

随机事件与概率

- 常用公式
 - 加法

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

- 减法

$$P(A - B) = P(A) - P(AB)$$

- 条件概率

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

- 全概率公式

若 $\sum_{i=1}^n B_i = \Omega$, 则

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

- 贝叶斯公式

若 $\sum_{i=1}^n B_i = \Omega$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}$$

简化为

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

- 独立事件

若 A 和 B 独立, 则

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

此时 $\overline{A}, B, \overline{B}, A$ 和 $\overline{B}, \overline{A}$ 也相互独立

古典概型略

一维随机变量及其分布函数

离散型随机变量及其分布

- 两点分布

$$P(X = 0) = 1 - p, \quad P(X = 1) = p$$

- 二项分布 $B(n, p)$

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

- 松柏分布 $P(\lambda)$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- 超几何分布 $H(n, m, N)$

$$P(X = k) = \frac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

- 松柏定理

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 令 $\lambda = np$, 则二项分布 $B(n, p)$ 近似于泊松分布 $P(\lambda)$ 。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(n, p) = P(np)$$

离散型随机变量的分布函数为

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} P(X = k)$$

可以得到

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

连续型随机变量及其分布

若存在非负可积函数 $f(x)$, 使得随机变量 X 取值于任意区间 $[a, b]$ 上的概率为

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

则称 $f(x)$ 为随机变量 X 的概率密度函数, 简称密度函数。

规范性条件:

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$
- 均匀分布 $U(a, b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 指数分布 $E(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

标准正态分布 $N(0, 1)$ 的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

连续型随机变量的分布函数为

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

同样有

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

由于连续性随机变量单点概率为0的特点，因此这里的比较符号可任意使用 \leq 或 $<$ 。

二维随机变量及其分布函数

二维随机变量的分布函数通常又称为**联合分布函数**或**联合密度函数**

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

• 联合分布函数的性质

1. $F(x, y)$ 是非递减函数
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0, \forall y$
3. $\lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0, \forall x$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = P(Y \leq y), \forall y$
5. $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = P(X \leq x), \forall x$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty} F(x, y) = 1$
7. 对于四个实数 $a \leq b, c \leq d$, 有

$$F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c) = P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) \geq 0$$

边缘分布函数

对于二维随机变量 (X, Y) , 其边缘分布函数为

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y)$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y)$$

条件分布函数

对于二维随机变量 (X, Y) , 其条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

其条件分布函数为

$$F_{Y|X}(y|x) = \frac{F(x, y)}{F_X(x)}$$

$$F_{X|Y}(x|y) = \frac{F(x, y)}{F_Y(y)}$$

二维离散型随机变量

- 对于二维离散型随机变量 (X, Y) , 其分布律为

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i \cap Y = y_j) = p_{ij}$$

- 其联合分布函数为

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}$$

- 其边缘分布律为

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \sum_{y_j} p_{X,Y}(x, y_j)$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \sum_{x_i} p_{X,Y}(x_i, y)$$

则有

$$P(X = x_i) = p_X(x_i) = \sum_{y_j} p_{X,Y}(x_i, y_j)$$

$$P(Y = y_j) = p_Y(y_j) = \sum_{x_i} p_{X,Y}(x_i, y_j)$$

- 离散型随机变量独立性判别条件

若 X, Y 独立, 则

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad (1)$$

- 条件分布律为

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_X(x_i)}$$

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_Y(y_j)}$$

二维连续型随机变量

- 对于二维连续型随机变量 (X, Y) , 其联合分布函数为

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du$$

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

$f(x, y)$ 为其联合密度函数, 满足

$$f(x, y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

$$P\{(X, Y) \in D\} = \int_D f(x, y) dx dy$$

- 其边缘分布函数为

$$F_X(x) = P(X \leq x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y) dy \right) du$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^y \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v) dx \right) dy$$

若 X, Y 为随机变量, 则其概率密度函数为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

- 连续性随机变量的独立性判别条件

同式(1)

- 条件概率密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

则条件分布函数为

$$F_{Y|X}(y|x) = \frac{F(x, y)}{F_X(x)} = \int_{-\infty}^y f_{Y|X}(v|x) dv$$

$$F_{X|Y}(x|y) = \frac{F(x, y)}{F_Y(y)} = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(u|y) du$$

连续型随机变量函数的分布

1. $Z = X + Y$

其分布函数为

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \iint_{x+y \leq z} f(u, v) du dv$$

化简该二重积分, 得到

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^z f(t - y, y) dy \right] dt$$

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x) dx \quad (2)$$

当 X, Y 独立时, 式 (2) 可化为卷积公式, 即

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx$$

2. $M = \max(X, Y)$ 及 $N = \min(X, Y)$

其分布函数为

$$F_M(z) = P(M \leq z) = P(X \leq z, Y \leq z) = P(X \leq z)P(Y \leq z) = F_X(z)F_Y(z)$$

$$\begin{aligned} F_N(z) &= P(N \leq z) = 1 - P(N > z) = 1 - P(X > z, Y > z) \\ &= 1 - P(X > z)P(Y > z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)] \end{aligned}$$

对于多维连续随机变量 $X_1, X_2, X_3 \dots X_i$, 其满足

$$\begin{aligned} F_M(z) &= \prod_{i=1}^n F_{X_i}(z) \\ F_N(z) &= 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_{X_i}(z)] \end{aligned}$$

随机变量的数字特征

数学期望

- 离散型随机变量

对于离散型随机变量 X , 其数学期望为

$$E(X) = \sum_{x_i} x_i P(X = x_i)$$

- 连续型随机变量

对于连续型随机变量 X , 其数学期望为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

随机变量函数的数学期望

- 离散型随机变量

对于离散型随机变量 X , 其函数 $g(X)$ 的数学期望为

$$E(g(X)) = \sum_{x_i} g(x_i) P(X = x_i)$$

对于二维离散型随机变量 (X, Y) , 其函数 $g(X, Y)$ 的数学期望为

$$E(g(X, Y)) = \sum_{x_i} \sum_{y_j} g(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j)$$

- 连续型随机变量

对于连续型随机变量 X , 其函数 $g(X)$ 的数学期望为

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

对于二维连续型随机变量 (X, Y) , 其函数 $g(X, Y)$ 的数学期望为

$$E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$

数学期望的性质

1. 设 C 为常数, 则

$$E(C) = C$$

2. 设 X 为随机变量, C 为常数, 则

$$E(CX) = CE(X)$$

3. 设 X, Y 为随机变量, 则

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

4. 设 X, Y 为独立随机变量, 则

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

方差

$$D(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

方差的性质

1. 设 C 为常数, 则

$$D(C) = 0$$

2. $D(X) \leq 0$, $D(X) = 0$ 的充要条件为存在常数 C , 使得 $P(X = C) = 1$ 成立

3. 设 X 为随机变量, C 为常数, 则

$$D(CX) = C^2D(X)$$

4. 设 X, Y 为独立随机变量, 则

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

切比雪夫不等式

对于任意常数 $\epsilon > 0$, 有

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{D(X)}{\epsilon^2}$$

常见分布的期望和方差

	(0,1)分布	二项分布	泊松分布	均匀分布	指数分布	正态分布
$E(X)$	p	np	λ	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{1}{\lambda}$	μ
$D(X)$	$p(1-p)$	$np(1-p)$	λ	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	σ^2

协方差、相关系数和矩

- 协方差

对于二维随机变量 (X, Y) , 其协方差为

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

基于协方差，对任意的随机变量 X, Y ，有

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y) - 2\text{Cov}(X, Y)$$

- 协方差的性质

- $\text{Cov}(X, X) = D(X)$
- $\text{Cov}(X, C) = 0$ ，其中 C 为常数
- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
- 对于任意常数 a, b ，有 $\text{Cov}(aX, bY) = ab\text{Cov}(X, Y)$
- $\text{Cov}(X + Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$
- 若 X, Y 独立，则 $\text{Cov}(X, Y) = 0$

- 相关系数

相关系数 ρ_{XY} 定义为

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

- 相关系数的性质

- $|\rho_{XY}| \leq 1$
- $\rho_{XY} \pm 1$ 的充要条件为 X 和 Y 完全正相关或负相关，即存在常数 a, b 使得 $Y = aX + b$ 成立。
- 对于二维正态分布， X, Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho_{XY} = 0$ 。

大数定律和中心极限定理

大数定律

- 依概率收敛

对于一系列独立同分布的随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n ，若存在常数 a ，使得对任意 $\epsilon > 0$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - a| < \epsilon) = 1$$

则称 X_n 依概率收敛于 a 。

- 切比雪夫大数定律

设 X_1, X_2, \dots, X_n 为一列两两不相关的随机变量，且期望存在，方差有界，则对于任意 $\epsilon > 0$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i))\right| < \epsilon\right) = 1$$

- 伯努利大数定律

设 μ_n 为 n 重伯努利试验中事件 A 出现的次数，又设 p 为事件 A 的成功概率，则对于任意 $\epsilon > 0$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \epsilon\right) = 1$$

- 辛钦大数定律

设 X_1, X_2, \dots, X_n 为一列独立同分布的随机变量, 且 $E(X_i) = \mu$, 则对于任意 $\epsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| < \epsilon\right) = 1$$

中心极限定理

设 X_1, X_2, \dots, X_n 为一列独立同分布的随机变量, 且其期望和方差均存在, 则

$$\sum_{i=1}^n X_i \rightarrow N\left(E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right), D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\right)$$

- 独立同分布中心极限定理

设 X_1, X_2, \dots, X_n 为一列独立同分布的随机变量, 且其期望和方差均存在, 记

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n E(X)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n D(X_i)}} \rightarrow N(0, 1)$$

则 Y_n 的分布函数 $F_n(x)$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x)$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数。

- 德莫佛-拉普拉斯中心极限定理

设 μ_n 为 n 重伯努利试验中事件 A 出现的次数, 又设 p 为事件 A 的成功概率, 则对于任意 $\epsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) = \Phi(x)$$

数理统计

随机样本

从总体 X 中随机地抽取 n 个样本 X_1, X_2, \dots, X_n 组成一个整体, 称为总体 X 的**样本**, 组成样本的个体称为样本的分量, 一个样本中所含分量的个数称为**样本容量**。

- 由于 n 次试验是在完全相同的条件下进行的, 每个个体被抽到的机会相等, 所以可认为每个分量 X_i 与总体 X 具有相同的分布, 且各个分量之间相互独立。

设总体 X 的分布函数为 $F(x)$, 则样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的联合分布函数为

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i) \quad (3)$$

如果总体 X 为离散型随机变量, 则式(3)可视为

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$$

如果总体 X 为连续型随机变量, 设其概率密度函数为 $f(x)$, 则式(3)可视为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

统计量

- 统计量是样本的函数，通常用来估计总体的某些特征。

常用统计量

- 样本均值

对于样本 X_1, X_2, \dots, X_n ，其样本均值为

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- 样本方差

对于样本 X_1, X_2, \dots, X_n ，其样本方差为

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$$

- 样本标准差

对于样本 X_1, X_2, \dots, X_n ，其样本标准差为

$$S = \sqrt{S^2}$$

- 样本 k 阶极矩

对于样本 X_1, X_2, \dots, X_n ，其样本 k 阶极矩为

$$A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

- 样本 k 阶中心矩

对于样本 X_1, X_2, \dots, X_n ，其样本 k 阶中心矩为

$$B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$$

抽样分布

1. χ^2 分布

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自正态总体 $N(0, 1)$ 的随机样本，则称统计量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

服从 χ^2 分布，其自由度为 n ，记作 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ 。自由度是指包含的独立随机变量的数量。

- χ^2 分布具有可加性

如果 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自正态总体 $N(0, 1)$ 的随机样本，且 Y_1, Y_2, \dots, Y_m 是来自正态总体 $N(0, 1)$ 的随机样本，则

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{j=1}^m Y_j^2$$

服从 χ^2 分布, 其自由度为 $n + m$, 记作 $\chi^2 \sim \chi^2(n + m)$ 。

- χ^2 分布的期望和方差

对于自由度为 n 的 χ^2 分布, 其期望为 $E(\chi^2) = n$, 方差为 $D(\chi^2) = 2n$ 。