\frac{2s+3}{s^2+4s+5}$$

与前文例题1相同，直接得

$$g(t)=(\frac{5}{6}e^{t}+\frac{7}{6}e^{-5t})u(t)$$

又由时移性质可得

$$f(t)=g(t-5)u(t-5)$$

因此

$$f(t)=(\frac{5}{6}e^{t-5}+\frac{7}{6}e^{-5(t-5)})u(t-5)$$

若有理分式的分母存在共轭复根，则可直接采用三角函数形式的拉普拉斯逆变换（实际上也可以采用部分分式分解的方法），下面介绍一种采用三角函数形式的拉普拉斯逆变换方法。

例题3：已知

$$F(s)=\frac{s^2+3}{s^2+2s+5}$$

求其拉普拉斯逆变换

解：

将原函数变形，即

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{s^2+2s+5-(2s+2)}{(s^2+2s+5)}=1-\frac{2s+2}{s^2+2s+5}\\&=1-\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+4}=1-2\frac{s+1}{(s+1)^2+(2^2)}\end{aligned}$$

直接使用余弦函数的拉普拉斯逆变换和频移性质可得

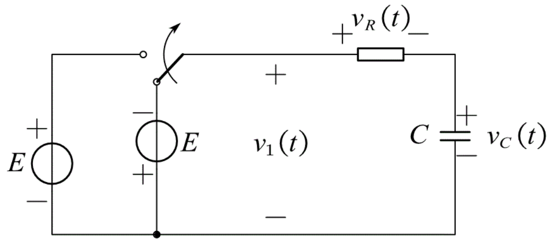
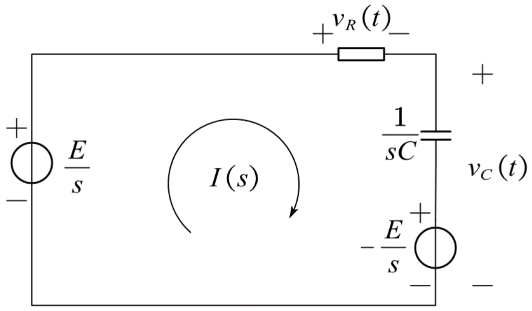
$$f(t)=\delta(t)-2e^{-t}\cos(2t)u(t)$$

---

s域元件模型

元件	阻抗	等效电压源
电阻 R	R	0
电感 L	sL	$-Li_L(0)$
电容 C	$\frac{1}{sC}$	$\frac{1}{s}v_C(0)$

例题：求解下图所示电路中的 $v_C(t)$

例题所示电路	等效电路
	

解：

根据s域元件模型，可画出电路的s域等效电路，注意电容初始状态有 $-E$ 的电压

等效电路如上图

可以写出

$$\left(R+\frac{1}{sC}\right)I(s)=\frac{E}{s}+\frac{E}{s}$$

解得

$$I(s)=\frac{2E}{s(R+\frac{1}{sC})}$$

则

$$\begin{aligned}V_C(s)&=\frac{1}{sC}I(s)-\frac{E}{s}\\&=\frac{2E}{s(sCR+1)}-\frac{E}{s}\\&=\frac{E\left(\frac{1}{RC}-s\right)}{s\left(\frac{1}{RC}+s\right)}\\&=E\left(\frac{1}{s}-\frac{2}{s+\frac{1}{RC}}\right)\end{aligned}$$

由拉普拉斯逆变换可得

$$v_C(t)=E\left(1-2e^{-\frac{t}{RC}}\right)u(t)$$

- 系统函数的求解也可直接由s域元件模型进行求解，而系统的冲激响应即为系统函数的拉普拉斯逆变换。