随机事件与概率

- 常用公式
  - 加法

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

  - 减法

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

- 条件概率

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

- 全概率公式
  若 $\sum_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$$

- 贝叶斯公式
  若 $\sum_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，则

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)}$$

  简化为

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

- 独立事件
  若 A 和 B 独立，则

$$P(AB)=P(A)P(B)$$
$$P(A|B)=P(A)$$
$$P(B|A)=P(B)$$

> 此时 $\overline{A},B$ 、 $\overline{B},A$ 和 $\overline{B},\overline{A}$ 也相互独立

古典概型略

一维随机变量及其分布函数

离散型随机变量及其分布

- 两点分布

$$P(X=0)=1-p,\quad P(X=1)=p$$

- 二项分布 $B(n,p)$

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\ldots,n$$

- 松柏分布 $P(\lambda)$

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\ldots$$

- 超几何分布 $H(n,m,N)$

$$P(X=k)=\frac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n},\quad k=0,1,\ldots,n$$

- 松柏定理

  当 $n\to\infty$ 时，令 $\lambda=np$，则二项分布 $B(n,p)$ 近似于泊松分布 $P(\lambda)$。

$$\lim_{n\to\infty} B(n,p)=P(np)$$

离散型随机变量的分布函数为

$$F(x)=P(X\leq x)=\sum_{k\leq x}P(X=k)$$

可以得到

$$P(a<X\leq b)=F(b)-F(a)$$

连续型随机变量及其分布

若存在非负可积函数 $f(x)$，使得随机变量 X 取值于任意区间 $[a,b]$ 上的概率为

$$P(a\leq X\leq b)=\int_a^b f(x)dx$$

则称 $f(x)$ 为随机变量 X 的概率密度函数，简称密度函数。

规范性条件:

1. $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$

- 均匀分布 $U(a,b)$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leq x\leq b\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

- 指数分布 $E(\lambda)$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

- 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

  标准正态分布 $N(0,1)$ 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

连续型随机变量的分布函数为

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

同样有

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

> 由于连续性随机变量单点概率为0的特点，因此这里的比较符号可任意使用 $\leq$ 或 $<$。

二维随机变量及其分布函数

二维随机变量的分布函数通常又称为**联合分布函数**或**联合密度函数**

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

- 联合分布函数的性质
  1. $F(x, y)$ 是非递减函数
  2. $\lim_{x \to -\infty} F(x, y) = 0, \forall y$
  3. $\lim_{y \to -\infty} F(x, y) = 0, \forall x$
  4. $\lim_{x \to +\infty} F(x, y) = P(Y \leq y), \forall y$
  5. $\lim_{y \to +\infty} F(x, y) = P(X \leq x), \forall x$
  6. $\lim_{x \to +\infty, y \to +\infty} F(x, y) = 1$
  7. 对于四个实数 $a \leq b, c \leq d$，有

$$F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c) = P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) \geq 0$$

边缘分布函数

对于二维随机变量 (X, Y)，其边缘分布函数为

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y)$$
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y)$$

条件分布函数

对于二维随机变量 (X, Y)，其条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

其条件分布函数为

$$F_{Y|X}(y|x) = \frac{F(x, y)}{F_X(x)}$$
$$F_{X|Y}(x|y) = \frac{F(x, y)}{F_Y(y)}$$

二维离散型随机变量

- 对于二维离散型随机变量 (X,Y)，其分布律为

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i\cap Y=y_j)=p_{ij}$$

- 其联合分布函数为

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}$$

- 其边缘分布律为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\sum_{y_j}p_{X,Y}(x,y_j)$$
$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\sum_{x_i}p_{X,Y}(x_i,y)$$

则有

$$P(X=x_i)=p_X(x_i)=\sum_{y_j}p_{X,Y}(x_i,y_j)$$
$$P(Y=y_j)=p_Y(y_j)=\sum_{x_i}p_{X,Y}(x_i,y_j)$$

- 离散型随机变量独立性判别条件

若 X,Y 独立，则

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \tag{1}$$

- 条件分布律为

$$P(Y=y_j|X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_X(x_i)}$$
$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_Y(y_j)}$$

二维连续型随机变量

- 对于二维连续型随机变量 (X,Y)，其联合分布函数为

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dvdu$$
$$\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$$

$f(x,y)$ 为其联合密度函数，满足

$$f(x,y)\ge 0,\forall x,y\in\mathbb{R}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$$
$$P\{(X,Y)\in D\}=\int_D f(x,y)dxdy$$

- 其边缘分布函数为

$$F_X(x)=P(X\le x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,y)dy\right)du$$
$$F_Y(y)=P(Y\le y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,v)dx\right)dy$$

若 X,Y 为随机变量，则其概率密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

- 连续性随机变量的独立性判别条件

同式(1)

- 条件概率密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$
$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

则条件分布函数为

$$F_{Y|X}(y|x)=\frac{F(x,y)}{F_X(x)}=\int_{-\infty}^{y}f_{Y|X}(v|x)dv$$
$$F_{X|Y}(x|y)=\frac{F(x,y)}{F_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}(u|y)du$$

连续型随机变量函数的分布

1. $Z=X+Y$

其分布函数为

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=\iint_{x+y\le z}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

化简该二重积分，得到

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z}f(t-y,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}t$$
$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

当 X,Y 独立时，式（2）可化为卷积公式，即

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

2. $M=\max(X,Y)$ 及 $N=\min(X,Y)$

其分布函数为

$$F_M(z)=P(M\le z)=P(X\le z,Y\le z)=P(X\le z)P(Y\le z)=F_X(z)F_Y(z)$$

$$\begin{aligned}F_N(z)&=P(N\le z)=1-P(N>z)=1-P(X>z,Y>z)\\&=1-P(X>z)P(Y>z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]\end{aligned}$$

对于多维连续随机变量 $X_1,X_2,X_3...X_i$ ，其满足

$$F_M(z)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}(z)$$

$$F_N(z)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-F_{X_i}(z)]$$

随机变量的数字特征

数学期望

- 离散型随机变量

  对于离散型随机变量 X，其数学期望为

$$E(X)=\sum_{x_i}x_iP(X=x_i)$$

- 连续型随机变量

  对于连续型随机变量 X，其数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

随机变量函数的数学期望

- 离散型随机变量

  对于离散型随机变量 X，其函数 $g(X)$ 的数学期望为

$$E(g(X))=\sum_{x_i}g(x_i)P(X=x_i)$$

  对于二维离散型随机变量 (X,Y)，其函数 $g(X,Y)$ 的数学期望为

$$E(g(X,Y))=\sum_{x_i}\sum_{y_j}g(x_i,y_j)P(X=x_i,Y=y_j)$$

- 连续型随机变量

  对于连续型随机变量 X，其函数 $g(X)$ 的数学期望为

$$E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$$

  对于二维连续型随机变量 (X,Y)，其函数 $g(X,Y)$ 的数学期望为

$$E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

数学期望的性质

1. 设 C 为常数，则

$$E(C)=C$$

2. 设 X 为随机变量，C 为常数，则

$$E(CX)=CE(X)$$

3. 设 X,Y 为随机变量，则

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

4. 设 X,Y 为独立随机变量，则

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

方差

$$D(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-[E(X)]^2$$

方差的性质

1. 设 C 为常数，则

$$D(C)=0$$

2. $D(X)\leq 0$, $D(X)=0$ 的充要条件为存在常数 C ，使得 $P(X=C)=1$ 成立
3. 设 X 为随机变量，C 为常数，则

$$D(CX)=C^2D(X)$$

4. 设 X,Y 为独立随机变量，则

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

切比雪夫不等式

对于任意常数 $\epsilon>0$，有

$$P(|X-E(X)|\geq\epsilon)\leq\frac{D(X)}{\epsilon^2}$$

常见分布的期望和方差

	(0,1)分布	二项分布	泊松分布	均匀分布	指数分布	正态分布
$E(X)$	p	np	λ	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{1}{\lambda}$	μ
$D(X)$	$p(1-p)$	$np(1-p)$	λ	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	σ^2

协方差、相关系数和矩

- 协方差

  对于二维随机变量 (X,Y)，其协方差为

$$Cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=E(XY)-E(X)E(Y)$$

基于协方差，对任意的随机变量 X,Y，有

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$$
$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)$$

- 协方差的性质
  - $Cov(X,X)=D(X)$
  - $Cov(X,C)=0$，其中 C 为常数
  - $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$
  - 对于任意常数 a,b，有 $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$
  - $Cov(X+Y,Z)=Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)$
  - 若 X,Y 独立，则 $Cov(X,Y)=0$
- 相关系数

  相关系数 ρ_{XY} 定义为

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

- 相关系数的性质
  - $|\rho_{XY}|\leq 1$
  - $\rho_{XY}\pm 1$ 的充要条件为 X 和 Y 完全正相关或负相关，即存在常数 a,b 使得 $Y=aX+b$ 成立。
  - 对于二维正态分布，X,Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho_{XY}=0$。

大数定律和中心极限定理

大数定律

- 依概率收敛

  对于一列独立同分布的随机变量 $X_1,X_2,...,X_n$，若存在常数 a，使得对任意 $\epsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(|X_n-a|<\epsilon\right)=1$$

  则称 X_n 依概率收敛于 a。

- 切比雪夫大数定律

  设 $X_1,X_2,...,X_n$ 为一列两两不相关的随机变量，且期望存在，方差有界，则对于任意 $\epsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-E(X_i))\right|<\epsilon\right)=0$$

- 伯努利大数定律

  设 μ_n 为 n 重伯努利试验中事件 A 出现的次数，又设 p 为事件 A 的成功概率，则对于任意 $\epsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\epsilon\right)=1$$

- 辛钦大数定律

  设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为一列独立同分布的随机变量，且 $E(X_i) = \mu$，则对于任意 $\epsilon > 0$，有

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \epsilon\right) = 1$$

中心极限定理

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为一列独立同分布的随机变量，且其期望和方差均存在,则

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \to N(E(\sum_{i=1}^{n} X_i), D(\sum_{i=1}^{n} X_i))$$

- 独立同分布中心极限定理

  设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为一列独立同分布的随机变量，且其期望和方差均存在，记

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} E(X)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D(X_i)}} \to N(0,1)$$

  则 Y_n 的分布函数 $F_n(x)$ 满足

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = \Phi(x)$$

  其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数。

- 德莫佛-拉普拉斯中心极限定理

  设 μ_n 为 n 重伯努利试验中事件 A 出现的次数，又设 p 为事件 A 的成功概率，则对于任意 $\epsilon > 0$ ，有

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) = \Phi(x)$$