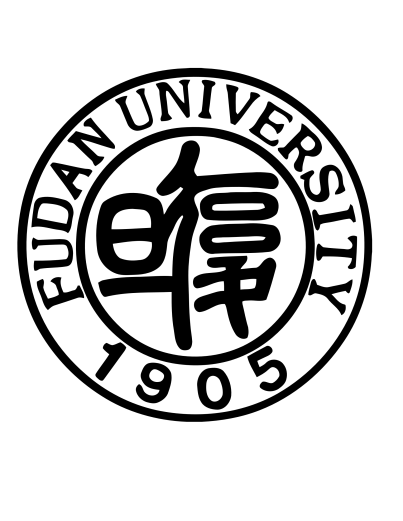
**医学超声技术课程报告**

**超声波在介质中的传播模拟**

****

**指导教师： 余锦华**

**学生姓名： 沈钰**

**学 号： 21307130028**

**专 业： 生物医学工程**

# 

目 录

# 一维超声波传播仿真

## 求解一维波动方程

## 边界条件的探索

## 不同介质面的反射与折射

## 衰减的模拟

## 问题与讨论

# 二维超声波传播仿真

## 求解二维波动方程

## 穿过不同介质发生的情况

正文

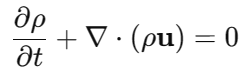
# 一、一维超声波传播仿真

## 求解一维波动方程

### 波动方程

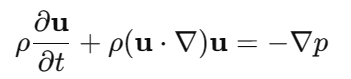
声波可以被视为压力波，它们在介质中传播时伴随着密度和压力的变化。声波的传播可以用连续性方程和动量守恒方程（也称为欧拉方程）描述。

连续性方程描述了质量守恒，可表示为：



其中，ρ 是密度，u 是流体速度，t是时间。

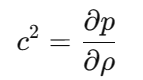
动量守恒方程描述了在没有外力作用的情况下，流体元素动量的变化，可表示为：



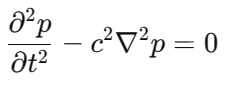
其中，p是压力。

在处理超声波时，通常假设波动引起的密度和压力变化相对于静态值非常小。这使得可以对上述方程进行线性化简化，只保留一阶项。

通过假设介质是不可压缩的和各向同性的，可以引入声速c的概念，声速定义为：



将线性化和声速的概念应用到动量守恒方程和连续性方程中，可以通过消去速度和压力，得到关于压力的波动方程：



在推导超声波动方程时有以下假设和近似：

①小振幅近似：假设声波引起的密度和压力变化非常小，忽略了振幅较大时的非线性效应。

②理想流体假设：假设介质无粘性和不可压缩。

③均匀介质假设：假设介质的物理性质（如密度和声速）在传播区域内是均匀的，而实际介质可能存在不均匀性。

④各向同性假设：认为介质在所有方向上的物理性质相同，忽略了各向异性介质中声波的复杂行为。

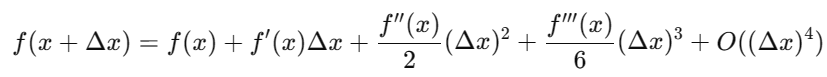
⑤忽略外力作用：在动力方程中没有考虑外部力的影响，如重力或电磁力。

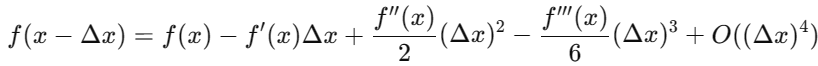
⑥稳态假设：有时假设系统处于稳定状态，不考虑随时间变化的效应。

### FTDT二阶中心差分求解

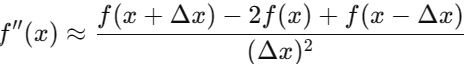
FTDT (Finite-Difference Time-Domain) 方法是一种通过时间域内的有限差分技术。在本项目中，我使用了二阶中心差分的方法求数值解。

二阶中心差分的方法是将f(x)分别在(x+Δx)和(x-Δx)展开，前向和后向展开结果：



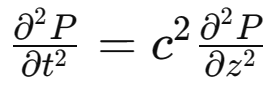


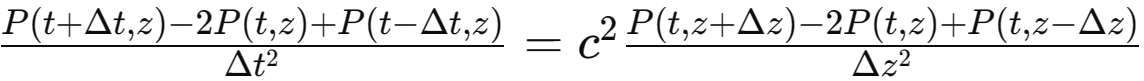
将上面的两个泰勒展开式相加，以消除一阶导数项和所有奇数次项，可推出二阶导数的近似值：



其局部截断误差是 O((Δx)2）。其中高阶O((Δx)4）的小量被忽略。

将该方法应用于一维的超声波动方程：



得到：

整理后，可以推导出下一个时间步的波动方程解：



这个公式基本展示了波的传播和反射的数值模拟过程。每个时间步的解依赖于其前一时间步的解以及相邻空间点的解。

这种方法的稳定性和精确性依赖于时间步长 Δt 和空间步长 Δz 的选择，通常要求满足CFL条件（Courant-Friedrichs-Lewy条件），即：



### matlab仿真求解

首先设定声场的参数和波源参数，需要注意满足CFL条件：

% 声场参数

wave\_speed = 1; % 波速,km/s

space\_length = 10; % 空间长度,mm

time\_length = 10; % 时间长度,ns

space\_grid\_num = 1000; % 空间网格数

time\_grid\_num = 1000; % 时间网格数

dz = space\_length / space\_grid\_num; % 空间步长

dt = time\_length / time\_grid\_num; % 时间步长

P = zeros(space\_grid\_num, time\_grid\_num); % 零初始化P域

% 波源参数

p0 = 1; % 振幅

omega = 2\*pi; % 角频率,1e6 rad/s

对于压力场P(n,m),设定n为空间索引（z=n\*dz),m为时间索引(t=m\*dt),则可以表示二阶差分的数值解。遍历每一个时间步，并在时间步中更新所有空间步，从而迭代出波动方程的解。在最场的左边设置波源，为正弦函数的半周期。

for m = 2:time\_grid\_num-1 % 时间迭代

    if m \* dt < 0.5

        P(1, m) = p0 \* sin(omega \* m \* dt); % 左边界（波源）

    end

    for n = 2:space\_grid\_num-1 % 空间迭代

        P(n, m+1) = 2 \* P(n, m) - P(n, m-1) + (wave\_speed \* dt / dz)^2 \* ...

(P(n+1, m) - 2 \* P(n, m) + P(n-1, m));

    end

end

% 绘制波动图

figure;

for m = 1:time\_grid\_num

    plot(P(:, m));

    ylim([-5, 5]);

    line([600, 600], [-5, 5], 'Color', 'r', 'LineStyle', '--'); % 在x=600处画一条线

    drawnow;

    if strcmpi(get(gcf, 'currentkey'), 'q') % 按下q键退出

        break;

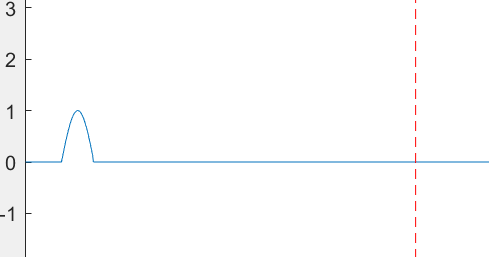
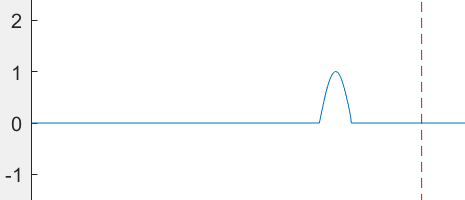
    end

end

% Close the figure and exit

close(gcf);

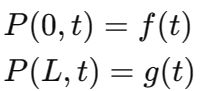
运行结果是这个半周期的正弦波从波源开始向右传播。



## 边界条件的探索

由于发现该声波传播到边界时会发生相位相反的全反射，因此探索了三种常见的边界条件。我们将n=600对应的空间设置为边界，来探索不同边界条件的影响。

**1.默认边界所满足的狄利克雷条件**



其中f(t) 和 g(t) 是给定的函数，P 是解函数，0 和 L 是边界的位置。这种条件通常用于固定边界的情况，比如固定端弦的振动。

将界面处的声压设置恒为0，并加入迭代过程：

%探究狄利克雷边界条件

for m = 2:time\_grid\_num-1 % 时间迭代

    if m \* dt < 0.5

        P(1, m) = p0 \* sin(omega \* m \* dt); % 左边界（波源）

    end

    for n = 2:space\_grid\_num-1 % 空间迭代

        % 边界条件

        P(600, :) = 0; % z=6设定右边界，狄利克雷边界条件

        P(n, m+1) = 2 \* P(n, m) - P(n, m-1) + (wave\_speed \* dt / dz)^2 \* (P(n+1, m) - 2 \* P(n, m) + P(n-1, m));

    end

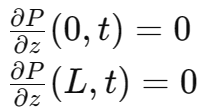
end

得到其在边界处会发生反相的全反射。



**2.诺伊曼条件 (Neumann Condition)，第二类边界条件**

诺伊曼条件规定了边界上函数的导数，通常关联到物理问题中的通量，比如热通量或质量流。对于波动方程，诺伊曼条件用于指定边界上导数的值。例如：



这表示在边界z=0 和z=L 处，波的导数（即斜率）为零。加入迭代过程：

for m = 2:time\_grid\_num-1 % 时间迭代

    if m \* dt < 0.5

        P(1, m) = p0 \* sin(omega \* m \* dt); % 左边界（波源）

    end

    for n = 2:600-1 % 空间迭代

        P(600, m) =  P(599, m);% z=6设定右边界，第二类边界条件 ∂P/∂z(L,t) = 0

        P(n, m+1) = 2 \* P(n, m) - P(n, m-1) + (wave\_speed \* dt / dz)^2 \* (P(n+1, m) - 2 \* P(n, m) + P(n-1, m));

    end

end

运行结果：







结果表明诺伊曼条件的结果是让波进行全反射，但相位不变。

**3.辐射边界条件（（Radiation Boundary Condition）**

辐射边界条件是一种用于波动方程的边界处理技术，旨在模拟波从计算区域自由出入而不产生任何人为的反射。这种条件尝试确保波在边界处可以无阻碍地“辐射”出去，模拟无限或半无限空间的物理行为。

在数值求解波动方程时，常见的辐射边界条件形式是:



这里c是波速，L是边界的位置。这个条件确保在边界L处，由于∂P/∂z的值与波的时间变化率相抵消，因此不会产生反射。这样的边界处理允许波以c的速度自然传出边界。

% 辐射边界条件

for m = 2:time\_grid\_num-1 % 时间迭代

    if m \* dt < 0.5

        P(1, m) = p0 \* sin(omega \* m \* dt); % 左边界（波源）

    end

    for n = 2:600 % 空间迭代，截止到界面

        % 更新内部点

        P(n, m+1) = 2 \* P(n, m) - P(n, m-1) + (wave\_speed \* dt / dz)^2 \* (P(n+1, m) - 2 \* P(n, m) + P(n-1, m));

        % 一阶吸收边界条件，适用于右边界

        if n == 600 % 假设从索引600开始到边界是需要吸收的区域

            % 在这里实施辐射边界条件

            P(600,m+1) = P(599,m+1) - 1/wave\_speed \* (P(599,m+1) - P(599,m))\*dz/dt;

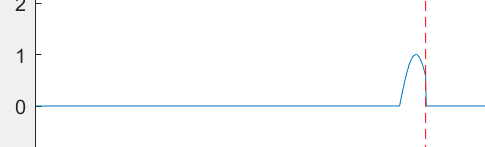
        end

    end

end

施加到迭代中，并把压力场迭代的范围截止到界面，运行结果：

运行结果：





可以看到在界面处，声波仿佛被“完全吸收”。其实该边界相当于让波“通过了”它，这个边界条件在后面的仿真中有重要作用，可以避免边界反射回波带来的干扰。

## 不同介质面的反射与折射

超声波在不同介质中的传播特中，折射和反射行为至关重要。当超声波遇到两种不同声阻抗的介质界面时，部分声波会被反射回原介质，另一部分则会透射进入新介质。

声阻抗是描述材料对声波传播阻力的物理量，数学表达为：



声压反射系数为：



其中，Pr是反射声波的声压振幅，Pi是入射声波的声压振幅，Z1和 Z2分别是第一种和第二种介质的声阻抗。

声压透射系数为：

其中，Pt是透射声波的声压振幅。

我们假设组织内不同介质密度相近（后面会分析原因），因此声阻抗的差异主要来自于不同介质下声速的不同。因此，在界面的右边设定为具有不同声速的另一种介质，并根据界面位置分情况进行迭代。改变声速的同时，需注意满足CFL条件。

首先，我们使c1=1，c2=0.5(km/s)，这表明入射介质具有更大的声速以及声阻抗。

c1 = 1; % 介质1波速

c2 = 0.5; % 介质2波速

for m = 2:time\_grid\_num-1

    if m \* dt < 0.5  % 左边界处设置波源，持续时间0.5秒

        P(1, m) = p0 \* sin(omega \* m \* dt);  % 简化波源模型为 p0 \* sin(ωt)

    end

    for n = 2:space\_grid\_num-1  %599

        if n < interface\_position  % 介质1内的波动方程

            P(n, m+1) = 2 \* P(n, m) - P(n, m-1) + (c1 \* dt / dz)^2 \* (P(n+1, m) - 2 \* P(n, m) + P(n-1, m));

        else

             % 介质2内的波动方程

            P(n, m+1) = 2 \* P(n, m) - P(n, m-1) + (c2 \* dt / dz)^2 \* (P(n+1, m) - 2 \* P(n, m) + P(n-1, m));

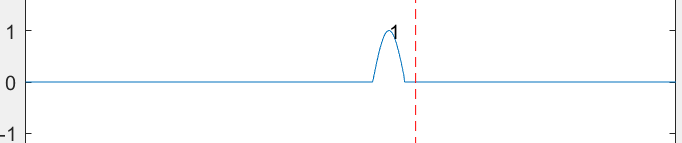
        end

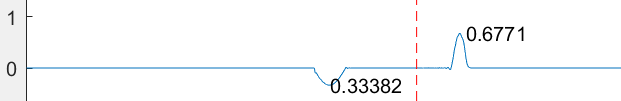
    end

    % 右边界,一阶吸收边界条件

    P(space\_grid\_num, m+1) = P(space\_grid\_num-1, m+1) - 1/c2 ... \*(P(space\_grid\_num-1,m+1)-P(space\_grid\_num-1,m))\*dz/dt;

end

并用寻峰函数追踪振幅的变化，结果如下：



声波传播到界面处同时发生了反射和折射，反射波和透射波的幅值均变小，反射波反相。经计算理论的反射系数是(-1/3)，透射系数是(2/3)，模拟的结果与之较为接近，但有一定误差（尤其是在第二个介质）。此外，注意到发生反射和透射后，波的形状出现略微的皱褶和起伏。

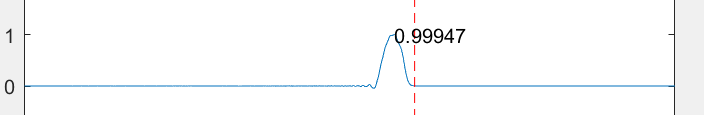
接下来将c2赋值为1.5m/s,并将时间网格数从1000增加到1500以满足CFL条件。

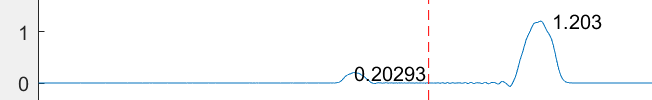
time\_grid\_num = 1500; % 时间网格数

c1 = 1; % 介质1波速

c2 = 1.5; % 介质2波速

结果如下：





理论计算的反射系数是0.2，透射系数是1.2，模拟结果与理论接近。同样具有有一定的误差，且声波在传播过程中有明显的小皱褶。

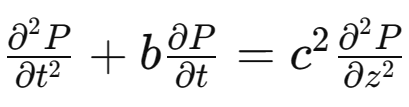
分析原因，应该是与CFL≠1有关。这将在之后进行深入讨论。

## 衰减的模拟

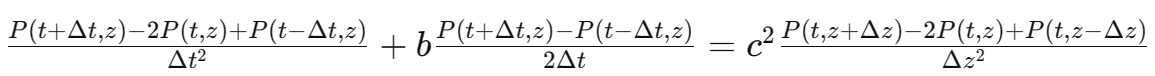
声衰减是指声波在介质中传播时由于各种物理过程的作用而逐渐减弱的现象。声衰减主要由吸收、散射、几何发散等原因引起。

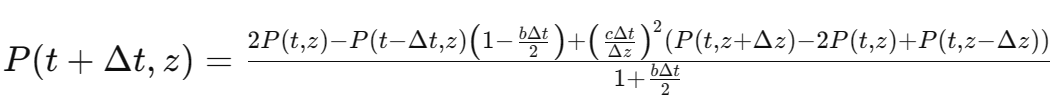
在一维模拟中，我们假设介质是均匀的，因此主要考虑吸收造成的衰减。声衰减通常以每单位距离的能量减少量来描述，常用分贝（dB）作为度量单位。衰减系数（α）表示声波在介质中每传播一定距离（通常是每米）的衰减量。为简化模拟，我们使用衰减系数b作为“倍数”作为单位，并将衰减基于传播时间。

修改基础的波动方程以包含衰减项，这个衰减项与一阶时间导数成正比：



用中心差分求得数值解：





设定声场中两种介质都具有相同的衰减系数b=0.05（倍/ns)，并进行迭代：

% 迭代计算每个时间步

for m = 2:time\_grid\_num-1

    if m \* dt < 0.5  % 左边界处设置波源，持续时间0.5秒

        P(1, m) = p0 \* sin(omega \* m \* dt);  % 简化波源模型为 p0 \* sin(ωt)

    end

    for n = 2:space\_grid\_num-1

        if n < interface\_position  % 介质1内的波动方程，考虑衰减

            P(n, m+1) = (2 \* P(n, m) - P(n, m-1) \* (1 - b \* dt / 2) +(c1 \* dt / dz) \* (c1 \* dt / dz) \*(P(n+1, m) - 2 \* P(n, m) + P(n-1, m))) /(1 + b \* dt / 2);

        else

             % 介质2内的波动方程，考虑衰减

            P(n, m+1) = (2 \* P(n, m) - P(n, m-1) \* (1 - b \* dt / 2) +(c2 \* dt / dz) \* (c2 \* dt / dz) \*(P(n+1, m) - 2 \* P(n, m) + P(n-1, m))) /(1 + b \* dt / 2);

        end

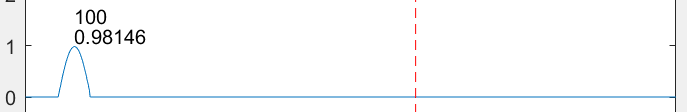
    end

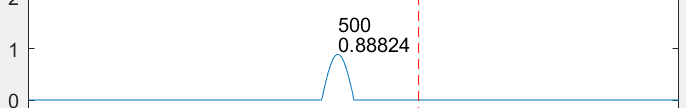
    % 右边界,一阶吸收边界条件

    P(space\_grid\_num, m+1) = P(space\_grid\_num-1, m+1) - 1/c2 \*(P(space\_grid\_num-1,m+1)-P(space\_grid\_num-1,m))\*dz/dt;

end

运行结果如下：（上面的数据是索引值（5ps），下面的数字是波幅）





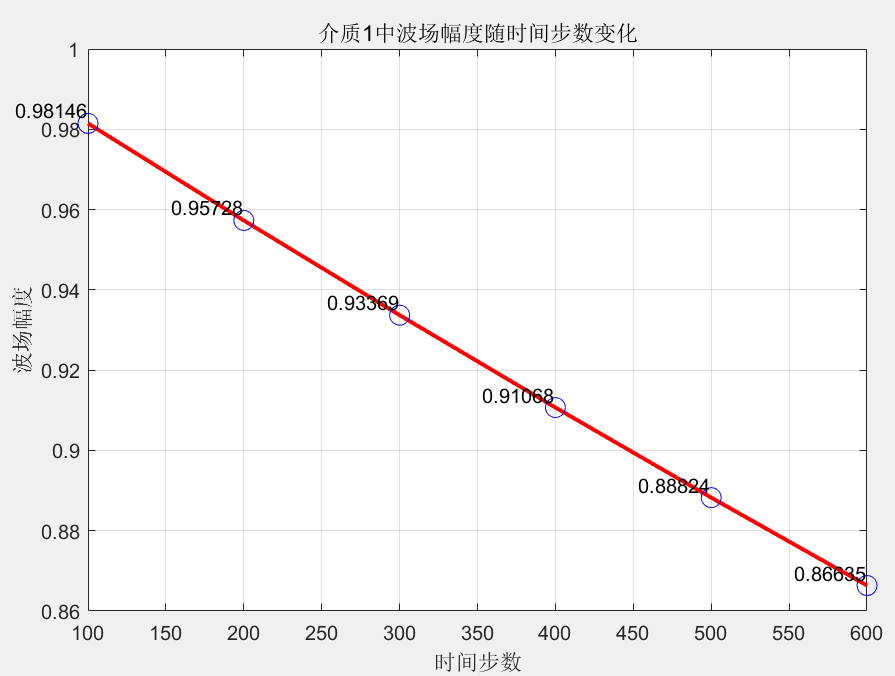






可以看到无论是入射波、折射波还是透射波，均发生了波随着传播幅度衰减的现象。

接下来分析衰减情况与设定的衰减系数的数值关系，如介质1中：



如预期的一样，呈现线性的下降趋势，但斜率为-0.023，介质2中为-0.022，较为接近。

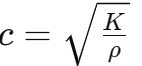
但是实际上的声吸收导致的衰减应该是与传播距离呈指数关系，因此该修改后的波动方程的仿真仅可以模拟出负相关的效果，并不能反映出真实的声衰减。

## 问题与讨论

### 1.一维波动方程中的声阻抗问题

该问题困扰了我很久。反射系数和折射系数是由两种介质的声阻抗z1和z2所决定，而声阻抗z又由介质密度ρ和介质声速c决定。而在一维波动方程及其数值解中，决定其传播性状的只有声速c，没有显式地包括密度ρ。也就是说，当两种介质各自的声速被确定后，无论怎么改变或设定两种介质的密度，模拟的结果都不会有变化，因为密度并没有在数值解中被体现。

于是我想到，液体中声速的计算式：



K为体积弹性模量。如果只定义两种介质的K和ρ，从而计算出两种介质各自的声速c，这样ρ是否就能体现在数值解中了？答案依然否定，因为完全可以通过改变K和ρ，使得两种介质声速相同（这意味着模拟的结果完全不发生反射折射），但它们ρ不同，意味着声阻抗不同，反射和折射理应发生，这就产生了矛盾。

因此，我认为该一维波动方程的FTDT求解模拟并不能充分反映密度的差异，或者说，它无法充分表征出声阻抗的变化。如果要确保波动方程的数值实现能够适应介质属性的变化，可能需要修改波动方程，或者迭代求解时在界面处作更多计算处理。

### 2.关于CFL条件和波形的皱褶

Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件指出，为了保证数值方案的稳定性，Courant 数 cΔt/Δz必须小于或等于一个特定的值，通常这个值是 1。这是因为在有限差分方法FTDT中，信息（在这个场景中即波的传播）是在网格点间通过迭代传递的。当cΔt/Δz=1 时，波正好在一个时间步长内传递到相邻的空间步长，这确保了波的传播既不超前也不滞后，从而得到最精确的结果。

如果大于1，信息或误差会在单个时间步长内传播得过远，超出其相邻节点的影响范围，造成数值不稳定。

如果小于1，每个时间步长内波的传播没有达到下一个空间步长，这可能导致能量在时间迭代中逐渐累积并表现为数值耗散或分散，使得波形出现变形或是小波动。这就是为什么在模拟中，声速条件使得Courant数<1时，会出现波动和误差。

### 3.关于衰减

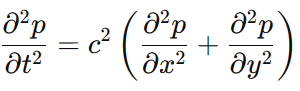
修改后的波动方程的衰减项与时间相关，而非定义的传播路程，一方面是因为均匀介质中，路程和时间呈正比，另一方面是当出现反射、折射等行为时，路程的计算较难处理，因为反射会导致波的方向改变。也有考虑过在迭代的过程中加入衰减因子，但是也处理折射和反射时的界面情况。

能表征声衰减的波动方程应该有着不同的、更为复杂的形式，应该表现出指数衰减的特性。

# 二、二维超声波传播仿真

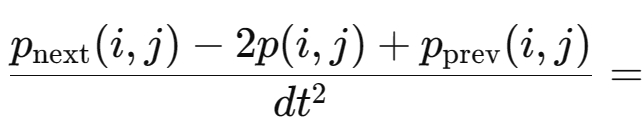
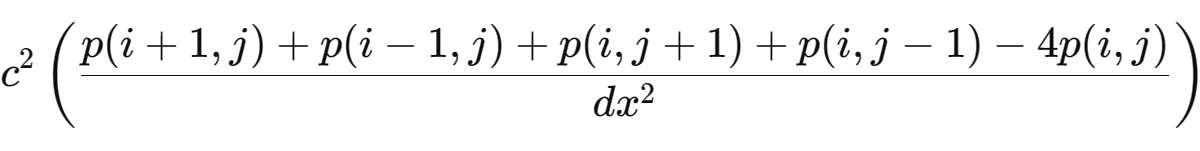
## 求解二维波动方程

### 数值求解

二维的超声波动方程为：

我们假设P(i,j) 表示在网格点 (i,j) 上的波的位移，Pprev​(i,j) 和 Pnext​(i,j) 分别表示该点在前一时间步和下一时间步的位移。

应用中心差分求解，略去较小项得到：



### matlab模拟

和一维的情况类似，设定声压场P、Pprev和Pnext参数以及声速；在循环中迭代计算每个时间步中的声场，并为声场四周加上辐射边界。为观察清楚，波源设置为个点波源，波源发出幅值为1的单脉冲。

Nx = 200;   % x方向的网格点数

Ny = 200;   % y方向的网格点数

c = 1500;   % 声速(m/s)

dt = 1e-6;  % 时间步长(s)

Nt = 2000;   % 时间步数

dx = 0.01;  % 空间步长(m)

dy = 0.01;  % 空间步长(m)

% 初始化

p = zeros(Nx, Ny);

p\_prev = zeros(Nx, Ny);

p\_next = zeros(Nx, Ny);

% 初始条件（波源）

x0 = 2;

% 阵列，间距为10

y0 = 95:1:105;

p(x0, y0) = 1;

% 时间演化

for t = 1:Nt

    for i = 2:Nx-1

        for j = 2:Ny-1

            % 使用二维波动方程的离散化公式

            p\_next(i, j) = 2\*p(i, j) - p\_prev(i, j) + c^2 \* dt^2 / dx^2 \* (p(i+1, j) + p(i-1, j) + p(i, j+1) + p(i, j-1) - 4\*p(i, j));

        end

    end

    % 边界条件， 一阶吸收边界条件

    p\_next(Nx, :) = p\_next(Nx-1, :) - 1/c \* (p\_next(Nx-1, :) - p(Nx-1, :)) \* dx/dt; %下边界

    p\_next(:, Ny) = p\_next(:, Ny-1) - 1/c \* (p\_next(:, Ny-1) - p(:, Ny-1)) \* dy/dt; %右边界

    p\_next(:, 1) = p\_next(:, 2) - 1/c \* (p\_next(:, 2) - p(:, 2)) \* dy/dt;    %左边界

    p\_next(1, :) = p\_next(2, :) - 1/c \* (p\_next(2, :) - p(2, :)) \* dx/dt;    %上边界

    % 更新波场

    p\_prev = p;

    p = p\_next;

    % 可视化

    imagesc(p);

    %加上坐标轴，标明xy方向

    xlabel('y');

    ylabel('x');

    colorbar;

    clim([-0.5,0.5]);

    pause(0.01);

    %按右上角退出绘图

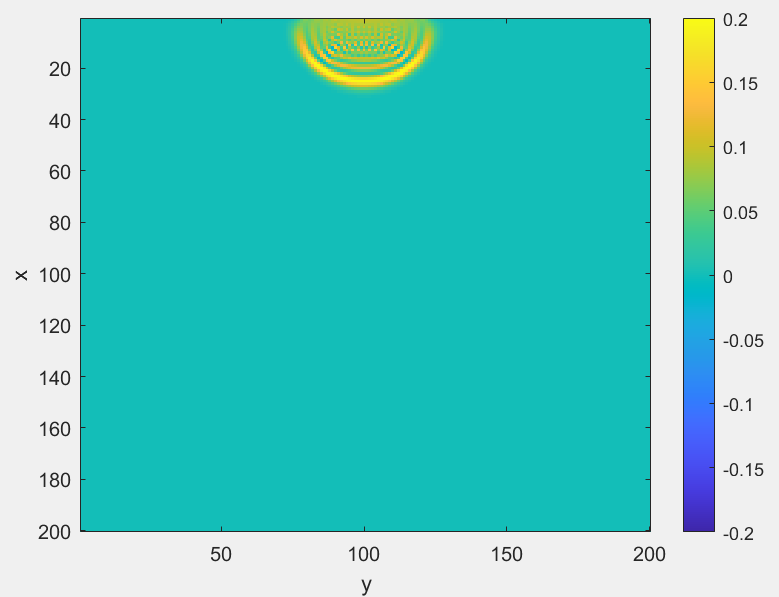
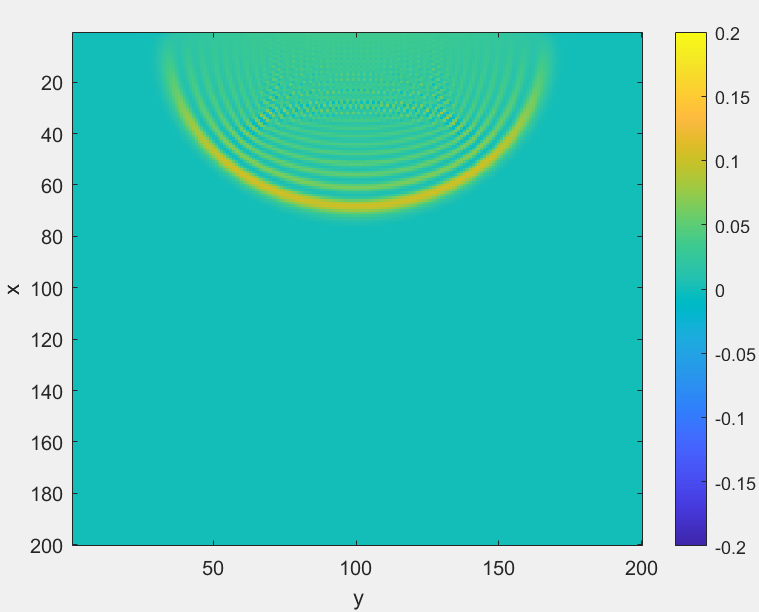
    if ~ishandle(1)

        break;

    end

end

为了方便观察，将色彩范围的上限调为了0.2。运行结果图像如下：



程序的结果直观、动态地展现出了二维空间中波的传播。波以震荡的形式传播，并且幅值≥0。其中，由于波在二维平面几何发散，其对应的声强和能量也逐渐在发散中减小。

## 穿过不同介质发生的情况

在二维平面上，当声波在传播时遇到不同的介质，会根据其性状发生更为复杂的反射、折射以及透射现象。

在场中央放置一个半径为0.1m的球形介质，并设置其声速为c2=2000m/s：

% 时间演化

for t = 1:Nt

    for i = 2:Nx-1

        for j = 2:Ny-1

            if sqrt((i-100)^2 + (j-100)^2) < 10

                % 介质小球内的声速为c2

                p\_next(i, j) = 2\*p(i, j) - p\_prev(i, j) + c2^2 \* dt^2 / dx^2 \* (p(i+1, j) + p(i-1, j) + p(i, j+1) + p(i, j-1) - 4\*p(i, j));

            else

                % 使用二维波动方程的离散化公式

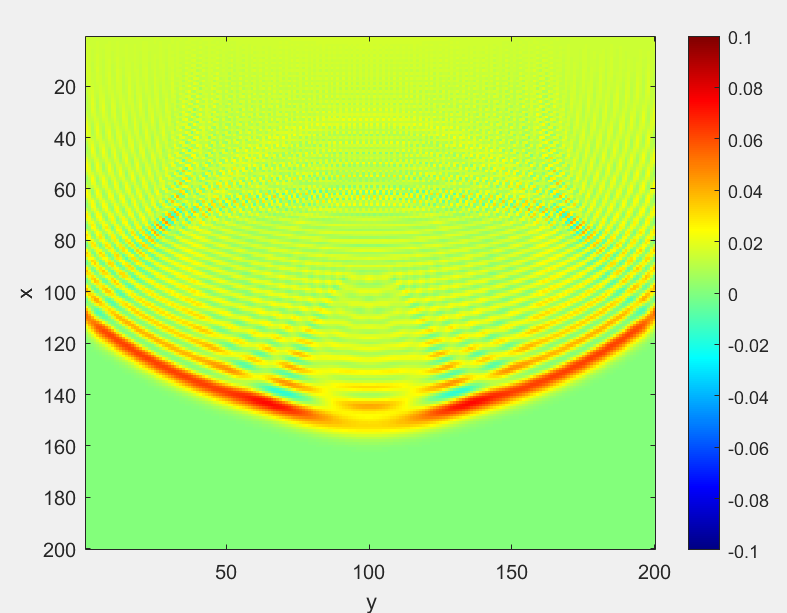
                p\_next(i, j) = 2\*p(i, j) - p\_prev(i, j) + c^2 \* dt^2 / dx^2 \* (p(i+1, j) + p(i-1, j) + p(i, j+1) + p(i, j-1) - 4\*p(i, j));

            end

        end

    end

结果如下：



结果较为复杂，我们可以看到在球形介质处发生了反射、折射和衍射的现象。还可以看到有叠加、干涉现象的发生。

比如图中介质面之前幅值较大的部分，可能是反射回波、衍射波和入射波叠加所形成的的增强区域；而介质面之后，与x轴夹角约为30°的两处，可能是折射波和衍射波叠加所形成的增强区域。叠加形成的增强区域和减弱区域展示出了干涉现象。

为进一步探索回波信号，将波源设为距离为0.1m的10个点波源阵列，将介质改为介质层，厚度为20cm，布置在距离波源40cm到60cm处。并以波源中心点为探头，记录探头处声场的压力幅值：

p0 = zeros(Nt);  % 记录波源中心的幅度情况

% 初始条件（波源）

x0 = 2;

% 波源阵列

y0 = 90:2:110;

p(x0, y0) = 1;

% 时间演化

for t = 1:Nt

    for i = 2:Nx-1

        for j = 2:Ny-1

            if abs(i-50) <= 10    %介质层

            % if sqrt((i-100)^2 + (j-100)^2) < 10   %介质小球

                % 介质小球内的声速为c2

                p\_next(i, j) = 2\*p(i, j) - p\_prev(i, j) + c2^2 \* dt^2 / dx^2 \* (p(i+1, j) + p(i-1, j) + p(i, j+1) + p(i, j-1) - 4\*p(i, j));

            else

                % 使用二维波动方程的离散化公式

                p\_next(i, j) = 2\*p(i, j) - p\_prev(i, j) + c^2 \* dt^2 / dx^2 \* (p(i+1, j) + p(i-1, j) + p(i, j+1) + p(i, j-1) - 4\*p(i, j));

            end

        end

    end

（此处省略对声场边界部分和声场可视化部分展示，先前的代码已包含这一部分）

%记录波源中心的波场

    p0(t) = p(x0+1, 100);

end

% 绘制波源中心的波场

figure;

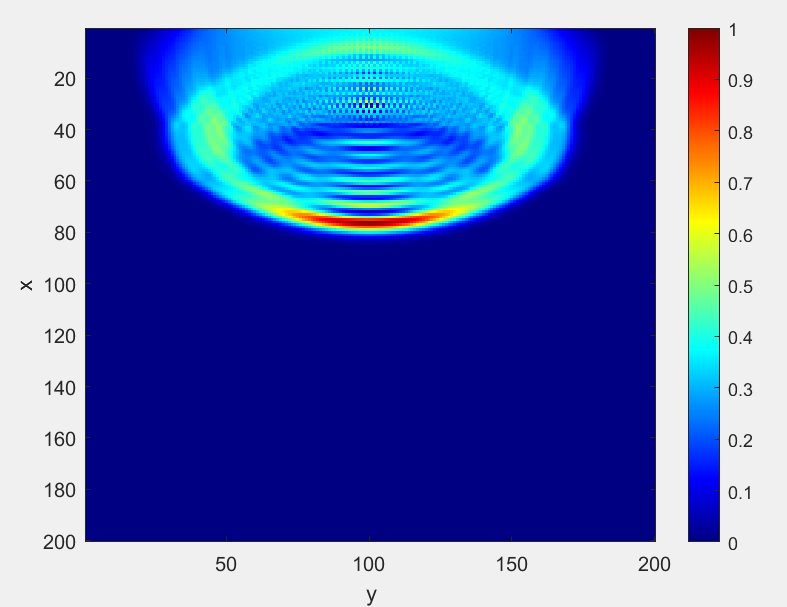
plot(p0);

xlabel('时间步数');

ylabel('波场幅度');

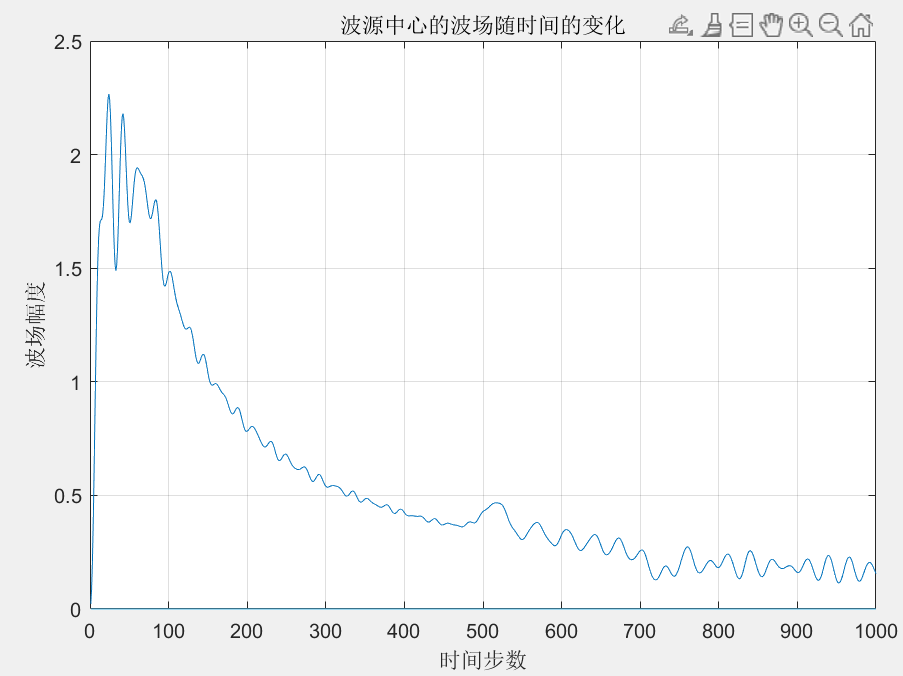
title('波源中心的波场随时间的变化');

结果为



可以较为清晰地看到两次回波信号所在的条带（上方亮蓝色和下方深蓝色），注意到第一次回波所在区域的幅值大于周围，而第二次回波信号所在幅值小于周围，这是符合预期的，因为介质层的声速(2000m/s)大于入射前的介质(1500m/s)，这意味着在第一个界面回波幅值是正的，第二个界面的回波幅值是负（反相）的。

探头位置在10秒内的声压如下：



我们可以看到，大约从第5秒开始，幅值有明显的上升，这意味着开始接收到第一次回波；从大约第7秒开始，幅值又有明显的下降，意味着开始接收到第二次回波信号。而前后两次回波理论上的时间差距恰好是2秒（声程差4000m，声速2000m/s）。因此该模拟较为理想地实现了透射、反射。