и начальные условия в виде рядов Фурье:

$$\left.\begin{aligned}
f(x,\, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x, & f_n(t) &= \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,\, t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi;\\
\varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{l} x, & \varphi_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi;\\
\psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{\pi n}{l} x, & \psi_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi.
\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Подставляя предполагаемую форму решения (48) в исходное уравнение (45)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n}{l} x \left\{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_n(t) - \ddot{u}_n(t) + f_n(t)\right\} = 0,$$

видим, что оно будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны нулю, т. е.

$$\ddot{u}_n(t) + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 u_n(t) = f_n(t). \tag{50}$$

Для определения $u_n(t)$ мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Начальные условия дают:

$$u(x,\, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)\sin\frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_t(x,\, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(0)\sin\frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

откуда следует:

$$\left.\begin{aligned} u_n(0) &= \varphi_n,\\ \dot{u}_n(0) &= \psi_n. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Эти дополнительные условия полностью определяют решение уравнения (50). Функцию $u_n(t)$ можно представить в виде

$$u_n(t) = u_n^{(\mathrm{I})}(t) + u_n^{(\mathrm{II})}(t),$$

где

$$u_n^{(\mathrm{I})}(t) = \frac{l}{\pi n a}\int_0^t \sin\frac{\pi n}{l} a(t-\tau)\cdot f_n(\tau)\, d\tau \tag{52}$$

есть решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями[1]) и

$$u_n^{(II)}(t) = \varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} at \qquad (53)$$

— решение однородного уравнения с заданными начальными условиями. Таким образом, искомое решение запишется в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \sin \frac{\pi n}{l} a (t-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot f_n(\tau)\, d\tau +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \qquad (54)$$

Вторая сумма представляет решение задачи о свободных колебаниях струны при заданных начальных условиях и была нами исследована ранее достаточно подробно. Обратимся к изучению первой суммы, представляющей вынужденные колебания струны под действием внешней силы при нулевых начальных условиях. Пользуясь выражением (49) для $f_n(t)$, находим:

$$u^{(I)}(x, t) =$$
$$= \int_0^t \int_0^l \left\{ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \sin \frac{\pi n}{l} a (t-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right\} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau =$$
$$= \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \qquad (55)$$

где

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{l} a (t-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi. \qquad (56)$$

Выясним физический смысл полученного решения. Пусть функция $f(\xi, \tau)$ отлична от нуля в достаточно малой окрестности точки $M_0(\xi_0, \tau_0)$:

$$\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0 + \Delta\xi, \qquad \tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0 + \Delta\tau.$$

Функция $\rho f(\xi, \tau)$ представляет плотность действующей силы; сила, приложенная к участку $(\xi_0, \xi_0 + \Delta\xi)$, равна

$$F(\tau) = \rho \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} f(\xi, \tau)\, d\xi,$$

[1]) В этом можно убедиться непосредственно. Формула (52) может быть получена методом вариации постоянных. См. также мелкий шрифт в конце настоящего пункта.