随机事件与概率

- 常用公式
  - 加法

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

  - 减法

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

- 条件概率

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

- 全概率公式
  若 $\sum_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$$

- 贝叶斯公式
  若 $\sum_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，则

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)}$$

  简化为

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

- 独立事件
  若 A 和 B 独立，则

$$P(AB)=P(A)P(B)$$
$$P(A|B)=P(A)$$
$$P(B|A)=P(B)$$

> 此时 $\overline{A},B$ 、 $\overline{B},A$ 和 $\overline{B},\overline{A}$ 也相互独立

古典概型略

一维随机变量及其分布函数

离散型随机变量及其分布

- 两点分布

$$P(X=0)=1-p,\quad P(X=1)=p$$

- 二项分布 $B(n,p)$

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\ldots,n$$

- 松柏分布 $P(\lambda)$

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\ldots$$

- 超几何分布 $H(n,m,N)$

$$P(X=k)=\frac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n},\quad k=0,1,\ldots,n$$

- 松柏定理

  当 $n\to\infty$ 时，令 $\lambda=np$，则二项分布 $B(n,p)$ 近似于泊松分布 $P(\lambda)$。

$$\lim_{n\to\infty}B(n,p)=P(np)$$

离散型随机变量的分布函数为

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{k\le x}P(X=k)$$

可以得到

$$P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$$

连续型随机变量及其分布

若存在非负可积函数 $f(x)$，使得随机变量 X 取值于任意区间 $[a,b]$ 上的概率为

$$P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)dx$$

则称 $f(x)$ 为随机变量 X 的概率密度函数，简称密度函数。

规范性条件：

1. $f(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$

- 均匀分布 $U(a,b)$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

- 指数分布 $E(\lambda)$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

- 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

  标准正态分布 $N(0,1)$ 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

连续型随机变量的分布函数为

$$F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$$

同样有

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)$$

> 由于连续性随机变量单点概率为0的特点，因此这里的比较符号可任意使用 $\leq$ 或 $<$。

二维随机变量及其分布函数

二维随机变量的分布函数通常又称为**联合分布函数**或**联合密度函数**

$$F(x,y)=P(X\leq x,Y\leq y)$$

- 联合分布函数的性质
  1. $F(x,y)$ 是非递减函数
  2. $\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0,\forall y$
  3. $\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0,\forall x$
  4. $\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=P(Y\leq y),\forall y$
  5. $\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=P(X\leq x),\forall x$
  6. $\lim_{x\to+\infty,y\to+\infty}F(x,y)=1$
  7. 对于四个实数 $a\leq b,c\leq d$，有

$$F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c)=P(a\leq X\leq b,c\leq Y\leq d)\geq 0$$

边缘分布函数

对于二维随机变量 (X,Y)，其边缘分布函数为

$$F_X(x)=P(X\leq x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$$
$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)$$

条件分布函数

对于二维随机变量 (X,Y)，其条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$
$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

其条件分布函数为

$$F_{Y|X}(y|x)=\frac{F(x,y)}{F_X(x)}$$
$$F_{X|Y}(x|y)=\frac{F(x,y)}{F_Y(y)}$$

二维离散型随机变量

- 对于二维离散型随机变量 (X,Y)，其分布律为

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i\cap Y=y_j)=p_{ij}$$

- 其联合分布函数为

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}$$

- 其边缘分布律为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\sum_{y_j}p_{X,Y}(x,y_j)$$
$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\sum_{x_i}p_{X,Y}(x_i,y)$$

则有

$$P(X=x_i)=p_X(x_i)=\sum_{y_j}p_{X,Y}(x_i,y_j)$$
$$P(Y=y_j)=p_Y(y_j)=\sum_{x_i}p_{X,Y}(x_i,y_j)$$

- 离散型随机变量独立性判别条件

若 X,Y 独立，则

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \tag{1}$$

- 条件分布律为

$$P(Y=y_j|X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_X(x_i)}$$
$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_Y(y_j)}$$

二维连续型随机变量

- 对于二维连续型随机变量 (X,Y)，其联合分布函数为

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dvdu$$
$$\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$$

$f(x,y)$ 为其联合密度函数，满足

$$f(x,y) \geq 0, \forall x,y \in \mathbb{R}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$$
$$P\{(X,Y) \in D\} = \int_D f(x,y)dxdy$$

- 其边缘分布函数为

$$F_X(x) = P(X \leq x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)dy\right)du$$
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = F(+\infty,y) = \int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)dx\right)dy$$

若 X,Y 为随机变量，则其概率密度函数为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

- 连续性随机变量的独立性判别条件

同式(1)

- 条件概率密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

则条件分布函数为

$$F_{Y|X}(y|x) = \frac{F(x,y)}{F_X(x)} = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(v|x)dv$$
$$F_{X|Y}(x|y) = \frac{F(x,y)}{F_Y(y)} = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u|y)du$$

连续型随机变量函数的分布

1. $Z = X + Y$

其分布函数为

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \iint\limits_{x+y\leq z} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

化简该二重积分，得到

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(t-y,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}t$$
$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

当 X,Y 独立时，式（2）可化为卷积公式，即

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

2. $M=\max(X,Y)$ 及 $N=\min(X,Y)$

其分布函数为

$$F_M(z)=P(M\le z)=P(X\le z,Y\le z)=P(X\le z)P(Y\le z)=F_X(z)F_Y(z)$$

$$\begin{aligned}F_N(z)&=P(N\le z)=1-P(N>z)=1-P(X>z,Y>z)\\&=1-P(X>z)P(Y>z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]\end{aligned}$$

对于多维连续随机变量 $X_1,X_2,X_3...X_i$ ，其满足

$$F_M(z)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}(z)$$

$$F_N(z)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-F_{X_i}(z)]$$

随机变量的数字特征

数学期望

- 离散型随机变量

  对于离散型随机变量 X，其数学期望为

$$E(X)=\sum_{x_i}x_iP(X=x_i)$$

- 连续型随机变量

  对于连续型随机变量 X，其数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

随机变量函数的数学期望

- 离散型随机变量

  对于离散型随机变量 X，其函数 $g(X)$ 的数学期望为

$$E(g(X))=\sum_{x_i}g(x_i)P(X=x_i)$$

  对于二维离散型随机变量 (X,Y)，其函数 $g(X,Y)$ 的数学期望为

$$E(g(X,Y))=\sum_{x_i}\sum_{y_j}g(x_i,y_j)P(X=x_i,Y=y_j)$$

- 连续型随机变量

  对于连续型随机变量 X，其函数 $g(X)$ 的数学期望为

$$E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$$

  对于二维连续型随机变量 (X,Y)，其函数 $g(X,Y)$ 的数学期望为

$$E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

数学期望的性质

1. 设 C 为常数，则

$$E(C) = C$$

2. 设 X 为随机变量，C 为常数，则

$$E(CX) = CE(X)$$

3. 设 X,Y 为随机变量，则

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

4. 设 X,Y 为独立随机变量，则

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

方差

$$D(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

方差的性质

1. 设 C 为常数，则

$$D(C) = 0$$

2. $D(X) \leq 0$, $D(X) = 0$ 的充要条件为存在常数 C ，使得 $P(X = C) = 1$ 成立
3. 设 X 为随机变量，C 为常数，则

$$D(CX) = C^2D(X)$$

4. 设 X,Y 为独立随机变量，则

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$$

切比雪夫不等式

对于任意常数 $\epsilon > 0$，有

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{D(X)}{\epsilon^2}$$